

# APROXIMACIÓN DE LONGITUDES Y ÁREAS EN EDUCACIÓN PRIMARIA

## Trabajo de Fin de Grado

*“Tal es el hombre de cuyo rostro sólo conocemos rasgos imprecisos dictados por el recuerdo o por la admiración, de cuya alma, de sus pasiones, de sus odios y de sus amores nada conocemos, pero de quien conocemos su espíritu, quintaesenciado en sus obras. Su cuerpo, como el de la cultura de la cual fue fruto refinado, cayó bajo golpes de un poder más vigoroso y lozano; pero su espíritu, y el espíritu de la ciencia griega, perduran y se funden con tal intensidad que nos parece, como en otros casos excelsos, ver identificado el hombre con la propia ciencia: Herotodo o la historia, Platón o la filosofía, Arquímedes o la matemática.”*

(J. BABINI. ARQUÍMEDES. ESPASA-CALPE, 1948, PÁG. 151)

**GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA**

**AUTORA: GARAZI TORRE MASA**

**TUTORA: ANA M. SANZ**

**26/06/2013**

## RESUMEN

---

El objetivo fundamental de este trabajo es explicar cómo se puede abordar el tema de la aproximación de longitudes y áreas en el ámbito de la Educación primaria, de manera que el docente consiga transmitir al alumno la necesidad constante de estimar la medida de magnitudes en la vida cotidiana, y le guíe adecuadamente en la consecución del proceso de estimación. Nos centramos en este trabajo en las magnitudes longitud y área, con las que ya se empieza a trabajar en Educación Infantil.

Sin olvidar el objetivo fundamental, queremos primero enmarcar el problema dentro del desarrollo histórico de las matemáticas, donde destacamos el pensamiento del matemático griego Arquímedes de Siracusa, para luego desarrollar una estrategia didáctica que permita implementar sus ideas en el aula de Educación primaria. El fin es en el fondo mostrar a los alumnos que hay problemas de planteamiento muy sencillo de los que sin embargo no sabrán encontrar la solución exacta, y motivarles entonces en la búsqueda de un método que lleve a una solución aproximada que resulte satisfactoria.

## PALABRAS CLAVE

---

Aproximación, longitud, área, Arquímedes, Educación primaria.

# ÍNDICE

---

○ Introducción	pág.4-5
○ Objetivos	pág. 5-6
○ Justificación del tema elegido	pág. 6-9
○ Fundamentación teórica y antecedentes	pág. 9-16
• Planteamiento del problema	pág. 9-10
• Arquímedes, una vida de creación	pág. 11-12
• El trabajo de Arquímedes: “sobre la medida del círculo”	pág. 12-16
○ Metodología o diseño	pág. 16-42
• Contexto	pág. 16-17
• Competencias básicas que se pueden desarrollar con nuestro tema	pág. 17-19
• Actividades	pág.19-42
- Actividades de aproximación de longitudes	pág. 19-30
- Actividades de aproximación de áreas	pág. 30-42
○ Conclusión	pág. 43-45
○ Bibliografía o referencias	pág. 46
○ Apéndice	pág. 47-49
• Objetivos	pág. 47-48
• Contenidos	pág. 49
• Criterios de evaluación	pág. 49-50

# INTRODUCCIÓN

---

El tema que desarrollamos sobre la aproximación de longitudes y áreas en Educación primaria tiene como objetivo analizar, entender y poner en práctica la importancia y el uso del cálculo aproximado, es decir, de la estimación. Este concepto está relacionado directamente con la vida cotidiana, ya que en muchas ocasiones los números que manejamos son resultados aproximados de los valores reales.

Este objetivo, además, está relacionado con el objetivo principal de la formación matemática de los niños y niñas de Educación primaria, ya que en esta etapa se pretende que el alumnado adquiera los conocimientos necesarios para poner en práctica o utilizar los conceptos matemáticos en la vida cotidiana que les rodea.

Durante siglos se ha ido trabajando y mejorando la idea de que el área es la medida que proporciona el tamaño de la región encerrada por una figura geométrica plana, además de los métodos que se han ido utilizando para calcular el área de dichas figuras. Esta idea proviene de la antigüedad, y a lo largo de la historia, muchos matemáticos han diseñado diferentes métodos para intentar hallar fórmulas para el cálculo de áreas.

Una vez conocidas las fórmulas para el cálculo del área de figuras poligonales sencillas (como la fórmula del área del triángulo), un problema más difícil era hallar el área encerrada por una figura curva (como por ejemplo, una circunferencia), así como la longitud de la curva que delimita la figura. Este problema en concreto es el que vamos a analizar y desarrollar posteriormente: vamos a centrarnos en el método y en el trabajo que realizó Arquímedes para poder hallar, si bien sólo de forma aproximada, la longitud del perímetro y el área de una superficie o figura curva.

De hecho, el problema anterior no se consiguió resolver con exactitud hasta el desarrollo de la teoría del cálculo integral, y concretamente hasta el siglo XIX con la teoría de la integral definida del matemático Riemann.

La vida de Arquímedes no es muy conocida, pero sí las investigaciones y estudios que realizó el matemático (también considerado físico, ingeniero, inventor y astrónomo). A continuación citamos un resumen sobre la biografía de Arquímedes extraído de uno los

estudios que mejor ha sabido plasmar su figura humana y científica, J. Babini (Arquímedes. Espasa-Calpe, 1948, pág 151):

*“Tal es el hombre de cuyo rostro sólo conocemos rasgos imprecisos dictados por el recuerdo o por la admiración, de cuya alma, de sus pasiones, de sus odios y de sus amores nada conocemos, pero de quien conocemos su espíritu, quintaesenciado en sus obras. Su cuerpo, como el de la cultura de la cual fue fruto refinado, cayó bajo golpes de un poder más vigoroso y lozano; pero su espíritu, y el espíritu de la ciencia griega, perduran y se funden con tal intensidad que nos parece, como en otros casos excelsos, ver identificado el hombre con la propia ciencia: Herotodo o la historia, Platón o la filosofía, Arquímedes o la matemática.”*

El trabajo que realizó el geómetra Arquímedes relacionado con la aproximación de longitudes y áreas, lo encontramos en el trabajo sobre la medida del círculo. Este, junto con otros trabajos, tiene como objetivo principal la demostración de teoremas relativos a las áreas y volúmenes de figuras limitadas por curvas y superficies, respectivamente.

Después de analizar con detalle el trabajo que realizó Arquímedes sobre la medida del círculo, vamos a situarlo en la etapa de Educación primaria, para que el alumnado pueda aprender y utilizar los conceptos y métodos relacionados con el tema de la aproximación de longitudes y áreas.

Concretamente, desarrollaremos los objetivos, contenidos y actividades que se pueden desarrollar en el aula para trabajar los conceptos relacionados a nuestro tema. La metodología estará enfocada especialmente al tercer ciclo de Educación primaria, ya que en ese ciclo es cuando se trabajan en profundidad los contenidos relacionados con nuestro tema, aunque ya en el segundo ciclo de Educación primaria empiecen a trabajar contenidos sobre la aproximación de longitudes y áreas.

## OBJETIVOS

---

El objetivo fundamental de este trabajo es explicar cómo se puede abordar el tema de la aproximación de longitudes y áreas en el ámbito de la Educación primaria, de manera que el docente consiga transmitir al alumno la necesidad constante de estimar la medida

de magnitudes en la vida cotidiana, y le guíe adecuadamente en la consecución del proceso de estimación. Nos centramos en este trabajo en las magnitudes longitud y área, con las que ya se empieza a trabajar en Educación Infantil.

Sin olvidar el objetivo fundamental, queremos primero enmarcar el problema dentro del desarrollo histórico de las matemáticas, donde destacamos el pensamiento del matemático griego Arquímedes de Siracusa, para luego desarrollar una estrategia didáctica que permita implementar sus ideas en el aula de Educación primaria. El fin es en el fondo mostrar a los alumnos que hay problemas de planteamiento muy sencillo de los que sin embargo no sabrán encontrar la solución exacta, y motivarles entonces en la búsqueda de un método que lleve a una solución aproximada que resulte satisfactoria.

## JUSTIFICACIÓN DEL TEMA ELEGIDO

---

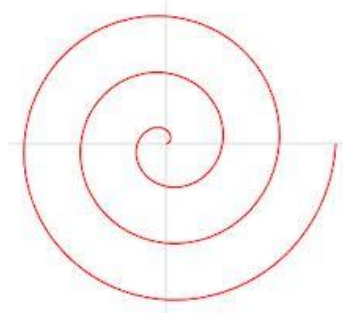
Los cálculos y mediciones que se realizan a diario en la vida cotidiana tienen en general un carácter inexacto, es decir, los números que manejamos son resultados aproximados de los valores reales. Esto puede ser debido a motivos de distinta índole.

Pongamos como un primer ejemplo el caso de las compras. Cuando en una tienda una prenda tiene un precio de 35,95 euros sobre el cual se aplica un descuento del 20%, ejercitamos el cálculo mental para calcular el 20% de 36, que supone 7,2 euros y así estimamos que la prenda costará aproximadamente  $36 - 7 = 29$  euros. Efectivamente se trata de un valor aproximado, ya que el precio real tras el descuento será exactamente de 28,76 euros. En este caso, si fuéramos muy buenos en cálculo mental o usásemos una calculadora, podríamos de hecho calcular de antemano el valor exacto de la compra.

Como segundo ejemplo, pongamos el caso de las obras en casa. Ahora queremos azulejar una pared, para lo cual necesitamos medir su superficie. Con la ayuda de un metro mediremos su ancho y su alto y calcularemos mediante el producto de ambas cantidades su superficie. Sin embargo, el valor que obtengamos será sólo una aproximación del valor real, ya que al medir se comenten siempre errores, ya sea por la destreza de la persona que mide, por la precisión de los aparatos de medida, por factores

medioambientales, etc. Y nunca sabremos cuál es el valor exacto de la superficie de la pared, ya que toda medición conlleva un error.

Como tercer y último ejemplo, imaginemos que queremos medir la longitud de una curva, como la llamada espiral de Arquímedes, que presentamos en la figura. Como motivación en la vida real, supongamos que queremos comprar alambre para construirla, y queremos saber qué longitud necesitamos adquirir.



En este caso, precisaremos unos conocimientos bastante avanzados de matemáticas para poder dar el valor exacto, que se adquieren en general en estudios universitarios de ciencias o en carreras técnicas. La mayoría de la población, incluso habiendo cursado dichos estudios, desconoce (o ha olvidado) la manera de calcular con exactitud dicha longitud. Sin embargo, debemos estar ya acostumbrados a la conveniencia del cálculo aproximado: por desconocer el método que conduce a la longitud exacta de la curva, no debemos renunciar a tener una buena aproximación de dicha longitud.

Estos tres sencillos ejemplos muestran la importancia y uso del cálculo aproximado (en otras palabras, de la estimación) en la vida cotidiana, y en concreto el tercer ejemplo que hemos presentado refleja la relevancia del tema elegido. Recordemos que el uso de las matemáticas en la vida cotidiana es el objetivo principal en la formación matemática de los niños en la Educación primaria. Como recoge el Boletín Oficial de Castilla y León (Decreto 40/2007, de 3 de mayo, por el que se establece el Currículo de la Educación Primaria): “En la Educación primaria se busca alcanzar una eficaz alfabetización numérica, entendida como la capacidad para enfrentarse con éxito a situaciones en las que intervengan los números y sus relaciones, permitiendo obtener información efectiva, directamente o a través de la comparación, **la estimación** y el cálculo mental o escrito.”

En lo que se refiere a la vinculación de la propuesta temática con las competencias propias del título, el tema elegido está en estrecha relación con los conocimientos y capacidades adquiridos en la materia “Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas” del módulo “Didáctico-disciplinar” del Grado en Educación primaria. De este modo, el desarrollo de este tema de trabajo permite poner de manifiesto la adquisición de las competencias específicas que se han de adquirir al cursar dicha materia, a saber (según se expone en la memoria de dicho Título):

-Identificar y comprender el rol que juegan las matemáticas en el mundo, emitiendo juicios bien fundamentados y utilizando las matemáticas al servicio de una ciudadanía constructiva, comprometida y reflexiva. Esta competencia se concretará en el desarrollo de habilidades que formen a la persona titulada para:

a. Adquirir competencias matemáticas básicas (numéricas, de cálculo, geométricas, de representación espacial, **de estimación y medida**, de organización y tratamiento de la información...).

b. Analizar, razonar y comunicar propuestas matemáticas.

c. Plantear y resolver problemas matemáticos vinculados con la vida cotidiana.

d. Valorar la relación entre matemáticas y ciencias como uno de los pilares del pensamiento científico.

e. Modelizar matemáticamente situaciones problemáticas sencillas de contextos reales, tratando posteriormente el modelo creado e interpretando los resultados en función del contexto de origen y aplicación.

- Transformar adecuadamente el *saber matemático* de referencia en *saber a enseñar* mediante los oportunos procesos de transposición didáctica, verificando en todo momento el progreso de los alumnos y del propio proceso de enseñanza-aprendizaje mediante el diseño y ejecución de situaciones de evaluación tanto formativas como sumativas. Esta competencia se concretará en el desarrollo de habilidades que formen a la persona titulada para:

a. Conocer el currículo escolar de matemáticas.

b. Desarrollar y evaluar contenidos del currículo mediante recursos didácticos apropiados y promover la adquisición de competencias básicas en los estudiantes.



Por último, observar que, si bien la vinculación de la propuesta temática con las competencias desarrolladas al cursar la materia “Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas” es muy clara, el desarrollo de este tema también permite demostrar la adquisición de las competencias generales propias del Grado en Educación primaria, en concreto:

1. Poseer y comprender conocimientos en un área de estudio –la Educación- que parte de la base de la educación secundaria general, y se suele encontrar a un nivel que, si bien se apoya en libros de texto avanzados, incluye también algunos aspectos que implican conocimientos procedentes de la vanguardia de su campo de estudio.
2. Aplicar sus conocimientos a su trabajo o vocación de una forma profesional y posean las competencias que suelen demostrarse por medio de la elaboración y defensa de argumentos y la resolución de problemas dentro de su área de estudio –la Educación-.
3. Tener la capacidad de reunir e interpretar datos esenciales (normalmente dentro de su área de estudio) para emitir juicios que incluyan una reflexión sobre temas esenciales de índole social, científica o ética.
4. Transmitir información, ideas, problemas y soluciones a un público tanto especializado como no especializado.

## **FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA Y ANTECEDENTES**

---

### **PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

La idea de que el área es la medida que proporciona el tamaño de la región encerrada por una figura geométrica plana proviene de la antigüedad. En el Antiguo Egipto, tras la

crecida anual del río Nilo inundando los campos, surge la necesidad de calcular el área de cada parcela agrícola para restablecer sus límites. Según Heródoto, para solventar este problema, los egipcios inventaron la geometría.

En geometría elemental se deducen fórmulas para el cálculo del área de muchas figuras planas. Por ejemplo, a partir de la fórmula para calcular el área del triángulo, puede definirse el área de un polígono como la suma de las áreas de los triángulos en que puede ser descompuesto y se puede demostrar que el área obtenida es independiente de la descomposición efectuada. Esta idea de trabajo es muy antigua y fue propuesta por primera vez por el sabio griego Antifón alrededor del año 430 a.C.

Un problema mucho más difícil es hallar el área encerrada por una figura curva. El método griego del agotamiento consistía en inscribir polígonos en la figura y circunscribir otros polígonos en torno a ella, aumentar el número de los lados de los polígonos y así tratar de hallar el área buscada, usando las aproximaciones sucesivas. Eudoxo consiguió de esa manera encontrar una aproximación a la fórmula del área de un círculo. Teniendo en cuenta el uso del método dado por Eudoxo, se conoce como método de exhaustión de Eudoxo, y el mismo fue empleado tiempo después por Arquímedes para resolver problemas de este tipo.

Sin embargo, el problema del cálculo del área encerrada por una curva no se consiguió resolver con exactitud hasta el adecuado desarrollo del análisis matemático, y en concreto de la teoría del cálculo integral, que se debe en sus inicios a uno de los hermanos Bernoulli y al famosísimo matemático Euler (ambos suizos del siglo XVIII). Este cálculo fue posteriormente desarrollado por el matemático alemán Riemann en el siglo XIX, con su teoría de la integral definida, conocida también como integral de Riemann, que tiene como aplicación fundamental la del cálculo de áreas.

En nuestro caso nos vamos a centrar en el trabajo que realizó Arquímedes para encontrar la fórmula o el cálculo concreto para hallar la longitud del perímetro y el área de una superficie o figura curva. Para ello, antes de nada comenzaremos observando y analizando la vida que tuvo el importante y conocido matemático Arquímedes.

## ARQUÍMEDES, UNA VIDA DE CREACIÓN

De acuerdo con la interesante y completa obra de Torija (1999), de la vida de Arquímedes se conoce muy poco. Es probable que naciera en Siracusa en el año 287 a.C. y se supone que era hijo de un astrónomo llamado Fidias. Su situación dentro del círculo dominante de la ciudad natal le permitió dedicarse al estudio e investigación de las ciencias, sobre todo de la geometría.

Algunos dicen que Arquímedes viajó a Alejandría, donde coincidió con alguno de los seguidores de Euclides y donde se supone que adquirió su formación matemática. Sin embargo, hay otros testimonios que afirman que la mayor parte de su vida la pasó en Siracusa. Desde allí intercambió ideas y opiniones científicas con Eratóstenes de Cirene, director del Museo de Alejandría en esa época.

Estamos en una época en la que algunos griegos combinaban la ingeniería con la ciencia. Arquímedes fue su máximo representante y de su estancia en Alejandría parece proceder el invento del tornillo que lleva su nombre y que permitía elevar el agua del Nilo. Además Arquímedes conformó lo que en la actualidad llamaríamos un matemático teórico y un físico experimental.

En matemáticas fue donde él se encontró más cómodo, o al menos esa impresión ha llegado hasta nosotros. Eso podría deberse a que la geometría y las matemáticas tenían una base científica anterior más sólida y, en consecuencia, la curiosidad de Arquímedes le forzaba a completar algo que consideraba de mayor interés.

Aunque algunos textos recuerdan a Arquímedes sobre todo por sus inventos mecánicos, hay que tener en cuenta que su interés en ellos quizá se deba a los principios físicos o matemáticos implicados, ya que, por otra parte, él mismo se consideró siempre un geómetra.

En todos sus trabajos, Arquímedes presentaba el conocimiento científico como sistema deductivo de teoremas. Sin embargo, es posible que obtuviese primero resultados experimentales, y que posteriormente los dedujera de postulados, pues en El Método, cuenta que realizaba experimentos mentales en la investigación de áreas y volúmenes. Medía la superficie de figuras planas pensando imaginariamente sus formas recortadas sobre un material uniforme para hacerse una idea de sus relaciones y después procedía a demostrarlo matemáticamente.

Todos los autores que han escrito sobre Arquímedes están de acuerdo en el hecho de calificarlo como el científico y matemático más importante de la Edad Antigua. La mente de él se nos revela como la de un precursor, por sus trabajos geométricos que están bien documentados y nos han llegado por distintas vías. Sus enseñanzas representaron un gran avance sobre la geometría de Euclides y su prolongación lógica llevaría hasta el cálculo integral.

A pesar de que existan diversos textos que escribió Arquímedes, en nuestro caso, nos vamos a centrar en la obra sobre la medida del círculo. Este texto es muy breve, pero se pondera este trabajo como uno de los más importantes de Arquímedes, ya que en él se demuestra la equivalencia de los problemas de la cuadratura del círculo y la rectificación de la circunferencia, y además, al dar una solución aproximada a estos problemas, proporciona una interesante acotación para el número  $\pi$  mediante relevantes cuestiones aritméticas. A continuación analizaremos el trabajo que realizó Arquímedes sobre la medida del círculo.

## **EL TRABAJO DE ARQUÍMEDES: “SOBRE LA MEDIDA DEL CÍRCULO”**

Para entender el trabajo que realizó Arquímedes y comenzar a analizarlo hay que situarse alrededor del año 215 a.C. Hay que tener en cuenta que ahora trabajamos con el número  $\pi$  con naturalidad, pero en esa época no era un número conocido.

La obra sobre la medida del círculo, junto con otras, tiene como objetivo principal la demostración de teoremas relativos a las áreas y volúmenes de figuras limitadas por curvas y superficies, respectivamente.

En este trabajo, Arquímedes encontró la fórmula, que empleamos actualmente, del área del círculo, en la que se usa el número  $\pi$ . Al hacerlo, estableció la relación crítica entre la circunferencia y el área del círculo, para lo cual requería resultados preliminares y la aplicación de la reducción al absurdo.

Uno de los resultados preliminares en los que se basa su trabajo es el conocimiento del área de un polígono regular. La demostración es sencilla: consideramos un polígono con  $n$  lados, con la misma longitud en todos ellos y con todos sus ángulos iguales.

Trazaremos rectas desde el centro hasta los vértices del polígono, descomponiendo así el polígono en  $n$  triángulos iguales entre sí, cuya altura será la apotema del polígono. Por lo que, el área del polígono regular será la suma de  $n$  términos iguales.

Otro resultado preliminar es la afirmación de que “en un círculo dado es posible inscribir un cuadrado”, siendo la superficie del cuadrado menor que la del círculo. Y si inscribimos un octógono regular en el círculo, entonces la superficie del octógono será menor que la del círculo, pero se aproximará más que la del cuadrado.

Repetiendo este procedimiento sucesivamente, la diferencia entre las áreas del círculo y del polígono inscrito será tan pequeña como queramos, pues basta con aumentar el número de los lados del polígono, y siempre existirá uno que tenga un área que se diferencie de la del círculo en una cantidad que será tan pequeña como queramos.

De la misma forma, puede repetirse el razonamiento para un polígono circunscrito a la circunferencia. De este modo, llegamos a deducir que el área del círculo estará comprendida entre ambas áreas. Destacamos que la parte de la proposición que dice “áreas tan próximas como se quiera” es la clave del éxito de Arquímedes. En el fondo Arquímedes usa el concepto matemático de límite, si bien éste no se formaliza hasta el siglo XVIII en los trabajos de Newton y Leibniz.

El trabajo que el matemático realizó sobre la medida del círculo comienza con tres proposiciones:

- 1.- Todo círculo es equivalente (es decir, tiene la misma área) a un triángulo rectángulo, uno de cuyos catetos es igual al radio y el otro al perímetro del círculo (equivalencia de los problemas de la cuadratura y la rectificación).
- 2.- El área del círculo es al cuadrado de su diámetro como 11 es a 14 (el círculo es los  $11/14$  del cuadrado circunscrito si la longitud de la circunferencia es  $3 + 1/7$  veces el valor del diámetro).
- 3.- El perímetro de todo círculo es igual al triple del diámetro aumentado en un segmento comprendido entre  $10/71$  y  $1/7$  de dicho diámetro (lo que equivale a decir que

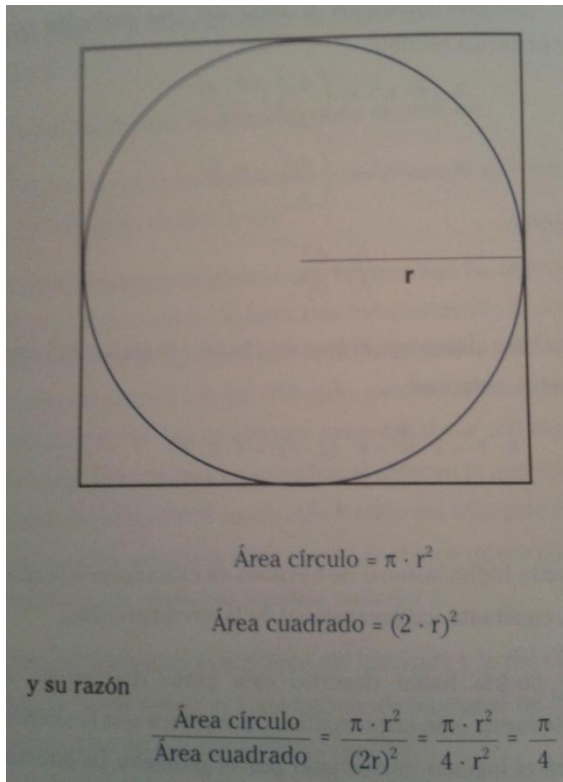
el perímetro del círculo está comprendido entre  $3 + 10/71$  veces el diámetro y  $3 + 1/7$  veces el diámetro).

En la primera proposición se demuestra mediante el método de exhaución la equivalencia del círculo con el triángulo de altura el radio y de base la longitud de la circunferencia. Además, emplea hábilmente el método de reducción al absurdo.

Arquímedes, en esa época, demostró muchos de los resultados matemáticos mediante el denominado método de exhaución (agotamiento) de Eudoxo. Este es un método de demostración, no de descubrimiento y, por tanto, exige conocer de antemano el resultado que se quiere demostrar.

Acerca del nombre de método de exhaución observaremos que es bastante inapropiado, pues aunque la etimología y semántica del término insinúan y sugieren que en las cuadraturas, por ejemplo, los polígonos se van aproximando indefinidamente a la figura a cuadrar hasta alcanzar rigurosamente el resultado de forma equivalente a la aplicación de un límite, no es realmente así porque nunca llega a agotar. Ya que, con las figuras inscritas y circunscritas que van aproximando la figura geométrica cuya magnitud se quiere estudiar, no se puede alcanzar un número exacto.

Las dos proposiciones siguientes (la 2 y la 3) son analizadas desde distintos puntos de vista. Algunos autores opinan que en su transcripción debió de haber una alteración en el orden, y que la segunda debía aparecer como conclusión de la tercera pero, en cualquier caso, ambas nos conducen de nuevo al ya nombrado número  $\pi$ .



La proposición 2 se puede estudiar al suponer un cuadrado circunscrito a un círculo de radio  $r$ .

La aproximación de Arquímedes para este valor,  $11/14$ , vuelve a ser una maravillosa aproximación al valor de  $\pi$  conocido en la actualidad. Al aproximar  $\pi/4$  por  $11/14$ , se está aproximando  $\pi$  por  $22/7$ , que es igual a  $3 + 1/7$ . Es un valor erróneo pero para la época se considera una fracción que da una buena aproximación de  $\pi$ , como bien hemos dicho antes.

La proposición 3 consolida uno de los teoremas más notables de Arquímedes, al acotar los valores de  $\pi$ . Esto lo logra inscribiendo y circunscribiendo polígonos mediante la duplicación del número de lados. Parte de un hexágono y llega hasta un polígono de 96 lados, y calcula aproximadamente sus perímetros.

Todos los lados de los polígonos, salvo el hexágono, deben ser expresados mediante raíces que Arquímedes calcula de modo aproximado, empleando reglas que debían de ser conocidas en su época, aunque esto no está aclarado.

Con ello, lo que sí llega a probar es que el número  $\pi$  está entre los valores  $6.336/2.017$  (ahora anotaríamos  $3,1412989$ ) y  $29.376/9.347$  (equivalente a  $3,1428265$ ). Esto se sustituye por los más cómodos y conocidos:  $3 + 10/71$  y  $3 + 1/7$ .

El que Arquímedes obtuviera este resultado da nuevamente una idea de su capacidad intelectual. El proceso lo comenzó con un hexágono regular inscrito y luego fue duplicando su número de lados. En concreto, los siguientes polígonos que utilizó para la investigación fueron: de 12 lados, de 24 lados, de 48 lados y, por último, de 96 lados. En cada nueva operación, Arquímedes tuvo que aproximar el resultado de raíces

cuadradas desconocidas y fue al llegar al polígono de 96 lados cuando encontró la cota que antes hemos mencionado.

El límite superior lo encontró trabajando de igual forma, pero con polígonos circunscritos de 12, 24, 48 y 96 lados.

## METODOLOGÍA O DISEÑO

---

### CONTEXTO:

“Las matemáticas son un conjunto de conocimientos asociados en una primera aproximación a los números y las formas, que se van progresivamente completando hasta constituir un modo valioso de analizar situaciones variadas. Permiten estructurar el conocimiento que se obtiene de la realidad, analizarla y lograr una información nueva para conocerla mejor, valorarla y tomar decisiones.

En la Educación primaria se busca alcanzar una eficaz alfabetización numérica, entendida como la capacidad para enfrentarse con éxito a situaciones en las que intervengan los números y sus relaciones, permitiendo obtener información efectiva, directamente o a través de la comparación, la estimación y el cálculo mental o escrito” (Bocyl, Decreto 40/2007, de 3 de mayo, por el que se establece el Currículo de la Educación primaria).

Los niños y las niñas deben aprender matemáticas utilizándolas en contextos relacionados con situaciones de la vida diaria, para adquirir progresivamente conocimientos más complejos a partir de las experiencias y los conocimientos previos.

Los contenidos se han organizado en cuatro bloques que responden al tipo de objetos matemáticos que se manejan en cada uno de ellos: Números y operaciones, Medida, Geometría y Tratamiento de la información, azar y probabilidad. A continuación vamos a analizar el bloque de contenidos relacionado con el tema de nuestro trabajo, es decir, el de Geometría, para más tarde diseñar, en el apartado de Actividades, la manera adecuada de abordar el tema que nos ocupa en el aula.



A través del estudio de los contenidos del bloque 3, Geometría, el alumnado aprenderá sobre formas y estructuras geométricas. La geometría implica describir, analizar propiedades, clasificar y razonar, y no sólo definir. El aprendizaje de la geometría requiere pensar y hacer, y debe ofrecer continuas oportunidades para clasificar, construir, dibujar y medir, desarrollando la capacidad para visualizar relaciones geométricas. Todo ello se logra estableciendo relaciones constantes con el resto de los bloques del área y con otros ámbitos como el mundo del arte o de la ciencia, pero también asignando un papel relevante a la parte manipulativa a través del uso de materiales (geoplanos y mecanos, tramas de puntos, libros de espejos, material para formar poliedros, etc.) y de la actividad personal (realizando plegados, construcciones, etc.) para llegar al concepto a través de modelos reales.

### **COMPETENCIAS BÁSICAS QUE SE PUEDEN DESARROLLAR CON NUESTRO TEMA DE TRABAJO:**

Los contenidos del área están orientados a garantizar el mejor *desarrollo de la competencia matemática* en todos y cada uno de sus aspectos. Es necesario remarcar que la contribución al desarrollo de la competencia matemática se logra en la medida en que el aprendizaje de dichos contenidos se enfrenta a las múltiples ocasiones en las que niños y niñas emplean las matemáticas fuera del aula.

A continuación vamos a analizar la contribución que tiene el área de matemáticas, y más concretamente nuestro tema, en el desarrollo de algunas de las competencias básicas:

#### **Competencia del conocimiento e interacción con el mundo físico:**

El desarrollo del pensamiento matemático contribuye a la competencia en el *conocimiento e interacción con el mundo físico* porque hace posible una mejor comprensión y una descripción más ajustada del entorno.

En primer lugar, con el desarrollo de la visualización, los niños y las niñas, al establecer una aproximación de longitudes y áreas en Educación primaria, mejoran su capacidad para hacer construcciones y manipular mentalmente figuras en el plano y en el espacio. Esto les será de gran utilidad en el diseño de geoplanos, elaboración de figuras geométricas, etc. Y en segundo lugar, a través de la medida se logra un mejor

conocimiento de la realidad y se aumentan las posibilidades de interactuar con ella y de transmitir informaciones cada vez más precisas sobre aspectos cuantificables del entorno.

### **Competencia de autonomía e iniciativa personal:**

Los contenidos asociados a la resolución de problemas constituyen la principal aportación que desde el área se puede hacer a la *autonomía e iniciativa personal*. La resolución de problemas tiene, al menos, tres vertientes complementarias asociadas al desarrollo de esta competencia: la planificación, la gestión de los recursos y la valoración de los resultados.

En nuestro caso, la planificación está asociada a la comprensión en detalle de la situación planteada para trazar un plan y buscar estrategias y, en definitiva, para tomar decisiones; la gestión de los recursos incluye la optimización de los procesos de resolución; y la evaluación periódica del proceso y la valoración de los resultados permite hacer frente a otros problemas o situaciones con mayores posibilidades de éxito.

### **Competencia para aprender a aprender:**

Una parte importante de los contenidos del área, en nuestro caso los relacionados con longitudes y áreas, proporciona valor para el desarrollo de la *competencia para aprender a aprender*. A menudo es un requisito para el aprendizaje la posibilidad de utilizar las herramientas matemáticas básicas o comprender informaciones que utilizan soportes matemáticos. Por ello también es necesario incidir en los contenidos con autonomía y con habilidad para abordar situaciones de creciente complejidad.

### **Competencia en comunicación lingüística:**

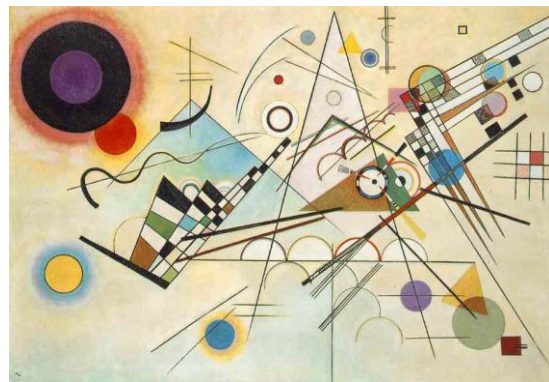
Para fomentar el desarrollo de la *competencia en comunicación lingüística* desde el área de matemáticas, concretamente desde el bloque de geometría, se debe insistir en dos aspectos. Por una parte, la incorporación del lenguaje matemático necesario para obtener una expresión adecuada de los contenidos y conceptos que se trabajan en nuestro trabajo. Por otra parte, es necesario incidir en la correcta descripción verbal de los razonamientos y de los procesos a la hora de trabajar con los problemas o actividades relacionadas con la aproximación de longitudes y áreas.

### Competencia cultural y artística:

Las matemáticas contribuyen al desarrollo de la *competencia cultural y artística* desde la consideración del conocimiento matemático como contribución al desarrollo cultural de la humanidad. Además, las formas geométricas aparecen muy a menudo en las distintas obras de arte, como esculturas o pinturas. Por ello, el análisis y aprendizaje de la geometría ayuda en el análisis de determinadas producciones artísticas. A continuación observamos algunos ejemplos en los que la geometría forma parte del mundo del arte:



Keizo Ushio, Tema: Matemáticas



Composición VIII, Vasili Kandinsky

### ACTIVIDADES:

En este apartado analizaremos las actividades que se pueden trabajar en el aula de Educación primaria sobre la aproximación de longitudes y de áreas, intentando plasmar en ellas las ideas fundamentales del trabajo de Arquímedes. Estos ejercicios estarán destinados para el tercer ciclo de Educación primaria, ya que es en ese ciclo donde se trabajan en mayor profundidad los contenidos relacionados con nuestro tema, a pesar de que en el segundo ciclo ya se podrían empezar a trabajar algunos de los ejercicios que vamos a desarrollar.

Todas las actividades tienen como objetivo tratar los contenidos relacionados con el tema, además de ayudar a que los niños y niñas del aula vayan desarrollando las competencias básicas que anteriormente hemos mencionado.

Además, nuestro tema y los ejercicios que realicemos sobre él están relacionados con los objetivos generales, contenidos y criterios de evaluación que se deben trabajar en la

asignatura de matemáticas, concretamente en el bloque de Geometría, los cuales se pueden consultar en el Apéndice.

Clasificamos en dos bloques las actividades que vamos a desarrollar a continuación: actividades de aproximación de longitudes y actividades de aproximación de áreas.

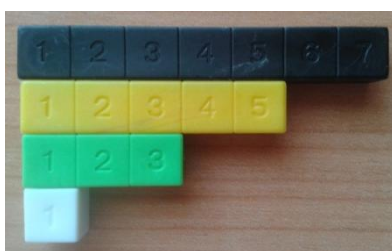
## ❖ ACTIVIDADES DE APROXIMACIÓN DE LONGITUDES

### ACTIVIDAD N° 1

La primera actividad que vamos a realizar sobre la aproximación de longitudes tiene como **objetivo** ver las diferentes aproximaciones que se pueden realizar de la longitud de una cuerda que adopta la forma de diferentes curvas, cuando se modifica la unidad de medida considerada.

Para realizar esta sesión necesitaremos el siguiente **material didáctico**:

- Cuerdas de 1 metro.
- Regletas de los siguientes tamaños: 7 cm, 5 cm, 3 cm y 1 cm.
- Ficha de datos.
- Bolígrafo o lapicero.
- Celo.



Los **conceptos teóricos** que deberán saber o tener en cuenta a la hora de realizar esta actividad serán los siguientes:

- **LONGITUD**: Para medir longitudes se pueden utilizar distintas unidades de medida. La unidad de medida más utilizada es el metro (m). Se utiliza para medir la altura de un árbol, la longitud del largo de una piscina, la longitud de una habitación, la longitud de una cuerda...

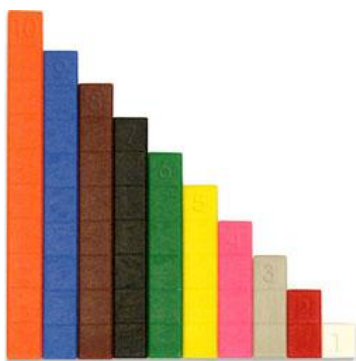
Hay unidades de medidas menores que se utilizan para medir objetos pequeños (la longitud de un libro, de una goma, de un alfiler,...):

- Decímetro (dm).
- Centímetro (cm).
- Milímetro (mm).

También hay unidades de medidas mayores que el metro que se utilizan para medir objetos o distancias grandes: la distancia entre 2 ciudades, la longitud de un río, la altura de las nubes, etc. Son los siguientes:

- Kilómetro (km)
- Hectómetro (hm)
- Decámetro (dam).

- UNIDADES DE MEDIDA (REGLETAS): En el aula vamos a utilizar como unidad de medida diferentes regletas. Son pequeñas barras en forma de prisma con base cuadrada. La regleta más pequeña tiene 1 cm de longitud y la más grande 10 cm de longitud. Además, cada una de ellas, dependiendo de la medida que tenga, tiene un color diferente.



- DIFERENTES LÍNEAS: Una cierta cantidad de puntos situados cada uno junto al otro, dan origen a un trazo continuo, que es una línea. Las líneas pueden ser:
  - Rectas: cuando todos los puntos se encuentran alineados en una misma dirección.
  - Curvas: cuando los puntos no se encuentran alineados en una misma dirección; aunque, al menos durante cierta distancia, el cambio de dirección responda a un criterio de continuidad.

- OPERACIONES BÁSICAS: Las operaciones básicas que deberán utilizar en esta actividad, serán la suma y la multiplicación.

Esta actividad tendrá el siguiente *desarrollo*:

Antes de empezar a jugar con la cuerda, el profesor les explicará de qué trata el ejercicio. Para ello, el profesor les hará un ejemplo de la actividad que deben realizar ellos posteriormente. Es decir, les explicará cómo deben jugar con la cuerda poniendo diferentes formas, y cómo deben medir cada una de ellas usando cada tipo de regletas.

Esta actividad la realizarán en pequeños grupos de dos o tres personas, y la realizarán fuera del aula, por ejemplo, en el gimnasio o en el patio si es posible. Para ello antes de ir a realizar la actividad el profesor dará el material necesario a cada grupo.

La ficha que deberán completar será la siguiente:

### **FICHA DE DATOS**

Participantes del grupo: \_\_\_\_\_.

Fecha: \_\_\_\_\_.

- Antes de empezar la actividad contesta las siguientes preguntas:

A pesar de que hagas diferentes curvas con la cuerda, ¿el resultado que obtengas siempre será el mismo?

---

---

---

La aproximación más exacta cuál será, ¿la obtenida para curvas profundas o la obtenida para curvas más alargadas?

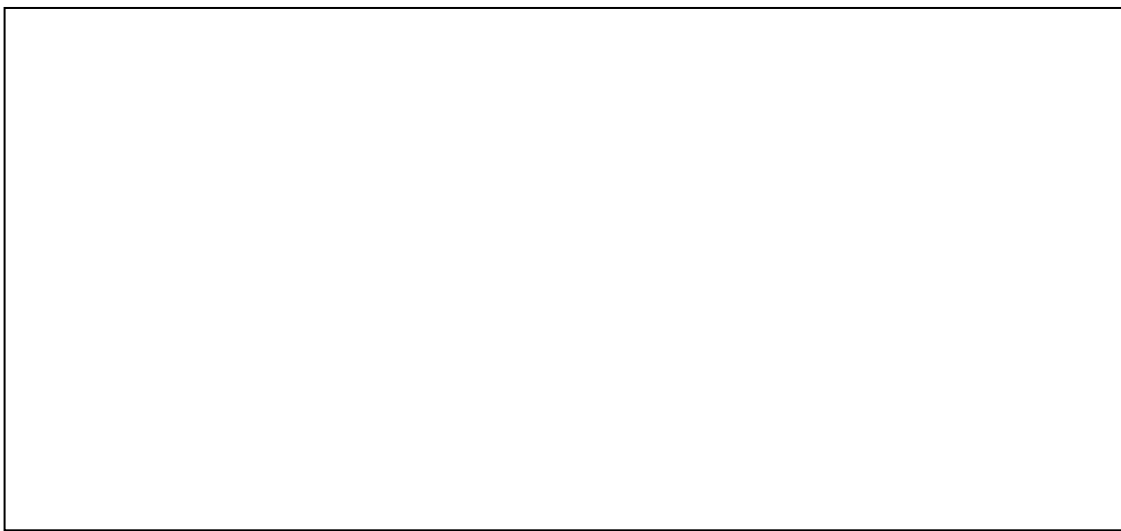
---

---

---

- Empieza a jugar con distintas posiciones de la cuerda, considerando por lo menos las siguientes:
  - 1.- Cuerda recta.
  - 2.- Cuerda bastante estirada con pequeñas curvas.
  - 3.- Cuerda con curvas muy cerradas.

Realiza el dibujo que hayas hecho con la cuerda:



Rellena las siguientes tablas con el resultado que obtengas en cada caso:

TABLA DE NÚMERO DE REGLETAS USADAS PARA MEDIR CADA CASO

	<b>1 cm</b>	<b>3 cm</b>	<b>5 cm</b>	<b>7 cm</b>
<b>1</b>				
<b>2</b>				
<b>3</b>				

TABLA DE MEDIDA APROXIMADA

	<b>1 cm</b>	<b>3 cm</b>	<b>5 cm</b>	<b>7 cm</b>
<b>1</b>				
<b>2</b>				
<b>3</b>				

- Después de haber jugado y medido la cuerda en sus distintas posiciones, ¿qué conclusión puedes sacar? ¿Has obtenido las aproximaciones que pensabas antes de realizar el ejercicio?

---

---

---

---

En la próxima sesión los alumnos y alumnas expondrán el trabajo realizado a los demás compañeros de clase. En la exposición que realicen detallarán los dibujos aproximados que hayan realizado con las cuerdas y las conclusiones que hayan obtenido después de realizar la actividad.

Durante las dos sesiones, es decir, durante la realización de las actividades y durante las exposiciones, el profesor irá realizando las preguntas y las correcciones que vea necesarias, para después hacer una *evaluación* de la actividad realizada.

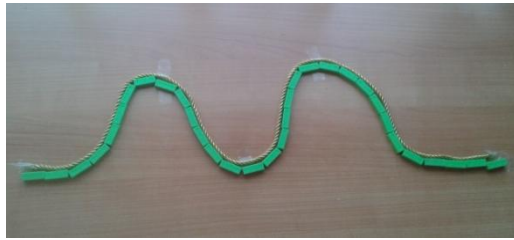
***Ejemplo de la actividad:***

Con regletas de 1 cm:





Con regletas de 3 cm:



Con regletas de 5 cm:



Con regletas de 7 cm:



### TABLA DE NÚMERO DE REGLETAS

	<b>1 cm</b>	<b>3 cm</b>	<b>5 cm</b>	<b>7 cm</b>
<b>1</b>	100	33	20	14
<b>2</b>	97	32	19	13
<b>3</b>	94	31	18	12

### TABLA DE MEDIDA APROXIMADA

	<b>1 cm</b>	<b>3 cm</b>	<b>5 cm</b>	<b>7 cm</b>
<b>1</b>	100 cm	99 cm	100 cm	98 cm
<b>2</b>	97 cm	96 cm	95 cm	91 cm
<b>3</b>	94 cm	93 cm	90 cm	84 cm

### **ACTIVIDAD N° 2**

La segunda actividad, estrechamente conectada con la anterior, abandona la cuerda y las regletas como material inicial, y se basa en la expresión gráfica mediante el uso de lápiz y papel. Tendrá como *objetivo* analizar distintas curvas y observar las aproximaciones que se pueden realizar de sus longitudes, utilizando en este caso líneas poligonales trazadas con la regla, con segmento base de distintas longitudes.

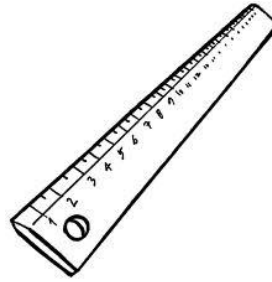
Para realizar esta actividad el *material didáctico* que vamos a utilizar será el siguiente:

- La hoja de ejercicios.
- Regla.
- Pinturas de colores.
- Bolígrafo o lapicero.

Los *conceptos teóricos* que deberán saber o tener en cuenta a la hora de realizar esta actividad son parecidos a los de la actividad anterior, exactamente, los conceptos son:

- Longitud.
- Diferentes líneas.
- Operaciones básicas.

- **REGLA:** Una regla es un instrumento que se utiliza para medir dimensiones. Aunque generalmente las reglas tienen como unidad de medida el metro, en el entorno escolar es más frecuente el cm.



Para realizar la actividad utilizaremos una sesión de clase. El **desarrollo** que utilizaremos para completar el ejercicio será el siguiente:

Antes de empezar con la actividad, el profesor explicará y hará una pequeña introducción para explicar el proceso de la sesión. Insistirá en la imposibilidad de medir una curva sobre el papel usando la regla, y por tanto la necesidad de aproximar dicha curva por otra más sencilla que sí que se pueda medir con la regla, en nuestro caso, una línea poligonal que no es más que la concatenación de varios segmentos, que tomaremos todos iguales. Y, por último, les comentará cuál es el objetivo de la actividad. Es decir, les explicará que el objetivo no es saber medir las diferentes rectas y curvas utilizando la regla, sino que deberán analizar posteriormente por qué salen diferentes resultados y cuál es la conclusión que sacan al realizar dicha actividad.

Después de realizar la introducción a la actividad, los alumnos y alumnas del aula se pondrán a trabajar individualmente con las actividades expuestas en la hoja de ejercicios, que serán las siguientes:

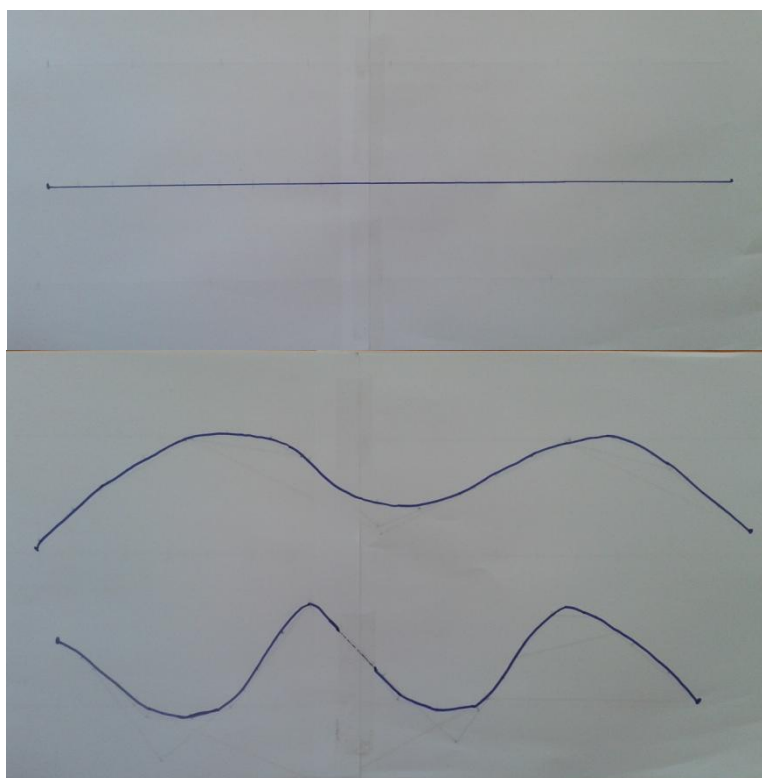
### **HOJA DE EJERCICIOS**

Nombre y apellidos: \_\_\_\_\_.

Fecha: \_\_\_\_\_.

- Usando líneas poligonales con segmento base con tres medidas distintas, mide utilizando la regla las diferentes curvas que están expuestas, y toma las anotaciones oportunas en cada caso:

- ¿Qué longitudes tienen las siguientes líneas?



- Rellena la tabla con los resultados obtenidos:

	<b>2 cm</b>	<b>5 cm</b>	<b>10 cm</b>
<b>1</b>			
<b>2</b>			
<b>3</b>			

- Responde las siguientes preguntas:

El resultado que has obtenido en la línea recta ¿ha sido siempre el mismo? Pon algún ejemplo en el que no sea el mismo resultado.

---



---



---

¿Por qué la aproximación de las líneas curvas ofrece diferentes resultados al hallar las medidas con la regla?

---

---

---

¿Qué conclusión obtienes con esta actividad?

---

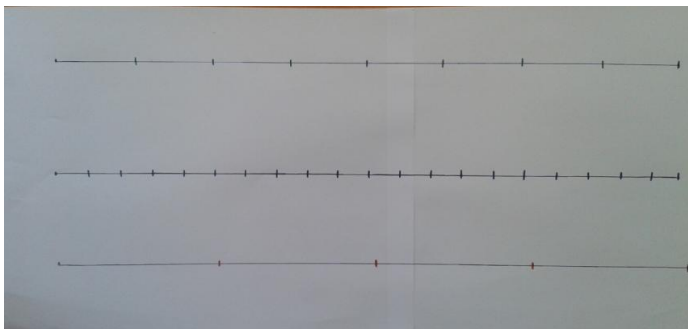
---

---

Después de que todo el alumnado haya terminado las actividades, con la ayuda del profesor realizarán la corrección y *evaluación* oportuna. En nuestro caso, harán mayor hincapié en las conclusiones que han sacado al responder las preguntas expuestas anteriormente. Y para concluir con el ejercicio, el profesor dará las explicaciones que vea necesarias para que el alumnado obtenga un mejor aprendizaje sobre las aproximaciones de longitudes.

***Ejemplo de la actividad:***

Línea recta dibujado por separado:



Líneas curvas:

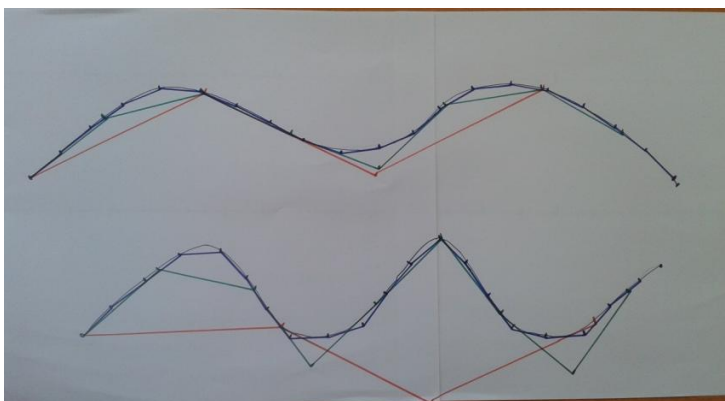


Tabla de resultados:

	<b>2 cm</b>	<b>5 cm</b>	<b>10 cm</b>
<b>1</b>	20 segmentos	8 segmentos	4 segmentos
<b>2</b>	< 19 segmentos	< 7 segmentos	< 3 segmentos
<b>3</b>	< 19 segmentos	< 8 segmentos	< 3 segmentos

## ❖ ACTIVIDADES DE APROXIMACIÓN DE ÁREAS

### ACTIVIDAD N°1

La primera actividad sobre la aproximación de áreas tiene como *objetivo* jugar con diferentes mecanos para observar e identificar las diferentes áreas que se pueden hallar con ellos, desde el área más grande hasta la más pequeña. En nuestro caso, consistirá en jugar comparando un cuadrado y los rombos de distintos tamaños que se obtienen con el mismo mecano; y el rectángulo y los distintos romboides que se obtienen con el mismo mecano.

El *material didáctico* que necesitarán para realizar esta sesión es el siguiente:

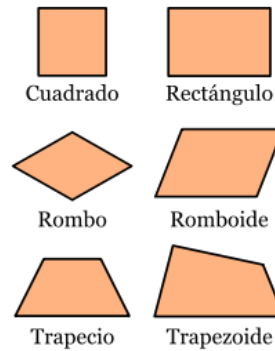
- Mecanos.
- Hoja de actividades.
- Bolígrafo o lapicero.

Los *conceptos teóricos* que deberán saber o tener en cuenta a la hora de realizar esta actividad serán los siguientes:

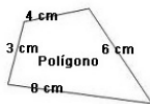
- ÁREA: Espacio de tierra comprendido entre ciertos límites, es decir, el tamaño de una superficie. Para medir el área utilizamos unidades cuadradas.

- CLASIFICACIÓN DE CUADRILÁTEROS: Un cuadrilátero es un polígono que tiene cuatro lados. Los cuadriláteros pueden tener distintas formas, pero todos ellos tienen cuatro vértices y dos diagonales, y la suma de sus ángulos internos siempre da como resultado  $360^\circ$ .

### Cuadriláteros



- MECANO: Un juego de construcción, consistente en piezas de diverso tamaño y color construidas en diferentes materiales con agujeros en sus extremos, para sujetarlas a otras piezas por medio de tornillos.
- PERÍMETRO: El perímetro de un polígono es la suma de las longitudes de sus lados.



$$P = 4 + 6 + 8 + 3 = 21 \text{ cm}$$

El **desarrollo** que deberán realizar durante esta actividad será el siguiente:

Antes de empezar con la actividad el profesor hará una introducción sobre los conceptos relacionados con el área, además de explicar el objetivo y el desarrollo de la actividad que deberán realizar los niños y niñas en el aula de Educación primaria.

La actividad que deben realizar empezará con una serie de preguntas para que puedan pensar e indagar en ellas, y así el profesor observará lo que cada uno de ellos piensa antes de realizar el ejercicio. Después, deberán jugar con el área de los mecanos y realizar los dibujos correspondientes en las tablas que encontrarán en la hoja de actividades. Para rellenar las tablas deberán jugar con mecanos con la figura de cuadrados y rombos, y después modificar el mecano para jugar con rectángulos y paralelogramos. Y, por último, deberán analizar y comparar el ejercicio realizado para responder a las últimas preguntas y poder sacar una conclusión de todo ello.

La hoja de actividades que utilizarán los niños y niñas en la primera sesión sobre la aproximación del área es la siguiente:

## HOJA DE ACTIVIDADES

Nombre y apellidos: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

- Responde las siguientes preguntas antes de empezar a jugar con los mecanos:

Todas las figuras que puedes construir moviendo un mecano concreto, ¿tienen el mismo perímetro?

---

---

---

Moviendo los mecanos, ¿podrás conseguir distintos tamaños de áreas?

---

---

---

¿Cómo puedes conseguir distintos tamaños del área utilizando el mismo mecano? ¿Por qué?

---

---

---

- Rellena y dibuja las siguientes tablas:

Tablas de cuadrado y rombos:

Área más grande	Área mediana	Área más pequeña
(Dibujo)	(Dibujo)	(Dibujo)



Tabla de rectángulo y paralelogramos

Área más grande	Área mediana	Área más pequeña
(Dibujo)	(Dibujo)	(Dibujo)

¿Todas las figuras planas que has dibujado tienen la misma área? ¿Por qué?

---

---

---

¿Qué conclusión sacas comparando el área más grande y la más pequeña de cada tabla?

---

---

---

La **evaluación** que utilizará el profesor se basará en la corrección que haga de la hoja de actividades, además de la observación que realice cuando el alumnado esté jugando con los mecanos. Para corregir la hoja de actividades hará hincapié en las respuestas que hayan realizado antes y después de jugar con el mecano, para observar las mejoras y el aprendizaje que hayan obtenido en esa sesión.

**Ejemplo de la actividad:**

Tabla de cuadrados y rombos:



Área más grande



Área mediana



Área más pequeña

Tabla de rectángulo y paralelogramos:



Área más grande



Área mediana



Área más pequeña

**ACTIVIDAD N°2**

El **objetivo** de la segunda actividad sobre la aproximación de áreas es aproximar y comparar el área de dos figuras planas. En este caso, consistirá en hallar el área de una figura conocida, para después cambiar los lados de la figura formando una nueva, manteniendo la misma medida del perímetro. Esta nueva figura tendrá los lados curvos y deberán hallar una aproximación de su área. Por lo que el objetivo consistirá en comparar el área de las dos figuras teniendo la misma medida de perímetro.

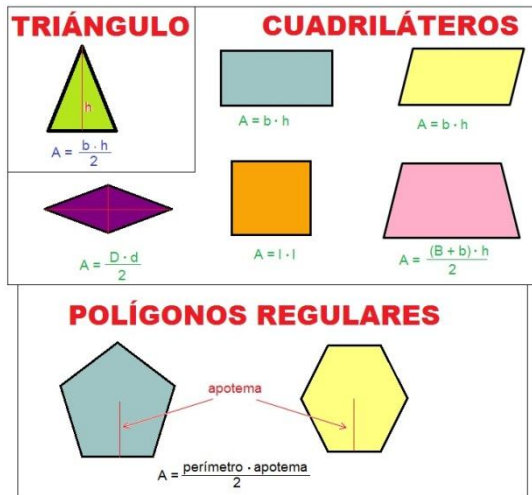
El **material didáctico** que necesitan para realizar esta actividad es la siguiente:

- Tiras de lana (100 cm)
- Triángulos rectángulos todos iguales.
- Celo.
- Hoja de ejercicios.

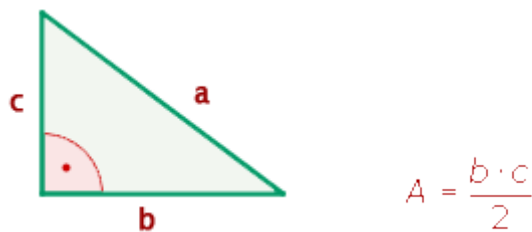
- Bolígrafo o lapicero.

Los *conceptos teóricos* que deberán saber o tener en cuenta a la hora de realizar esta actividad serán los siguientes, además de los que hemos desarrollado en la actividad anterior.

○ FÓRMULAS DE ÁREAS:



- ÁREA DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS: Un triángulo rectángulo tiene un ángulo recto y dos agudos. La hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto, y es el lado mayor del triángulo. Los catetos son los lados opuestos a los ángulos agudos, y son los lados menores del triángulo. El área de un triángulo rectángulo es igual al producto de los catetos partido por 2.



El *desarrollo* de este ejercicio será el siguiente:

Al principio de la sesión el profesor explicará a los alumnos cuál es el objetivo de la actividad, es decir, les dirá que deberán analizar y comparar las áreas de algunas figuras planas. Para continuar con la clase, les repartirá a cada uno de ellos un trozo de lana, y ese será el principal material que van a utilizar.

Antes de empezar con la hoja de ejercicios les explicará cuál es el procedimiento a seguir para poder aclarar entre todos las dudas que puedan surgir. Primero, deberán construir con el trozo de lana una figura de la cual conozcan la fórmula de su área, por ejemplo, un cuadrado, un triángulo o un círculo. Con esta parte de la actividad trabajarán los contenidos que anteriormente hemos citado del Bocyl, que son los siguientes:

- Composición y descomposición de polígonos.
- Estimación y cálculo del área de polígonos elementales, como cuadrados, rectángulos o triángulos rectángulos.

Después, deberán hacer otra figura distinta con el mismo trozo de lana y estará compuesta por diferentes curvas. A continuación deberán hallar una aproximación de su área utilizando los triángulos rectángulos que se les han facilitado. Estos los usarán como unidad de medida para estimar el área de la segunda figura construida. El área de la figura la estimarán contando cuántos triángulos caben dentro de la figura y multiplicando por el área de cada triángulo unidad.

Y, por último, deberán comparar los resultados que hayan obtenido y sacar las conclusiones que sean oportunas. Todo ello lo anotarán en la siguiente hoja de ejercicios:

### **HOJA DE EJERCICIOS**

Nombre y apellidos: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

- Responde la siguiente pregunta antes de construir las dos figuras planas:

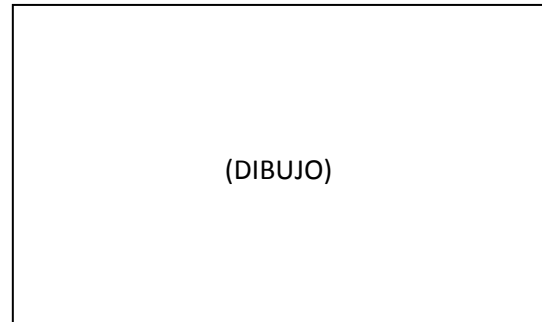
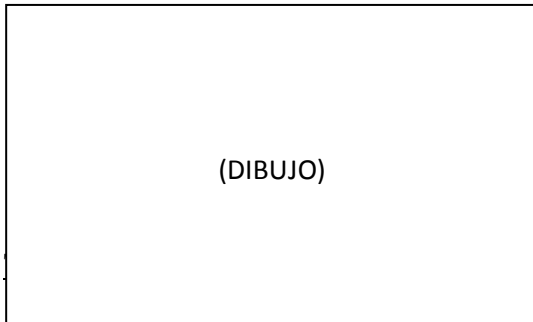
¿Crees que obtendrás la misma área en las dos figuras? ¿Por qué?

---

---

---

- Con el trozo de lana construye dos figuras y anota el área de cada una de ellas:
  - Realiza una figura plana con el trozo de lana, la cual tenga un área conocida:
  - Realiza otra figura con el mismo trozo de lana que tenga curvas y calcula su área aproximada:



<b>Figura plana con área conocida</b>	<b>Figura plana con borde curvo</b>

- Responde las siguientes preguntas:

¿Has obtenido el mismo resultado en las dos figuras? ¿Por qué?

---



---



---

Para obtener el mismo valor del área, ¿qué habría que hacer?

---



---



---

¿Qué conclusión puedes sacar de esta actividad?

---

---

---

**La evaluación** que realizará el profesor será mediante el análisis y las conclusiones que saquen cada uno de los niños y niñas después de realizar el ejercicio. Una vez corregidas todas las actividades entre todos comentarán los resultados y conclusiones que han realizado, y el profesor explicará lo que estime oportuno relacionado con la actividad.

**Ejemplo de la actividad:**

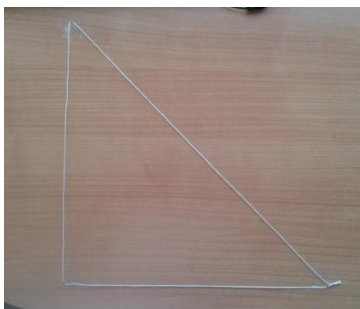


Figura plana conocida:  
Triángulo rectángulo.



Figura plana con  
área desconocida.



Figura plana con  
área completada.

<b>Figura plana con área conocida</b>	<b>Figura plana con borde curvo</b>
450 cm <sup>2</sup>	340 cm <sup>2</sup>

### ACTIVIDAD N°3

El *objetivo* de esta actividad es trabajar con distintas figuras planas delimitadas por curvas para poder hallar una aproximación de su área. Además, se pretende ver cómo mejoran las aproximaciones al tomar como unidad de medida un objeto más pequeño. Para realizar este ejercicio necesitarán el siguiente *material didáctico*:

- Cartulinas con diferentes formas de figuras planas.
- Triángulos rectángulos de tres tamaños distintos (unidades de medida).
- Ficha de datos.
- Bolígrafo o lapicero.

Los *conceptos teóricos* que deberán saber o tener en cuenta a la hora de realizar esta actividad serán los siguientes, además de el área del triángulo que encontramos en la actividad anterior:

- OPERACIONES BÁSICAS: Las operaciones básicas que deberán utilizar en esta actividad, serán la suma y la multiplicación.
- POLÍGONO INSCRITO: Un polígono que se halla dentro (en la región interior) de otra figura geométrica, y tiene sus vértices sobre el borde de ésta. Y, por lo contrario, el polígono circunscrito contiene en su interior a otra figura.

Para trabajar con este ejercicio deberán seguir el siguiente *desarrollo*:

El profesor dará a los alumnos el material didáctico necesario y les explicará de qué trata la actividad. En nuestro caso, les comentará que deben hallar el área aproximada de las figuras planas que le haya tocado a cada uno. Para ello les explicará que deberán utilizar los tres tamaños diferentes de triángulos rectángulos que les ha dado como material de medida para hallar el área. Es decir, los patrones de triángulos que tienen como material didáctico se usarán para poder dibujar encima de las figuras planas. El procedimiento que deberán seguir será el siguiente: primero deberán rellenar la figura plana, en la medida de lo posible, dibujando en su área los triángulos de mayor medida, después continuar con los triángulos medianos y terminar con los más pequeños. Para realizar este proceso deberán tener en cuenta que los triángulos no pueden salir de la figura plana que les ha dado el profesor.

Después de haber realizado la primera parte de la actividad, deberán contar cuántos triángulos entran en la figura plana y calcular así cuál será la aproximación del área. Para calcularlo deberán saber el área exacta de cada triángulo utilizando la fórmula correspondiente. Por lo que con esta actividad trabajarán el siguiente contenido establecido en el Bocyl: “cálculo del área de polígonos elementales”.

Mientras van realizando el procedimiento que hemos explicado deberán ir anotando los resultados en la siguiente hoja de datos:

### HOJA DE DATOS

Nombre y apellidos: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

- Responde las siguiente pregunta antes de empezar a jugar con los triángulos rectángulos:

¿Crees que con los tres tamaños de triángulos rectángulos vas a obtener el mismo resultado?

---

---

---

- Rellena la siguiente tabla con los resultados que obtengas:

	<b>Área inscrita</b>
<b>Triángulos pequeños</b>	
<b>Triángulos medianos</b>	
<b>Triángulos grandes</b>	



- Responde las siguientes preguntas:

¿Qué triángulos rectángulos utilizarías para hallar la aproximación más exacta posible?

¿Por qué?

---

---

---

¿Qué crees que pasaría si utilizáramos triángulos rectángulos con el área más pequeña?

---

---

---

¿Qué otro método utilizarías para hallar el área de la figura plana?

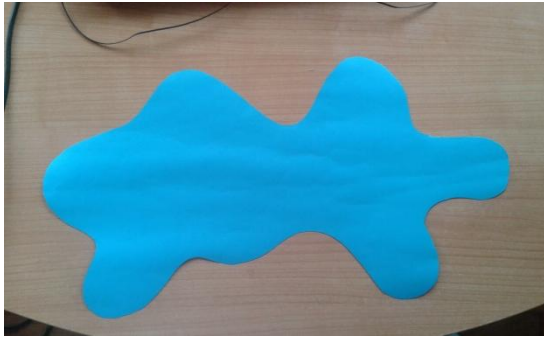
---

---

---

El profesor realizará una **evaluación** mediante la observación cuando estén completando el ejercicio, y posteriormente a la hora de corregir la ficha de datos que hayan completado los niños y niñas del aula. Por tanto, por un lado, mediante la observación podrá comprobar si el alumnado realiza correctamente el método para llegar a una aproximación del área de la figura plana. Y, por otro lado, mediante la corrección de la ficha observará si el alumnado ha entendido correctamente cuál es la función de los triángulos rectángulos, ya que deberán especificar cuál sería el triángulo rectángulo más apropiado en ese caso.

*Ejemplo de la actividad:*



Modelo de la figura plana



Figura plana con triángulos  
rectángulos pequeños.

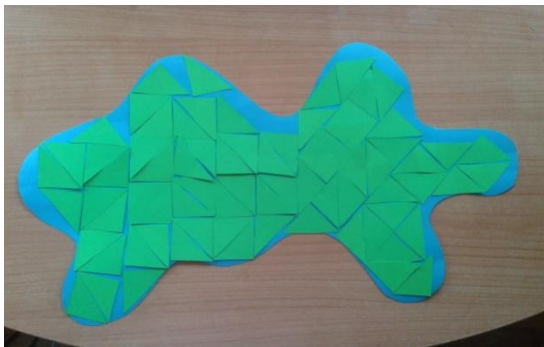


Figura plana con triángulos  
rectángulos medianos

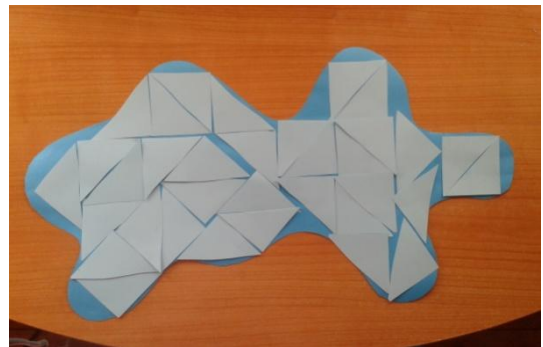


Figura plana con triángulos  
rectángulos grandes

TABLA DE ÁREAS:

	<b>Área inscrita</b>
<b>Triángulos pequeños</b>	690 cm <sup>2</sup>
<b>Triángulos medianos</b>	592 cm <sup>2</sup>
<b>Triángulos grandes</b>	544 cm <sup>2</sup>

# CONCLUSIÓN

---

Durante el desarrollo de este trabajo, hemos analizado y aprendido la importancia que tienen la estimación y la aproximación en nuestra vida cotidiana. Empezamos observando cómo han ido trabajando los matemáticos, y concretamente Arquímedes, en la aproximación de longitudes y áreas para lograr dar con una fórmula o método adecuado. Y, después, hemos adaptado sus métodos para la creación de actividades de aula, para implementar de forma práctica la importancia que tiene el trabajar y practicar estos conceptos en la Educación primaria.

La mayoría de las veces, en la vida corriente, no se precisa conocer de manera exacta la medida de un objeto, basta con dar aproximaciones. Pero si medir es una técnica que requiere un adiestramiento a través de la práctica, aproximar es igualmente complejo y no es algo que se pueda dejarse al margen de las tareas de la escuela.

Es de destacar el pequeño número de estudios realizados sobre el aprendizaje y la enseñanza de la estimación y la escasa experiencia en la enseñanza de este tema. A pesar de ello, en casi todos los programas oficiales para la enseñanza se incluyen recomendaciones sobre la necesidad de que los niños y niñas sean capaces de realizar estimaciones. Sin embargo este tipo de actividades no suelen desarrollarse en las aulas por alguna de las siguientes razones:

- Los adultos y los profesores no tenemos desarrollada esta habilidad.
- No se dispone de orientaciones lo suficientemente precisas sobre cómo hacerlo.
- No se tiene en cuenta el tiempo preciso para desarrollarlas.
- Es difícil poner a prueba estas habilidades.

Además, como bien dice Hildreth (1983), aproximar la longitud y el área con cierto grado de exactitud, es una compleja labor que involucra conceptos y habilidades como:

- Una comprensión de la longitud o área que se va a medir.
- La comprensión del concepto de unidad.
- La imagen mental de la unidad que se va a usar en la tarea de estimación.
- La habilidad de comparar objetos.

- La habilidad de seleccionar y usar estrategias apropiadas para realizar estimaciones.

Según la opinión de Bright (1976), los principales motivos que hacen incluir los ejercicios de estimación y aproximación en el currículum de matemáticas son: por una parte, ayudar a los estudiantes a desarrollar un marco mental de referencia para los tamaños de unidades de medida, relacionando unas con otros y con objetos reales. Y, por otra parte, proporcionar a los estudiantes actividades que podrían ilustrar propiedades básicas de medida.

Por lo que hay dos momentos especialmente apropiados para practicar la estimación: antes de haber medido con unidades para provocar comparaciones directas, y después de haber usado el sistema de unidades para poder dar medidas aproximadas sin utilizar instrumentos de medida en la vida cotidiana.

En conclusión, lo recomendable es practicar la estimación y la aproximación con cada una de las unidades que se van trabajando con el alumnado, lo que produce no sólo los beneficios de la propia estimación, sino también el aprendizaje de qué unidades usar en la medición.

Parece, también, adecuado que los alumnos y las alumnas practiquen los distintos métodos, a efectos de que en cada caso pueda escoger la estrategia que más se adapta a la situación concreta.

Y, por último, la estimación y la aproximación pueden favorecerse también a través de las técnicas de cálculo mental que deben practicarse en la escuela desde la Educación Infantil, ya que un buen redondeo ayuda a dar una buena estimación.

Para concluir, hacemos una valoración muy positiva del alcance potencial del trabajo en el contexto en el que ha de desarrollarse: el aula de tercer ciclo de Educación primaria. Hemos cumplido satisfactoriamente con el objetivo prioritario de desarrollar una estrategia didáctica que permita utilizar las ideas del gran pensador Arquímedes, explicadas en detalle en la fundamentación teórica del trabajo. Dicha estrategia se ha plasmado en la confección de una serie de actividades de aula que permitirán al alumnado familiarizarse con el tema de la aproximación de longitudes y áreas, de una

forma sencilla (empiezan jugando con cuerdas y regletas) a la par que instructiva (las conclusiones de las actividades tienen cierta profundidad).

## BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

---

- Babini, J.(1948). *Arquímedes*. Buenos Aires: Espasa-Calpe
- Babini, J. (1966). *El método de Arquímedes*. Buenos Aires: Eudeba.
- N.C.T.M (1986). *Yearbook, estimation and metal computation*. USA.
- Bell, E.(1985). *Historia de las matemáticas*. Mexico: Fondo de la cultura económica.
- Boletín Oficial de Castilla y León. Decreto 40/2007, de 3 de mayo, por el que se establece el Currículo de la Educación Primaria (Nº 89). Páginas: 9889 a 9896.
- Chamorro, M. y Miguel, J. (1988). *El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales*. Madrid: Síntesis.
- Chamorro, M. (2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Madrid: Pearson.
- Del Olmo, M., Moreno, M. y Gil, F. (1989). *Superficie y volumen ¿algo más que el trabajo con fórmulas?* Madrid: Síntesis.
- Gonzales, P. (2008). *Arquímedes y los orígenes del cálculo integral* (1ª ed.). Tres cantos: Nivola.
- Grado de Educación Primaria. Real Decreto 861/2010, de 2 de julio. Páginas: 24, 25, 26, 32 y 33.
- Hildreth, D.J. (1983). *The use of Strategies in Estimating Measurement*.
- Netz, R. y Noel, W.(2007). *El código de Arquímedes*. Madrid: Temas de hoy.
- Torija, R. (1999). *Arquímedes. Alrededor del círculo* (1ª ed.). Madrid: Nivola.

# APÉNDICE

---

En este apartado vamos a desarrollar los objetivos, contenidos y criterios de evaluación que recoge el Boletín Oficial de Castilla y León (Decreto 40/2007, de 3 de mayo, por el que se establece el Currículo de la Educación Primaria), los cuales están relacionados con nuestro tema sobre aproximación de longitudes y áreas en Educación primaria.

## OBJETIVOS:

La enseñanza de las matemáticas en esta etapa, y concretamente en nuestro tema sobre la aproximación de longitudes y áreas, tendrá como objetivo el desarrollo de las siguientes capacidades (Bocyl, Decreto 40/2007, de 3 de mayo):

Los objetivos más específicos relacionados al tema son los siguientes:

- Elaborar y utilizar instrumentos y estrategias personales de cálculo mental y medida, así como procedimientos de orientación espacial, en contextos de resolución de problemas, decidiendo, en cada caso, las ventajas de su uso y valorando la coherencia de los resultados.
- Identificar formas geométricas del entorno natural y cultural, utilizando el conocimiento de sus elementos y propiedades para describir la realidad y desarrollar nuevas posibilidades de acción.
- Plantear y resolver problemas matemáticos utilizando los procedimientos adecuados de cálculo, medida, estimación y comprobación de resultados.

Los siguientes objetivos son más generales, pero también están relacionados y se trabajan en nuestro tema:

- Utilizar el conocimiento matemático para comprender, valorar y producir informaciones y mensajes sobre hechos y situaciones de la vida cotidiana y reconocer su carácter instrumental para otros campos de conocimiento.
- Conocer, valorar y adquirir seguridad en las propias habilidades matemáticas para afrontar situaciones diversas que permitan disfrutar de los aspectos creativos, estéticos o utilitarios, y confiar en sus posibilidades de uso.

- Utilizar el lenguaje propio del campo científico con precisión y, en particular, emplear adecuadamente el lenguaje matemático para identificar relaciones y conceptos aprendidos y para comprender y nombrar otros nuevos.

### **CONTENIDOS:**

Dentro del bloque 3 de contenidos matemáticos, Geometría, los contenidos que se trabajan están divididos en tres grandes grupos: la situación en el plano y en el espacio, distancias, ángulos y giros; formas planas y espaciales; y, regularidades y simetrías.

Los contenidos relacionados con el trabajo realizado por Arquímedes sobre la medida del círculo, y por tanto, los contenidos que vamos a utilizar en este caso, están incorporados en el grupo de formas planas y espaciales, a pesar de que también intervengan otros contenidos de otros bloques.

En el segundo ciclo de Educación primaria empiezan a trabajar los contenidos relacionados con los polígonos, la circunferencia y el concepto de área. Concretamente los contenidos son los siguientes:

- Clasificación de polígonos. Lados y vértices. Composición y descomposición de polígonos. Iniciación al concepto de área. Estimación y cálculo del área de cuadrados, rectángulos y triángulos rectángulos.
- La circunferencia y el círculo. Elementos básicos: centro, radio, diámetro, cuerda y arco.
- Identificación de figuras planas y espaciales en la vida cotidiana. Descripción de la forma de objetos utilizando el vocabulario geométrico básico.

Y en el tercer ciclo de Educación primaria se trabajan los contenidos relacionados con el área y longitudes de los círculos y de los polígonos con mayor profundización. Concretamente los contenidos son los siguientes:

- Cálculo del perímetro y el área de polígonos elementales.
- La circunferencia y el círculo. Elementos básicos: centro, radio, diámetro, cuerda, arco, tangente y sector circular. Fórmulas de la longitud de la circunferencia y del área del círculo.



## CRITERIOS DE EVALUACIÓN:

En este apartado vamos a analizar los criterios de evaluación que están establecidos en el Boletín Oficial de Castilla y León, los cuales se utilizan en el aula de Educación primaria. Empezaremos observando los criterios de evaluación del segundo ciclo de Educación primaria, ya que como he mencionado anteriormente los contenidos relacionados con nuestro tema empiezan a trabajarlos en este ciclo. Y continuaremos observando los criterios de evaluación del tercer ciclo de primaria, ya que están más estrechamente relacionados con el tema.

Los criterios de evaluación del segundo ciclo de Educación primaria son los siguientes:

- Identificar figuras planas y cuerpos geométricos, nombrando y reconociendo sus elementos básicos (lados, vértices, caras, aristas, ángulos, diagonales y ejes de simetría).
- Clasificar figuras planas y utilizar la cuadrícula para expresar la medida de la superficie de cuadrados, rectángulos y triángulos rectángulos.
- Utilizar las nociones básicas de movimientos geométricos, para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana y para valorar expresiones artísticas.
- Resolver problemas relacionados con el entorno que exijan cierta planificación y utilizar los contenidos básicos de geometría y estrategias de resolución.
- Utilizar un lenguaje correcto, con el vocabulario específico de las matemáticas, en la exposición de situaciones con contenido matemático y en la resolución de problemas.
- Resolver problemas de la vida cotidiana mediante una o dos operaciones aritméticas y comprobar que los resultados obtenidos son razonables.
- Asegurarse, mediante algún tipo de estimación, de que los resultados obtenidos en la resolución de problemas de la vida cotidiana son razonables y expresarlos con la aproximación adecuada.

Los criterios de evaluación de tercer ciclo de Educación primaria son los siguientes:

- Dibujar y construir figuras geométricas en diferentes soportes y con diferentes instrumentos.

- Descomponer un polígono cualquiera en el menor número de triángulos, cuadrados o rectángulos. Calcular el perímetro y el área de figuras planas, a partir de datos o midiendo sobre el papel o sobre el terreno.
- Conocer y utilizar las fórmulas de la longitud de la circunferencia y del área del círculo.
- En un contexto de resolución de problemas sencillos, anticipar una solución razonable y buscar los procedimientos matemáticos más adecuados para abordar el proceso de resolución. Valorar las diferentes estrategias a seguir y perseverar en la búsqueda de datos y soluciones precisas, tanto en la formulación como en la resolución de un problema. Expresar de forma ordenada y clara, oralmente y por escrito, el proceso seguido en la resolución de problemas.
- Conocer las estrategias de comprensión lectora en los mensajes transmitidos por diferentes textos.
- Utilizar un lenguaje correcto, con el vocabulario específico de las matemáticas, en la exposición de situaciones con contenido matemático y en la resolución de problemas.
- Cuidar y apreciar la presentación correcta de las diferentes tareas; respetar el trabajo realizado por los demás y participar en la resolución de problemas.
- Dibujar y construir figuras geométricas en distintos soportes y con diferentes instrumentos.