Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Máster en Análisis Económico y Finanzas

Crecimiento económico y medio ambiente

Presentado por:

Alejandro Navarro Lazo

Tutelado por:

Julio López Díaz

Guiomar Martín Herrán

Valladolid, 23 de septiembre de 2020

RESUMEN

La situación actual pone de manifiesto la importancia de lograr un equilibrio entre, la no sencilla relación, de crecimiento económico y el medio ambiente. Por ello, es esencial comprender el funcionamiento de los sistemas productivos actuales y, dimensionar las consecuencias positivas y negativas que conllevan para la sociedad presente y futura. Siendo necesario profundizar en estudios anteriores para tratar de esclarecer posibles sendas hacia un crecimiento equilibrado y sostenible con el medioambiente. En consecuencia, se abordarán hipótesis y modelos explicativos de las causas del crecimiento económico y medioambiente, además de, tratar de aportar nuevos enfoques al tema. No obstante, la complejidad analítica de un ámbito tan amplio baraja gran variedad de posibles soluciones en la búsqueda de la sostenibilidad.

PALABRAS CLAVE: Crecimiento económico, medioambiente, contaminación, recurso natural no renovable.

ABSTRACT

The current situation reveal the importance of achieving a balance between the not so simple relationship of economic growth and the environment. Therefore, it is essential to understand the performance of the actual production systems and, to dimension the positive and negative consequences that they entail for the current and future society. It is necessary to deepen in previous studies to try to clarify possible balanced and sustainable growth paths with the environment. Consequently, we will deal with hypotheses and explanatory models of the causes of economic and environmental growth, as well as, try to provide new approaches to the subject. However, the analytical complexity of a wide scope considers a great variety of possible solutions in the search for sustainability.

KEY WORDS: Economic Growth, environment**,** pollution, non-renewable natural resource

Clasificación JEL: E13, O41, Q32

ÍNDICE

ÍNDICE DE GRÁFICOS Y TABLAS

1. INTRODUCCIÓN

La humanidad ha sufrido grandes transformaciones en los últimos 170 años, siendo estos cada vez más drásticos y cercanos en el tiempo. Los estándares de calidad de vida han progresado de forma impensable en diversos campos como la ciencia, la tecnología, la medicina y la sociedad de los países avanzados. Todo ello ha sido posible, en parte, gracias a los avances tecnológicos de las últimas décadas, que han modificado los patrones de consumo y bienestar de la población. En los países más desarrollados, el crecimiento económico desde la revolución industrial ha permitido que gran parte de la población pueda alcanzar un estilo que sólo una élite podía permitirse hace cien años, cuando el PIB per cápita era una pequeña fracción del actual (Aguion y Howitt, 2009). Sin embargo, como todo, tiene una contraparte negativa. Este crecimiento, en algunos casos, descontrolado, ha llevado a la explotación de recursos naturales, de altas tasas de contaminación y, en definitiva, de destrucción medioambiental.

La reflexión anterior lleva a plantearse la relación existente entre crecimiento económico y medio ambiente, a la cual no se le está prestando la atención que merece; ésta genera cada vez una mayor controversia y preocupación, ya que los problemas ocasionados por la contaminación, los incrementos de población y los escasos progresos en la lucha contra el efecto invernadero, el calentamiento global y el cambio climático, no son afrontados con la contundencia que requieren.

1.1. INTRODUCCIÓN A ASPECTOS MEDIOAMBIENTALES

Los conceptos efecto invernadero, calentamiento global y cambio climático son de lo más utilizados en la actualidad por medios de comunicación, divulgadores científicos y por la población en general.

El efecto invernadero es un fenómeno por el cual, gracias a la atmósfera, el planeta puede mantener una temperatura media templada (en torno a 15ºC). Esto se debe a que la atmósfera permite traspasar los rayos solares calentando el planeta, pero como su propio nombre indica, no deja escapar toda la temperatura lograda en el proceso, actuando como un invernadero. Si este fenómeno no se produjese, la Tierra se encontraría a unos 20ºC bajo cero de media. El efecto invernadero se lleva produciendo de forma natural desde hace aproximadamente 4.000 millones de años, sin embargo, según CIIFEN (2012), se ve acentuado por la emisión de gases como el CO_2 y CH_4, derivados de la actividad humana.

El segundo término, calentamiento global, se refiere a la tendencia creciente de la temperatura media del planeta, fenómeno que, en parte, se atribuye al efecto de la contaminación provocado exclusivamente por el ser humano, como se afirma en el IPCC (2014)[1]. Ésta es la principal institución encargada para organizar la lucha contra el cambio climático aplicando criterios científicos y, buscando soluciones a las posibles consecuencias medioambientales y socioeconómicas IPCC (2020).

Por último, cambio climático es un término estrechamente ligado a los anteriores, especialmente a calentamiento global. Además, incluye todas las variaciones del clima de la Tierra, pudiendo estar asociadas a causas naturales o a la acción del hombre. Este fenómeno no solo afecta a la temperatura, sino también a factores como cambios en la actividad solar, las corrientes oceánicas, la actividad volcánica, geológica, en la composición atmosférica, etc. A lo largo de la historia, el comportamiento del clima ha seguido un patrón cíclico, pasando por eras glaciares, donde la temperatura media era notablemente inferior y, periodos mucho más cálidos, como es el actual, conocidos como interglaciares (Caballero et *al*., 2007; MITECO, 2020).

1.2. CAUSAS Y CONSECUENCIAS DE LA ACCIÓN HUMANA

Actualmente, las sociedades avanzadas ostentan unos niveles de consumo de recursos muy elevados, por lo que necesitan de ingentes cantidades de energía y materias primas como combustibles fósiles, minerales, agua, que son extraídos del medio ambiente de forma insostenible. Según Brock y Taylor (2004), se tenía conceptuado como limitante del crecimiento los recursos provenientes de la naturaleza, sin embargo, ha quedado patente que los límites

[1] Grupo Intergubernamental de Expertos sobre el Cambio Climático, IPCC por sus siglas en inglés. Se fundó por del departamento del Medio Ambiente de Naciones Unidas (PNUMA) y por la Organización Meteorológica Mundial (OMM) en 1988. (IPCC, 2020).

no solo vienen establecidos por la capacidad de extracción, sino por la de absorción de desechos por parte de la naturaleza.

Las emisiones antropogénicas de gases de efecto invernadero han aumentado desde la era preindustrial, impulsadas en gran medida por el crecimiento económico y demográfico. Entre el año 2000 y el 2010 fueron las más elevadas de la historia, logrando que las concentraciones atmosféricas de gases como el dióxido de carbono, metano y óxido nitroso, alcancen niveles sin precedentes en al menos los últimos 800.000 años. Todo ello ha dado lugar a una absorción de energía por parte del sistema climático, produciendo incrementos de la temperatura media del planeta (IPCC, 2014).

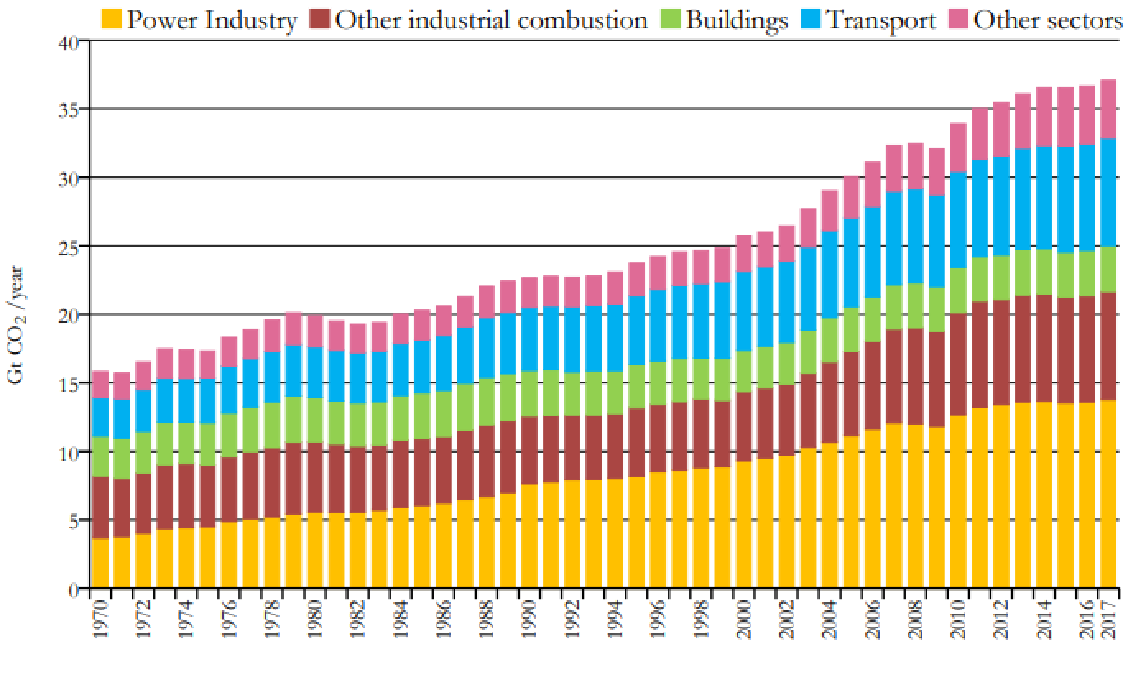
Estos aumentos en la temperatura se han dado principalmente en las últimas décadas, más concretamente, desde 1980, debido a una dependencia cada vez mayor de los combustibles fósiles. La principal razón del calentamiento global es la mayor concentración de gases de efecto invernadero en la atmosfera, un fenómeno que puede deberse a causas naturales, pero en este caso la evidencia empírica y los estudios realizados señalan de forma inequívoca la acción humana. Según el IPCC (2019), se confirma que el calentamiento del planeta es innegable, siendo agravado por el ser humano, empleando como sumidero de residuos el ecosistema global, el cual es a la vez fuente de energía, mediante en el empleo de recursos naturales y, vertedero de desechos. Se estima que actualmente el calentamiento causado por las emisiones antropogénicas ha producido un incremento de la temperatura media del planeta de 1ºC aproximadamente, con respecto a niveles preindustriales. Podría alcanzar la cifra de 1,5ºC en torno a 2030 y 2052. No obstante, es difícil de cuantificar, ya que, en lo que a calentamiento global se refiere son necesarias causas naturales para alcanzar esas tasas.

1.3. DATOS DE EMISIONES DE CO_2

Según la Base de Datos sobre Emisiones para la Investigación Atmosférica Mundial (EDGAR) de 2017, desde el comienzo del siglo XXI las emisiones de gases de efecto invernadero (GEI) han aumentado en comparación con las tres décadas anteriores, impulsadas principalmente por el crecimiento de emisiones de CO_2 de las economías emergentes. Según Muntean et *al.*, EDGAR muestra que las emisiones mundiales de CO_2 procedentes de actividades antropogénicas (esencialmente quema de combustibles fósiles) han aumentado ligeramente, tras el estancamiento en 2015, en un 0,4% en 2016 y en un 1,2% en 2017, alcanzando un total de 37,1 gigatoneladas de CO_2 en 2017. Los países que mayores emisiones producen son China, EEUU y la UE-28[2]. En la UE-28, las emisiones han disminuido, en general, en las dos últimas décadas, alcanzando en 2017 un total de 3,5 gigatoneladas de CO_2, lo que representa unos niveles de reducción del 19,5% en comparación con 1990 y del 16,5% en comparación con 2005.

Como se puede apreciar en el Gráfico 1.1, a escala global la cantidad bruta de emisiones ha seguido una tendencia creciente durante los últimos 47 años, llegándose a multiplicar por más de dos, si bien es cierto que, a partir de 2010, este crecimiento parece estancarse respecto a décadas anteriores.

Gráfico 1.1. Evolución de las emisiones de CO_2 a nivel mundial por sectores 1970-2017.



Fuente: EDGAR (2018)

El Gráfico 1.1 desagrega por sectores la cantidad de gigatoneladas de CO_2, señalando al sector industrial (energético y de combustión) como el principal

[2] Actualmente UE-27 tras la salida de Reino Unido. Además, es necesaria la puntualización de que la UE no es un país, sino una agrupación de países, una unión.

causante de emisiones, seguido de los transportes. En estos ámbitos son en los que se deberían enfocar en un futuro las políticas y los esfuerzos de la sociedad, en aras de lograr una necesaria disminución de la contaminación. Es de vital importancia la mayor generación de energía mediante fuentes renovables y, paralelamente, la implantación masiva de movilidad eléctrica, que junto a las fuentes no contaminantes podrían lograr resultados interesantes en lo que a reducción de emisiones se refiere.

1.4. POLÍTICAS FRENTE AL CAMBIO CLIMÁTICO

El análisis de los datos y su recopilación durante décadas ha sido de capital importancia, para que, los expertos elaborasen estrategias en la lucha contra el contra el efecto invernadero y el cambio climático. Sin embargo, estos fenómenos ya no solo están en manos de la comunidad científica, sino que los políticos lo llevan empleando bastantes años como elemento de su programa electoral, por ello, es un tema de debate actual.

En diciembre de 2015, se realizó en París una cumbre por el clima mundial donde se firmaron los llamados Acuerdos de París, que llevaron "*a todas las naciones a una causa común para emprender esfuerzos ambiciosos para combatir el cambio climático*". Con ello, se trató de fijar unas pautas para cada país firmante con el compromiso de tratar de lograr una serie de objetivos buscando la reducción de emisiones, para lo cual era imprescindible tomar medidas eficaces.

Siguiendo directrices de la UE, países como España han elaborado una hoja de ruta llamada Plan Nacional sobre Clima (2021-2030), consecuencia del Acuerdo de París (2015). El Plan Nacional sobre Clima tiene como objetivo llevar a cabo importantes inversiones para promover y realizar una transición energética implicando a los consumidores en el proceso. Con ello, se busca la reducción de un 40% de los GEI para 2030 con respecto a 1990, empleando un 32% de fuentes de energía renovable sobre el *pool* energético total, y un 32,5% de mejora de eficiencia energética, entre otros aspectos (Plan Nacional integrado de Energía y Clima 2021-2030, 2020).

Por lo tanto, la generación presente tiene como deber afrontar uno de los grandes retos de esta era, la crisis climática, causada por el agotamiento de fuentes recursos no renovables, vertido de residuos, extinción de especies y altas tasas de contaminación, empleando como sumidero el ecosistema, lo que ha generado una aceleración del cambio climático (Kallis, 2019). Además, en estos últimos años, tras la crisis de 2007, la tortuosa recuperación económica, la lenta y escasa creación de empleo, sumado a la creciente desigualdad social han logrado hacer olvidar las preocupaciones ambientales ante necesidades sociales de mayor urgencia en el corto plazo. Esta falta de interés a la hora de encauzar políticas reales focalizadas en el medioambiente, por parte de los entes gubernamentales, ha llevado a los políticos a justificarse basándose en el mal estado de las finanzas públicas y la necesidad de austeridad fiscal, pero la sociedad parece sucumbir al cortoplacismo, dispuestos a sacrificar la protección del medio ambiente en aras del crecimiento económico (Laurent, 2015). Por lo que, para detener el cambio climático, no sólo son necesarias políticas eficaces y una producción energética limpia y responsable, sino también la reducción y transformación del consumo. La magnitud del problema es tal que, si no se afronta contundentemente, provocará un daño irreversible tanto a esta como a futuras generaciones.

1.5. OBJETIVO

El presente trabajo efectúa una revisión de modelos teóricos que tratan la coexistencia entre el crecimiento económico y el medio ambiente, con el objetivo último de elaborar un modelo que relacione el consumo de recursos naturales no renovables y el crecimiento económico.

Con vistas a lograr dicho objetivo, la estructura del trabajo consta de 5 apartados. El primero consiste en una introducción general al tema de medio ambiente y economía mediante la curva de Kuznets y la hipótesis de Porter. El segundo aborda modelos de crecimiento económico con tasa de ahorro constante, conteniendo un modelo de crecimiento exógeno (Solow) y uno de crecimiento endógeno: Romer de externalidades del capital. En el tercer punto se analizan los modelos de crecimiento óptimo de Ramsey y el modelo de dos sectores de Uzawa y Lucas de capital humano. El cuarto apartado tratará sobre crecimiento económico y medio ambiente, basándose en el modelo verde de Solow y en los modelos de crecimiento óptimo y contaminación de: Ramsey, el modelo con *abatement* y los modelos con contaminación con cambio tecnológico endógeno (modelo AK y de dos sectores). En el punto seis se realiza un sencillo ejercicio teórico de elaboración de un modelo de crecimiento exógeno y tasa de ahorro constante *à la Solow* en el que el consumo de un recurso natural no renovable juega un papel determinante. Por último, el trabajo se cerrará con unas conclusiones acerca del análisis efectuado.

1.6. METODOLOGÍA

Para desarrollar este trabajo se ha accedido a diversas fuentes bibliográficas. En este sentido se ha recurrido a toda suerte de literatura relacionada con el crecimiento económico y medio ambiente.

Los gráficos y tablas contenidos se han extraído en su mayoría de publicaciones y manuales de economía, aunque en algún caso se ha requerido el acceso a fuentes estadísticas y bases de datos, como AMECO.

En los dos primeros epígrafes del trabajo para analizar apropiadamente la Curva Medioambiental de Kuznets y la hipótesis de Porter se ha necesitado del apoyo de contenido de páginas web, además de los ya comentados artículos y publicaciones científicas al respecto.

La parte que corresponde al crecimiento económico se ha realizado mediante el acceso recurrente a manuales de economía, como el de Sala-i-Martín (2000): "*Apuntes de crecimiento económico*" y de Aguion y Howitt (2009): "*The economics of growth*". Por su parte, el apartado de crecimiento económico y medio ambiente, está esencialmente fundamentado en la publicación de Xepapadeas (2005): "*Economic Growth and the Environment*".

El último apartado no se ha extraído de ninguna fuente bibliográfica per sé, ya que es de elaboración propia, sin embargo, se ha fundamentado en toda la anteriormente mencionada literatura económica y científica.

2. MEDIO AMBIENTE Y ECONOMÍA

2.1. CURVA DE KUZNETS MEDIOAMBIENTAL

La Curva Medioambiental de Kuznets (CMK) fue introducida por los trabajos de Grossman y Krueger (1991), Shafik y Bandyopadhyay (1992) y Panayotou (1993) en los años noventa, que se basaron en la idea original desarrollada por Kuznets (1955) (Zilio, 2010).

La hipótesis de la CMK establece una relación en forma de U invertida[3] como se aprecia en el Gráfico 2.1, entre los ingresos (o crecimiento económico) y la contaminación del medio ambiente. Esto deja entrever que, para niveles bajos de producción el crecimiento económico conlleva un deterioro ambiental creciente, mientras que, a partir de un cierto umbral de desarrollo, esta relación se torna negativa.

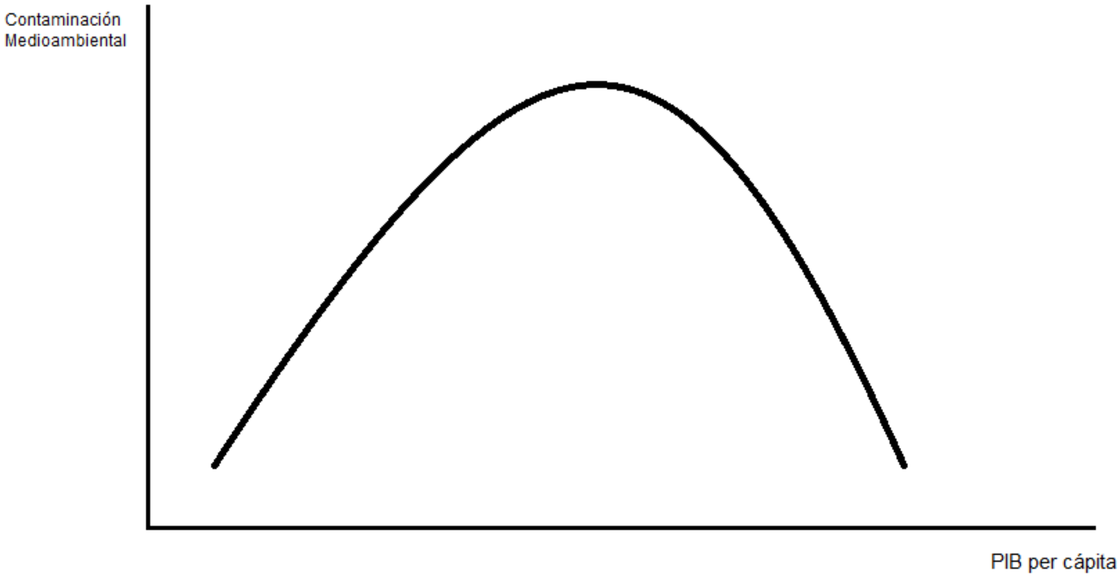
Esto se explica porque cuando un país comienza a desarrollarse el ritmo de crecimiento es elevado, pero la renta per cápita es baja, con lo que no se produce aún lo suficiente como para generar muchas emisiones contaminantes. Según se va desarrollando la economía (se incrementa la renta per cápita), los daños producidos en el medio ambiente son cada vez mayores, hasta llegar a un determinado nivel de renta, en el que la población tiene cubiertas sus necesidades básicas, y sus preocupaciones se focalizan en otros ámbitos, como son los problemas de contaminación y medio ambiente. En este punto los dirigentes de los gobiernos toman medidas orientadas a reducir las emisiones, contaminación y, buscan cuidar el entorno y concienciar a la población. Se considera que, un medio ambiente limpio es un bien de lujo, en el que el grueso de la población está dispuesta a invertir fracciones cada vez mayores de la renta nacional cuando ésta ha alcanzado unos niveles elevados (Weil, 2006).

En síntesis, según esta hipótesis a largo plazo el crecimiento económico puede ser beneficioso para el medio ambiente, siendo por tanto causa del deterioro

[3] El término proviene de la idea de Kuznets, formulada en 1955, por la cual, la desigualdad económica tendría forma de U invertida. Ésta se ve incrementada en una primera fase de industrialización económica y, posteriormente, va disminuyendo de forma progresiva. Sin embargo, el comportamiento que se da en la realidad es mucho más complejo ya que la influencia de factores es altísima y, lo que sucede en un país no es extrapolable a otro, simplemente por cuestiones culturales, poblacionales o políticas.

ambiental en el corto plazo y solución en el largo, eliminando paulatinamente las externalidades negativas ocasionadas por la actividad económica. Según Roca y Padilla (2003), la mayoría de los autores son prudentes, pero respaldan la hipótesis, ya que existe evidencia empírica basada en datos del Banco Mundial que confirmarían la CMK.

Gráfico 2.1. Curva Medioambiental de Kuznets



Fuente: elaboración propia en base a Kuznets (1955).

Diversos autores aportan diferentes puntos de vista para tratar de explicar esta relación en forma de U invertida:

- Según Arrow *et al.* (1995), este patrón podría explicarse debido al desarrollo de economías desde un punto de partida principalmente agrario, pasando por procesos industriales altamente contaminantes y finalizando en una terciarización de las mismas.
- Por otro lado, Suri y Chapman (1998), abogan por la exportación de la producción de los países avanzados a los menos desarrollados, pero este suceso no podría reproducirse indefinidamente, ya que, no existen infinitos países y cada uno más pobre que el anterior.
- Grossman y Krueger (1995) sostienen que, la etapa creciente de la CMK es debido a un efecto escala, ya que, para sostener un fuerte crecimiento económico y productivo, irremediablemente se produce una mayor generación de emisiones y residuos. En consecuencia, el

deterioro ambiental se ve incrementado. La etapa decreciente, la achacan a un efecto composición, donde se ve modificada la estructura productiva, siguiendo el mismo razonamiento que Arrow *et al.* (1995).

- Otras de las muchas aportaciones que se pueden mencionar, incluyen a Selden y Song (1995), que describen mediante un modelo de crecimiento dinámico, la relación entre una mayor renta y una mayor calidad del medio ambiente, demandada como bien de lujo.

Los trabajos que analizan la evidencia empírica son extensos, diversos y han hallado que no solo existe la relación de U invertida entre el crecimiento económico y la contaminación, sino que, según Ekins (1997), se ha demostrado que en función del contaminante estudiado, la forma que adopta dicha relación varía. Por lo tanto, la investigación de la correlación entre crecimiento económico y la degradación del medio ambiente no es tan simple. (De Bruyn y Heintz, 1999; Roca y Padilla, 2003). Los estudios realizados son ciertamente limitados debido a que los análisis no engloban a todos los elementos contaminantes.

Hay gran variedad de estudios al respecto, en los que la mayoría analizan principalmente la contaminación del aire y del agua. Siguiendo a Díaz (2007), dentro del primer grupo, por mencionar algunos autores como Holtz-Ekain y Selden (1992), Cole *et al.* (1997) o Hill y Magnani (2002), que se centraron en el CO_2, medido en emisiones per cápita. Estos observaron que se cumplía la hipótesis de la CMK, mientras que, Moomaw (1997) obtuvo resultados de una relación en forma de N entre degradación ambiental y renta per cápita. Otros como, Panayotou (1993), Shafik (1994) o Hill y Magnani (2002), emplearon como indicador la contaminación del aire por partículas emitidas de SO_2, en todos los casos se cumplía la hipótesis.

Este tipo de estudios fueron en los que más se incidió, y al no ser objetivo de este trabajo, no se va extender más la explicación, a pesar de haber gran cantidad de literatura al respecto. Sin embargo, unas conclusiones interesantes a las que llegaron diversos autores son las siguientes:

- Según Correa (2004), no queda claro cuáles pueden ser los mecanismos que produzcan la reducción en el deterioro ambiental generado por las emisiones al haber alcanzado cierto nivel de desarrollo económico.

- Arrow *et al.* (1995) señalan que el deterioro ambiental será irreversible si se excede la capacidad de carga del ecosistema y la reducción de la contaminación será estéril una vez superado el punto crítico. Al hilo de esto, Schindler (1996) expone que para recomponer el medio ambiente una vez superado dicho umbral se requerirá un empleo excesivo de recursos. Por lo tanto, es mucho más eficiente la prevención de actividades contaminantes.

2.2. REGULACIÓN MEDIOAMBIENTAL Y COMPETITIVIDAD: LA HIPÓTESIS DE PORTER

El desarrollo de una economía da pie a un proceso de modernización y avance tecnológico, lo que permite la innovación y el acceso a tecnologías y a energías menos contaminantes. La hipótesis de Porter aporta un enfoque ligado a las regulaciones o políticas medioambientales en aras de impulsar la competitividad e innovación empresarial. Conviene, en este sentido, plasmar la esencia del concepto que Porter quería trasmitir: "*las regulaciones gubernamentales estrictas pueden fomentar ventajas competitivas mediante la estimulación e incremento de la demanda local. Los estándares estrictos orientados al rendimiento, la seguridad del producto y el impacto ambiental, obligan a las empresas a mejorar la calidad, a mantenerse a la vanguardia de la tecnología y a ofrecer características que satisfagan las demandas sociales*" Porter (1990).

Porter y Van der Linde (1995) argumentan que una reducción de la contaminación (actividades de *abatement*) y de la maximización de beneficios empresariales tienen una relación directa con una buena gestión de los recursos y, por ende, de las empresas. Esto favorece la innovación empresarial, que es consecuencia de la regulación ambiental, generando una mejora en los procesos productivos tornándolos más eficientes (reducción de costes, eliminación de uso de material innecesario, menor generación de residuos). Por el contrario, la contaminación medio ambiental va ligada a un uso ineficiente de los recursos y factores productivos, lo supone un mayor gasto económico.

Por lo tanto, las actividades de *abatement* suelen venir dadas por mejoras tecnológicas, maximizando la relación *input-output*, lo que lleva a alcanzar mayores niveles de producción, con al menos el mismo (o menor) impacto ambiental, lo que repercute a su vez de forma positiva en las compañías y economías.

En base al argumento anterior, una regulación medioambiental que sea estricta, pero que a su vez permita cierta flexibilidad a la hora de la elección de las medidas para alcanzar el objetivo fijado, conseguirían como resultado beneficios sociales. Esto es debido al incentivo de las empresas a invertir en I+D+i (para cumplir con la normativa de emisiones), intentando lograr una mayor eficiencia, obteniendo productos y generando procesos que, a largo plazo, son más benévolos con el medio ambiente. Porter y Van der Linde, 1995; Panayotou y Vincent, 1997).

Porter y van der Linde (1995) realizaron un análisis en base a un informe, el cual exponía que plantas químicas estadounidenses comenzaron a invertir en actividades de reducción de residuos generados en respuesta a las regulaciones medioambientales implantadas por el gobierno. La inversión en estas actividades no solo suponía un incremento de los costes de las plantas, sino que generaron aumentos en la producción (en torno a un 7% de media).

Esto no ha sido un hecho aislado, ya que, Barbera y McConnell (1990) demostraron que regulaciones ambientales han logrado que en industrias de materiales ferrosos se utilicen técnicas más eficientes y menos dañinas con el entorno. Sin embargo, otros autores como Jaffe y Palmer (1994) han llegado a conclusiones opuestas, debido a que, el control de contaminación exigía un incremento del gasto en I+D+i, mientras que, éste no repercutía de forma positiva en el indicador de solicitud de nuevas patentes.

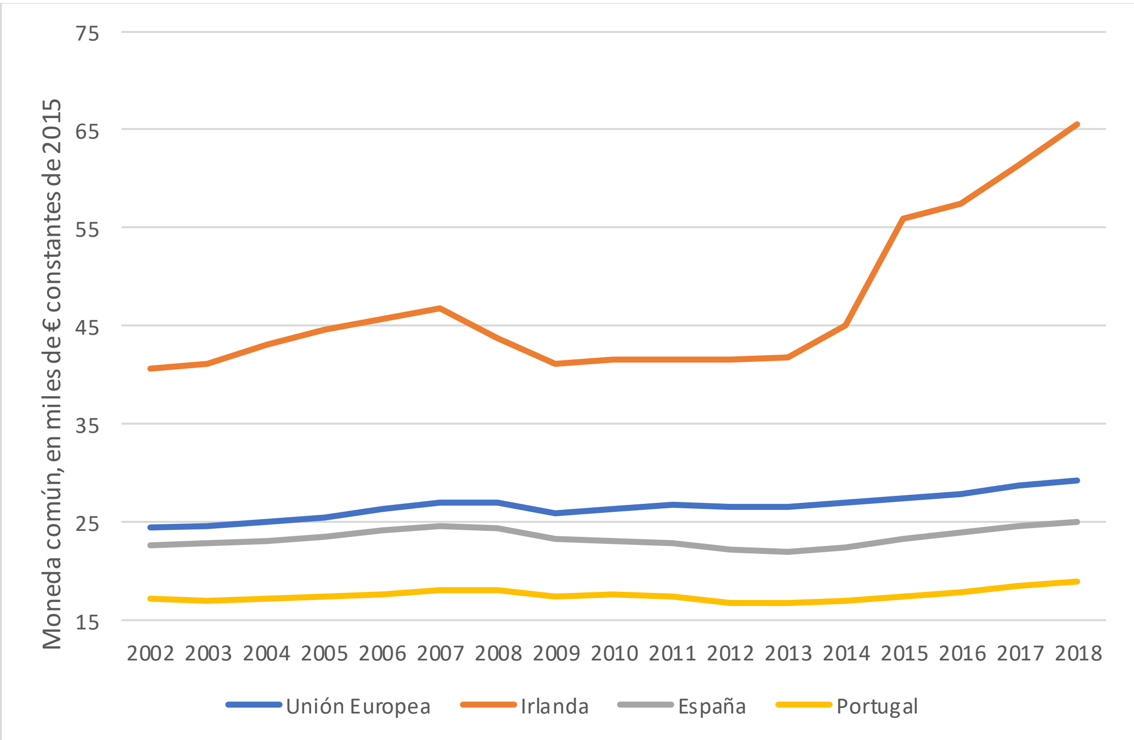
3. MODELIZACIÓN DEL CRECIMIENTO ECONÓMICO

El crecimiento económico es posiblemente la rama más estudiada de la economía, en aras a explicar por qué unos países son más ricos, por qué crecen más que otros, y por qué alcanzan costas superiores de bienestar teniendo situaciones similares de partida. A este respecto, el Gráfico 3.1

muestra la evolución de tres países pertenecientes a la eurozona: Irlanda, Portugal y España, además de la media de la Unión Europea. Queda patente que el crecimiento de la economía irlandesa ha sido bastante superior al resto.

A pesar de ello, ha sufrido baches al igual que los otros países, ya que, junto a España, Grecia y Portugal, fue una de las más afectadas por la crisis de 2007, sin embargo, la aplicación de políticas fiscales diferentes a las de otros países han logrado un resultado claramente superior al de sus vecinos. Mientras que, España y Portugal han sufrido un estancamiento los últimos años, Irlanda pasó de una renta per cápita media de aproximadamente 40.000 € en 2002 a 65.000 € en 2018, aproximadamente. Por datos como éste, es tan interesante y, se lleva tanto tiempo estudiando y modelizando el crecimiento económico, tratando así de optimizar los recursos finitos disponibles y de establecer, en consecuencia, unas políticas económicas cada vez mejores.

Gráfico 3.1. Evolución del PIB pc a precios constantes, 2002-20018.



Fuente: elaboración propia con datos de AMECO.

Desde Adam Smith en el s. XVIII hasta actuales economistas como Nordhaus, Barro o Sala-i-Martín, pasando por Keynes o Schumpeter a principios del s. XX, han hecho aportaciones a la teoría del crecimiento. Sin embargo, ya que la materia es muy extensa, este trabajo se centrará en la corriente neoclásica, desarrollada a partir de las décadas de los años 50 y 60, partiendo del modelo de Solow (1956) y Swan (1956).

Los autores Robert Solow (1956) y Trevor Swan (1956)[4] crearon un modelo que explica cómo se puede incrementar la tasa de crecimiento de una economía, mediante la política económica, induciendo a la gente a ahorrar más. El modelo se basa en un supuesto de tasa de ahorro constante, caracterizado por que los individuos ahorran en cada instante de tiempo una proporción fija de su renta $s = sy_t$, y lo que no ahorran lo consumen $c_t = (1 - s)y_t$.

Posteriormente, Cass (1965) y Koopmans (1965)[5] partiendo del trabajo de Ramsey (1928), elaboraron un modelo de crecimiento óptimo en el que se abandona el supuesto de tasa de ahorro constante. Esto supuso la consideración de que los individuos ya no obtienen unos ingresos fijos y una capacidad de ahorro durante toda su vida, sino que en base sus preferencias, los individuos ahorran buscando alisar o suavizar el consumo durante su ciclo vital. Por ello, en función del periodo en el que se encuentre dicho individuo, se puede dar prioridad a un mayor consumo presente que a uno futuro, o viceversa, en función de sus preferencias y siempre buscando maximizar su utilidad individual.

Tanto el modelo de Solow como el de Ramsey, a la hora de estudiarlos con mayor facilidad, se incluyen en **la familia de modelos crecimiento exógeno o con progreso tecnológico exógeno.** La función de producción que utilizan, de tipo neoclásico, no es capaz de predecir crecimiento a largo plazo, salvo que éste se genere mediante mejoras en la tecnología producidas de forma externa, ajenas al modelo. La incapacidad de contemplar progreso técnico obedece a que, en un contexto competitivo, a largo plazo no hay recursos con los que financiar las actividades de I+D+i, de ahí que de existir mejoras tecnológicas su evolución ha de ser exógena, y de no contemplarse, el crecimiento per cápita en estado estacionario será cero por los rendimientos decrecientes del capital propios de la función de producción neoclásica.

[4] A partir de ahora se le hará referencia, por simplicidad, como modelo de Solow
[5] A partir de ahora se le hará referencia, por simplicidad, como modelo de Ramsey

Tras las décadas de los 50 y 60, llegaron los años 70 donde predominaron modelos macroeconómicos caracterizados por su gran complejidad matemática e irrelevancia explicativa. La deriva de las investigaciones llevó a teorías enfocadas en el ciclo económico y en el corto plazo. Sin embargo, pasados casi 20 años desde el modelo de Ramsey (1965) a mediados de la década de los 80, Paul Romer (1986) publicó un nuevo modelo de crecimiento, el modelo de externalidades del capital.

Éste era capaz de explicar el crecimiento positivo a largo plazo sin necesidad de introducir ninguna variable que creciese de forma exógena, a diferencia del modelo de Solow. Algo no cuadraba en los modelos de progreso tecnológico exógeno, ya que era más que razonable que este cambio en la tecnología fuese consecuencia de decisiones económicas, debido a que se lograba por la búsqueda de innovaciones y mejoras llevadas a cabo por las empresas, en aras de, lograr beneficios extraordinarios. Por lo que, la tecnología es algo intrínseco al sistema y, se supone que, cuando se acumula capital, el aprendizaje por la práctica genera un progreso tecnológico que tiende a elevar el producto marginal del capital, compensando así la tendencia a que el producto marginal disminuya cuando la tecnología no cambia.

A raíz de este modelo, se inicia la corriente de modelos de crecimiento endógeno. Otros autores que realizaron sus publicaciones tras el trabajo de Romer fueron: Lucas (1988), del que se analizará el modelo de crecimiento óptimo con capital humano de dos sectores, Rebelo (1991) y Barro (1991).

En este trabajo se describirán cuatro modelos explicativos del crecimiento económico, representativos de los dos considerandos de fondo (exógenos vs, endógenos) y de forma (tasa de ahorro constante vs. óptima):

- Modelo de crecimiento con tasa de ahorro constante y progreso tecnológico exógeno: Modelo de Solow (1956).
- Modelo de crecimiento con tasa de ahorro constante y progreso tecnológico endógeno: Modelo de Romer de externalidades del capital (1986).
- Modelo de crecimiento óptimo y progreso tecnológico exógeno: Modelo de Ramsey (1965).

- Modelo de crecimiento óptimo y progreso tecnológico endógeno: Modelo de Lucas óptimo con capital humano de dos sectores (1988).

3.1. MODELOS CON TASA DE AHORRO CONSTANTE

Como se ha comentado en el punto introductorio, normalmente la modelización del crecimiento económico se subdivide en: modelos de tasa de ahorro constante (objeto de este apartado) y de optimización. Los primeros son más básicos, ya que simplifican la realidad de forma notable, porque los individuos no ahorran por igual en todos los periodos de su vida.

Dentro de esta familia de modelos se va a desarrollar el modelo de crecimiento exógeno de Solow (1956), como no podía ser de otra forma, ya que es la base sobre la que se construyeron gran cantidad de modelos neoclásicos. Robert Solow en 1956 publicó “Una contribución a la teoría económica del crecimiento”. Por este *paper* y posteriores trabajos, se le otorgó el premio Nobel en 1987 (Jones, 1998). También se va a analizar el modelo de Romer (1986) de externalidades del capital, siendo uno de los primeros modelos de crecimiento endógeno. Romer introdujo de forma elegante modificaciones en la función de producción neoclásica, logrando la consecución de un modelo que explicaba un crecimiento producido de forma “natural” en la economía, sin necesidad de estímulos externos.

Para estos modelos se van a seguir principalmente los capítulos 1 y 2 de Apuntes de crecimiento económico de Sala-i-Martin (2000), respectivamente

3.1.1. Modelo de crecimiento exógeno: modelo de Solow

El modelo que Solow propuso una simplificación donde las familias son las propietarias de los factores de producción y de la tecnología, no existen ni mercados ni empresas, por lo tanto, no se producen intercambios entre agentes. A este planteamiento se le llama de familias productoras o Robinson-Crusoe. Como principales características de este modelo se encuentran:

- Economía cerrada y sin sector público. No existen importaciones, exportaciones ni gasto público, ni impuestos. El crecimiento económico está fundamentado en la inversión en capital físico.
- Función de producción neoclásica. Depende del trabajo (L_t), capital (K_t) y tecnología (A_t). Siendo en este modelo $A_t = A$, ya que se considera el progreso tecnológico constante.

$$Y_t = F(A, K_t, L_t)$$

Las propiedades que cumple esta función son tres:

  - Rendimientos constantes a escala: si se incrementa en la misma cantidad el factor trabajo y capital, el producto final crece en la misma cuantía. La expresión es la siguiente: $F(\lambda K, \lambda L, A) = \lambda F(K, L, A)$ se cumple la propiedad matemática de homogeneidad de grado 1. Sin embargo, A no se multiplica, debido a que la tecnología es replicable, y el supuesto de Rendimientos Constantes de Escala se aplica solamente a K_t y L_t.
  - Rendimientos decrecientes de los factores de producción: la productividad marginal de los factores de producción (K_t y L_t) es positiva, pero decreciente. $\frac{\delta F}{\delta K} > 0, \frac{\delta F}{\delta L} > 0$: $\frac{\delta^2 F}{\delta K} < 0, \frac{\delta^2 F}{\delta L} < 0$
  - Satisfacción de las condiciones de Inada: la productividad marginal del capital ha de aproximarse a cero cuando éste tiende a infinito, y viceversa. Se expresa analíticamente de la siguiente manera: $\lim_{K \to \infty} \frac{\delta F}{\delta K} = 0, \lim_{K \to 0} \frac{\delta F}{\delta K} = \infty$ (de la misma forma sería la expresión con el factor trabajo).

Como función de producción se utilizará la Cobb-Douglas:

$$Y_t = A{K_t}^{\alpha}{L_t}^{1-\alpha};\ A > 0, 0 < \alpha < 1 \tag{3.1}$$

- La población crece a una tasa exógena y constante:

$$n = \frac{\dot{L}}{L} \tag{3.2}$$

- Equilibrio:

$$I_t = S_t \tag{3.3}$$

- Tasa de ahorro constante y exógena, es decir, las familias consumen una porción de su renta, ahorrando el resto: $C_t = (1-s)Y_t$, donde s es la tasa de ahorro de los consumidores, que es constante. $0 < s < 1$. Este el gran supuesto diferenciador entre los modelos de crecimiento con tasa de ahorro constante, y los modelos de crecimiento óptimo, que se estudiarán en apartados posteriores, donde los individuos deciden lo que consumir en cada periodo para maximizar su función de utilidad. Todo lo que no se consume se ahorra, es decir, se invierte, como podemos ver en la siguiente ecuación:

$$sY_t = I_t = S_t \tag{3.4}$$

Para obtener la función de acumulación de capital (el capital se acumula en base a la inversión realizada y se deprecia a la tasa δ). Si igualamos las ecuaciones (3.2) y (3.4), obtenemos la expresión de acumulación de capital (3.5)[6]. Esta es una ecuación fundamental del modelo de Solow, que indica cómo se determina la tasa de crecimiento del capital de forma instantánea.

$$\dot{K}_t = I_t - \delta K_t = sY_t - \delta K_t \tag{3.5}$$

La resolución del modelo se realiza en términos per cápita ($y_t \equiv \frac{Y_t}{L_t}, k_t \equiv \frac{K_t}{L_t}$), junto con el supuesto del crecimiento de la población a una tasa constante y exógena *n,* se tiene que:

$$y_t = A{k_t}^{\alpha} \tag{3.6}$$

$$\dot{k} = sy - (n+\delta)k \tag{3.7}$$

Si se introduce la ecuación (3.6) en la (3.7), se tiene como resultado la ecuación fundamental del modelo Solow. Si ésta se sustituye por la función de producción Cobb-Douglas, se tiene dicha ecuación fundamental en sus dos versiones, como ecuación de acumulación (3.8) y como tasa de crecimiento (3.9).

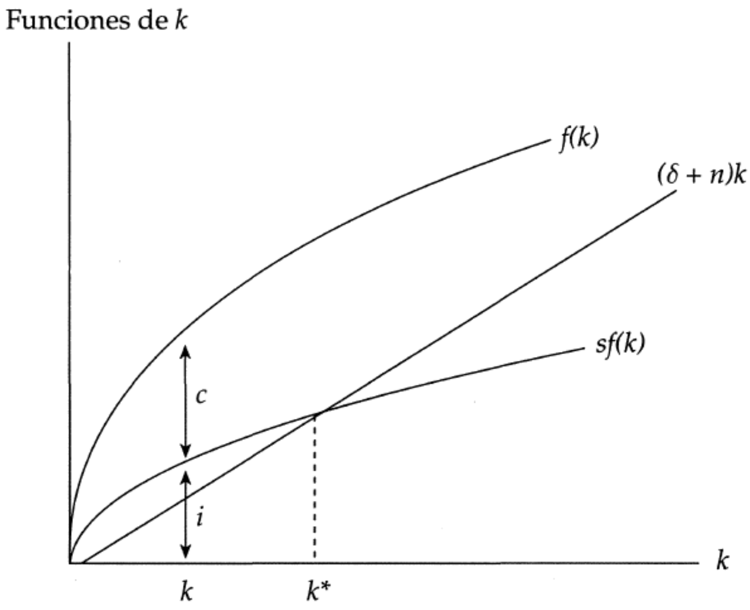
[6] Como suponemos que el tiempo es continuo, se asume que la derivada de la inversión respecto del tiempo es $\dot{K}$.

$$\dot{k_t} = sAk_t{}^{\alpha} - (n+\delta)k_t \tag{3.8}$$

$$\gamma_k = \frac{\dot{k_t}}{k_t} = sAk_t{}^{\alpha-1} - (n+\delta) \tag{3.9}$$

La ecuación (3.8) nos indica el incremento del stock de capital per cápita en función de la tecnología, la propensión al ahorro, la depreciación del capital o la tasa de crecimiento de la población y del propio capital ya existente. Esta expresión se cumple en cada instante del tiempo, como indican los subíndices.

Gráfico 3.2. Diagrama de Solow



Fuente: Apuntes de crecimiento económico, Sala-i-Martín (2000).

En el Gráfico 3.2 podemos apreciar tres curvas diferentes, $f(k), (\delta + n)k$ y $sf(k)$, siendo las dos últimas la curva de depreciación (CD) y la curva de ahorro (CA), respectivamente. La pendiente de $f(k)$ toma esa forma debido a las condiciones de Inada, si se emplea la función habitual Cobb-Douglas, el resultado sería idéntico. La CA y CD se cruzan únicamente en un punto, (si no se tiene en consideración el origen) que determina el estado estacionario (EE) y viene señalado en el Gráfico 3.2 por k_t* (capital del EE).

El EE, es un punto de equilibrio (pudiendo haber más de uno) donde el crecimiento de la economía es constante. En este modelo se da porque se ha ido ahorrando e invirtiendo una fracción de los ingresos, lo que hace incrementar el stock de capital, sustituyendo así el que se va depreciando. Sin embargo, como se puede observar en el Gráfico 3.3 la curva de ahorro es decreciente, por lo que va a llegar un instante en el que la cantidad invertida va a ser igual a la depreciación, en ese instante, la economía no dispondrá de recursos con los que incrementar el capital, alcanzando un estado estacionario.

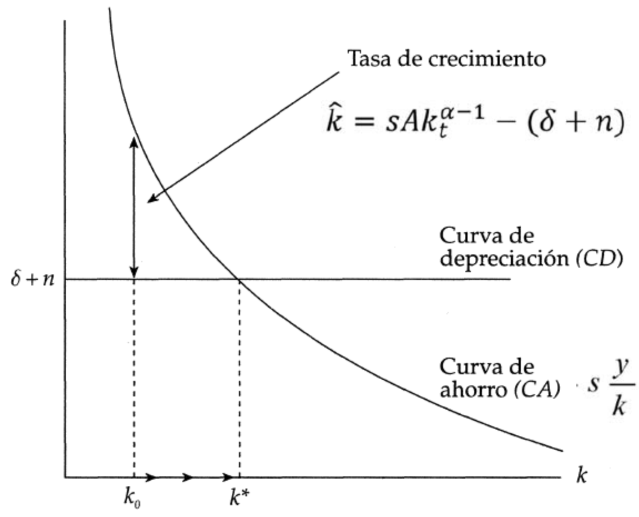
Éste se alcanza cuando la tasa de acumulación del capital es cero ($\dot{k}_t = 0$), cómo se ha comentado, es el punto donde la curva de depreciación del capital y la curva de ahorro se cruzan (k_t*), el capital se mantiene invariante de forma indefinida, viene señalado en la siguiente ecuación:

$$k_t{}^* = (\frac{sA}{n+\delta})^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad (3.10)$$

En el EE el crecimiento se estanca, la economía no crece ($\gamma^*{}_y$). El razonamiento es consecuencia de los rendimientos decrecientes del capital. Esto se aprecia de forma más clara en el Gráfico 3.3. Cuanto menor es el nivel de capital inicial (k_0), éste genera una mayor producción, es decir, un mayor crecimiento de la economía, sin embargo, debido a la hipótesis de partida de la productividad marginal decreciente del capital, cada unidad del mismo va a generar menor crecimiento que la anterior hasta alcanzar el EE.

El stock de capital en EE, referido en la ecuación (3.10) se mantiene inalterado, por lo tanto, el crecimiento de la economía es cero, ya que el nivel del PIB es constante. Por lo que, todas las variables per cápita en EE permanecen constantes, por ende, sus tasas de crecimiento son cero ($\gamma^*{}_y = \gamma^*{}_k = \gamma^*{}_c = 0$).

Gráfico 3.3. Dinámica de transición



Fuente: Apuntes de Crecimiento Económico, Sala-i-Martín (2000),

En conclusión, como la función de producción es neoclásica, la economía se acerca de forma inexorable al punto donde la economía deja de crecer. Además, no es posible aplicar la situación lógica de reducir la inversión por parte de los individuos ya a que cada vez se obtiene un menor retorno (menor producción), debido al supuesto de la tasa de ahorro constante. Por lo que, el modelo de Solow de crecimiento exógeno, no explica el crecimiento económico a largo plazo. Solamente sucedería si se diesen mejoras de la tecnología porque sí, de forma inexplicable.

El progreso tecnológico exógeno, según Sala-i-Martin (2000), es el gran problema del modelo neoclásico. Esto está fundamentado en los rendimientos constantes de los factores de producción (K_t y L_t) y, en base a otro de los supuestos neoclásicos, el de competencia perfecta. Por desgracia, esto implica la no existencia de recursos ociosos en la economía una vez retribuidas las rentas del trabajo y del capital, por lo que, no es posible realizar inversiones en I+D y, el incentivo para innovar depende en gran medida de las políticas relativas a la competencia, la propiedad intelectual y el comercio internacional, entre otros aspectos. Pero el modelo neoclásico sigue siendo útil, porque su análisis de cómo la acumulación de capital afecta a la renta nacional, a los salarios reales y a los tipos de interés reales de cualquier estado de la tecnología es tan válido cuando la tecnología es endógena como cuando es exógena.

Debido a la insatisfacción producida por la obligatoriedad de la inclusión del progreso tecnológico exógeno, se desarrollaron nuevos modelos, como el de Romer (1986) que se verá a continuación, los cuales modificaron algunos de los supuestos neoclásicos.

3.1.2. Introducción a los modelos de crecimiento endógeno

El modelo de Romer (1986) produjo un efecto disruptor en la tendencia modelizadora de la época, el estudio de los ciclos económicos, volviendo así a captar el interés de los teóricos por el crecimiento económico. Creó el primer modelo de crecimiento endógeno, explicativo de la existencia de crecimiento económico a largo plazo sin necesidad de introducción de progreso tecnológico exógeno. Su modelo fue el precursor de los denominados modelos *AK*, en los que la producción es una función lineal del stock de capital ($Y_t = AK_t$), cuyas propiedades son las siguientes:

- Rendimientos constantes a escala (igual que la función neoclásica).
- **Rendimientos** positivos, pero **no decrecientes del capital,** ya que se tiene: $\frac{\delta Y}{\delta K} = A$; $\frac{\delta^2 Y}{\delta K} = 0$.
- **No satisfacción de las condiciones de Inada**, debido a que la productividad marginal del capital es *A* en todo instante.

El incumplimiento de la segunda propiedad es fundamental para que se dé crecimiento endógeno a largo plazo, el cual dependerá de factores económicos como el ahorro y la eficiencia en la asignación de recursos.

Una alternativa a esta consideración simplista, origen de otra corriente de modelos de crecimiento endógeno, se fundamenta en la eliminación del supuesto de competencia perfecta, que implicaba beneficios a largo plazo nulos, pasando a existir competencia imperfecta entre las empresas. Lo que hace que las empresas compitan por generar beneficios, ya que ahora sí que pueden ser positivos (o negativos) a largo plazo, lo que justifica la posibilidad de financiar actividades de I+D, explicando así la existencia de progreso tecnológico endógeno.

3.1.3. Modelo de crecimiento endógeno: Romer (1986), externalidades del capital.

Una vez realizada esta breve explicación de la tecnología AK y del modelo más básico que la emplea, se va a proceder con el desarrollo del modelo de externalidades del capital de Paul Romer (1986), siguiendo a Sala-i-Martin (2000).

Romer utilizó una función de producción neoclásica a la que introdujo externalidades de capital, como se puede ver en (3.11). Una externalidad de capital se entiende como *spillovers* de conocimiento, que provienen de algo tan inherente al ser humano como es el aprendizaje por la práctica (*learning by doing*), ya utilizado por Arrow (1962) para explicar el progreso tecnológico (Aguion y Howitt, 2009). Este concepto es extrapolable al ámbito empresarial, ya que, si una empresa dedica parte de sus recursos a inversión para incrementar su stock de capital, está aumentando de forma indirecta la producción de empresas circundantes. Los conocimientos pueden ser aprovechados, al igual que la experiencia. Este fenómeno se puede observar fácilmente en los clústeres, agrupaciones empresariales o parques tecnológicos, donde se aglomeran buscando economías de escala[7].

Por consiguiente, la función de producción es:

$$Y_t = A{K_t}^{\alpha}{L_t}^{1-\alpha}{\kappa_t}^{\eta} \tag{3.11}$$

donde η es la importancia de la externalidad, siendo 0 el valor mínimo y 1 el máximo. Cuando $\eta = 0$, la función de producción sería Cobb-Douglas, idéntica a la neoclásica ya vista anteriormente en el modelo de Solow.

A la hora de trabajar con la expresión (3.11) se va a seguir el procedimiento de Lucas (1988) en el que ${K_t}^{\eta} = {k_t}^{\eta}$ es el capital per cápita. Por lo que operando:

[7] Las empresas tratan de alcanzar su producción óptima reduciendo al mínimo sus costes. Es más fácil de lograr si las economías se aglomeran, ya que la información fluye entre los agentes y es posible compartir costes (Navarro, J).

$$Y_t = AK_t{}^{\alpha+\eta} L_t{}^{1-\alpha-\eta} \tag{3.12}$$

$$y_t = Ak_t{}^{\alpha+\eta} \tag{3.13}$$

$$\dot{k_t} = sAk_t{}^{\alpha+\eta} - (n+\delta)k_t \tag{3.14}$$

$$\gamma_k = sAk_t{}^{\alpha+\eta-1} - (n+\delta) \tag{3.15}$$

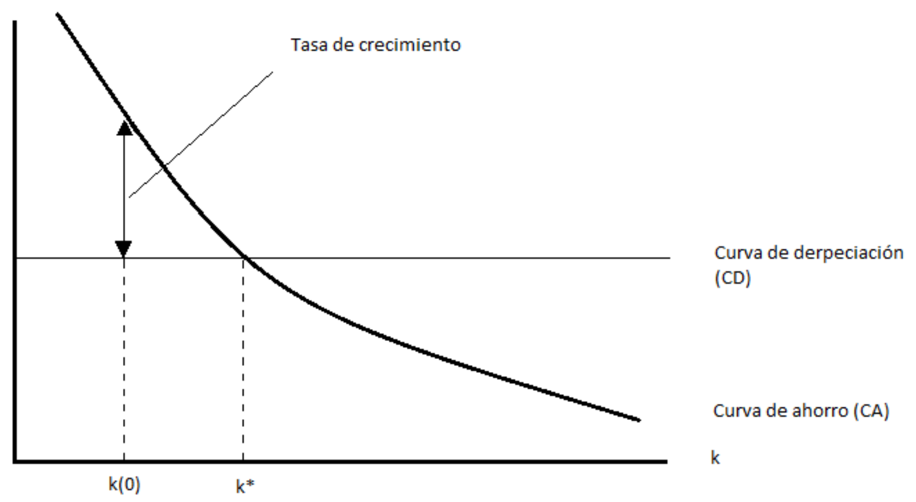
En consecuencia, se obtiene la ecuación de acumulación (3.14) y la de la tasa de crecimiento del capital (3.15). Éstas serían idénticas a las del modelo de Solow, sin embargo, aparece como factor diferencial la externalidad en el exponente del stock del capital. Como se puede apreciar, dependiendo de los valores que tomen los parámetros α y η, el estado en el que se halle la economía diferirá, para ello y, en base a la ecuación (3.15), se van a estudiar los posibles casos del exponente $\alpha + \eta - 1$ para ver cómo afecta a la economía:

- Si $\alpha + \eta < 1$. Las externalidades son positivas pero pequeñas, por lo que se cumple esa expresión. Si se halla la tasa de crecimiento del capital y se busca el punto en el que se encontraría el óptimo del capital ($k_t{}^*$), idéntico al de Solow. Logrando así un EE estable, ya que como se puede observar en el Gráfico 3.3, a la izquierda de $k_t{}^*$, se tiene que $\gamma_k > 0$, sucediendo lo opuesto a la derecha. Por lo tanto, si una economía se encuentra con un capital inicial superior o inferior a $k_t{}^*$, ésta va a terminar convergiendo inevitablemente hasta obtener el stock del capital del EE ($k_t{}^*$), donde el crecimiento es nulo.

$$\gamma_k = \frac{sA}{k_t{}^{1-\alpha-\eta}} - (n+\delta) \tag{3.16}$$

$$k_t{}^* = (\frac{sA}{n+\delta})^{\frac{1}{1-\alpha-\eta}} \tag{3.17}$$

Gráfico 3.4. Dinámica de transición caso $\alpha + \eta < 1$



Fuente: elaboración propia a partir de Sala-i-Martin (2000).

- Si $\alpha + \eta = 1$. Se sustituye, de nuevo, en la ecuación (3.15) y se tiene como resultado que la tasa de crecimiento del capital ya no depende del stock de capital $\gamma_k = sA - (n + \delta)$. Ésta coincide con la de los modelos AK, una tasa de crecimiento constante e igual a cero. Lo que lleva a la conclusión de que la economía cubre las necesidades de reposición (sA > $(n + \delta)$), situando la CA por encima de la CD, se tiene que la economía crece de forma continuada a una tasa constante y positiva, siendo ésta la diferencia entre la CA y la CD.
- Si $\alpha + \eta > 1$. En este caso, se aprecia que, el exponente es mayor a cero, debido a que la externalidad es grande. El EE alcanzado es inestable, ya que, en el momento que la tasa de crecimiento del capital es mayor que cero, el crecimiento de la economía se tenderá a infinito. En caso contrario, si ésta adquiere una tasa de crecimiento del capital negativa, se verá abocada a la desaparición. Por lo que este caso no es realista

Las diferencias esenciales entre el modelo de externalidades del capital de Romer y el de Solow-Swan, son las siguientes:

- La tasa de crecimiento de la economía ya no da por supuesto el crecimiento de variables de forma exógena y continua, es decir, éste se produce de forma endógena.
- Las tasas de ahorro tienen una gran implicación en las de crecimiento económico, ya que como se ha podido apreciar en el supuesto $\gamma_k = sA - (n + \delta)$, una mayor tasa de ahorro, supondría un mayor nivel para la CA, lo que incrementaría el diferencial entre la CA y la CD, ergo, la tasa de crecimiento de la economía sería mayor. Esto no sucedería en el modelo de Solow, si bien es cierto, que la CA se desplazaría hacia la derecha, pero no afectaría al crecimiento económico de largo plazo, que terminaría convergiendo a un EE con crecimiento cero. El mismo razonamiento se podría seguir disminuyendo la tasa de depreciación o el crecimiento de la población, en busca de incrementar el crecimiento de la economía.
- La economía ya no tiende hacia un EE de crecimiento cero, ya que, el crecimiento es constante debido a la ausencia de rendimientos decrecientes del capital, siendo ahora no decrecientes[8].
- No se predicen convergencias: ni en niveles ni absolutas en términos de crecimiento per cápita de los países.
- Se producen sendas de crecimiento estables. En caso de producirse una perturbación negativa, como un desastre natural, en los modelos de crecimiento endógeno la tasa a la que crece la economía no va a verse afectada, sin embargo, el nivel de stock de capital alcanzado por la economía se reducirá, ya que la pérdida será irrecuperable.

3.2. MODELOS DE CRECIMIENTO ÓPTIMO

Los modelos con tasa de ahorro constante establecen como supuesto clave el ahorrar una proporción constante de la renta (sY_t). Sin embargo, en los modelos de crecimiento óptimo los individuos van a tratar de optimizar su consumo a lo largo del tiempo[9]. Para estos modelos se van a seguir los

[8] Véase la introducción del apartado 3.1.2
[9] Véase la introducción del apartado 3

capítulos 3 y 7 de Apuntes de crecimiento económico de Sala-i-Martin (2000), respectivamente.

En el primer apartado se va a desarrollar el modelo de Ramsey (1965), que emplea una función de producción con un progreso tecnológico exógeno, en el que se van a analizar las tres posibles formas de resolución del modelo, explicando sus similitudes y diferencias. A saber, el modelo de mercado, donde las familias y empresas interactúan. El supuesto ya conocido de familias productoras o de Robinson-Crusoe, en el que las familias son productoras y consumidoras y, por último, el modelo del planificador.

En el segundo epígrafe del punto se va a estudiar el modelo de crecimiento endógeno de dos sectores de Uzawa (1965)-Lucas (1988). El cual introduce el complejo supuesto del capital humano, con todas sus implicaciones en el crecimiento económico, además del mantenimiento del sector del capital físico. No es necesario mencionar que la inversión en capital humano es una de las que mayor rendimiento y productividad pueden otorgar tanto a un nivel individual como a una nación.

3.2.1. Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

El planteamiento del modelo de Ramsey-Cass-Koopmans[10] distingue tres posibles enfoques:

- Modelo de mercados: las familias son las poseedoras de los activos financieros y del factor trabajo, por los que van a percibir unos rendimientos: tipo de interés y salario, respectivamente. Por otro lado, las empresas, acuden al mercado buscando alquilar trabajo y capital a cambio del pago de un salario y un alquiler. Por lo que, familias y empresas satisfacen sus deseos a modo de intercambio en el mercado, se logra un equilibrio.
- Robinson-Crusoe: escenario en el que las familias son a la vez productoras y consumidoras. Los supuestos son los siguientes: economía cerrada, existencia de un único bien (la producción se destina

[10] A partir de ahora se referirá como modelo de Ramsey solamente y no como modelo de Ramsey-Cass-Koopmans.

a consumo o inversión), pleno empleo de recursos, tasa de depreciación del capital δ, y de crecimiento de la población n. Poco realista, es el escenario utilizado también en el modelo de Solow.

- Planificador: El planificador es una invención. Este ente va a tomar las decisiones óptimas en cada instante. Si el equilibrio que logran las familias es el mismo que el del planificador, se concluirá con que éstas habrán alcanzado el óptimo.

3.2.1.1. Modelo de mercados

El **comportamiento de las familias neoclásicas** viene descrito por:

- Horizonte temporal infinito.
- Función de utilidad instantánea que depende del consumo per cápita $U(c_t) = \frac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta}$. De esta función podemos extraer que si $\theta = 1$ la función sería la logarítmica teniendo un consumo constante. En caso de $\theta = 0$, la función sería lineal, valorando los individuos un consumo estable.
- $L_t = L_0 e^{nt}$ población en el instante "*t*". El crecimiento de la población no es constante, sino que crece a una tasa n .
- ρ es la tasa de descuento. Cuanto más grande sea habrá preferencia por el consumo presente al futuro.

La función de utilidad intertemporal a maximizar por las familias es:

$$U(0) = \int_0^{\propto} e^{-pt} u(c_t) L_t dt = \int_0^{\propto} e^{-\rho t} \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} L_t dt \tag{3.18}$$

La renta de una familia se puede distribuir de dos formas: consumo o adquisición de nuevos activos. Se denota en términos per cápita, siendo "b_t" la cantidad de activos:

$$\dot{b_t} = w_t + r_t b_t - c_t - n b_t \tag{3.19}$$

Por lo que si sustituimos $L_t = L_0 e^{nt}$ en la ecuación (3.18), simplificando $L_0 = 1$, obtenemos la expresión a maximizar sujeto a la restricción intertemporal:

$$Max\ U(0) = \int_0^{\propto} e^{-(\rho-n)t} \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt$$ [11]

$$sa: \dot{b_t} = w_t + r_t b_t - c_t - nb_t$$

El problema de optimización dinámico se resuelve mediante el método del Hamiltoniano, siendo la variable de control c_t, la variable estado b_t y λ_t el precio sombra o multiplicador de Lagrange.

$$H = e^{-(\rho-n)t} \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \lambda_t [w_t + r_t b_t - c_t - nb_t] \qquad (3.20)$$

Las condiciones de primer orden son las siguientes:

$$H_c = 0;\ e^{-(\rho-n)t} \frac{1-\theta}{1-\theta} c_t^{-\theta} - \lambda_t = 0 \qquad (3.21)$$ [12]

$$H_b = -\dot{\lambda}; -\dot{\lambda} = \lambda_t (r_t - n) \qquad (3.22)$$

$$\lim_{t \to \propto} \lambda_t b_t = 0 \qquad (3.23)$$ [13]

Posteriormente se halla la expresión de la tasa de crecimiento del consumo[14] (γ_c):

$$\gamma_c = \frac{\dot{c_t}}{c_t} = \frac{1}{\theta} \left[-\frac{\dot{\lambda_t}}{\lambda_t} - \rho + n \right] \qquad (3.24)$$

Sustituyendo la ecuación (3.22), se obtiene la ecuación:

$$\gamma_c = \frac{1}{\theta} [r_t - \rho] \qquad (3.25)$$

La expresión (3.25) es consecuencia del comportamiento optimizador de las familias, denominada ecuación de Euler, donde claramente se observa que el consumo depende del tipo de interés y de la tasa de descuento intertemporal, es decir, el “premio” y el “coste “de no consumir. Sin embargo, para realizar un

[11] $\rho > n$ si no se cumpliese no se podría calcular ya que tendería a infinito la exponencial.
[12] La nomenclatura H_c hace referencia a la derivada parcial del Hamiltoniano respecto del consumo.
[13] Condición de transversalidad. Implica que el consumo al final de su vida ha de ser 0. Si el consumo es óptimo no sería coherente dejar riquezas o deudas.
[14] Hay que tomar logaritmos a la expresión (3.21)

mejor análisis, se pueden reordenan los términos de la siguiente forma: $\gamma_c\theta + \rho = r_t$. Para un individuo, el término a la izquierda de la ecuación indica la satisfacción que proporciona el consumo, mientras que, el tipo de interés señala el rendimiento del ahorro. Un individuo, impaciente tendrá grandes preferencias por el consumo presente, mientras que otro preocupado por el devenir económico, seguramente, desee alcanzar tasas de consumo mayores en el futuro.

Se puede apreciar que cuanto menor sea θ menos se valora la cantidad a consumir, ya que se linealiza la función. Cuanto mayor sea, más se valora consumir la misma cuantía en los periodos, lo que supone una menor tasa de crecimiento del consumo.

Por su parte, el **comportamiento de las empresas**, se basa en, el alquiler de capital (K_t) a un precio (R_t) y la contratación de trabajadores (L_t) a los que pagan un salario (w_t). Éstas fabrican productos, que para simplificar el modelo venden a un precio unitario p=1. Se emplea la función de producción ($F(K_t) = Y_t = AK_t{}^{\alpha}L_t{}^{1-\alpha}$) que satisface las propiedades comentadas con anterioridad: rendimientos constantes de escala, productividad marginal de los factores de producción positiva pero decreciente y satisfacción de las condiciones de Inada.

Por ello, es posible calcular la tasa de beneficio que obtendrían los capitalistas por el alquiler de una unidad $R_t - \delta$. Como se comentó en la introducción, las empresas pagan a un tipo de interés por el alquiler del capital a las familias, por lo que, los rendimientos de los activos coinciden con los del capital, es decir: $r_t = R_t - \delta$, al situarse el modelo en un contexto de certeza, donde no hay cabida para la incertidumbre futura.

Por lo tanto, el comportamiento de las empresas es el de maximizar beneficios, obteniendo la siguiente expresión:

$$\pi = Y_t - w_tL_t - R_tK_t = AK_t{}^{\alpha}L_t{}^{1-\alpha} - w_tL_t - (r_t + \delta)K_t \tag{3.26}$$

En términos per cápita:

$$\pi = Ak_t{}^{\alpha} - (r_t + \delta)k_t \tag{3.27}$$

Maximizando la ecuación (3.27) y derivando respecto del capital per cápita obtenemos la expresión (3.28). Para obtener la (3.29) suponemos beneficios de la empresa a largo plazo igual a 0, ya que nos situamos en un contexto de perfecta competencia. Se tiene que las condiciones de primer orden son:

$$r_t + \delta = \alpha Ak_t{}^{\alpha-1} \tag{3.28}$$

$$w_t = (1-\alpha)Ak_t{}^{\alpha} \tag{3.29}$$

Las expresiones (3.28) y (3.29) nos indican el tipo de interés y el salario que están dispuestas a pagar las empresas, coincide el coste de los factores de producción con su productividad marginal.

En **equilibrio del modelo** familias y empresas coinciden en el mercado debido a que los salarios pagados por los empresarios son los mismos que los que perciben los asalariados, al igual que el tipo de interés que pagan las empresas es el que obtienen los consumidores. También es necesaria la imposición de un supuesto adicional, la existencia de un equilibrio en el mercado financiero, que junto a la consideración del supuesto de partida de economía cerrada (no existe comercio con el exterior) sin gobierno (las políticas de gasto público no afectan a la producción, además de, la no existencia de deuda soberana), lleva a que la cantidad intercambiada entre los prestamistas y prestatarios ha de ser idéntica ($b_t = k_t$). Por lo que, en el equilibrio del modelo

Se va a trabajar con las siguientes ecuaciones:

- Familias:

$$\gamma_c = \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\theta}[r_t - \rho]$$

$$\dot{b_t} = w_t - c_t + b_t(r_t - n)$$

$$\lim_{t \to \propto} \lambda_t b_t = 0$$

- Empresas:

$$r_t + \delta = \alpha A {k_t}^{\alpha-1}$$

$$w_t = (1-\alpha) A {k_t}^{\alpha}$$

Si combinamos las ecuaciones de las empresas con la Restricción Presupuestaria Intertemporal de las familias, es decir las ecuaciones (3.19), (3.28) y (3.29), obtenemos la expresión de la acumulación de capital. Si hacemos lo propio sustituyendo el tipo de interés de las empresas en la ecuación de la tasa de crecimiento del consumo, tenemos como resultado:

$$\dot{k}_t = A {k_t}^{\alpha} - c_t - (n+\delta) k_t \tag{3.30}$$

$$\gamma_c = \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\theta}\left[\alpha A {k_t}^{\alpha-1} - \delta - \rho\right] \tag{3.31}$$

$$\lim_{t \to \propto} \lambda_t k_t = 0 \tag{3.32}$$

La ecuación (3.30) indica cómo se comporta el stock de capital en un instante de tiempo, que como se puede observar es bastante similar a la obtenida en el modelo de Solow (ecuación (3.8)), por lo que, la inclusión de un escenario de mercados no afecta a la conclusión extraída de la acumulación de capital. Si bien es cierto, difiere como es lógico, en el ahorro per cápita, ya que, en el modelo de Ramsey los individuos no ahorran una fracción constante de su renta como ocurría en los modelos de tasa de ahorro constante ($sA{k_t}^{\alpha}$), sino que viene determinado por sus preferencias de consumo en cada instante de tiempo $A{k_t}^{\alpha} - c_t$.

También se puede extraer, en base a la expresión (3.31), que hay un crecimiento del consumo positivo, pero transitorio, ocasionado por la diferencia entre el tipo de interés ($r_t = \alpha A{k_t}^{\alpha-1} - \delta$) y la tasa de descuento subjetiva (ρ). Este crecimiento acabará desapareciendo debido a los rendimientos decrecientes del capital, ya que, al irse incrementado el stock de capital, la productividad marginal del capital ($\alpha A{k_t}^{\alpha-1}$) se ve reducida, lo que provoca que r_t se termine igualando a ρ.

La explicación de este modelo es más rigurosa que la que nos ofrece el modelo de Solow, pero la conclusión es muy similar, lo que permite entrever que en muchos casos una mayor complejidad en la modelización y en la matemática empleada, no tiene por qué asemejarse más a la realidad, ni lograr resultados completamente diferentes.

3.2.1.2. Solución de Robinson-Crusoe (familias productoras)

Es un escenario idéntico al que emplea el modelo de Solow, donde las familias son las poseedoras de las empresas y del capital, consumiendo todo lo producido. Esta solución de Robinson-Crusoe tiene los supuestos de partida de economía cerrada, la producción se debe al consumo e inversión, es decir, el ahorro y la inversión coinciden. Además, el capital se deprecia a la tasa δ y la población crece a la tasa n.

Los consumidores maximizan la misma función de utilidad que en el escenario de mercados (3.18) sujeto a la siguiente restricción: $\dot{k}_t = A{k_t}^{\alpha} - c_t - (n + \delta)k_t$, la cual coincide con la ecuación (3.30), que es el stock de capital obtenido en el equilibrio alcanzado en el mercado por empresas y consumidores. Por lo tanto, se llega a la misma solución que la hallada por el planteamiento de mercados.

3.2.1.3. Solución del planificador

Xavier Sala-i-Martin (2000), define el planificador como un artilugio inventado, un ser fantástico o perfecto, que tomará las decisiones óptimas y correctas en cada instante de tiempo. Por lo que, a pesar de ser un concepto utópico es útil para conocer si las soluciones que se hallan mediante los otros enfoques son óptimas. Por lo tanto, el planificador escogerá sendas de ahorro-consumo que maximicen la utilidad de los individuos logrando así el mayor el crecimiento económico posible. Para ello:

- Maximiza la misma función de utilidad que los individuos (3.18).
- Está sujeto a una restricción física o de recursos finitos, disponiendo de todo el producto generado por la economía. En este supuesto es: $y_t =$

$c_t + i_t = c_t + \dot{k}_t + (n+\delta)k_t$, coincidiendo con la ecuación (3.30), ya que se trabaja bajo una economía cerrada y sin sector público.

- Tiene información perfecta y completa.

En consecuencia, como se ha comentado, el planificador maximiza la siguiente función de utilidad sujeta a la restricción física:

$$Max\ U(0) = \int_0^{\propto} e^{-(\rho-n)t}\frac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta}dt$$

sa:

$$\dot{k}_t = A{k_t}^{\alpha} - c_t - (n+\delta)k_t$$

Obteniendo como solución la tasa de crecimiento del consumo, cuya interpretación es idéntica a la del escenario de mercados:

$$\gamma_c = \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\theta}\left[\alpha A{k_t}^{\alpha-1} - \delta - \rho\right]$$

Al igual que en el escenario de mercados, también se puede extraer, en base a $\gamma_c = \frac{1}{\theta}[r_t - \rho]$, que hay un crecimiento del consumo positivo, pero transitorio, ocasionado por la diferencia entre el tipo de interés ($r_t = \alpha A{k_t}^{\alpha-1} - \delta$) y la tasa de descuento subjetiva (ρ), el cual acabará desapareciendo debido a los rendimientos decrecientes del capital, ya que al irse incrementado el stock de capital, la productividad marginal del capital ($\alpha A{k_t}^{\alpha-1}$) se ve reducida, lo que provoca que r_t se termine igualando a ρ.

En conclusión, la solución a la que llega el planificador es la misma a la de mercado o familias productoras, por lo que, en el modelo neoclásico de Ramsey la solución competitiva es óptima.

3.2.1.4. Dinámica de transición

Empleando las expresiones (3.30),(3.31) y (3.32) se puede representar en un diagrama de fases, Gráfico 3.5, las distintas fuerzas que explican la naturaleza estable o inestable de los diferentes equilibrios de largo plazo de la economía, caracterizados por la ausencia de crecimiento per cápita dada la naturaleza neoclásica de la función de producción.

Para la elaboración del diagrama de fases se siguen los siguientes puntos:

- Lo primero es la formación de la campana que en base a diferentes combinaciones de consumo y capital mantienen este último constante ($\dot{k}_t$=0). Para ello, se opera en (3.30), donde se hace $\dot{k}_t$=0. Posteriormente, se deriva $\frac{\partial c}{\partial k} = 0$, hallando el capital oro k_g, que el punto máximo de la campana y el que maximiza el consumo.

$$k_g = (\frac{\alpha A}{n+\delta})^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (3.33)$$

[15]

- Si se estudia el comportamiento del capital por encima y dentro de la campana de $\dot{k}_t$=0. Por lo que, basándose en la ecuación (3.30), se puede afirmar que el capital dentro de la curva crece, ya que si el consumo se reduce, el capital se ve incrementado, desplazándose hacia la derecha, como se puede observar en el Gráfico 3.5. La situación opuesta se da fuera de la curva.
- Ahora se trata de encontrar las situaciones en las que el consumo es cero ($\dot{c}_t = 0$), lo que es posible encontrar dos rectas. Una sería la formada por el eje de ordenadas ($c_t = 0$) y, la otra, se halla igualando a 0 el corchete de la expresión (3.31), $\alpha A k_t{}^{\alpha-1} - \delta - \rho = 0$, obteniendo así, la expresión $\bar{k_t}$ indicada en la ecuación (3.34), situación en la que el tipo de interés es igual a ρ .Esta última recta viene representada en el Gráfico 3.5 como una vertical. Además, es observable que si se comparan las ecuaciones (3.33) y (3.34), $k_g > \bar{k_t}$, ya que, $n > \rho$.

$$\bar{k_t} = (\frac{\alpha A}{\rho+\delta})^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (3.34)$$

- Para ver la evolución del consumo asociada a la vertical $\dot{c}_t = 0$, es necesario fijarse en la ecuación (3.31). Cuando se incrementa el capital, debido a los rendimientos decrecientes del mismo, el consumo se reduce. Al contrario, sucede a la izquierda de la línea vertical.

[15] Es la expresión de la regla de oro del capital, no se calculó en el modelo del Solow, pero el resultado es idéntico. Sin embargo, si se halló el capital óptimo, que difiere en esta expresión en que en vez de “s” se obtiene el parámetro α. Lo que significa que la tasa de ahorro óptima es $s = \alpha$.

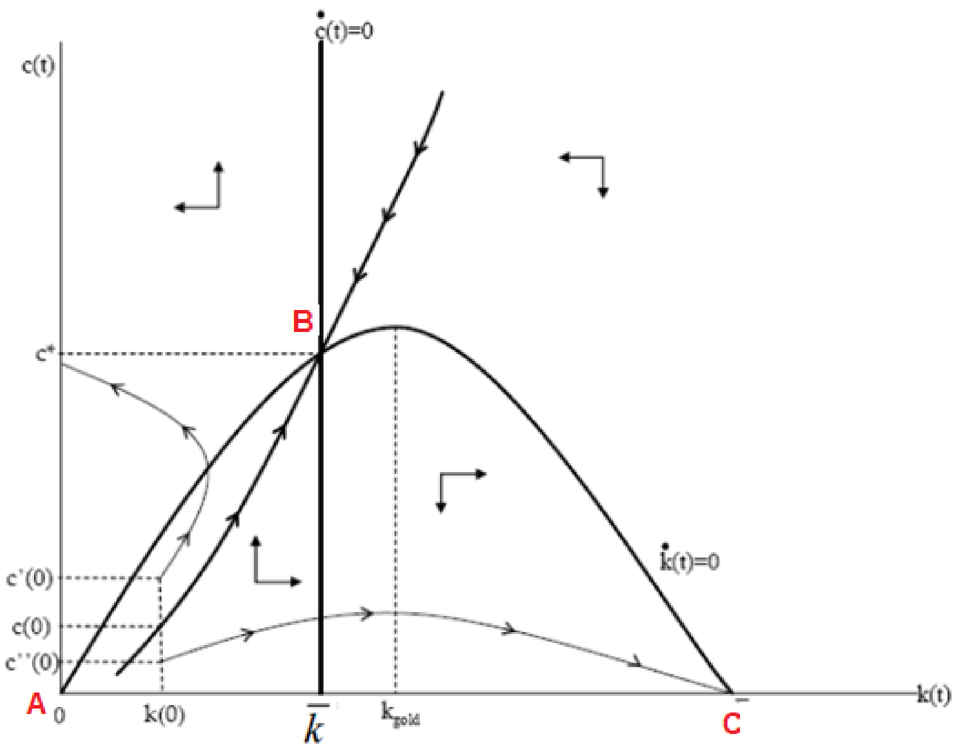
Se debe reseñar que se alcanzan tres estados estacionarios, caracterizados pr los puntos de corte de los lugares geométricos en los que el capital y el consumo son constantes, señalados en los puntos A, B y C.

- El punto A, en el origen de coordenadas, es un equilibrio inestable, dado que en el momento en que la economía se aparta ligeramente de él, tiende a crecer tanto el capital como el consumo, con lo que se aleja irremediablemente de dicho punto.
- El punto C, con k_t**, es estable, y sobre el papel es el equilibrio al que tendería irrevocablemente la economía para grandes cantidades de capital. Pero no es factible por incumplir la condición de transversalidad.

$$k_t^{**} = \left(\frac{A}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{3.35}$$

- El punto B solo se puede alcanzar siguiendo una única trayectoria estable, por lo tanto, se halla un equilibrio de punto de silla.

Gráfico 3.5. Dinámica de transición



Fuente: Apuntes de crecimiento económico, Sala-i-Martín (2000).

3.2.2. Modelo endógeno de dos sectores: capital humano de Uzawa-Lucas

3.2.2.1. Escenario de familias productoras

Es un modelo basado en la acumulación de capital humano[16]. A diferencia de otros modelos en los que se suponía al capital humano y físico como igualmente sustituibles, Uzawa (1965) y Lucas (1988) consideraron que ambos tipos de capital son producidos con distintas tecnologías, elaborando así un modelo de dos sectores con crecimiento endógeno.

En el primer sector, la producción es obtenida mediante combinaciones de capital físico y humano, se recoge en la expresión (3.36), pudiendo ser consumido o transformado en capital físico el producto final. Mientras que, en el otro sector, la producción y la acumulación de capital humano se hace únicamente a partir de capital físico y humano, como se puede ver en la ecuación (3.37):

$$\dot{K}_t = AK_Y^{\alpha} H_Y^{1-\alpha} - C_t - \delta_K K_t{}^{17} \tag{3.36}$$

$$\dot{H}_t = BK_H^{\eta} H_H^{1-\eta} - \delta_H H_t{}^{18} \tag{3.37}$$

El capital humano se emplea en dos sectores: $H_t = H_Y + H_H$. Por simplicidad, se emplean los siguientes supuestos:

- $H_Y = uH_t$ y $H_H = (1-u)H_t$, siendo u la fracción de capital humano empleada en la producción de bienes finales.
- Los procesos educativos solamente utilizan capital humano como input: $\alpha > \eta = 0$, lo que significa que $K_t = K_Y$ y $K_H = 0$.

Por lo tanto, se llega a las dos ecuaciones de acumulación de capital:

$$\dot{K}_t = AK^{\alpha} uH^{1-\alpha} - C_t - \delta_K K_t \tag{3.38}$$

$$\dot{H}_t = B(1-u)H_t - \delta_H H_t \tag{3.39}$$

---

[16] Concepto introducido por economistas de la escuela de Chicago, en el que concluyen que los humanos pueden aumentar su productividad mediante inversiones en conocimiento.
[17] K_Y y H_Y son las cantidades de capital físico y humano empleadas en la producción.
[18] K_H y H son las cantidades de capital físico y humano empleadas en la producción de capital humano

Al igual que en modelos anteriores las familias son las que poseen el tejido productivo (empresas) y las destinatarias de toda la producción. Éstas tienen un comportamiento por el cual maximizan su función de utilidad, descrita en la ecuación (3.40), sujeta a las restricciones del capital físico y humano, expresiones (3.41) y (3.42), respectivamente.

$$U(0) = \int_0^{\infty} e^{-(\rho-n)t} \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt \tag{3.40}$$

$$\dot{k}_t = A{k_t}^{\alpha} u{h_t}^{1-\alpha} - c_t - (\delta_K + n)k_t \tag{3.41}$$

$$\dot{h}_t = B(1-u)h_t - (\delta_H + n)h_t \tag{3.42}$$

Se trabaja con el siguiente Hamiltoniano (3.43), en el que aparecen ahora dos precios sombra υ_t y λ_t, que corresponden al capital físico y al humano, respectivamente. Quedando de la forma:

$$\begin{aligned} H = e^{-(\rho-n)t} \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \upsilon_t[A{k_t}^{\alpha} u{h_t}^{1-\alpha} - c_t - (\delta_K + n)k_t] \\ + \lambda_t[B(1-\mu)h_t - (\delta_H + n)h_t \end{aligned} \tag{3.43}$$

Resolviendo el mismo, obtenemos las condiciones de primer orden:

$$H_c = 0\,;\; e^{-(\rho-n)t} c_t^{-\theta} = \upsilon_t \tag{3.44}$$

$$H_u = 0;\; \upsilon_t A{k_t}^{\alpha}(1-\alpha)u^{-\alpha}{h_t}^{1-\alpha} = \lambda_t B h_t \tag{3.45}$$

$$H_k = -\dot{\upsilon}_t;\; \upsilon_t(\alpha A{k_t}^{\alpha-1}(uh_t)^{1-\alpha} - (n + \delta_K) = -\dot{\upsilon}_t \tag{3.46}$$

$$\begin{gathered} H_h = -\dot{\lambda}_t; \\ \upsilon_t((1-\alpha)A{k_t}^{\alpha} u^{1-\alpha} h^{-\alpha}) + \lambda_t(B(1-u) - (n + \delta_H) = -\dot{\lambda}_t \end{gathered} \tag{3.47}$$

$$\lim_{t \to \propto} \lambda_t h_t = 0 \tag{3.48}$$

$$\lim_{t \to \propto} \upsilon_t k_t = 0 \tag{3.49}$$

Tomando logaritmos y derivando respecto del tiempo, además de, suponer que las dos tasas de depreciación del capital son idénticas ($\delta_K = \delta_H = \delta$), obtenemos la expresión de la tasa de crecimiento del consumo:

$$\gamma_c = \widehat{c_t} = \frac{\dot{c_t}}{c_t} = \frac{1}{\theta}\left[\frac{-\dot{v_t}}{v_t} - \rho - n\right] \tag{3.50}$$

$$\gamma_c = \widehat{c_t} = \frac{\dot{c_t}}{c_t} = \frac{1}{\theta}\left[\alpha A {k_t}^{\alpha-1}(uh_t)^{1-\alpha} - (\delta + \rho)\right] \tag{3.51}$$

El crecimiento del consumo depende de la productividad marginal del capital físico y del capital humano, condicionado este último a su vez por la fracción empleada del mismo, siendo esta la principal diferencia respecto a otros modelos vistos con anterioridad, como el de Ramsey. Por lo que, de nuevo, el motor de crecimiento es el capital, ya sea físico o humano.

En el EE todas las variables crecen a un ritmo constante, por lo que $\gamma_u = 0$, y como $0 < u < 1$, encontramos que tiene un valor constante al que llamaremos u^*.

Operando a partir de (3.51) se llega a la conclusión de que todas las tasas de crecimiento de las variables en el EE son iguales:

$$\gamma_c{}^* = \gamma_h{}^* = \gamma_k{}^* = \gamma_y{}^* \tag{3.52}$$

Sustituyendo en la expresión (3.45) se obtiene que:

$$\frac{v_t}{\lambda_t} = \frac{1}{\frac{A}{B}\left(\frac{{k_t}^*}{{h_t}^*}\right)^{\alpha}(1-\alpha)u^{*-\alpha}} \tag{3.53}$$

Por lo tanto:

$$\gamma_\lambda{}^* = \gamma_v{}^* \tag{3.54}$$

Si se opera y sustituye llegamos a la expresión de crecimiento en el EE:

$$\gamma_c{}^* = \gamma_h{}^* = \gamma_k{}^* = \gamma_y{}^* = \frac{1}{\theta}(B - \delta - \rho) \tag{3.55}$$

Comparando las tasas de crecimiento obtenidas en la expresión (3.55) con las del modelo de Ramsey se puede apreciar que la diferencia reside en que en el EE la tasa de crecimiento en el modelo de Lucas es constante, pudiendo ser positiva, negativa o cero, dependiendo de los valores que tome el paréntesis $(B - \delta - \rho)$. Por otro lado, se tiene que en el EE el modelo de Ramsey, la tasa de crecimiento del consumo es cero, como se ha visto con anterioridad.

3.2.2.2. Escenario del planificador

La solución del planificador obtenida por este modelo es idéntica a la de familias productoras, ya que, de nuevo al igual que en el modelo de Ramsey, el supuesto de partida es una economía cerrada y sin participación gubernamental. Por lo tanto, al no existir gobierno y sector exterior, el producto generado por la economía está compuesto únicamente por consumo e inversión: $y_t = c_t + i_t$. Esto lleva a emplear una restricción idéntica a la de familias productoras, por lo que, el resultado logrado es igual. En consecuencia, la solución de las familias es óptima en sentido de Pareto.

3.3. COMPARATIVA ENTRE MODELIZACIONES. CONCLUSIONES

Como se ha ido comentando, dentro de los modelos de crecimiento exógeno se encuentran los modelos de Solow-Swan y de Ramsey-Cass-Koopmans, los cuales predicen que a largo plazo no va haber crecimiento económico, y, si existe, es debido a una mejora tecnológica producida exógenamente.

Al contrario, pasa en los modelos de Romer y Uzawa-Lucas, que sí que predicen el crecimiento de forma intrínseca de la economía, debido principalmente a los rendimientos no decrecientes del capital (físico o humano). Otros modelos endógenos suprimen el supuesto de competencia perfecta, por lo que no es necesario introducir mejoras tecnológicas exógenas para lograr crecimiento.

Todo ello, se puede observar en las ecuaciones principales y representativas de cada modelo, visibles en la **Tabla 3.1.** Comparativa entre modelosTabla 3.1. Por ejemplo, si comparamos los modelos de tasa de ahorro constante, podemos ver que la modificación en la función de producción ($Y_t = A{K_t}^{\alpha}{L_t}^{1-\alpha}$ por $Y_t = A{K_t}^{\alpha}{L_t}^{1-\alpha}{K_t}^{\eta}$), además del supuesto de rendimientos decrecientes del capital existente en el modelo de Solow, es lo que permite lograr al modelo de Romer un crecimiento positivo a largo plazo.

Ahora si la comparación se centra en los modelos de optimización, de nuevo, las diferencias son mínimas, solamente apreciable en la inclusión del capital humano y su proporción de utilización. Sin embargo, de nuevo, la clave reside en los supuestos de partida de los modelos de crecimiento endógeno, ya que, en el estado estacionario el modelo de Ramsey no es capaz de predecir crecimiento de la economía, mientras que el modelo de Lucas sí, creciendo todas las variables a la misma tasa: ${\gamma_c}^* = {\gamma_h}^* = {\gamma_k}^* = {\gamma_y}^* = \frac{1}{\theta}(B - \delta - \rho)$.

Tabla 3.1. Comparativa entre modelos

	Modelos de crecimiento exógeno	Modelos de crecimiento endógeno
Tasa de ahorro constante (sY)	Solow: • $Y_t = A{K_t}^{\alpha}{L_t}^{1-\alpha}$ • ${k_t}^* = (\frac{sA}{n+\delta})^{\frac{1}{1-\alpha}}$ • $\gamma_k = sA{k_t}^{\alpha-1} - (n+\delta)$ • **EE:** Crecimiento cero.	Romer: • $Y_t = A{K_t}^{\alpha}{L_t}^{1-\alpha}{K_t}^{\eta}$ • ${k_t}^* = (\frac{sA}{n+\delta})^{\frac{1}{1-\alpha-\eta}}$ • $\gamma_k = sA - (n+\delta)$ • **EE:** Tasa de crecimiento constante, pero no nula.
Crecimiento Óptimo	Ramsey: • $\dot{k}_t = A{k_t}^{\alpha} - c_t - (n+\delta)k_t$ • $\bar{k}_t = (\frac{\alpha A}{\rho+\delta})^{\frac{1}{1-\alpha}}$ • $\gamma_c = \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\theta}\left[\alpha A{k_t}^{\alpha-1} - \delta - p\right]$ • **EE:** En los tres estados estacionarios el crecimiento es cero.	Uzawa-Lucas: $\dot{k}_t = A{k_t}^{\alpha}(uh_t)^{1-\alpha} - c_t - (\delta_K + n)k_t$ $\gamma_c = \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\theta}\left[\alpha A{k_t}^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} - (\delta + p)\right]$ **EE:** Tasa de crecimiento constante e igual de todas las variables per cápita.

Fuente: elaboración propia.

Por otro lado, también se puede comparar los modelos en función de cómo se modelice el ahorro y el consumo de los individuos. El ahorro per cápita según se plantea en el modelo de Ramsey, los individuos no ahorran una fracción constante de su renta, como sí ocurría en los modelos de tasa de ahorro constante $(sA{k_t}^{\alpha})$, sino que viene determinado por sus preferencias de consumo en cada instante de tiempo $A{k_t}^{\alpha} - c_t$, como el de Solow. Por lo tanto, se puede concluir a este respecto que la explicación del modelo de Ramsey es más rigurosa y fundamentada, pero también la complejidad analítica no supone una mejor explicación ni predicción de la realidad a grandes rasgos. El mismo análisis es aplicable al modelo de Romer y Lucas, solamente que estos dos sí que predicen el crecimiento a largo plazo de la economía.

Esta breve revisión de la literatura del crecimiento económico ha sido necesaria para entender mejor modelos con características similares, pero que a mayores incluyen aspectos medioambientales, cuyo estudio será objeto de los siguientes apartados de este trabajo.

4. MODELOS DE CRECIMIENTO ECONÓMICO Y MEDIO AMBIENTE

Los siguientes modelos van a incluir nuevos componentes, como contaminación, *abatement*, energía o emisiones. Los cuales van a tratar de explicar como a raíz del crecimiento económico, las economías producirán *outputs* que repercuten en el medio ambiente, contaminándolo. Estos procesos generan emisiones nocivas también para los individuos, como, por ejemplo, el CO_2, NO_2, entre muchos otros.

El propósito de estudiar los modelos de contaminación medioambiental, es el de explorar cuestiones esenciales como:

- La coexistencia del medio ambiente y el crecimiento económico.
- Crecimiento sostenido a largo plazo sin acumulación de contaminantes.
- Repercusión en variables básicas como el capital, la producción, el consumo o la contaminación, cuando se computa el medio ambiente.
- Reevaluación de la Producción Total de Factores (PTF) cuando se introducen los desechos producidos, además del producto final.

Los modelos que se van a revisar son los siguientes: modelo verde de Solow, posteriormente, se introducen los modelos de crecimiento óptimo, modelo de Ramsey con contaminación y de contaminación con *abatement* y, por último, se abordan modelos de contaminación con cambio tecnológico endógeno: AK y de dos sectores. La presentación de estos modelos se basa principalmente en el trabajo de Xepapadeas (2005)[19].

En el análisis de los diferentes modelos se va a utilizar una función de producción neoclásica $Y = F(K, AL)$, siendo AL, las unidades de trabajo efectivo. También es necesario definir un flujo de emisiones (4.1) , dónde el parámetro ϕ son las emisiones por unidad de *output*.

$$Z = \phi Y \tag{4.1}$$

Contextualizando, los daños causados por la contaminación ambiental pueden estar relacionados con el flujo de emisiones, como el humo o el ruido, o con el stock de contaminación a medida que se acumulan las emisiones en el medio ambiente, como los gases de efecto invernadero o los metales pesados. Se denota como P, el stock de contaminación que se acumula siguiendo la ecuación descrita en (4.2), siendo m la regeneración natural del medio ambiente y *h(P)* una retroalimentación no lineal, llamado carga interna, expresada de la siguiente forma: $h(P) = \frac{P^2}{1+P^2}$, que corresponde a una función sigmoidea.

$$\dot{P} = Z - mP + h(P) \tag{4.2}$$

La evolución de la calidad del medio ambiente se representa en (4.3) con E *la calidad medioambiental*, siendo $R(E)$ una función de regeneración ambiental. Mientras que Z representa la reducción de la calidad del medio ambiente debido a las emisiones contaminantes. Las ecuaciones (4.2) y (4.3) se emplearán a la hora de describir el estado del medio ambiente.

$$\dot{E} = R(E) - Z \tag{4.3}$$

4.1. MODELO VERDE DE SOLOW

El modelo verde de Solow, deriva del modelo de crecimiento exógeno, con tasa de ahorro constante al que se añade el aspecto medioambiental, incorporando la dinámica que describe la acumulación de la contaminación. En este modelo

[19] En el artículo original se omiten por simplicidad los subíndices temporales debido a que aparece nueva notación con otros subíndices, por lo que, en todo el apartado 4 no se pondrán.

no se da un comportamiento optimizador en cuanto a las decisiones de consumo-ahorro por parte de los agentes. Tampoco se tienen en cuenta los posibles daños causados por la contaminación en la utilidad de los individuos.

La función de producción[20] que se va a emplear es una función con progreso técnico[21]. Se denota por g a la tasa de crecimiento del progreso técnico descrito en (4.4) y por n a la tasa de crecimiento de la población, recuperada en (4.5). Además, como ecuaciones básicas se tienen la acumulación del capital agregado y por trabajador eficiente, que se expresan en (4.6) y (4.7), respectivamente.

$$g = \frac{\dot{A}}{A} \tag{4.4}$$

$$n = \frac{\dot{L}}{L} \tag{4.5}$$

$$\dot{K} = sY(K, AL) - \delta K \tag{4.6}$$

$$\dot{k} = sy(k) - [\delta + n + g]k \tag{4.7}$$

Los procesos productivos de la economía generan contaminación. Ésta se acumula según la expresión (4.8), que se obtiene insertando la ecuación (4.1) en la (4.2) y suponiendo que $h(P) = 0$:

$$\dot{P} = \phi Y - mP \tag{4.8}$$

En términos por trabajador eficiente, la acumulación de contaminación es:

$$\dot{p} = \phi y - (m + g + n)p \tag{4.9}$$

En el EE de la economía, descrito por las ecuaciones (4.10) y (4.11) se tiene:

$$\dot{k}^* = sy(k^*) - [\delta + n + g]k^* \tag{4.10}$$

$$\dot{p}^* = \phi y(k^*) - (m + g + n)p^* \tag{4.11}$$

Estas ecuaciones (4.10) y (4.11), establecen el comportamiento de las variables en diferentes supuestos:

[20] Satisface las condiciones estándar de una función de producción neoclásica: rendimientos constantes de escala, rendimientos decrecientes del capital y cumplimiento de las condiciones de Inada.

[21] Véase Sala-i-Martin, 2000, págs. 39-43

- Si la tasa de crecimiento del capital en el EE es cero, $\gamma_k = 0$, cumpliendo las condiciones de Inada, la tasa de crecimiento del resto de variables de la economía será igual a $g + n$. Por otro lado, el stock de contaminación crecerá a la misma tasa que el capital. En este supuesto, la contaminación no crea ningún coste en términos de utilidad o productividad, y se acumula a una tasa positiva y constante[22].
- Una forma de evitar que el stock de contaminación se incremente es empleando una tecnología cada vez más limpia según crece la economía. Se considera que cuanto más capital se acumula, la tecnología es menos contaminante. En este caso, el coeficiente ϕ en la ecuación (4.1) en lugar de ser constante, se considera una función del capital. Según se incrementa el capital, las emisiones por unidad de output decrecen. Formalizándolo: $\phi = \phi(k), \phi'(k) < 0;\ \lim_{k\to\propto} \phi(k) \to 0\ y\ \lim_{k\to\propto} \phi(k)y(k) \to 0.$

  Se podría eliminar la contaminación suponiendo que la media y el producto marginal del capital está por encima de $\frac{n+\delta+g}{s}$, quebrantando las condiciones de Inada. La tasa de crecimiento del capital en este EE sería positiva, es decir, crecería sin límite $\lim_{k\to\propto} \phi(k)\,y(k) = 0\,, \gamma_p = -(m+g+n)$. Por lo que, la contaminación finalmente se eliminaría.
- Otra modelización más del progreso tecnológico que reduce las emisiones por unidad de output, es considerando dos tipos de capital: capital productivo (k_y) y capital de *abatement* (k_a), siendo este último no productivo, pero permite reducir las emisiones por unidad de producción. La distribución del ahorro se realiza de forma arbitraria entre los dos tipos de capital (s_y y s_a). Las ecuaciones de acumulación de los dos tipos de capital son las siguientes:

[22] Solamente en el caso de que no existiese crecimiento exógeno, o que la tasa de crecimiento de la tecnología y de la población fuesen cero (*n*=*g*=*0*), la contaminación dejaría de acumularse. Pero en este caso, la economía dejaría de crecer.

$$\dot{k_y} = s_y y(k_y) - [\delta + n + g]k_y \quad (4.12)$$

$$\dot{k_a} = s_a y(k_y) - [\delta + n + g]k_a \quad (4.13)$$

$$\dot{p} = \phi(k_a)y(k_y) - (m + g + n)p \quad (4.14)$$

$$\lim_{k_a \to \propto} \phi(k_a) \to 0\,, \lim_{k_a \to \propto} \phi(k_a)f(k_y) \to 0 \quad (4.15)$$

De nuevo, suponiendo que la media y el producto marginal del capital está por encima de $\frac{n+\delta+g}{s}$, la contaminación puede eliminarse, si se cumple la anterior expresión. Sin embargo, supone una violación de la condición de los rendimientos decrecientes del capital (estaríamos de nuevo frente a un modelo de crecimiento endógeno), por lo que este supuesto, haría que la contaminación se eliminase si el crecimiento del capital de abatement, γ_{k_a} ,es positivo y si el stock de capital productivo tiende a infinito ($k_y \to \infty$).

- Es clave, el supuesto de que $\phi'(k) < 0$, ya que podría ser coherente con la formulación de la Curva Medioambiental de Kuznets (CMK). Cuando una economía comienza a desarrollarse, se supone que tiene un medio ambiente relativamente libre de contaminación (niveles bajos de p). Sin embargo, según va evolucionando, p sigue incrementándose y ϕ es decreciente con el capital. A partir de un cierto nivel de capital es cuando la contaminación dejaría de acumularse y, entonces, comenzaría a decrecer.

En síntesis, las predicciones del modelo verde de Solow en el que no se tiene en cuenta la desutilidad derivada de la contaminación y, si no hay un cambio tecnológico que reduzca suficientemente las emisiones por unidad de output, la contaminación crecerá al mismo ritmo que el resto de variables de la economía. Estos resultados indican que puede no existir un EE con contaminación en el modelo de Solow con crecimiento exógeno.

4.2. MODELOS DE CRECIMIENTO ÓPTIMO Y MEDIO AMBIENTE: MODELO DE RAMSEY CON CONTAMINACIÓN

De nuevo, el modelo de Ramsey con contaminación nos sitúa en un contexto en el que los agentes toman las decisiones de consumo e inversión de forma óptima para maximizar sus objetivos. Así, los hogares maximizan la utilidad intertemporal y las empresas, que son perfectamente competitivas, son maximizadoras de beneficios.

La función de utilidad que se emplea respecto al consumo es creciente y cóncava ($\lim_{c\to\propto} U_c(c,P) = 0$), así se aseguran soluciones interiores, además, es decreciente y convexa respecto al stock de contaminación. Otros supuestos son: no existe crecimiento de la población ni cambio técnico exógeno, es decir, $n = g = 0$. El consumidor representativo considera el nivel de contaminación constante a la hora de elegir su consumo para maximizar su función de utilidad.

$$max \int_0^{\propto} e^{-pt} U(c,P)dt \tag{4.16}$$

La restricción presupuestaria intertemporal es (4.17), donde $k(0)$ es el capital inicial, empleándose como factor de descuento $e^{-R(t)}$, donde $R(t) = \int_{\tau=0}^{t} r(\tau)\, d\tau$, con $r(\tau)$ la tasa de interés real en τ.

$$\int_0^{\propto} e^{-R(t)}\, c(t)dt = k(0) + \int_0^{\propto} e^{-R(t)}\, w(t)dt \tag{4.17}$$

Planteando el Hamiltoniano del problema descrito por las expresiones (4.16) y (4.17), se obtienen las condiciones de primer orden: $e^{-pt}U_c(c,P) = \lambda e^{-R(t)}$. donde λ es el multiplicados de Lagrange asociado a la restricción. Aplicando logaritmos y derivando respecto del tiempo, se llega a la ecuación (4.18) que es la tasa de crecimiento del consumo de las familias.

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\eta}\left[r - \rho + \frac{U_{cP}}{U_c}\dot{P}\right], \eta = -\frac{U_{cc}}{U_c}c \tag{4.18}$$

Para hallar la solución de mercado es necesario operar bajo la hipótesis de maximización de beneficios en situación de competencia perfecta se tiene:

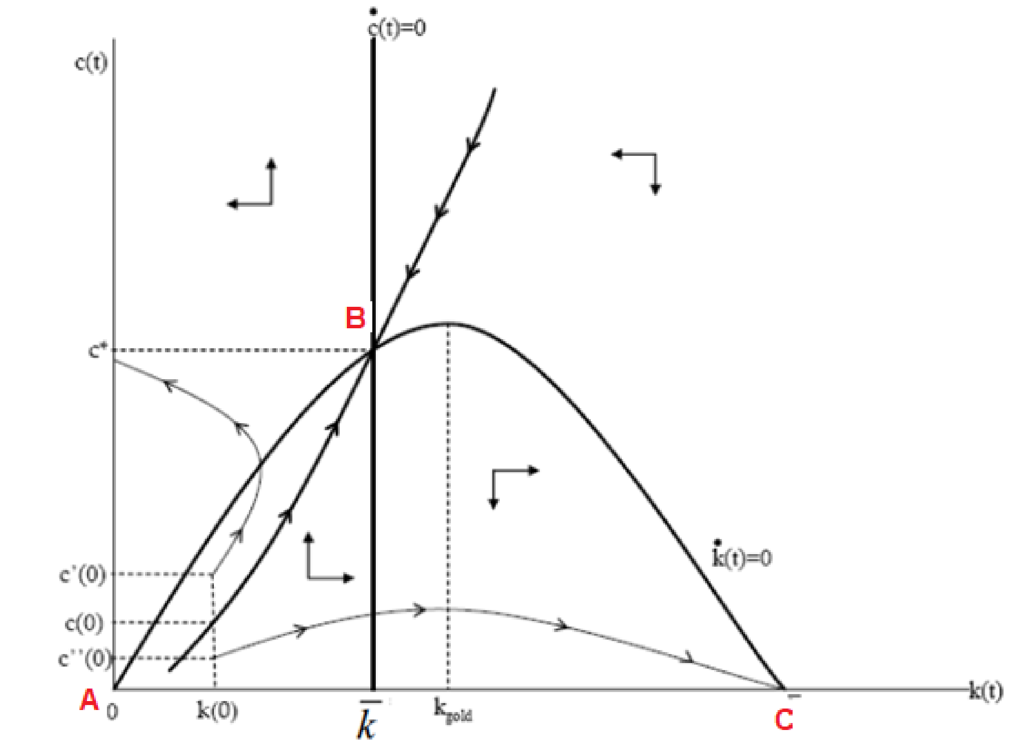
$f'(k) = r + \delta$. Introduciendo esta expresión en (4.18), se obtiene (4.19), la solución de mercado.

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\eta}\left[y'(k) - \rho - \delta + \frac{U_{cP}}{U_c}\dot{P}\right] \tag{4.19}$$

$$\dot{k} = y(k) - c - \delta k \tag{4.20}$$

Se puede observar que la solución de mercado y de familias productoras, es la misma, al igual que en el modelo original de Ramsey-Cass-Koopmans, como se aprecia en el Gráfico 4.1. Si analizamos la expresión (4.19), podemos apreciar que para $U_{cP} < 0$, un incremento de la contaminación hará que la tasa de crecimiento del consumo se reduzca[23]. En el EE tenemos que $\dot{c} = \dot{k} = \dot{P} = 0$, el estado estacionario tiene las mismas características que en el modelo original, sin contaminación medioambiental.

Gráfico 4.1. Dinámica de transición del modelo de Ramsey-Cass-Koopmans



Fuente: Apuntes de crecimiento económico, Sala-i-Martín (2000).

[23] Si la función de utilidad es separable en consumo y contaminación, $U_{cP} = 0$, la tasa de crecimiento del consumo no se verá afectada.

A diferencia del modelo original, donde la solución de mercados coincide con la del planificador, se estudiará en este caso como afecta el stock de contaminación. El planificador social trata de elegir una trayectoria óptima para el consumo a fin de maximizar la utilidad de la sociedad, estando sujeto solamente a las restricciones físicas, representadas por las ecuaciones (4.8) y (4.20). Al introducirse el problema medioambiental, las soluciones a las que se llegan serán diferentes. El Hamiltoniano del planificador[24] es el siguiente:

$$H = U(c,P) + q(y(k) - c - \delta k) + \lambda(\phi y(k) - mP) \tag{4.21}$$

Las condiciones de primer orden obtenidas son las siguientes:

$$U_c(c,P) = q \tag{4.22}$$

$$\dot{q} = \big(\rho + \delta - y'(k)\big)q - \lambda\phi y'(k) \tag{4.23}$$

$$\dot{\lambda} = (\rho + m)\lambda - U_P(c,P) \tag{4.24}$$

Si se toman logaritmos, se deriva respecto del tiempo y se introduce (4.24) en (4.23) se obtiene la tasa de crecimiento del consumo del planificador social.

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\eta}\left[y'(k)\left(1 + \frac{\lambda\phi}{U_c(c,P)}\right) - \rho - \delta + \frac{U_{cP}}{U_c}\dot{P}\right] \tag{4.25}$$

Para poder realizar la comparación entre el problema del planificador y el de mercados, se supone que la función de utilidad es separable o que $U_{cP} = 0$, lo que permite simplificar el análisis. Resulta en:

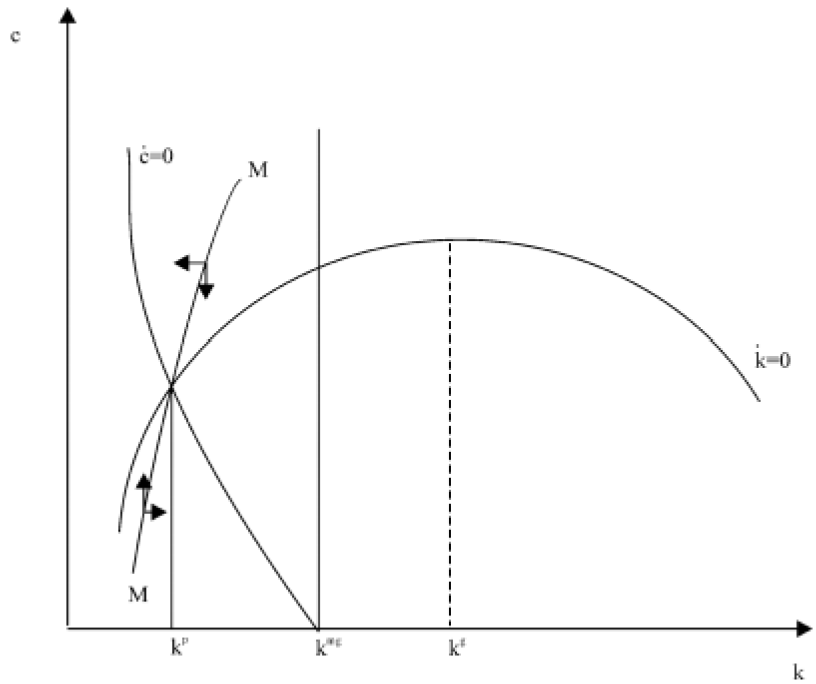
$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\eta}\left[y'(k)\left(1 + \frac{\lambda\phi}{U_c(c,P)}\right) - \rho - \delta\right] \tag{4.26}$$

Por lo que, si se comparan las ecuaciones (4.19) y (4.26), vemos que, en el Gráfico 4.2 en la solución de mercados se alcanza el capital óptimo $k^{mg} = k^*$ en $\dot{c} = 0$, cuando es una línea vertical, al igual que en el modelo original. Por el contrario, la solución del planificador, nos sitúa en un punto del capital más a la izquierda (k^p) con un $\dot{c} = 0$, que adopta una forma de curva con pendiente negativa. Así, se tiene la nueva senda de equilibrio marcada por *M*, donde el punto de equilibrio estable viene dado por la intersección de $\dot{c} = 0$ con $\dot{k} = 0$, para un stock de capital k^p. En consecuencia, el stock de capital en estado

[24] Donde λ es la variable de coestado asociada al stock de contaminación, es decir, el precio sombra que el planificador asigna a dicho stock.

estacionario, y el stock de contaminación en equilibrio, es menor en el óptimo social (planificador) que en el modelo de mercado. Esto se debe, principalmente, a razones ambientales, ya que se reduce el capital para disminuir la contaminación, por ende, se reduce el consumo. Así pues, en esta versión del modelo de Ramsey, los daños ambientales afectan a los niveles de EE de las variables.

Gráfico 4.2. Dinámica de transición modelo de Ramsey-Cass-Koopmans con contaminación



Fuente: *Economic growth and the environment*, Xepapadeas, A. (2005)

4.3. MODELOS DE CRECIMIENTO ÓPTIMO Y MEDIO AMBIENTE: MODELO DE CONTAMINACIÓN CON ABATEMENT

En el modelo de Ramsey con contaminación analizado en el punto anterior, no fue posible reducir las emisiones mediante actividades de *abatement*. Sin embargo, para llevar éstas a cabo, es esencial un trasvase de recursos de consumo o capital. Para ello, se asume que la generación de emisiones en cada momento se describe mediante la función de emisión[25] $v(k(t), a(t))$, donde $a(t)$ es el *abatement* en el momento *t*.

[25] La función de emisión aumente *a(t)* con los valores crecientes del capital y se reduce con el *abatement*.

El problema que plantea el planificador en un contexto en el que $n = g = 0$:

$$max \int_0^{\propto} e^{-pt} U(c, P) dt \tag{4.27}$$

$$\dot{k} = y(k) - c - a - \delta k \tag{4.28}$$

$$\dot{P} = v(k, a) - mP \tag{4.29}$$

Este es el Hamiltoniano que plantea el problema:

$$H = U(c, P) + q(y(k) - c - a - \delta k) + \lambda(v(k, a) - mP) \tag{4.30}$$

Las condiciones de primer orden establecen que, a corto plazo, el incremento de la utilidad marginal del consumo debería ser igual al precio sombra de los "ahorros" de contaminación producidos por el *abatement*.

$$U_c(c, P) = q \tag{4.31}$$

$$\lambda v_a(k, a) = q \tag{4.32}$$

La tasa de crecimiento del consumo es la siguiente:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\eta}\left[y'(k) - \rho - \delta + \frac{v_k}{v_a} + \frac{U_{cP}}{U_c}\dot{P}\right], \eta = -\frac{U_{cc}}{U_c}c \tag{4.33}$$

$$\dot{\lambda} = (\rho + m)\lambda - U_P(c, P) \tag{4.34}$$

Si se realiza un segundo supuesto, y se consideran funciones de utilidad y *abatement* separables[26], donde $v(a, k) = \phi(k) - v(a)$, en este caso, se obtiene una tasa de crecimiento del consumo, en la que como el término $\frac{\phi}{v_a}$ es negativo para todos los valores del consumo y capital, se tiene que, el término de la derecha de la ecuación (4.35) es menor que el de la ecuación (4.33). En consecuencia, el crecimiento del consumo es inferior, debido a que el planificador internaliza los daños medioambientales. Además, sabiendo que $y'(k) < 0$, por el supuesto de los rendimientos decrecientes y el crecimiento continuado del capital, v_a delimita a la economía haciéndola converger hacia un EE estable, donde el crecimiento de las variables es nulo, al igual que en el modelo original de Ramsey.

[26] Como por ejemplo con $U_{cP} = 0$; $v_a = 0$ existiendo concavidad en k y P, y convexidad en las variables estado.

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\eta}\left[y'(k)\left(1 + \frac{\phi}{v_a(\alpha(c,k,\lambda,P))}\right) - \rho - \delta\right] \quad (4.35)$$

$$\dot{k} = (y(k) - c - \alpha(c,k,\lambda,P) - \delta k) \quad (4.36)$$

Las actividades de *abatement* pueden modelizarse de una forma más compleja, empleando dos tipos de capitales: el capital de producción (k_y) y el de reducción de las emisiones (k_a), siendo su suma el capital total de la economía ($k = k_y + k_a$). La inversión bruta asociada a cada tipo de capital se denota por: i_y e i_a. Con ello se obtiene una función de acumulación de capital estándar ($\dot{k} = i_j - \delta k_j,\ j = y, a$). Además, para simplificar se considera que la contaminación es una variable flujo que viene descrita como función creciente en k_y y decreciente en k_a, de la forma: $Z = \phi(k_y, k_a)$.

El Hamiltoniano que plantea el planificador social es:

$$H = U\big(c, \phi(k_y, k_a)\big) + q\big(y(k_y) - c - \delta k\big) + \lambda(k - k_y - k_a) \quad (4.37)$$

Las condiciones de primer orden son las siguientes:

$$U_c(c,P) = q \quad (4.38)$$

$$U_c f_{k_y} + U_\phi \phi_{k_y} = U_\phi \phi_{k_a} \quad (4.39)$$

De nuevo, suponiendo que, la función de utilidad es separable y sustituyendo $\dot{q}$ por $\dot{c}$, se toman logaritmos y se deriva respecto del tiempo (4.38) obteniendo las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\eta}\left[f_{k_y}\left(\gamma_{k_y}(k,c)\right) - \rho - \delta + \frac{U_\phi \phi_{k_y}}{U_c}\right] \quad (4.40)$$

$$\dot{k} = \left(f\left(\gamma_{k_y}(k,c)\right) - c - \delta k\right) \quad (4.41)$$

En el caso de que $f_{k_y}\left(\gamma_{k_y}(k,c)\right) = 0$ existiría un EE con $\dot{c} = \dot{k} = 0$, y la contaminación permanecería constante ($\dot{Z} = \phi_{k_y}\dot{k_y} + \phi_{k_a}\dot{k_a}$). Si $f_{k_y}\left(\gamma_{k_y}(k,c)\right) = M > \delta + \rho$, por lo que existiría crecimiento positivo a largo plazo (cuando no existe preocupación por el medio ambiente $U_\phi = 0$)[27]. Si, por

[27] Contexto de un modelo de crecimiento endógeno como los que se verán a continuación.

el contrario, hay preocupación medioambiental ($U_{\phi} < 0$), se tiene que $M < \delta + \rho$[28] , cesando el crecimiento sostenido.

4.4. MODELOS DE CONTAMINACIÓN CON CAMBIO TECNOLÓGICO ENDÓGENO: MODELO AK Y DE DOS SECTORES

Los modelos de crecimiento endógeno fueron introducidos en el tercer punto de este trabajo, sin embargo, en este apartado se analizará la incorporación de las variables ambientales a los modelos con crecimiento endógeno, tratando así, de comprobar si es sostenible el crecimiento protegiendo simultáneamente el medio ambiente. El análisis se realizará utilizando como base un modelo *AK* y uno de dos sectores.

4.4.1. Modelo AK: problema del planificador social

El modelo AK se estudiará en su versión simple, con los supuestos habituales $n = g = 0$ y sin progreso tecnológico exógeno, con una función de producción del tipo $y = AK$. El stock de contaminación se acumula de forma estándar ($\dot{P} = \phi k - mP$). El Hamiltoniano que plantea el planificador es el siguiente:

$$H = e^{-\rho t}U(c,P) + q(f(k) - c - \delta k) + \lambda(\phi k - mP) \qquad (4.42)$$

Siendo la tasa del crecimiento del consumo muy similar a la obtenida en el modelo de Ramsey con contaminación, la ecuación (4.25), con la salvedad de que $y'(k) = A$.

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\eta}\left[A\left(1 + \frac{\lambda\phi}{U_c(c,P)}\right) - \rho - \delta + \frac{U_{cP}}{U_c}\dot{P}\right] \qquad (4.43)$$

Es posible apreciar que, si no se tiene en cuenta la contaminación $\lambda = U_{cP} = 0$, se tendría un resultado idéntico al del modelo de crecimiento endógeno de Romer, donde en el EE si $A > \rho + \delta$ existe crecimiento económico de forma endógena.

[28] Cuando $U_{\phi} < 0$ la productividad marginal del capital de la sociedad es menor que la productividad marginal privada del capital productivo. La tasa marginal de sustitución entre contaminación y consumo ($\frac{U_{\phi}\phi_{k_y}}{U_c}$) es la culpable de que $M < \delta + \rho$.

En el momento que se incluye la contaminación, es posible demostrar[29] para una función de utilidad separable, $U_{cP} = 0$ ó para una que cumple que $U_{cP} < 0$, la existencia de un EE y una tasa de crecimiento de la economía positiva, pero insostenible en el largo plazo.

Si se introducen actividades de *abatement* es posible el crecimiento sostenido en el largo plazo. Se haría igual que en el modelo de crecimiento óptimo, considerando un planificador y usando los mismos supuestos:

$$\dot{k} = Ak_y - c - \delta k \tag{4.44}$$

$$\dot{P} = \phi_{k_y} - \psi_{k_a} - mP \tag{4.45}$$

$$k = k_y + k_a \tag{4.46}$$

En el trabajo de Michel y Rotillon (1995), los autores demuestran que, si el *abatement* es eficaz, cumpliéndose (4.47), entonces es posible que se dé un crecimiento sostenido sin acumulación de contaminación, sin importar como sea la función de utilidad.

$$\frac{\psi}{\phi} > \frac{\rho + \delta}{A - \rho - \delta} \tag{4.47}$$

Por otro lado, Xepapadeas (1997) plantea un modelo con capital productivo y capital de *abatement* que reduce las emisiones por unidad de output, con rendimientos crecientes para los dos tipos de capital, k_y y k_a. Además, la inversión en cada sector viene reflejada por I_y e I_a respectivamente. El coeficiente de emisión $\phi(k_a, K_a, K_y)$ presenta rendimientos crecientes. Xepapadeas (1997) prueba que, con una función de utilidad separable en las variables de consumo y contaminación, que cuando el coeficiente de emisión unitario es fijo, el crecimiento permanente no es óptimo, lo que confirma los resultados anteriores. Las restricciones del problema del planificador son las siguientes:

[29] Consultar Michel y Rotillon (1995)

$$\dot{k}_j = k_j \kappa_j \left(\frac{I_j}{k_j}\right), j = y, a \tag{4.48}$$

$$\dot{P} = \phi(k_a, K_a, K_y) f(k_y, K_y) - mP \tag{4.49}$$

$$f(k_y, K_y) = c - I_y - I_a \tag{4.50}$$

Se puede lograr un crecimiento permanente sin una acumulación ilimitada de contaminación, si el aumento de los rendimientos en el *abatement* de contaminación, reducen el coeficiente de emisión hacia cero.

Un resultado interesante de los modelos AK va ligado a las políticas medioambientales, relacionando los *spillovers* de conocimiento en la producción y en las actividades de *abatement* junto con la contaminación ambiental. Se pueden emplear diversos instrumentos a la hora de solucionar los problemas ocasionados, como, por ejemplo: subsidios a la inversión productiva y en *abatement* para tratar de subsanar estas carencias en los mercados competitivos, e impuestos a las emisiones para tratar de corregir la contaminación ambiental.

4.4.2. Modelo de dos sectores

El desarrollo del modelo de dos sectores, se debe principalmente a Bovenberg y Smulders (1995, 1996) y Hettich (1998). Los autores Bovenberg y Smulders (1995), realizaron una ampliación del modelo de Lucas (1988) y Rebelo (1991). La mayor adquisición de conocimientos permite que el impacto de la producción en el medio ambiente sea menor, usándose más eficientemente los recursos renovables. Al igual que en el modelo de Lucas, un sector es el productor de bienes finales y otro el de conocimiento. La función de producción es del tipo $f(E, k_y, Z_y)$, donde E es el stock de capital ambiental (mide la calidad del medio ambiente, ecuación (4.3)), k_y es el capital empleado en la producción final y Z_y es el flujo de emisiones, que en este caso se considera un input de producción.

El sector de conocimiento se acumula generando una reserva h, que se puede apreciar en (4.51), siendo k_h el capital manufacturado, y Z_h el flujo de contaminación generado. El flujo total de contaminación de la economía es $Z =$

$Z_h + Z_k$, y el stock de contaminación de la economía P es equivalente a $Z \equiv hP$. Por lo que, se distribuye de la siguiente forma: $Z_y = \alpha hP$ y $Z_k = (1-\alpha)hP$, mientras que el stock de capital ambiental se acumula $\dot{E} = R(E,P)$. Determinándose el óptimo social en base a las ecuaciones (4.51), (4.52) y a la de acumulación del capital ambiental.

$$\dot{h} = H = H(k_h, Z_h) \tag{4.51}$$

$$max \int_0^{\propto} e^{-pt}\, U(c,E)dt \tag{4.52}$$

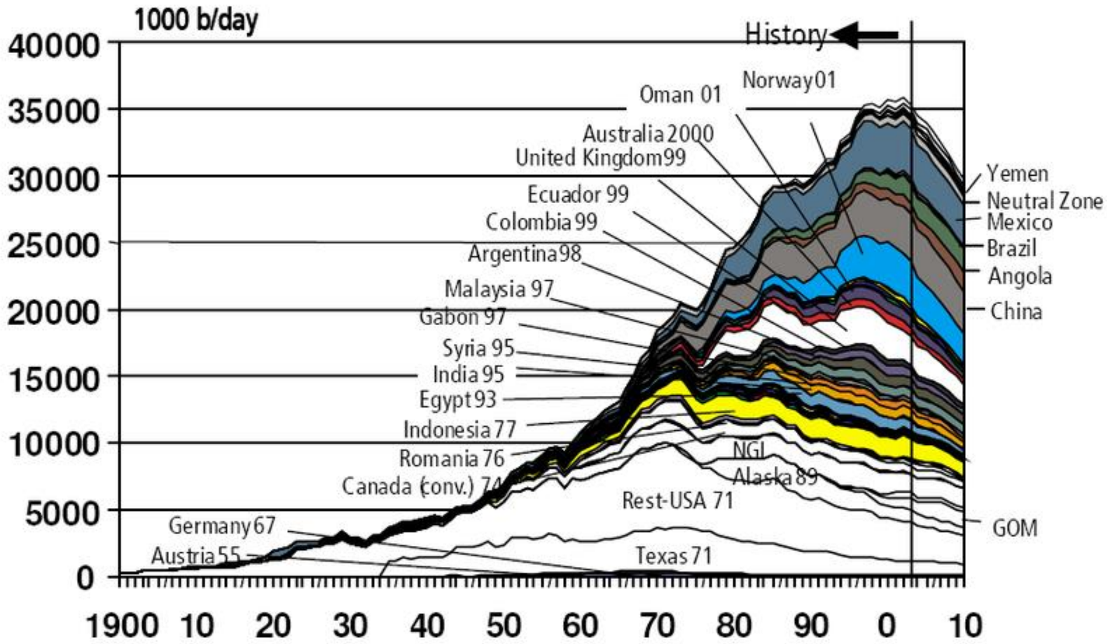
Los autores obtienen que el sector de conocimiento crece a un ritmo positivo, mientras que el stock de capital ambiental y el flujo de emisiones E, se mantiene constante. Para lograr un óptimo social es indispensable la intervención gubernamental, mediante impuestos verdes, lo que puede financiar el sector de conocimiento, concebido como bien público.

5. MODELO DE CRECIMIENTO EXÓGENO Y TASA DE AHORRO CONSTANTE CON RECURSO NATURAL NO RENOVABLE

Como se ha señalado a lo largo de todo el trabajo, actualmente se considera de suma importancia que exista una relación sostenible y equilibrada entre crecimiento económico y medio ambiente. Esta dualidad se ha centrado, principalmente, en aspectos derivados de la producción como la contaminación y los problemas que esto conlleva, tanto para el planeta como para la salud. Sin embargo, no se ha tenido demasiado en cuenta el impacto que tienen los recursos naturales en la producción, ya que hoy en día, para la inmensa mayoría de procesos productivos se requiere de la utilización de recursos provenientes de la naturaleza. Por ello, es relevante estudiar el gran impacto que tiene el agotamiento de recursos en el crecimiento de las economías y, cómo este agotamiento puede compensarse mediante inversión y mejora tecnológica.

Desde el siglo pasado, se lleva advirtiendo del agotamiento de recursos naturales como un problema endémico del sistema productivo actual. A pesar de ello, parece que la investigación y las nuevas tecnologías mejoran los procesos de producción, optimizándolos. Lo que, sumado a las ansias de enriquecimiento en la búsqueda de nuevos yacimientos y fuentes de materias primas, hace que parezca que se dispone de recursos ilimitados en el planeta. Por ejemplo, uno de los recursos más preciados por la industria es, sin duda, el petróleo, el combustible fósil por excelencia. Según la teoría del pico de Hubbert (1956), científico que ha tratado de predecir las reservas existentes del petróleo y, cómo este combustible fósil se va agotando en función del ritmo de extracción (Sánchez, J. 2015). Como se puede apreciar en el siguiente Gráfico 5.1, la producción o extracción petrolífera tendría una forma de campana de Gauss, encontrándose el cénit de producción según los estudios de la Agencia Internacional de Energía en torno a 2006. Por lo tanto, se habrían consumido más de la mitad de reservas de petróleo del planeta.

Gráfico 5.1. Evolución de la extracción del petróleo (1900-2010)



Fuente: Industry database (IHS 2003)

A pesar de esto, y pareciendo que cada vez existe una mayor concienciación por la utilización de energías limpias y renovables, no se han tomado las suficientes medidas por parte de los países más desarrollados para conseguir una producción menos agresiva con el medio ambiente, y lograr una transición productiva y energética sostenible. Se intuye que los precios de los minerales no siempre reflejan correctamente la escasez de los mismos, ya que pueden existir grandes distorsiones en los precios, debido a factores como la mayor oferta de recursos en los mercados y las mejores tecnologías extractivas, lo que podría ser un incentivo para grandes corporaciones para seguir dependiendo de este tipo de materias primas y retrasar la transición hacia modelos productivos más sostenibles. Lo que es innegable es que, a día de hoy, los recursos naturales son insumos imprescindibles en la producción.

Según Riera et *al*. (2016), se entiende por recurso natural el que se produce en la naturaleza y se emplea para producción de otros bienes o para consumo final por parte de los individuos. Principalmente, los recursos naturales se suelen separar en dos grandes grupos: recursos renovables y no renovables.

Los primeros son elementos que siguen un proceso de regeneración natural superior al de su consumo, es decir, el ritmo de consumo actual es menor que el de renovación, por lo que, se podría disponer de ellos de forma indefinida. Ejemplos de este tipo de recursos son: el agua, el viento y la radiación proveniente del sol, por mencionar algunos. Por otro lado, los recursos no renovables son concebidos como fuentes agotables a largo plazo, ya que, existe una cantidad finita de estos materiales o no se regeneran a una velocidad superior a la de consumo como para considerarlos renovables; por lo tanto, se les considera limitantes del crecimiento económico al no poderse utilizar de manera indefinida. Claro ejemplo de este tipo de recursos es el petróleo, un recurso energético esencial en prácticamente todo proceso productivo, el cual no es fácilmente sustituible actualmente. Además, dentro de este tipo se encuentran también otros recursos minerales como el hierro, aluminio, tungsteno o cobalto, muy demandados hoy en día. Por lo tanto, es necesario encontrar fuentes energéticas y materias primas que sean sustitutas eficientes y, a ser posible, renovables y respetuosas con el medio ambiente.

Por ello, el modelo que se presenta a continuación se fundamenta en la importancia de la buena utilización de los recursos disponibles para que las futuras generaciones puedan disponer de ellos. Teniendo en cuenta que es necesario que en el proceso productivo no se produzca una degradación en el entorno de forma irrecuperable, no sólo mediante la explotación indiscriminada de recursos, sino también por las consecuencias derivadas de ello. Como la deforestación, contaminación, calentamiento global, etc.

En este modelo se incluye de la forma más sencilla posible el impacto y repercusión que tiene el medio ambiente en la producción, a través del empleo de recursos naturales como factor productivo. El estudio se va a centrar en la inclusión de un recurso no renovable y su efecto en el crecimiento de la economía en el modelo de crecimiento exógeno de Solow con progreso técnico. Para ello, se caracterizarán las sendas de crecimiento equilibrado, y se determinará a qué ritmo puede crecer la producción en un estado estacionario, donde el crecimiento es constante, pudiendo ser positivo, negativo o nulo.

Entendiendo los recursos naturales como un motor y parte esencial en el crecimiento económico, y dado que la gran mayoría de los modelos revisados anteriormente no tienen en cuenta factores como la extracción de recursos naturales, se ha optado por incluir en el modelo de Solow la cantidad extraída R_t de un stock de un recurso natural (S_{A_t})[30] en la función de producción. Por simplicidad se obvian aspectos de comportamiento del stock del recurso natural como los costes de extracción, la incertidumbre y el descubrimiento de nuevos yacimientos.

Por lo que, en este caso, la función de producción depende fundamentalmente de tres inputs: capital, stock del recurso natural y trabajo eficiente $Y_t = {K_t}^{\alpha} {R_t}^{\beta} (A_t L_t)^{1-\alpha-\beta}$.

La función de producción depende del capital, al igual que en la neoclásica con progreso tecnológico, además, se ha añadido la cantidad extraída R_t de un stock del recurso natural con un exponente (β)[31]. Por lo tanto, cuanto mayor sea el valor de β mayor será el impacto del stock del recurso natural en la producción. El valor de β dependerá de la cantidad utilizada de stock del recurso natural en la producción, es decir, β es la fracción de la producción que es debida a la utilización del recurso natural. Podría razonarse que el valor de β varía según las necesidades de materia prima por parte de una economía para incrementar su producción. Por lo que, a mayor utilización de los recursos naturales, se presupone un mayor desarrollo económico, que a su vez, utiliza una mayor cantidad de inputs para mantener esos niveles productivos.

[30] Se denominará con el subíndice “A” para evitar la confusión la “s” de tasa de ahorro

[31] $0 < \beta < 1$

A la hora de trabajar con la siguiente función de producción es necesario estudiar que propiedades de la función neoclásica cumple, por lo que se procederá a analizar si satisface las siguientes propiedades:

$$Y_t = {K_t}^{\alpha}{\mathrm{R_t}}^{\beta}\,(A_tL_t)^{1-\alpha-\beta} \tag{5.1}$$

- Grado de homogeneidad que presenta la función: $F(\lambda K_t,\lambda R_t,\lambda A_tL_t) = \lambda^{\alpha}{K_t}^{\alpha}\,\lambda^{\beta}{R_t}^{\beta}\lambda^{1-\alpha-\beta}(A_tL_t)^{1-\alpha-\beta} = \lambda^{\alpha+\beta+1-\alpha-\beta}\left({K_t}^{\alpha}{R_t}^{\beta}\,(A_tL_t)^{1-\alpha}\right) = \lambda F(K_t, R_t, A_tL_t)$. Esta función de producción presenta rendimientos constantes a escala, es decir, si se multiplicasen los factores productivos por una constante, el producto total obtenido de forma conjunta sería igualmente multiplicado por el mismo número que los factores de forma individual. Este supuesto es idéntico al de la función de producción neoclásica.
- Supuesto de productividad marginal de los factores productivos: $\frac{\delta Y}{\delta K} = \alpha{K_t}^{\alpha-1}{R_t}^{\beta}\,(A_tL_t)^{1-\alpha} > 0$; $\frac{\delta Y}{\delta \mathrm{R}} = \beta{K_t}^{\alpha}{R_t}^{\beta-1}\,(AL_t)^{1-\alpha} > 0$; $\frac{\delta Y}{\delta AL} = (1-\alpha-\beta){K_t}^{\alpha}{R_t}^{\beta}\,(AL_t)^{-\alpha-\beta} > 0$[32]. Estas expresiones indican que la productividad marginal del capital, de la cantidad del stock del recurso natural utilizada en la producción y del trabajo eficiente son positivas, es decir, la siguiente unidad empleada de los factores productivos sumará a la producción final. $\frac{\delta^2 Y}{\delta K^2} = \alpha(\alpha-1){K_t}^{\alpha-2}{R_t}^{\beta}\,(A_tL_t)^{1-\alpha} < 0$; $\frac{\delta^2 Y}{\delta \mathrm{R}^2} = \beta(\beta-1){K_t}^{\alpha}{R_t}^{\beta-2}\,(A_tL_t)^{1-\alpha} < 0$; $\frac{\delta^2 Y}{\delta AL^2} = (1-\alpha-\beta)(-\alpha-\beta){K_t}^{\alpha}{R_t}^{\beta}\,(A_tL_t)^{-\alpha-\beta-1} < 0$[33]. Se aprecia en la segunda derivada parcial de la producción respecto a los factores productivos que los rendimientos son decrecientes, ya que el resultado es menor que cero para todos los factores[34], siempre limitándose al caso de estudio comentado, $\alpha+\beta < 1$.

---

[32] Este caso se da sí y solo sí: $\alpha+\beta < 1$, en caso de que $\alpha+\beta = 1$ ó $\alpha+\beta > 1$, no se cumpliría esta propiedad, por lo que el estudio se limita al caso: $\alpha+\beta < 1$.
[33] Esta propiedad se cumple ya que restringimos el análisis al caso $\alpha+\beta < 1$.
[34] En ambos casos el resultado es menor que 0 debido a que como tanto α como β están comprendidas entre 0 y 1.

En este segundo supuesto la función de producción analizada se comporta de igual forma que la función de producción neoclásica.

- El tercer supuesto al que se enfrentan es el de las condiciones de Inada: donde se requiere que la productividad marginal de los factores productivos tienda a 0 cuando éstos se aproximen a ∞, y a la inversa. $\lim_{K\to\infty}\frac{\delta Y}{\delta K}=0$; $\lim_{K\to 0}\frac{\delta Y}{\delta K}=\infty$; $\lim_{\mathrm{R}\to\infty}\frac{\delta Y}{\delta K}=0$; $\lim_{\mathrm{R}\to 0}\frac{\delta Y}{\delta K}=\infty$; $\lim_{AL\to\infty}\frac{\delta Y}{\delta AL}=0$; $\lim_{AL\to 0}\frac{\delta Y}{\delta AL}=\infty$. Las condiciones de Inada se cumplen para los factores productivos, al igual que en la función de producción neoclásica.

Continuando con la introducción de las ecuaciones del modelo:

- La población crece a una tasa exógena y constante:

$$n=\frac{\dot{L}_t}{L_t} \tag{5.2}$$

- La tecnología crece a una tasa exógena y constante:

$$g=\frac{\dot{A}_t}{A_t} \tag{5.3}$$

- El capital se acumula de la siguiente forma:

$$\dot{K}_t=sY_t-\delta K_t \tag{5.4}$$

Además, a parte del comportamiento habitual del capital y su ecuación de acumulación[35], se debe introducir la acumulación del stock del recurso natural. Por simplicidad, se considera que el recurso natural empleado en la producción es no renovable:

- El stock del recurso natural no renovable se acumula de la siguiente forma:

[35] No se va a desarrollar en este modelo debido a que ya se ha hecho con anterioridad en este trabajo.

$$\dot{S_{A_t}} = -R_t = -uS_{A_t} \quad (5.5)$$

La acumulación del stock del recurso no renovable ($\dot{S}_{\mathrm{A_t}}$) se construye partiendo de la existencia de una cantidad inicial recurso, del cual se va extrayendo la cantidad (R_t), siendo ésta una fracción constante del stock existente del recurso (uS_{A_t}). Y, como se ha comentado con anterioridad, no se producen nuevos descubrimientos ni incrementos respecto al nivel inicial, por lo que, el stock del recurso solamente puede verse reducido.

Para trabajar con las ecuaciones del modelo se va a realizar la transformación a términos per cápita como muestran las siguientes expresiones:

- Función de producción por trabajador per cápita:

$$y_t = \frac{Y_t}{L_t} = \frac{{K_t}^{\alpha}{R_t}^{\beta}\,(A_t L_t)^{1-\alpha-\beta}}{L_t} = {k_t}^{\alpha}{r_t}^{\beta}\,(A_t)^{1-\alpha-\beta} \quad (5.6)$$

donde $k_t = \frac{K_t}{L_t}$ $y\, r_t = \frac{R_t}{L_t}$.

- Función de acumulación del stock del recurso natural per cápita, $\mathrm{s_{a_t}} = \frac{\mathrm{S_{A_t}}}{\mathrm{L_t}}$:

$$\dot{s}_{a_t} = \frac{\dot{S_{A_t}} L_t - S_{A_t}\dot{L_t}}{{L_t}^2} = \frac{\dot{S_{A_t}}}{L_t} - \frac{S_{A_t}\dot{L_t}}{L_t L_t} = \frac{\dot{S_{A_t}}}{L_t} - n\, s_{a_t} \quad (5.7)$$

$$\frac{\dot{S_{A_t}}}{L_t} = -us_{a_t} \quad (5.8)$$

La acumulación del stock del recurso natural per cápita se obtiene sustituyendo $\frac{\dot{S_{A_t}}}{L_t} = -us_{a_t}$, como se puede observar en la siguiente ecuación:

$$\dot{s}_{a_t} = -us_{a_t} - ns_{a_t} = -(u+n)s_{a_t} \quad (5.9)$$

En este caso se puede observar que la acumulación del stock del recurso natural depende del stock del recurso existente en ese instante de tiempo multiplicado por una constante, que es la suma de la fracción constante de extracción del recurso no renovable (u) y de la tasa de crecimiento de la población (n).

Como se ha visto anteriormente, en la revisión del modelo de Solow, el capital se acumula de la siguiente forma:

$$\dot{k}_t = sy_t - (\delta + n)k_t \tag{5.10}$$

Una vez obtenidas todas las ecuaciones per cápita, se pueden calcular las tasas de crecimiento de las variables, para así poder analizar su comportamiento en el EE.

A partir de la ecuación de acumulación del stock del recurso natural (5.10) se halla su tasa de crecimiento recogida en la siguiente expresión:

$$\gamma_{s_a} = \frac{\dot{s}_{a_t}}{s_{a_t}} = -(u + n) \tag{5.11}$$

De esta ecuación se extrae con claridad que la tasa de crecimiento es constante y negativa. Como se ve, solamente depende de la tasa de extracción del recurso (u) y de la tasa de crecimiento exógeno de la población. Obviando esta tasa exógena, que aporta información irrelevante para el análisis, a mayor tasa de extracción, como es lógico, antes se terminará con las reservas del recurso natural no renovable. Nótese que como de la ecuación que describe la evolución temporal del stock del recurso natural se tiene que $R_t = uS_{A_t}$, se cumple en términos per cápita $r_t = us_{a_t}$, y al ser u constante, $\gamma_r = \gamma_{s_a}$.

Para poder analizar el comportamiento de ambos stocks en el Estado Estacionario es necesario retrotraerse al stock de capital y calcular su tasa de crecimiento, la cual se muestra en la siguiente expresión una vez, sustituida la función de producción:

$$\gamma^*{}_k = s{k_t}^{\alpha-1}{r_t}^{\beta}(A_t)^{1-\alpha-\beta} - (\delta + n) \tag{5.12}$$

La tasa de crecimiento del capital y la del stock del recurso natural ($\gamma^*{}_{s_a} = -(u + n)$) en el EE son con las que se va a trabajar para poder observar las sendas de crecimiento de la economía.

En este caso se comienza operando con la tasa de crecimiento del capital, que ha de ser constante en el EE ($\gamma^*{}_k = cte$), ya que la del stock del recurso natural es constante en todo momento, por lo que es la misma que en el EE.

Partiendo de $\gamma^*{}_k = s{k_t}^{\alpha-1}{r_t}^{\beta}(A_t)^{1-\alpha-\beta} - (\delta + n)$ es necesario tener en cuenta que ${k_t}^{\alpha-1}{r_t}^{\beta}(A_t)^{1-\alpha-\beta}$ ha de ser constante en el EE para que $\gamma^*{}_k = cte$, debido a que $(\delta + n)$ son constantes. Por lo que se opera llegando a la siguiente expresión:

$$\frac{\gamma^*{}_k + (\delta + n)}{s} = {k_t}^{\alpha-1}{r_t}^{\beta}(A_t)^{1-\alpha-\beta} \tag{5.13}$$

El término de la izquierda de la ecuación es constante, denotándolo con la letra Z en la siguiente expresión, que muestra la relación que tiene que existir entre los stocks de capital y del recurso natural en el EE:

$$Z = {k_t}^{\alpha-1}{r_t}^{\beta}(A_t)^{1-\alpha-\beta} \tag{5.14}$$

Para calcular la tasa de crecimiento del capital en el EE, se toman logaritmos y se deriva respecto del tiempo:

$$\gamma^*{}_Z = \frac{\dot{Z}}{Z} = (\alpha - 1)\gamma^*{}_k + \beta\gamma^*{}_r + (1 - \alpha - \beta)\gamma^*{}_A \tag{5.15}$$

La tasa de crecimiento de una constante es cero, por lo que $\gamma^*{}_Z = 0$, y conociendo $\gamma^*{}_r = \gamma^*{}_{s_a} = -(u + n)$, $\gamma^*{}_A = g$, $\gamma^*{}_k$ puede despejarse de la ecuación (5.15) para obtener la tasa de crecimiento del capital en el EE:

$$\gamma^*{}_k = \frac{-\beta(n + u) + (1 - \alpha - \beta)g}{1 - \alpha} \tag{5.16}$$

El signo de la tasa de crecimiento del capital per cápita depende del valor que se obtenga del numerador, ya que, si: $(1 - \alpha - \beta)g > \beta(n + u)$, la tasa de crecimiento del capital será positiva en el EE, que es lo que se busca en aras de lograr una senda de crecimiento equilibrado y positivo.

Para la obtención de la tasa de crecimiento de la economía de nuevo se toman logaritmos y se deriva respecto del tiempo en la ecuación de la producción por trabajador eficiente: $y_t = {k_t}^{\alpha}{r_t}^{\beta}(A_t)^{1-\alpha-\beta}$, que en EE: $\gamma^*{}_y = \alpha\gamma^*{}_k + \beta\gamma^*{}_r +$

$(1-\alpha-\beta)\gamma^*{}_A$. Por lo que si se realizan las sustituciones correspondientes se tiene: $\gamma^*{}_y = \alpha\frac{-\beta(n+u)+(1-\alpha-\beta)g}{1-\alpha} - \beta(u+n) + (1-\alpha-\beta)g$.

De esta última expresión se opera y obtiene:

$$\gamma^*{}_y = \frac{1}{1-\alpha}(-\beta(u+n) + (1-\alpha-\beta)g) \tag{5.17}$$

Se observa que la tasa de crecimiento de la economía en el EE es idéntica a la del capital, constante, y positiva si se cumple la condición mencionada con anterioridad, $(1-\alpha-\beta)g > \beta(u+n)$.

Por último, sería necesario analizar el comportamiento del consumo per cápita ($c_t = (1-s)y_t$), la última variable restante. La operativa aplicada sería la misma: $\gamma^*{}_c = \alpha\gamma^*{}_k + \beta\gamma^*{}_r + (1-\alpha-\beta)\gamma^*{}_A$. De nuevo, siguiendo el mismo procedimiento se llega a:

$$\gamma^*{}_c = \frac{1}{1-\alpha}(-\beta(u+n) + (1-\alpha-\beta)g) \tag{5.18}$$

Por lo que se pueden resumir todas las tasas de crecimiento de las variables por trabajador eficiente en el EE de la siguiente forma:

$$\gamma^*{}_k = \gamma^*{}_y = \gamma^*{}_c = \frac{1}{1-\alpha}(-\beta(u+n) + (1-\alpha-\beta)g) \tag{5.19}$$

Por lo tanto, dados los resultados obtenidos, para lograr una senda de crecimiento equilibrado positivo, y como se ha señalado anteriormente en la literatura (véase, por ejemplo, Smulders (2004)), ha de darse la siguiente condición

$$(1-\alpha-\beta)g > \beta(u+n) \tag{5.20}$$

Que puede reescribirse como:

$$(1-\alpha-\beta)g > \beta\gamma^*{}_{sa} = \beta\gamma^*{}_r \tag{5.21}$$

Puede concluirse, por tanto, que para que exista un crecimiento positivo en el EE de esta economía es imprescindible que haya progreso tecnológico, en este caso, exógeno. Además, este progreso tecnológico se tiene que producir con la suficiente rapidez para que compense la tasa de decrecimiento del stock del recurso natural.

La innovación empresarial permitiría que los rendimientos obtenidos por el capital, a pesar de ser decrecientes, sean superiores a la fuerza negativa producida por la extracción del recurso natural no renovable. Por lo que, se insta a que se produzcan estas mejoras tecnológicas para incrementar la productividad obteniendo un mayor rendimiento de las inversiones, superando así, la necesidad de la extracción del recurso.

Para que exista esta tasa de crecimiento positivo en el EE es tan necesario el progreso técnico, que si se hace $g = 0$, es decir, que no hubiese progreso técnico, sucedería lo siguiente:

$$\gamma^*{}_k = \gamma^*{}_y = \gamma^*{}_c = \frac{1}{1-\alpha}\big(-\beta(u+n)\big) < 0 \qquad (5.22)$$

En este caso la tasa de crecimiento de la economía sería constante y negativa en el EE, lo que abocaría a su desaparición. Al ser la tasa de crecimiento del stock del recurso negativa, debido al carácter no renovable del recurso y a la extracción del mismo de forma constante, junto a la presión de los incrementos de población, implican una tasa de crecimiento de la economía negativa. Esto se debe a los rendimientos decrecientes del capital que imposibilitan que haya una suficiente acumulación para revertir los efectos negativos de la extracción del recurso natural, que es el principal causante de que la tasa de crecimiento de la economía sea negativa.

Este resultado es bastante lógico e intuitivo, ya que, si se consiguen los suficientes avances tecnológicos se lograría incrementar progresivamente la eficiencia en la utilización de los factores productivos empleados en la producción. Así se conseguiría reducir la dependencia de los recursos naturales, obteniendo así, una mayor tasa de crecimiento en el EE.

6. CONCLUSIONES

Las principales conclusiones que se extraen del presente Trabajo de Fin de Máster son las siguientes:

- La teoría neoclásica del crecimiento económico ha ido evolucionando a lo largo del siglo XX. De los modelos más simples de tasa de ahorro constante como el de Solow o Romer, a modelizaciones de crecimiento óptimo mucho más elaboradas. Sin embargo, los modelos más básicos contienen las ideas esenciales de la teoría del crecimiento. Por lo que, la mayor complejidad no siempre suele resultar en una mayor evidencia explicativa.

- La gran complejidad de la realidad actual imposibilita la exacta medición y predicción mediante modelos, hipótesis o simulaciones mediante potentes superordenadores del futuro económico. Esto es debido a la inmensa cantidad de variables que afectan a cada aspecto de la economía, por irrelevantes que parezcan. Sin embargo, los modelos ayudan a comprender y a sintetizar el funcionamiento básico de los agentes y el entorno que rodea el ámbito económico y medioambiental.
- A fin de cuentas, el crecimiento económico se basa en dos ideas muy elementales, que son la importancia del ahorro (inversión) y el progreso tecnológico. Sin ambos factores, no existiría el desarrollo de las economías. Este último puede ser la salvación y el ocaso del sistema económico tal y como se le conoce. Esto se debe a que los grandes avances en la tecnología posibilitan grandes mejoras en la productividad, nuevas formas de concepción del capital y, brinda la posibilidad de una gestión más óptima de los recursos. Por el contrario, el vertiginoso avance de la sociedad impulsado por el progreso tecnológico deja en evidencia los anticuados modelos que no se ajustan a la realidad actual.
- Actualmente, no solo los recursos naturales son limitantes del crecimiento económico, sino que es necesario darse cuenta de la importancia que tiene la Tierra como sumidero de desechos. Por lo que, aspectos como la contaminación, vertido de residuos o presión de la población, son al igual que los recursos naturales, limitantes del crecimiento, si se quiere que éste sea sostenible.
- Cada vez es más necesario destinar recursos a las actividades de *abatement* y la reducción de emisiones, ya que, si permanecen constantes, no puede darse un crecimiento óptimo sostenido. Por lo tanto, éste aumenta los niveles de contaminación, lo que perjudica

directa e indirectamente la calidad de vida y el bienestar presente y futuro de la población.

- Un crecimiento sin acumulación de contaminación sería alcanzable, si los rendimientos del sector del *abatement* no fueran decrecientes, siendo éste eficaz, además de, mantener el supuesto de rendimientos constantes del capital. También es posible, en los casos en que el stock de conocimiento sea un bien público, de nuevo, dependiendo de la función de utilidad y de producción.
- Las políticas ambientales pueden ser efectivas si las actividades de *abatement* son capaces de generar incrementos suficientemente grandes en la productividad que aumenten el crecimiento.
- Los recursos naturales son un componente esencial en todo ámbito hoy en día, más si cabe en lo que a crecimiento económico y medio ambiente se refiere. Son imprescindibles en la producción y consumo de toda economía o empresa. Solamente mediante la mejora en la productividad e innovación en campos como las fuentes de energía renovables o materiales alternativos se les podrá dar un uso más eficiente e incluso poder dejar de depender de ellos en un futuro.

Resumiendo, pudiera ser que el crecimiento económico sostenible con el medio ambiente se llegase a lograr, sin embargo, deberían darse muchos factores. Uno reseñable sería la inversión en prevención de la contaminación, capital humano e innovación en nuevas tecnologías. Además, como se ha podido observar, los resultados de mercado no alcanzan el óptimo, mientras que las resoluciones mediante el modelo del planificador sí, por lo que, no sería muy descabellado afirmar que, son necesarias nuevas y contundentes regulaciones medioambientales. Esta regulación puede basarse en subsidios a la inversión en tecnologías más limpias o en *abatement*, o bien, en impuestos o límites a las emisiones. Sin desistir en la búsqueda de nuevas fórmulas de crecimiento económico, ya que, muchas de las políticas económicas aplicadas durante el siglo pasado no son eficaces en el mundo globalizado del siglo XXI.

BIBLIOGRAFÍA

Acuerdos de París (2015). Naciones Unidas. Disponible en: https://unfccc.int/es/process-and-meetings/the-paris-agreement/que-es-el-acuerdo-de-paris

Alfranca, O. (2009). "*Regulación ambiental e innovación*". Universidad politécnica de Cataluña.

Andreoni, J., Levinson, A., (1998*). "The Simple Analytics of the Environmental Kuznets Curve"*. NBER, Working paper.

Aguion, P., Howitt, P. (2009). "*The economics of growth"*. The MIT press.

Arrow, K., Bolin, B., Costanza, R., Dasgupta, P., Folke, C., Holling, C., Jansson, B.O., Levin, S., Maler, K.G., Perrings, C., Pimentel, D., (1995). "*Economic growth, carrying capacity, and the environment".* Science 268, 520–521.

Bovenberg, A.L., Smulders, S.A. (1995). "*Environmental quality and pollution-augmenting technological change in a two-sector endogenous growth model*". Journal of Public Economics 57, 369–391.

Bovenberg, A.L., Smulders, S.A. (1996). "*Transitional impacts of environmental policy in an endogenous growth model*". International Economic Review 37, 861–893.

Brock, W., Taylor, M.S (2004). Economic growth and the environment: a review of theory and empirics. NBER Working paper.

Caballero, M. *et al* (2007). "*Efecto invernadero, calentamiento global y cambio climático: una perspectiva desde las ciencias de La Tierra"*. Revista digital universitaria.

CIIFEN (2012). "*Efecto invernadero*". Disponible en: http://www.ciifen.org/index.php?option=com_content&view=category&layout=blog&id=99&Itemid=342&lang=es

Correa, F.J. (2004). "*Crecimiento económico y medio ambiente: una revisión de la hipótesis de la curva ambiental*". Semestre económico.

Díaz, M.R. (2007). "*Estudio empírico de las causas subyacentes en la hipótesis de la curva de Kuznets ambiental: influencia de factores exógenos y análisis de descomposición.* Universidad de Santiago de Compostela.

EDGAR (2017)." *Global Atlas of the three major Greenhouse Gas Emissions for the period 1970-2012".* Earth System Science Data.

Grossman, G., Krueger, A., (1995). "*Economic growth and the environment*". Quarterly Journal of Economics 110 (2), 353–377.

IPCC, (2014). "*Climate Change 2014: Synthesis Report*".

IPCC, (2018). "*Informe especial: Calentamiento global de 1,5ºC*".

Jones, C. (1998). "*Introduction to economic growth*". W.W Norton Company, Stamford University.

Kallis, G. (2019). "*A Green New Deal Must Not Be Tied to Economic Growth, Truthout*". Disponible en: https://truthout.org/articles/a-green-new-deal-must-not-be-tied-to-economic-growth/

Kuznets, S. (1955). "*Economic Growth and Income Inequality*". The American Economic Review, Vol.45, No. 1, Marzo,1-28.

Laurent, E (2015). "*Social-ecology: exploring the missing link in sustainable development*". Stanford University.

Michel, P., Rotillon, G. (1995). "*Disutility of pollution and endogeneous growth*". Environmental and Resource Economics 6, 279–300.

Miteco (2020). *"¿Qué es el cambio climático?".* Disponible en: https://www.miteco.gob.es/es/cambio-climatico/temas/cumbre-cambio-climatico-cop21/el-cambio-climatico/

Muntean et al. (2018). "*Fossil CO2 emissions of all world countries*". JRC science for policy report.

Navarro, J (1989). "*América Latina ante la Reconversión Industrial, Contribución, No. 3*". UMSNH-Escuela de Economía, Morelia, Michoacán

Panayotou, T. (1993). “*Empirical tests and policy analysis of environmental degradation at different stages of economic development”*. Working Paper, Technology and Environment Programme, International Labour Office.

Panayotou, T., & Vincent, J. R. (1997). "*Regulación del medio ambiente y competitividad".* Disponible en: http://jefas.esan.edu.pe/index.php/jefas/article/view/101/92

Plan Nacional Integrado de Energía y Clima (PNIEC) 2021-2030 (2020). Disponible en: https://www.miteco.gob.es/es/prensa/pniec.aspx

Porter, M. E., & van der Linde, C. (1995). "*Towards a New Conception of the Environment-Competitiveness Relationship*". *The Jorunal Economic Perspectives*, 97-118. Disponible en: https://notendur.hi.is/bdavids/UAU101/Readings/porter_and_delinde.pdf

Riera, P. et *al* (2016). "*Manual de economía ambiental y de los recursos naturales*". Ediciones Paraninfo.

Roca, J. (2001). "*El debate sobre el crecimiento económico desde la perspectiva de la sostenibilidad y la equidad*". Disponible en: https://campusvirtual.univalle.edu.co/moodle/pluginfile.php/682139/mod_label/intro/ROCA-Crecimiento-Ambiente.pdf

Roca, J., Padilla, R. (2003). "*Emisiones atmosféricas y crecimiento económico en España. La Curva de Kuznets Ambiental y el Protocolo de Kyoto*". Economía industrial.

Sala-i-Martin, X. (2000). “*Apuntes de crecimiento económico*” *2ª edición, Antoni Bosch.*

Sánchez, J. (2015) "*Realidad y leyendas sobre el petróleo y su posible agotamiento*". Instituto español de estudios estratégicos (IEEE).

Selden, T.M., Song, D., (1995). "*Neoclassical growth, the J curve for abatement, and the inverted U curve for pollution"*. Journal of Environmental Economics and Management 29, 162–168

Smulders, S (2004). "*Non-renewable Resources and Economic Growth: Comparing the classics to new models of endogenous technology and growth".* Tilburj University

Suri, V., Chapman, D., (1998). "*Economic growth, trade and energy: implications for the environmental Kuznets curve*." Ecological Economics 25, 195–208.

Weil, D. (2006). "C*recimiento económico*". Pearson.

Xepapadeas, A. (1997). "*Economic development and environmental pollution: Traps and growth*". Structural Change and Economic Dynamics 8, 327–350.

Xepapadeas, A. (2005). "*Economic Growth and the environment*". Handbook of Environmental Economics, Volumen 3, capítulo 23, pgs. 1220-1271.

Zilio, M. (2010). "*Curva de Kuznets ambiental: la validez de sus fundamentos en países en desarrollo*". Cuadernos de economía.