Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Trabajo de Fin de Grado

Grado en Economía

Modelos teóricos de la demanda de seguros

Presentado por:

Fernando Pérez Martínez

Tutelado por:

Carlos Pérez Domínguez

Valladolid, 20 de Julio de 2020

RESUMEN:

En la familia de los modelos microeconómicos de elección, cobran especial importancia los modelos de elección en condiciones de riesgo e incertidumbre, dada su mayor realismo como consecuencia de esta nueva cualidad. En el siguiente trabajo modelizaremos la elección de los individuos teniendo en cuenta esta premisa que es lo que sucede exactamente en la *Teoría de la Demanda de Seguro*. Para ello, hemos configurado el estudio comenzando por una primera parte donde explicamos la *Teoría de la Utilidad Esperada*, como base fundamental de este desarrollo, puesto que es la teoría más importante para explicar la elección individual en condiciones de incertidumbre. Posteriormente, saltaremos en la segunda parte hacia el *Modelo de Estados Contingentes*, que es un primer acercamiento a los modelos de elección con riesgo, siendo el riesgo discreto. Por último, incorporaremos el riesgo continuo al modelo, mediante el cuál conseguiremos unos resultamos acorde a los anteriores pero fundamentados bajo un modelo mucho más cercano a la realidad práctica de los individuos.

Palabras clave: modelos microeconómicos, elección en condiciones de riesgo e incertidumbre, demanda de seguro

Códigos JEL: D81, G52

ABSTRACT:

In the family of microeconomic models of choice, decision-making under risk and uncertainty are especially important, given their greater realism as a consequence of this new quality. In the next analysis we will model the choice of individuals taking into account this premise, which is exactly what happens in the $Theory\ of\ Demand\ for\ Insurance$. For it, we have configured the work starting with a first part where we explain the $Theory\ of\ Expected\ Utility$, as the fundamental basis of this development, since it is the most important theory to explain individual choice in conditions of uncertainty. Subsequently, we will jump in the second part to the $Contingent\ State\ Model$, which is a first approach to the risk-choice models, with discrete risk. Finally, we will incorporate continuous risk into the model, through which we will obtain some results that are in accordance with the previous ones but based on a model that is much closer to the practical reality of individuals.

Keywords: microeconomic models, decision-making under risk and uncertainty, demand for insurance

JEL Codes: D81, G52

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS:

Capítulo 1:

Capítulo 2:

Capítulo 3:

INTRODUCCIÓN

Los "*seguros*" tienen su seno en una de las características más importantes de la vida de las sociedades humanas, la "incertidumbre".

La incertidumbre está presente en cualquier acción tomada por cualquier individuo. Nadie puede adivinar el futuro, de hecho, los más sabidos en esta materia de la predicción son los que más conciencia tienen de la imposibilidad de dicha tarea.

Esto configura un mundo donde cualquier tipo de decisión humana queda a la merced de un sinfín de posibles destinos, lo cuál, limita mucho la teoría clásica de modelos de elección con absoluta certeza.

Como hemos expuesto, los seguros nacen ante esta característica inherente a la vida del hombre y datan de fechas tan antiguas como la propia Humanidad. Siempre ha existido un cierto temor ante lo imprevisto y se ha buscado fórmulas alternativas de previsión ante ello, es decir, formulas de seguro.

Es lógico pensar, que, como las mismas sociedades, los seguros, han ido evolucionando y modernizándose con el tiempo. En los primeros comicios de la vida, el objetivo principal era la supervivencia, es decir, protegerse frente a las adversidades climatológicas, intrusiones internas o externas de otros seres vivos…etc.

El siguiente salto sería en la Antigua Grecia donde surgieron las primeras "asociaciones" con el principal objetivo de prestar ayuda a los socios en caso de invalidez, enfermedad, defunción… luego, pasó a Roma, a los Estados Mediterráneos, al Renacimiento, a Inglaterra… hasta llegar al siglo XVIII, donde sucedió un punto de inflexión con la Revolución Industrial.

El nacimiento de grandes industrias junto al creciente miedo, sobre todo por la explosión de las calderas de vapor, propició el nacimiento de las actividades que en la actualidad conocemos como "seguros". Hoy en día, son una parte muy importante de la actividad económica de cualquier país desarrollado.

Es difícil encontrar una definición completa de lo que es un seguro, pero podría ser la siguiente:

"…una actividad económico-financiera que presta el servicio de transformación de los riesgos de diversa naturaleza a la que están sometidos los patrimonios, en un gasto periódico presupuestable, que puede ser soportado fácilmente por una unidad patrimonial." (Guardiola, 2001).

Por lo tanto, vemos que al final no es más que un mecanismo de trasmisión de riesgos.

En el siguiente trabajo, modelizaremos la $Teoría\ de\ Elección\ del\ Individuo$ incorporando la $incertidumbre$ e incorporaremos los seguros en el modelo, como fórmulas de transmisión y cobertura de riesgos. Así pues, la obra se encuentra dividida en tres partes y una conclusión.

La primera parte, no entra de lleno en los modelos de demanda de seguros, pero es la base fundamental para entenderlos. Sirve de guía para conocer cómo surgió la necesidad de estudiar la elección con incertidumbre en el pasado, lo que dio pie al nacimiento de la $Teoría\ de\ la\ Utilidad\ Esperada$. También, en base a esta teoría, clasificaremos las actitudes frente al riesgo de los individuos y explicaremos la forma de poder medir dicha aversión para establecer comparaciones.

Ahora sí, en la segunda parte, entraremos en un tipo de modelo teórico de seguros: el $Modelo\ de\ Estados\ Contingentes$, el cuál, tras su desarrollo matemático y gráfico, nos muestra como un agente buscará contratar un seguro para cubrirse de una posible pérdida. Este tipo de modelos se construyen utilizando el riesgo discreto, como veremos, lo cuál es un fuerte avance con respecto la teoría clásica de elección, pero no llega del todo a reflejar la realidad práctica con sus infinitas posibilidades.

La tercera parte, partirá de la misma base que la del modelo anterior, pero introduciendo el riesgo continuo, una premisa que refleja más fielmente la realidad. Para ello, introduciremos en el modelo $variables\ aleatorias$ con sus consiguientes funciones de densidad y generaremos un desarrollo, matemático y gráfico, con el que extraeremos unas conclusiones sobre la decisión óptima del individuo, en línea a lo anterior. Y, por último, en dicho apartado, profundizaremos en el modelo, realizando un análisis de sensibilidad con el que podremos ver los posibles efectos que generarían cambios en las variables que lo conforman.

Capítulo 1. LA TEORÍA DE LA ELECCIÓN CON INCERTIDUMBRE

Comúnmente los economistas y estudiosos del comportamiento humano se han centrado en la elaboración de modelos microeconómicos con absoluta certeza, en los cuales, podíamos encontrar, bajo unas condiciones o axiomas de racionalidad, además de unas restricciones, su cesta óptima. Esta era aquella que maximizaba su utilidad, es decir, su bienestar.

La realidad es más complicada y la teoría de la elección, cobra muchísimo más realismo al suponer que un acto, en vez de producir un resultado conocido y seguro, más bien, genera un resultado aleatorio, es decir, los individuos se mueven en condiciones de riesgo o incertidumbre.[1]

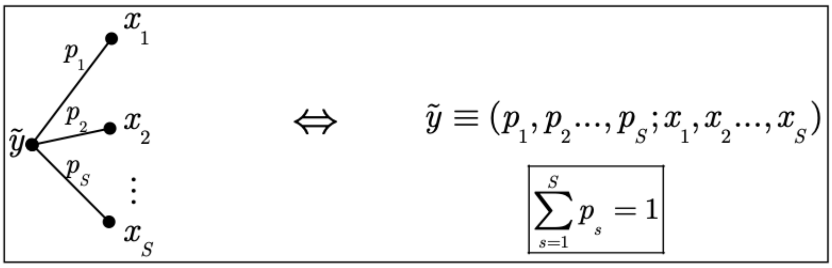
En este capítulo, plantaremos los fundamentos de la elección en condiciones de incertidumbre, planteando el origen y desarrollo de la Teoría de la Utilidad Esperada y como, en base a ella, se modeliza el concepto de riesgo.

1.1.- La teoría de la utilidad esperada

1.1.1.- El origen de la teoría.

Supongamos que los agentes pueden tomar decisiones sobre ciertos objetos que denominaremos *"loterías"* $(\tilde{y})$. Cada lotería tiene asociados un conjunto de resultados ciertos o premios posibles $(x^1, x^2, \ldots, x^s)$ que son excluyentes (o contingentes) entre sí y que acontecerán si se dan los correspondientes estados de la naturaleza. Vamos a ser capaces de, ya que nos movemos en condiciones de riesgo, asignar una probabilidad a cada estado de la naturaleza: $(p^1, p^2, \ldots, p^s)$, con lo que las loterías quedan definidas de la siguiente forma:

Figura 1.1.- Esquematización de una lotería



Fuente: Pérez-Domínguez (2020).

1 En primer lugar, conviene hacer referencia, aunque solo sea en términos informativos, a la distinción entre riesgo e incertidumbre, que marcó como referencia el importante economista Frank Hyneman Knight en su tesis "Costo, valor y beneficio" de 1921, estableció una distinción entre elecciones en condiciones de riesgo y aquellas que se toman en condiciones de incertidumbre.
Una decisión en un contexto de riesgo se produce cuando el individuo implicado es sabedor de las probabilidades exactas de que ocurran cada uno de los posibles estados de la naturaleza. El ejemplo típico sería el de lanzar un dado no trucado, dónde los seis posibles estados resultantes: cada cara del dado, presentan la misma probabilidad y es conocida; un sexto.
Una decisión en un contexto de incertidumbre se produce cuando el individuo no es sabedor de las probabilidades de ocurrencia de cada estado de forma exacta. Un ejemplo ilustrativo sería el de querer estimar las probabilidades de aprobar o suspender un examen antes de hacerlo.
Nosotros en este trabajo no efectuaremos esta distinción y trataremos de forma equivalente los conceptos de riesgo e incertidumbre.

Durante el desarrollo de la moderna teoría de la probabilidad (en el S.XVII), algunos matemáticos como Blaise Pascal o Pierre de Fermat se preocuparon por las condiciones en que un cierto juego de azar resultaba más o menos atractivo, a través del estudio del valor esperado del mismo. (Machina, 1989, pág. 13).

El valor esperado o actuarial de un juego de azar no es más que la esperanza matemática del mismo, esto es, el resultado de sumar los premios que ofrece dicho juego multiplicados por sus probabilidades respectivas. El valor esperado nos indica, por lo tanto, la magnitud del premio que, como promedio, puede esperarse obtener del juego y puede calcularse para una lotería como la previamente descrita de la forma siguiente:

$$\bar{x} \equiv E(\tilde{y}) \equiv \sum_{i=1}^{s} x_i\, p_i \;\; \rightarrow \;\; Precio\ justo$$

Pues bien, fundamentándonos en la idea de valor esperado podemos acuñar un criterio normativo que nos permita evaluar el atractivo de un cierto juego de azar: se trata del criterio de "*juego justo"*. Un juego es justo cuando su valor esperado es igual al precio que ha de pagarse por participar en el mismo. Si el valor esperado fuera mayor (menor) que el precio pagado por participar, entonces se trataría de una apuesta o juego favorable (desfavorable).

Por aquel entonces el jurista suizo "aficionado" a la matemática Nicholas Bernoulli remitió, en una de sus cartas, cinco problemas o divertimentos matemáticos al entonces distinguido matemático Rémond de Montmort, el cual los publicó en un apéndice de la segunda edición de su obra: "*Ensayo de Análisis sobre los juegos de azar"* salida a la luz en 1713. Entre estos problemas figuraba uno que posteriormente pasaría a la historia con el nombre de la "Paradoja de San Petersburgo" y que se encuentra en el origen de la teoría de la utilidad esperada.

Dicho problema puso de manifiesto la insuficiencia de la esperanza matemática como criterio de valoración de cualquier juego o lotería, como veremos a continuación:

Una versión simplificada del problema podría plantearse así: *Se trata de un juego que consiste en ir lanzando de forma sucesiva una moneda no trucada hasta que salga la primera cruz, en ese momento las tiradas cesarán y se pagará el siguiente premio. Este consiste en 2 unidades monetarias si sale cruz en la primera tirada, 4 unidades monetarias si sale en la segunda, 8 unidades si sale en la tercera… así sucesivamente. La idea es encontrar el precio justo que cualquier persona pagaría por participar en este juego.*

Para ello, recurrimos como sabemos a la esperanza matemática o valor esperado, que sería el precio justo que cualquiera querría pagar para participar:

$$\bar{x} \equiv E(\tilde{y}) = \frac{1}{2}\,2 + \frac{1}{2^2}\,2^2 + \frac{1}{2^3}\,2^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \quad \to \quad \infty$$

Como podemos observar, nos da un valor infinito, porque es un juego infinito, no hay un número de tiradas límite, ya que, si sigue saliendo cara, sigues tirando y tu premio continúa aumentando. Aquí nos encontramos con el problema, porque nadie, por su lógica-racional pagaría una cantidad infinita por dicho juego, ni siquiera una cantidad moderada de dinero.

El problema planteado se discutió durante décadas entre los eruditos, pero fue la solución de Daniel Bernoulli (primo de Nicholas) la que desencadena la idea de Utilidad Esperada. La solución apareció en su publicación *"Specimen theoriae novae de mensura sortis"* (1738), en la que, el propio Daniel, reconoce la aportación previa (de 1728) del afamado matemático Gabriel Cramer. Así pues, ayudado de la propuesta previa de G. Cramer, 1728, consiguió encontrar la solución más realista y en la que nace la teoría de la utilidad esperada. Dicha solución se puede entender del siguiente fragmento de su obra:

"(…) los matemáticos, en su teoría, valoran en dinero en proporción a la cantidad del mismo; la gente con sentido común, en la práctica, lo valoran en proporción a la utilidad que puede obtener de él." [2]

Así pues, la idea de estos pensadores era el tener en cuenta la utilidad que proporciona dichos premios para el individuo y directamente la cuantía del mismo, es decir, buscaban introducir a la hora de calcular ese precio justo, las preferencias personales de cada individuo mediante una función de utilidad definida sobre dichos premios. En definitiva, el problema no consistía en calcular la esperanza probabilística sobre los premios, sino sobre la utilidad individual que proporcionan dichos premios: lo que llamaremos la "utilidad esperada".

Adoptando la función de utilidad propuesta por Cramer : $u(x) = \sqrt{x}$, no es complicado calcular el nivel de *utilidad esperada* que reporta la Paradoja de San Petersburgo y el equivalente[3] de esa utilidad en términos de riqueza:

$$\bar{u}(\tilde{y}) \equiv E[u(\tilde{y})] = \frac{1}{2}\,u(2) + \frac{1}{2^2}\,u(2^2) + \frac{1}{2^3}\,u(2^3) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(2^n)}{2^n}$$

Que equivale a una riqueza menor que 5,83 unidades monetarias.

[2] Bernoulli, D. (1738), pág. 168.
[3] Este concepto se conoce como *equivalente cierto de la riqueza* y lo definiremos más adelante.

1.1.2.- La axiomatización de la teoría.

Esta idea de una función de utilidad esperada se limitó a ser un criterio *ad hoc* hasta un par de siglos más tarde, concretamente en el 1947, cuando John vonNeumann y Oskar Morgenstern es su obra *"Theory of games and economic behavior"* elaboraron un conjunto de axiomas que buscaron dar categoría de "ciencia" a esta función de utilidad y fundamentarla en el comportamiento racional. Por eso, también se las suele denominar a estas funciones, funciones de vonNeumann-Morgenstern.

Estos axiomas propuestos por estos autores parten de considerar un conjunto de loterías $\tilde{y} = \{\tilde{y}^1, \tilde{y}^2, \dots, \tilde{y}^s\}$ sobre los que el individuó decidirá. Se tienen que cumplir los axiomas:[4]

1) Pre-orden completo: establecemos una relación binaria entre las diferentes loterías que debe ser completa, reflexiva y transitiva. Esto posibilita el que el individuo pueda elegir entre dos elementos y así pueda ordenar de más preferidas a menos preferidas, pudiendo haber indiferencias, todas las loterías.

2) Continuidad: matemáticamente supone que, para cualquier $\tilde{y}^1, \tilde{y}^2, \tilde{y}^3 \in Y$, $tales\ que\ \tilde{y}^1 \geq \tilde{y}^2 \geq \tilde{y}^3$, tiene que existir una probabilidad $p \neq 0$ que logre: $(p;\ \tilde{y}^1, \tilde{y}^2) \sim \tilde{y}^2$. El sentido económico es que se cumple si el individuo puede encontrar siempre una compensación probabilística al perder una lotería, que le era más preferida, a favor de otra.

3) Reducción: matemáticamente supone que dada una lotería compuesta con la estructura $\tilde{y}^c = (k;\ \tilde{y}^1, \tilde{y}^2)$, cuyas loterías simples se definen como $\tilde{y}^1 = (p;\ x^1, x^2)$ & $\tilde{y}^2 = (q;\ x^1, x^2)$; dicha lotería compuesta tiene que ser indiferente para el individuo a una lotería simple $\tilde{y}^s = (k\,p + (1-k)\,q;\ x^1, x^2)$. Su sentido económico cuenta que, para que se cumpla el axioma, al individuo no le importa la manera o proceso por el que se generen los premios, sino únicamente le importa las cantidades de dichos premios y sus probabilidades. De este axioma podemos extraer que las preferencias de los individuos se plasmarán sobre los premios y probabilidades y no sobre el juego, más complejo o más simple, por el que se llegue a estas.

4) Independencia o sustitución: matemáticamente implica que dadas dos loterías $\tilde{y}^1, \tilde{y}^2 \in Y\ tal\ que\ \tilde{y}^1 \geq \tilde{y}^2$. Dada, además, una probabilidad $p > 0$, junto a una tercera lotería $y' \in Y$; se pueden definir otras dos loterías como $\tilde{y}^3 = (p,\ \tilde{y}^1, \tilde{y}')$ & $\tilde{y}^4 = (p,\ \tilde{y}^2, \tilde{y}')$; siempre se debe cumplir que $\tilde{y}^3 \geq \tilde{y}^4$. El significado que se extrae es que, para un individuo, su orden de preferencias para dos loterías no puede cambiar cuando se mezclan con otra tercera lotería cualquiera, si la mezcla tiene la misma estructura de probabilidades, es decir, en una

[4] La lista de axiomas que se expone está basada en la versión de Takayama (1994), pág. 260 y siguientes.

situación estocástica como esta, la inclusión de alternativas irrelevantes no podrá modificar el orden de preferencias inicial.

Una vez, establecidos estos axiomas, se cumple el siguiente teorema:

Existirá una función de utilidad definida sobre premios ciertos $u(x)$, a la que denominaremos función de utilidad de Bernoulli[5], con la que es posible calcular *utilidades esperadas* de cualquier lotería como:

$$\bar{u}(\tilde{y}) \equiv E[u(\tilde{y})] = \sum_{r=1}^{R} p_r \, u(x_r)$$

Y que preserva el orden de las preferencias:

$$\forall \, \tilde{y}^1, \tilde{y}^2 \in \Upsilon : \quad (\tilde{y}^1 \gtrsim \tilde{y}^2) \leftrightarrow E[u(\tilde{y}^1)] \geq E[u(\tilde{y}^2)]$$

1.2.- Las actitudes frente al riesgo.

Los individuos no se comportar de igual manera frente al riesgo. Como podemos intuir, existen individuos con mayor propensión para soportar riesgo, de forma que, se involucran en loterías o decisiones más arriesgadas, mientras que, para otros, con mayor aversión al riesgo, dichas loterías les reportan mucha menor utilidad y ven más factibles decisiones más seguras.

En este apartado abordaremos el tratamiento del riesgo desde la perspectiva de la Teoría de la Utilidad Esperada.

Antes de nada, debemos explicar una diferencia fundamental entre la Teoría de la Utilidad clásica de consumo (sin incertidumbre) y nuestra Teoría del la Utilidad esperada (con incertidumbre). En la Teoría clásica, sucedía que lo realmente importante de la función de utilidad era que fuese capaz de establecer un orden entre los bienes para poder ordenarlos, es decir, establecer relaciones de preferencia. Sin embargo, la función de utilidad esperada presenta cualidades cuasicardinales, es decir, no solo será importante el orden sino también ciertos valores absolutos de la función.

Esto es así porque las derivadas de la función de utilidad esperada nos indicarán característica sobre cómo es la actitud del agente.[6]

Esta cardinalidad queda reflejada en un axioma básico, implícito de los anteriores; se denomina "*axioma de preferencia por la riqueza o de no saciedad*".

[5] Es bastante habitual denominarla función de vonNeumann-Morgenstern, aunque aquí se optará por denominarla de Bernoulli.
[6] El tema de la cardinalidad en las funciones de utilidad puede consultarse, por ejemplo, en Allais. (1994).

Conlleva que nuestra función de utilidad esperada será siempre estrictamente creciente con la riqueza: $u´(x) > 0$. (Recordemos que la x es la variable que simboliza los diversos premios en riqueza que pueden suceder en la lotería).

Se entiende como algo lógico y es que cualquier individuo toma una decisión o lotería, en incertidumbre, o consume un bien, en certidumbre, con la idea de conseguir utilidad o bienestar por dicha acción. De forma que, a medida que aumenta el consumo del bien, o se toman decisiones con mayores riquezas, aumenta el bienestar del individuo.

A continuación, introduciremos dos conceptos con los que vamos a trabajar en esta teoría y para reflejar las actitudes frente al riesgo:

-Equivalente cierto (ξ) de una lotería ($\tilde{y}$): es la cantidad en valor monetario (en dinero) que le aporta al individuo el mismo nivel de utilidad que la lotería en cuestión:

$$u(\xi) = \bar{u}(\tilde{y}) \rightarrow \xi = u^{-1}[\bar{u}(\tilde{y})]$$

Como estamos utilizando una función de utilidad que da un valor a cada lotería o decisión medido en una cierta unidad imaginaría; a través del equivalente cierto, podemos saber en concreto cual es el valor de dicha lotería o decisión para el individuo en dinero.

-Prima de riesgo (ρ) asociada a una lotería ($\tilde{y}$): se define como la mayor cantidad de dinero posible por la que el individuo estaría dispuesto a recibir la media de la lotería sin ningún tipo de riesgo, en vez de enfrentarse a la incertidumbre que supone dicha lotería en cuestión:

$$\rho = \bar{x} - \xi$$

Por lo tanto, vemos que dicho valor, expresado en dinero, es igual a la esperanza de una lotería menos su equivalente cierto.

Los estudios referentes a ello, son el génesis del desarrollo actual de la Tª de la utilidad esperada y datan del 1960 en los trabajos desarrollados por John W. Pratt (1964) y Kenneth J. Arrow (1965). En dichos análisis se descubre que la segunda derivada determinará la actitud de los individuos frente al riesgo, pudiendo ser neutral ($u´´(x) = 0$), averso ($u´´(x) < 0$) ó amante ($u´´(x) > 0$) del riesgo.

Vamos a suponer la siguiente lotería y función de utilidad, para realizar nuestro análisis explicativo:

$$\tilde{y} \equiv (\pi;\ x_1, x_2),\quad x_2 > x_1,\ \ sea{:}\, u(x)\ \ con\ \ u´(x) > 0$$

$$\bar{x} \equiv E(\tilde{y}) = \pi\, x_1 + (1 - \pi) x_2$$

$$\bar{u}(\tilde{y}) \equiv E[u(\tilde{y})] = \pi \; u(x_1) + (1-\pi)\, u(x_2)$$

Así pues, podemos distinguir tres actitudes frente al riesgo:

1) Neutral al riesgo (risk-neutral):

Cuando $u''(x) = 0$; el sujeto se encuentra indiferente entre recibir con total certeza la media de la lotería ($\bar{x}$) que apostar por jugar la lotería ($\tilde{y}$) con su consiguiente riesgo. Como intuímos, su prima de riesgo es igual a cero ya que no está dispuesto a pagar nada por recibir la media con certeza en vez de enfrentarse a la lotería, puesto que ambas le proporcionan la misma utilidad.

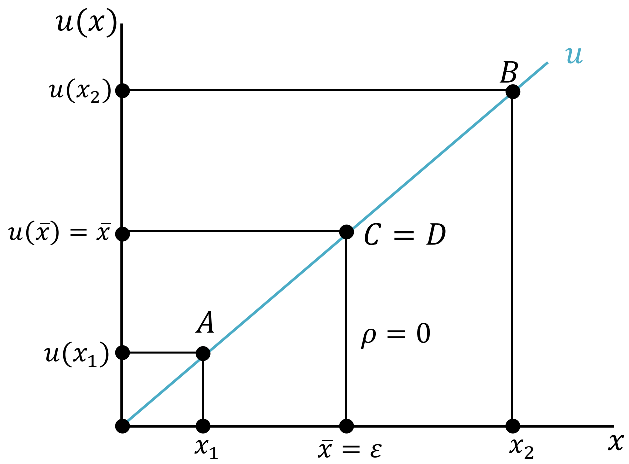
Su función es una línea recta, ya que su utilidad marginal es constante.

Figura 1.2.- Función de Bernoulli de un neutral al riesgo

$u(\bar{x}) = \bar{u}(\tilde{y})$

$\xi = \bar{x};\ \rho = 0$

$u''(x) = 0$



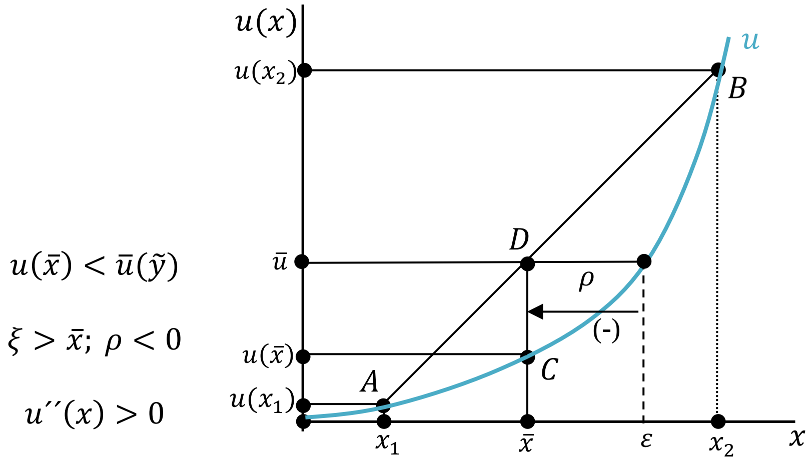
Fuente: Elaboración propia a partir de los trabajos de John W. Pratt (1964) y Kenneth J. Arrow (1965).

2) Amante al riesgo (risk-lover):

Cuando $u''(x) > 0$; el sujeto prefiere apostar por jugar la lotería ($\tilde{y}$) que recibir la media con certeza ($\bar{x}$), puesto que le reporta mayor utilidad las decisiones que entrañen más riesgo. Como podemos observar, dada su definición, la prima de riesgo será negativa, siendo más amante del riesgo cuanto más negativa sea dicha prima.

Su función es convexa, ya que su utilidad marginal es creciente.

Figura 1.3.- Función de Bernoulli de un amante al riesgo



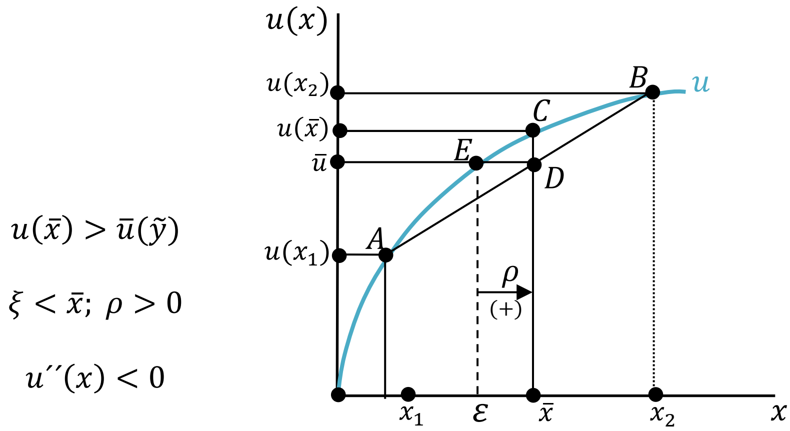
Fuente: Elaboración propia a partir de los trabajos de John W. Pratt (1964) y Kenneth J. Arrow (1965).

3) Averso al riesgo (risk-averse):

En la gran mayoría de los casos y concretamente con las funciones y modelos con los que vamos a trabajar, tenemos este tipo: $u''(x) < 0$. El sujeto prefiere recibir con certeza la media de la lotería ($\bar{x}$) que enfrentarse al juego o decisión ($\tilde{y}$) y soportar su riesgo. Esto trae consigo una prima de riesgo positiva, siendo más positiva cuanto más averso sea el individuo.

Su función será cóncava, ya que su utilidad marginal es decreciente y como analizaremos consiguientemente y dependiendo del grado de concavidad, dicha aversión podrá ser mayor o menor:

Figura 1.4.- Función de Bernoulli de un averso al riesgo



Fuente: Elaboración propia a partir de los trabajos de John W. Pratt (1964) y Kenneth J. Arrow (1965).

Esa desigualdad se conoce comúnmente como *“Desigualdad de Jensen”.*

1.3.- Los coeficientes de aversión al riesgo.

Ya hemos podido ver que, enfectivamente, la actitud frente al riesgo depende de la personalidad de cada individuo caracterizada por su función de utilidad. Además, dentro de los individuos aversos al riesgo, que es el comportamiento que más se puede entender como racional, hemos podido ver, a través de su prima de riesgo positiva, el grado de aversión al riesgo que puede ser mayor o menor en unos individuos o en otros. Luego, esta prima de riesgo constituye un primera medida para conocer esa intensidad en la aversión. Sin embargo, dada su expresión, puede que resulte difícil calcularla en algunos casos.

La cuestión que nos plantearemos a continuacion es ¿qué se esconde detrás de la prima de riesgo?

El primer tratamiento de esta cuestión se abordó por Arrow (1965) y Pratt (1964) que utilizando los desarrollos de Taylor, llegaron a una conclusión para pequeños riesgos (Apendice 1):

$$\rho(\tilde{x}_F) \cong \left({}^{1}/_{2}\right)\sigma^2 \underbrace{\left(-\frac{u''(x_0)}{u'(x_0)}\right)}_{\equiv A(x_0)}$$

Analizando dicha expresión, tenemos que la prima de riesgo de un sujeto que mide su grado de aversión al riesgo, se forma conjuntamente por una parte objetiva: la varianza (σ2) y por una parte subjetiva: el coeficiente de aversión absoluta al riesgo de Arrow-Pratt ($A(x_0)$).

-La varianza (σ2): nos proporciona una medida objetiva del riesgo de la lotería, ya que es inherente a ella misma y no depende de la actitud del sujeto ni de su riqueza cierta.

-El coeficiente de aversión absoluta al riesgo de Arrow-Pratt ($A(x_0)$): denominado así por sus creadores, es capaz de medir la cuantía subjetiva con la que un sujeto valora cierto riesgo, por lo que dependerá de su función de utilidad.

$$A(x_0) = -\frac{u''(x_0)}{u'(x_0)}$$

Puede, además, demostrarse que dadas dos funciones de utilidad de Bernoulli: $u^1(x) \;\; y \;\; u^2(x),$ diferenciables dos veces, que simbolizan las preferencias de dos individuos amantes de la riqueza $(u'(x) > 0)$ y aversos al riesgo $(u''(x) < 0)$ se garantiza que las tres siguientes afirmaciones son equivalentes:[7]

[7] Pratt (1964), Theorem 1.

a. $\rho^1(\tilde{x}_F) \geq \rho^2(\tilde{x}_F)$, siendo el riesgo de $\tilde{y}$ pequeño.

b. $A(x_0)^1 \geq A(x_0)^2$

c. $u^1 = T[u^2];\ \ T' > 0;\ \ T'' \leq 0\ \ (u^1\ es\ más\ cóncava\ que\ u^2)$

Una hipótesis habitual que se suele incorporar a los modelos de elección con incertidumbre es la de que la aversión absoluta al riesgo es decreciente en la riqueza (DARA).[8]

Esto significa que la percepción absoluta de un riesgo determinado deberá decrecer a medida aumenta el montante de riqueza del individuo (x_0).

Derivando en la definición del coeficiente, tenemos:

$$A'(x_0) = \frac{d\left(-\frac{u''(x_0)}{u'(x_0)}\right)}{dx_0} = \frac{-u'u''' + (u'')^2}{(u')^2} < 0$$

Una condición necesaria para que se cumpla este principio es que $u'''(x) > 0$, lo que puede interpretarse como un comportamiento "prudente".[9]

Capítulo 2. LA DEMANDA DE SEGURO EN UN MODELO DE ESTADOS CONTINGENTES.

Hasta ahora, hemos estado enfocando la teoría de la elección hacia un enfoque diferente, más real que el de la teoría clásica, mediante la incorporación de la incertidumbre.

Como es lógico, esto sucede en la práctica cotidiana, puesto que la mayoría de las acciones se ven influidas por una gran multitud de variables que hacen imposibles tenerlas en cuenta y por eso existe el riesgo.

En este capítulo nos vamos a enfocar en el mercado de seguros, el cuál se encuentra a disposición del individuo para poder eliminar ese riesgo a través de una cobertura de seguros.

[8] Se trata de las siglas de; Decreasing Absolute Risk Aversion.

[9] Kimball (1990). Puede demostrarse que una condición necesaria y suficiente para DARA es que $P(x_0) > A(x_0)$; siendo $P(x_0) = {-u'''(x_0)}/{u''(x_0)}$ el llamado "coeficiente de prudencia absoluta".

Las estrategias de cobertura, como veremos, implican el pago de una prima correspondiente, por parte del sujeto, que le sirve para poder compensar una posible pérdida futura que se pudiera dar en alguno de sus activos, de forma que, con ello, puede eliminar parte o toda esa incertidumbre futura.

Como conocemos, desde hace muchos años, los individuos de las sociedades ingeniaron mecanismos para protegerse de posibles pérdidas venideras, ejemplos de ello, son los contratos de opciones o de futuros, que tuvieron su seno en la protección de transacciones en la agricultura. Estos instrumentos financieros permitían a los contratantes acordar unas condiciones iniciales frente una operación que sucedía en el futuro, para poder evitar contratiempos, como pudiera ser, variaciones en el tipo de cambio, catástrofes económicas, epidemias mundiales...

Estos instrumentos, tras varios años de uso, han sido perfeccionados y actualmente, dada su naturaleza, son negociados en mercados financieros secundarios, por lo que tienen la personalidad de ser muy líquidos.

Por otro lado, los contratos de seguros no presentan mercados secundarios, dada su constitución más compleja y sus mayores costes de transacción, por lo que no poseen esa peculiaridad de liquidez. Sin embargo, a diferencia de las opciones, no aguardan ese riesgo intrínseco, con lo que se convierten en la mejor manera para poder prevenir riesgos con gran certeza: son una cobertura perfecta, ya que la ocurrencia del seguro se basa en que suceda una situación de pérdida específica.[10]

2.1.- Descripción del modelo.

El modelo comienza con un individuo que posee un activo cualquiera valorado en x_0 u.m. Dicho activo se encuentra involucrado en un riesgo que supondría perder L u.m, siendo $L \leq x_0$ y con una probabilidad de producirse dicho siniestro de p.

Por lo tanto, tenemos una situación inicial donde el individuo presenta una lotería: $x_F^0 = (p; x_0, x_0 - L)$, que describe el problema de posible pérdida al que se enfrenta, puesto que, por un lado puede suceder el estado de no siniestro: $x_1^0 = x_0$, en el que no perdería nada y por el otro, el estado de siniestro: $x_2^0 = x_0 - L$, en el se produciría dicha pérdida con una probabilidad p.

10 Por otra parte, si que es cierto que puede existir un cierto riesgo base para estos contratos, como el que la compañía no pueda pagar todos sus pasivos, o también, que, debido a la gran variedad de posibles pérdidas que se pueden dar, exista una mayor dificultad para calcular su prima justa. Aun así, esto no lo vamos a tener en cuenta en nuestro desarrollo del modelo.

Es interesante destacar su valor esperado, importante para lo que viene después:

$$\bar{x}^0 = E[x_F^0] = (1-p)x_0 + p\,(x_0 - L) = x_0 - pL$$

Respecto al mercado de seguros, los posibles seguros que le individuo pudiera contratar para cubrir dicha contingencia, presentan las siguientes características fundamentales:

-Prima del seguro (r): es la cantidad de u.m. que el sujeto debe pagar a la compañía aseguradora, independientemente de lo que suceda, para poder contratar el seguro.

-Cobertura (C): es la cantidad de u.m. que la compañía pagaría al sujeto únicamente en el estado de siniestro, para paliar, de forma total o parcial, la pérdida acontecida.

-Precio del seguro (π): es la cantidad de u.m. que le cuesta al sujeto cada una de las u.m. de la cobertura contratada. Se podría entender como la cantidad conocida de dinero que debe pagar el sujeto por cada unidad de dinero, antes de que suceda la contingencia. Se extrae lógico que supone la siguiente relación $\pi = {}^{r}/_{C}$, donde $\pi < 1$.

Así pues, podemos plantear el modelo de la siguiente forma:

Tenemos a un sujeto involucrado necesariamente en la lotería descrita (x_F^0) cuya preocupación sería la de decidir, dado un precio del seguro (π) en el mercado (nos movemos en mercados de competencia perfecta), qué cobertura contratará (C^*) para maximizar su utilidad esperada:

Se enfrenta a la siguiente lotería:

$$\tilde{x}(\pi, C) = (p; x_0 - \pi C, x_0 - \pi C - L + C)$$

Cuyo valor esperado:

$$\bar{x}(\pi, C) = E[\tilde{x}(\pi, C)] = (1-p)(\,x_0 - \pi C) + p\,(x_0 - \pi C - L + C) = x_0 - pL + (p - \pi)C$$

Generando así el siguiente problema de estados contingentes que resolveremos en este capítulo:

$$\max E\{u[\tilde{x}(\pi, C)]\} = (1-p)\;u[x_1(\pi, C)] \;+\; p\,u[x_2(\pi, \mathrm{C})] = (1-p)\,u\,(\,x_0 - \pi C) + p\;\;u(x_0 - \pi C - L + C)$$

Antes de empezar con el desarrollo gráfico y matemático del modelo, es importante destacar tres tipos de seguros importantes que existen y sus propiedades más esenciales, para luego trabajar con ellos:

- Seguros de prima justa (Fair premium):

  Un seguro es de prima justa cuando el sujeto paga como prima exactamente la misma cantidad de lo que espera cobrar, en termino medio, de la compañía en forma de cobertura.

  Esto significa que en el caso de siniestro cobraría toda la pérdida y en el caso de no siniestro no cobraría nada. De esta forma:

  La prima justa sería: $r^{PJ} = p\ C$

  El precio justo del seguro sería: $\pi^{PJ} = {r^{PJ}}/{C} = {p\ C}/{C} = p$

Estos seguros presentan una importante propiedad: El sujeto con este tipo de seguros obtendrá siempre un valor esperado idéntico al caso de no asegurarse.[11]

- Seguros de cobertura plena (Full coverage):

  Un seguro es de cobertura plena si el sujeto cobra, en caso de siniestro, la totalidad de su pérdida.

  Esto se traduce en que: $C^* = L$.

Estos seguros presentan otra propiedad importante: El sujeto obtendrá, con estos seguros, siempre una cantidad determinada de riqueza. Es decir, transformará su lotería inicial de riesgo en una lotería determinista con un único estado posible.[12]

[11] Podemos comprobarlo, utilizando la nueva lotería y su valor esperado:

$$\tilde{x}_F^{PJ} = (p; \quad x_0 - pC, x_0 - pC - L + C)$$

$$\bar{x}_0^{PJ} = E\left[\tilde{x}_0^{PJ}\right] = (1-p)(x_0 - pC) + p\ (x_0 - pC - L + C) = x_0 - pL = \bar{x}^0$$

[12] Podemos comprobarlo, utilizando la nueva lotería formada:

$$\tilde{x}_F^{CP} = (p; \quad x_0 - r, x_0 - r - L + C)$$

Dónde $L = C$, luego:

$$\tilde{x}_0^{CP} = x_0^{CP} = x_0 - r$$

- Seguros de prima justa y cobertura plena (Fair and Full):

Este tipo de seguros es una combinación de los dos anteriores, esto es, tendrá prima justa ($r^{PJ} = p\ C$ // $\pi^{PJ} = p$) y cobertura plena ($C^{*} = L$).

De esta manera, también aunará ambas propiedades, extrayendo la siguiente: El sujeto que obtenga estos seguros, recibirá siempre una cantidad de riqueza con certeza y, además, dicha cantidad, será el mismo valor que la media o valor esperado de la situación sin seguro.[13]

2.2.- Planteamiento gráfico: Un modelo de estados contingentes.

Para entender este modelo de estados contingentes, es necesario plasmar su desarrollo gráfico, con el que poder entender la posterior solución matemática.

Vamos a fundamentarnos en la idea del artículo seminal de Rothschild & Stiglitz, 1976, de modo, que desarrollaremos el modelo en un entorno gráfico como el de a continuación, en donde tenemos, por un lado, en el eje de abscisas, el estado de no siniestro (x_1) con su probabilidad ($1-p$) y por el otro, en el eje de ordenadas, el estado de siniestro (x_2) con su probabilidad p.

Cualquier punto situado en el gráfico corresponde a una posible lotería que proporciona al sujeto dichas riquezas en cada estado, como es el caso del punto $\tilde{x}_F^0$, el cual, es la situación inicial de no seguro.

Además, debemos tener en especial atención, su diagonal principal, denominada línea de certeza, cuyas loterías situadas en dicha línea tiene la propiedad de presentar la misma riqueza en ambos estados, es decir, sería seguros de cobertura plena. Como el caso de la lotería S: $\tilde{x}_F^S = x_F^S = x_0 - L$.

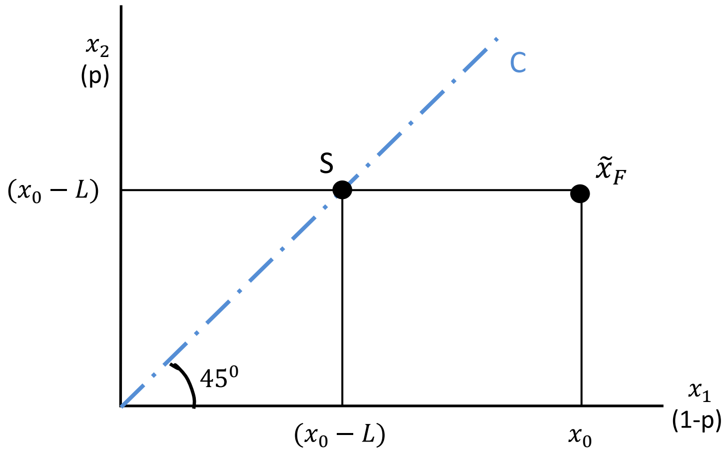
13 Podemos observarlo en la lotería que se forma:

$$\tilde{x}_F^{CPyPJ} = (p; \quad x_0 - r, x_0 - r - L + C)$$

Donde, teniendo en cuenta: $C = L$ y $r = pC = pL$:

$$\tilde{x}_F^{CPyPJ} = x_F^{CPyPJ} = \bar{x}_0 = x_0 - pL$$

Figura 2.1.- Modelo de Estados Contingentes. Situación inicial de no seguro.



Fuente: Elaboración propia a partir de Rothschild & Stiglitz, 1976.

Como ya dijimos, la idea principal del modelo es buscar la manera para la que el individuo elija un nivel de cobertura (C^*) que maximice su bienestar.

Para ello, primero tenemos que delimitar las posibles pólizas que puede contratar en el mercado competitivo donde se mueve. Luego, dado un precio π como dato, existen un conjunto de seguros, a lo que lo denominaremos "*restricción presupuestaria en el espacio de estados o línea isovalor"*.

Y finalmente, para plasmar las preferencias del individuo, utilizaremos las *"curvas de indiferencia" o "curvas de isoutilidad*" que subyacen de su función de utilidad esperada.

Así pues, en primer lugar, el individuo podrá pasar de su situación de lotería sin seguro $(\tilde{x}_F^0)$ a una serie de puntos que formarán su restricción, en función del nivel de cobertura (C) que elija.

Esto sería lo mismo que decir que, dado un precio π, el sujeto se mueve en la siguiente lotería $\tilde{x}_F = (p;\ x_0 - \pi C, x_0 - \pi C - L + C)$ que se convierte en varias dependiendo de ese nivel que elija. De esa expresión podemos obtener dos ecuaciones:

$$x_1 = x_0 - \pi C$$

$$x_2 = x_0 - L + (1 - \pi)C$$

Despejando el sistema, se obtiene:

$$x_2 = \frac{\bar{x}^\pi}{\pi} - \frac{(1-\pi)}{\pi} x_1 \quad donde \quad \bar{x}^\pi = (1-\pi)x_0 + \pi(x_0 - L)$$

*Podemos observar que $\bar{x}^\pi$ coincide con el valor esperado de la situación sin seguro del individuo $(\bar{x}_0)$ únicamente cuando existe precio justo, es decir, cuando $\pi = p$.

La expresión que hemos obtenido antes es la restricción que estamos buscando y tiene forma de línea recta, pasa por la lotería inicial sin seguro (cuando C=0) y es decreciente.

*Dicha pendiente ($-\frac{(1-\pi)}{\pi}$) se denomina "ratio de puja" y describe la cantidad de u.m. del estado de siniestro (x_2) que el sujeto podrá perder para aumentar en una u.m. su cantidad de riqueza del estado de no siniestro (x_1).

Teniendo en cuenta lo anterior, en función del valor del precio del seguro (π) que nos de el mercado, podrá encontrar el sujeto tres tipos de restricciones:

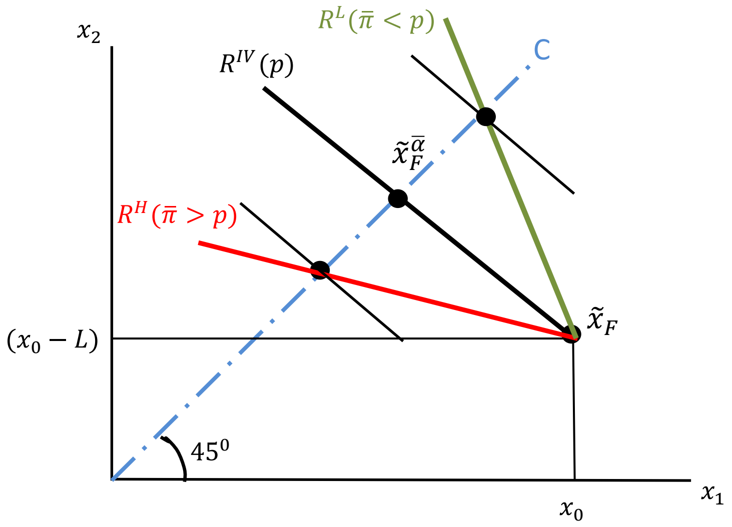
-Seguros de prima justa: como sabemos, supone $\pi = p$. Y como expusimos antes, presenta la propiedad: $\tilde{x}_F^{PJ} = E\left[\tilde{x}_F^{PJ}\right] = x_0 - pL = \bar{x}^0$.

-Seguros de prima desfavorable: supone $\pi > p$.

-Seguros de prima favorable: supone $\pi < p$.

En cualquiera de estos tres casos, en el punto donde corten las restricciones con la línea de certeza tendremos cobertura plena. De esta manera, los contratos a la derecha de este punto de cruce serán seguros de infracobertura, ya que $x_1 > x_2$, mientras que los contratos que estén a la izquierda serán de sobrecobertura, puesto que $x_1 < x_2$. Todo esto, lo podemos encontrar representado en la siguiente gráfica:

Figura 2.2.- Modelo de Estados Contingentes. Tres tipos de líneas isovalor**.**



Fuente: Elaboración propia a partir de Rothschild & Stiglitz, 1976.

Posteriormente, debemos plasmarla las preferencias del individuo mediante las curvas de indiferencia. Una curva de indiferencia, en este modelo de estados contingentes, es una línea formada por la combinación de loterías que reportan al individuo el mismo nivel de utilidad. De modo que:

Dado una cierta lotería $\tilde{x}_F = (p;\ x_1, x_2)$.

Una función de Bernoulli $u(x)$ que representa las preferencias del sujeto.

Podemos calcular la utilidad esperada que le reporta dicha lotería y suponer un nivel de utilidad contaste ($\bar{u}^o$), con lo que obtendríamos la expresión de las curvas de indiferencia, también llamadas, curvas de iso-utilidad esperada:

$$\bar{u}(\tilde{x}_F) \equiv (1-p)\ u(x_1) + p\ u(x_2) = \bar{u}^o = cte$$

*Dichas curvas de utilidad serán decrecientes si el sujeto es amante de la riqueza ($u\acute{} > 0$), serán convexas si el sujeto es averso al riesgo ($u\acute{}\acute{} < 0$) y su pendiente es igual a $-\frac{(1-p)}{p}$.

*Es interesante destacar el concepto de: curva de iso-utilidad esperada de reserva ($\bar{u}^R$). Dicha curva es la única curva que pasa por el punto ($\tilde{x}_F^0$) correspondiente a la lotería inicial sin seguro contratado. Luego el sujeto se verá indiferente en contratar o no, todas las loterías (seguros) de dicha curva. De esta forma, también podemos deducir que el agente rechazará cualquier seguro que se encuentre en una curva de iso-utilidad esperada menor a la de reserva.

Una vez que ya tenemos introducidas las preferencias del individuo en el modelo y las variables dadas por el mercado en forma de la restricción; esto es, dada una riqueza sujeta a un riesgo (x_0), un precio del seguro (π), una probabilidad de siniestro (p) y una posible pérdida (L); podemos poner en funcionamiento el modelo, mediante el cual, podremos obtener como solución un nivel de cobertura óptima (C^*) a contratar por el individuo, esto es, un nivel de riqueza contingente óptima (x_1^*, x_2^*).

Como veremos en la gráfica de abajo y comprobaremos con el desarrollo matemático, la condición necesaria para encontrar el óptimo es que exista tangencia entre la restricción iso-valor y la curva iso-utilidad esperada.

Al estilo de la teoría clásica de consumo de dos bienes, en ese punto es donde se satisface la maximización del bienestar o utilidad esperada del sujeto dadas las condiciones del mercado de seguros.

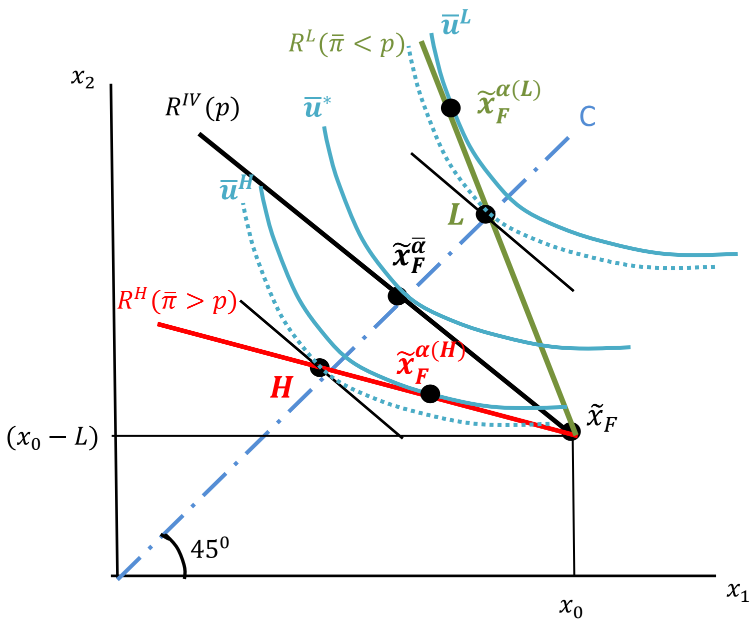
En función del precio del seguro en el mercado (π), podemos diferenciar tres casos:

-Caso 1º: cuando $\pi = p$. De forma que tendremos una prima justa. En este caso, la condición de tangencia solo se satisface en el punto de la línea de certeza, ya que es en el único punto donde ambas pendientes son iguales a $-\frac{(1-p)}{p}$.

-Caso 2º: cuando $\pi > p$. Tenemos un precio desfavorable. En este caso, ambas pendientes solo coinciden en un punto por debajo de la línea de certeza y como explicamos antes, tendremos infracobertura o coseguro. Se entiende lógico, ya que el sujeto intentará contratar menos cobertura dado ese precio excesivo del seguro.

-Caso 3º: cuando $\pi < p$. El precio es favorable. Sucede lo contrario que en caso anterior, consiguiendo el punto óptimo por encima de la línea de certeza. Esto corrobora también lo que explicamos y tendríamos una sobrecobertura y también se entiendo lógico, ya que el sujeto, si se lo permiten, dado un precio del seguro muy bajo, buscará una cobertura que exceda la cuantía de su pérdida.

Figura 2.3.- Tres tipos de óptimos del Modelo de Estados Contingentes.



Fuente: Elaboración propia a partir de Rothschild & Stiglitz, 1976.

2.3.- Resolución matemática.

Una vez descrito el modelo y analizado gráficamente, vamos a dar paso a su realización matemática.

Recordemos que el modelo gira sobre la idea de, en un mercado de seguros competitivo, elegir el grado de cobertura óptimo (C^*) que maximice la utilidad espera, es decir, el bienestar del sujeto. Elegir ese grado de cobertura óptimo, en este modelo supone elegir los dos estados contingentes que componen la lotería óptima: (x_1^*, x_2^*).

Luego nos enfrentamos al siguiente problema:

$$\max \bar{u}\ (\tilde{x}_F) = (1-p)\ u(x_1) + p\ \ u(x_2)$$

$$s.a: \qquad x_1 = x_0 - \pi C$$

$$x_2 = x_0 - L + (1-\pi)C$$

Para resolverlo, tendríamos que introducir las dos restricciones en $\bar{u}(\tilde{x}_F)$:

$$\max \bar{u}\ (\tilde{x}_F) = (1-p)\ u(x_0 - \pi C) + p\ \ u(x_0 - L + (1-\pi)C)$$

- Condición necesaria: Supone buscar el punto donde la u' es nula para garantizar que se trata de un posible máximo.

$$\frac{d\ \bar{u}(\tilde{x}_F)}{dC} = (1-p)\ u'(x_1)\ \frac{dx_1}{dC} + p\ u'(x_2)\ \frac{dx_2}{C}$$
$$= \ (1-p)\ u'(x_1)\ (-\pi) + p\ u'(x_2)\ (1-\pi) = 0$$

$Despejando$: $\frac{(1-p)}{p}\frac{u'(x_1)}{u'(x_2)} = \frac{(1-\pi)}{\pi}$

*Esto último es la condición de tangencia entre la restricción presupuestaria y la curva iso-valor que vimos en el gráfico anterior.

- Condición suficiente: Supone comprobar que el punto elegido es el máximo óptimo.

$$\frac{d\ \bar{u}^2(\tilde{x}_F)}{dC^2} = \ \frac{d}{dC}[(1-p)\ u'(x_1)\ (-\pi) + p\ u'(x_2)\ (1-\pi)]$$

$$= \ (1-p)\ u''(x_1)\ (\pi^2) + p\ u'(x_2)\ (1-\pi)^2 < 0$$

*Esto únicamente se garantiza si $u''(x) < 0$, es decir, si el sujeto en cuestión es averso al riesgo.

Para calcular ese posible punto óptimo que hemos comprobado que es verdadero tenemos que utilizar la condición de tangencia y las dos ecuaciones que forman la restricción del problema, formando un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas que nos dará como resultado:

*Las funciones de demanda de riqueza de cada estado contingente del sujeto:

$$x_1^* = x_1(\pi;\ p,\ x_0, L)$$

$$x_2^* = x_2(\pi;\ p,\ x_0, L)$$

Podemos obtener, restando las restricciones del problema y despejando:

$$x_1 - x_2 = L - C$$

*La función de demanda de cobertura óptima del sujeto:

$$C^* = L - (x_1^* - x_2^*) = C(\pi;\ p,\ x_0, L)$$

Por último, vamos a comprobar el famoso Teorema de Mossin, 1968, a través de las relaciones entre precio del seguro (π) y cobertura contratada (C^*) vistas en el planteamiento matemático anterior:

Una versión adaptada del Teorema de Mossin podría resumirse así: *Un individuo, amante de la riqueza y averso al riesgo, siempre logrará maximizar su bienestar si contrata seguros de cobertura plena, en el caso de que la prima sea justa, si contrata seguros de sobrecobertura, en el caso de que la prima sea favorable y si contrata seguros de infracobertura, en el caso de que la prima sea desfavorable.*

Así pues, se puede garantizar el cumplimiento de las premisas en el modelo:

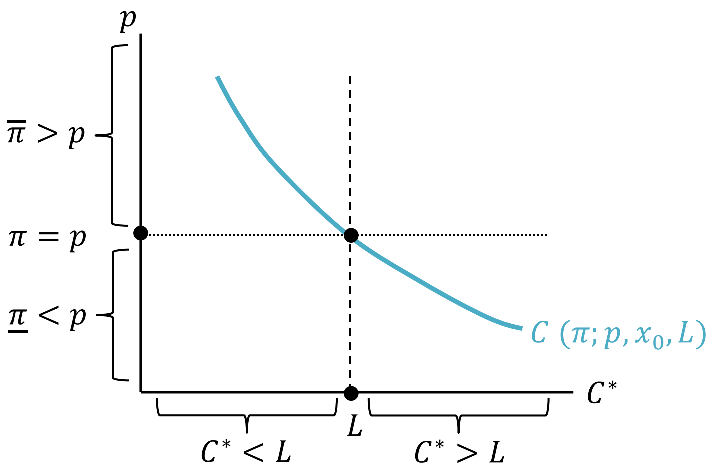
- Si $\pi = p$: en la condición de tangencia se comprueba: $u'(x_1^*) = u'(x_2^*)$ y para esto, es necesario: $x_1^* = x_2^*$, por lo que, la función de demanda de cobertura produce: $C^* = L$.

- Si $\pi < p$: en la condición de tangencia se comprueba: $u'(x_1^*) > u'(x_2^*)$ y como el individuo es averso al riesgo ($u''(x) < 0$), necesariamente: $x_1^* < x_2^*$, por lo que, la función de demanda de cobertura produce: $C^* > L$.

- Si $\pi > p$: en la condición de tangencia se comprueba: $u'(x_1^*) < u'(x_2^*)$ y como el individuo es averso al riesgo ($u''(x) < 0$), necesariamente: $x_1^* > x_2^*$, por lo que, la función de demanda de cobertura produce: $C^* < L$.

Por lo tanto, se cumple el Teorema en nuestro modelo y además podríamos generalizar esto anterior en el siguiente gráfico que ilustra el comportamiento de la demanda de cobertura (C^*) en función del precio del seguro(π):

Figura 2.4.- Función de demanda de cobertura óptima del sujeto.



Fuente: Elaboración propia a partir de Rothschild & Stiglitz, 1976.

Capítulo 3. LA DEMANDA DE SEGURO EN UN MODELO CON RIESGO CONTINUO

Hasta el momento, habíamos fundamentado la elección de la cobertura óptima de seguro bajo un modelo de estados contingentes, en el que el riesgo o incertidumbre, estaba presente en forma de diferentes estados de la naturaleza que podían suceder bajo una probabilidad cierta.

Dichos estados contingentes, eran finitos, es decir, solo se podían dar dichas situaciones y no más. Todo esto es la modelización de la “Teoría de la demanda de seguros bajo riesgo discreto”.

En el siguiente capítulo, nos acercaremos todavía más a la realidad práctica, introduciendo el riesgo continuo.

El riesgo continuo aporta un campo de infinitas posibilidades que le pueden suceder al individuo en situaciones de elección, es decir, cuando se produce una contingencia en un activo, este se puede dañar de infinitas maneras con infinitos valores de pérdida.

Pongamos un breve ejemplo con el mercado de seguros del automóvil. Supongamos un contrato de cobertura plena sobre los daños ocasionados al vehículo. Pues sucede que, existen infinitos posibles daños que le pueden ocurrir al vehículo, obviamente, limitados por la totalidad del valor de este, de manera que, de un golpe, solo se rompa un faro o el cristal, o ambos… o solo una parte… infinitas posibilidades.

Modelizar esto podría parecer imposible a simple vista, pero existe una herramienta muy usada por los economistas y es la $variable\ aleatoria$.

Veremos como, utilizando variables aleatorias, con sus consiguientes funciones de probabilidad (las cuáles, las suponemos dadas al tratarse de un mercado de seguros competitivo), podemos establecer un modelo de Teoría de elección del consumidor para el mercado de seguros con esta premisa, más realista, de riesgo continuo.

3.1.- Planteamiento y resolución del problema con riesgo continuo

Suponemos un individuo que posee un activo valorado en x_0 u.m., el cuál, se encuentra sujeto a un riesgo continuo de pérdida de $\tilde{L}$ u.m.

Dicha pérdida es un variable aleatoria continúa que vamos a acotar sobre el intervalo de soporte $[0, x_0]$; puesto que, lógicamente, la pérdida sobre el activo no puede ser negativa, ya que, sino sería una ganancia para el sujeto, ni tampoco puede ser mayor que el valor del activo que la sufre. Esta variable aleatoria se distribuye de acuerdo con una función de densidad de probabilidad $f(L)$ y presenta una media $\bar{L}$.

Como venimos trabajando, las preferencias del individuo en cuestión, vienen representadas por una la función de Bernoulli $u(\tilde{x}_F)$ regular; esto significa que el individuo es amante de la riqueza ($u'(\tilde{x}_F) > 0$), averso al riesgo ($u''(\tilde{x}_F) < 0$) y prudente ($u'''(\tilde{x}_F) > 0$).

El objetivo del agente es elegir el “ratio de coseguro” (c) que maximice la utilidad esperada del agente ($u(\tilde{x}_F)$).[14]

Vamos a suponer que el individuo puede elegir desde no asegurarse ($c = 0$), hasta conseguir un seguro de cobertura plena ($c = 1$), pasando por las diferentes fórmulas de coseguro intermedias a estas dos ($c \in [0,1]$). De esta manera,

[14] $c = \tilde{C}/\tilde{L}$; y representa el porcentaje de cobertura deseado contratado por el individuo.

descartamos los mercados de sobrecobertura que en la práctica real no tienen uso. 15

Por el lado de las compañías aseguradoras, estas, se encuentran en un mercado competitivo y atienden a una serie de clientes individualizados que presentan riesgos independientes, por lo que podrían ofrecer un precio actuarialmente justo a todos los demandantes. No obstante, supondremos que las compañías incurren en unos costes de gestión variables que repercuten a sus asegurados en forma de "tasa de recargo" sobre el precio justo del seguro de "λ" u.m. por cada u.m. de cobertura abonado. Esto se traduce en que la prima (r) que van a cobrar por estos seguros es:

$$r(\lambda) = E\left[\tilde{C} + \lambda\tilde{C}\right] = E\left[(1+\lambda)\ \check{C}\right] = (1+\lambda)\ c\bar{L}$$

La riqueza $ex\ post$ que el demandante debe maximizar ($\tilde{x}_F$) será una variable aleatoria que, en este modelo de riesgo continuo, adquiere esta forma:16

$$\tilde{x}_F = x_0 - (1-\lambda)c\tilde{L} - \tilde{L} + c\tilde{L}$$

Por consiguiente, tenemos ya todos los componentes para formular nuestro problema de maximización de la utilidad esperada de un individuo con esta premisa de riesgo continuo:

$$\max E\{u[\tilde{x}_F]\} \ = \ \max E\{u[x_0 - (1-\lambda)c\tilde{L} - \tilde{L} + c\tilde{L}]\}$$

- Condición necesaria: Supone buscar el punto c^* donde la utilidad marginal esperada es nula:

$$\frac{d\ E\{u[\tilde{x}_F]\}}{dc} = E\ \{u'(\tilde{x}_F)[\tilde{L} - (1+\lambda)\bar{L}]\} = 0$$

Despejando en la anterior expresión podríamos obtener el valor de c^*

- Condición suficiente: Supone comprobar que la función objetivo es cóncava:

$$\frac{d^2 E\ \{u[\tilde{x}_F]\}}{dc^2} = \ E\ \{u''(\tilde{x}_F)[\tilde{L} - (1+\lambda)\bar{L}]^2\} < 0$$

*Esto únicamente se garantiza si $u''(x) < 0$, es decir, si el sujeto en cuestión es averso al riesgo.

15 Cabe mencionar que, de acuerdo con la anterior expresión, la cobertura del seguro que contrata el individuo es una variable aleatoria, ya que depende de la pérdida que es aleatoria: $\tilde{C} = c\ \tilde{L}$.
16 Recordemos que la riqueza final de un individuo que contrata un seguro ($\tilde{x}_F$) es su riqueza inicial (x_0), menos la prima que debe pagar ($(1-\lambda)c\tilde{L}$), menos la pérdida o contingencia producida ($\tilde{L}$) y más el valor de la cobertura contratada ($c\tilde{L}$).

Antes de pasar al apartado gráfico, es interesante comprobar que, para esta modelización del mercado de seguros, también se cumple el *"Teorema de Mossin":*

> Recordemos que establecía lo siguiente: "*si un sujeto es amante de la riqueza, averso al riesgo y dispone de prima justa en su seguro contratado, solo podrá maximizar su utilidad esperada eligiendo cobertura plena ($c^* = 1$)"*

Para comprobarlo:

> Primero, recordemos que un seguro de prima justa implicaba que el sujeto debía pagar de prima exactamente lo mismo que esperaba cobrar por término medio. Por tanto, en nuestro modelo de riesgo continuo sería:

$$r^{PJ} = E(\tilde{C}) = E(c\tilde{L}) = c\bar{L}$$

$$Lo\ cual\ solo\ cuede\ cuando\ \lambda = 0$$

> Valorando las condiciones necesarias de óptimo en $\lambda = 0$:

$$\left.\frac{d\,E\{u[\tilde{x}_F]\}}{dc}\right|_{\lambda=0} = E\left\{u'\left(x_0 - c\bar{L} - (1-c)\tilde{L}\right)[\tilde{L} - \bar{L}]\right\} = 0$$

> Donde denominaremos: $\tilde{x}_F^0 = x_0 - c\bar{L} - (1-c)\tilde{L}$

> Operando en dicha igualdad:

$$E\{u'(\tilde{x}_F^0)[\tilde{L} - \bar{L}]\} = E\{u'(\tilde{x}_F^0)\,\tilde{L}\} - \bar{L}\,E\left(u'(\tilde{x}_F^0)\right) = 0$$

$$E\{u'(\tilde{x}_F^0)\,\tilde{L}\} = \bar{L}\,E\left(u'(\tilde{x}_F^0)\right)$$

> Aplicando las propiedades de la esperanza sobre variables aleatorias vemos que la siguiente igualdad solo se cumple si $u'(\tilde{x}_F^0)\ y\ \tilde{L}$ son variables aleatorias independientes.[17] Como es lógico, para que esto ocurra, $\tilde{x}_F^0$ no tiene que depender de $\tilde{L}$, lo cual solo se produce cuando existe cobertura plena, esto es, $c = 1$:

$$\tilde{x}_F^0|_{c=1} = x_0 - \bar{L} - (1-1)\tilde{L} = x_0 - \bar{L} \neq f(\tilde{L})$$

[17] La propiedad a aplicar es la siguiente:
$E\{u'(\tilde{x}_F^0)\,\tilde{L}\} = E\{u'(\tilde{x}_F^0)\}\,E\{\tilde{L}\} + cov(u'(\tilde{x}_F^0),\ \tilde{L}) = \tilde{L}\,E\{u'(\tilde{x}_F^0)\} + cov(u'(\tilde{x}_F^0),\ \tilde{L})$
Si $u'(\tilde{x}_F^0)\ \ y\ \ \tilde{L}$ son variables independientes, entonces: $cov\left(u'(\tilde{x}_F^0),\ \tilde{L}\right) = 0$, por lo que nos quedaría:

$$E\{u'(\tilde{x}_F^0)\,\tilde{L}\} = \tilde{L}\,E\{u'(\tilde{x}_F^0)\}$$

3.2.- Interpretación gráfica

Para encontrar una interpretación gráfica de este modelo, podemos operar en las condiciones necesarias de óptimo aplicando la definición de $covarianza$ que también hemos utilizado en la nota a pie de página 17.

Así pues, desarrollando la condición necesaria de óptimo:

$$E\,\{u'(\tilde{x}_F)[\tilde{L} - (1+\lambda)\bar{L}]\} = 0$$

Aplicando dicha propiedad:

$$E\,\{u'\,[\tilde{L} - (1+\lambda)\,\bar{L}]\} = E\big(u'\,\tilde{L}\big) - (1+\lambda)\bar{L}\,E(u') = 0$$

$$E(u')\,\bar{L} + cov\big(u',\tilde{L}\big) = \bar{L}\,E(u') + \lambda\,\bar{L}\,E(u')$$

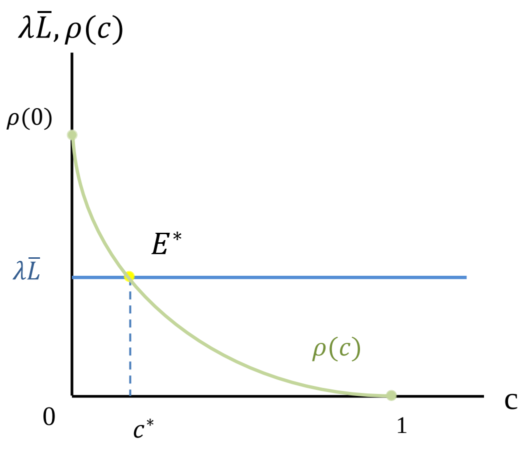
$$\frac{cov\,(u',\tilde{L})}{E(u')} = \lambda\,\bar{L}$$

$$\boxed{\rho(c) = \lambda\,\bar{L}}$$

$$*\,Donde\ \ \rho(c) = \frac{cov\,\big(u',\tilde{L}\big)}{E(u')}$$

En dicha expresión se satisface la condición de óptimo, por lo que debemos proceder plasmando en una gráfica estos componentes de la expresión:

Figura 3.1.- Situación del óptimo en un modelo con riesgo continuo.



Fuente: Elaboración propia.

En el gráfico anterior, aparecen representadas dos funciones, cuyo punto de intersección representa la igualdad subyacente en la condición necesaria de óptimo. Estas dos funciones son:

*La función "$\lambda\,\bar{L}$", que tiene forma de línea recta, puesto que permanece constase con respecto a "c".

*La función "$\rho(c)$", la cuál es igual a "$\frac{cov\,(u',\tilde{L})}{E(u')}$", es decreciente, está acotada entre en el eje de ordenadas, cuando $c = 0$ y el eje de abscisas, cuando $c = 1$. Dicho comportamiento se puede justificar de la forma siguiente:

*Si $\Delta\,\tilde{L}$, ***siendo*** $\boldsymbol{c = 1}$***:*** $\tilde{x}_F|_{c=1} = x_0 - (1+\lambda)\bar{L} = cte$, ya que: $\tilde{x}_F|_{c=1} \neq f(\tilde{L})$, luego: $u'(\tilde{x}_F|_{c=1}) = cte \rightarrow cov\big(u',\tilde{L}\big) = 0 \rightarrow \rho(1) = 0$

Esto es, aunque se produzca una realización del riesgo especialmente elevada ($\Delta\,\tilde{L}$), si el sujeto tiene contratada cobertura plena $(c = 1)$ no va a verse alterada su riqueza final por lo que la correlación entre el riesgo y la utilidad marginal de la riqueza $cov\big(u',\tilde{L}\big)$ será nula y $\rho(1) = 0$.

* Si $\Delta\,\tilde{L}$, **siendo** $\boldsymbol{c} \in [\mathbf{0},\mathbf{1})$: $\nabla\,\tilde{x}_F$, ya que: $\tilde{x}_F\ es\ función\ de\ \tilde{L}$, luego: $\Delta\,u'(\tilde{x}_F) \rightarrow cov\big(u',\tilde{L}\big) > 0 \rightarrow \rho(c) > 0\ (siendo\ tanto\ mayor\ a\ menor\ nivel\ de\ "c")$

Esto es, ante una realización del riesgo especialmente elevada ($\Delta\,\tilde{L}$), si el sujeto tiene contratada cobertura parcial $(c < 1)$ verá reducida su riqueza final y, por tanto, (dado que $u'' < 0$) aumentará la utilidad marginal de la misma. De esta forma, la correlación entre el riesgo y la utilidad marginal de la riqueza será positiva: $cov\big(u',\tilde{L}\big) > 0$ y tendremos que: $\rho(c) > 0$

Es interesante apreciar que $\rho(c)$ será tanto mayor cuanto:

- Menor sea el nivel de cobertura contratado, pues a menor valor de "*c*", mayor será la caída de la riqueza ante un cierto siniestro. De hecho, esta función alcanza un máximo en el caso de cobertura nula –esto es, $\rho(0)$ es máximo– pues, en este caso, el sujeto soporta por si mismo la magnitud total de la perdida.

- Mayor sea la percepción absoluta del riesgo por parte del sujeto, dado que, en este caso, la función de Bernoulli sería "más cóncava" y mayor el aumento de la utilidad marginal ante una cierta caída de la riqueza final del sujeto.

En el gráfico anterior puede apreciarse el Teorema de Mossin y sus corolarios:

1. Con prima justa (λ=0), el óptimo estaría en c=1 cobertura plena.
2. Con prima desfavorable (λ>0) se contrata cobertura parcial, esto es, fórmulas de coseguro (c<1).
3. Aunque no se ha representado en el gráfico, si proyectamos la función $\rho(c)$ al cuarto cuadrante, podríamos apreciar que, con prima favorable, esto es (λ<0), el sujeto demandaría sobrecobertura (c>1). Lo veremos más adelante.

3.3.- Estática comparativa

Un aspecto muy interesante a la hora de formular un modelo es el análisis de su comportamiento frente a las variaciones de las variables de las que depende. En esto consiste la estática comparativa.

En concreto, vamos a analizar cómo varía el óptimo cuando varía: la percepción subjetiva del nivel absoluto de riesgo (A), el valor del activo a asegurar (x_0) y el precio del seguro, medida, en este caso, a través de la tasa de recargo (λ).

3.3.1.- Efectos de un cambio en el grado de aversión al riesgo A.

Puede suceder que, por algún motivo o noticia, la percepción del riesgo del sujeto aumente. En nuestro caso, un ejemplo vendría a ser que sacasen los nuevos datos sobre el numero de accidentes entre vehículos del año y que fuese un valor muy alto con respecto al valor esperado. Por ello, el sujeto puede llegar a pensar que ahora su vehículo se encuentra más expuesto que antes a sufrir un daño y desee contratar más cobertura.

Para comprobar analíticamente los efectos de este fenómeno suele utilizarse el Teorema de Pratt que expusimos en el apartado 2.3 de este trabajo. De esta forma, un aumento de la percepción global del riesgo ante, digamos, “malas noticias” implica que la función de Bernoulli original del sujeto (u_0) se torna a otra función (u_1) más cóncava que la anterior:

$$u_1 = T[u_0], \text{ con: } \quad T' > 0,\ T'' < 0$$

Si con la función original u_0 la cobertura óptima era c_0^*, tenemos que:

$$E\ \{u_0'[\tilde{x}_F(c_0^*)][\tilde{L} - (1+\lambda)\bar{L}]\} = 0$$

Pues bien, puede demostrarse[18] que:

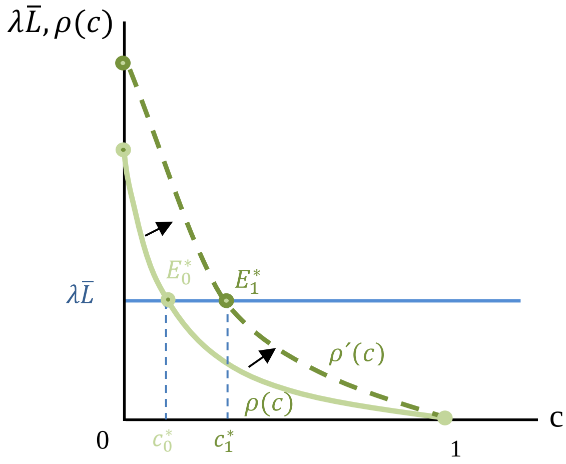
$$E\left\{u_1'[\tilde{x}_F(c_0^*)][\tilde{L}-(1+\lambda)\bar{L}]\right\}>0$$

Lo que, dada la concavidad de la función objetivo, implica que el nivel de cobertura necesario para restablecer la igualdad debería ser mayor: $c_1^* > c_0^*$

La comprobación gráfica de este efecto es bastante simple una vez definido el comportamiento de la función $\rho(c)$.

Hemos visto que cuando aumenta la percepción global del riesgo entonces la función $\rho(c)$ se hace mayor a cada nivel de cobertura (distinto de la plena) contratado, es decir, esta función "se abre" y el agente contratará más cobertura frente a esa mayor percepción del riesgo, por lo que tendríamos un nuevo óptimo en $c_1^* > c_0^*$.

Figura 3.2.- Efecto de un cambio en el grado de aversión al riesgo.



Fuente: Elaboración propia.

3.3.2.- Efectos de una variación del valor del activo a asegurar x_0.

Para poder analizar lo que sucede con el grado de cobertura óptimo que el individuo contratará cuando cambia el valor del activo que va a asegurar, manteniendo el resto de las variables constantes, debemos centrarnos en las condiciones de óptimo a las que aplicaremos un análisis de sensibilidad.

18 Por ejemplo, puede consultarse la demostración que hacen Eeckhoudt, *et al.* (2005), pág. 53 utilizando esta definición o bien la de Melgar (2003), pág. 62.

A la condición necesaria de óptimo la podremos llamar “H”, luego:

$$H = \frac{d\, E\{u[\tilde{x}_F]\}}{dc} = E\,\{u'(\tilde{x}_F)[\tilde{L} - (1+\lambda)\bar{L}]\} = 0$$

Debemos diferenciar la anterior expresión, obteniendo:[19]

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x_0}\, dx_0 + \frac{\partial H}{\partial c^*}\, dc^*$$

$$\frac{dc^*}{dx_0} = -\frac{\partial H/\partial x_0}{\partial H/\partial c^*}$$

*El signo del denominador de la expresión anterior es negativo, ya que se trata de las condiciones suficientes de óptimo.

Por lo tanto, para poder saber el sentido en el que variará nuestro óptimo ante efectos de una variable basta con fijarse en el efecto que tiene dicha variable sobre las condiciones necesarias de óptimo (H):

$$sgn\left\{\frac{dc^*}{dx_0}\right\} = sgn\left\{\frac{\partial H}{\partial x_0}\right\}$$

Así pues, derivando en las condiciones necesarias de óptimo con respecto de “x_0" tendremos que:

$$\frac{\partial H}{\partial x_0} = E\,\{u''(\tilde{x}_F)[\tilde{L} - (1+\lambda)\bar{L}]\}$$

Se trata de un efecto renta, estocástico como consecuencia de ese aumento del valor del activo ($\boldsymbol{x_0}$), cuyo signo es ambiguo, ya que dependerá de la clase de prima existente en el mercado (λ) y de cómo se relacione la aversión al riesgo con la riqueza, esto es, de si el demandante presenta aversión absoluta al riesgo constante (CARA), decreciente (DARA) o creciente (IARA).[20]

19 Debemos tener en cuenta que, en la siguiente expresión, diferenciando tenemos: $d\tilde{L} = d\lambda = 0$ y que: $dc^* \neq 0 \;\; y \;\; dx_0 \neq 0$.

20 Recordemos que un individuo DARA era el que presentaba aversión absoluta al riesgo decreciente respecto a su riqueza, que en este caso la riqueza sería su activo para asegurar. Esto es: $A'(x) < 0$. También es interesante valorar individuos con aversión absoluta al riesgo constante o creciente con respecto a su riqueza, esto es, serían CARA ($A'(x) = 0$) o IARA ($A'(x) > 0$), por sus siglas en inglés.

Lo vamos a entender utilizando el análisis gráfico que es más intuitivo:

A) Si el individuo en cuestión fuera CARA:

Esto es, si presenta aversión absoluta constante con respecto a las variaciones de la riqueza, el consiguiente efecto de variar el valor del activo o riqueza no le va a afectar a su percepción del riesgo, por lo tanto, independientemente de la prima pagada, contratará el mismo nivel de cobertura óptimo (c^*) que antes del cambio.

Esto último se puede demostrar utilizando la expresión anterior:

$$\frac{\partial H}{\partial x_0} = E\,\{u''(\tilde{x}_F)[\tilde{L} - (1+\lambda)\bar{L}]\}$$

Recordemos que $A(x) = {-u''(x)}/{u'(x)}$, reordenando el término y sustituyendo en la expresión anterior:

$$\frac{\partial H}{\partial x_0} = E\,\{-A(x)u'(x)[\tilde{L} - (1+\lambda)\bar{L}]\} = -A(x)\;\; E\{u'(x)[\tilde{L} - (1+\lambda)\bar{L}]\} = 0$$

* Donde $A(x) = \bar{A}$ puede salir fuera de la esperanza, dado que es constante y la esperanza de la expresión coincide con la condición necesaria de óptimo que debe ser nula.

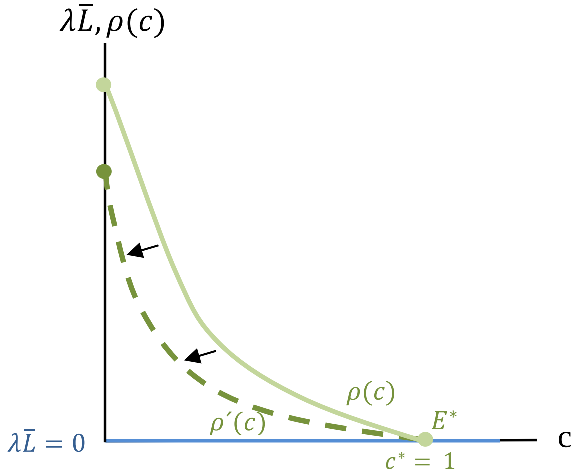
Desde el punto de vista gráfico, si la percepción del riesgo no varía, tampoco lo hace la función $\rho(c)$ por lo que la cobertura óptima no cambia sea cual sea el valor de λ.

B) Si al individuo se le ofrece prima justa ($\lambda = 0$):

Como ya sabemos, según el Teorema de Mossin, cuando existe prima justa el sujeto siempre contratará cobertura plena ($c^* = 1$) para maximizar su nivel de utilidad. Esta decisión es inamovible e independiente de cómo sea la actitud del individuo hacia el riesgo. Lo podemos observar en el siguiente gráfico, en el que, pese a producirse un incremento del nivel de riqueza (Δx_0), y aunque la función $\rho(c)$ se expanda[21], el sujeto continúa contratando $c^* = 1$: [22]

[21] Como veremos después, esa expansión se da porque el agente es DARA.
[22] Como $\lambda = 0$, ahora la función $\lambda\bar{L}$ es igual al eje de abscisas, esto es, igual a cero.

Figura 3.3.- Efecto de un cambio en el valor del activo a asegurar con prima justa.



Fuente: Elaboración propia.

C) Si el individuo es DARA:

El caso habitual es el que el individuo tenga aversión absoluta al riesgo decreciente con respecto a su riqueza (DARA), puesto que como vimos, es muy legítimo pensar que a medida que va aumentando la riqueza del individuo, su aversión absoluta al riesgo decrezca. Desde este sentido, tenemos dos posibles resultados en función de cómo sea la prima del seguro en el mercado:

- C.1) Prima desfavorable ($\lambda > 0$):

  La prima desfavorable y, por tanto, coseguro ($c^* < 1$), es el caso más habitual y con el que construimos este modelo. De esta forma, si aumenta el valor del activo (Δx_0) supondría una disminución de la cobertura óptima para el sujeto (∇c^*). Esto se entiende lógico con lo que ya sabemos, ya que, si aumenta el valor del activo, el sujeto se vuelve más rico y como es DARA, disminuirá su percepción del riesgo $\nabla\rho(c)$ y contratará menos cobertura ($c^*_{\lambda>0} \rightarrow c^{**}_{\lambda>0}$). Se puede observar en el gráfico siguiente. [23]

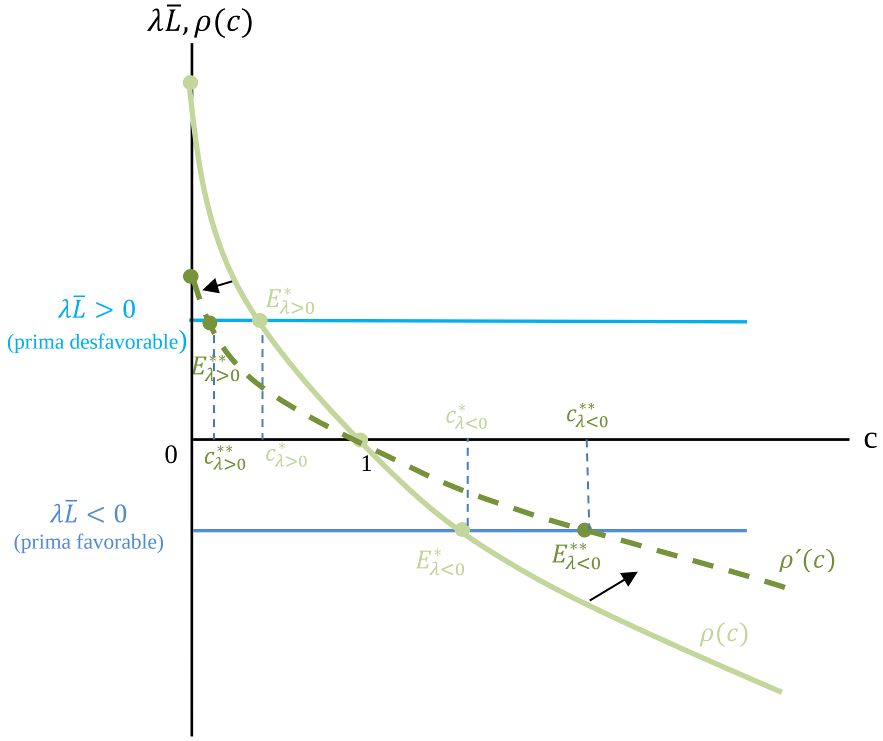
[23] Matemáticamente se puede demostrar que $\frac{\partial H}{\partial x_0} = E\,\{u''(\tilde{x}_F)[\tilde{L} - (1+\lambda)\bar{L}]\} < 0$, siendo el agente DARA. Véase, por ejemplo, Eeckhoudt, *et al.* (2005), pág. 54 o en Melgar (2003), pág. 57.

- C.2) Prima favorable ($\lambda < 0$):[24]

  Bajo la premisa considerada, tendríamos como óptima una situación de sobrecobertura ($c^* > 1$), de acuerdo a lo que se muestra en el gráfico siguiente.

  Si aumenta el valor del activo (Δx_0) supondría un aumento de la cobertura óptima para el sujeto (Δc^*). El enfoque es distinto al del caso anterior, ya que ahora el seguro actúa como un bien "normal" porque tiene un precio favorable para el individuo. Entonces, si aumenta el valor del activo, el sujeto se vuelve más rico, sigue siendo DARA, por lo que disminuirá su percepción del riesgo $\nabla \rho(c)$ y podrá contratar más cobertura ($c^*_{\lambda<0} \rightarrow c^{**}_{\lambda<0}$).

Figura 3.4.- Efectos de un cambio en el valor del activo a asegurar con prima no justa.



Fuente: Elaboración propia.

24 Este caso no se ha contemplado en las restricciones iniciales del modelo, pero resulta interesante modelizarlo.

D) Si el individuo hubiera sido IARA:

En este caso, tendríamos los resultados contrarios que, en el caso de DARA (caso C), ya que su aversión absoluta al riesgo respecto a la riqueza ahora es creciente. Por ejemplo, en el caso C.1 del modelo de prima desfavorable ($\lambda > 0$), si el valor del activo hubiera aumentado (Δx_0), el individuo tendría más riqueza, pero ahora su aversión absoluta al riesgo se ve incrementada, por lo que optaría, como es lógico, a aumentar su cobertura contratada ($\rho(c)$ se "abre").

3.3.3.- Efectos de un cambio en el precio del seguro λ.

Hemos fundamentado el modelo de forma que el precio del seguro, que no es otra cosa, que la prima (r), dependiese directamente del parámetro "λ".

Hemos supuesto la situación de un mercado competitivo donde dicho parámetro se mantenía constante, sin embargo, puede suceder que, de una forma generalizada, los precios de los seguros subieran, como consecuencia de una nueva regulación que se tradujese en nuevos costes para las aseguradoras. Sería interesante analizar cómo dicho efecto repercute sobre el modelo, precisamente, sobre la decisión de cobertura óptima del individuo.

Matemáticamente, sería hacer lo mismo que en el apartado anterior, ya que como:

$$sgn\left\{\frac{dc^*}{d\lambda}\right\} = sgn\left\{\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right\}$$

Tendríamos que ver el efecto a través de la derivada:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial \lambda} &= E\,\{u'(\tilde{x}_F)(-\bar{L}) + u''(\tilde{x}_F)[\tilde{L} - (1+\lambda)\bar{L}]\,(-c\bar{L})\} \\ &= \bar{L}\,\left\{-Eu'(\tilde{x}_F) - c^*\,E\{u''(\tilde{x}_F)[\tilde{L} - (1+\lambda)\bar{L}]\}\right\}\end{aligned}$$

Dado que $\bar{L} > 0$, el signo de esta derivada lo da la expresión entre llaves cuyos sumandos podemos identificas con un efecto sustitución (*ES)* y un efecto renta (*ER):*

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = ES + ER$$

El efecto sustitución obtenido es: $ES = -Eu'(\tilde{x}_F)$ y su signo es siempre negativo dado que el sujeto es amante de la riqueza ($u' > 0$).

El efecto renta es: $ER = -c^* \, E\{u''(\tilde{x}_F)[\tilde{L} - (1+\lambda)\bar{L}]\} = -c^* \frac{\partial H}{\partial x_0}$. Este efecto solo tiene lugar en el caso de que el sujeto contrate cobertura positiva ($c^* > 0$) y su signo es el opuesto al previamente discutido al estudiar los cambios en el valor del activo $\left(\frac{\partial H}{\partial x_0}\right)$.

Finalmente tenemos que el signo de dicha derivada y, por tanto, la dirección del efecto del cambio del precio sobre el óptimo es la suma de un efecto sustitución (ES) que siempre es negativo y de un efecto renta (ER) cuyo signo depende de como evolucione la aversión absoluta al riesgo del individuo con respecto a la riqueza, es decir, depende de si el sujeto es DARA, CARA e IARA.

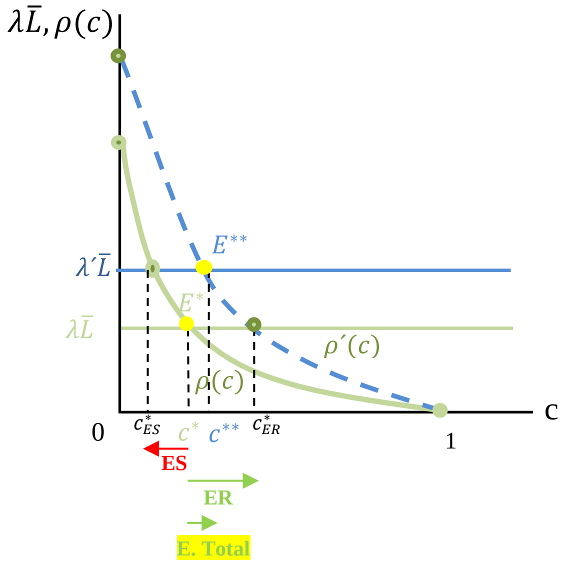
Vamos a ilustrarlo gráficamente, utilizando el modelo de referencia en el cuál el sujeto sería DARA y se enfrentaría a una prima desfavorable ($\lambda > 0$):

Ante un aumento del precio del seguro ($\Delta\lambda$), tendríamos:

. Un efecto sustitución ($ES < 0$) indudablemente negativo, ya que, al aumentar relativamente el precio del seguro, se produce, céteris paribus, una disminución de su demanda, esto es, una disminución del nivel de cobertura contratado ($c^* \rightarrow c^*_{ES}$). Se puede observar en la gráfica con el desplazamiento de la función $\lambda\bar{L}$.

. Un efecto renta ($ER > 0$) positivo con DARA, ya que, si aumenta el precio del seguro, la riqueza del individuo disminuye ($\tilde{x}_F$), lo que hace que su percepción del riesgo aumente (por DARA) y contrate más cobertura ($c^* \rightarrow c^*_{ER}$). Lo observamos en la gráfica con la "apertura" de la función $\rho(c)$.

Figura 3.5.- Efectos de un cambio en el precio del seguro con DARA.



Fuente: Elaboración propia.

Lo que observamos finalmente es un efecto total positivo de la variación del precio del seguro sobre la cobertura óptima. Esto ha sucedido, porque en este ejemplo en particular, el $ER > ES$, pero podría haber sido al revés, lo cuál dependerá de la intensidad con la que el sujeto sea DARA (a mayor intensidad mayor ER).

Por último, dentro de este mismo apartado, podemos intuir los efectos que hubieran sucedido si el individuo fuese CARA o IARA.

Si hubiera sido CARA, el ER sería nulo, luego el $ET = ES < 0$.

Si hubiera sido IARA, el ER sería negativo, luego el $ET = ES + ER < 0$ (siempre).

Además, debe recordarse que estamos suponiendo, en todo este subapartado, que la prima sea desfavorable ($\lambda > 0$). De forma que, en función a lo que vimos en el subapartado anterior (subapartado 4.3.2), la función $\lambda\bar{L}$ cambiaría dependiendo de si la prima hubiera sido justa ($\lambda = 0$) o favorable ($\lambda < 0$); con sus consiguientes efectos.

CONCLUSIÓN

El objetivo principal del trabajo, como expusimos al comienzo, consiste en modelizar la elección de los individuos en condiciones de incertidumbre, que es exactamente lo que sucede en la $Teoría\ de\ la\ Demanda\ de\ Seguros$.

Entramos de lleno en un mundo complejo, diferente al de la Teoría Clásica de Elección, pero más real, puesto que, en pocas ocasiones la elección de las personas se produce en condiciones de perfecta certeza.

El trabajo se divide en tres partes y a continuación, vamos a repasar los resultados más importantes que hemos extraído de cada una de estas:

-En la primera parte, hemos plasmado el cómo, a través de los juegos de azar y el afán de superación de los grandes matemáticos clásicos, nació la $Teoría\ de\ la\ Utilidad\ Esperada$, como base de los posteriores desarrollos económicos de la elección en contexto de riesgo. Hemos explicado cuales fueron las principales condiciones necesarias para configurar una “función de utilidad”, la cual es el eje principal de la elección en este contexto. Así pues, en base a su $función\ de\ utilidad\ esperada$, hemos podido definir y caracterizar la actitud frente al riesgo del individuo y cómo podría elegir entre diferentes decisiones o loterías que entrañen riesgo, mediante el criterio de búsqueda de la decisión que le aporte mayor nivel de utilidad o bienestar. Y, por último, en esta primera parte, dentro del tipo más común de actitud frente al riesgo, que es la aversión, hemos desarrollado el famoso “$Coeficiente\ de\ aversión\ absoluta\ al\ riesgo\ de\ Arrow - Pratt$”, el cuál es un indicador bastante preciso del grado subjetivo de riesgo que un individuo percibe de cierta lotería; utilizando para ello, por supuesto, su función de utilidad esperada.

-En la segunda parte, nos introducimos en los $mercados\ de\ seguros$ donde el individuo puede acudir para eliminar de forma total o parcial el riesgo con una cobertura de seguros. De esta forma, el individuo se asegurará solo si obtiene una utilidad esperada mayor que la situación sin seguro y además elegirá la cobertura óptima que es aquella que maximiza su bienestar.

Hemos desarrollado, también, los tres principales tipos de seguros existentes: el $seguro\ de\ prima\ justa,$ en donde el asegurado paga como prima la misma cantidad de lo que espera cobrar, por lo que se verifica que el individuo siempre obtendrá el mismo valor esperado que en el caso de no asegurarse. Luego tenemos el $seguro\ de\ cobertura\ plena$, en donde el asegurado cobraría la totalidad de la pérdida y se demuestra que, bajo esta premisa, la lotería inicial aleatoria se transforma en una lotería determinista, es decir, con certeza producirá un único resultado posible. Y, por último, el tercer tipo de seguro, que es una combinación de las características y propiedades de estos dos anteriores.

En esta segunda parte, concretamente, hemos utilizado el Modelo de Estados Contingentes, el cuál, hemos plasmado gráficamente mediante el artículo seminal de Rothschild & Stiglitz, 1976, y, posteriormente, hemos planteado el desarrollo matemático que nos ha permitido verificar la teoría anterior y corroborar el famoso “$Teorema\ de\ Mossin$”.

Las conclusiones de dicho teorema establecen que, un individuo amante de la riqueza y averso al riesgo solo podrá maximizar su bienestar contratando cobertura plena, si la prima del seguro es justa; contratando sobrecobertura, si la prima del seguro es favorable o, contratando infracobertura, en el caso de que la prima sea desfavorable.

-En la tercera y última parte, hemos avanzado hacia un enfoque todavía más realista, introduciendo el $riesgo\ continuo$, de forma que, hemos transportado la teoría de la demanda de seguros hacia este contexto más ajustable a al día a día de los individuos.

Dicho modelo, a medida que cobra más realismo, también se vuelve más complejo, aún así, bajo unas condiciones lógicas hemos podido desarrollar la parte gráfica y la matemática, las cuáles, nos confirman los mismos resultados del modelo anterior, entre ellos, el $Teorema\ de\ Mossin$.

Lo más destacable de esta parte, a parte de la corroboración de lo anterior, es el análisis del comportamiento del modelo frente a las variaciones de las variables de las que depende, es decir, el $análisis\ de\ estática\ comparativa$. En concreto, hemos analizado como le afectan al óptimo los cambios en la percepción subjetiva del nivel absoluto de riesgo, en el valor del activo a asegurar y en el precio del seguro.

Los resultados, plasmados matemática y gráficamente son, en el caso de una variación en la percepción subjetiva del nivel del riesgo del individuo, tenemos que pasará a contratar siempre más cobertura para maximizar su utilidad, ya que, cómo es lógico, se sentirá más expuesto a sufrir el accidente y querrá protegerse de ello.

En el caso de una variación del valor del activo a asegurar, se produce un efecto renta estocástico, cuya influencia sobre el óptimo es ambigua, ya que dependerá de la prima existente en el mercado y de si el demandante presenta aversión absoluta al riesgo constante (CARA), decreciente (DARA) o creciente (IARA). Como vimos en dicho capítulo, podríamos tener hasta cuatro casos distintos:

> El primero, si el individuo presentara aversión al riesgo constante (CARA), como demostramos, una variación en su riqueza no afectará a su decisión de óptimo que se mantendrá constante.
>
> El segundo caso, si existe prima justa en el mercado, el cual se relaciona directamente con el Teorema de Mossin y demostramos que, únicamente, podría maximizar su utilidad contratando cobertura plena.
>
> El tercer caso, cuando el individuo presenta aversión absoluta al riesgo decreciente (DARA), se subdivide en dos casos dependiendo de cómo sea la prima del mercado y corrobora lo establecido en el Teorema de Mossin: de forma que, por un lado, si existe prima desfavorable, el óptimo se encuentra en una fórmula de coseguro mientras que, si existiera una prima favorable, el óptimo sería en una fórmula de sobrecobertura. Así pues, se acentuarían dichas fórmulas, si aumentase el valor del activo a asegurar.
>
> El cuarto caso, cuando el individuo presenta aversión absoluta al riesgo creciente (IARA), de forma análoga al anterior, se subdivide en dos casos en función, también, del valor de la prima del seguro y tendríamos los resultados contrarios, como es lógico, que el caso anterior de DARA.

Por último, tendríamos el efecto de un cambio en el precio del seguro sobre el óptimo, dónde comprobamos que, dicho efecto es la suma de un efecto sustitución y un efecto renta. El efecto sustitución siempre es negativo para el sujeto amante de la riqueza, mientras que el efecto renta es de signo ambiguo y opuesto al discutido anteriormente, por lo que depende también de cómo evolucione la aversión absoluta al riesgo del individuo con respecto a su riqueza. Mencionando el caso más normal, que es cuando el individuo es DARA, teníamos que el efecto renta era positivo, ya que, si aumentaba el precio del seguro, la riqueza del individuo disminuiría, su percepción del riesgo aumentaría y buscaría cubrirlo contratando más cobertura. Así pues, teníamos un resultado final que dependerá de qué intensidad de los dos efectos es mayor, ya que teníamos un efecto sustitución negativo y un efecto renta positivo.

BIBLIOGRAFÍA

- Allais, M. (1994): *"Absolute satisfaction",* en *Cardinalism: A Fundamental Approach,* Allais, Maurice and Hagen, Ole, ed.lit. ,Theory and Decision Library. Series A, Philosophy and Methodology of the Social Sciences; 19.

- Arrow, K. J. (1965): *"Aspects of the Theory of Risk Bearing",* Yrjo Jahnssonin Saatio, Helsinki.

- Bernoulli, D. (1738*): "Specimen theoriae novae de mensura sortis",* La economía en sus textos" / Edición de Julio Segura y Carlos Rodríguez Braun Publicada en Madrid : Taurus, 1998.

- Eeckhoudt, L. (2005): *"Economic and Financial Decisions under Risk"*, Editorial: Princeton University Press. Estados Unidos, 1699. pp. 53 y 54.

- Guardiola, A. (2001): "*Manual de Introducción al Seguro*", Fundación Mapfre Estudios. Instituto de Ciencias del Seguro.

- Kimball, M. S. (1990): *«Precautionary Saving in the Small and in the Large»,* Econometrica, Vol. 58, No. 1 (Jan., 1990), pp. 53-73.

- Knight, F. H. (1921): "*Risk, uncertainty and profits*", Editorial: Cornell University Library, 2009, New York.

- Knight, F. H. (1942): *«Profit and Entrepreneurial Functions»,* The Journal of Economic History, Volume 2, Supplement S1, pp.126-132.

- Machina, M. J. (1989): *«Dynamic Consistency and Non- Expected Utility Models of Choice Under Uncertainty»,* Journal of Economic literature, Volume 27, Issue 4.

- Melgar, M. del Carmen (2003): *«Análisis de las componentes de la demanda de seguro. Aplicación al seguro del automóvil»,* Universidad de Sevilla. Tesis Doctoral.

- Montmort, P. R. (1713): *"Essay d'analyse sur les jeux de hazard",* (2nd ed.), Paris: Quillau. Disponible en https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k110519q/f1.image [Consulta 14/03/2020].

-Pérez-Domínguez, C. (2020): Material docente de la asignatura *Economía de la Incertidumbre*, Universidad de Valladolid, *mimeo.*

- Pratt, J. W. (1964): *"Risk Aversion in the Small and in the Large",* Econometrica, 32, 122-136.

- Rothschild, M. y Stiglitz, J. (1976): *«Equilibrium in Competitive Insurance Markets: An Essay on the Economics of Imperfect Information», The Quarterly Journal of Economics, Volume 90, Issue 4.*

- Takayama, A. (1994): "*Analytical Methods in Economics",* Editorial: University of Michigan Press, Michigan, pág. 260 y siguientes.

- Von Neumann, J. y Morgenstern, O. (1947): *"Theory of games and economic behavior*", (2nd rev. ed.), Editorial: Princeton University Press. Estados Unidos.

APÉNDICE 1:

Para averiguar ese grado de aversión al riesgo, la idea consistirá en encontrar cuanto estaría dispuesto a pagar el individuo para evitar esta lotería de media nula.

El proceso comienza considerando a un agente amante de la riqueza (u´ > 0) y averso al riesgo (u´´(x) < 0) cuya riqueza compuesta es la suma de una riqueza cierta que posee (x_0) y la lotería ruido blanco ($\tilde{y}$) que es aquella que tiene esperanza nula, por tanto:

-Riqueza compuesta: $\tilde{x}_F = x_0 + \tilde{y}$

-Varianza de la lotería: $\sigma^2 = E(\tilde{y}^2) - 0^2 = E(\tilde{y}^2)$

-Esperanza de la riqueza compuesta: $E(\tilde{x}_F) = x_0 + E(\tilde{y}) = x_0$

-Prima de riesgo de la riqueza: $\rho(\tilde{x}_F) = E(\tilde{x}_F) - \xi(\tilde{x}_F) = x_0 - \xi(\tilde{x}_F)$

Luego como: $\rho = x_0 - \xi \quad \rightarrow \quad \xi = x_0 - \rho$

Aplicando la utilidad: $u(\xi) = u(x_0 - \rho)$

Y por propiedades de la esperana: $u(x_0 - \rho) = E\{u(x_0 + \tilde{y})\}$

Vamos a aplicar desarrollos de Taylor a cada término de la siguiente manera:

-Aplicando un desarrollo de Taylor de primer orden en $u(x_0 - \rho)$:

$$u(x_0 - \rho) \cong u(x_0) + u'(x_0)\frac{(x_0 - \rho - x_0)}{1!} = u(x_0) - \rho\, u''(x_0)$$

-Aplicando un desarrollo de Taylor de segundo orden en $E\{u(x_0 + \tilde{y})\}$:

$E\{u(x_0 + \tilde{y})\} \cong E\left\{u(x_0) + \frac{u'(x_0)}{1!}\, u'(x_0 + \tilde{y} - x_0) + \frac{u''(x_0)}{2!}\, (x_0 + \tilde{y} - x_0)^2\right\} =$
$E\left\{u(x_0) + \tilde{y}\, u''(x_0) + \frac{1}{2}\, \tilde{y}^2\, u''(x_0)\right\} = u(x_0) + E(\tilde{y})\, u''(x_0) + \frac{1}{2}\, E(\tilde{y}^2)\, u''(x_0) =$
$u(x_0) + \frac{1}{2}\, \sigma^2\, u''(x_0)$

Agrupamos ambos términos: $u(x_0) - \rho\, u''(x_0) \;\cong\; u(x_0) + \frac{1}{2}\, \sigma^2\, u''(x_0)$

Despejando, finalmente nos queda:

$$\rho(\tilde{x}_F) \cong (1/2)\sigma^2 \underbrace{\left(-\frac{u''(x_0)}{u'(x_0)}\right)}_{\equiv A(x_0)}$$