



UNIVERSIDAD DE VALLADOLID
FACULTAD DE CIENCIAS

**Soluciones analíticas de ecuaciones en derivadas
parciales no lineales de interés en Física**

TRABAJO FIN DE GRADO
GRADO EN FÍSICA

Autor: Álvaro Cía Mina

Tutores:

*Luis Miguel Nieto Calzada
Justo Javier López Sarrión*

Departamento de Física Teórica, Atómica y Óptica

Índice general

Resumen	3
1 Introducción	5
2 El problema de scattering	9
2.1 Espectro discreto ($\lambda < 0$)	10
2.2 Espectro continuo ($\lambda > 0$)	11
2.3 Potencial $-A \operatorname{sech}^2 x$ y las funciones asociadas de Legendre	15
3 El problema de scattering inverso	21
3.1 Descripción del problema	21
3.2 Solución de la ecuación de Gelfand-Levitan-Marchenko	25
3.3 Aplicación para coeficiente de reflexión nulo	27
4 Transformación de scattering inverso	31
4.1 Aplicación a la ecuación KdV	32
4.1.1 Evolución de los datos de scattering	34
4.1.2 Onda solitaria	38
4.1.3 Dos solitones	39
5 Transformaciones de Darboux	45
5.1 Par de Lax de la ecuación KdV	48
6 Conclusiones	53
Apéndices	
A Programas en Matlab	59
Bibliografía	63

Resumen

En este Trabajo Fin de Grado estudiamos dos métodos que se emplean en el ámbito de la Física Matemática para obtener soluciones analíticas de ecuaciones en derivadas parciales. En primer lugar abordamos la transformación de scattering inverso, la cual permite resolver problemas de valores iniciales para determinadas ecuaciones en derivadas parciales no lineales. Para ello, será necesario también un estudio del problema de scattering de la Mecánica Cuántica. En segundo lugar introducimos las transformaciones de Darboux, que establecen una jerarquía de ecuaciones en derivadas parciales a partir de una dada y proporcionan expresiones explícitas para sus soluciones. Para ilustrar estos métodos, los aplicaremos a la ecuación KdV, una de las ecuaciones más conocidas y estudiadas en la Física y analizaremos el comportamiento de algunos tipos de soluciones que presenta.

Abstract

In this Final Degree Project we study two methods used in the field of Mathematical Physics to analytically solve partial differential equations. First we focus on the inverse scattering transform which allows solving certain initial value problems for nonlinear partial differential equations. For this it will be necessary to introduce the scattering problem that arises in Quantum Mechanics. Secondly, we study Darboux transformations, which generate a hierarchy of partial differential equations from a given one and allow to solve the entire hierarchy giving explicit expressions of the solutions. We apply these methods to the well-known KdV equation and we study the behavior of some of its solutions.

Capítulo 1

Introducción

“¿Se puede escuchar la forma de un tambor?” Este es el título del artículo publicado por Mark Kac [10] en el año 1966 en el que se pregunta qué información se puede obtener sobre la forma de un tambor conociendo el sonido que produce. Esta curiosa pregunta resume perfectamente la filosofía de los métodos inversos en Física, que consisten en tratar de invertir un método conocido para poder recorrerlo en sentido opuesto. Veremos que, más que una simple curiosidad, algunos de estos métodos son fundamentales en el ámbito de la Física Matemática.

Para precisar un poco más esta cuestión, analicemos el problema tratado en el artículo de Kac. Supongamos que la membrana de un tambor tiene una forma plana cuando está en reposo, de tal manera que se puede representar en el plano XY mediante un dominio D . Los bordes de esta membrana se unen al bastidor del tambor, de forma que no pueden desplazarse. A continuación sometemos a la membrana a un movimiento transversal (perpendicular a su superficie), siempre manteniendo los bordes fijos. Llamaremos $u(x, y, t)$ al desplazamiento transversal de cada punto de la membrana respecto de su posición de equilibrio en el instante de tiempo t . Suponiendo desplazamientos pequeños de la membrana se puede demostrar que la ecuación diferencial y la condición frontera que gobierna las vibraciones de la membrana son

$$\begin{aligned} c^2 \Delta u(x, y, t) - \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} &= 0, & (x, y) \in D, t \geq 0, \\ u(x, y, t) &= 0, & (x, y) \in \partial D, t \geq 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

donde $c = T/\sigma$ es una constante que depende de T , la tensión de la membrana y de σ , la densidad superficial de masa de la membrana. Además, denotamos por Δ el operador de Laplace (o *Laplaciano*)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

y denotamos por ∂D la frontera del dominio D , de tal forma que la condición frontera de la ecuación (1.1) significa que los bordes de la membrana no vibran. Los detalles de la deducción se pueden consultar en el capítulo 10 del libro de W. Greiner [7].

El sistema de ecuaciones (1.1) presentará diferentes tipos de soluciones en función de la condición inicial que se establezca para la posición de los puntos de la membrana. Pero estas soluciones se pueden descomponer mediante el análisis de Fourier en suma de modos normales, los cuales son

soluciones armónicas de la forma

$$u(x, y, t) = u_0(x, y)e^{i\omega t}, \quad (1.2)$$

que representan los *tonos puros* que puede producir el tambor. En este tipo de soluciones, cada punto de la membrana realiza oscilaciones armónicas respecto a su posición de equilibrio con una amplitud dada por la función $u_0(x, y)$. Estos modos normales se caracterizan por poseer una única frecuencia temporal ω , que es la que nos proporciona el tono musical del instrumento.

Llevando este tipo de soluciones (1.2) al sistema (1.1) deducimos la ecuación diferencial y la condición frontera que debe verificar $u_0(x, y)$ para que existan soluciones armónicas:

$$\begin{aligned} c^2 \Delta u_0(x, y) + \omega^2 u_0(x, y) &= 0, & (x, y) \in D, \\ u_0(x, y) &= 0, & (x, y) \in \partial D. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Es decir, dada una forma de la membrana representada mediante el dominio D , para hallar los modos normales de vibración de la misma tenemos que encontrar las frecuencias ω y las funciones asociadas $u_0(x, y)$ que verifiquen las ecuaciones (1.3). Este problema se conoce con el nombre de *problema de autovalores* y habitualmente se formula de la siguiente manera: encontrar los *autovalores* $\lambda > 0$ y las *autofunciones* $\Psi(x, y)$ tales que se verifica la ecuación diferencial con condición frontera

$$\begin{aligned} c^2 \Delta \Psi(x, y) + \lambda \Psi(x, y) &= 0, & (x, y) \in D, \\ \Psi(x, y) &= 0, & (x, y) \in \partial D. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Ahora bien, de esta forma no estamos definiendo unívocamente las autofunciones, porque si $\Psi(x, y)$ cumple la ecuación (1.4) junto con la condición frontera, entonces para cualquier constante a , la función $a\Psi(x, y)$ también verifica la ecuación y la condición frontera. Por tanto, habitualmente se exige que estas autofunciones estén normalizadas, cumpliendo

$$\int \int_D (\Psi(x, y))^2 dx dy = 1. \quad (1.5)$$

En resumen, dada la forma del tambor, resolviendo el problema de autovalores (1.4) junto con la condición (1.5) obtenemos el conjunto de autovalores $\{\lambda_n : n = 1, 2, \dots\}$ (que llamaremos *espectro* del problema) que verifican la ecuación diferencial y las autofunciones normalizadas asociadas $\Psi_n(x, y)$. A partir de los autovalores podemos calcular las frecuencias de los modos normales del tambor como $\omega_n = +\sqrt{\lambda_n}$. Estas frecuencias son las que determinan los sonidos que emite.

La pregunta que se plantea Kac en su artículo es: si conocemos el espectro de autovalores $\{\lambda_n : n = 1, 2, \dots\}$, ¿podemos determinar cuál es la forma del tambor que lo produce? Es en cierta forma el problema inverso al anterior, bastante más complicado de resolver. Esta cuestión se mantuvo abierta hasta que en el año 1992 C. Gordon, D. L. Webb y S. Wolpert en su artículo “No se puede escuchar la forma de un tambor” [8] demostraron que existen superficies en el plano que producen el mismo espectro de frecuencias. Sin embargo, como ellos mismos mencionan en el artículo [9] publicado unos años después, este es un caso atípico. Si se exigen ciertas condiciones de regularidad y convexidad sobre el dominio, se puede determinar completamente la forma del tambor a partir de su espectro.

Esta curiosa historia sobre el artículo de Kac nos va a servir como punto de partida para desarrollar la teoría del scattering inverso. En el problema de scattering de la Mecánica Cuántica que presentamos en el capítulo 2, necesitamos resolver un problema de autovalores (en este caso trataremos el problema unidimensional) para obtener los autovalores y las autofunciones correspondientes. Físicamente estas autofunciones representan los estados propios del Hamiltoniano de una partícula sometida a un potencial, mientras que los autovalores dan cuenta de la energía de la partícula. En función del carácter atractivo o repulsivo del potencial estas autofunciones pueden representar estados ligados de la partícula o estados no ligados.

Por analogía con el problema del tambor, nos podemos preguntar si conociendo el espectro de energías de la partícula podemos conocer cuál es la forma del potencial al que está sometida. En este caso, como veremos en el capítulo 3, no será suficiente con conocer el espectro de energías, necesitaremos más datos. Observemos que, a diferencia del problema del tambor, en el que podemos imponer la condición de normalización (1.5) sobre las autofunciones porque están localizadas en una región del plano D , en el problema de scattering unidimensional permitimos que la partícula se mueva en todos los valores de x , de forma que no siempre podremos garantizar la elección de una autofunción normalizada. En esos casos caracterizaremos las autofunciones por su comportamiento asintótico, que sintetizaremos mediante los llamados coeficientes de reflexión y transmisión (más adelante veremos cuál es el significado físico de estos coeficientes). Únicamente podremos normalizar las autofunciones cuando correspondan a un estado ligado de la partícula, ya que la función de onda decaerá exponencialmente cuando $x \rightarrow \pm\infty$ y su integral a todos los valores de x será finita. En esos casos caracterizaremos las autofunciones por las llamadas *constantes asintóticas*, que junto con los autovalores y los coeficientes de reflexión y transmisión constituirán los llamados *datos de scattering*.

Tras un procedimiento bastante más complicado que el del método de scattering directo, conseguiremos demostrar que partiendo de los datos de scattering, podemos calcular cuál es la forma del potencial que los produce. Más que una mera curiosidad por invertir el método de scattering, este método inverso es de gran utilidad por su aplicación en la llamada *transformación de scattering inverso* que describiremos en el capítulo 4. Esta técnica se sirve de los problemas de scattering y scattering inverso para resolver de una forma muy astuta problemas de valores iniciales para ecuaciones en derivadas parciales. El método se basa en relacionar la ecuación en derivadas parciales con el problema de scattering de la Mecánica Cuántica, en el que la solución de la ecuación en derivadas parciales aparece como potencial dispersor.

Aplicaremos esta transformación a la ecuación Korteweg-de Vries, una conocida ecuación en derivadas parciales no lineal que fue históricamente la primera a la que se aplicó esta transformación en el artículo publicado por Gardner, Greene, Kruskal y Miura [6] y toma la forma

$$u_t(x, t) - 6u(x, t)u_x(x, t) + u_{xxx}(x, t) = 0. \quad (1.6)$$

Actualmente estamos trabajando en una posible generalización de esta transformación de scattering inverso a otro tipo de ecuaciones en el que el problema de scattering asociado no es el que presentamos en el capítulo 2. Esto permitiría su aplicación a la resolución de ecuaciones en derivadas parciales de orden mayor aunque el estudio del método es más complicado. Como ejemplo,

mencionaremos nuestro interés en la ecuación de Kaup-Kupershmidt de quinto orden

$$u_t(x, t) = u_{xxxxx}(x, t) + 5u(x, t)u_{xxx}(x, t) + \frac{25}{2}u_x(x, t)u_{xx}(x, t) + 5(u(x, t))^2 u_x(x, t). \quad (1.7)$$

Respecto a esta ecuación se pueden consultar las referencias [4], [19] y [20] en las que se exploran distintos métodos para obtener soluciones de la misma. También se puede consultar el artículo escrito por Kaup [11] en el que analiza la posible generalización del problema de scattering.

En el quinto capítulo del trabajo analizaremos las transformaciones de Darboux. Estas transformaciones parten del problema de scattering de la Mecánica Cuántica y lo transforman en otro problema de scattering análogo (con un potencial diferente) de forma que sus autofunciones se pueden calcular explícitamente a partir de las autofunciones del problema inicial. Introduciremos el llamado *par de Lax* de la ecuación KdV que nos permitirá expresar la ecuación en derivadas parciales mediante una ecuación de operadores en la que uno de ellos es el operador de la ecuación de Schrödinger

$$L = -\partial_x^2 + u(x, t),$$

que es el que aparece al tratar el problema de autovalores de scattering. De esta forma queda más clara la relación de este problema con la ecuación KdV.

Deduciremos un sistema de dos ecuaciones en derivadas parciales lineales equivalente a la ecuación KdV con la particularidad de que ambas serán *covariantes* respecto a las transformaciones de Darboux en un sentido que precisaremos. Esto hará que las transformaciones de Darboux de soluciones de la ecuación KdV también sean soluciones de la misma, lo cual es de gran utilidad para la obtención de nuevas soluciones partiendo de soluciones conocidas.

Por último incluiremos un capítulo con las conclusiones obtenidas tras la realización del trabajo e indicaremos los resultados fundamentales expuestos, así como posibles líneas de investigación que pueden dar continuidad a este trabajo.

Capítulo 2

El problema de scattering

El problema de scattering de la Mecánica Cuántica consiste en resolver la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo que representa la interacción de una partícula con un potencial determinado. Por sencillez consideramos el caso unidimensional, aunque se puede extender fácilmente a 3 dimensiones espaciales.

Matemáticamente este problema se expresa mediante la ecuación de Sturm-Liouville para el potencial real $u(x)$:

$$-\Psi_{xx}(x) + u(x)\Psi(x) = \lambda\Psi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Las autofunciones $\Psi(x)$ de esta ecuación representan los estados estacionarios de una partícula sometida al potencial unidimensional $u(x)$ con energía $E = \lambda$, que es precisamente el valor esperado del Hamiltoniano en dicho estado.

Siguiendo el capítulo III del libro de Ladau [13], de la forma del operador Hamiltoniano podemos extraer conclusiones sobre los autovalores de la ecuación:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + u(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + u(x),$$

donde \hat{p} hace referencia al operador momento lineal. Como los valores propios del operador de energía cinética $\hat{p}^2/2m$ son positivos (por ser este operador proporcional al cuadrado del operador momento lineal), también el valor medio de la energía cinética será positivo en cualquier estado.

Si ahora u_{min} es el inferior del potencial $u(x)$, como el valor medio de la energía en un estado arbitrario se calcula mediante la suma del valor medio de la energía cinética y potencial $\langle E \rangle = \langle T \rangle + \langle U \rangle$, es claro que se debe verificar la desigualdad $\langle E \rangle > u_{min}$. Como esto es cierto para cualquier estado, también lo cumplirán los valores propios de la energía:

$$E_n > u_{min}. \quad (2.2)$$

A partir de este punto supondremos que el potencial tiende a cero cuando $x \rightarrow \pm\infty$. En este caso se puede demostrar que el espectro de valores propios negativos de la energía es discreto (corresponden a los estados ligados), mientras que los valores propios positivos forman un espectro continuo.

Es importante destacar que no siempre va a existir un espectro discreto. En virtud de la propiedad (2.2) que acabamos de ver, en el caso de que el potencial $u(x) \geq 0$ no pueden existir valores propios de la energía negativos. Por tanto, en ese caso solo hay espectro continuo. Esto se puede interpretar físicamente como la no existencia de estados ligados de una partícula en un potencial repulsivo que se anula en el infinito. En este caso solo podemos estudiar las propiedades de reflexión y transmisión, a través de los respectivos coeficientes, de una onda por dicho potencial.

Para precisar un poco más las propiedades generales de las autofunciones dividiremos la exposición de este apartado en dos partes: la primera será la correspondiente al espectro discreto y la segunda corresponderá al espectro continuo.

2.1. Espectro discreto ($\lambda < 0$)

Tal y como hemos anticipado, si el potencial tiende a cero cuando $x \rightarrow \pm\infty$, el espectro discreto estará constituido por un número finito de autovalores negativos, que denotamos como $\lambda = -k_n^2$ con $k_n > 0$, para $n = 1, \dots, N$.

La primera propiedad que podemos inferir del decrecimiento del potencial en el infinito es el comportamiento asintótico de las autofunciones, ya que deberán satisfacer asintóticamente la ecuación diferencial $\Psi_{xx}(x) = -\lambda\Psi(x)$. En consecuencia, como las soluciones de esta ecuación son exponenciales reales, el comportamiento asintótico de las autofunciones deberá ser, para ciertas constantes α, β, γ y δ de la forma

$$\begin{aligned}\Psi_n(x) &\sim \alpha e^{k_n x} + \beta e^{-k_n x}, & x \rightarrow -\infty. \\ \Psi_n(x) &\sim \gamma e^{k_n x} + \delta e^{-k_n x}, & x \rightarrow +\infty.\end{aligned}$$

Pero no todas las autofunciones que cumplan esta condición son físicamente aceptables, porque deben estar acotadas cuando $x \rightarrow \pm\infty$. Este razonamiento nos indica que necesariamente debemos tener $\beta = \gamma = 0$, dado que se trata de exponenciales reales. Por tanto el comportamiento asintótico de las autofunciones del espectro discreto debe ser:

$$\begin{aligned}\Psi_n(x) &\sim \alpha e^{k_n x}, & x \rightarrow -\infty. \\ \Psi_n(x) &\sim \delta e^{-k_n x}, & x \rightarrow +\infty.\end{aligned}$$

Estas dos constantes no son independientes, ya que se determinan imponiendo la normalización de la autofunción. Es por ello que a efectos de scattering solo nos aporta información una de ellas, que habitualmente se suele llamar c_n :

$$\Psi_n(x) \sim c_n e^{-k_n x}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.3)$$

Estudiaremos ahora alguna propiedad más de las autofunciones del espectro discreto que podemos inferir sin precisar la forma del potencial. En primer lugar demostraremos la ortogonalidad de las autofunciones correspondientes a autovalores distintos.

Proposición 2.1. Si $\Psi_n(x)$, $\Psi_m(x)$ son autofunciones correspondientes a los valores k_n y k_m , respectivamente, con $n \neq m$, entonces son ortogonales, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n(x) \Psi_m(x) dx = 0.$$

Demostración. Las autofunciones cumplen la ecuación diferencial con sus respectivos autovalores (y el mismo potencial $u(x)$):

$$\begin{aligned} -\Psi_n''(x) + u(x)\Psi_n(x) &= -k_n^2\Psi_n(x), \\ -\Psi_m''(x) + u(x)\Psi_m(x) &= -k_m^2\Psi_m(x). \end{aligned}$$

Combinando ambas ecuaciones llegamos a la expresión

$$\Psi_m(x)\Psi_n''(x) - \Psi_n(x)\Psi_m''(x) = (k_n^2 - k_m^2)\Psi_n(x)\Psi_m(x).$$

Recordamos que el Wronskiano de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ se define como $W(f(x), g(x)) = f(x)g'(x) - g(x)f'(x)$ y su derivada toma la forma $\frac{d}{dx}W(f(x), g(x)) = f(x)g''(x) - g(x)f''(x)$. Entonces en el primer miembro de la ecuación anterior reconocemos la expresión de la derivada del Wronskiano de $\Psi_n(x)$ y $\Psi_m(x)$:

$$\frac{d}{dx}W(\Psi_n(x), \Psi_m(x)) = (k_n^2 - k_m^2)\Psi_n(x)\Psi_m(x)$$

Si ahora integramos a todos los valores de x y aplicamos que las autofunciones del espectro discreto tienden a cero cuando $x \rightarrow \pm\infty$ llegamos a que

$$0 = [W(\Psi_n(x), \Psi_m(x))]_{-\infty}^{\infty} = (k_n^2 - k_m^2) \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n(x)\Psi_m(x)dx$$

Como los autovalores son diferentes, el término $(k_n^2 - k_m^2)$ es distinto de cero y demostramos que las autofunciones son ortogonales. \square

De la idea de la demostración de este resultado también se puede deducir una consecuencia aplicable no solo a las autofunciones del espectro discreto, sino a todas las autofunciones, que es el siguiente:

Proposición 2.2. Si $\psi(x)$, $\phi(x)$ son dos autofunciones con el mismo autovalor λ , entonces

$$\frac{d}{dx}W(\psi(x), \phi(x)) = 0.$$

Este es un resultado que usaremos posteriormente.

2.2. Espectro continuo ($\lambda > 0$)

De la misma forma que hicimos para el espectro discreto, para simplificar la notación introduciremos el parámetro k de tal forma que el autovalor se expresa ahora como $\lambda = k^2 > 0$, siendo $k > 0$.

Las propiedades asintóticas que deben cumplir las autofunciones correspondientes serán en este caso:

$$\begin{aligned} \Psi(x) &\sim \alpha e^{ikx} + \beta e^{-ikx}, & x \rightarrow -\infty. \\ \Psi(x) &\sim \gamma e^{ikx} + \delta e^{-ikx}, & x \rightarrow +\infty. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Esto es, se comportan como la suma de ondas planas, una propagándose en sentido positivo de x y la otra en sentido negativo. Como se trata de un problema de scattering, consideraremos que una

onda incide sobre la zona en la que existe el potencial dispersor y al llegar a la misma, una parte se refleja y otra se transmite. Entonces, si consideramos que la onda incide desplazándose en sentido de x decreciente, el coeficiente α debe ser 0.

Habitualmente se considera fijado otro de los coeficientes, tomando el valor $\delta = 1$. En este caso el comportamiento asintótico solo dependerá de dos coeficientes para cada potencial concreto, que serán el coeficiente de transmisión $a(k)$ y el coeficiente de reflexión $b(k)$:

$$\begin{aligned} \Psi(x) &\sim a(k)e^{-ikx}, & x \rightarrow -\infty. \\ \Psi(x) &\sim e^{-ikx} + b(k)e^{ikx}, & x \rightarrow +\infty. \end{aligned} \tag{2.5}$$

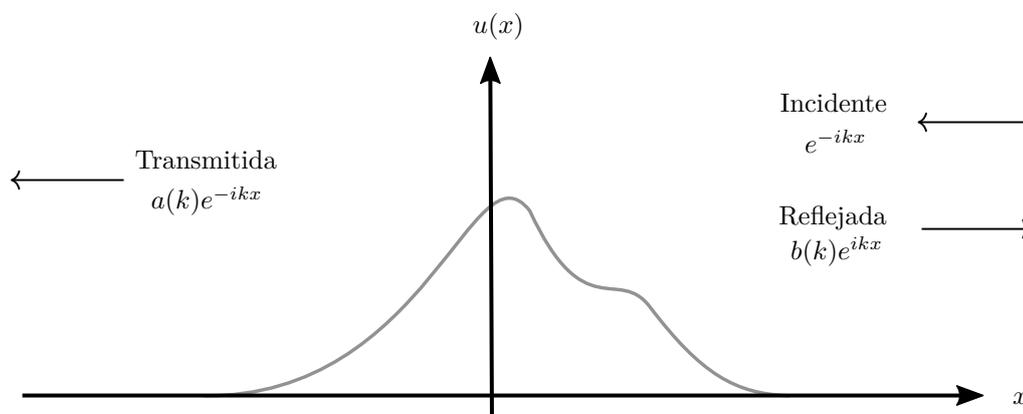


IMAGEN 2.1: Comportamiento asintótico para las autofunciones del espectro continuo.

A partir de ahora llamaremos *datos de scattering* al conjunto de valores $\{\lambda_n = -k_n^2, c_n\}$ del espectro discreto (2.3) y $\{a(k), b(k)\}$ del espectro continuo (2.5).

Otra opción posible es elegir el comportamiento asintótico “normalizado” en la forma $e^{\pm ikx}$ en uno de los límites, o bien $x \rightarrow \infty$ o bien $x \rightarrow -\infty$. De esta forma se definen los estados de *Jost* $\Psi_{\pm}(x)$, que son autofunciones con comportamiento asintótico

$$\begin{aligned} \Psi_{-}(x) &\sim e^{-ikx}, & x \rightarrow -\infty. \\ \Psi_{+}(x) &\sim e^{ikx}, & x \rightarrow +\infty. \end{aligned} \tag{2.6}$$

La relación de estos estados con los que utilizamos para definir los coeficientes de transmisión se traduce en que las condiciones (2.5) se pueden expresar como

$$\begin{aligned} \Psi(x) &\sim a(k)\Psi_{-}(x), & x \rightarrow -\infty. \\ \Psi(x) &\sim \Psi_{+}^{*}(x) + b(k)\Psi_{+}(x), & x \rightarrow +\infty. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Como hemos visto anteriormente, el Wronskiano de dos autofunciones con el mismo autovalor es constante (no depende de x). Si aplicamos este resultado a las funciones $\Psi(x)$ y $\Psi^{*}(x)$ del

espectro continuo y calculamos el Wronskiano teniendo en cuenta las condiciones asintóticas de las autofunciones en ∞ y en $-\infty$ obtenemos que

$$W(\Psi(x), \Psi^*(x)) = 2ika(k)a^*(k) = 2ik(1 - b(k)b^*(k)).$$

Y, por tanto, la relación entre los coeficientes de transmisión y reflexión es:

$$|a(k)|^2 + |b(k)|^2 = 1,$$

que nos indica la conservación de la energía entre la onda incidente y las ondas reflejada y transmitida.

En este punto podemos extraer algo más de información relevante haciendo uso de los estados de Jost que definimos previamente. Recordamos que el objetivo del problema de scattering es encontrar una autofunción del problema de Sturm Liouville que satisfaga las condiciones asintóticas que podemos expresar de la forma (2.7). Ahora bien, como los estados de Jost $\Psi_{\pm}(x)$ son autofunciones, también lo serán $\Psi_{\pm}^*(x)$, dado que el potencial $u(x)$ y los autovalores λ son reales. Esto implica que tanto $a(k)\Psi_{-}(x)$ como $\Psi_{+}^*(x) + b(k)\Psi_{+}(x)$ también serán autofunciones, las cuales satisfacen las condiciones asintóticas en $-\infty$ y en $+\infty$, respectivamente.

Para tener una solución en todo \mathbb{R} los coeficientes $a(k)$ y $b(k)$ deberán estar ajustados para que estas dos funciones sean la misma, es decir:

$$a(k)\Psi_{-}(x; k) = \Psi_{+}^*(x; k) + b(k)\Psi_{+}(x; k). \quad (2.8)$$

Aquí hemos expresado explícitamente la dependencia paramétrica de la autofunción con k para no olvidar que los estados de Jost son autofunciones con autovalor $\lambda = k^2$. Cuando no haya riesgo de confusión solo indicaremos la dependencia en x por simplicidad de notación.

Para estudiar el comportamiento asintótico de esta ecuación, supongamos que la autofunción Ψ_{+} se comporta asintóticamente en $-\infty$ como

$$\Psi_{+}(x; k) \sim f_1(k)e^{ikx} + f_2(k)e^{-ikx}, \quad x \rightarrow -\infty. \quad (2.9)$$

Este comportamiento asintótico es debido a que como el potencial tiende a cero cuando $x \rightarrow \pm\infty$, las autofunciones deberán ser combinación de $e^{\pm ikx}$, para cada k fijo. Aquí $f_1(k)$ y $f_2(k)$ son funciones que están completamente determinadas, ya que vienen dadas por la forma del estado $\Psi_{+}(x; k)$.

Entonces, si estudiamos el comportamiento de la ecuación (2.8) cuando $x \rightarrow -\infty$, debe verificarse la igualdad siguiente:

$$a(k)e^{-ikx} = (f_1^*(k) + b(k)f_2(k))e^{-ikx} + (f_2^*(k) + b(k)f_1(k))e^{ikx},$$

lo que nos lleva al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} f_1^*(k) + b(k)f_2(k) & = a(k) \\ f_2^*(k) + f_1(k)b(k) & = 0. \end{cases}$$

Este sistema determina unívocamente $a(k)$ y $b(k)$. En concreto

$$b(k) = -\frac{f_2^*(k)}{f_1(k)}, \quad a(k) = \frac{|f_1(k)|^2 - |f_2(k)|^2}{f_1(k)}. \quad (2.10)$$

Ahora bien, aunque hemos tratado este argumento suponiendo que k es real, es decir, que $\lambda = k^2$ pertenece al espectro continuo, las ecuaciones que hemos deducido para los coeficientes de reflexión y transmisión también son válidas si k es imaginario puro, es decir, si λ pertenece al espectro discreto. Por tanto, por continuación analítica podemos definir los coeficientes $a(k)$ y $b(k)$ en todo el plano complejo $k \in \mathbb{C}$.

Además, hay que tener en cuenta que los autovalores de la ecuación de Sturm Liouville se corresponden con la energía, que debe ser real. Por tanto, al hacer $\lambda = k^2$, los valores de k que pueden corresponder a autovalores del sistema son o bien reales o bien imaginarios puros.

Tras estas consideraciones podemos observar que tanto $a(k)$ como $b(k)$ presentan singularidades cuando k^2 es un autovalor del espectro discreto. En efecto, para los estados ligados solo podemos encontrar una función acotada (que debe estar localizada). Entonces debe suceder que $\Psi_+(x)$ y $\Psi_-(x)$ sean proporcionales entre sí y deben decaer exponencialmente cuando $x \rightarrow \pm\infty$. Ahora bien, como k debe ser de la forma $i\kappa$, con $\kappa \in \mathbb{R}$ al corresponder al espectro discreto, el comportamiento asintótico de $\Psi_+(x)$ cuando $x \rightarrow \infty$ será, según la ecuación (2.9)

$$\Psi_+(x) \sim f_1(k)e^{-\kappa x} + f_2(k)e^{\kappa x}, \quad x \rightarrow -\infty,$$

por lo que debe ser $f_1(k) = 0$. Pero como $\Psi_+(x)$ es proporcional a $\Psi_-(x)$, el coeficiente $f_2(k)$ debe ser distinto de 0. Esto implica que el coeficiente de reflexión $b(k)$ es singular, según la ecuación (2.10). También se ve de la misma ecuación que $a(k)$ es singular.

Este argumento se puede completar matemáticamente utilizando la teoría general de scattering y lleva al resultado de que los estados ligados se corresponden con polos simples en el semiplano superior de los coeficientes de reflexión y transmisión. Más adelante usaremos este argumento en un ejemplo para calcular el número de autovalores que posee el espectro discreto de un potencial concreto.

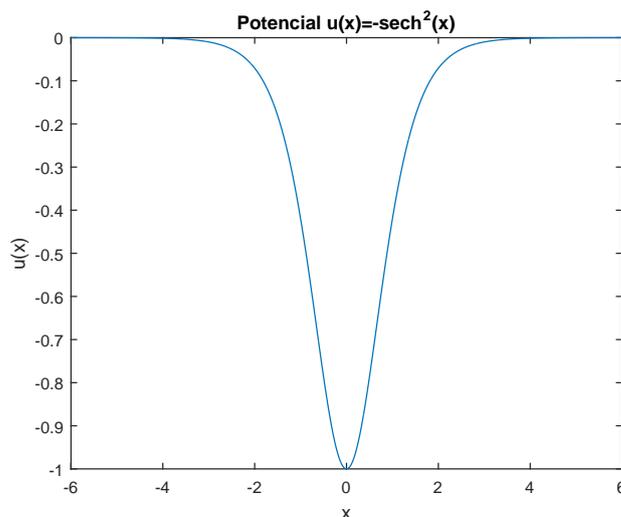
Llegados a este punto, si queremos precisar más propiedades de las autofunciones, de los valores propios o de los parámetros de scattering tendremos que estudiar estas cuestiones para cada potencial concreto. En términos generales no se pueden establecer muchos más resultados que sean válidos para cualquier potencial.

2.3. Potencial $-A \operatorname{sech}^2 x$ y las funciones asociadas de Legendre

Para entender cómo se aplica este método de scattering a un caso particular estudiaremos un potencial determinado, con la forma

$$u(x) = -A \operatorname{sech}^2 x \quad (2.11)$$

Una representación gráfica del mismo puede verse en la gráfica 2.1.



GRÁFICA 2.1: Representación del potencial (2.11) para $A = 1$.

La elección de este potencial no es casual. Aunque quedará más patente en el Capítulo 4, cuando estudiemos la transformación de scattering inverso para una ecuación en derivadas parciales, debemos resolver en primer lugar el problema clásico de scattering tomando como potencial el perfil inicial de la solución.

Debido a que trataremos el ejemplo de aplicación del método a la ecuación KdV y sabiendo que las soluciones solitónicas de esta ecuación están definidas por la secante hiperbólica al cuadrado, estudiaremos el problema de scattering para este potencial.

La ecuación de Sturm- Liouville que tenemos que resolver es la siguiente:

$$\Psi''(x) + (\lambda + A \operatorname{sech}^2 x)\Psi(x) = 0. \quad (2.12)$$

Para llevar la ecuación diferencial a una forma conocida hacemos un cambio de variable $\xi = \tanh x$. Se trata de un cambio biyectivo, cuando x varía en $(-\infty, \infty)$, ξ varía en $(-1, 1)$.

Aplicando la regla de la cadena tenemos que

$$\frac{d}{dx} = \operatorname{sech}^2 x \frac{d}{d\xi} = (1 - \xi^2) \frac{d}{d\xi}.$$

Y para la derivada segunda podemos calcular su expresión explícita aunque en general nos bastará con aplicar dos veces el operador anterior sin desarrollarlo:

$$\frac{d^2}{dx^2} = (1 - \xi^2) \frac{d}{d\xi} \left[(1 - \xi^2) \frac{d}{d\xi} \right].$$

Transformando la ecuación (2.12) obtenemos la relación:

$$\frac{d}{d\xi} \left[(1 - \xi^2) \frac{d\Psi}{d\xi} \right] + \left[A + \frac{\lambda}{1 - \xi^2} \right] \Psi = 0.$$

La forma de esta ecuación diferencial de segundo orden se asemeja a la *ecuación asociada de Legendre*. Para ver de forma más clara la relación con esta ecuación efectuamos un segundo cambio de variable $\theta = \arccos \xi$. Se trata de un cambio biyectivo cuando θ se restringe al intervalo $(0, \pi)$. El operador de derivación respecto de ξ ahora se expresa como

$$\frac{d}{d\xi} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta}.$$

Tras este cambio de variable llegamos finalmente a la ecuación diferencial que debe satisfacer Ψ :

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{d\Psi}{d\theta} \right] + \left[A + \frac{\lambda}{\sin^2 \theta} \right] \Psi = 0.$$

Recordamos que la ecuación asociada de Legendre para n, m naturales es

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{df}{d\theta} \right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] f = 0.$$

Las soluciones de esta ecuación son las *funciones asociadas de Legendre* $P_n^m(\cos \theta)$, que tienen una forma conocida y se pueden expresar como

$$P_n^m(\cos \theta) = (-1)^m \frac{(n+m)!}{(n-m)! 2^n n!} (\sin \theta)^{-m} \frac{d^{n-m}}{d(\cos \theta)^{n-m}} (\cos^2 \theta - 1)^n, \quad m = 0, 1, \dots, n.$$

Y también se puede dar una fórmula alternativa en función de los polinomios de Legendre $P_n(\cos \theta)$:

$$P_n^m(\cos \theta) = (\sin \theta)^m \frac{d^m}{d(\cos \theta)^m} P_n(\cos \theta).$$

Es decir, en el caso en el que el parámetro A , que recordemos que indicaba la profundidad del pozo de potencial, sea el producto de dos naturales consecutivos $A = n(n+1)$ y el autovalor λ sea de la forma $\lambda = -m^2$, la autofunción Ψ es proporcional a la función asociada de Legendre P_n^m (lógicamente tiene que ser $m \leq n$ por la condición de que el valor propio de la energía debe ser mayor que el mínimo del potencial). La constante de proporcionalidad se elige para que las autofunciones de los estados ligados estén normalizadas.

Ejemplo 2.1. Pongamos como ejemplo el caso en el que $n = 2$. Como el polinomio de Legendre es $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, podemos calcular las funciones asociadas de Legendre, que toman las expresiones

$$\begin{aligned} P_2^0(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1). \\ P_2^1(x) &= 3x(1 - x^2)^{1/2}. \\ P_2^2(x) &= 3(1 - x^2). \end{aligned}$$

Entonces tendremos dos autofunciones correspondientes a los estados ligados (con autovalores estrictamente negativos $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -4$) que serán proporcionales a

$$\Psi_1(x) \propto P_2^1(\tanh x) = 3 \tanh x \operatorname{sech} x, \quad \lambda_1 = -1^2 = -1.$$

$$\Psi_2(x) \propto P_2^2(\tanh x) = 3 \operatorname{sech}^2 x, \quad \lambda_2 = -2^2 = -4.$$

Para hallar las constantes de proporcionalidad tenemos que normalizar las autofunciones.

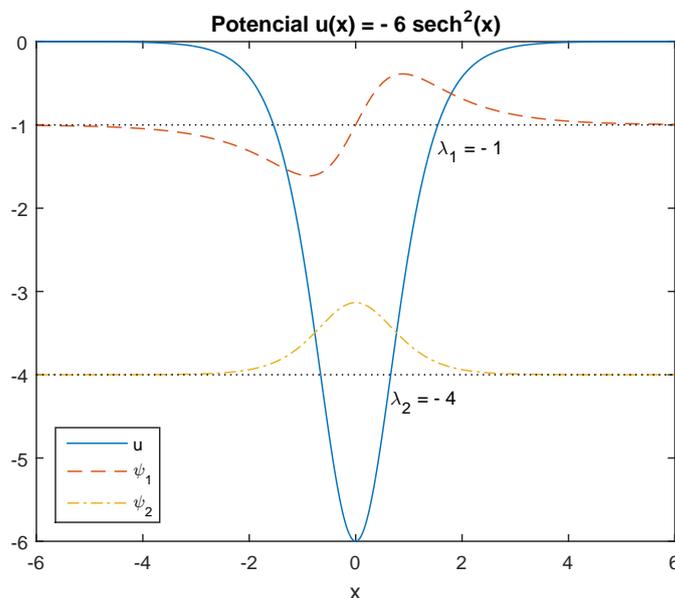
$$\int_{-\infty}^{\infty} \tanh^2 x \operatorname{sech}^2 x dx = \left[\frac{1}{3} \tanh^3 x \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{2}{3}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4 x dx = \left[\tanh x - \frac{1}{3} \tanh^3 x \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{4}{3}.$$

Por tanto, las autofunciones normalizadas serán las siguientes

$$\begin{aligned} \Psi_1(x) &= \sqrt{\frac{3}{2}} \tanh x \operatorname{sech} x, \quad \lambda_1 = -1. \\ \Psi_2(x) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sech}^2 x, \quad \lambda_2 = -4. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Para ilustrar este ejemplo, incluimos una representación gráfica del potencial y de las autofunciones estudiadas. El programa utilizado para hacer la representación de la Gráfica 2.2 se puede encontrar en el Apéndice A (Programa 1). Observamos que la autofunción $\Psi_1(x)$ correspondiente al estado fundamental no tiene nodos, mientras que la correspondiente al primer estado excitado $\Psi_2(x)$ tiene un nodo.



GRÁFICA 2.2: Representación del potencial (2.11) y las autofunciones (2.13) para $A = 6$.

Ejemplo 2.2. Análogamente se puede estudiar el caso en el que $n = 3$. Tendremos tres autofunciones correspondientes a los estados ligados (con autovalores estrictamente negativos $\lambda_1^2 = -1$, $\lambda_2 = -2^2$ y $\lambda_3 = -3^2$) que serán proporcionales a

$$\Psi_1(x) \propto P_3^1(\tanh x) = \frac{3}{2}(5 \tanh^2 x - 1) \operatorname{sech} x, \quad \lambda_1 = -1^2 = -1.$$

$$\Psi_2(x) \propto P_3^2(\tanh x) = 15 \tanh x \operatorname{sech}^2 x, \quad \lambda_2 = -2^2 = -4.$$

$$\Psi_3(x) \propto P_3^3(\tanh x) = 15 \operatorname{sech}^3 x, \quad \lambda_3 = -3^2 = -9.$$

Para hallar las constantes de proporcionalidad tenemos que normalizar las autofunciones, calculando las integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} (5 \tanh^2 x - 1)^2 \operatorname{sech}^2 x \, dx = \frac{16}{3}.$$

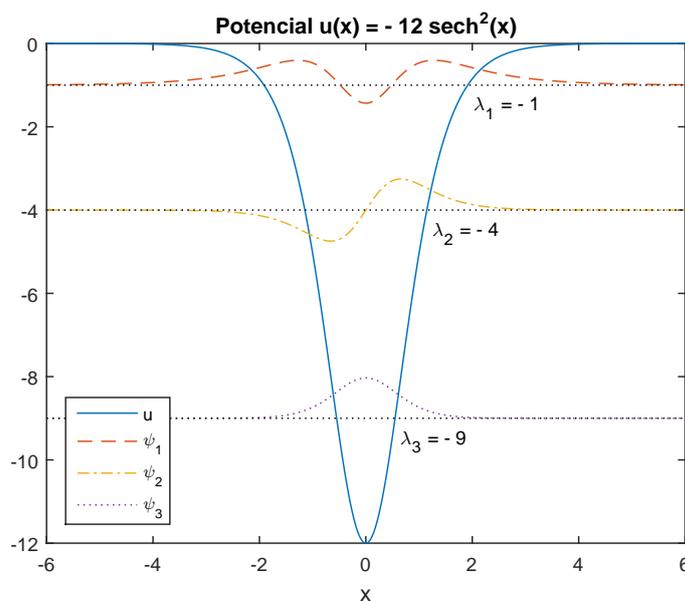
$$\int_{-\infty}^{\infty} \tanh^2 x \operatorname{sech}^4 x \, dx = \frac{4}{15}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^6 x \, dx = \frac{16}{15}.$$

Por tanto, las autofunciones normalizadas serán las siguientes:

$$\begin{aligned} \Psi_1(x) &= \frac{\sqrt{3}}{4}(5 \tanh^2 x - 1) \operatorname{sech} x. \\ \Psi_2(x) &= \frac{\sqrt{15}}{2} \tanh x \operatorname{sech}^2 x. \\ \Psi_3(x) &= \frac{\sqrt{15}}{4} \operatorname{sech}^3 x. \end{aligned} \tag{2.14}$$

La representación del potencial y las autofunciones se incluye en la Gráfica 2.3, la cual ha sido elaborada mediante el Programa 2 del Apéndice:



GRÁFICA 2.3: Representación del potencial (2.11) y las autofunciones (2.14) para $A = 12$.

En el caso en el que la profundidad del pozo no sea de la forma $A = n(n+1)$ con n natural, se puede dar una solución a través de la llamada función hipergeométrica. Si ahora la ecuación diferencial es de la forma

$$\frac{d}{d\xi} \left[(1 - \xi^2) \frac{d\Psi}{d\xi} \right] + \left[\nu(\nu + 1) - \frac{\mu^2}{1 - \xi^2} \right] \Psi = 0, \quad (2.15)$$

donde permitimos que $\nu, \mu \in \mathbb{R}$ y $\xi \in (-1, 1)$, las soluciones vienen dadas por las funciones asociadas de Legendre (o funciones de Ferrers) $P_\nu^\mu(\xi)$ (ver el capítulo 8 de [2]):

$$P_\nu^\mu(\xi) = \frac{1}{\Gamma(1 - \mu)} \left(\frac{\xi + 1}{\xi - 1} \right)^{\frac{\mu}{2}} {}_2F_1 \left(-\nu, \nu + 1; 1 - \mu; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\xi \right), \quad (2.16)$$

donde ${}_2F_1(a, b; c; z)$ es la función hipergeométrica, que se define a través de la serie de Gauss

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; z) &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_s (b)_s}{(c)_s s!} z^s = 1 + \frac{ab}{c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)2!} z^2 + \dots \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)}{\Gamma(c+s)s!} z^s, \quad |z| < 1. \end{aligned}$$

Estas funciones asociadas de Legendre definidas en (2.16) también son válidas cuando $\mu \in \mathbb{C}$. Es decir, son soluciones de la ecuación (2.15) para un caso más general, permitiendo valores complejos del parámetro μ . Esto nos proporciona una solución del problema de scattering para los autovalores positivos, que forman parte del espectro continuo.

Si $\lambda = k^2$, entonces la autofunción debe ser proporcional a la función asociada de Legendre correspondiente a $A = \nu(\nu + 1)$ y $\lambda = -\mu^2$. Para que cumpla las condiciones asintóticas cuando $x \rightarrow -\infty$, es decir, que (2.16) se comporte como $a(k)e^{-ikx}$, se deduce que debe tomar la forma

$$\Psi(x; k) = a(k) 2^{ik} (\operatorname{sech} x)^{-ik} {}_2F_1 \left(\tilde{a}, \tilde{b}; \tilde{c}; \frac{1}{2}(1 + \tanh x) \right), \quad (2.17)$$

donde $a(k)$ es el coeficiente de transmisión, que está por determinar, y los coeficientes de la función hipergeométrica son:

$$\tilde{a} = \frac{1}{2} - ik + \sqrt{\frac{1}{4} + A}, \quad (2.18)$$

$$\tilde{b} = \frac{1}{2} - ik - \sqrt{\frac{1}{4} + A}, \quad (2.19)$$

$$\tilde{c} = 1 - ik. \quad (2.20)$$

Los detalles sobre las propiedades y el comportamiento asintótico de las funciones hipergeométricas se pueden consultar en [18], a partir de la página 541. Haciendo el límite de la autofunción (2.17) cuando $x \rightarrow \infty$ se obtiene el comportamiento asintótico:

$$\Psi(x; k) \sim \frac{a(k)\Gamma(\tilde{c})\Gamma(\tilde{a} + \tilde{b} - \tilde{c})}{\Gamma(\tilde{a})\Gamma(\tilde{b})} e^{-ikx} + \frac{a(k)\Gamma(\tilde{c})\Gamma(\tilde{c} - \tilde{a} - \tilde{b})}{\Gamma(\tilde{c} - \tilde{a})\Gamma(\tilde{c} - \tilde{b})} e^{ikx}, \quad x \rightarrow \infty.$$

De acuerdo a (2.5), el primero de estos coeficientes debe ser la unidad y el segundo debe coincidir con el coeficiente de reflexión $b(k)$. Entonces llegamos a que los coeficientes de scattering del problema son:

$$a(k) = \frac{\Gamma(\tilde{a})\Gamma(\tilde{b})}{\Gamma(\tilde{c})\Gamma(\tilde{a} + \tilde{b} - \tilde{c})}, \quad (2.21)$$

$$b(k) = \frac{a(k)\Gamma(\tilde{c})\Gamma(\tilde{c} - \tilde{a} - \tilde{b})}{\Gamma(\tilde{c} - \tilde{a})\Gamma(\tilde{c} - \tilde{b})}. \quad (2.22)$$

Podemos usar una conocida propiedad de la función $\Gamma(z)$ para sacar conclusiones sobre la forma del coeficiente $b(k)$. Dado que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + z\right) = \frac{\pi}{\cos(\pi z)},$$

entonces

$$\Gamma(\tilde{c} - \tilde{a})\Gamma(\tilde{c} - \tilde{b}) = \Gamma\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + A}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + A}\right) = \frac{\pi}{\cos\left(\pi\sqrt{\frac{1}{4} + A}\right)}.$$

Como este factor aparece en el denominador del coeficiente de reflexión (2.22), cuando el coseno valga 0, entonces $b(k) = 0$ para todo k . Esto significa que no hay onda reflejada por el potencial, toda la onda se transmite. Para que se cumpla dicha condición, debe ser $A = n(n+1)$ para n natural.

Otra conclusión que podemos extraer de las forma explícita de los coeficientes de reflexión y transmisión es el número de autovalores que posee el espectro discreto, como hemos comentado anteriormente. Nos basta con estudiar los polos en el semiplano superior de los coeficientes de reflexión y transmisión (2.21) y (2.22), los cuales tienen lugar cuando $\Gamma(\tilde{a})$ o $\Gamma(\tilde{b})$ están indefinidas. Esto solo puede ocurrir cuando $\tilde{b} = -m$, para m natural, es decir, por la definición de \tilde{b} , (2.19), cuando

$$k = i \left[\sqrt{\frac{1}{4} + A} - m - \frac{1}{2} \right].$$

Por tanto, habrá tantos autovalores como valores de m posibles tales que el corchete de la expresión anterior sea positiva. Por tanto el número de autovalores del espectro discreto del problema será el cardinal del conjunto siguiente:

$$\left\{ m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : m < \sqrt{\frac{1}{4} + A} - \frac{1}{2} \right\},$$

donde el autovalor correspondiente a cada m se calcula como $\lambda = -k_m^2$, siendo

$$k_m = \sqrt{\frac{1}{4} + A} - m - \frac{1}{2}.$$

Tras estas consideraciones queda claro, como ya habíamos adelantado anteriormente, que para que exista espectro discreto necesariamente debe ser $A \geq 0$.

Capítulo 3

El problema de scattering inverso

3.1. Descripción del problema

Acabamos de ver que el método de scattering nos permite calcular los datos de scattering del espectro continuo y del espectro discreto resolviendo el problema de autovalores para un potencial dado $u(x)$. Lo hemos indicado con detalle en una dimensión espacial, pero podría extenderse a tres dimensiones.

De alguna forma, el problema de *scattering inverso* pretende invertir este procedimiento (no confundir el *problema* de scattering inverso que es el que vamos a abordar ahora con el método o la *transformación* de scattering inverso, que es el que nos permite aplicar estos resultados para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales, que estudiaremos más adelante). Se basa en la siguiente pregunta: conocidos los datos de scattering, ¿podemos saber cuál es el potencial dispersor que los produce?

Vamos a abordar esta cuestión. Consideramos la ecuación de Sturm-Liouville para los autovalores positivos $\lambda = k^2$, con $k > 0$:

$$\Psi_{xx}(x) + (k^2 - u(x))\Psi(x) = 0. \quad (3.1)$$

Observamos ahora que este problema tiene cierta relación con el problema que tenemos que resolver cuando aplicamos la transformada de Fourier a la ecuación de ondas para $\phi(x, z)$

$$\phi_{xx}(x, z) - \phi_{zz}(x, z) = 0, \quad (3.2)$$

en el que transformamos la ecuación en otra que debe satisfacer $\xi(x; k)$, la transformada de Fourier de $\phi(x, z)$ respecto de z :

$$\xi_{xx}(x; k) + k^2\xi(x; k) = 0, \quad (3.3)$$

siendo

$$\begin{aligned} \xi(x; k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} \phi(x, z) dz, \\ \phi(x, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} \xi(x; k) dk. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que estamos interesados en encontrar una solución $\xi(x; k)$ de la ecuación (3.3) que se comporte asintóticamente como e^{ikx} cuando $x \rightarrow \infty$. Como la transformada de Fourier de una exponencial compleja es una delta de Dirac, podemos tomar

$$\phi(x, z) = \delta(x - z) + K(x, z), \quad (3.4)$$

donde $K(x, z)$ es una solución de (3.2) con

$$K(x, z) = 0, \quad \text{si } z < x. \quad (3.5)$$

Veamos que, en efecto, esta elección de la función $\phi(x, z)$, que es solución de (3.2), nos proporciona el comportamiento asintótico buscado. La transformada de Fourier de la expresión (3.4) es

$$\xi(x; k) = e^{ikx} + \int_{-\infty}^{\infty} K(x, z)e^{ikz} dz = e^{ikx} + \int_x^{\infty} K(x, z)e^{ikz} dz,$$

que tiene el comportamiento asintótico buscado e^{ikx} cuando $x \rightarrow \infty$, dado que la integral tiende a cero. Observamos que para ello hemos necesitado la condición (3.5) que nos ha permitido cambiar el límite inferior de integración.

Volviendo al problema original del scattering inverso, por analogía de (3.1) con la ecuación de ondas en el espacio de Fourier (3.3) y recordando que las autofunciones con comportamiento asintótico $e^{\pm ikx}$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$ son los llamados estados de Jost (2.6), podemos tomar

$$\Psi_+(x; k) = e^{ikx} + \int_x^{\infty} K(x, z)e^{ikz} dz \quad (3.6)$$

donde el subíndice + indica que la solución se comporta como e^{ikx} cuando $x \rightarrow +\infty$. La función $K(x, z)$ de momento es desconocida, solo hemos impuesto que cumpla la condición (3.5), pero para determinar su expresión nos bastará con pedir que la función $\Psi_+(x; k)$ así definida cumpla la ecuación de Sturm-Liouville (3.1).

La primera y segunda derivada de esta función se calculan de forma inmediata utilizando el teorema fundamental del cálculo:

$$(\Psi_+(x; k))_x = ik e^{ikx} - K(x, x) e^{ikx} + \int_x^{\infty} K_x(x, z) e^{ikz} dz, \quad (3.7)$$

$$(\Psi_+(x; k))_{xx} = e^{ikx} (-k^2 - 2K_x(x, x) - K_z(x, x) - ikK(x, x)) + \int_x^{\infty} K_{xx}(x, z) e^{ikz} dz. \quad (3.8)$$

En estas expresiones, el subíndice en la función $K(x, z)$ indica con respecto a qué variable efectuamos la derivación. Por ejemplo, $K_z(x, x)$ indica que en primer lugar efectuamos la derivada parcial $\partial_z K(x, z)$ y posteriormente evaluamos la función resultante en (x, x) .

Para simplificar los cálculos, podemos expresar la función $\Psi_+(x; k)$ de otra forma, si integramos

por partes dos veces la expresión original, obteniendo

$$\begin{aligned}
\Psi_+(x; k) &= e^{ikx} + \int_x^\infty K(x, z)e^{ikz} dz \\
&= e^{ikx} + \left[\frac{K(x, z)e^{ikz}}{ik} \right]_{z=x}^\infty - \int_x^\infty K_z(x, z) \frac{e^{ikz}}{ik} dz \\
&= e^{ikx} \left(1 - \frac{K(x, x)}{ik} \right) + \left[\frac{K_z(x, z)e^{ikz}}{k^2} \right]_{z=x}^\infty - \int_x^\infty K_{zz}(x, z) \frac{e^{ikz}}{k^2} dz \\
&= e^{ikx} \left(1 + \frac{iK(x, x)}{k} - \frac{K_z(x, x)}{k^2} \right) - \frac{1}{k^2} \int_x^\infty K_{zz}(x, z)e^{ikz} dz,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

para lo que hemos supuesto que para x fijo, tanto $K(x, z)$ como $K_z(x, z)$ tienden a cero cuando $z \rightarrow \infty$. La razón de integrar dos veces por partes es la siguiente: nuestro objetivo es imponer que la función de $\Psi_+(x; k)$ definida en (3.6) cumpla la ecuación (3.1) para poder determinar la forma de la función $K(x, z)$. Para ello, tendremos que efectuar el producto $k^2\Psi_+(x; k)$ y como tras cada integración por partes nos aparece un factor $1/k$, integramos dos veces para poder simplificar el factor k^2 .

Con estas expresiones, la ecuación de Sturm-Liouville (3.1) para $\Psi_+(x; k)$ toma la forma siguiente al usar (3.6), (3.8) y (3.9) para el producto $k^2\Psi_+(x; k)$

$$\begin{aligned}
0 &= -e^{ikx} (u(x) + 2K_x(x, x) + 2K_z(x, x)) + \\
&\quad + \int_x^\infty (K_{xx}(x, z) - K_{zz}(x, z) - u(x)K(x, z))e^{ikz} dz,
\end{aligned}$$

lo cual se satisface si los dos términos entre paréntesis son nulos. En resumen, las condiciones suficientes que debe verificar la función $K(x, z)$ son:

$$0 = K_{xx}(x, z) - K_{zz}(x, z) - u(x)K(x, z), \tag{3.10}$$

$$u(x) = -2K_x(x, x) - 2K_z(x, x) = -2\frac{d}{dx}K(x, x), \tag{3.11}$$

junto con

$$K(x, z), K_z(x, z) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.12}$$

Observamos que en la ecuación (3.11) hemos reemplazado la suma de derivadas parciales por la derivada total de la función $K(x, x)$.

Aunque no entraremos en discusiones sobre la existencia de soluciones de esta ecuación para un potencial $u(x)$ dado, se puede demostrar que bajo ciertas condiciones se cumplen las propiedades de existencia y unicidad. Más adelante nos limitaremos a verificarlo con un ejemplo práctico.

Hasta este punto hemos supuesto que el potencial $u(x)$ es conocido, y todo parece indicar que no hay una diferencia sustancial con el problema de scattering abordado en el capítulo anterior. Pero el punto clave es el siguiente: ¿podemos invertir de alguna forma la ecuación (3.6) para calcular K a partir de una función Ψ_+ conocida y después usar (3.11) para determinar $u(x)$?

Recordamos en este punto que la autofunción para el espectro continuo debe satisfacer las condiciones asintóticas (2.5). Como la función $\Psi_+(x; k)$ se comporta como e^{ikx} cuando $x \rightarrow \infty$, entonces la función $\Psi_+^*(x; k)$ se comportará como e^{-ikx} . Por tanto, la combinación

$$\Psi(x; k) = \Psi_+^*(x; k) + b(k)\Psi_+(x; k) \quad (3.13)$$

cumplirá la condición asintótica adecuada cuando $x \rightarrow \infty$ y también será autofunción por la linealidad de la ecuación de Sturm-Liouville.

De esta relación (3.13) y de la definición de $\Psi_+(x; k)$ en (3.6) llegamos a la expresión para la autofunción

$$\Psi(x; k) = e^{-ikx} + b(k)e^{ikx} + \int_{-\infty}^{\infty} K(x, z)e^{-ikz} dz + b(k) \int_{-\infty}^{\infty} K(x, z)e^{ikz} dz,$$

donde hemos sustituido los límites inferiores de integración por $-\infty$ dado que $K(x, z) = 0$ si $z < x$.

Podemos expresar esta ecuación reordenando términos como

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x, z)e^{-ikz} dz = \Psi(x; k) - e^{-ikx} - b(k)e^{ikx} - b(k) \int_{-\infty}^{\infty} K(x, z)e^{ikz} dz.$$

Si ahora invertimos esta expresión podemos escribir:

$$K(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\Psi(x; k) - e^{-ikx} - b(k)e^{ikx} - b(k) \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y)e^{iky} dy \right) e^{ikz} dk. \quad (3.14)$$

Para simplificar la notación definimos una función auxiliar $F(x)$ como

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(k)e^{ikx} dk.$$

Utilizando esta función, la ecuación (3.14) queda

$$K(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\Psi(x; k) - e^{-ikx})e^{ikz} dk - F(x+z) - \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y)F(y+z)dy. \quad (3.15)$$

Ahora podemos demostrar que el primer término del miembro de la derecha de esta ecuación es 0. Para ello, como es habitual tomamos un contorno en el plano complejo formado por la semicircunferencia de radio R y el segmento del eje real $[-R, R]$. Por las condiciones asintóticas discutidas anteriormente es claro que $\Psi(x; k)e^{ikx} \rightarrow 1$ cuando $|k| \rightarrow \infty$. Entonces el integrando $(\Psi(x; k)e^{ikx} - 1)e^{ik(z-x)}$ tiende a cero exponencialmente en el arco de circunferencia cuando $R \rightarrow \infty$, siendo $z > x$ y la parte imaginaria de k positiva. Como el integrando no tiene polos en el semiplano superior, por el teorema de Cauchy concluimos que la integral correspondiente es 0.

Tras estas consideraciones y sustituyendo en la expresión (3.15) el límite inferior de la última integral por x , ya que $K(x, y) = 0$ si $y < x$, llegamos a la ecuación de *Gelfand-Levitan-Marchenko*, que deberemos resolver para $K(x, z)$ dada la función $F(x)$:

$$K(x, z) + F(x+z) + \int_x^{\infty} K(x, y)F(y+z)dy = 0, \quad -\infty < x \leq z, \quad (3.16)$$

mientras que

$$K(x, z) = 0 \quad \text{si } x > z.$$

Una vez resuelta (3.16) calcularemos $u(x)$ a partir de la ecuación (3.11)

$$u(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x).$$

Si el potencial posee también un espectro discreto, entonces se puede demostrar (ver [5]) que la ecuación de Gelfand-Levitan-Marchenko sigue siendo válida, pero ahora la función $F(x)$ también tiene en cuenta los autovalores discretos:

$$F(x) = \sum_{n=1}^N c_n^2 e^{-k_n x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(k) e^{ikx} dk,$$

donde los autovalores discretos son $\lambda_n = -k_n^2$, con $k_n > 0$ y los coeficientes c_n son los que dan cuenta del comportamiento asintótico de las soluciones, como vimos en (2.3).

En resumen, lo que hemos visto es que, si conocemos los datos de scattering (el coeficiente de reflexión $b(k)$, los autovalores discretos $-k_n^2$ y las constantes de normalización c_n), entonces el potencial $u(x)$ puede ser determinado a través del siguiente procedimiento:

Cálculo del potencial a partir de los datos de scattering

1. Calculamos la función $F(x)$ a través de la ecuación

$$F(x) = \sum_{n=1}^N c_n^2 e^{-k_n x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(k) e^{ikx} dk. \quad (3.17)$$

2. Resolvemos la ecuación de Gelfand-Levitan-Marchenko para hallar $K(x, z)$

$$K(x, z) + F(x+z) + \int_x^{\infty} K(x, y) F(y+z) dy = 0, \quad -\infty < x \leq z. \quad (3.18)$$

3. Calculamos el potencial $u(x)$ de acuerdo a

$$u(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x). \quad (3.19)$$

3.2. Solución de la ecuación de Gelfand-Levitan-Marchenko

El paso crítico del método anterior es lógicamente la resolución de la ecuación de Gelfand-Levitan-Marchenko que, aunque sepamos que existe la solución, no siempre va a ser fácil calcularla.

Al tratarse de una ecuación integral de *Fredholm* (ver capítulo 11 de [15]), se puede dar una solución

teórica por un método iterativo de forma que la solución se expresa con una serie

$$K(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(x, z), \quad \text{si } z \geq x,$$

$$K(x, z) = 0, \quad \text{si } z < x,$$

donde las funciones $K_i(x, z)$ se definen recursivamente por

$$K_0(x, z) = \begin{cases} -F(x+z), & \text{si } z > x, \\ 0, & \text{si } z < x, \end{cases}$$

$$K_{i+1}(x, z) = - \int_{-\infty}^{\infty} K_i(x, y) F(y+z) dy, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Sin embargo, habitualmente no será posible dar una forma cerrada para la serie. Dejando esta solución formal aparte, si la función F tiene una forma concreta podremos dar una solución explícita para la ecuación de Gelfand-Levitan-Marchenko. Por ejemplo, un caso importante que aparece en el tratamiento de la ecuación KdV¹ será cuando la función $F(x+z)$ se pueda expresar como

$$F(x+z) = \sum_{n=1}^N X_n(x) Z_n(z)$$

En ese caso la ecuación de Gelfand-Levitan-Marchenko toma la forma

$$K(x, z) + \sum_{n=1}^N X_n(x) Z_n(z) + \sum_{n=1}^N Z_n(z) \int_x^{\infty} K(x, y) X_n(y) dy = 0.$$

Al aparecer las funciones Z_n en los dos términos, podemos probar con soluciones de la forma

$$K(x, z) = \sum_{n=1}^N L_n(x) Z_n(z).$$

que deberán cumplir las N ecuaciones

$$L_n(x) + X_n(x) + \sum_{m=1}^N L_m(x) \int_x^{\infty} Z_m(y) X_n(y) dy = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Se trata de un sistema lineal de N ecuaciones con N incógnitas, que podemos resolver para hallar las funciones $L_i(x)$. Su representación matricial es

$$\begin{pmatrix} 1 + \int_x^{\infty} Z_1(y) X_1(y) dy & \int_x^{\infty} Z_2(y) X_1(y) dy & \cdots & \int_x^{\infty} Z_N(y) X_1(y) dy \\ \int_x^{\infty} Z_1(y) X_2(y) dy & 1 + \int_x^{\infty} Z_2(y) X_2(y) dy & \cdots & \int_x^{\infty} Z_N(y) X_2(y) dy \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_x^{\infty} Z_1(y) X_N(y) dy & \int_x^{\infty} Z_2(y) X_N(y) dy & \cdots & 1 + \int_x^{\infty} Z_N(y) X_N(y) dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1(x) \\ L_2(x) \\ \vdots \\ L_N(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_1(x) \\ X_2(x) \\ \vdots \\ X_N(x) \end{pmatrix} = 0.$$

¹La ecuación Korteweg-de Vries es una ecuación en derivadas parciales no lineal de tercer orden que analizaremos con más detalle en el capítulo siguiente. Su expresión es $u_t(x, t) - 6u(x, t)u_x(x, t) + u_{xxx}(x, t) = 0$.

3.3. Aplicación para coeficiente de reflexión nulo

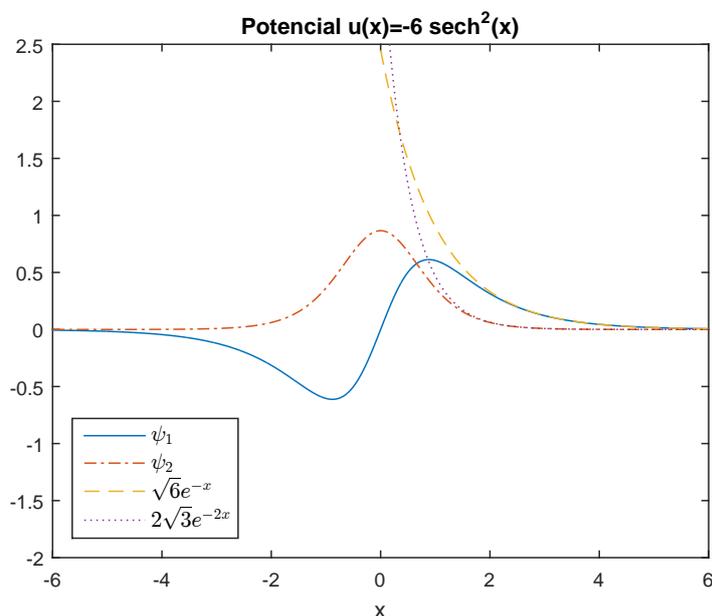
Retomaremos en este punto el estudio que hicimos sobre el espectro discreto del potencial² $u(x) = -A \operatorname{sech}^2(x)$. Recordamos que obtuvimos las autofunciones (2.13) para el caso en el que la constante A era de la forma $n(n+1)$ con $n = 2$, que se correspondía con un potencial para el cual el coeficiente de reflexión $b(k)$ era nulo.

En esta sección vamos a resolver el problema de scattering inverso para ilustrar cómo se aplica y qué resultados podemos obtener en este caso sencillo. Para abordar el problema, en primer lugar tenemos que establecer cuáles son los datos de scattering. Estamos interesados en estudiar el caso en el que el coeficiente de reflexión $b(k)$ es 0, ya que en el cálculo de la función F según la ecuación (3.17) solo intervienen los datos de scattering del espectro discreto.

Tomando como ejemplo las autofunciones (2.13), examinando su expresión vemos que su comportamiento asintótico cuando $x \rightarrow \infty$ es el siguiente:

$$\begin{aligned}\Psi_1(x) &\sim \sqrt{6}e^{-x}, \\ \Psi_2(x) &\sim 2\sqrt{3}e^{-2x},\end{aligned}\tag{3.20}$$

lo que se ilustra en la Gráfica 3.1.



GRÁFICA 3.1: Comportamiento asintótico de las autofunciones $\Psi_1(x)$ y $\Psi_2(x)$ dadas en (2.13) y (3.20).

Por analogía con este ejemplo y considerando un caso algo más general, supondremos que tenemos

²Este potencial se conoce con el nombre de *potencial de Pöschl-Teller*.

dos autofunciones que satisfacen las condiciones asintóticas, cuando $x \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}\Psi_1(x) &\sim c_1 e^{-k_1 x}, \\ \Psi_2(x) &\sim c_2 e^{-k_2 x},\end{aligned}$$

donde los autovalores discretos son $-k_1^2$ y $-k_2^2$, con $k_1 \neq k_2$ y ambos positivos.

Con estos datos de scattering vamos a seguir los pasos que expusimos en la sección anterior. En primer lugar tenemos que calcular la función F . Si suponemos que $b(k) = 0$ para todo k , entonces según la ecuación (3.17)

$$F(x) = c_1^2 e^{-k_1 x} + c_2^2 e^{-k_2 x}.$$

En este caso $F(x+z)$ es separable, lo que ya sabemos que facilita mucho la resolución de la ecuación de Gelfand-Levitan-Marchenko.

Podemos escribir

$$F(x+z) = c_1^2 e^{-k_1(x+z)} + c_2^2 e^{-k_2(x+z)} = X_1(x)Z_1(z) + X_2(x)Z_2(z),$$

donde $X_i(x) = c_i^2 e^{-k_i x}$ y $Z_i(z) = e^{-k_i z}$, para $i = 1, 2$.

Planteamos la ecuación de Gelfand-Levitan-Marchenko en este caso, que toma la forma:

$$K(x, z) + c_1^2 e^{-k_1(x+z)} + c_2^2 e^{-k_2(x+z)} + \int_x^\infty K(x, y) \left(c_1^2 e^{-k_1(x+z)} + c_2^2 e^{-k_2(x+z)} \right) dy = 0,$$

y suponiendo que

$$K(x, z) = L_1(x)Z_1(z) + L_2(x)Z_2(z) = Z^T(z)L(x) \quad (3.21)$$

debemos resolver el sistema $AL + B = 0$ siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 + \int_x^\infty c_1^2 e^{-2k_1 y} dy & \int_x^\infty c_1^2 e^{-(k_1+k_2)y} dy \\ \int_x^\infty c_2^2 e^{-(k_1+k_2)y} dy & 1 + \int_x^\infty c_2^2 e^{-2k_2 y} dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1(x) \\ L_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1^2 e^{-k_1 x} \\ c_2^2 e^{-k_2 x} \end{pmatrix} = 0.$$

Las integrales que aparecen son inmediatas. Teniendo en cuenta que los valores k_1 y k_2 son positivos llegamos a la expresión para el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{c_1^2 e^{-2k_1 x}}{2k_1} & \frac{c_1^2 e^{-(k_1+k_2)x}}{k_1+k_2} \\ \frac{c_2^2 e^{-(k_1+k_2)x}}{k_1+k_2} & 1 + \frac{c_2^2 e^{-2k_2 x}}{2k_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1(x) \\ L_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1^2 e^{-k_1 x} \\ c_2^2 e^{-k_2 x} \end{pmatrix} = 0.$$

Podemos expresar la matriz del sistema $A = I + C$ como suma de la matriz identidad y otra matriz C , cuyos elementos son:

$$C_{i,j} = c_i^2 \frac{e^{-(k_i+k_j)x}}{k_i + k_j}. \quad (3.22)$$

Con estas apreciaciones es inmediata la generalización al caso de que no haya solo dos autovalores discretos, sino N .

La solución del sistema vendrá dada en forma matricial como $L = -A^{-1}B$. Una vez calculado L , podemos calcular $K(x, z)$ también en forma matricial usando (3.21):

$$K(x, z) = Z^T(z)L(x) = -Z^T(z)A^{-1}(x)B(x) = -\sum_{i,j} Z_i(z)(A^{-1})_{i,j}(x)B_j(x).$$

Ahora bien, para calcular el potencial $u(x)$, la expresión que obtuvimos en (3.19) es $u(x) = -2\frac{d}{dx}K(x, x)$. Entonces para este cálculo no necesitamos obtener la función $K(x, z)$, es suficiente con obtener $K(x, x)$, ya que u es la derivada total de esta función.

Por tanto nos centramos en calcular

$$K(x, x) = -\sum_{i,j} Z_i(x)(A^{-1})_{i,j}(x)B_j(x)$$

Examinando el producto $Z_i(x)B_j(x) = c_j^2 e^{-(k_i+k_j)x}$, observamos que coincide con la derivada del elemento (j, i) de la matriz A , salvo el signo:

$$\frac{d}{dx}A_{j,i}(x) = -Z_i(x)B_j(x).$$

Entonces la función $K(x, x)$ se puede expresar como

$$K(x, x) = \sum_{i,j} (A^{-1})_{i,j}(x) \frac{d}{dx}A_{j,i}(x) = \sum_i \left(A^{-1}(x) \frac{d}{dx}A(x) \right)_{i,i} = \text{tr} \left(A^{-1}(x) \frac{d}{dx}A(x) \right).$$

Omitiendo la dependencia en x de la matriz A por simplicidad y expresando la matriz A^{-1} como la matriz adjunta de A^T dividida por el determinante de A , podemos deducir que esta expresión coincide con

$$K(x, x) = \frac{1}{|A|} \frac{d|A|}{dx} = \frac{d}{dx} \log |A|.$$

Por tanto, efectuando la derivada de esta función, en virtud de la ecuación (3.19) tendremos el potencial $u(x)$:

$$u(x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \log |A|. \quad (3.23)$$

La expresión general del potencial en función de los parámetros, aunque sea para el caso $N = 2$ no es sencilla. Sin embargo, a modo de comprobación podemos calcular la expresión resultante para el caso que hemos introducido antes en (3.20). Tomando los valores

$$\begin{aligned} c_1 &= \sqrt{6}, & k_1 &= 1, \\ c_2 &= 2\sqrt{3}, & k_2 &= 2, \end{aligned} \quad (3.24)$$

con ayuda del programa de cálculo simbólico “Mathematica” obtenemos

$$u(x) = -\frac{24e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} = -6 \operatorname{sech}^2 x = -2(2+1) \operatorname{sech}^2 x,$$

que es precisamente el potencial que utilizamos para resolver el problema de scattering.

Ahora recuperamos el otro ejemplo que discutimos en el Capítulo 2 para $N = 3$, con 3 autovalores discretos. Las autofunciones correspondientes estaban dadas por (2.14), mientras que su comportamiento asintótico cuando $x \rightarrow \infty$ es el siguiente:

$$\begin{aligned}\Psi_1(x) &\sim 2\sqrt{3}e^{-x}, \\ \Psi_2(x) &\sim 2\sqrt{15}e^{-2x}, \\ \Psi_3(x) &\sim 2\sqrt{15}e^{-3x}.\end{aligned}\tag{3.25}$$

Tomando los valores respectivos

$$\begin{aligned}c_1 &= 2\sqrt{3}, & k_1 &= 1, \\ c_2 &= 2\sqrt{15}, & k_2 &= 2, \\ c_3 &= 2\sqrt{15}, & k_3 &= 3,\end{aligned}\tag{3.26}$$

procediendo como se ha indicado en el ejemplo anterior para el cual $N = 2$, obtenemos el potencial

$$u(x) = -\frac{48e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = -12 \operatorname{sech}^2 x = -3(3+1) \operatorname{sech}^2 x,$$

como cabía esperar.

Tras ilustrar con estos ejemplos la aplicación del método para hallar el potencial conociendo los datos de scattering, pasamos ya a la aplicación de estos conceptos a la resolución de ecuaciones en derivadas parciales.

Capítulo 4

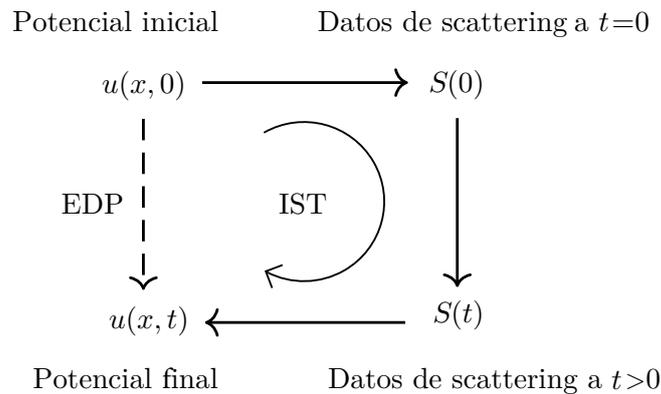
Transformación de scattering inverso

A mediados del siglo XIX ya habían sido discutidos los problemas de autovalores como los introducidos en el Capítulo 2, dedicado al scattering. Sin embargo, la transformación de scattering inverso surgió prácticamente un siglo después. La mayor aportación al respecto se encuentra en el artículo [6] publicado por Gardner, Greene, Kruskal y Miura (GGKM) en el año 1967, en el que se describe un nuevo método para resolver el problema de valores iniciales de la ecuación KdV. Durante unos años este método fue percibido como una peculiaridad de la ecuación KdV y no tuvo más trascendencia.

Pocos años más tarde, con el desarrollo del método de los pares de Lax [14] se empezó a comprender la importancia del método presentado en 1967. Un primer paso fue el estudio de la ecuación de Schrödinger no lineal por Zakharov y Shabat [23]. Aunque fue finalmente en 1974 cuando Ablowitz, Kaup, Newell y Segur [1], tras el estudio de los problemas de valores iniciales para la ecuación de sine-Gordon publicaron un artículo describiendo en detalle el método y llamándolo *transformación de scattering inverso*, por analogía con el método de la transformada de Fourier. La publicación de este artículo suscitó un gran interés en la investigación de solitones y sistemas integrables y en los siguientes años se publicaron una gran cantidad de artículos tratando la transformación de scattering inverso y temas relacionados.

Para entender en qué consiste este método, consideremos una ecuación en derivadas parciales no lineal en una dimensión temporal y una dimensión espacial. El método consiste en primero encontrar un problema lineal de scattering asociado a la ecuación (en una dimensión espacial), en el cual la solución desconocida de la ecuación diferencial aparece como el potencial, y el tiempo es únicamente un parámetro. Entonces el objetivo es hallar el potencial a partir de los datos de scattering.

Para ello, se usa la condición inicial de la ecuación para obtener los datos de scattering en el instante de tiempo inicial. Posteriormente se hallan las ecuaciones lineales que rigen la evolución de los datos de scattering, las cuales nos permiten calcular los datos de scattering en instantes de tiempo posteriores. Finalmente, se resuelve el problema inverso de scattering para determinar el “potencial”, es decir, la solución del problema. Esto se representa de forma visual en la Gráfica 4.1.



GRÁFICA 4.1: Esquema de funcionamiento de la transformación de scattering inverso (IST).

Para entender cómo funciona el método en la práctica, vamos a aplicarlo a la ecuación KdV. Como necesitaremos resolver tanto el problema de scattering como el problema de scattering inverso para esta ecuación, hemos aprovechado en las secciones anteriores para realizar estos pasos previos, de forma que la presentación del método sea más clara y no se vea eclipsada por los cálculos auxiliares.

4.1. Aplicación a la ecuación KdV

La ecuación KdV es una de las ecuaciones en derivadas parciales no lineales más estudiadas desde el punto de vista de las Matemáticas y la Física. Su historia comienza con las observaciones de John Scott Russell en la primera mitad del siglo XIX, que observó en el canal de Edinburgo un comportamiento curioso de una onda en la superficie del canal. En un artículo publicado en 1844 describe cómo siguió a caballo el recorrido de esta onda durante más de un kilómetro por el canal, sin aparente variación de su forma o su velocidad:

“ I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped - not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a foot and a half in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel.

SCOTT RUSSELL - *Report on Waves* [21]

Russell llevó a cabo experimentos de generación de ondas solitarias en canales y dedujo empíricamente que la velocidad de la onda crecía con la amplitud de la misma y con la profundidad del canal. Posteriormente, Boussinesq y Rayleigh en los años 70 del siglo XIX estudiaron este comportamiento teóricamente partiendo de las ecuaciones de los fluidos incompresibles y corroboraron los resultados de los experimentos de Russell.

Finalmente, Korteweg y de Vries en 1895 dedujeron la ecuación que debían satisfacer estas ondas, lo que permitió explicar su comportamiento [12]. Hallaron que el perfil de estas ondas se podía expresar matemáticamente como una secante hiperbólica al cuadrado.

En sus experimentos, Russell también observó cómo interactuaban dos de estas ondas solitarias. Comprobó que si una onda alcanzaba a otra, tras interactuar, cada una recuperaba su forma original y se desplazaba con la misma velocidad que al principio. Ya en el siglo XX el desarrollo de la informática permitió la resolución numérica de esta ecuación y se comprobó este comportamiento no solo en la interacción entre dos ondas solitarias, sino también la interacción de una onda solitaria y otro perfil. Debido a este comportamiento, por el que parece que las ondas solitarias mantienen su identidad tras interactuar, se llamó a estas ondas “solitones” (por analogía con fotón, protón, etc.).

Hay varias formas de expresar la ecuación KdV, todas ellas equivalentes, correspondientes a cambios de escala temporal, espacial o de la función de onda. La forma que presentaremos aquí es la más adecuada para el estudio de las soluciones solitónicas:

$$u_t(x, t) - 6u(x, t)u_x(x, t) + u_{xxx}(x, t) = 0, \quad (4.1)$$

donde, en general, trataremos de resolver el problema de valor inicial, consistente en encontrar una solución $u(x, t)$ de dicha ecuación que satisfaga una condición inicial dada de antemano

$$u(x, 0) = f(x).$$

Como hemos comentado en la introducción del método, el primer paso es asociar a la ecuación KdV un problema de scattering. Esto se consigue mediante la llamada *transformación de Miura* [17]:

$$u(x, t) = (v(x, t))^2 + v_x(x, t), \quad (4.2)$$

que, tras sustituir en la ecuación KdV (4.1) y omitiendo la dependencia en (x, t) de las funciones implicadas para simplificar la notación, nos proporciona la ecuación

$$2vv_t + v_{xt} - 6(v^2 + v_x)(2vv_x + v_{xx}) + 6v_xv_{xx} + 2vv_{xxx} + v_{xxxx} = 0.$$

Podemos organizar los términos para obtener dicha ecuación en la forma

$$\left(2v + \frac{\partial}{\partial x}\right) (v_t - 6v^2v_x + v_{xxx}) = 0.$$

Por tanto, vemos que si $v(x, t)$ es una solución de la ecuación *KdV modificada* (mKdV)

$$v_t - 6v^2v_x + v_{xxx} = 0, \quad (4.3)$$

entonces $u(x, t)$ definida por (4.2) es una solución de la ecuación KdV (4.1).

Observando la transformación de Miura (4.2), apreciamos que el tiempo aparece únicamente como un parámetro, luego se puede ver como una ecuación diferencial ordinaria en v para cada instante de tiempo t . Se trata de una ecuación de tipo *Riccati*, que se puede linealizar mediante la sustitución, para $\Psi(x; t) \neq 0$,

$$v(x, t) = \frac{\Psi_x(x; t)}{\Psi(x; t)},$$

donde, para expresar la dependencia paramétrica con t de la ecuación, hemos denotado las variables de la función como $(x; t)$. Bajo esta transformación, la ecuación de la transformación de Miura (4.2) se expresa como

$$\Psi_{xx}(x; t) - u(x, t)\Psi(x; t) = 0. \quad (4.4)$$

Para completar la relación de esta ecuación con la ecuación de Sturm-Liouville hay que tener en cuenta que la ecuación KdV es invariante por la transformación de Galileo

$$u(x, t) \rightarrow \lambda + u(x + 6\lambda t, t).$$

Por tanto, sin pérdida de generalidad podemos reemplazar u por $u - \lambda$, para λ real, en la ecuación anterior (4.4) para obtener la ecuación de Sturm-Liouville:

$$\Psi_{xx} + (\lambda - u)\Psi = 0,$$

que no es más que la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo (para cada valor de t), donde $u(x, t)$ es el potencial, λ es la energía y $\Psi(x; t)$ es la función de onda. En esta ecuación el tiempo solo aparece como un parámetro, que no tenemos que confundir con el de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo. Debido a esta dependencia paramétrica, en general los autovalores $\lambda = \lambda(t)$ dependerán del tiempo, luego la ecuación completa será:

$$\Psi_{xx}(x; t) + (\lambda(t) - u(x, t))\Psi(x; t) = 0. \quad (4.5)$$

4.1.1. Evolución de los datos de scattering

El último paso que nos queda para realizar la transformación de scattering inverso es saber cómo evolucionan con el tiempo los datos de scattering. Para ello, según establece Miura en su artículo [17], para estudiar la evolución de los datos de scattering es útil definir la función $R(x, t)$ como

$$R = \Psi_t - 2(u + 2\lambda)\Psi_x + u_x\Psi. \quad (4.6)$$

A partir de este punto omitiremos la dependencia explícita de las funciones implicadas. Con esta definición se cumple lo siguiente:

Proposición 4.1. Si u es solución de la ecuación KdV (4.1) y Ψ cumple la ecuación de Sturm-Liouville (4.5), entonces se satisface la siguiente igualdad, que será útil para deducir propiedades del espectro:

$$(\Psi R_x - \Psi_x R)_x = -\lambda_t \Psi^2. \quad (4.7)$$

Demostración. Desarrollamos el término de la izquierda en la expresión (4.7) usando (4.6):

$$\begin{aligned} (\Psi R_x - \Psi_x R)_x = & \Psi[\Psi_{txx} - 2(u + 2\lambda)\Psi_{xxx} - 3u_x\Psi_{xx} + u_{xxx}\Psi] \\ & - \Psi_{xx}[\Psi_t - 2(u + 2\lambda)\Psi_x + u_x\Psi]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Podemos sustituir las derivadas terceras de Ψ derivando la ecuación de Sturm-Liouville (4.5) con respecto a x y con respecto a t :

$$\begin{aligned} \Psi_{xxx} &= u_x\Psi - (\lambda - u)\Psi_x, \\ \Psi_{xxt} &= -(\lambda_t - u_t)\Psi - (\lambda - u)\Psi_t. \end{aligned}$$

De esta forma, y usando la ecuación de Sturm-Liouville para Ψ_{xx} obtenemos de (4.8) la expresión:

$$(\Psi R_x - \Psi_x R)_x = \Psi^2(u_{xxx} - 6uu_x + u_t - \lambda_t).$$

Por último, como u cumple la ecuación KdV, llegamos a la expresión buscada (4.7). \square

Analicemos ahora algunas propiedades del espectro de autovalores de la ecuación (4.5). Consideremos en primer lugar un autovalor λ_n del espectro discreto y su correspondiente autofunción Ψ_n normalizada. Integrando la ecuación (4.7) entre $-\infty$ y ∞ y aplicando que tanto Ψ como Ψ_x tienden a cero cuando $x \rightarrow \pm\infty$ deducimos que el autovalor λ_n no depende del tiempo, es una constante del movimiento para la ecuación KdV:

$$(\lambda_n)_t = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

Entonces, según la ecuación (4.7), tenemos que

$$\Psi_n(R_n)_x - (\Psi_n)_x R_n = K_n(t) \quad (4.9)$$

es una función que únicamente depende del parámetro tiempo. Ahora bien, como tanto R_n como Ψ_n tienden a cero cuando $x \rightarrow \infty$, deducimos que esa función debe ser nula: $K_n(t) = 0$. Por tanto, integrando la ecuación (4.9) deducimos que se debe cumplir la relación de proporcionalidad dependiente del parámetro t :

$$R_n = \tilde{K}_n(t)\Psi_n. \quad (4.10)$$

Si introducimos este resultado para R_n en (4.6) y multiplicamos esta ecuación por Ψ_n llegamos a la expresión

$$\Psi_n(\Psi_n)_t - 2(u + 2\lambda_n)\Psi_n(\Psi_n)_x + u_x\Psi_n^2 = \tilde{K}_n\Psi_n^2,$$

que podemos escribir como

$$\frac{1}{2}(\Psi_n^2)_t + u(\Psi_n^2)_x - 4u\Psi_n(\Psi_n)_x - 4\lambda_n\Psi_n(\Psi_n)_x + u_x\Psi_n^2 = \tilde{K}(t)\Psi_n^2.$$

Usando la ecuación de Sturm-Liouville (4.5) llegamos a

$$\frac{1}{2}(\Psi_n^2)_t + [u\Psi_n^2 - 2(\Psi_n)_x^2 - 4\lambda_n\Psi_n^2]_x = \tilde{K}(t)\Psi_n^2.$$

Si ahora integramos a todos los valores de x y tenemos en cuenta que la autofunción Ψ_n y sus derivadas espaciales tienden a cero cuando $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\Psi_n(x; t))^2 dx \right) = \tilde{K}(t) \int_{-\infty}^{\infty} (\Psi_n(x; t))^2 dx.$$

Como la autofunción correspondiente al espectro discreto está normalizada, deducimos que $\tilde{K}(t) = 0$. Por tanto $R_n = 0$ según la ecuación (4.10), y la ecuación (4.6) se convierte en:

$$(\Psi_n)_t - 2(u + 2\lambda_n)(\Psi_n)_x + u_x \Psi_n = 0. \quad (4.11)$$

Esta ecuación puede usarse para hallar la evolución temporal de los parámetros $c_n(t)$. Como asintóticamente el potencial u y sus derivadas tienden a cero y la autofunción presenta el comportamiento asintótico

$$\Psi_n(x; t) \sim c_n(t) e^{-k_n x}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (4.12)$$

para el autovalor $\lambda_n = -k_n^2$, del comportamiento asintótico de la ecuación (4.11) deducimos que

$$c'_n(t) = 4k_n^3 c_n(t).$$

Entonces, integrando esta ecuación diferencial ordinaria obtenemos

$$c_n(t) = c_n(0) e^{4k_n^3 t}. \quad (4.13)$$

Es decir, hemos hallado cómo evolucionan temporalmente los parámetros $c_n(t)$ dando una expresión que nos permite determinarlos con tan solo conocer su valor en el instante inicial. Para completar la descripción de la evolución de los datos de scattering, a continuación nos disponemos a obtener las ecuaciones que gobiernan la evolución de los coeficientes de transmisión y reflexión, para el espectro continuo. Hay que tener en cuenta que ahora, tanto a como b van a depender de k y del tiempo t . Como la dependencia en t es paramétrica en ambos casos, los denotaremos como $a(k; t)$ y $b(k; t)$, aunque más adelante omitiremos esta dependencia para simplificar la notación.

El razonamiento es análogo al caso del espectro discreto. En este caso, como λ puede tomar todos los valores positivos, haremos el razonamiento con $\lambda = k^2$ fijo, $k > 0$. Entonces de la ecuación (4.7) obtenemos que $\Psi R_x - \Psi_x R = K(t; k)$ es una constante (no depende de x) que depende del parámetro tiempo. Dado que el comportamiento asintótico de la autofunción Ψ es, como vimos en (2.5)

$$\Psi \sim a(k; t) e^{-ikx}, \quad x \rightarrow -\infty, \quad (4.14)$$

el comportamiento asintótico de R , según la definición (4.6) será:

$$R \sim a_t e^{-ikx} - 4\lambda(-ik)a e^{-ikx} = (a_t + 4ik^3 a) e^{-ikx}, \quad x \rightarrow -\infty. \quad (4.15)$$

Entonces, el comportamiento asintótico de ΨR_x cuando $x \rightarrow -\infty$ será

$$\Psi R_x \sim -ika (a_t + 4ik^3 a) e^{-2ikx}, \quad x \rightarrow -\infty,$$

mientras que el comportamiento de $\Psi_x R$ será

$$\Psi_x R \sim -ika (a_t + 4ik^3 a) e^{-2ikx}, \quad x \rightarrow -\infty.$$

Por tanto tomando el límite $x \rightarrow -\infty$ deducimos que $\Psi R_x - \Psi_x R \rightarrow 0$. Pero como esta expresión es igual a $K(t; k)$, que no depende de x , debe ser $K(t; k) = 0$.

De la misma forma que para el espectro discreto esto implica que R y Ψ son proporcionales para el espectro continuo:

$$R = \tilde{K}(t; k)\Psi \quad (4.16)$$

Como \tilde{K} no depende de x , tomando el comportamiento asintótico de la ecuación (4.16) cuando $x \rightarrow -\infty$ a partir de las ecuaciones (4.14) y (4.15) deducimos la ecuación que debe satisfacer a:

$$a_t + 4ik^3 a = \tilde{K}a. \quad (4.17)$$

Si ahora estudiamos el comportamiento asintótico cuando $x \rightarrow +\infty$, recordamos que, como vimos en (2.5), la autofunción se comporta

$$\Psi \sim e^{-ikx} + be^{ikx} \quad x \rightarrow +\infty,$$

lo que implica, por la definición de R , (4.6), que

$$R \sim b_t e^{ikx} + 4ik^3(e^{-ikx} - be^{ikx}), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Estudiando el comportamiento asintótico de la ecuación (4.16) cuando $x \rightarrow +\infty$ deducimos que se debe cumplir la ecuación:

$$b_t e^{ikx} + 4ik^3(e^{-ikx} - be^{ikx}) = \tilde{K}(e^{-ikx} + be^{ikx}),$$

y teniendo en cuenta que las exponenciales e^{ikx} y e^{-ikx} son linealmente independientes, obtenemos las condiciones

$$b_t - 4ik^3 b = \tilde{K}b, \quad \tilde{K} = 4ik^3. \quad (4.18)$$

Esto nos lleva a que el coeficiente a no depende del tiempo según (4.17), mientras que b cumple la ecuación

$$b_t = 8ik^3 b.$$

Por tanto, integrando esta ecuación y usando (4.18) en (4.17), llegamos a

$$a(k; t) = a(k; 0), \quad b(k; t) = b(k; 0)e^{8ik^3 t}.$$

Es decir, hemos conseguido determinar cómo evolucionan en el tiempo los coeficientes de transmisión y reflexión.

Podemos resumir los resultados obtenidos hasta ahora del siguiente modo:

Evolución de los datos de scattering

Si la función $u(x, t)$ evoluciona según la ecuación KdV y satisface la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$, entonces

$$\lambda_n(t) = \lambda_n(0), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (4.19)$$

$$c_n(t) = c_n(0)e^{4k_n^3 t}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (4.20)$$

$$b(k; t) = b(k; 0)e^{8ik^3 t}, \quad (4.21)$$

$$a(k; t) = a(k; 0), \quad (4.22)$$

donde $\lambda_n(0)$, $c_n(0)$, $b(k; 0)$ y $a(k; 0)$ se determinan a través de la condición inicial $f(x)$, resolviendo el problema de autovalores

$$\Psi_{xx} + (\lambda - f(x))\Psi = 0. \quad (4.23)$$

En definitiva, ya conocemos cómo es la evolución de los datos de scattering para el problema asociado a la ecuación KdV.

Con estos resultados se completa el esquema que nos permite resolver el problema de valor inicial para la ecuación KdV: Resolvemos el problema de scattering para la condición inicial, calculamos los coeficientes de scattering en un instante de tiempo t y resolvemos el problema de scattering inverso para determinar el potencial que da lugar a esos coeficientes, que será la solución de la ecuación KdV.

Para ilustrar el procedimiento, mostraremos la resolución de varios ejemplos concretos, comenzando por el del solitón.

4.1.2. Onda solitaria

Planteamos el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} u_t - 6uu_x + u_{xxx} &= 0, \\ u(x, 0) &= -2 \operatorname{sech}^2 x. \end{aligned}$$

Como hemos mencionado, el primer paso para aplicar la transformación de scattering inverso es resolver el problema de scattering en $t = 0$ para la ecuación de Sturm-Liouville (4.23)

$$\Psi_{xx} + (\lambda + 2 \operatorname{sech}^2 x)\Psi = 0.$$

Se trata de un caso particular de los potenciales tratados en el Capítulo 2, donde $A = n(n + 1)$, en este caso con $n = 1$. Por tanto solo hay un autovalor discreto $\lambda_1 = -k_1^2$ con $k_1 = 1$, y la autofunción correspondiente es proporcional a la función asociada de Legendre $P_1^1(\tanh x)$. Concretamente, la autofunción normalizada es

$$\Psi_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sech} x.$$

El comportamiento asintótico de esta autofunción cuando $x \rightarrow \infty$ es

$$\Psi_1(x) \sim \sqrt{2}e^{-x}, \quad x \rightarrow \infty,$$

por tanto la constante de normalización asintótica es $c_1(0) = \sqrt{2}$.

De acuerdo a la ecuación (4.20) para la evolución de los datos de scattering tenemos que

$$c_1(t) = \sqrt{2} e^{4t}.$$

Al tratarse de un potencial de la clase de los que tienen coeficiente de reflexión nulo, como vimos en el Capítulo 2, sabemos que la ecuación de Gelfand-Levitan-Marchenko se reduce a resolver un sistema lineal con matriz $A = I + C$ dada por (3.22), que en este caso tiene dimensión 1 y el potencial se calcula mediante la fórmula (3.23)

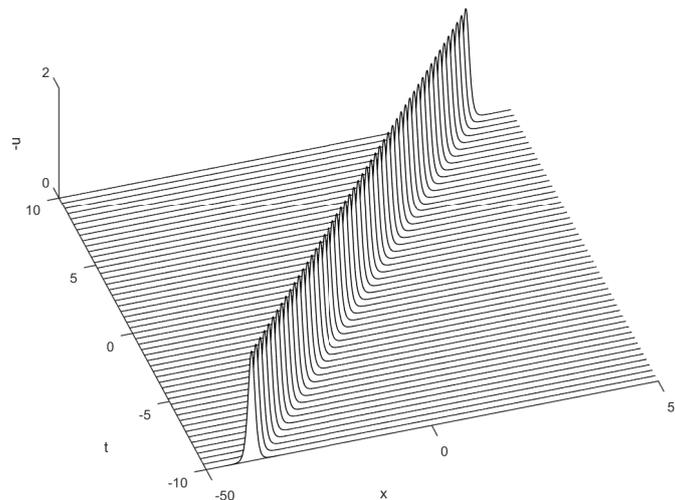
$$\begin{aligned} u(x, t) &= -2 \frac{d^2}{dx^2} \log |A| = -2 \frac{d^2}{dx^2} \log (1 + e^{8t-2x}) \\ &= \frac{d}{dx} \frac{4e^{8t-2x}}{1 + e^{8t-2x}} = -\frac{8e^{8t-2x}}{(1 + e^{8t-2x})^2} = -2 \operatorname{sech}^2(x - 4t), \end{aligned} \quad (4.24)$$

que es la onda solitaria de amplitud -2 y velocidad 4. Podemos representar gráficamente esta solución para observar su comportamiento. Debido a la elección que hicimos de la forma concreta de la ecuación KdV (4.1), el solitón tiene una amplitud negativa y se desplaza en sentido de x creciente. Habitualmente se representa $-u$ en función de x para observar mejor el perfil clásico del solitón. En la Gráfica 4.2 insertamos la representación obtenida con el Programa 3 del Apéndice.

4.1.3. Dos solitones

Ahora consideraremos el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} u_t - 6uu_x + u_{xxx} &= 0, \\ u(x, 0) &= -6 \operatorname{sech}^2 x. \end{aligned} \quad (4.25)$$



GRÁFICA 4.2: Solución de un solitón (4.24) para la condición inicial $u(x, 0) = -2 \operatorname{sech}^2 x$.

Como ya estudiamos en el Capítulo de scattering, la ecuación de Sturm-Liouville (4.23) correspondiente a $t = 0$ tiene soluciones acotadas para dos autovalores: $\lambda_1 = -1^2$, $\lambda_2 = -2^2$, que vienen dadas por la ecuación (2.13):

$$\begin{aligned}\Psi_1(x) &= \sqrt{\frac{3}{2}} \tanh x \operatorname{sech} x, & \lambda_1 &= -1, \\ \Psi_2(x) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sech}^2 x, & \lambda_2 &= -4.\end{aligned}$$

De su comportamiento asintótico cuando $x \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\Psi_1(x) &\sim \sqrt{6} e^{-x}, \\ \Psi_2(x) &\sim 2\sqrt{3} e^{-2x},\end{aligned}$$

obtenemos los valores de los parámetros $c_1(0) = \sqrt{6}$ y $c_2(0) = 2\sqrt{3}$. Por tanto, su evolución en el tiempo según la ecuación (4.20) será

$$\begin{aligned}c_1(t) &= \sqrt{6} e^{4t}, \\ c_2(t) &= 2\sqrt{3} e^{32t}.\end{aligned}$$

Como en el ejemplo anterior, se trata de un potencial de los que ya sabemos que $b(k) = 0$, luego la solución de la ecuación KdV se puede obtener según la fórmula (3.23) como

$$u(x, t) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \log |A|,$$

donde en este caso la matriz A toma la forma

$$\begin{pmatrix} 1 + 3e^{8t-2x} & 2e^{8t-3x} \\ 4e^{64t-3x} & 1 + 3e^{64t-4x} \end{pmatrix}.$$

Tras efectuar los cálculos llegamos a que la solución se puede expresar como:

$$u(x, t) = -\frac{24e^{8t+2x} (4e^{72t+2x} + 6e^{64t+4x} + 4e^{56t+6x} + e^{128t} + e^{8x})}{(3e^{64t+2x} + 3e^{8t+4x} + e^{72t} + e^{6x})^2}.$$

No obstante, para apreciar mejor el comportamiento de la solución podemos expresarla en términos de cosenos hiperbólicos:

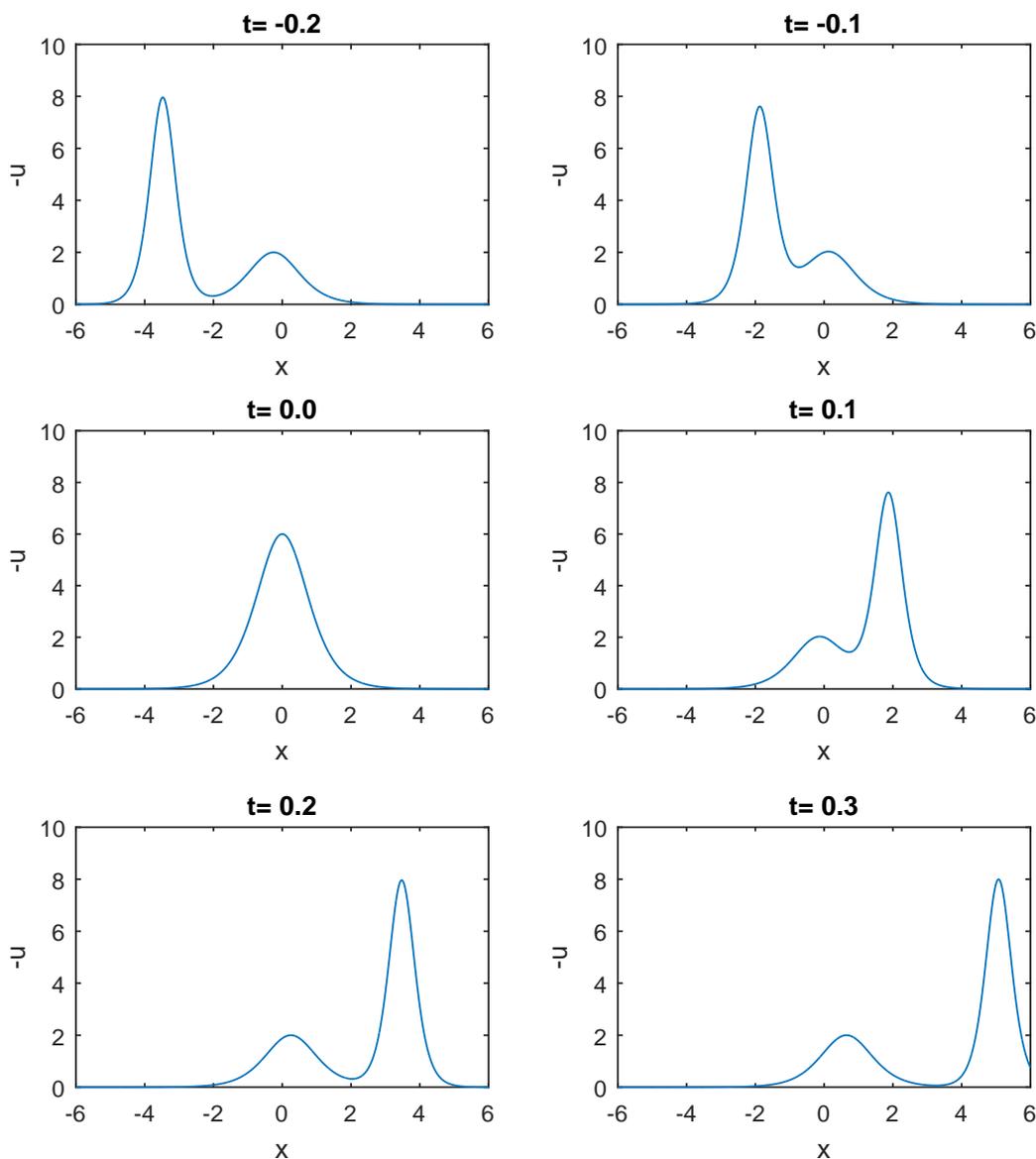
$$u(x, t) = -12 \frac{\cosh(64t - 4x) + 4 \cosh(8t - 2x) + 3}{(\cosh(36t - 3x) + 3 \cosh(28t - x))^2}. \quad (4.26)$$

Representamos esta solución para varios instantes de tiempo en la Gráfica 4.3 y observamos por qué se llama la solución de dos solitones. Básicamente representa la interacción de dos solitones con diferente amplitud (por tanto, diferente velocidad) que, tras la interacción, mantienen su forma original.

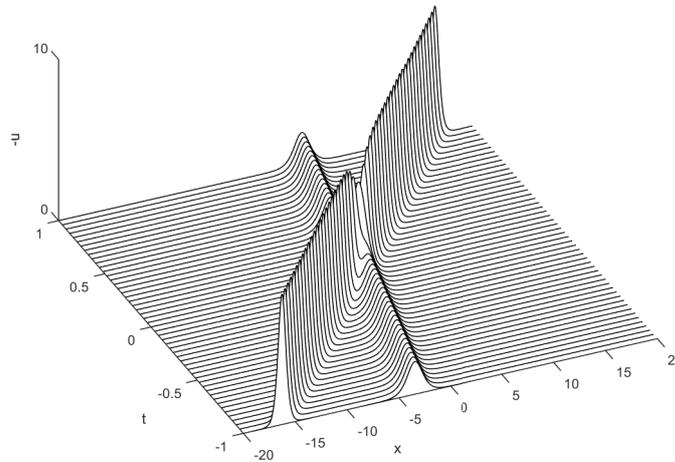
Para apreciar mejor la interacción, podemos representar la solución incluyendo el eje temporal en la representación tridimensional obtenida con el Programa 4 del Apéndice, tal y como se muestra

en la Gráfica 4.4.

Observando las amplitudes de los dos solitones en la Gráfica 4.3 y sabiendo que la velocidad de los solitones es igual al doble de su amplitud en valor absoluto (lo demostraremos en el Capítulo 5, dedicado a las transformaciones de Darboux), podemos deducir que asintóticamente los dos solitones se desplazarán con velocidades 16 y 4, respectivamente. Para comprobar analíticamente este comportamiento asintótico, lo que hacemos es estudiar el comportamiento de la solución (4.26) cuando $t \rightarrow \pm\infty$ pero considerando fijo $\xi_1 = x - 16t$ o $\xi_2 = x - 4t$, respectivamente.



GRÁFICA 4.3: Solución de dos solitones (4.26) para la condición inicial $u(x, 0) = -6 \operatorname{sech}^2 x$.



GRÁFICA 4.4: Solución de dos solitones (4.26) en representación tridimensional para la condición inicial $u(x, 0) = -6 \operatorname{sech}^2 x$.

Para el primer caso, escribiendo la solución de la siguiente forma, en términos de ξ_1 y de t :

$$u(x, t) = -12 \frac{\cosh(4\xi_1) + 4 \cosh(2\xi_1 + 24t) + 3}{(\cosh(12t + \xi_1) + 3 \cosh(12t - 3\xi_1))^2},$$

y estudiando el comportamiento asintótico de esta ecuación para ξ_1 fijo obtenemos el resultado esperado:

$$u(x, t) \sim -8 \operatorname{sech}^2\left(2\xi_1 \mp \frac{1}{2} \log 3\right), \quad t \rightarrow \pm\infty, \quad \xi_1 \text{ fijo.}$$

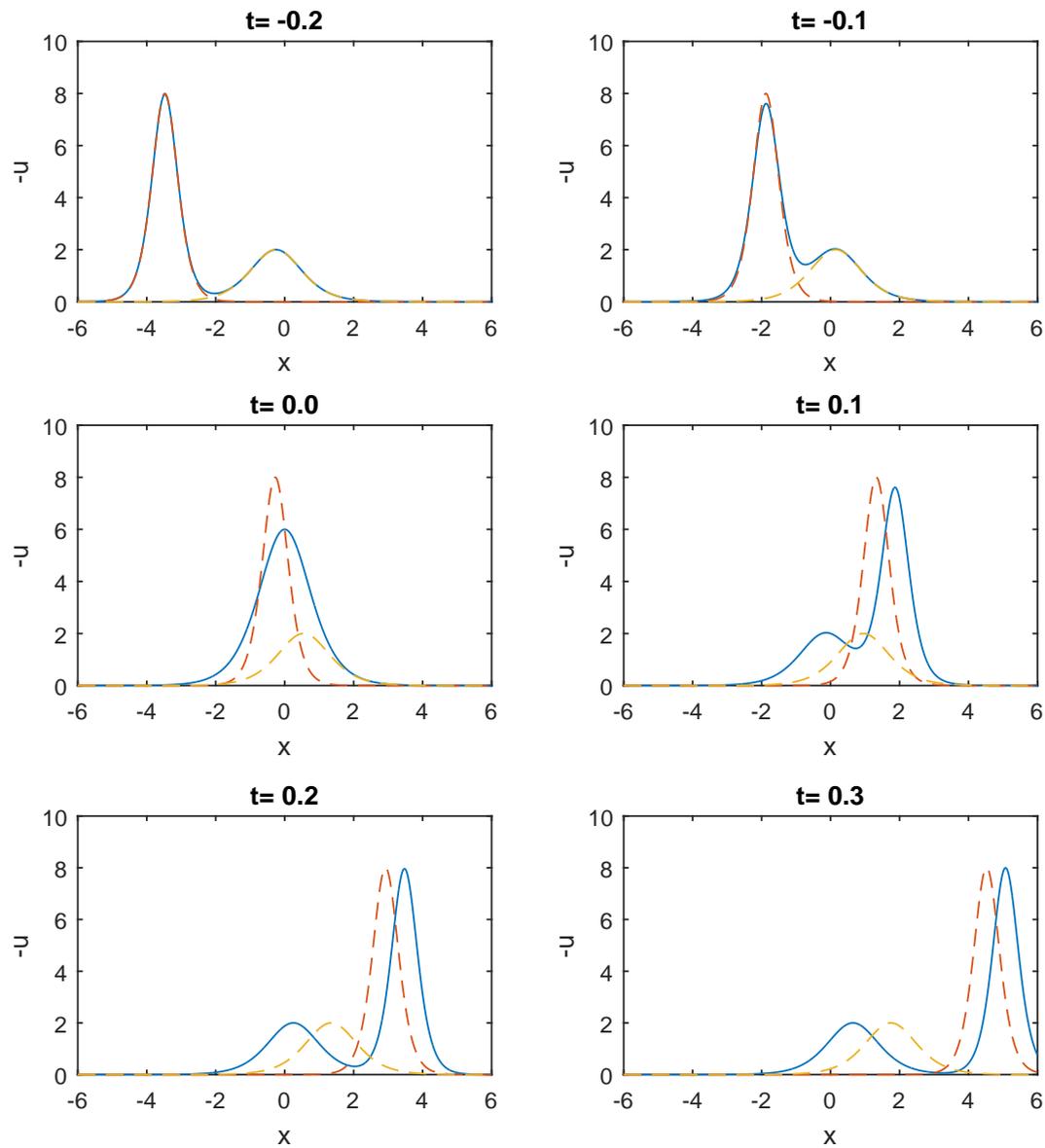
Análogamente, para ξ_2 fijo obtenemos

$$u(x, t) \sim -2 \operatorname{sech}^2\left(\xi_2 \pm \frac{1}{2} \log 3\right), \quad t \rightarrow \pm\infty, \quad \xi_2 \text{ fijo.}$$

Por tanto, observamos que los solitones conservan su forma pero se produce un cambio de fase tras interactuar. En concreto, el solitón más alto avanza, mientras que el solitón más bajo retrocede. Para apreciar este cambio de fase, hemos superpuesto en las gráficas que hemos representado anteriormente el comportamiento que tendrían los dos solitones si no interaccionasen entre ellos, es decir, si se comportasen como ondas solitarias. Es la Gráfica 4.5, realizada con el Programa 5 del Apéndice.

A partir de estos ejemplos queda patente la generalización de este procedimiento al cálculo de la solución para N solitones. Sin embargo, los cálculos son tediosos para N mayores, y normalmente se opta por la resolución numérica de la ecuación KdV, que cuenta con métodos muy eficientes como los pseudoespectrales, los cuales utilizan la transformada rápida de Fourier (ver [22]).

En el siguiente capítulo del trabajo presentaremos el método de las transformaciones de Darboux que nos permitirá obtener nuevas soluciones de la ecuación KdV partiendo de soluciones conocidas de la misma.



GRÁFICA 4.5: En línea continua, solución de dos solitones (4.26). En línea discontinua, solución de ondas solitarias.

Capítulo 5

Transformaciones de Darboux

Consideramos de nuevo el problema de autovalores de Sturm-Liouville asociado a la ecuación de Schrödinger con potencial $u(x)$ que ya hemos tratado en apartados anteriores :

$$-\Psi_{xx} + u\Psi = \lambda\Psi. \quad (5.1)$$

Denotaremos $\Psi_{\lambda_1} = \Psi_{\lambda_1}(x; \lambda_1)$ a una solución de (5.1) para el autovalor $\lambda = \lambda_1$.

Definición 5.1. Si Ψ_λ es una solución de (5.1) con autovalor λ , se define la *transformación de Darboux* con respecto a la solución Ψ_{λ_1} de la siguiente forma:

$$\Psi_\lambda^{(1)} = D_{\Psi_{\lambda_1}} \Psi_\lambda := \left(\partial_x - \frac{(\Psi_{\lambda_1})_x}{\Psi_{\lambda_1}} \right) \Psi_\lambda = \frac{W(\Psi_{\lambda_1}, \Psi_\lambda)}{\Psi_{\lambda_1}}, \quad (5.2)$$

donde $W(f, g) = fg_x - gf_x$ es el Wronskiano y D es el *operador de Darboux*:

$$D_f g = \left(\partial_x - \frac{f_x}{f} \right) g.$$

Cuando necesitemos expresar explícitamente el autovalor λ_1 que se ha utilizado para hacer la transformación, denotaremos a esta función como $\Psi_\lambda^{(1)}(x; \lambda_1)$.

La importancia de estas transformaciones se pone de manifiesto con el siguiente teorema, que nos indica que las funciones transformadas satisfacen una ecuación de autovalores del tipo (5.1).

Teorema 5.2. Con la misma notación que en la definición precedente, la función $\Psi_\lambda^{(1)}$ satisface la ecuación diferencial

$$-\left(\Psi_\lambda^{(1)} \right)_{xx} + u^{(1)} \Psi_\lambda^{(1)} = \lambda \Psi_\lambda^{(1)}, \quad (5.3)$$

donde el potencial es

$$u^{(1)} := u - 2(\ln(\Psi_{\lambda_1}))_{xx}. \quad (5.4)$$

Esto se expresa habitualmente diciendo que la ecuación de Sturm-Liouville (5.1) es *covariante* bajo la acción de la transformación de Darboux $\{\Psi_\lambda \rightarrow \Psi_\lambda^{(1)}, u \rightarrow u^{(1)}\}$. A su vez, nos permite obtener directamente soluciones de la ecuación (5.3) si conocemos soluciones de la ecuación original (5.1), sin más que efectuar la transformación de Darboux (5.2).

Demostración. Para que se verifique la igualdad (5.3), sustituyendo la definición (5.2) de $\Psi_\lambda^{(1)}$ se debe cumplir

$$-(\Psi_\lambda)_{xxx} + \sigma_{xx} \Psi_\lambda + 2\sigma_x (\Psi_\lambda)_x + \sigma (\Psi_\lambda)_{xx} + u^{(1)} ((\Psi_\lambda)_x - \sigma \Psi_\lambda) = \lambda ((\Psi_\lambda)_x - \sigma \Psi_\lambda), \quad (5.5)$$

donde, para simplificar la expresión, hemos llamado

$$\sigma = (\ln(\Psi_{\lambda_1}))_x = \frac{(\Psi_{\lambda_1})_x}{\Psi_{\lambda_1}}.$$

Ahora bien, como Ψ_λ es solución del problema de Sturm-Liouville (5.1) con autovalor λ , se cumple que

$$(\Psi_\lambda)_{xx} = (u - \lambda) \Psi_\lambda, \quad (5.6)$$

y derivando esta relación se debe verificar también

$$(\Psi_\lambda)_{xxx} = u_x \Psi_\lambda + (u - \lambda) (\Psi_\lambda)_x. \quad (5.7)$$

Utilizando las relaciones (5.6) y (5.7) podemos expresar la ecuación (5.5) en función de Ψ_λ y su derivada primera $(\Psi_\lambda)_x$:

$$\left(u^{(1)} - u + 2\sigma_x\right) (\Psi_\lambda)_x + \left(-u_x + \sigma_{xx} + \sigma u - \sigma u^{(1)}\right) \Psi_\lambda = 0. \quad (5.8)$$

Para completar la demostración basta ver que los coeficientes que acompañan tanto a Ψ_λ como a su derivada son nulos. El primero de ellos es simplemente la definición del potencial transformado (5.4)

$$u^{(1)} = u - 2(\ln(\Psi_{\lambda_1}))_{xx} = u - 2\sigma_x.$$

Usando esta relación, el coeficiente que acompaña a Ψ_λ en (5.8) queda de la siguiente forma:

$$\sigma_{xx} + 2\sigma\sigma_x - u_x. \quad (5.9)$$

Para ver que este coeficiente es nulo debemos calcular las derivadas de σ a partir de su definición:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{(\Psi_{\lambda_1})_{xx} \Psi_{\lambda_1} - (\Psi_{\lambda_1})_x^2}{(\Psi_{\lambda_1})^2}, \\ \sigma_{xx} &= \frac{(\Psi_{\lambda_1})_{xxx} (\Psi_{\lambda_1})^3 - 3(\Psi_{\lambda_1})_{xx} (\Psi_{\lambda_1})_x (\Psi_{\lambda_1})^2 + 2(\Psi_{\lambda_1})_x^3 \Psi_{\lambda_1}}{(\Psi_{\lambda_1})^4}. \end{aligned}$$

De esta forma, podemos desarrollar la expresión (5.9):

$$\sigma_{xx} + 2\sigma\sigma_x - u_x = \frac{1}{(\Psi_{\lambda_1})^2} \left((\Psi_{\lambda_1})_{xxx} \Psi_{\lambda_1} - (\Psi_{\lambda_1})_{xx} (\Psi_{\lambda_1})_x - (\Psi_{\lambda_1})_x^2 u_x \right). \quad (5.10)$$

Por último, utilizando que Ψ_{λ_1} es solución de la ecuación (5.1) con autovalor λ_1 , tenemos que

$$\begin{aligned} (\Psi_{\lambda_1})_{xx} &= u \Psi_{\lambda_1} - \lambda_1 \Psi_{\lambda_1}, \\ (\Psi_{\lambda_1})_{xxx} &= u_x \Psi_{\lambda_1} + (u - \lambda_1) (\Psi_{\lambda_1})_x, \end{aligned}$$

y sustituyendo estas dos expresiones en (5.10) llegamos a que

$$\sigma_{xx} + 2\sigma\sigma_x - u_x = 0$$

como queríamos demostrar. \square

A partir de aquí podemos iterar el procedimiento y considerar transformaciones de Darboux sucesivas, aplicando la transformación de Darboux a la ecuación transformada (5.3). Para ello, de la misma forma que definimos la primera transformación, debemos tomar una solución $\Psi_{\lambda_2}^{(1)}$ de (5.3), con autovalor $\lambda_2 \neq \lambda_1$, la cual es generada por una solución Ψ_{λ_2} de la ecuación original (5.1):

$$\Psi_{\lambda_2}^{(1)} = (\Psi_{\lambda_2})_x - \frac{(\Psi_{\lambda_1})_x}{\Psi_{\lambda_1}} \Psi_{\lambda_2}.$$

Entonces, la segunda transformación es $\Psi_{\lambda}^{(2)} = \Psi_{\lambda}^{(2)}(x; \lambda_1, \lambda_2)$, definida mediante la expresión

$$\Psi_{\lambda}^{(2)} = D_{\Psi_{\lambda_2}^{(1)}} \Psi_{\lambda}^{(1)} := \left(\partial_x - \frac{(\Psi_{\lambda_2}^{(1)})_x}{\Psi_{\lambda_2}^{(1)}} \right) \left(\partial_x - \frac{(\Psi_{\lambda_1})_x}{\Psi_{\lambda_1}} \right) \Psi_{\lambda}.$$

Se puede demostrar (ver los detalles en el Capítulo 2 de [16]) que esta función se expresa como el cociente de dos Wronskianos que dependen únicamente de las soluciones de la ecuación inicial, sin depender de la solución intermedia $\Psi_{\lambda_2}^{(1)}$,

$$\Psi_{\lambda}^{(2)} = \frac{W(\Psi_{\lambda_1}, \Psi_{\lambda_2}, \Psi_{\lambda})}{W(\Psi_{\lambda_1}, \Psi_{\lambda_2})},$$

y el potencial transformado es el siguiente:

$$u^{(2)} = u^{(1)} - 2 \left(\ln(\Psi_{\lambda_2}^{(1)}) \right)_{xx} = u - 2 [\ln W(\Psi_{\lambda_1}, \Psi_{\lambda_2})]_{xx}.$$

Este procedimiento se puede generalizar aplicando sucesivas transformaciones a la ecuación, con lo que obtenemos el siguiente resultado, que va ser fundamental en nuestro estudio posterior de la ecuación KdV.

Teorema 5.3. La función

$$\Psi_{\lambda}^{(n)}(x; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \frac{W(\Psi_{\lambda_1}, \Psi_{\lambda_2}, \dots, \Psi_{\lambda_n}, \Psi_{\lambda})}{W(\Psi_{\lambda_1}, \Psi_{\lambda_2}, \dots, \Psi_{\lambda_n})}$$

satisface la ecuación diferencial

$$- \left(\Psi_{\lambda}^{(n)} \right)_{xx} + u^{(n)} \Psi_{\lambda}^{(n)} = \lambda \Psi_{\lambda}^{(n)},$$

donde el potencial es

$$u^{(n)} = u - 2 [\ln W(\Psi_{\lambda_1}, \Psi_{\lambda_2}, \dots, \Psi_{\lambda_n})]_{xx}.$$

Aquí vemos más claramente el significado exacto de la notación, y la importancia de ser estrictos con ella. El superíndice (n) hace referencia al orden de la transformación. Y el subíndice hace referencia al autovalor con el que es solución del problema de Sturm-Liouville.

También es importante destacar que los autovalores λ_i , $i = 1, \dots, n$ considerados deben ser todos ellos distintos. De lo contrario, se produce una indeterminación en la expresión del teorema. No obstante, se pueden generalizar estas transformaciones para incluir los casos en los que hay autovalores repetidos. En estos casos, en lugar de usar las autofunciones para calcular el Wronskiano, hay

que usar los llamados *estados de Jordan*. Se puede consultar, por ejemplo, el artículo de F. Correa [3] en el que se aplica este procedimiento a la ecuación KdV.

Una vez introducidos los conceptos y resultados básicos de estas transformaciones, pasamos a su aplicación para la resolución de la ecuación KdV.

En principio los resultados que hemos mostrado hasta ahora nos permiten, a partir de soluciones conocidas de la ecuación de Sturm-Liouville, obtener una jerarquía de ecuaciones junto con sus soluciones por el método descrito. En la primera parte del trabajo ya vimos la estrecha relación existente entre las soluciones de la ecuación KdV y la ecuación de autovalores de Sturm-Liouville. A continuación emplearemos esta conexión para obtener soluciones de la ecuación KdV.

5.1. Par de Lax de la ecuación KdV

En 1968, Lax [14] propuso una forma de expresar la ecuación KdV que recoge, de alguna manera, la relación existente con el problema de autovalores de Sturm-Liouville. Consiste en introducir los siguientes operadores:

$$\begin{aligned} L &= -\partial_x^2 + u(x, t), \\ M &= -4\partial_x^3 + 6u(x, t)\partial_x + 3u_x(x, t). \end{aligned} \quad (5.11)$$

En este caso, la ecuación KdV simplemente se puede expresar mediante la igualdad de operadores

$$\partial_t L = [L, M], \quad (5.12)$$

donde el corchete indica el conmutador de los dos operadores.

Lo relevante de esta representación de Lax, es que la ecuación (5.12) es equivalente a la compatibilidad del sistema de ecuaciones en derivadas parciales

$$\begin{cases} L\Psi = \lambda\Psi, \\ \Psi_t = M\Psi, \end{cases}$$

que se puede escribir explícitamente como

$$\begin{cases} -\Psi_{xx} + u\Psi = \lambda\Psi, \\ \Psi_t = -4\Psi_{xxx} + 6u\Psi_x + 3u_x\Psi. \end{cases} \quad (5.13)$$

Esto quiere decir que $u(x, t)$ es solución de la ecuación KdV si y solo si existe una familia de funciones no nulas $\Psi(x, t; \lambda)$ que son soluciones del sistema (5.13).

Ya hemos comprobado que la primera ecuación del sistema (5.13) es covariante frente a la transformación de Darboux. Análogamente se puede comprobar, sin más que sustituir las expresiones transformadas de la autofunción y del potencial, que la segunda ecuación es también covariante.

Supongamos que u es solución de la ecuación KdV. Por la equivalencia mencionada podemos tomar Ψ_λ y Ψ_{λ_1} soluciones del sistema (5.13) para dicha función u , y consideramos la transformación de Darboux $\{\Psi_\lambda \rightarrow \Psi_\lambda^{(1)}, u \rightarrow u^{(1)}\}$. Como las ecuaciones del sistema son covariantes, el sistema se verificará para las funciones transformadas $\Psi_\lambda^{(1)}$ y $u^{(1)}$. Pero como el sistema es equivalente a la ecuación KdV, se deduce que $u^{(1)}$ es solución de la ecuación KdV. Por tanto, acabamos de demostrar el siguiente resultado.

Proposición 5.1. Si u es solución de la ecuación KdV, entonces su transformado $u^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$ también es solución de la ecuación KdV.

Este importante resultado que acabamos de obtener es el que nos permite hallar nuevas soluciones de la ecuación KdV a partir de las ya conocidas. Terminaremos este capítulo incluyendo el ejemplo de aplicación de este resultado.

Ejemplo 5.2. Pongamos como ejemplo que partimos de la solución trivial $u = 0$ al efectuar la transformación. En ese caso, el sistema (5.13) queda de la forma

$$\begin{cases} -\Psi_{xx} = \lambda\Psi, \\ \Psi_t = -4\Psi_{xxx}. \end{cases} \quad (5.14)$$

Consideramos el caso de un autovalor negativo $\lambda_1 = -k_1^2$, con $k_1 > 0$ y observamos que la primera ecuación en derivadas parciales del sistema (5.14) es realmente una familia uniparamétrica de ecuaciones ordinarias de segundo orden con coeficientes constantes (donde el tiempo es el parámetro). Por tanto, podemos buscar una solución de la forma

$$\Psi_{\lambda_1}(x, t) = A(t) \cosh(k_1 x + \delta(t)).$$

Imponiendo que se cumpla la segunda ecuación del sistema (5.14) deducimos que $A'(t) = 0$ y que $\delta'(t) = -4k_1^3$. Por tanto, podemos tomar como solución

$$\Psi_{\lambda_1}(x, t) = A \cosh(k_1(x - x_1) - 4k_1^3 t).$$

Si aplicamos la transformación de Darboux (5.4) obtenemos

$$u^{(1)}(x, t) = -2 [\log \Psi_{\lambda_1}(x, t)]_{xx} = -2k_1^2 \operatorname{sech}^2(k_1(x - x_1) - 4k_1^3 t), \quad (5.15)$$

que se trata de una onda solitaria. En el Capítulo 4 ya obtuvimos una solución de este tipo mediante la transformación de scattering inverso, en la ecuación (4.24). Se trata de la solución (5.15) correspondiente a los parámetros $x_1 = 0$ y $k_1 = 1$.

De la forma de la solución (5.15) podemos deducir que la velocidad del solitón es $4k_1^2$, mientras que su amplitud (en valor absoluto) es $2k_1^2$. Esto confirma que la velocidad de un solitón para la ecuación KdV es proporcional a su amplitud, como anticipamos en el Capítulo 4 al estudiar la solución de dos solitones (4.26).

Para continuar con este ejemplo, podemos tomar otra solución del tipo

$$\Psi_{\lambda_2}(x, t) = B \sinh(k_2(x - x_2) - 4k_2^3 t)$$

para efectuar la segunda transformación. En este caso, si tomamos los valores $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ obtenemos la solución:

$$u^{(2)}(x, t) = -12 \frac{\cosh(64t - 4x + 4x_2) + 4 \cosh(28t - 2x + 2x_1) + 3}{[\cosh(36t - 3x + x_1 + 2x_2) + 3 \cosh(28t - x - x_1 + 2x_2)]^2}, \quad (5.16)$$

que es precisamente la solución de dos solitones que obtuvimos por el método de scattering inverso en la ecuación (4.26), para las constantes $x_1 = x_2 = 0$.

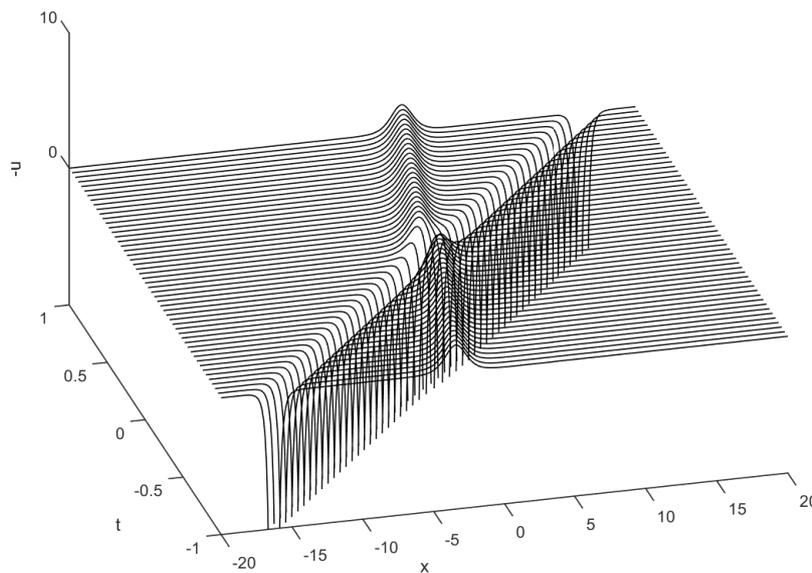
Ahora probamos con otra función en lugar del seno hiperbólico para hacer la segunda transformación. Tomamos un coseno hiperbólico con una constante k_2 diferente:

$$\Psi_{\lambda_2}(x, t) = B \cosh(k_2(x - x_1) - 4k_2^3 t).$$

Para simplificar los cálculos consideramos $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ y $x_1 = x_2 = 0$. En este caso obtenemos la solución:

$$u^{(2)}(x, t) = -12 \frac{\cosh(64t - 4x) - 4 \cosh(8t - 2x) - 3}{[\sinh(36t - 3x) + 3 \sinh(28t - x)]^2}. \quad (5.17)$$

Si representamos esta solución apreciamos un comportamiento curioso:



GRÁFICA 5.1: Interacción de un solitón con una singularidad.

Presenta una singularidad que se desplaza en el sentido positivo de las x y que interacciona con el otro solitón produciendo también un cambio de fase, como si hubiese interaccionado con otro solitón.

Para concluir este capítulo mencionaremos que, como se indica en el capítulo 3 del libro de Matveev [16], podemos obtener una solución multisolitónica (es decir, que representa la interacción no lineal

entre N solitones) calculando la transformación de Darboux N -ésima para las autofunciones

$$\begin{aligned}\Psi_{2m-1} &= \cosh(k_{2m-1}(x - x_{2m-1}) - 4k_{2m-1}^3 t), \\ \Psi_{2m} &= \sinh(k_{2m}(x - x_{2m}) - 4k_{2m}^3 t),\end{aligned}$$

donde las constantes k_i satisfacen $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_N$.

Es decir, tomando alternativamente senos y cosenos hiperbólicos conseguimos la solución multisolitónica. De esta forma es precisamente como hemos obtenido una de las soluciones del ejemplo anterior, correspondiente a la solución de dos solitones (5.16).

Capítulo 6

Conclusiones

Para concluir con este Trabajo Fin de Grado, sintetizaremos en este último capítulo algunos de los resultados más importantes que se han obtenido en el desarrollo del mismo. Incidiremos también en la relación que guarda este trabajo con los conceptos estudiados en el Programa Conjunto de Grado en Física y Grado en Matemáticas y por último indicaremos posibles temas que pueden ser objeto de estudio como continuación de este trabajo.

El primer gran bloque de este trabajo se ha centrado en el análisis detallado de la transformación de scattering inverso. Hemos estudiado por separado los tres problemas que constituyen la misma, a saber, el problema de scattering, la evolución de los datos de scattering y el problema de scattering inverso. Como complemento a este análisis teórico de la transformación, la hemos aplicado a la resolución de la ecuación KdV, permitiéndonos a su vez el estudio de las soluciones solitónicas que presenta esta ecuación.

La aplicación de la transformación de scattering inverso a la ecuación KdV para resolver el problema de valor inicial

$$\begin{aligned}u_t - 6uu_x + u_{xxx} &= 0, \\ u(x, 0) &= f(x),\end{aligned}$$

se resume en los siguientes pasos:

1. Resolver el problema de Sturm-Liouville con el potencial dado por la condición inicial

$$\Psi_{xx} + (\lambda - f(x))\Psi = 0,$$

para obtener los datos de scattering en $t = 0$, $\{\lambda_n(0), c_n(0), a(k; 0), b(k; 0)\}$.

2. Hallar la expresión de los datos de scattering en un instante de tiempo $t > 0$ según las expresiones

$$\begin{aligned}\lambda_n(t) &= \lambda_n(0), & n &= 1, 2, \dots, N, \\ c_n(t) &= c_n(0)e^{4k_n^3 t}, & n &= 1, 2, \dots, N, \\ a(k; t) &= a(k; 0), \\ b(k; t) &= b(k; 0)e^{8ik^3 t}.\end{aligned}$$

3. Calcular la función $F(x; t)$ a través de la ecuación

$$F(x; t) = \sum_{n=1}^N [c_n(t)]^2 e^{-k_n x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(k; t) e^{ikx} dk.$$

4. Resolver la ecuación de Gelfand-Levitan-Marchenko para hallar $K(x, z; t)$

$$K(x, z; t) + F(x + z; t) + \int_x^{\infty} K(x, y; t) F(y + z; t) dy = 0, \quad -\infty < x \leq z.$$

5. Obtener la solución $u(x, t)$ de acuerdo a

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, x; t).$$

Hemos visto también que cuando la condición inicial es $u(x, 0) = -N(N + 1) \operatorname{sech}^2 x$, con N natural, la solución $u(x, t)$ se obtiene mediante la expresión

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log |A(x; t)|,$$

donde los elementos de la matriz $A(x; t)$ son

$$A_{i,j}(x; t) = \delta_{i,j} + [c_i(t)]^2 \frac{e^{-(k_i+k_j)x}}{k_i + k_j}.$$

Esta solución representa la interacción no lineal entre N solitones, los cuales mantienen su forma tras interactuar pero sufren un cambio de fase.

En el segundo bloque del trabajo hemos introducido las transformaciones de Darboux que, partiendo del problema de Sturm Liouville asociado a la ecuación de Schrödinger, nos han permitido obtener una jerarquía de ecuaciones con diferentes potenciales y expresiones explícitas para sus soluciones. Mediante el método del par de Lax hemos aplicado este procedimiento a la ecuación KdV y hemos obtenido que si $u(x, t)$ es solución de la ecuación KdV y $\Psi_{\lambda_1}, \Psi_{\lambda_2}, \dots, \Psi_{\lambda_n}$ son soluciones del problema de Sturm-Liouville

$$-\Psi_{xx} + u\Psi = \lambda\Psi,$$

con autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ respectivamente, distintos dos a dos, entonces

$$u^{(n)} = u - 2[\ln W(\Psi_{\lambda_1}, \Psi_{\lambda_2}, \dots, \Psi_{\lambda_n})]_{xx}$$

es solución de la ecuación KdV. Este método nos ha permitido obtener, además de las soluciones de N solitones, otro tipo de soluciones con singularidades que presentan interacciones similares a las solitónicas.

A lo largo del Trabajo Fin de Grado hemos aplicado constantemente los conceptos tratados en diversas asignaturas del Programa Conjunto de Grado en Física y Grado en Matemáticas. En particular, la mayor parte del trabajo se ha basado en la profundización en el problema de scattering, introducido en las asignaturas de Física Cuántica, Mecánica Cuántica y Mecánica y Ondas del Grado en Física.

Además, para desarrollar todo el análisis riguroso de los métodos expuestos han sido necesarios los fundamentos y métodos matemáticos estudiados en las asignaturas de Ecuaciones Diferenciales, Ecuaciones en Derivadas Parciales y Variable Compleja del Grado en Matemáticas, entre otras.

Actualmente seguimos trabajando en la generalización de la transformación de scattering inverso para su aplicación en la resolución de ecuaciones en derivadas parciales cuyo problema de scattering asociado no sea el correspondiente a la ecuación de Schrödinger. En concreto estamos estudiando la ecuación de quinto orden conocida con el nombre de Kaup-Kupershmidt

$$u_t = u_{xxxxx} + 5uu_{xxx} + \frac{25}{2}u_xu_{xx} + 5u^2u_x,$$

que ha sido objeto de estudios y publicaciones recientes. Nuestro planteamiento inicial de este Trabajo Fin de Grado contemplaba la posibilidad de incluir un estudio de la aplicación de la transformación de scattering inverso a esta ecuación. Sin embargo, debido al inusual desarrollo de este curso académico no ha sido posible y hemos optado por incluir en su lugar la aplicación detallada de la transformación a la ecuación KdV. Este tema queda, por tanto, pendiente de un estudio más profundo.

Por último, mencionaremos que en este trabajo solo hemos presentado una introducción al método de scattering inverso y al método de las transformaciones de Darboux. Estos dos métodos son muy utilizados y estudiados en el ámbito de la Física Matemática y a lo largo de los últimos años se han producido importantes avances en la investigación de temas relacionados con los mismos.

Este trabajo se puede considerar como punto de partida para un estudio más profundo de los métodos empleados. En particular, un tema que queda pendiente para posteriores trabajos es el estudio detallado de las soluciones de N solitones, de las que nos hemos limitado a tratar casos particulares. Podría estudiarse el comportamiento asintótico general de estas soluciones para determinar las amplitudes y velocidades de los solitones que interactúan, así como los desfases que sufren tras interactuar. También podría ser tema de estudio la obtención de otro tipo de soluciones de la ecuación KdV, por ejemplo, para la aplicación del método de scattering inverso con un coeficiente de reflexión $b(k)$ distinto de cero.

En cuanto al método de las transformaciones de Darboux, queda pendiente la profundización en el método de obtención de la solución de N solitones, ya que nos hemos limitado a describir la forma de obtener la solución, así como el estudio detallado de la generalización del método para permitir autovalores repetidos en las expresiones del teorema, mediante los llamados *estados de Jordan*.

Apéndice

Apéndice A

Programas en Matlab

A continuación incluimos los programas desarrollados en Matlab para las representaciones gráficas que se han ido adjuntando a lo largo del presente Trabajo Fin de Grado en Física.

Programa 1

Representa el potencial $u(x) = -6 \operatorname{sech}^2 x$ y las autofunciones de los estados ligados correspondientes. Véase la Gráfica 2.2.

```
1 x = -6:1e-2:6; xx=[-6 6]; yy=[1 1];
2 y = -6*sech(x).^2;
3 y1=sqrt(3/2)*tanh(x).*sech(x)-1;
4 y2=sqrt(3/4)*sech(x).^2-4;
5 figure
6 plot(x,y,x,y1,'—',x,y2,'-.')
7 hold on
8 plot(xx,-yy,':','color','k')
9 hold on
10 plot(xx,-4*yy,':','color','k')
11 title('Potencial u(x) = - 6 sech^{2}(x)')
12 xlabel('x')
13 legend({'u','\psi_{1}','\psi_{2}'},'Location','southwest')
14 txt1 = '\lambda_{1} = - 1';
15 text(asech(sqrt(1/6)),-1.3,txt1)
16 txt2 = '\lambda_{2} = - 4';
17 text(asech(sqrt(4/6)),-4.3,txt2)
```

Programa 2

Representa el potencial $u(x) = -12 \operatorname{sech}^2 x$ y las autofunciones de los estados ligados correspondientes. Véase la Gráfica 2.3.

```

1 x = -6:1e-2:6; xx=[-6 6]; yy=[1 1];
2 y = -12*sech(x).^2;
3 y1=sqrt(3/16)*(5*tanh(x).^2-1).*sech(x)-1;
4 y2=sqrt(15)/2*tanh(x).*sech(x).^2-4;
5 y3=sqrt(15)/4*sech(x).^3-9;
6 figure
7 plot(x,y,x,y1,'—',x,y2,'-',x,y3,':')
8 hold on
9 plot(xx,-yy,':','color','k')
10 hold on
11 plot(xx,-4*yy,':','color','k')
12 hold on
13 plot(xx,-9*yy,':','color','k')
14 title('Potencial u(x) = - 12 sech^{2}(x)')
15 xlabel('x')
16 legend({'u', '\psi_{1}', '\psi_{2}', '\psi_{3}'}, 'Location', 'southwest')
17 txt1 = '\lambda_{1} = - 1';
18 text(asech(sqrt(1/12)), -1.5, txt1)
19 txt2 = '\lambda_{2} = - 4';
20 text(asech(sqrt(4/12)), -4.5, txt2)
21 txt3 = '\lambda_{3} = - 9';
22 text(asech(sqrt(9/12)), -9.5, txt3)

```

Programa 3

Representa la solución de onda solitaria para la ecuación KdV. Véase la Gráfica 4.2.

```

1 figure(1)
2 X=50; T=10; deltat=(2*T)/50;
3 x = -X:1e-1:X;
4 t=-T:deltat:T;
5 for i=1:length(t)
6 u(i,:) = 2*(sech(x-4*t(i)).^2);
7 end
8 waterfall(x,t,u), colormap([0 0 0]); view(-18,65)
9 xlabel x, ylabel t, zlabel -u, axis([-X X -T T 0 2]), grid off
10 set(gca, 'ztick', [0 2])

```

Programa 4

Representa la solución de dos solitones para la ecuación KdV. Véase la Gráfica 4.4.

```

1 figure(1)
2 X=20; t1=-1; t2=1; deltat=(t2-t1)/50;
3 x = -X:1e-1:X;
4 t=t1:deltat:t2;
5 for i=1:length(t)
6 u(i,:) = 12*(3+4*cosh(2*x-8*t(i))+cosh(4*x-64*t(i)))/((3*cosh(x
   -28*t(i))+cosh(3*x-36*t(i))).^2);
7 end
8 waterfall(x,t,u), colormap(1e-6*[1 1 1]); view(-20,61)
9 xlabel x, ylabel t, zlabel -u, axis([-X X t1 t2 0 10]), grid off
10 set(gca, 'ztick', [0 10])

```

Programa 5

Representa la solución de dos solitones y la compara con las soluciones de ondas viajeras correspondientes para la ecuación KdV. Véase la Gráfica 4.5.

```

1 figure(1)
2 X=6;
3 x = -X:1e-2:X;
4 t=[-2,-1,0,1,2,3]*1e-1;
5 for i=1:length(t)
6 u=12*(3+4*cosh(2*x-8*t(i))+cosh(4*x-64*t(i)))/((3*cosh(x-28*t(i)
   )+cosh(3*x-36*t(i))).^2);
7 v1=8*sech(2*x-32*t(i)+.5*log(3)).^2;
8 v2=2*sech(x-4*t(i)-.5*log(3)).^2;
9 subplot(3,2,i)
10 plot(x,u,x,v1,'—',x,v2,'—')
11 title(sprintf('t= %.1f',t(i)));
12 axis([-6 6 0 10])
13 xlabel('x')
14 ylabel('-u')
15 set(gca, 'XTick', -6:2:6, 'YTick', 0:2:10);
16 end

```


Bibliografía

- [1] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, *The Inverse Scattering Transform-Fourier Analysis for Nonlinear Problems*. St. Appl. Math. **53**, 249-315 (1974).
- [2] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. (National Bureau of Standards, Washington, 1964).
- [3] F. Correa, A. Fring, *Regularized degenerate multi-solitons*. JHEP **9**, 8 (2016).
- [4] A. Das, Z. Popowicz, *A nonlinearly dispersion fifth order integrable equation and its hierarchy*. J. Nonlin. Math. Phys. **12**, 105 (2005)
- [5] P. G. Drazin, R. S. Johnson, *Solitons: an introduction*. (Cambridge University Press, Cambridge, 1989)
- [6] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura, *Method for solving the Korteweg de Vries equation*. Phys. Rev. Lett. **19**, 1095-1097 (1967).
- [7] W. Greiner, *Classical Mechanics. Systems of particles and Hamiltonian Dynamics*. (Springer, Berlin, 2010).
- [8] C. Gordon, D. L. Webb, S. Wolpert, *One cannot hear the shape of a drum*. Bull. Am. Math. Soc. **27**, 134-128 (1992).
- [9] C. Gordon, D. L. Webb, *You can't hear the shape of a drum*. Am. Sci. **84**, 46-55 (1996).
- [10] M. Kac, *Can One Hear the Shape of a Drum?* Am. Math. Mon. **73**, 1-23 (1966).
- [11] D. J. Kaup, *On the Inverse Scattering Problem for Cubic Eigenvalue Problems of the Class $\Psi_{xxx} + 6Q\Psi_x + 6R\Psi = \lambda\Psi$* . St. Appl. Math. **62**, 189-216 (1980).
- [12] D. J. Korteweg, G. de Vries, *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*. Phil. Mag. (5) **39**, 422-443 (1895).
- [13] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Mecánica Cuántica no relativista*, Volumen 3 del curso de Física Teórica. (Reverté, Barcelona, 1983).
- [14] P. D. Lax, *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*, Comm. Pure Appl. Math. **21**, 467-490 (1968).
- [15] J. Mathews, R. L. Walker, *Mathematical Methods of Physics*. (Addison-Wesley, California, 1969).

-
- [16] V. B. Matveev, M. A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons*. (Springer, Berlin, 1991).
- [17] R. M. Miura, *The Korteweg-de Vries Equation: A survey or Results*. SIAM Rev. **18**, 412–459 (1976).
- [18] P. M. Morse, H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics. Part 1*. (McGraw-Hill, New York, 1953).
- [19] E. G. Reyes, G. Sánchez, *Explicit solutions to the Kaup-Kupershmidt equation via nonlocal symmetries*. International Journal of Bifurcation and Chaos **17**, 2749-2763 (2007).
- [20] E. G. Reyes, *Nonlocal symmetries and the Kaup-Kupershmidt equation*. Journal of Math. Phys. **46**, 073507 (2005).
- [21] J. S. Russell, *Report on Waves*. Rep. 14th Meet. Brit. Assoc. Adv. Sci. (J. Murray, London, 1844) 311–390.
- [22] L. N. Trefethen, *Spectral methods in MATLAB*. (SIAM, Philadelphia, 2000).
- [23] V. E. Zakharov, A. B. Shabat, *Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media*. Sov. Phys. JEPT. **34**, 62-69 (1972).

