S 14

Salamanca

Investigación en Educación Matemática XVIII

Mª Teresa González Astudillo
Myriam Codes Valcarce
David Arnau Vera
Tomás Ortega del Rincón

SEIEM
Universidad de Salamanca
Facultad de Educación
IUFFyM
inee Instituto Nacional de Evaluación Educativa
EASD Zamora

Investigación en Educación Matemática

XVIII

VNIVERSIDAD
D SALAMANCA

Investigación en Educación Matemática

XVIII

Mª Teresa González, Myriam Codes, David Arnau, Tomás Ortega (Eds.)

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

Salamanca, 4, 5 y 6 de septiembre de 2014

Investigación en Educación Matemática XVIII

Edita

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, Campus de Cartuja s/n, 18071 Granada (España)
Mª Teresa González
Myriam Codes
David Arnau
Tomás Ortega

Cítese como:

M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.). (2014). *Investigación en Educación Matemática XVIII*. Salamanca: SEIEM.

Las comunicaciones aquí publicadas han sido sometidas a evaluación y selección por parte de investigadores miembros de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

***Diseño de la portada**:* Alberto Díez Almaraz

Depósito legal: S.289-2014
ISSN: 1888-0762
ISBN: 978-84-697-0819-4

ÍNDICE

COMUNICACIONES

PÓSTERES

PRESENTACIÓN

La Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) se reúne anualmente desde su creación siendo estas actas las correspondientes al XVIII Simposio celebrado los días 4, 5 y 6 de septiembre de 2014 en la Universidad de Salamanca. Esto supone la madurez de la sociedad, de los grupos de investigación que la conforman y de las líneas de investigación que se han desarrollado en su seno. Haciendo un recorrido rápido desde el primer simposio celebrado en la ciudad de Zamora, y también organizado por la Universidad de Salamanca, han sido muchas las ciudades visitadas, los organizadores que han puesto su cuerpo y alma para lograr un objetivo común, los investigadores, ponentes, alumnos de doctorado que han presentado sus avances de investigación y que han crecido al unísono con la sociedad.

A lo largo de estos dieciocho años hemos podido comprobar cómo las investigaciones realizadas en España sobre Educación Matemática han ido evolucionando al mismo tiempo que lo hacía la SEIEM y de forma paralela y/o en algunos casos complementaria a forma en que lo ha hecho la comunidad de investigadores en educación matemática en el ámbito internacional. De esta forma se ha ido configurando la personalidad e idiosincrasia de esta sociedad.

Esto también ha supuesto la incorporación de nuevos y jóvenes investigadores que han aprendido a investigar a medida que aumentaba su participación en los simposios anuales. Cada vez podemos ver cómo un mayor número de alumnos de doctorado y máster participa en las actividades de la sociedad. Así mismo un mayor número de investigadores portugueses e hispanoamericanos han ido estableciendo relaciones con grupos de investigación españoles lo que ha significado su incorporación al simposio bien en forma de ponencias invitadas o de comunicaciones conjuntas con investigadores españoles.

Al igual que en ocasiones anteriores, se ha organizado este simposio en diferentes actividades para lograr una participación amplia y variada. Así se han establecido dos seminarios con ponentes invitados, se han realizado tres sesiones con comunicaciones presentadas por diferentes investigadores y sujetas a un proceso de evaluación por pares, se ha realizado un trabajo conjunto de profesores que comparten una línea de investigación común en grupos de trabajo lo que implica la discusión de proyectos de investigación en proceso y por primera vez se incluyen en este acta los resúmenes correspondientes a los póster presentados. Finalmente y de forma excepcional, en estas actas se recoge el sentido homenaje realizado por la sociedad representada por su presidente al profesor de la Universidad de Salamanca, el Dr. Modesto Sierra Vázquez por su reciente jubilación.

El Seminario I titulado *Investigación en Didáctica del Análisis en contextos de aula* está coordinado por la profesora Mar Moreno de la Universidad de Lérida y cuenta con dos ponencias, una presentada por el profesor Francisco Javier Claros de la Universidad Carlos III de Madrid que junto con María Teresa Sánchez Compaña y Moisés Coriat Benarroch presentan un marco teórico para la enseñanza del concepto de límite, uno de los conceptos que más dificultades genera en los alumnos tanto de enseñanza secundaria como universitaria. La otra ponencia presentada por la profesora Gloria Sánchez-Matamoros de la Universidad de Sevilla aborda diferentes perspectivas de investigación sobre el concepto de derivada. Ambas ponencias han sido revisadas y replicadas respectivamente por la profesora Carmen Azcárate Giménez, profesora emérita de la Universidad Autónoma de Barcelona y la profesora Myriam Codes Valcarce de la Universidad Pontificia de Salamanca.

El Seminario II versa sobre *La investigación TEDS-M: Aportaciones a la Formación inicial del Maestro como futuro profesor de Matemáticas* y ha estado coordinado por el profesor Luís Rico Romero de la Universidad de Granada. Después de una presentación inicial del proyecto TEDS-M a cargo de Ismael Sanz del Instituto Nacional de Evaluación Educativa se han organizado dos ponencias. La primera centrada en los aspectos curriculares del plan de estudios de maestros que presentan los profesores María C. Cañadas y Luis Rico de la Universidad de Granada y la segunda sobre los resultados del estudio acerca del conocimiento del contenido matemático escolar y conocimiento didáctico del profesor de Primaria presentada por los profesores Pedro Gómez Guzmán y Araceli Gutiérrez Gutiérrez de la Universidad de Granada. Cada una de estas ponencias cuenta con un replicante, en el primer caso la réplica la ha realizado la profesora Nuria Planas de la Universidad Autónoma de Barcelona y la segunda ha corrido a cargo del profesor José Carrillo Yañez de la Universidad de Huelva.

Se incluyen en las actas un total de 46 comunicaciones ordenadas alfabéticamente de las 74 inicialmente presentadas. Las comunicaciones han sufrido un proceso de revisión por pares coordinado por el comité científico del simposio. Esto ha supuesto un arduo trabajo fundamentalmente de los miembros de dicho comité pero muy valioso por las aportaciones que han realizado a las comunicaciones de la gran cantidad de revisores que han sido necesarios para poder llevar a cabo esta labor. Entre las comunicaciones prácticamente se abordan todas las temáticas relacionadas con la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y de las líneas de investigación más actuales. Cabe destacar el numeroso grupo de aportaciones sobre el conocimiento y el desarrollo profesional, que viene siendo habitual en los últimos años, y las que están relacionadas de un modo u otro con el conocimiento estadístico y la probabilidad.

Por primera vez se incluyen en las actas los resúmenes de los posters presentados al simposio. De momento la participación en este tipo de actividad es muy reducida, prácticamente simbólica por la nula tradición existente hasta ahora. Esperemos que a partir de este momento haya más participantes que se animen a presentar sus trabajos en esta modalidad.

A través de estas líneas queremos manifestar nuestro agradecimiento a la confianza depositada en el comité local por los socios representados en la figura de su presidente el profesor Tomás Ortega del Rincón de la Universidad de Valladolid que nos ha apoyado, animado y ayudado continuamente. También queremos agradecer al comité científico por la gran labor realizada en la organización de los seminarios y en el proceso de evaluación de las comunicaciones, así como la ayuda prestada en los numerosos detalles que forman parte de la organización de un simposio. Ha sido fundamental la ayuda prestada por la Universidad de Salamanca que ha cedido unas magníficas instalaciones para dotar del marco adecuado a una reunión de esta categoría, al departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales por su apoyo al trabajo realizado por el comité local y su ayuda económica, a la Facultad de Educación por su colaboración en las gestiones realizadas, y al Instituto de Física Fundamental y Matemáticas de la Universidad de Salamanca y al Instituto Nacional de Evaluación Educativa por la generosa aportación realizada que ha permitido poder llevar a cabo este simposio. Un agradecimiento especial a la Escuela de Artes de Zamora que nos ha ayudado a seleccionar un cartel y un logo con el que nos identificáramos todos y al alumno que resultó ganador de este proceso de selección Alberto Díez, suyo es el mérito de ese diseño.

Como coordinadora del comité local quiero agradecer a todos sus miembros por la labor continuada que han realizado a lo largo del curso 2013-2014 y el apoyo constante que de ellos he recibido. Gracias por el entusiasmo, la alegría, la decisión, la generosidad, la ilusión y el buen hacer que me habéis regalado a lo largo de estos meses de trabajo conjunto.

María Teresa González Astudillo
Coordinadora del comité local

Seminario I

Investigación en Didáctica del Análisis en contextos de aula

Coordinador

M. Mar Moreno Moreno, Universidad de Lleida

Introducción seminario de investigación I: didáctica del Análisis Matemático en el contexto de aula

Ponentes

Francisco Javier Claros Mellado, Universidad Complutense de Madrid; **María Teresa Sánchez Compaña**, Universidad de Málaga; **Moisés Coriat Benarroch**, Universidad de Granada

Marco teórico y metodológico para el estudio del límite

Gloria Sánchez-Matamoros García, Universidad de Sevilla

Adoptando diferentes perspectivas de investigación sobre el concepto de derivada

Replicantes

Myriam Codes Valcarce, Universidad Pontificia de Salamanca

Réplica a "Marco teórico y metodológico para el estudio del límite"

Carmen Azcárate Giménez, Universitat Autònoma de Barcelona

Réplica a "Adoptando diferentes perspectivas de investigación sobre el concepto de derivada"

INTRODUCCIÓN SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN I: DIDÁCTICA DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO EN EL CONTEXTO DE AULA

M. Mar Moreno

Universidad de Lleida

La SEIEM ha dedicado varios seminarios a las investigaciones sobre Didáctica del Análisis, abordando cuestiones muy concretas, como en sus inicios, sobre el papel de las gráficas cartesianas en el estudio de las funciones (Lacasta, 1998) hasta otras de carácter más genérico y de revisión como la de Camacho (2011) en la que se ofrece una panorámica de las investigaciones en didáctica de las matemáticas en los niveles de bachillerato y universidad en los últimos 20 años, y se centra principalmente en trabajos relacionados con conceptos del Análisis Matemático.

En esta ocasión el seminario y posterior debate se centra en las investigaciones relacionadas con la didáctica del análisis en el contexto del aula. Aunque los trabajos son muy diferentes hemos intentado que cada ponente y los correspondientes replicantes, desde sus experiencias de investigación, fueran capaces de poner sobre la mesa aspectos críticos de estas investigaciones: ¿para hablar de investigación en el aula es imprescindible la intervención?, ¿cuáles son las dificultades de la implementación de secuencias didácticas?, ¿cuáles son las metodologías más adecuadas de recogida de datos?, ¿cuál es el papel del profesor y el del investigador?, etc.

El primer trabajo que se presenta es el de Claros, Sánchez y Coriat sobre el estudio de límites finitos, tanto de sucesiones como de una función en un punto. Se trata de investigaciones realizadas con alumnos de bachillerato (16-20 años) en tres institutos de Madrid. En la ponencia que presentan, los autores han decidido resaltar dos aspectos que, para ellos resultan claves en su trabajo: la elección del/de los marcos teóricos, y las decisiones sobre el marco metodológico. El enfoque que propugna el trabajo es el de considerar la enseñanza del límite a partir de los fenómenos organizados por las definiciones, superando las limitaciones de las propuestas didácticas de investigaciones ya existentes.

El trabajo de Sánchez-Matamoros versa sobre el aprendizaje del concepto de derivada de los futuros profesores de matemáticas de educación secundaria, en términos de lo que se considera el conocimiento adecuado para la enseñanza de dicho concepto en un contexto de bachillerato. El contexto de la formación de profesores ha generado una línea de investigación centrada en cómo los profesores en formación aprenden los conocimientos matemáticos y cómo son capaces de utilizarlos en las situaciones de enseñanza, en definitiva, cómo se desarrolla "una mirada profesional" (profesional noticing). Desde nuestro punto de vista, un elemento clave de esta investigación radica en el uso de resultados de otras investigaciones sobre la comprensión del concepto de derivada para diseñar tareas profesionales, que son usadas con un doble valor: aprendizaje de los profesores en formación y como instrumento de recogida de datos en la investigación en marcha.

En las réplicas contamos con las reflexiones de las doctoras Codes y Azcárate. La doctora Codes replica la ponencia de Claros et al., y siguiendo la estructura de la ponencia, reflexiona sobre los tres pilares teóricos que estructuran dicho trabajo: la fenomenología del concepto límite finito, los sistemas de representación y el pensamiento matemático avanzado. Asimismo, discute y reflexiona sobre las connotaciones e implicaciones de las expresiones "investigación en el aula" e "investigación para el aula", aportando elementos muy interesantes para el debate.

En la réplica de la doctora Azcárate hace una retrospectiva de la trayectoria investigadora de la ponente desde los primeros trabajos sobre el estudio de la derivada como objeto de aprendizaje con

Moreno, M. M. (2014). Introducción seminario de investigación I: Didáctica del Análisis Matemático en el contexto de aula. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 17-18). Salamanca: SEIEM.

alumnos de bachillerato y universidad, y recientemente, la deriva como objeto de enseñanza y el diseño de tareas en programas de formación de futuros profesores de secundaria. El otro aspecto que se resalta en la réplica es el de las aportaciones de los estudios sobre la derivada al marco teórico APOE, y en particular, la aplicación al contexto de la formación de profesores de secundaria y bachillerato.

Deseamos que el seminario cumpla con las expectativas generadas por los asistentes, suscite un rico debate sobre las investigaciones en didáctica del Análisis Matemático en el contexto del aula y surjan ideas que nos ayuden a continuar profundizando en diferentes aspectos de los temas abordados en este seminario.

MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO PARA EL ESTUDIO DEL LÍMITE

Theoretical and methodological framework for the study of the limit

Francisco Javier Claros[a], María Teresa Sánchez[b], Moisés Coriat[c]

[a]Universidad Complutense de Madrid, [b]Universidad de Málaga, [c]Universidad de Granada

Resumen

Nuestras investigaciones dan cabida, con los mismos métodos, a diferentes nociones del límite, como límite finito de una sucesión o límite finito de una función en un punto. Consideramos tres elementos relacionados: fenomenología, sistemas de representación y pensamiento matemático avanzado. En la primera parte lo explicamos y presentamos ideas de otros marcos teóricos. Hemos usado las mismas herramientas metodológicas para descubrir y estudiar los fenómenos organizados por tres casos de límite finito y para reconocer esos fenómenos en libros de texto. Además, hemos desarrollado instrumentos para mostrar los fenómenos que emplean alumnos y profesores. En la segunda parte describimos los métodos usados para extraer información de libros de texto y alumnos.

Palabras clave: *marco teórico, límite, fenómenos, libros de texto y alumnos.*

Abstract

Our research covers, with the same methods, several notions of limits, as the finite limit of a sequence or the finite limit of a function in a point. We consider three related elements: phenomenology, representation systems, and advanced mathematical thinking. In the first part we explain this and we also present ideas from other theoretical frameworks. We have been using the same methodological tools to uncover and study phenomena organized by three cases of finite limit and to recognize these phenomena in textbooks. Besides this we have developed tools to show those phenomena used by students and teachers. In the second part we describe the methods used to extract information from textbooks and students.

Keywords: *theoretical framework, limit, phenomena, textbooks and students*

PRIMERA PARTE: MARCOS TEÓRICOS

Diferentes perspectivas

Nuestra investigación se apoya en la fenomenología, los sistemas de representación y el pensamiento matemático avanzado. Hablamos de fenomenología en el sentido de Freudenthal (1983); establecemos fenómenos que son organizados por una definición de límite de una sucesión y de una función; de momento trabajamos el límite finito. La descripción detallada de estos fenómenos no puede hacerse sin usar algún sistema de representación y usamos esta expresión en el sentido de Janvier (1987). Nuestro estudio del límite delimita, de un modo que somos capaces de precisar, entre pensamiento matemático elemental (PME) y pensamiento matemático avanzado (PMA), en las caracterizaciones que describen Claros (2010) y Sánchez (2012).

Los detalles de todo lo anterior pueden verse en Claros, Sánchez y Coriat (2006) y Claros, Sánchez y Coriat (2013)

En estas investigaciones, además, se tienen en cuenta aportaciones y opiniones de los usuarios de la comunidad educativa sin entrar aún en la interacción educativa. El desarrollo de actividades para los alumnos y de orientaciones para los profesores también está entre nuestros objetivos; hasta el

Claros, J., Sánchez, M. T., Coriat, M. (2014). Marco teórico y metodológico para el estudio del límite. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 19-32). Salamanca: SEIEM.

momento, la parte principal de nuestra investigación corresponde, esencialmente, a la fenomenología del análisis y no a la fenomenología didáctica de éste[1]

En la enseñanza-aprendizaje del análisis se vienen usando, hasta donde conocemos, el PMA, únicamente (Plaza, Ruiz y Rico, 2012) o la teoría APOS (Aldana y González Astudillo, 2010; Vargas, González Astudillo y Llinares, 2011; Badillo y Azcárate, 2011). De la amplia documentación mencionamos a Tall (1991), para la primera, y, sobre la segunda, el libro de Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktac, Roa, Triguero y Weller (2014), que seguiremos para referirnos a dicha teoría en la breve reseña que sigue. Sobre PMA véase más abajo.

El acrónimo APOS designa: Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas. Se presenta como teoría constructivista basada en trabajos de Piaget e introducida por Dubinsky en 1984. La teoría APOS pone el foco en los modelos que describirían la mente de un individuo cuando está intentando aprender conceptos matemáticos y en el uso de estos modelos para diseñar materiales para la instrucción o evaluar el éxito de un concepto o los errores en dicho concepto. Además, se ocupa de describir la construcción de estructuras mentales apelando a términos como interiorización, encapsulación, coordinación, inversión y desencapsulación y tematización. Estos términos van asentándose tras discusiones de los principales desarrolladores de la teoría. También se discutió la idea de transformar a Esquema un Objeto, el cual podría actuar como otro Esquema (estas ideas fueron citadas por Dubinsky a principios de los años ochenta). Por otra parte, las diferencias entre Esquema y concepto imagen fueron ilustradas por Vinner (1991) y Dreyfus (1990)

La descomposición genética constituirá un posible punto de conexión con nuestra investigación cuando ésta la orientemos definitivamente hacia la enseñanza-aprendizaje.

De hecho, este camino lo hemos iniciado a través de una secuencia didáctica sobre la enseñanza del límite finito de una sucesión (libro homenaje a Alfonso Ortiz, pendiente de publicación) que comparamos con la descomposición genética en 6 pasos propuesta por Cottrill (1996), ver tabla 1.

Algunos estudios que usan la teoría APOS parecen relacionados con la fenomenología en el sentido de Freudenthal, aunque los autores correspondientes se refieren a categorías. Un ejemplo es el estudio de Dubinsky sobre la composición de funciones reseñado por Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktac, Roa, Triguero y Weller (2014) del libro “APOS Theory” (p. 23). Si f=goh, Dubinsky explica con detalle las diferencias de actuación relacionadas con la búsqueda de una de estas tres funciones, dadas las otras dos; el autor describe y puntualiza sobre las diferentes actuaciones. Sin contradecir su estudio, pensamos que tales actuaciones diferentes se explican también considerando que la definición de composición de funciones pone en juego fenómenos diferentes según que dirijamos nuestro interés a la determinación de f, de g o de h, conocidas las otras dos, pues se refiere a acciones matemáticas, no a acciones individuales.

Tabla 1: Comparación Cottril (1996) y Claros, Sánchez y Coriat (pendiente de publicación).

Descomposición genética[2] de Cottrill	Secuencia propuesta[3]
Paso 1. La acción de evaluar la función en varios puntos, cada vez más próximos a “a”. Paso 2. Interiorización de la acción del paso 1 a un único proceso en el cual f(x) se aproxima a L cuando x se aproxima a “a”.	Fenómenos de aproximación intuitiva Fenómeno a.s.i.c.[4]
Paso 3. Encapsulación del proceso del paso 2. El límite se convierte en un objeto en el cual las acciones pueden ser aplicadas.	Fenómenos de aproximación intuitiva Fenómeno a.s.i.

Paso 4. Reconstrucción del proceso del paso 2 en términos de intervalos e inecuaciones.	Fenómenos de retroalimentación Fenómeno i.v.s.
Paso 5. Aplicación de un esquema de cuantificación que conecte el proceso descrito en 4 con la definición formal	
Paso 6. Aplicación de la definición épsilon-delta	Aplicación de la definición épsilon-delta

Si se me permite la especulación, un conocedor de la teoría APOS ciertamente encontrará también préstamos a la fenomenología didáctica de las interacciones asociadas a las Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas.

Por ello aventuramos la necesidad de estudiar transferencias mutuas entre las fenomenologías mencionadas por Freudenthal y la teoría APOS. Ésta aporta nuevas organizaciones de los pasos a seguir en la enseñanza de un concepto, los cuales están graduados en orden de dificultad.

Nuestro enfoque propugna que, en la enseñanza del límite se consideren los fenómenos organizados por las respectivas definiciones, fenómenos que no habían sido tenidos en cuenta en las propuestas didácticas correspondientes. Esta es quizás nuestra concreta y original aportación: la introducción de fenómenos relevantes para la enseñanza del límite. Estos fenómenos son organizados por la definición y deben estar por tanto en los pasos para usar correctamente dicha definición, así como en el estudio de los errores que se observen.

Resaltamos la conveniencia de que se realicen estudios comparativos para delimitar correctamente los mutuos préstamos que se vengan dando entre nuestra investigación fenomenológica y la teoría APOS.

Fenomenología. Fenómenos organizados por una definición de límite

Presento aquí el marco teórico de nuestras investigaciones.

Freudenthal (1983) analizó los contenidos matemáticos con ayuda de un método que llamó *fenomenología*, porque parte de la contraposición establecida entre “fenómeno” y “noúmeno”. Un análisis fenomenológico de un concepto u objeto matemático es una descripción de su relación o relaciones con aquello para lo que es medio de organización.

Los conceptos matemáticos no caen fuera del campo de nuestra experiencia, ni están en un mundo distinto del mundo de los fenómenos que organizan. Un concepto matemático que es el medio de organización de un fenómeno (o más de uno), pasa a formar parte de un campo de fenómenos que son organizados por otro nuevo concepto matemático.

Hemos usado la fenomenología para describir los fenómenos organizados por la definición de límite finito de una sucesión, la definición de sucesión de Cauchy y la definición de límite finito de una función. Los fenómenos observados y organizados por las definiciones correspondientes se clasifican en fenómenos de aproximación intuitiva y de retroalimentación.

En el texto de las definiciones de límite que hemos estudiado encontramos dos ámbitos, uno intuitivo y otro formal y en cada ámbito hallamos un fenómeno, como explicamos a continuación siguiendo a Claros, Sánchez y Coriat (2006, 2007, 2009a, 2009b, 2013) y las tesis doctorales de Claros (2010) y Sánchez (2012). Ver Figura 1.

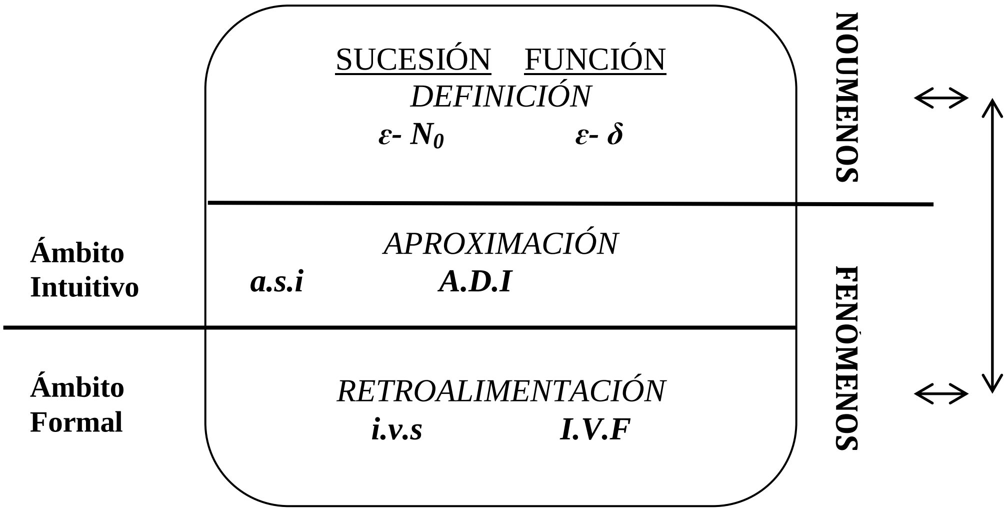


Figura 1. Fenómenos y ámbitos

- **El ámbito intuitivo**

Cuando se declara el límite como número real, la definición suele comenzar así: “decimos que L es el límite de la sucesión" (respectivamente: función). Al considerar una sucesión (por ejemplo 1/n) o una función (por ejemplo f(x) = 1/x), si queremos aplicar la definición lo primero que necesitamos es un candidato a límite. Si digo que el límite de la sucesión anterior es 2 o que el límite de la función anterior en x_0=1 es 1, estoy conjeturando.

Con un fenómeno del ámbito intuitivo afirmamos algo sobre una propiedad de la sucesión o de la función pero no lo demostramos; simplemente, avanzamos en el conocimiento de esa sucesión o función.

En el caso de la sucesión, el fenómeno lo llamamos “aproximación simple intuitiva” (a.s.i): analizando términos de orden cada vez mayor, somos capaces de proponer un candidato a límite.

En el caso de la función en un punto, el fenómeno lo llamamos “aproximación doble intuitiva” (A.D.I). Cuando la variable independiente se acerca de cualquier modo a un valor pre-fijado, conjeturamos que los correspondientes valores de la función se acercan a un valor que es el candidato a límite de la función en ese valor pre-fijado. La intuición de la continuidad de la recta explica que haya diferentes maneras de acercar los valores de la variable independiente a un valor pre-fijado y esto da los modos de acercamiento que han sido estudiados en Sánchez (2012, pp. 108-110)

No siempre declaramos el límite, como ocurre en la definición de sucesión de Cauchy. En este caso, el fenómeno correspondiente al ámbito intuitivo lo llamamos “aproximación simple intuitiva de Cauchy” (a.s.i.c); analizamos parejas de términos de órdenes cada vez mayores y conjeturamos que la diferencia de valores de esos términos se va a anular. Conviene observar que, en la definición de sucesión de Cauchy, el ámbito intuitivo no está explícito, sin embargo surge al decidir que se va a estudiar esto. Por lo general, se comienza observando que los términos de la sucesión se aproximan entre sí.

Los estudios preliminares del límite finito de una función en el infinito no son aún concluyentes, pero exigen considerar varios modos de alejamiento de la variable independiente en el marco de un eje numérico cuya continuidad se intuye (véase las consideraciones de Sánchez (2012) sobre la intuición de la continuidad).

- **El ámbito formal**

El fenómeno correspondiente permite validar la conjetura elaborada en el otro ámbito. Hemos utilizado el término “proceso” para referirnos a cada una de las etapas sucesivas del fenómeno, al que llamamos, genéricamente, retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones (i.v.s), en sucesiones de Cauchy (i.v.s.c) o en funciones (I.V.F).

Cuando se declara el límite, la “ida” remite al proceso de construcción arbitraria de un entorno del límite y al hallazgo de un natural (en sucesiones) o de un entorno de x_0 (en funciones), mientras que la “vuelta” garantiza que a partir de ese natural o en el entorno de x_0 todos los valores de la sucesión o de la función están incluidos en el entorno del límite que construimos arbitrariamente.

Cuando no se declara el límite (como ocurre en la sucesión de Cauchy), un primer proceso determina el valor de N fijado un épsilon y el segundo proceso verifica que para los valores mayores que este N, se cumple que las diferencias entre los términos de la sucesión son menores que el épsilon fijado. Éste último proceso podría explicarse afirmando que los valores que toman las diferencias entre los términos de la sucesión, a partir de un N determinado, permanecen en un entorno de centro 0 y radio épsilon (prefijado).

No se deben confundir estos pares de procesos, que son de carácter matemático, con los de la teoría APOS, que son de carácter personal.

Además de las definiciones de límite finito de una sucesión, límite finito de una función en un punto y sucesión de Cauchy, hemos trabajado la caracterización por sucesiones del límite finito de una función en un punto. Actualmente estamos estudiando también fenómenos organizados por la definición de límite finito de una función en el infinito.

- **Definiciones estudiadas**

Hemos estudiado los fenómenos organizados por varias definiciones de límite finito, como se resume en la tabla siguiente.

Tabla 2. Definiciones, ámbitos y fenómenos

Definición	Fenómenos	
	Ámbito intuitivo	Ámbito formal
Sea x_n una sucesión en R, decimos que x_n converge a un número real x (o tiene como límite el real x y escribimos lim x_n= x) si para cada ε>0, existe un número natural N tal que si n > N se cumple que $\|x_n-x\| < \varepsilon$ (Spivak, 1991, p. 615.)	a.s.i	i.v.s
Una sucesión {a_n} es una sucesión de Cauchy si para ε>0 existe un número natural N tal que, para todo m y n, si m,n>N, entonces $\|a_n-a_m\| < \varepsilon$. *(Esta condición se escribe generalmente lim m,n→∞* $\|a_n - a_m\|=0$*).* (Spivak, 1991, p. 624.)	a.s.i.c	i.v.s.c
La función f tiende hacia el límite L en a significa: para todo $\varepsilon > 0$ *existe algún* $\delta > 0$ *tal que, para todo x, si* $0 < \|x-a\| < \delta$, *entonces* $\|f(x)-L\| < \varepsilon$. Spivak (1991, p. 118).	ADI	IVF

En el caso de las sucesiones se manejaron seis definiciones más. En cinco de ellas observamos el fenómeno a.s.i y el fenómeno i.v.s. En la otra definición (sucesión de Cauchy) observamos el fenómeno a.s.i.c y el fenómeno i.v.s.c. Más detalles sobre los fenómenos organizados por estas definiciones se dan en Claros (2010, pp.186-188).

En el caso de las funciones se manejaron también otras cinco definiciones más. En todas ellas, excepto en la llamada "caracterización por sucesiones" se observaron el fenómeno ADI y el fenómeno IVF. Más detalles sobre los fenómenos organizados por estas definiciones se dan en Sánchez (2012, pp. 125-128).

- **Equivalencia fenomenológica entre definiciones**

Al encontrar fenómenos diferentes en definiciones matemáticamente equivalentes, durante estos años de trabajo hemos llegado a preguntarnos acerca de la equivalencia fenomenológica de las definiciones. Hemos obtenido dos resultados: hay equivalencia fenomenológica ente la definición de límite finito de una sucesión y la definición de sucesión de Cauchy, por una parte (Claros, Sánchez y Coriat, 2013) y también la hay entre la definición de límite finito de una función en un punto y la caracterización del límite de una función por sucesiones (Sánchez, 2012). Hemos establecido, mediante dos criterios, cuándo dos definiciones matemáticamente equivalentes son fenomenológicamente equivalentes.

Criterio 1. Dos fenómenos son equivalentes fenomenológicamente si corresponden al mismo contexto (intuitivo o formal) y la verificación de un fenómeno va irremediablemente unida a la verificación del otro y viceversa.

Si los fenómenos son equivalentes y las definiciones son matemáticamente equivalentes, manejamos el siguiente criterio.

Criterio 2. Dos definiciones son equivalentes fenomenológicamente si los fenómenos organizados por cada una de ellas son fenomenológicamente equivalentes.

Detalles de cómo se llega a la equivalencia fenomenológica pueden verse en Claros (2010), Sánchez (2012) y Claros, Sánchez y Coriat (2013).

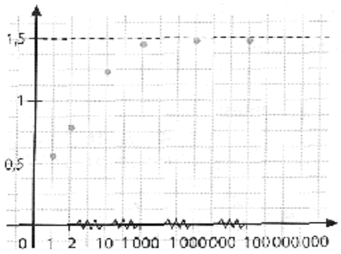
Sistemas de representación y fenómenos

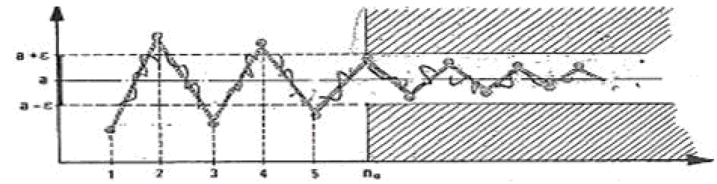
Blázquez y Ortega (2001): (1) Consideran los sistemas de representación verbal, numérico, gráfico y algebraico. (2) Anotan dificultades que entraña la asociación del término límite con su significado en el lenguaje habitual. (3) Presentan el límite finito como aproximación óptima sin reducir el límite a una simple aproximación. Con esta definición de límite la representación privilegiada es numérica (tabular).

Cualquier definición de límite debe expresarse usando alguna representación de las ideas. En la enseñanza, no siempre se comienza por la representación simbólica. En Claros, Sánchez y Coriat (2006) y en Claros (2010) hemos expresado la conveniencia de considerar todos los sistemas de representación (verbal, gráfico, simbólico y tabular o numérico) en la enseñanza del límite. Con ayuda de los sistemas de representación, se expresan y observan los fenómenos organizados por una definición de límite. En la enseñanza, el límite no siempre es definido, también es ejemplificado; por eso consideramos lo que hemos llamado "formato ejemplo" y "formato definición". Se deduce fácilmente que para cada fenómeno hay, en principio 8 posibilidades (4 representaciones y 2 formatos). La tabla 3 muestra algunas de ellas, tomadas de Claros (2010) o Sánchez (2012).

Tabla 3. Ejemplos de fenómenos observados en libros de texto.

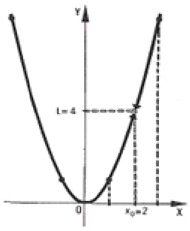
Ejemplo 1. Fenómeno a.s.i en el sistema de representación gráfico y formato ejemplo.	Ejemplo 2: Fenómeno i.v.s. en sistema de representación gráfico y formato definición





Se observa gráficamente cómo los términos de la sucesión, a partir de un cierto lugar, quedan dentro del intervalo centrado en el límite; se usa el sistema de representación gráfico y se presenta como una definición. Obsérvese cómo el autor "tacha" la gráfica continua para dar a entender una secuencia discreta

Ejemplo 3: Fenómeno ADI en sistema de representación gráfico y formato ejemplo



Ejemplo 4: Fenómeno IVF en sistema de representación simbólico y formato definición

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0.\ \exists \delta > 0 \quad \text{tal que}$$

$$\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Fuentes: Bescos y Pena, 2002, p. 90; Vizmanos, Anzola y Primo, 1981, p. 159; Vizmanos, Anzola y Primo, 1981, p. 159; Primo, 1987, p. 217.

Pensamiento matemático avanzado y fenómenos

En 1985, en el seno del PME, se creó un grupo de trabajo (Dreyfus, 1990; Tall, 1991) que se denominó “pensamiento matemático avanzado”. Reorientaron la problemática del aprendizaje en términos de procesos cognitivos; las investigaciones abordaron tópicos que por su naturaleza y complejidad se situarían dentro de la llamada “matemática escolar superior” (límite, derivada, entre otros). Creemos que hay bastante acuerdo en considerar que los procesos de abstracción y de generalización juegan un papel clave en el pensamiento matemático avanzado.

Tall (1985; 1991) afirma que el paso del Pensamiento Matemático Elemental (PME) al Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) implica una transición significativa que requiere una reconstrucción cognitiva. Esta reconstrucción implica pasar, por un lado, de “describir” a “definir” y, por otro, de “convencer” a “demostrar”. Esta transición la sitúa en la franja de los 16-20 años y corresponde, aproximadamente, en España, a los dos cursos del Bachillerato y a los dos primeros años de Universidad.

Tall (1991) señala que el concepto de límite se sitúa dentro del PMA por los procesos cognitivos que son necesarios para su manejo. También lo sitúa ahí Cornu (1991), pues los considera pieza fundamental en la teoría de las aproximaciones, continuidad, derivabilidad e integración. Edwards, Dubinsky y McDonald (2005) indican, sin embargo, que el límite estará situado en el pensamiento matemático elemental o avanzado dependiendo del trabajo que se realice con él. Si solamente se trabaja cálculo de límites, no se requiere el pensamiento matemático avanzado para realizar esta operación.

En Claros, Sánchez y Coriat (2006) hemos propuesto un criterio para discriminar entre PME y PMA basado en los fenómenos descritos para las sucesiones con límite (a.s.i e i.v.s) y las funciones con límite finito en un punto (ADI e IVF). La tabla 4 resume las relaciones entre los fenómenos organizados por una definición de límite, el PME y el PMA.

Tabla 4. Fenómenos, pensamiento matemático elemental y avanzado.

FENÓMENOS	PME		PMA	
	Sucesiones	Funciones	Sucesiones	Funciones
De aproximación intuitiva	Se usa a.s.i	Se usa ADI	Se usa a.s.i	Se usa ADI
De retroalimentación	No se usa i.v.s	No se usa IVF	Se usa i.v.s	Se usa IVF

SEGUNDA PARTE: CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS

Algunas de las metodologías usadas en las investigaciones llevadas a cabo en el grupo de Didáctica del Análisis Matemático, a partir de 2010 y hasta donde conocemos, se concretan en la Tabla 5. Aunque no somos metodólogos, incluimos nuestros trabajos en la última fila para indicar la adecuación de los métodos usados a los métodos preconizados por diferentes autores.

Estudio de libros de texto de secundaria

Paralelamente al estudio de los fenómenos investigamos el empleo que los autores de libros de texto hacían de ellos cuando tenían que presentar el límite de una sucesión o el límite finito de una función en un punto. Por este motivo se realizó un estudio con una muestra de 30 libros de texto en el caso de las sucesiones y 28 en el caso de las funciones. Para la organización de toda la información tuvimos en cuenta cinco periodos temporales, tres de los cuales ya habían sido establecidos por Sierra, González y López (1999). A estos tres periodos les añadimos dos periodos más, el 1º y el 5º, con el fin de clasificar todos los libros que habíamos conseguido.

Tabla 5. Algunas metodologías de investigación usadas en el grupo de Didáctica del Análisis Matemático

	LT	ES	CT	CG	AL	PR
Aldana y González Astudillo, 2010	X	X			X	
Codes, González Astudillo, Monterrubio y Delgado, 2011	X					
Badillo y Azcárate, 2011		X	X			X
Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo y Rico, 2012			X		X	
Arce y Ortega, 2013		X		X	X	
Camacho, Moreno, Azcárate y González Astudillo, 2013		X		X	X	X
Conejo y Ortega, 2013	X					
Pons, Vals y Llinares, 2013		X	X		X	
Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo y Castro, 2013		X	X		X	
Claros , 2010	X		X		X	
Sánchez, 2012	X	X		X		X

LT=Libros de texto. ES= Entrevistas semiestructuradas. CT= Cuestionarios. CG= Cuadernos/Grabaciones. AL= Alumnos. PR= Profesores

- Periodo 1930 y 1939. Desde los años anteriores a la Guerra Civil Española hasta la terminación de ésta.

- Periodo 1940 - 1966. Desde el final de la Guerra Civil Española hasta los primeros textos piloto para la introducción de la matemática moderna.

- Periodo 1967 - 1974. Desde la llamada “matemática moderna” hasta la promulgación del bachillerato unificado y polivalente (B.U.P)

- Periodo 1975 - 1994. Desde el B.U.P hasta el inicio de las modalidades de bachillerato establecidas en la LOGSE.

- Periodo 1995 - 2005. Desde el bachillerato LOGSE hasta la LOCE (2004) y la LOE (2005).

El método de estudio de los libros de texto fue el mismo para las funciones con límite finito en un punto y las sucesiones con límite. El guión estructurado utilizado persiguió los siguientes objetivos: (a) dar información que permita recuperar cada documento; (b) transmitir de manera comprensible nuestro método de trabajo; (c) permitir la posibilidad de retroceder a lo largo del proceso seguido; (d) establecer el contexto de un comentario o una crítica del investigador o investigadora; y (e) hacer posible una replicación de nuestro estudio.

Para lograr esos objetivos, estructuramos el análisis mediante cuatro criterios: *ficha, secuenciación, fenómenos y resúmenes*.

A su vez, cada criterio se organizaba en subcriterios, que pueden consultarse en el capítulo 4 de Claros (2010), y el capítulo 4 también de Sánchez, (2012) o Claros, Sánchez y Coriat (pendiente de publicación). Aquí presento, como resumen, los resultados agregados por fenómeno y período, sin tener en cuenta las representaciones usadas para presentar cada fenómeno. Ver Tabla 6.

Los resultados obtenidos muestran bastante similitud entre el fenómeno a.s.i y el fenómeno ADI. Desde 1930 a 1974 se usan pocos fenómenos de aproximación intuitiva tanto a.s.i como ADI. A partir de esta fecha su uso en los libros de texto es muy frecuente, y distinguimos dos periodos: un primer periodo que abarca de 1975 a 1994 en el que prevalece el fenómeno a.s.i respecto al fenómeno ADI y un segundo periodo de 1995 a 2005 en el que se invierten los resultados, prevaleciendo el fenómeno ADI al fenómeno a.s.i.

Tabla 6. Fenómenos en libros de texto: datos agregados.

	1930-1939	1940-1966	1967-1974	1975-1994	1995-2005	Recuento
a.s.i	1	0	1	41	38	81
ADI	3	3	1	36	45	88
i.v.s	7	8	8	72	10	107
IVF	4	16	8	48	9	85

Los fenómenos i.v.s e IVF están presentes en todos los periodos considerados en mayor o menos medida. El mayor uso por los autores de dichos fenómenos corresponde al periodo 1975-1994. A partir de ese momento se van extinguiendo en los libros de texto.

Si analizamos de manera conjunta los fenómenos de aproximación intuitiva y los fenómenos de retroalimentación podemos concluir lo siguiente. Hasta el periodo 1975-1994 (incluido dicho periodo) prevalecen los fenómenos de retroalimentación a los de aproximación intuitiva. A partir de dicho periodo observamos un cambio de tendencia que acaba con el uso masivo de los fenómenos de aproximación intuitiva en detrimento de los fenómenos de retroalimentación.

Aunque en este apartado no hemos hecho referencia a los sistemas de representación (verbal, gráfico, simbólico y tabular) y a los formatos (ejemplo y definición) hay que reconocer que no hemos encontrado las ocho posibilidades indicadas anteriormente.

En el caso de las sucesiones no hemos encontrado el fenómeno de aproximación simple intuitiva en el sistema de representación simbólico (ni ejemplo ni definición). Tampoco hemos encontrado dicho fenómeno en el sistema de representación tabular (formato definición) ni en el sistema de representación gráfico (formato definición). Respecto al fenómeno de retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones, no lo hemos encontrado en el sistema de representación tabular (formato definición).

En el caso de las funciones no hemos encontrado el fenómeno de aproximación doble intuitiva en el sistema de representación tabular (formato definición). Tampoco encontramos dicho fenómeno en el sistema de representación simbólico (formato ejemplo). Respecto al fenómeno de retroalimentación o ida-vuelta en funciones, no se observa en el sistema de representación tabular (ambos formatos).

Queda pendiente la explicación de estas ausencias. Ignoramos si se debe a nuestra elección de la muestra o a rechazos espontáneamente colectivos de los autores.

Cuestionario (sucesiones)

Una vez que observamos los fenómenos a.s.i e i.v.s en los libros de texto, nos preguntamos si dichos fenómenos se observarían en las respuestas de los alumnos a un cuestionario sobre el límite finito de una sucesión. Para ello iniciamos la construcción de un cuestionario que se llevó a cabo en tres etapas

Primera etapa. Elaboración de un Cuestionario Inicial y revisión por expertos: profesores de institutos.

Segunda etapa. En ella se siguieron varios pasos:

- Se analizaron las sugerencias de los expertos y se enunciaron las primeras categorías de respuestas.
- Se elaboró un Cuestionario Piloto y se administró dicha prueba en un grupo de ensayo.
- Se estudiaron las respuestas de los alumnos y se tomaron decisiones sobre el instrumento.

Tercera etapa. Se redactó de manera definitiva el instrumento, que constó de un cuestionario (Anexo) y unas categorías de análisis para corregir y clasificar las respuestas obtenidas (véase Tabla 7). Presentamos resultados relativos a esta etapa.

El cuestionario se administró en tres Institutos de Enseñanza Secundaria de Madrid. Participaron 143 alumnos (64 hombres y 79 mujeres) cuyas edades oscilaron entre 16 y 20 años.

Tabla 7. Categorías de respuestas de los alumnos

Categorías	Descripción
C0	Calcula correctamente el límite de la sucesión presentada y emplea la justificación dada por el alumno ficticio
C1	Calcula correctamente el límite de la sucesión presentada y emplea algún fenómeno en sus justificaciones
	Categoría C1.1. Emplea el fenómeno de aproximación simple intuitiva (a.s.i), representación gráfica y formato ejemplo.
	Categoría C1.2. Emplea el fenómeno de aproximación simple intuitiva (a.s.i), representación tabular y formato ejemplo.
	Categoría C1.3. Emplea el fenómeno de aproximación simple intuitiva (a.s.i), representación verbal y formato ejemplo.
	Categoría C1.4 Emplea el fenómeno de retroalimentación o ida-vuelta (i.v.s) , representación verbal y formato ejemplo.
C2	Calcula correctamente el límite de la sucesión presentada, pero no emplea

	ningún fenómeno en sus justificaciones
	Categoría C2.1 Justifica su respuesta de alguna manera, sin emplear ningún fenómeno.
	Categoría C2.2 No justifica su respuesta.
C3	No calcula correctamente el límite.
	C 3.1 Usa una idea de infinito potencial.
	C 3.2 No usa una idea de infinito potencial. [5]
C4	Plantea la necesidad de conocer más valores de la sucesión
C5	No sabe / No contesta

Algunos resultados obtenidos después de administrar el cuestionario:

- El fenómeno de aproximación simple intuitiva en el sistema de representación verbal y en el formato ejemplo fue la respuesta más frecuente a las preguntas 1, 2 y 3a. La respuesta más frecuente a la pregunta 3b fue "no sabe/no contesta".
- En las preguntas 1, 2, 3a se usó en los enunciados el fenómeno de aproximación simple intuitiva. Parece ser que este hecho tiene una influencia notable en el porcentaje de respuestas correctas que toma valores relativamente altos, oscilando entre el 75% y el 85%.
- En la pregunta 3b se usó en su enunciado el fenómeno de ida-vuelta en sucesiones en el sistema de representación verbal y en el formato ejemplo. En dicha pregunta el porcentaje de respuestas correctas es aproximadamente del 50% lo que muestra las dificultades de los alumnos para responder de manera adecuada cuando se emplea un fenómeno en el ámbito formal.
- Si tenemos en cuenta el periodo 1995-2005 que es el periodo correspondiente a la fecha de publicación de los libros que manejaron los alumnos objeto del estudio podemos observar ciertas similitudes entre el estudio de libros de texto y el estudio de las respuestas de los alumnos. De hecho el fenómeno de aproximación simple intuitiva fue el más frecuente tanto en los libros de texto del periodo considerado como en las respuestas de los alumnos. Por otro lado el fenómeno de retroalimentación cuyo uso es poco frecuente en los libros de texto muestra su equivalente en las respuestas de los alumnos, siendo la frecuencia de este último hecho aún menor.

BREVE MIRADA AL FUTURO

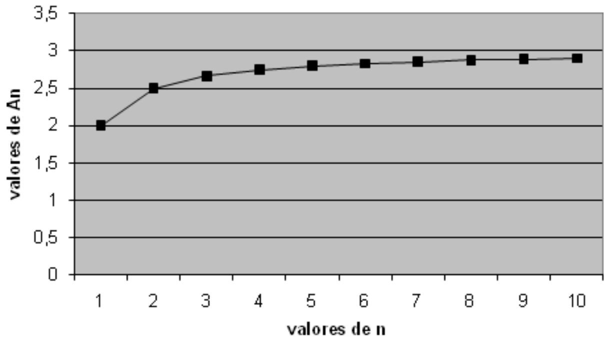
De todo lo que he expuesto me gustaría reseñar algunas cuestiones pendientes para el medio o largo plazo: (i) Cerrar el estudio de la función con límite finito en el infinito. (ii) Unificar los estudios sobre el límite finito para describir mejor este concepto. (iii) Iniciar los estudios sobre el límite infinito. (iv) Ampliar la muestra de libros de texto para incluir más libros españoles y libros en inglés o francés. (v) Aplicar el instrumento diseñado para alumnos a una muestra representativa. (vi) Desarrollar un instrumento basado en Cuestionarios para ampliar significativamente la muestra de profesores entrevistados y sacar conclusiones relevantes sobre el uso de fenómenos en la enseñanza del límite. (vii) Desarrollar actividades de aula integrando eficientemente en ellas los fenómenos estudiados. (viii) Estudiar conexiones con otros enfoques de la enseñanza y aprendizaje del límite.

Se trata de unas expectativas cuya ambición reconozco y para cuyo desarrollo invito a integrarse a aquellos jóvenes y no tan jóvenes que se sientan interesados por el tema.

ANEXO: CUESTIONARIO

1) Se representa gráficamente una sucesión An. El profesor pregunta a la clase: ¿Tiene límite la sucesión? Un alumno responde: "El límite es 3 porque a medida que n crece los valores de la

sucesión se van acercando cada vez más a 3”. ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta de manera razonada.



2) Dada la siguiente sucesión:

n	1	2	10	1000	1000000	1000000000	....
a_n	0,571428	0,7	1,24	1,496758	1,49999675	1,49999999	....

El profesor pregunta a la clase: ¿Tiene límite la sucesión a_n? Un alumno responde: “El límite es 1,5 porque a medida que avanzo en la sucesión los valores de a_n se aproximan más a 1,5”. ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta de manera razonada.

3) La sucesión a_n cumple: su primer término vale 2.9, su segundo término vale 2.99, su tercer término vale 2.999, su cuarto término 2.9999, su quinto término 2.99999, su sexto término 2.999999, su séptimo término 2.9999999, su octavo término 2.99999999 y así sucesivamente.

a) Un alumno afirma: “Esta sucesión tiene límite 3, porque a medida que avanza n su valor va acercándose cada vez más a 3” ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta de manera razonada.

b) Otro alumno afirma: “La sucesión tiene límite 3 porque la distancia entre los términos de la sucesión y 3, puede hacerse tan pequeña como se desee, a partir de un término convenientemente elegido” ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta de manera razonada.

Referencias

Aldana, E; González, M. T. (2010). Comprensión del concepto de Integral Definida, el caso de un alumno universitario. En González, M. J; González, M. T; Murillo, J (Eds.). *Investigación en Educación Matemática*. *Comunicaciones de los grupos de Investigación, XIII*

Arce y Ortega (2013). Deficiencias en el trazado de gráficas en estudiantes de bachillerato. En Berciano, Gutierrez, Estepa y Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática, XVII*, 147-156.

Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktac, Roa, Trigueros y Weller (2014). Apos theory. A framework for research and curriculum development in Mathematics Education. New York. Springer.

Badillo y Azcárate (2011). Líneas de coherencia y redes sistémicas: una aproximación metodológica para el análisis de la comprensión de profesores de los macro objetos f´(a) y f´(x). En M. Marín Rodriguez y N. Climent Rodriguez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática, XIV*, 137-160.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Relime vol 4*. Nº3, 219-236.

Bescos, E y Pena, Z. (1998). *Matemáticas 1º Bachillerato. Ciencias de la Naturaleza y de la Salud*. Madrid: Editorial Oxford Educación.

Camacho, Moreno, Azcárate y González (2013). La resolución de problemas y la tecnología en la formación y desarrollo profesional del profesor de matemáticas. En Estepa y Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática, XVI*, 105-120.

Claros, F. J., Sánchez, M. T. y Coriat, M. (2006). Fenómenos que organizan el límite. En P. Bolea, M. González y M. Moreno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática X*, 157-171.

Claros, F. J., Sánchez, M. T. y Coriat, M. (2007). Fenómenos que organizan el límite. *PNA*, *1*(3), 125-137.

Claros, F. J., Sánchez, M. T. y Coriat, M. (2009). Límite de una sucesión: respuestas de los alumnos de 1º y 2º de Bachillerato. *Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación, Monografía XI*, 35-54.

Claros, F. J., Sánchez, M. T. y Coriat, M. (2009). Sobre la equivalencia entre sucesiones con límite finito y sucesiones de Cauchy. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.) *Investigación en Educación Matemática, XIII*, 197-209.

Claros, F. J. (2010). *Límite finito de una sucesión: fenómenos que organiza*. Granada: UGR.

Claros, Sánchez y Coriat (2013). Sucesión convergente y sucesión de Cauchy: hacia una secuencia didáctica basada en la fenomenología. *Enseñanza de las ciencias, 113-131.*

Codes, González, Monterrubio y Delgado (2011). El análisis matemático a través de las situaciones reales presentes en los libros de texto de educación secundaria. En M. Moreno y N. Climent Rodriguez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática, XIV*, 173-186.

Conejo y Ortega (2013). La demostración matemática en los libros de texto de 2º de B.U.P y 1º de bachillerato de LGE, LOGSE y LOE. En Estepa y Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática, XVI*, 121-132.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorg, Thomas, C. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: begining with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15*(2), 167-192.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer.

Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition* (pp. 113-133). Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press

Edwards, B. S., Dubinsky, E. y McDonald, M. (2005). Advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(1), 15-25.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo y Castro (2013).Variación de las concepciones individuales sobre el límite finito de una función en un punto. En Berciano, Gutierrez, Estepa y Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática, XVII*, 253-262.

Fernandez-Plaza, Ruiz-Hidalgo y Rico (2012). Significados del concepto de límite finito de una función en un punto puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato. Analisis conceptual de términos clave. En M. Marín Rodriguez y N. Climent Rodriguez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática, XV*, 29-46.

Janvier, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Pons, Vals y Llinares (2013). Características de la tematización del esquema de límite de una función. En Berciano, Gutierrez, Estepa y Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática, XVII*, 449-458.

Primo, A. (1987). *Matemáticas C.O.U.* Madrid: S.M.

Sánchez, M.T (2012). *Límite finito de una función en un punto: fenómenos que organiza*. Granada: UGR.

Sierra, M., González, M. T. y López, C. (1999). Evolución histórica de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria (C.O.U). *Enseñanza de las Ciencias, 17*(3), 463-476.

Spivak, M. (1991). *Calculus. Cálculo Infinitesimal.* Barcelona: Reverté.

Tall, D. (1985). Understanding the calculus. *Mathematics Teaching*, 49-53.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking.* Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Vargas, González y Llinares (2011). Atlas.ti como herramienta de análisis de la práctica docente: el caso de la función exponencial. En M. Moreno y N. Climent Rodriguez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática, XIV*, 187-200.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the theaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Vizmanos, José R., Anzola, M. y Primo Martínez A. (1981). *Funciones-2 Matemáticas 2º B.U.P. Teoría y Problemas*. Madrid: Editorial S.M.

---

[1] Ver Freudenthal (1983) o Claros (2010), pp. 81-82.

[2] Una descomposición genética es un hipotético modelo que describe la estructura mental y los mecanismos que un estudiante podría necesitar construir para aprender un específico concepto matemático (véase Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktac, Roa, Trigueros y Weller (2014))

[3] Solamente hemos elaborado una secuencia para sucesiones con límite finito. Posiblemente, las funciones exijan otra estructura.

[4] Sobre las abreviaturas a.s.i.c, a.s.i e i.v.s, véase el ámbito intuitivo y formal.

[5] Ejemplo: Si el alumno contesta que la sucesión 0,9, 0,99, 0,999... tiende a 0,99999...=$0,\hat{9}$, y no a 1, ha calculado incorrectamente el límite y maneja una idea de infinito potencial.)

RÉPLICA A LA PONENCIA "MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO PARA EL ESTUDIO DEL LÍMITE"

Answer to "Theoretical and methodological framework for the study of the limit"

Myriam Codes

Universidad Pontificia de Salamanca

Resumen

La lectura de la ponencia del Dr. Claros ha inspirado dos ideas principales sobre las que reflexionar. Por un lado, la caracterización de pensamiento matemático avanzado frente a pensamiento matemático elemental que propone. Por otro, el doble papel del aula en las investigaciones en didáctica del Análisis Matemático: como elemento clave por ser el ambiente tradicional donde se desarrolla la enseñanza y el aprendizaje escolar, y como receptora de los resultados de las investigaciones. Con este doble papel como telón de fondo, se proponen dos líneas de debate sobre la investigación en didáctica del Análisis Matemático en contextos de aula: la investigación en el aula y la investigación para el aula.

Palabras clave: *Análisis Matemático, pensamiento matemático avanzado, investigación en el aula y para el aula.*

Abstract

Reading Dr. Claros lecture suggests two ideas to think about. On one hand, the characterization of advanced mathematical thinking versus elementary mathematical thinking proposed. On the other hand, the dual role of the classroom in the research about didactics mathematical analysis: as a key element of the traditional context where teaching and learning are developed, and as a place where research results may be applied. With this dual role as background, two discussing ideas related to didactics on classrooms contexts research are proposed: classroom research and classroom oriented research.

Keywords: M*athematical Analysis, advanced mathematical thinking, classroom research and classroom oriented research.*

INTRODUCCIÓN

El Análisis Matemático ya ha sido protagonista de los seminarios de la SEIEM en años anteriores: en el segundo simposio (Pamplona, 1998) Lacasta disertó sobre el papel de los gráficos cartesianos en el estudio de las funciones; el siguiente año en Valladolid, Azcárate, Camacho y Sierra hicieron un recorrido sobre las investigaciones en didáctica del Análisis Matemático; un año más tarde en Almería, Contreras planteó la enseñanza del Análisis Matemático en el bachillerato y primer curso de universidad desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión. En el 2003 González y Sierra nos presentaron el método de investigación histórico en la didáctica del Análisis Matemático a través de un ejemplo con el concepto de límite en manuales, y en 2005 la profesora Azcárate dirigió un seminario sobre la investigación en didáctica del Análisis Matemático en el que Moreno, Font y Camacho abordaron tres nuevos aspectos: concepciones de profesores universitarios, una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada y el uso de herramientas de cálculo simbólico en la enseñanza y el aprendizaje, respectivamente. Hace tres años en Ciudad Real, en otro seminario dirigido por la profesora Moreno sobre la investigación en didáctica de las matemáticas por niveles educativos, Camacho nos ofreció una revisión sobre las

Codes, M. (2014). Réplica a la ponencia "Marco teórico y metodológico para el estudio del límite". En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 33-40). Salamanca: SEIEM.

investigaciones que se habían realizado en los últimos 20 años, en España y a nivel internacional, en didáctica de las matemáticas en el bachillerato y primeros cursos de universidad; gran parte de los trabajos en estos niveles educativos tratan sobre conceptos del Análisis Matemático.

En el seno del Grupo de Investigación en Didáctica del Análisis Matemático (GIDAM) de la SEIEM, se han abordado los principales conceptos propios de este área de conocimiento (límite, infinito, series y sucesiones, función, derivada, integral) desde distintos modelos teóricos (APOS, enfoque ontosemiótico), empleando múltiples metodologías, técnicas e instrumentos de recogida de datos (cualitativa, interpretativa; análisis de manuales, entrevistas estructuradas, cuestionarios, videograbaciones en el aula) y focalizando el objeto de estudio en los distintos protagonistas de la enseñanza y el aprendizaje (profesores, alumnos, currículo, libros de texto). Aunque el principal escenario donde se llevan a cabo la enseñanza y el aprendizaje sobre los que investigamos es el aula, este contexto pocas veces está presente en nuestras investigaciones.

Normalmente se accede al aula para recoger información a través de un cuestionario en el que no queda registro de las interacciones que se producen en el aula, las cuales tienen un papel decisivo en la construcción del conocimiento, tanto por las interacciones entre iguales como por las que se producen entre el profesor y los alumno (Planas, 2006). Para recoger esta información es necesario el empleo de las grabaciones de video cuyo contenido facilita el análisis de la manifestación externa del pensamiento de los alumnos a partir de gestos, habla y acciones (Planas, 2006; Powell, Francisco y Maher, 2003).

Si el acceso al aula para pasar cuestionarios resulta complicado por la obtención de los permisos del centro y la disposición del profesor para realizar este tipo de actividades, pretender grabar en la clase para obtener información sobre cómo se produce la enseñanza y el aprendizaje en un ambiente natural, puede resultar imposible. En general, la búsqueda, coordinación e implicación del profesorado o de los centros es una labor compleja: “Es muy difícil controlar a la perfección estas variables, básicamente, porque la realidad la impone el profesorado que está dispuesto a participar, el cual está integrado en un centro determinado y con unos alumnos concretos que condicionan la experiencia. Hay aspectos que pueden controlarse, pero no todos.” (Bruno, 2002). Una vez en el aula, la recogida de datos tiene que lidiar con los imprevistos del día a día que repercuten en la validez de los datos: que un alumno de la muestra no acuda a clase, que por un error en la reserva de un aula no se pueda utilizar un aula de ordenadores, o que se pierda un episodio interesante porque el profesor se sienta presionado por cumplir un programa o llegue la hora de que entre otro profesor en el aula.

La afirmación anterior sobre la poca presencia del aula en nuestras investigaciones no pretende ser una crítica. Las dificultades asociadas a la obtención de datos justifican sobradamente que nuestras preguntas de investigación no se planteen para ser respondidas con una incursión en el aula. Sin embargo, a pesar de que en muchas investigaciones el aula no está presente explícitamente, en la mayoría de ellas se arrojan resultados aplicables a la misma (en relación a la figura del profesor, del currículo o del alumno). Este es el caso de las investigaciones que nos presenta el profesor Claros, si bien no se han llevado a cabo en el aula, cumplirá con su aplicabilidad a la misma cuando completen el objetivo de “desarrollo de actividades para los alumnos y orientaciones para los profesores” basados en los resultados que nos ha presentado.

SOBRE LA PONENCIA DEL PROFESOR CLAROS

El profesor Claros nos ha expuesto un resumen de las tesis que han defendido él mismo y la Dra. Mª Teresa Sánchez en las que comparten la base sobre la que se asientan, lo que él llama los “tres pilares” (fenomenología, sistemas de representación y pensamiento matemático avanzado). El matiz que diferencia ambas investigaciones es el objeto matemático sobre el que trabajan: el límite finito de una sucesión y sucesión de Cauchy, en el caso de Claros (Claros, 2010) y el límite finito de una función en un punto, en el caso de Sánchez (Sánchez, 2012).

Claros comienza su discurso marcando la necesidad de encontrar un marco teórico que aglutine las investigaciones que se lleva a cabo en área del Análisis Matemático, más concretamente en relación al concepto de límite, y una metodología de investigación con la que se puedan abarcar tanto las investigaciones que estudian distintos ámbitos de la didáctica como son el profesor, los alumnos o los libros de texto, como las investigaciones que tratan distintos conceptos propios del Análisis Matemático. En la comunicación describe el marco teórico y la metodología que han empleado en las tesis y que continúan empleando extendiendo el objeto de estudio al límite infinito de una función en el infinito.

En relación al marco teórico, nos presenta los tres pilares sobre los que se apoyan sus investigaciones: la fenomenología del concepto de límite finito (de sucesión y de función en un punto) y de sucesión de Cauchy, los sistemas de representación y el pensamiento matemático avanzado. Del análisis fenomenológico deriva los dos fenómenos que han encontrado para los tres casos, lo que denominan fenómenos de aproximación intuitiva (a.s.i; a.s.i.c.; A.D.I) y fenómenos de retroalimentación o de ida y vuelta (i.v.s; i.v.s.c; I.V.F) y liga estos fenómenos con el pilar del pensamiento matemático avanzado. Los fenómenos de aproximación están relacionados con la intuición; requieren procesos cognitivos que se engloban en lo que se conoce como pensamiento matemático elemental. Los fenómenos de retroalimentación pertenecen a un ámbito formal y su cognición requiere un pensamiento matemático avanzado. En cuanto a los sistemas de representación, distinguen dos formas en las que aparece el límite en la enseñanza, como ejemplo o en una definición, que se combinan con los cuatro registros que consideran convenientes para representar el límite: verbal, gráfico, simbólico y tabular o numérico. Para llevar a cabo este trabajo han empleado una combinación de métodos según el foco de atención: análisis de libros de texto, cuestionario para alumnos o profesores y entrevistas semiestructuradas a profesores.

Pensamiento Matemático Elemental vs Pensamiento Matemático Avanzado

La investigación en Didáctica del Análisis Matemático deriva del grupo de trabajo que se creó en 1985 en el seno del congreso Psychology of Mathematics Education, cuya principal preocupación fue estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática en niveles de enseñanza superior (bachillerato y primeros cursos de universidad) (Azcárate, 1998; Azcárate y Camacho, 2003). Existe un consenso en la dificultad para determinar la línea divisoria de los modos de pensamiento “elemental” y “avanzado”, pero a pesar de que el paso de un modo elemental de trabajar con los conceptos matemáticos a otro avanzado o superior no se da en forma de salto, sino como una transición en la que la actividad matemática requiere cada vez modos de pensamiento más sofisticados, distintos investigadores continúan buscando una caracterización entre ambos modos de pensamiento que contribuya a mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje (Selden y Selden, 2005).

Existe un consenso tácito con Dreyfus (1990) en que no se puede distinguir el pensamiento matemático elemental (PME) del pensamiento matemático avanzado (PMA) porque se pongan en juego procesos mentales como “analizar, categoriza, conjeturar, definir, formalizar, generalizar, probar o sintetizar”, ya que cuando un niño pequeño realiza tareas matemáticas sencillas desde un punto de vista matemático también pone en juego alguno de estos procesos, incluido la abstracción; sin embargo, es cierto que las matemáticas asociadas a conceptos matemáticos más complejos requieren con más vehemencia de estos procesos mentales (p. 114).

Debemos diferenciar entre dos acepciones del adjetivo “advanced” relacionadas con el objeto al cual adjetiva: el concepto matemático con el que se trabaja o el tipo de pensamiento que un individuo pone en juego cuando realiza tareas matemáticas. En el primer caso, el adjetivo hace referencia a la complejidad del concepto que se considera “no básico” porque se basa en otros sin cuya comprensión no se puede abordar; en el segundo, el adjetivo caracteriza la demanda de procesos mentales como abstraer y demostrar que normalmente se llevan a cabo en los últimos cursos de secundaria y en la universidad. Ambos están forzosamente relacionados porque un concepto elemental desde el punto de vista matemático, normalmente requerirá un modo de pensamiento más sencillo que otro cuya complejidad precise poner en juego no solo la comprensión de otros conceptos relacionados con él, sino otras habilidades cognitivas más complicadas (Dreyfus, 1990; Selden y Selden, 2005).

De las distintas caracterizaciones que se han propuesto sobre el PMA (Edwards, Dubinsky y McDonald, 2005; Harel y Sowder, 2005; Rasmussen, Zandieh, King y Teppo, 2005; Robert y Schwarzenberger, 1991; Tall, 1991), Claros y su equipo se apoyan en la postura de Edwards, y otros (2005) y Rasmussen, y otros (2005) que consideran que la distinción entre PME y PMA no debe centrarse en el contenido sino "en la naturaleza de la actividad matemática en la que participa el alumno" (Rasmussen, y otros, 2005). En este sentido, a pesar de que el concepto de límite se ha considerado tradicionalmente propio del PMA (Cornu, 1991, Dreyfus, 1991), Claros y su equipo proponen centrar la atención en el tipo de fenómenos que describen (a.s.i, i.v.s,…) para decidir si la actividad que lleva a cabo el alumno en relación al concepto de límite se considera dentro del PME o del PMA. Siendo así, los fenómenos a.s.i/A.D.I que se desarrollan en lo que llaman un ámbito intuitivo (para el caso de la sucesión se evalúan términos de la sucesión para valores de n cada vez mayores y se comprueba que se obtienen valores que están cerca de un valor fijo, el límite) son propios del PME mientras que los que se desarrollan en el ámbito formal pertenecen al PMA.

Esta caracterización parece otorgarle a la intuición un papel decisivo para distinguir el PMA del PME, cuando para Tall (1995) es precisamente la intuición un elemento facilitador del "pensamiento creativo y la investigación" propios de los "matemáticos profesionales y sus alumnos" que alcanzan niveles superiores de PMA. Cabría entonces preguntarse si realmente la actividad matemática que se desarrolla en el ámbito intuitivo es la característica del PME frente al PMA, para los casos de límite finito de sucesión y de función en un punto o, por el contrario, la intuición de lo que ocurrirá cuando el proceso iterativo consistente en evaluar términos de la sucesión continua un número de veces lo suficientemente grande, es un rasgo de pensamiento avanzado. Siguiendo el paralelismo que propone Claros con la teoría APOS, lo que él declara como conjetura acerca de una propiedad de la sucesión (o función), es decir, la intuición del candidato al límite, para Brown, McDonald y Weller (2008) se corresponde con una concepción proceso de proceso iterativo infinito que va más allá del pensamiento matemático elemental. Dado que no queda claro el papel de la intuición como característica de un modo de pensamiento elemental, quizá haya que preguntarse si realmente se puede considerar que interviene la intuición en la acción de comprobar el resultado de evaluar una función en varios puntos (según el caso sucesivos valores de n o sucesivos valores de x cercanos a un valor fijo); esto parece más bien un acto descriptivo que intuitivo, lo cual encaja con la caracterización de Tall (1991): "el paso de la matemática elemental al pensamiento matemático avanzado involucra una transición: de la descripción a la definición, del convencimiento a la demostración lógica basada en las definiciones" (p. 20).

INVESTIGACIÓN EN EL AULA VERSUS INVESTIGACIÓN PARA EL AULA: LA TRANSFERENCIA DE LOS RESULTADOS.

El título del seminario (Investigación en Didáctica del Análisis en contextos de aula) sugiere algún comentario en el que esté presente el aula, bien por su papel en las preguntas de investigación, bien por su papel en los resultados más o menos aplicables de las investigaciones.

En el primer caso me refiero al aula como elemento imprescindible en la investigación porque sea este el ambiente en el que se desarrolle la actividad o se observe el objeto que van a ser investigados. Se ha comentado las dificultades operativas que supone acceder a un aula para recoger información, y la trascendencia que tiene esta limitación en las preguntas de investigación que se pueden responder accediendo al trabajo del aula.

En el segundo caso, el aula es el escenario al que directa o indirectamente se vierten los resultados de las investigaciones. En relación al aula de secundaria obligatoria, Font (2011) distinguió ocho preguntas o necesidades del sistema educativo, representado en su persona como profesor de secundaria, a las que en mayor o menor medida dan respuesta algunas investigaciones cuyos resultados se han presentado en comunicaciones y ponencias presentadas a los Simposios SEIEM entre 1998 y 2010. No ocurre lo mismo en secundaria no obligatoria (bachillerato) y nivel universitario en los que, según Camacho (2011), los resultados de las investigaciones llevadas a cabo en el seno de la SEIEM no son lo suficientemente visibles en la práctica del aula. Para solventarlo, propone que los avances derivados de las investigaciones se plasmen en la práctica de la enseñanza a partir de la elaboración de materiales curriculares.

González (2007) añade otro frente al que deben derivar los resultados de las investigaciones, señalando la formación de profesores como uno de los objetivos de las agendas de investigación. En este campo merece la pena destacar el trabajo pionero que recientemente están llevando a cabo investigadores de la Universidad de Sevilla y de Alicante en el que se han utilizado los resultados obtenidos en la investigación de Sánchez-Matamoros (2004) en relación a la comprensión de los estudiantes del concepto de derivada, para diseñar módulos de enseñanza orientados a la formación de profesores de secundaria; sobre esta investigación versa la aportación de la profesora Sánchez-Matamoros a este seminario. También Font (2011, p. 166) señala la utilidad de un constructo del enfoque ontosemiótico para el diseño de un ciclo formativo en el máster de Profesor de Secundaria de Matemáticas de la Universidad de Barcelona.

Por el momento, parece que el punto fuerte de la transferencia de los resultados de las investigaciones en didáctica del Análisis Matemático a la sociedad se está produciendo en las aulas universitarias con un perfil de alumno que no es el que mayoritariamente ocupa nuestras investigaciones (alumnos de secundaria o primeros cursos de universidad), sino el del futuro profesor de secundaria. Teniendo en cuenta que los investigadores que han llevado a cabo esta transferencia están de algún modo vinculados a los cursos de formación del profesorado, cabe preguntarse cuál es el alcance de la capacidad de acceso al aula por parte de los investigadores.

UN EJEMPLO DE INVESTIGACIÓN EN EL AULA Y PARA EL AULA

El trabajo que realicé para obtener el título de doctor por la Universidad de Salamanca (Codes, 2010) tuvo su origen en mi inquietud como profesora por los problemas de comprensión que año tras año observaba en mis alumnos. La relativa facilidad que tuve para grabar en vídeo tanto el trabajo de mis alumnos como el mío propio en las sesiones habituales de clase, fue uno de los motivos por los cuales los datos de la investigación se obtuvieron íntegramente del aula. Sin entrar en detalles de la investigación que no vienen al caso en este seminario, comentaré brevemente algunos aspectos que considero relevantes en relación a la investigación en el aula.

El uso del adjetivo "relativa" para referirme a la oportunidad que se me brindó para acceder al aula porque en su momento no hubo trabas institucionales, quiere destacar que la dificultad de investigar en el aula no se debe solo al tema de los permisos y la buena disposición del profesor que abre las puertas de su clase a la cámara, sino a otras cuestiones anejas que directa o indirectamente repercuten en los resultados. Sin pretender una lista exhaustiva, enumero algunas de ellas:

- Para que los datos den cuenta de la realidad del aula, es necesario que los protagonistas se sientan cómodos y actúen con naturalidad. Para ello, además de contar con la participación voluntaria de los alumnos, comenzamos a grabar unos días antes del comienzo de las clases que requería la investigación. Así, además de solventar algunos problemas técnicos, se normalizó la presencia de las cámaras en el aula.

- En una clase habitual priman los intereses docentes frente a los de la investigación, de modo que hay situaciones en las que se pueden perder datos, por ejemplo, por la hora de finalización de la clase: si ocurre un episodio interesante cinco minutos antes de que finalice la clase, probablemente no dé tiempo a que concluya antes de tener que dejar de grabar, bien porque otro profesor entre en el aula o porque el alumno o el profesor tengan que acudir a otra clase.

- Es primordial disponer de herramientas adecuadas para realizar y almacenar las grabaciones del aula y el soporte técnico que requiere el uso de las mismas. En nuestro caso fuimos pioneros en recoger información del trabajo del alumno con el ordenador utilizando un software que graba lo que acontece en la pantalla con independencia de la herramienta que se esté utilizando para la resolver la tarea (Codes, Sierra y Raboso, 2007).
- Hay que asumir los contratiempos del día a día, como la ausencia de un determinado alumno a clase o la disponibilidad de un aula. Estas situaciones reflejan una realidad de la enseñanza que no siempre está visible.

En relación a la transferencia de los resultados de la investigación, las actividades que diseñé han seguido formando parte del material que empleo en mis clases y me apoyo continuamente en el análisis teórico que realicé en la investigación para que mi discurso ayude a que mis alumnos establezcan conexiones entre los elementos matemáticos pertinentes. Además, el visionado de las grabaciones me ha descubierto la relevancia que tienen los aspectos socioculturales en los procesos de construcción del conocimiento. Esta transferencia emergerá en futuros trabajos.

En cuanto a los datos obtenidos, una gran parte no se utilizaron en la tesis pero han dado su fruto en investigaciones posteriores (Codes, Delgado, González y Monterrubio, 2013; Delgado, González, Monterrubio y Codes, 2013).

CUESTIONES PARA EL DEBATE

Propongo dos líneas de debate sobre la investigación en didáctica del Análisis Matemático en contextos de aula.

En relación a la investigación para el aula, ¿cómo podemos, desde nuestra posición de profesores e investigadores, facilitar la transferencia de los resultados de nuestras investigaciones en didáctica del Análisis Matemático al aula?, ¿es un hándicap el que algunos investigadores en este área desarrollen principalmente su labor docente en cursos en los que no se trabajan temas de Análisis Matemático?, ¿o simplemente es que no sabemos vender nuestros productos?

Cuando miramos qué pasa con el Análisis Matemático dentro del aula, focalizando en cualquiera de los protagonistas: profesor, alumno o currículo, ¿a qué se enfrenta el investigador cuando decide recoger datos del trabajo que se lleva a cabo en el ambiente tradicional del aula lejos de un ambiente de laboratorio (creado de forma artificial)?, ¿qué preguntas de investigación promueve el aula?, ¿hay marcos teóricos que se acomoden mejor que otros para obtener resultados útiles?, ¿se pueden obviar los enfoques socioculturales cuando cruzamos la puerta del aula para entrar en ella?

Referencias

Azcárate, C. (1998). Acerca de los procesos del pensamiento matemático avanzado. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 1*(2), 235-240.

Azcárate, C., Camacho, M. (2003). Sobre la investigación en didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10*(2), 135-149.

Brown, A., McDonald, M., Weller, K. (2008). Step by step: iterative processes and actual infinity. *Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS), Issues in Mathematics Education, 5,* 117-144.

Camacho, M. 2011. Investigación en didáctica de las matemáticas en el Bachillerato y primeros cursos de Universidad. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco, y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 195-223). Bilbao: SEIEM.

Codes, M. 2010. *Análisis de la comprensión de los conceptos de serie numérica y su convergencia en estudiantes de primer curso de universidad utilizando un entorno computacional*. Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca. http://gredos.usal.es/jspui/bitstream/10366/76452/1/DDMCE_CodesValcarceM_ComprensionConceptosEntornoComputacional.pdf

Codes, M., Delgado, M. L., González, M. T., Monterrubio, M. C. (2013) Comprensión del concepto de serie numérica a través del modelo de Pirie y Kieren. *Enseñanza de las Ciencias, 31*(3), 135-154.

Codes, M., Sierra, M., Raboso, M. (2007). Innovación en la recogida de datos para una investigación de carácter cualitativo. Un ejemplo con alumnos universitarios en un entorno computacional. En M. Camacho, P. Flores, y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 261-271). San Cristóbal de La Laguna: SEIEM.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Delgado, M. L., González, M. T., Monterrubio, M. C., Codes, M. (2013). El mecanismo *collecting* para la comprensión del concepto de serie numérica. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 245-252). Bilbao: SEIEM.

Dreyfus, T. (1990). Advanced Mathematical Thinking. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 113-134). Cambridge: Cambridge University Press.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp.25-41). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Edwards, B. S., Dubinsky, E. y McDonald, M. (2005). Advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 15-25

Font, V. (2011). Investigación en didáctica de las matemáticas en la educación secundaria obligatoria. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco, y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 165-194). Bilbao: SEIEM

González, M. T. (2007). Réplica a la ponencia "el papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros" de la profesora Mar Moreno. En M. Camacho, P. Flores, y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 405-414). San Cristóbal de La Laguna: SEIEM.

Harel, G., Sowder, L. (2005). Advanced mathematical-thinking at Any Age: Its Nature and Its Development. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 27-50

Planas, N. (2006). Modelo de análisis de videos para el estudio de procesos de construcción de conocimiento matemático. *Educación Matemática, 18*(1), 37-72.

Powell, A. B., Francisco, J., Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners'mathematical ideas and reasoning using videotape data. *Mathematical behavior, 22*, 405-435.

Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K., Teppo, A. (2005). Advancing mathematical activity: A view of advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 51-73.

Robert, A., Schwarzenberger, R. (1991). Research in teaching and learning mathematics at an advanced level. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 127-139). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Sánchez, M. T. (2012). *Límite finito de una función en un punto: fenómenos que organiza*. Granada: UGR.

Sánchez-Matamoros, G. (2004). *Análisis de la comprensión en los alumnos de Bachillerato y primer año de la Universidad sobre la noción matemática de derivada (desarrollo del concepto)*. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla. España. Publicado en 2010 por Edición Digital @ tres, S.L.L.

Selden, A., Selden, J. (2005). Perspectives on advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 1-13.

Tall, D. (1991). The psychology of Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (1995). Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. En L. Meira y D. Carrahar (Eds.), *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 1*, 61-75.

ADOPTANDO DIFERENTES PERSPECTIVAS DE INVESTIGACIÓN SOBRE EL CONCEPTO DE DERIVADA

Different perspectives research about derivative concept

Gloria Sánchez-Matamoros

Universidad de Sevilla

Resumen

En este trabajo se aborda una trayectoria de investigaciones considerando el concepto de derivada. En primer lugar, se presentan investigaciones sobre el desarrollo de la comprensión del concepto y, posteriormente, investigaciones centradas en el aprendizaje de estudiantes para profesor de matemáticas de lo que se considera conocimiento adecuado para la enseñanza de dicho concepto. Esto conlleva, en cierto modo cierta transferencia del conocimiento en el sentido de que dichas investigaciones aportan información para el diseño de módulos de formación, permitiendo realizar investigaciones en el contexto de aula sobre el aprendizaje de los futuros profesores.

Palabras claves: *derivada, desarrollo de la comprensión, formación de profesores, competencia docente, mirar profesionalmente.*

Abstract

In this paper various investigations on the concept of derivative is addressed. Research about the development of understanding of the concept are presented first, and later research focused on learning of mathematics prospective teachers what is considered proper knowledge to learning and teaching that concept. This leads, in a way, transfer of knowledge in the sense that these investigations provide information for the design of training modules, and allows conduct research in the classroom context.

Key words: *derivative, development of understanding, prospective teacher training, teaching competence, professional noticing*.

INTRODUCCIÓN

El desarrollo de las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos del cálculo diferencial e integral y mi experiencia como profesora de Educación Secundaria, me han permitido comprobar la enorme dificultad de la enseñanza y el aprendizaje de estos conceptos y, en particular, del concepto de Derivada. Artigue (1995) indica a que aunque se puede enseñar a los estudiantes a realizar, de manera más o menos mecánica, algunos cálculos de derivadas y a resolver algunos problemas estándar, los estudiantes tienen dificultades en comprender de manera satisfactoria este concepto. Mi trabajo como investigadora relacionada con el concepto de derivada tiene dos etapas:

- Una primera etapa centrada en describir la comprensión de la idea de derivada, y
- Una segunda centrada en el aprendizaje de los estudiantes para profesor de lo que empezábamos a considerar como conocimiento pertinente para la enseñanza-aprendizaje de la derivada generado por las investigaciones. Esta segunda etapa se apoya en la información generada en las investigaciones realizadas en la primera etapa y conlleva aspectos de transferencia del conocimiento al aportar información para el diseño de módulos de formación y al mismo tiempo permite desarrollar investigaciones en el contexto de aula mediante el desarrollo de experimentos de enseñanza.

Sánchez-Matamoros, G. (2014). Adoptando diferentes perspectivas de investigación sobre el concepto de derivada. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 41-53). Salamanca: SEIEM.

INVESTIGANDO LA COMPRENSIÓN DE LA DERIVADA

La comprensión del concepto de derivada es complicada debido a las diferentes perspectivas que puede adoptar dicho concepto: como pendiente de la tangente a la curva, desde un punto de vista gráfico, y como límite del cociente incremental, desde una perspectiva analítica. Además se plantea la necesidad de integrar su carácter puntual (derivada en un punto) y global (e.g. el análisis del comportamiento de las funciones en intervalos) y las relaciones entre la derivada en un punto y la función derivada, y las relaciones entre f' y f''

Una primera aproximación al análisis de la comprensión de la derivada adoptó una perspectiva cognitiva. El foco de atención era caracterizar niveles de desarrollo de la comprensión del concepto considerando diferentes elementos que intervienen tanto desde el punto de vista de la cognición (mecanismos de construcción del conocimiento, formas de conocer, esquema) como de la propia naturaleza del concepto (aproximación al límite, modos de representación, el carácter local o global,…). Aquí se entiende el esquema como una manera de comprender un concepto que implica considerar de forma coherente las relaciones entre los diferentes elementos matemáticos que lo constituyen (Sánchez-Matamoros, García & Llinares, 2013). El uso de estos elementos en la resolución de problemas evidencia la estructura matemática construida por los resolutores. Para interpretar la manera en la que los estudiantes resolvían los problemas en los que intervenía el concepto de derivada se usó una perspectiva piagetiana sobre el desarrollo de un esquema utilizando los niveles Intra, Inter y Trans (García, Llinares &Sánchez-Matamoros, 2011; Sánchez-Matamoros, García & Llinares, 2006).

En estas primeras investigaciones usamos cuestionarios y entrevistas para recoger la información. Las diferentes *demandas de los problemas* usados tenían como objetivo proporcionar diferentes oportunidades para recoger información que nos permitiera caracterizar el desarrollo del esquema de derivada. La entrevista, por su parte, tenía como objetivo obtener justificaciones de las resoluciones de los problemas. Las entrevistas permitieron ampliar la información sobre cómo los estudiantes establecen relaciones entre los elementos, las cuales fundamentaron las inferencias sobre el desarrollo del esquema de derivada, y generaron indicadores de la transición entre los niveles (Sánchez-Matamoros, 2004). Asumir que resolver un problema en un cuestionario y justificar las decisiones tomadas al responder a un entrevistador son actividades cognitivas diferentes nos ha proporcionado datos de naturaleza distinta en relación a la consciencia que los estudiantes tenían de los elementos del concepto que usaban y de cómo los relacionaban.

Los resultados de esta investigación nos indicaron que el desarrollo del esquema de derivada:

- está vinculado a coordinar los elementos del concepto durante la resolución de problemas y
- que los modos de representación influyen a la hora de establecer las relaciones. En este contexto, la "síntesis" de la información gráfica y analítica es considerada una característica del nivel de desarrollo de la comprensión de la derivada. Por la idea de “síntesis” se entiende el proceso por el que a partir de algo que se conoce, realizando operaciones con/sobre ello se llega a la conclusión y a la comprensión de algo que no se conocía. La "síntesis" de la información gráfica y analítica fue considerada una característica de la manera en la que los estudiantes reflexionaban sobre las transformaciones realizadas con los elementos para construir nuevas relaciones y estructuras (nivel Trans de desarrollo del esquema de derivada).

Los resultados obtenidos se han integrado en lo obtenido en las investigaciones realizadas en los últimos años a nivel nacional e internacional, algunas de ellas centradas en el conocimiento del profesor sobre la derivada (Badillo, Azcarate & Font, 2011; Pino-Fan, Godino, Castro & Font, 2012), y otras centradas en la comprensión sobre dicho concepto por parte del estudiante (Asiala, Cottrill, Dubinsky & Schwingendorf, 1997; Baker, Cooley & Trigueros, 2000; Cooley, Trigueros &

Baker, 2007; Ferrini-Mundy & Graham, 1994; Habre & Abboud, 2006; Salazar, Díaz & Ballen, 2009; Sánchez-Matamoros, García & Llinares, 2008). Los resultados de estas investigaciones indican que el desarrollo de la comprensión del concepto de derivada pone de manifiesto una construcción progresiva del esquema y que los modos de representación influyen en la constitución de los mecanismos de transición de un nivel al siguiente. En particular, los estudiantes situados en el nivel Trans de desarrollo del esquema de derivada y que eran capaces de trasladar las relaciones entre f y f' al par de funciones (f', f'') fue interpretado como que habían tematizado el esquema de derivada. Este resultado parece indicar que hay diferentes estructuras subyacentes en la construcción de un esquema debido a la consciencia con la que los estudiantes usan las relaciones entre una función y su derivada (García et al., 2011).

INVESTIGANDO LA COMPETENCIA DOCENTE "MIRAR PROFESIONALMENTE" LAS EVIDENCIAS DE COMPRENSIÓN DE LA DERIVADA

Los resultados de las investigaciones que aportan información sobre la manera en la que los estudiantes comprenden el concepto de derivada se considera un conocimiento necesario para que el profesor pueda tomar decisiones informadas en su enseñanza y para el desarrollo del currículo. De manera particular en el contexto de la formación de profesores este hecho ha generado una línea de investigación centrada en determinar cómo los futuros profesores aprenden este conocimiento y cómo aprenden a usarlo en las situaciones de enseñanza. Es decir, el trabajo de formación de profesores de Matemáticas de Educación Secundaria ha generado un nuevo foco de investigación centrado en el aula. En particular, cómo los futuros profesores desarrollan una mirada profesional (professional noticing) relativa a la manera en la que reconocen evidencias de la comprensión matemática en los estudiantes. En los últimos años se ha subrayado la importancia de esta competencia docente (Mason, 2002; Sherin, Jacobs & Philipp, 2010; van Es & Sherin, 2002), ya que permite al profesor de matemáticas ver las situaciones de enseñanza- aprendizaje de una manera que lo diferencia de la manera de mirar de alguien que no es profesor de matemáticas.

En las investigaciones desarrolladas en nuestro grupo, se han generado dos focos de atención. Por una parte caracterizar lo que podemos considerar la competencia docente "mirar profesionalmente" y su papel en la toma de decisiones instruccionales, y en segundo lugar intentar caracterizar grados de desarrollo de esta competencia docente en el ámbito específico de la derivada de una función (Sánchez-Matamoros, Fernández, Valls, García & Llinares, 2012; Sánchez-Matamoros, Fernández & Llinares, 2014). Una característica de esta línea de investigación es el uso de los resultados de las investigaciones previas sobre el desarrollo de la comprensión de la derivada para diseñar las tareas profesionales. Estas tareas profesionales adoptan una doble perspectiva, por un lado como actividades para el aprendizaje del futuro profesor, y por otro como instrumentos de recogida de datos en la investigación centrada en los experimentos de enseñanza. Las actividades que simulan las tareas profesionales en el programa de formación se diseñan a partir de los resultados de investigaciones previas (Asiala et al., 1997; Baker et al., 2000; Ferrini-Mundy & Graham, 1994; García et al., 2011; Habre & Abboud 2006; Zandieth, 2000), centradas en el desarrollo de la comprensión de la función derivada. Los resultados de dichas investigaciones han permitido describir una trayectoria de aprendizaje del concepto de derivada (Sánchez-Matamoros et al., 2014)

Esta trayectoria de aprendizaje de la derivada (Figura 1) ha sido tenida en cuenta para el diseño de las tareas profesionales propuestas a los estudiantes para profesor (EPP). Una de las tareas profesionales del profesor es identificar evidencias de la comprensión de las ideas matemáticas en las respuestas de sus alumnos a los problemas propuestos. Pensando en ello, una de las actividades propuestas en el programa de formación se apoyaba en esta idea. Para ello consideramos:

(i) Tres problemas sobre derivada

(ii) Las respuestas de varios alumnos de Bachillerato a estos problemas, y

(iii) Tres preguntas para el futuro profesor de matemáticas dirigidas a ver cómo reconocía evidencias de la comprensión de los estudiantes del concepto de derivada.

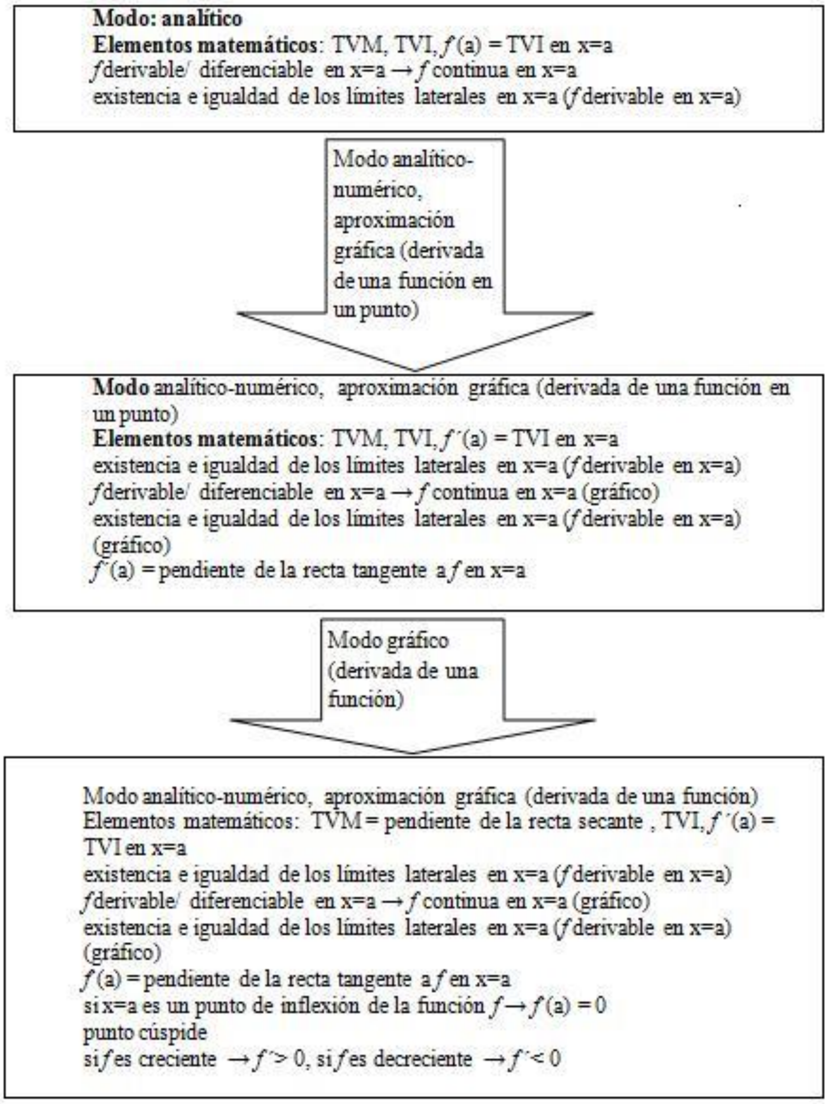


Figura 1. Trayectoria de aprendizaje hipotética del concepto de derivada generada a partir de las síntesis de las investigaciones previas.

(i) Los problemas muestran diferentes elementos matemáticos del concepto de derivada de una función en diferentes modos de representación. En la figura 2 se recoge tres de los problemas usados, los elementos matemáticos que lo configuran y los modos de representación considerados.

(ii) Las respuestas de los estudiantes a estos problemas fueron seleccionadas teniendo en cuenta los niveles de comprensión del concepto de derivada:

- Nivel INTRA: El estudiante usa elementos de la derivada de una función en un punto en algunos de los modos de representación y no es capaz de relacionarlos cuando resuelve los problemas.
- Nivel INTER: El estudiante usa elementos de la derivada de una función en un punto en algunos de los modos de representación y es capaz de relacionarlos cuando resuelve los problemas.

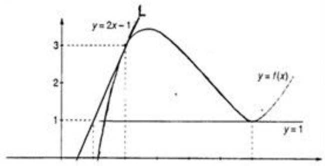
<table>
<tr>
<td>Problema 1
Comprueba que la tasa de variación media de $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$ en el intervalo [1, 2] es la pendiente de la recta que pasa por los puntos P(1, f(1)) y Q(2, f(2)). ¿Qué sucede con la tasa de variación instantánea de f(x) en el punto (1, f(1))?</td>
<td>Problema 2
Suponer que la línea L es tangente a la gráfica de la función f en el punto (2,3) como aparece en la figura. Encontrar f(2) y f '(2).
</td>
<td>Problema 3
De una cierta función f conocemos algunos valores dados en la siguiente tabla:
<table>
<tr><td>x</td><td>0.9</td><td>0.99</td><td>0.999</td><td>0.9999</td><td>0.99999</td><td>1</td><td>1.00001</td><td>1.0001</td><td>1.001</td><td>1.01</td><td>1.1</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>-2.1</td><td>-2.01</td><td>-2.001</td><td>-2.0001</td><td>-2.00001</td><td>-2</td><td>-2.00002</td><td>-2.0002</td><td>-2.002</td><td>-2.02</td><td>-2.2</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>x</td><td>1.9</td><td>1.99</td><td>1.999</td><td>1.9999</td><td>1.99999</td><td>2</td><td>2.00001</td><td>2.0001</td><td>2.001</td><td>2.01</td><td>2.1</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>3.61</td><td>3.9601</td><td>3.996001</td><td>3.99960001</td><td>3.99996</td><td>4</td><td>4.00004</td><td>4.00040001</td><td>4.004001</td><td>4.0401</td><td>4.41</td></tr>
</table>
a) Usa esta tabla para aproximar el valor de la derivada de f en x=2.
b) A partir de la información que te da esta tabla, ¿crees que f(x) es derivable en x =1?</td>
</tr>
<tr>
<td>Elementos</td>
<td>Elementos</td>
<td>Elementos</td>
</tr>
<tr>
<td>M1.1 Tasa de variación media en el intervalo [a, b]
M1.2. Relación de la TVM con la pendiente de la secante
M1.3. Tasa de variación instantánea
M1.4. Relación de la TVI con la derivada en x=a.
M1.5. Relación de la TVI con la pendiente de la tangente (entrevista)</td>
<td>M2.Interpretación geométrica de la derivada en un punto: la derivada como pendiente de la recta tangente a la curva en el punto</td>
<td>M3.1. Aproximación – Calidad de la aproximación
M3.2. Existencia e igualdad de los límites laterales del cociente incremental para que la función sea derivable en x = a (aproximación numérica a través de las tablas de valores)</td>
</tr>
</table>

Figura 2. Elementos matemáticos en la resolución de los problemas usados (Sánchez-Matamoros et al., 2012)

- Nivel TRANS: El estudiante usa todos los elementos de la derivada de una función en un punto tanto en modo analítico como gráfico y en su aproximación numérica relacionándolos cuando resuelve los problemas.

La Figura 3 muestra parte de una de las actividades diseñadas

(iii)Las preguntas para el futuro profesor de matemáticas dirigidas a ver cómo reconocía evidencias de la comprensión de los estudiantes del concepto de derivada tenían el siguiente formato

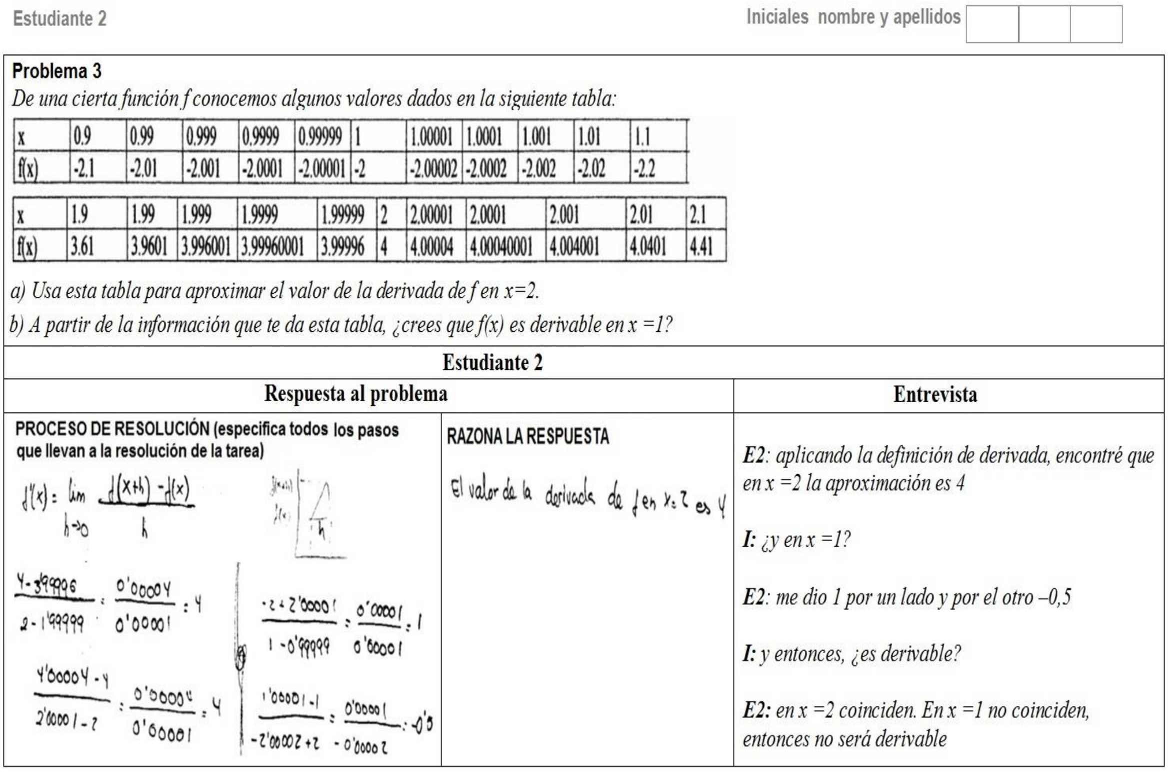
- *Describe cómo ha resuelto el estudiante X cada problema, indicando los elementos del concepto de derivada utilizados y si el procedimiento usado es adecuado y por qué.*
- *A partir de las descripciones de cómo el estudiante ha realizado los tres problemas, ¿es posible identificar alguna característica de cómo el estudiante X comprende el concepto de derivada?*
- *Considerando la comprensión de derivada del estudiante X mostrada en la resolución de los problemas, si fueras su profesor, ¿qué harías para mejorar esta comprensión?*

Desde la perspectiva del uso de esta tarea profesional como instrumento de recogida de datos, los resultados de esta investigación han permitido empezar a caracterizar descriptores de diferentes grados de desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" el pensamiento matemático de los estudiantes en el ámbito de la derivada de una función en un punto (Tabla 1). Estos resultados indican que existe cierta relación entre cómo los futuros profesores identifican los elementos matemáticos y los modos de representación en las respuestas de los estudiantes y la manera en la que interpretan estas respuestas como evidencia de la comprensión de los estudiantes.

La importancia de esta caracterización de la competencia docente “mirar profesionalmente” las evidencias de la comprensión de la idea de derivada es que la interpretación generada por los estudiantes para profesor está relacionada con las acciones de enseñanza que proponen para ayudar a estos estudiantes a mejorar su comprensión. Una primera caracterización de este tipo de acciones de enseñanza ha sido descrita en Sánchez-Matamoros et al. (2012) mostrando la relación entre los objetivos de aprendizaje y las características de las tareas curriculares:

- **Sin acción**. No aporta ninguna acción significativa.
- **Acción procedimental**. Acciones centradas en los procedimientos.
- **Acción conceptual sin relaciones**. Acciones centradas en los significados de los elementos matemáticos pero sin establecer relaciones entre los distintos elementos matemáticos y/o modos de representación.
- **Acción conceptual con relaciones**. Acciones centradas en los significados de los elementos matemáticos estableciendo relaciones entre los distintos elementos matemáticos y/o modos de representación.
- **Acción de tematización.** Acciones centradas en que el estudiante sea capaz de pasar de la acción implícita a la utilización consciente, es decir, a la conceptualización de la derivada de una función en un punto.

En este caso, cuando los futuros profesores diferencian algunas características de la comprensión de los estudiantes, proponen acciones de enseñanza centradas en significados (acciones conceptuales o acciones de tematización). En este sentido, se han empezado a generar relaciones entre el nivel de desarrollo de la competencia docente “mirada profesional” de los EPP y las acciones de enseñanza que se proponen (Sánchez-Matamoros et al., 2012).



Estudiante 2 Iniciales nombre y apellidos

Problema 3

De una cierta función f conocemos algunos valores dados en la siguiente tabla:

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	1	1.00001	1.0001	1.001	1.01	1.1
f(x)	-2.1	-2.01	-2.001	-2.0001	-2.00001	-2	-2.00002	-2.0002	-2.002	-2.02	-2.2

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	2	2.00001	2.0001	2.001	2.01	2.1
f(x)	3.61	3.9601	3.996001	3.99960001	3.99996	4	4.00004	4.00040001	4.004001	4.0401	4.41

a) Usa esta tabla para aproximar el valor de la derivada de f en x=2.

b) A partir de la información que te da esta tabla, ¿crees que f(x) es derivable en x =1?

Estudiante 2

Respuesta al problema		Entrevista
PROCESO DE RESOLUCIÓN (especifica todos los pasos que llevan a la resolución de la tarea) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $\frac{4 - 3'99996}{2 - 1'99999} = \frac{0'00004}{0'00001} = 4$ $\frac{4'00004 - 4}{2'00001 - 2} = \frac{0'00004}{0'00001} = 4$ $\frac{-2 + 2'00001}{1 - 0'99999} = \frac{0'00001}{0'00001} = 1$ $\frac{1'00001 - 1}{-2'00002 + 2} = \frac{0'00001}{-0'00002} = -0'5$	RAZONA LA RESPUESTA El valor de la derivada de f en x=2 es 4	*E2: aplicando la definición de derivada, encontré que en x =2 la aproximación es 4* ***I:** ¿y en x =1?* ***E2:** me dio 1 por un lado y por el otro –0,5* ***I:** y entonces, ¿es derivable?* ***E2:** en x =2 coinciden. En x =1 no coinciden, entonces no será derivable*

Figura 3. Respuesta de un estudiante a uno de los problemas

Estos resultados indican que aunque los EPP podían tener una formación matemática adecuada para este contenido matemático, resulta difícil para algunos de ellos describir las resoluciones de los estudiantes de bachillerato usando los elementos matemáticos del concepto y reconocer las características de su comprensión. Esta dificultad puso de manifiesto cierta falta de reconocimiento de los elementos matemáticos que intervenían en la resolución de los problemas realizados por los estudiantes y su papel en determinar su comprensión. Esta reflexión pone de relieve el hecho de que tener un cierto nivel de conocimiento del contenido matemático no implica el ser capaz de hablar de cómo ese contenido aparece en la resolución de un problema realizada por un estudiante de bachillerato, y generar información sobre su comprensión.

Tabla 1. Identificar elementos matemáticos en las respuestas de los estudiantes e interpretar la comprensión de los estudiantes (Sánchez-Matamoros et al., 2012)

		Identificar elementos matemáticos y modos de representación		
		Nivel bajo	Nivel medio	Nivel alto
Interpretar la comprensión de los estudiantes (ser capaz de identificar los diferentes niveles de comprensión de los estudiantes)	No reconocen diferentes niveles de la comprensión	EPP no identifican elementos matemáticos en las respuestas de los estudiantes y no reconocen diferentes niveles de la comprensión de los estudiantes.	EPP no identifican todos elementos matemáticos a través de las respuestas de los tres estudiantes y no reconocen diferentes niveles de la comprensión de los estudiantes.	EPP identifican los elementos matemáticos en las respuestas de los estudiantes pero no reconocen diferentes niveles de la comprensión de los estudiantes.
	Reconocen dos niveles de comprensión		EPP no identifican todos elementos matemáticos a través de las respuestas de los tres estudiantes y los interpretan reconociendo sólo dos niveles de comprensión.	EPP identifican todos elementos matemáticos a través de las respuestas de los tres estudiantes y los interpretan reconociendo sólo dos niveles de comprensión.
	Reconocen tres niveles de comprensión			EPP identifican todos elementos matemáticos a través de las respuestas de los estudiantes e interpretan los diferentes niveles de comprensión de los tres estudiantes.

Un aspecto característico de la competencia docente “mirar profesionalmente” es el ser capaz de relacionar evidencias específicas a perspectivas más amplias sobre el aprendizaje (Sherin et al., 2010). En los resultados obtenidos, este aspecto se pone de manifiesto a través de las interpretaciones generadas por los EPP sobre la comprensión de la función derivada en un punto de los estudiantes de bachillerato y su vinculación a las actividades que proponían (decisiones de acción). Estos resultados indican que este aspecto es más difícil de conseguir. En el caso particular de futuros profesores de matemáticas que no han recibido instrucción específica sobre la comprensión de la derivada de los estudiantes de Bachillerato, estos resultados ponen de manifiesto la especificidad del conocimiento sobre el aprendizaje de las matemáticas, que no deriva necesariamente del conocimiento de matemáticas. Es decir, este tipo de investigación lo que aporta son evidencias sobre el hecho de que el conocimiento de matemáticas es necesario pero no suficiente para ser profesor de matemáticas, ya que se necesita conocimiento especifico sobre cómo los conceptos matemáticos (y en particular el concepto de derivada) llegan a ser comprendidos (Sánchez-Matamoros et al., 2012).

INVESTIGACIÓN SOBRE EL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA DOCENTE "MIRAR PROFESIONALMENTE" EN EL CONTEXTO DE UN PROGRAMA DE FORMACIÓN

Un segundo foco de atención en las investigaciones desarrolladas sobre la competencia docente ha sido determinar rasgos de su desarrollo vinculado a contextos de formación de profesores específicos (Sánchez-Matamoros, Fernández, Llinares & Valls, 2013; Sánchez-Matamoros et al., 2014). Este foco de atención pone de relieve la relación entre los experimentos de enseñanza y la investigación en el aula (Llinares, 2014-a). En concreto, nuestra pregunta de investigación es:

> ¿En qué medida los estudiantes para profesor de matemáticas identifican e interpretan la comprensión de los estudiantes de Bachillerato después de participar en un entorno de aprendizaje diseñado ad hoc?

Estas investigaciones se apoyan en el diseño de situaciones de enseñanza dirigidas a apoyar el desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" (Fortuny & Rodríguez, 2012; Llinares, 2012). Un ejemplo de diseño de estas situaciones de enseñanza, que vinculan propuestas de innovación docente con la investigación sobre cómo los futuros profesores aprenden en el caso de la derivada, se describe a continuación.

En nuestro diseño de enseñanza, en la primera y última sesión, los estudiantes realizaron tareas que tenían como objetivo obtener información sobre su capacidad de reconocer evidencias de la comprensión de los estudiantes de bachillerato cuando observaban las resoluciones de problemas realizadas por dichos estudiantes. Estas tareas tenían la misma estructura que las tareas usadas en los cuestionarios descritos en la sección anterior. Las otras cinco sesiones tenían como objetivo presentar información relativa a la demanda cognitiva de las tareas y sobre las características de la comprensión del concepto de derivada en estudiantes de bachillerato. En cada una de estas sesiones los EPP con el apoyo de información teórica resolvían en parejas tareas centradas en identificar los elementos matemáticos del concepto de derivada y la demanda cognitiva de diferentes problemas e identificar características de la comprensión de la derivada. Al final de cada sesión había una discusión en gran grupo donde se debatía sobre la tarea realizada (Figura 4).

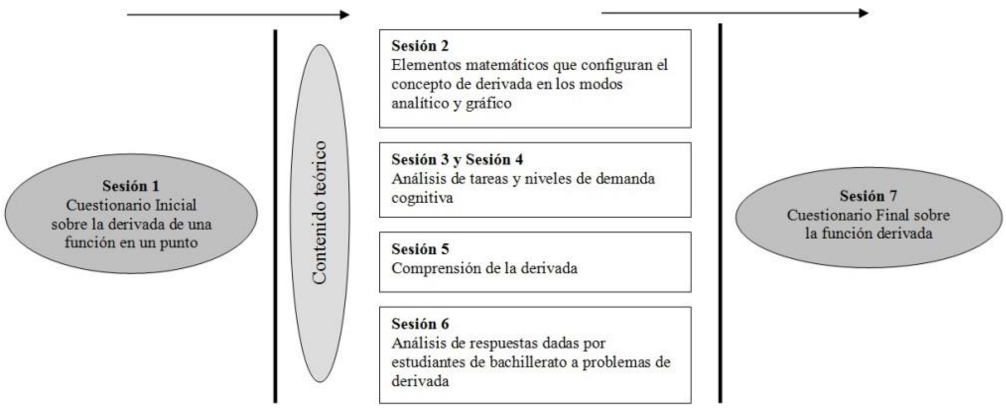
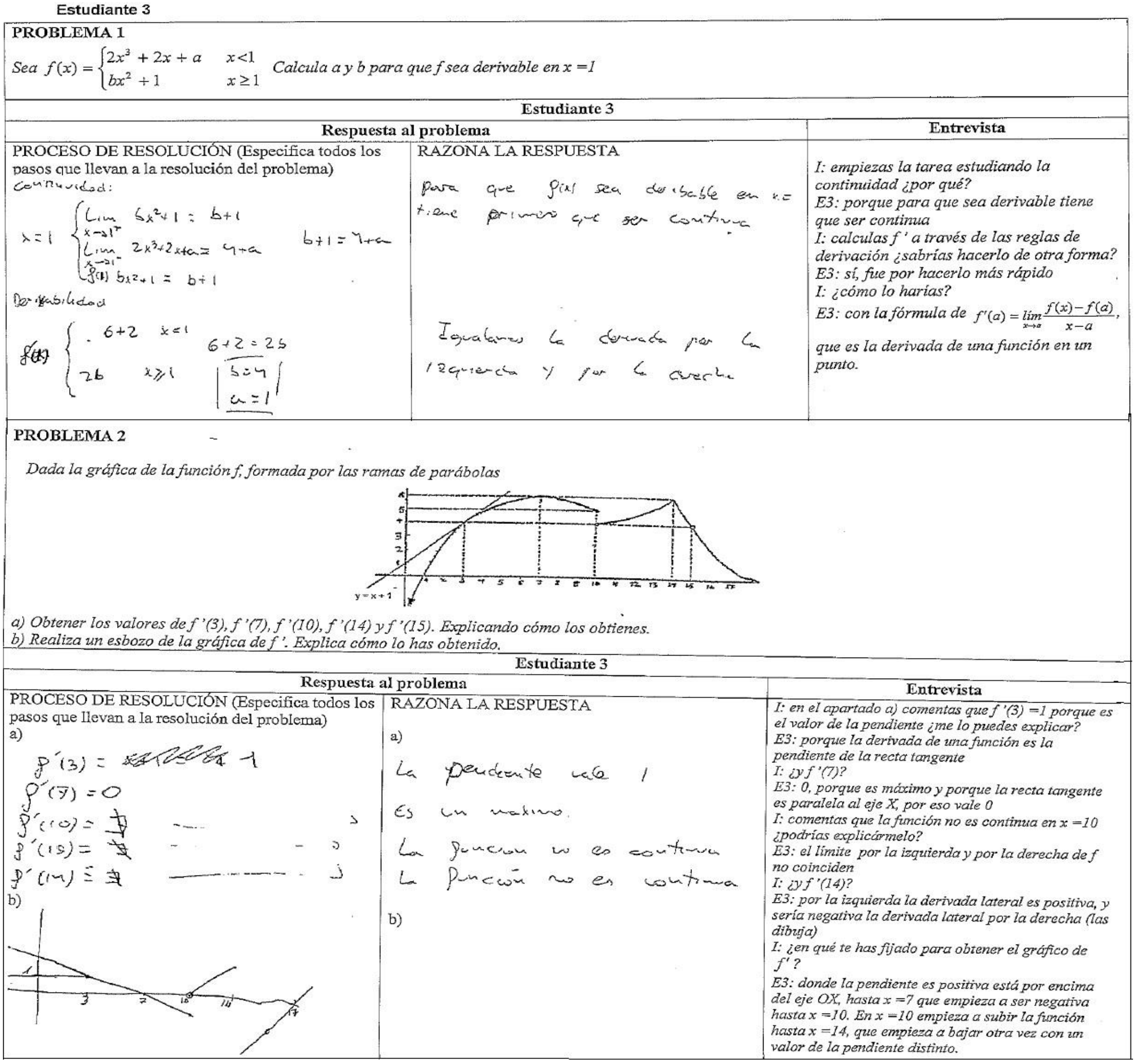


Figura 4. Esquema del diseño del módulo de derivada (Sánchez-Matamoros et al., 2013)

Las actividades iniciales y finales consistían en las respuestas de estudiantes de Bachillerato (16-18 años) a problemas de derivada en un punto, acompañadas de un extracto de entrevista en las que los estudiantes explicaban cómo los habían resuelto y las tres mismas preguntas de la sección anterior. Las respuestas de los estudiantes reflejaban diferentes aspectos de la comprensión sobre la derivada proporcionados por investigaciones previas en relación al desarrollo de la comprensión de la derivada (Figura 5).


Estudiante 3

PROBLEMA 1

Sea $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 2x + a & x<1 \\ bx^2 + 1 & x \geq 1 \end{cases}$ *Calcula a y b para que f sea derivable en x =1*

Estudiante 3

Respuesta al problema		Entrevista
PROCESO DE RESOLUCIÓN (Especifica todos los pasos que llevan a la resolución del problema)	RAZONA LA RESPUESTA	*I: empiezas la tarea estudiando la continuidad ¿por qué?*
Continuidad: $x=1$ $\lim_{x\to1^+} bx^2+1 = b+1$; $\lim_{x\to1^-} 2x^3+2x+a = 4+a$; $f(1)\ bx^2+1 = b+1$; $b+1=4+a$	Para que $f(x)$ sea derivable en $x=1$ tiene primero que ser continua	*E3: porque para que sea derivable tiene que ser continua* *I: calculas f ' a través de las reglas de derivación ¿sabrías hacerlo de otra forma?* *E3: sí, fue por hacerlo más rápido* *I: ¿cómo lo harías?*
Derivabilidad: $f'(x) \begin{cases} 6+2 & x<1 \\ 2b & x\geq1 \end{cases}$ $6+2=2b$; $b=4$; $a=1$	Igualamos la derivada por la izquierda y por la derecha	*E3: con la fórmula de* $f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, *que es la derivada de una función en un punto.*

PROBLEMA 2

Dada la gráfica de la función f, formada por las ramas de parábolas

y = x + 1

a) Obtener los valores de f '(3), f '(7), f '(10), f '(14) y f '(15). Explicando cómo los obtienes.
b) Realiza un esbozo de la gráfica de f '. Explica cómo lo has obtenido.

Estudiante 3

Respuesta al problema		Entrevista
PROCESO DE RESOLUCIÓN (Especifica todos los pasos que llevan a la resolución del problema)	RAZONA LA RESPUESTA	*I: en el apartado a) comentas que f '(3) =1 porque es el valor de la pendiente ¿me lo puedes explicar?*
a) $f'(3) = 1$ $f'(7) = 0$ $f'(10) = \nexists$ $f'(15) = \nexists$ $f'(14) = \nexists$	a) La pendiente vale 1 Es un máximo La función no es continua La función no es continua	*E3: porque la derivada de una función es la pendiente de la recta tangente* *I: ¿y f '(7)?* *E3: 0, porque es máximo y porque la recta tangente es paralela al eje X, por eso vale 0* *I: comentas que la función no es continua en x =10 ¿podrías explicármelo?* *E3: el límite por la izquierda y por la derecha de f no coinciden* *I: ¿y f '(14)?* *E3: por la izquierda la derivada lateral es positiva, y sería negativa la derivada lateral por la derecha (las dibuja)*
b)	b)	*I: ¿en qué te has fijado para obtener el gráfico de f ' ?* *E3: donde la pendiente es positiva está por encima del eje OX, hasta x =7 que empieza a ser negativa hasta x =10. En x =10 empieza a subir la función hasta x =14, que empieza a bajar otra vez con un valor de la pendiente distinto.*

Figura 5. Parte de la actividad final en el modulo de formación: Respuestas de un estudiante de Bachillerato a dos problemas

Después del módulo, los estudiantes para profesor se apoyaron en mayor medida en los elementos matemáticos que habían identificado para interpretar la comprensión de los estudiantes. Este hecho parece sugerir que el desarrollo de esta competencia docente está vinculado a los elementos matemáticos de la noción de derivada que los estudiantes para profesor son capaces de considerar al describir, identificar e interpretar evidencias de la comprensión de la derivada en las respuestas de los estudiantes. Es decir, a centrar la mirada sobre aspectos que puedan mostrar información relevante de la manera de proceder de los estudiantes de Bachillerato. La capacidad de mirar con más detalle las respuestas de los estudiantes y de reconocer lo que es relevante diferenciándolo de lo que es irrelevante para el aprendizaje se convierte en indicadores de esta competencia. En particular esta mejora en la competencia docente está vinculada a la manera en la que los estudiantes para profesor identificaban como relevante para interpretar la comprensión en la manera en la que los estudiantes de Bachillerato usaban las siguientes relaciones en la resolución de los problemas:

- La relación entre el límite del cociente incremental y el significado de la derivada como pendiente de la recta tangente
- La relación entre la derivabilidad de la función y su continuidad, y
- La manera en la que se usaba la información obtenida desde la función o la función derivada alrededor de los puntos de inflexión y el punto cúspide (entendido como la manera de interpretar el comportamiento de la función derivada para inferir información sobre el comportamiento de la función).

En la sección anterior, comentábamos la especificidad del conocimiento sobre el aprendizaje de las matemáticas, y que no deriva necesariamente del conocimiento de matemáticas. Este hecho se evidencia al caracterizar los grados de desarrollo. En este sentido, el diseño de situaciones de enseñanza específicas permitió a los futuros profesores de matemáticas identificar e interpretar aspectos de la enseñanza de las matemáticas (en el concepto de derivada) para explicar el aprendizaje matemático de los estudiantes (mirada profesional). Los procesos de identificar e interpretar desarrollados por los EPP permitieron realizar suposiciones más detalladas acerca de la comprensión de los estudiantes y darse cuenta de diferentes signos de la comprensión del concepto de derivada.

DISCUSIÓN

En este trabajo hemos caracterizado una trayectoria de investigación que tiene como foco central de atención el concepto de derivada. Esta trayectoria se inicia con las investigaciones centradas en el desarrollo de la comprensión de dicho concepto y, ha continuado con el diseño de experimentos de enseñanza y realizando investigación en las aulas de los programas de formación de profesores centrándose en el aprendizaje de estudiantes para profesor de matemáticas de lo que consideramos conocimiento adecuado para la enseñanza del concepto de derivada. Esto conlleva, en cierto modo, una manera de entender la transferencia del conocimiento en el sentido de que dichas investigaciones aportan información para el diseño de módulos de formación, además de permitir realizar investigaciones en el contexto de aula (Llinares, 2014-b).

La primera etapa de las investigaciones estuvo centrada en caracterizar diferentes niveles de desarrollo de la comprensión del concepto de derivada considerando diferentes elementos tanto desde el punto de vista de la cognición, como de la propia naturaleza del concepto. Los resultados obtenidos en esta primera etapa nos han permitido hacer un diseño de tareas profesionales, centradas en el aprendizaje de los estudiantes para profesor, para ser usadas en los programas de formación.

Con las diferentes tareas diseñadas se creaban situaciones profesionales en las que los estudiantes para profesor podían comparar las respuestas de un estudiante a diferentes problemas con características diferentes en cuanto a la propia naturaleza del concepto (aproximación al límite, modos de representación, el carácter local o global) y , por el otro, podrían comparar las respuestas dadas a cada problema por distintos estudiantes que mostraban diferentes desarrollo de la comprensión de la derivada (mecanismos de construcción del conocimiento, triada). Estas tareas nos han permitido ayudar a los futuros profesores a desarrollar la competencia docente de mirar profesionalmente el pensamiento matemático de sus estudiantes y a observar cómo los futuros profesores eran capaces de identificar e interpretar la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes.

Mason (2002) considera que el profesor debe ser consciente de cómo interpreta las situaciones de enseñanza y aprendizaje mediante la adopción de una visión estructurada de lo que es relevante para los objetivos de aprendizaje de sus estudiantes. En este sentido, el uso explícito de los elementos matemáticos por parte de los futuros profesores para analizar situaciones de enseñanza aprendizaje son evidencias del desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente". Además, la capacidad de mirar con más detalle las respuestas de los estudiantes y de reconocer lo que es relevante diferenciándolo de lo que es irrelevante para el aprendizaje se convierte en indicadores de esta competencia. La importancia de esta competencia docente viene dada porque diferencia a un profesor de matemáticas de alguien que no es profesor y viene caracterizada por el uso del conocimiento de matemáticas y de didáctica de la matemática en determinadas situaciones.

Los resultados de las investigaciones de esta segunda etapa, nos han proporcionado información para caracterizar niveles de desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente". Es decir, caracterizar el desarrollo de la capacidad de interpretar el aprendizaje matemático de los estudiantes en un dominio de contenido específico, la derivada. En la última etapa de las investigaciones sobre la competencia docente un objetivo ha sido determinar rasgos de su desarrollo vinculado a contextos de formación de profesores específicos lo que ha puesto de manifiesto la relación entre los experimentos de enseñanza y la investigación en el aula. La creación de módulos de enseñanza específico, con situaciones de enseñanza dirigidas a apoyar el desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" las evidencias de la comprensión del concepto de derivada en los estudiantes de bachillerato, ayudó a los futuros profesores a identificar e interpretar diferentes signos de la comprensión del concepto de derivada puestas de manifiesto por los estudiantes de bachillerato. Esta mejora en la competencia docente estuvo vinculada a la manera en la que los EPP identificaban como relevante cómo los estudiantes de bachillerato usaban determinadas relaciones en la resolución de los problemas. En concreto, las relaciones entre el límite del cociente incremental y el significado de la derivada como pendiente de la recta tangente, entre la derivabilidad y la continuidad de la función, y la manera en la que se usaba la información obtenida desde la función o la función derivada alrededor de los puntos de inflexión y el punto cúspide. De esta manera, hemos obtenido información para caracterizar niveles de desarrollo de la competencia "mirar profesionalmente" en el dominio de contenido de la derivada.

Aunque aquí sólo hemos mencionado los resultados obtenidos, el tipo de investigaciones llevadas cabo en esta segunda etapa, investigaciones de aula, nos permite considerar posibilidades muy variadas en cuanto a recogida de datos, pudiendo realizarse además, en distintos momentos del proceso de enseñanza aprendizaje y de distintas formas: cuestionarios individuales, tareas grupales, foros de discusión…, que pueden ayudar a generar nuevo conocimiento sobre cómo los estudiantes para profesor aprenden a usar el conocimiento de matemáticas y de didáctica de las matemáticas.

Reconocimientos. Esta investigación ha recibido el apoyo del Proyecto I+D+i EDU2011-27288 del Ministerio de Ciencia e Innovación. España.

Referencias

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.) *Ingeniería didáctica en educación matemática (un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* México D.C.: Grupo editorial Iberoamérica, 97-140.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. & Schwingendorf, K. (1997). The development of students´ graphical understanding of the derivate. *Journal of Mathematical Behavior, 16*, 399-431.

Badillo, E., Azcarate, C. & Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos $f'(a)$ y $f'(x)$ en profesores de Matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(2), 191-206.

Baker, B., Cooley, L. & Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *The Journal for Research in Mathematics Education, 31*, 557–578.

Cooley, L., Trigueros, M. & Baker, B. (2007). Scheme thematization: A framework and an example. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(4), 370‑392.

Ferrini-Mundy, J. & Graham, K. (1994). Research in calculus learning. Understanding limits, derivates and integrals. In J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning, MAA notes 33* (pp. 31-45). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Fortuny, J.M. & Rodríguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. *AIEM. Avances de Investigación en Educación matemática, nº 1,* 23-37.

García, M., Llinares, S. & Sánchez-matamoros, G. (2011). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*(5), 1023-1045

Habre, S. & Abboud, M. (2006). Student's conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *The Journal of Mathematical Behavior, 25,* 57-72.

Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática, nº 2,* 53-70.

Llinares, S. (2014-a). Experimentos de enseñanza e investigación. Una dualidad en la práctica del formador de profesores de matemáticas. *Educación Matemática, nº extraordinario XXV-aniversario,* 13-34

Llinares, S. (2014-b). De la investigación a la Innovación y la práctica en la enseñanza del Análisis Matemático. En Monográfico –Grupo DAM-SEIEM

Mason, J. (2002). Researching your own practice. The discipline of noticing. London: Routledge-Falmer.

Pino-Fan, L.R., Godino, J.D., Castro, W.F. & Font, V. (2012). Conocimiento didáctico-matemático de profesores en formación: Explorando el conocimiento especializado sobre la derivada. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 427 - 434). Jaén: SEIEM.

Salazar, Cl., Díaz, H. & Ballen, M.B. (2009). Descripción de niveles de comprensión del concepto de derivada. *Tecné, Episteme y Didaxis, 26,* 62-82

Sánchez-Matamoros, G. (2004). Análisis de la comprensión en los alumnos de Bachillerato y primer año de la Universidad sobre la noción matemática de derivada (desarrollo del concepto). Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla. España. Publicado en 2010 por Edición Digital @ tres, S.L.L.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., Valls, J., García, M. & Llinares, S. (2012). Cómo estudiantes para profesor interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato. La derivada de una función en un punto. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 497 - 508). Jaén: SEIEM

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., Llinares, S. & Valls, J. (2013). El desarrollo de la competencia de estudiantes para profesor de matemáticas de educación secundaria en identificar la comprensión de la derivada en estudiantes de Bachillerato. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVII (pp. 501-509). Bilbao: SEIEM

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2014) Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and Mathematics Education,* DOI: 10.1007/s10763-014-9544-y

Sánchez-Matamoros, G., García, M. & Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada [The development of derivative schema]. *Enseñanza de las Ciencias, 24(*1), 85-98.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en Didáctica de la Matemática [The understanding of derivative as an research topic in Mathematics Education]. *RELIME-Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(2), 267-296.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. & Llinares, S. (2013). Algunos indicadores del desarrollo del esquema de derivada de una función. *BOLEMA, 27*(45), 281-302.

Sherin, M., Jacobs, V. & Philipp, R. (Ed) (2010). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes*. New York: Routledge.

Van Es, E. & Sherin, M. (2002). Learning to notice: scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, 10, 571-596.

Zandieth, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. In E. Dubinsky, A.H. Shoenfeld & J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education IV CBMS Issues in Mathematics Education* (*vol. 8, 103-127)*. Providence, USA: American Mathematical Society.

RÉPLICA A LA PONENCIA “ADOPTANDO DIFERENTES PERSPECTIVAS DE INVESTIGACIÓN SOBRE EL CONCEPTO DE DERIVADA”

Answer to “Different perspectives research about derivative concept”

Carmen Azcárate

Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

En esta réplica a la ponencia presentada por la profesora Sánchez-Matamoros, y después de unas consideraciones personales, se destaca su trayectoria investigadora centrada en analizar la comprensión del concepto de derivada abarcando los ámbitos de aprendizaje (en alumnos de secundaria) y de enseñanza (en futuros profesores de matemáticas). Se señalan sus aportaciones en el marco de la teoría APOE reflejadas en numerosas publicaciones y su aplicación al campo de la formación de profesores.

Palabras claves: *derivada, desarrollo de la comprensión, formación de profesores, competencia docente, mirar profesionalmente*.

Abstract

In this answer to the paper of Gloria Sánchez-Matamoros, and after some personal considerations, I will underline her research trajectory which is centred on the analysis of the understanding of the derivative concept focused on learning (secondary pupils) and teaching (mathematics teachers training). I will point out her contributions to the APOS theory reflected on several publications and their applications to the area of teachers training.

Key words: *derivative, development of understanding, prospective teacher training, professional competence, professional noticing*.

APUNTES PERSONALES

En octubre se me acaba el emeritaje que he disfrutado durante 4 años, el plazo máximo que da la universidad a este tipo de contrato. En ese momento dicen que dejaré de ser profesora universitaria. Bien es verdad que me he ido distanciando poco a poco de mis funciones en el departamento, pero he mantenido mi fidelidad a la SEIEM, entre otras cosas por formar parte del equipo que ha puesto en marcha la revista AIEM. No os vais a librar de mí; son buenas y muchas las amistades que tengo aquí y que no quiero perder de vista.

La derivada de una función, otro tema personal. En 1990 presenté mi tesis doctoral "La velocidad: introducción a la derivada". A los escépticos y descreidos respecto a la investigación en Didáctica de las Matemáticas, les invitaría a revisar y comparar mi tesis y los últimos trabajos de Gloria: el paso dado es gigantesco y para mí es un motivo de satisfacción, no dudo que compartido por nuestra comunidad.

Solo quiero hacer un poco de historia que viene al caso. Cuando empecé a interesarme por el tema de la enseñanza de la derivada, junto con el Grup Zero de Barcelona y con el apoyo de un material de Claude Janvier, introducir la derivada antes de estudiar límites y, por tanto, prescindiendo de la fórmula típica, era totalmente innovador e incluso muy mal visto por la comunidad docente. Con el material del Grup Zero se empezaba a enseñar la derivada con un enfoque de pre-cálculo donde se profundiza en los conceptos de pendiente de una recta, tangente a una curva y cálculo de la pendiente de la tangente por aproximación, a partir de las pendientes de las secantes. Así es cómo

Azcárate, C. (2014). Réplica a la ponencia “Adoptando diferentes perspectivas de investigación sobre el concepto de derivada”. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 55-58). Salamanca: SEIEM.

aparece en alguno de los problemas presentados por Gloria a sus estudiantes para profesor. Un tema interesante sería saber cómo esos estudiantes aprendieron el concepto de derivada cuando eran alumnos preuniversitarios y cómo han vivido el proceso de plantearse otro modo de enseñar.

IDEAS RELEVANTES DE LA PONENCIA DE GLORIA SÁNCHEZ-MATAMOROS

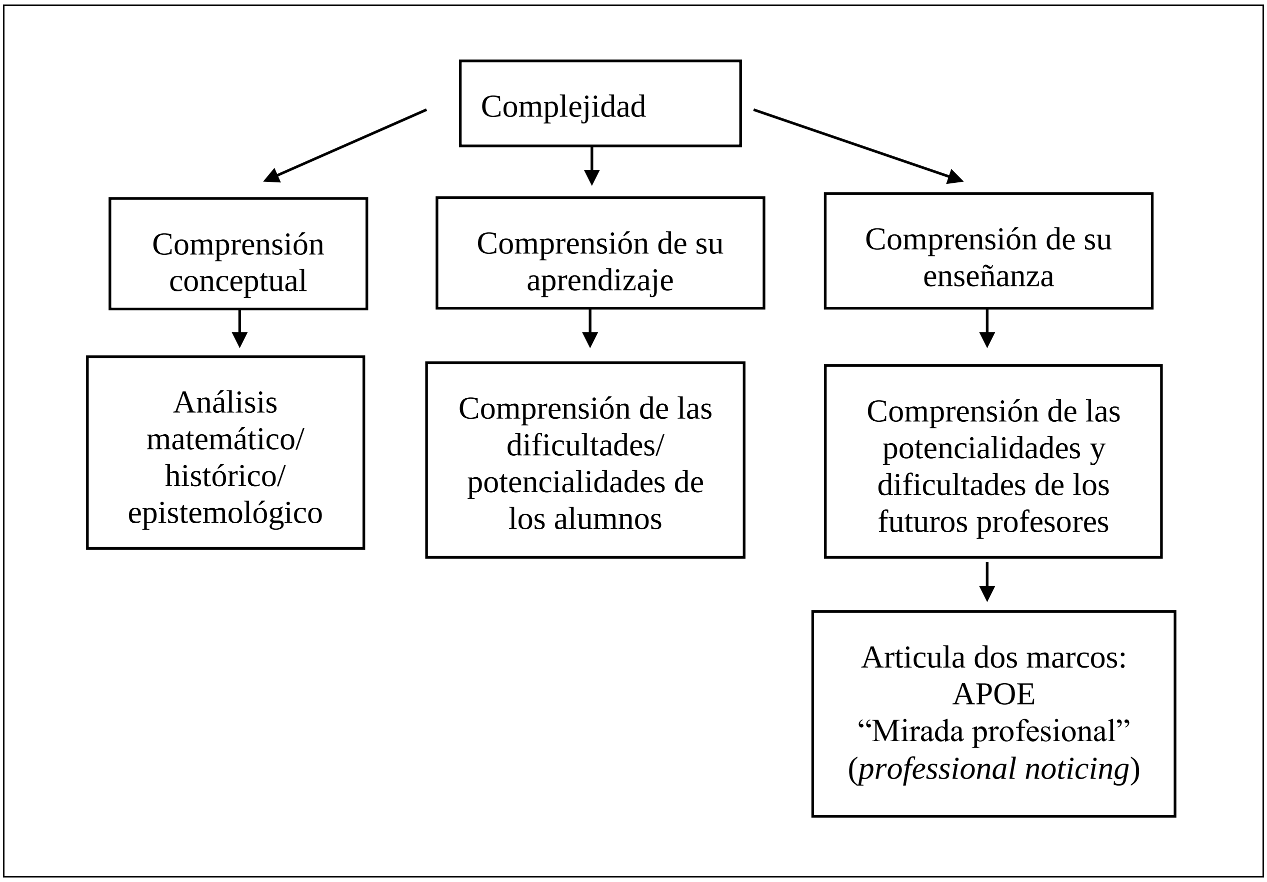
El objeto de investigación

La trayectoria investigadora de Gloria se centra en analizar la comprensión de la derivada de una función, un concepto complejo asociado al cálculo diferencial. Lo primero que salta a la vista es la riqueza y amplitud de su enfoque que abarca los dos ámbitos de la problemática:

(1) la derivada como objeto de aprendizaje (alumnos de bachillerato y universidad);

(2) la derivada como objeto de enseñanza (futuros profesores de matemáticas de secundaria).

Este doble objetivo le ha llevado a profundizar en los dos aspectos basándose en los resultados de las líneas de investigación sobre análisis matemático que se han desarrollado en los últimos años tanto en nuestra comunidad como internacionalmente. Podemos visualizar este doble enfoque en el esquema siguiente que pone de manifiesto cómo, a partir de un análisis matemático, histórico y epistemológico de la complejidad del concepto de derivada y del estudio de las dificultades de su comprensión en alumnos de bachillerato, se investiga la comprensión de su enseñanza en futuros profesores de matemáticas en formación.



Aportaciones teóricas

Destaco el rigor y la exhaustividad teórica en su forma de abordar los problemas de investigación en cada etapa o momento de su trayectoria investigadora. De igual manera, es especialmente interesante el hecho de situarse muy claramente en una perspectiva teórica, el modelo APOE, y enriquecerla con los resultados de sus investigaciones. Esto se refleja en numerosas publicaciones en revistas de reconocido prestigio internacional que están en las bases de datos especializadas del área, que aparecen en el portal Web of Knowledge (WOK)/ Web of Science (WOS) y tienen índice de impacto JCR en el área Education and Educational Research. Entre otras: *Enseñanza de las Ciencias*, *Relime*, *Bolema* e *International Journal of Science and Mathematics Education*.

No obstante, su coherencia en el uso de la perspectiva teórica adoptada (APOE) no le impide articularla y complementarla con perspectivas centradas en el desarrollo de competencias profesionales en los profesores. Concretamente, el desarrollo de la competencia docente “mirada profesional” en las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (*professional noticing*). Esta aproximación le ha permitido ampliar y enriquecer los resultados de sus estudios previos sobre el desarrollo del esquema de la derivada basados en APOE, con su aplicación a un contexto distinto como es la formación de futuros profesores de secundaria.

Sus investigaciones contribuyen, en los dos ámbitos descritos anteriormente, a comprender constructos teóricos desarrollados en la teoría APOE que no estaban suficientemente definidos o ejemplificados. Así, ha profundizado en la comprensión de los niveles de desarrollo del esquema de derivada, enriqueciendo la propuesta de APOE, basada en la tríada *intra*, *inter* y *trans* de Piaget y García, con evidencias de que este desarrollo:

(1) está vinculado con la coordinación de los elementos del concepto durante la resolución de problemas;

(2) está influenciado por los modos de representación a la hora de establecer relaciones.

Y, sobre todo, ha investigado la comprensión de los mecanismos de abstracción reflexiva, en particular el mecanismo de TEMATIZACIÓN, vinculados a la comprensión del desarrollo del esquema de la derivada.

Principales aplicaciones

Considero que las aportaciones de sus estudios a la línea de investigación sobre el análisis matemático, en general, y sobre el cálculo diferencial, en particular, no sólo contribuyen a la investigación, sino que sus resultados tienen un importante grado de transferencia a la transformación de las prácticas de aula tanto en secundaria como en la formación de profesores. Esto queda evidenciado en el uso de los resultados de sus primeras investigaciones para generar tareas formativas que ayuden al desarrollo de la competencia profesional (mirar con sentido) en contextos formativos del máster de secundaria, tal y como lo reflejan sus más recientes publicaciones: *Actas de la SEIM* (2012 y 2013); *International Journal of Science and Mathematics Eductacion* (2014).

Proyecciones

Su proyección y crecimiento profesional están ligados a un grupo de investigación que ha introducido una tendencia metodológica en el análisis de datos de investigación, propia de la teoría adoptada, APOE:

- análisis matemático riguroso por parte del equipo de investigación,
- diseño y validación de instrumentos entre sus miembros,
- difusión de los resultados con miembros del equipo de investigación.

Esta dinámica de investigación se manifiesta en sus publicaciones en revistas y sus aportaciones a congresos con diferentes miembros del equipo. Esto es coherente con la tendencia actual de investigar y publicar en red de investigadores (equipos de la Universidad de Sevilla y de la Universidad de Alicante).

Un comentario más

Sin duda los resultados que se nos presentan indican que el módulo diseñado ha tenido bastante éxito en la mejora de la capacidad de los estudiantes para profesor para detectar información relevante en la manera de proceder de los estudiantes de Bachillerato y reconocer la comprensión de la derivada puesta de manifiesto a través de la resolución de problemas por parte de estudiantes de Bachillerato. No tengo la menor reserva respecto de la metodología utilizada en estas investigaciones y las conclusiones obtenidas. Sin embargo, como he apuntado al principio, me queda una enorme curiosidad acerca del proceso interno seguido por estos estudiantes. Según mi experiencia en la formación de profesores de secundaria, lo más difícil para ellos es romper con la equivalencia explicar/enseñar. Como matemáticos recientes, su vida en las aulas de matemáticas de todos los niveles ha sido cómoda y, en general, son reticentes a reconocer las dificultades de aprendizaje de unos conceptos que resultan obvios para ellos.

Seminario II

La investigación TEDS-M: Aportaciones a la Formación Inicial del Maestro como futuro profesor de Matemáticas

Coordinador

Luis Rico, Universidad deGranada

Seminario de investigación: La formación inicial del maestro como futuro profesor de matemáticas. Resultados del estudio TEDS-M de la IEA

Ponentes

Ismael Sanz Labrador; Ruth Martín Escanilla, Instituto Nacional de Evaluación Educativa

El estudio TEDS-M de la IEA en el marco del instituto nacional de evaluación educativa (INEE)

María C. Cañadas; **Luis Rico**, Universidad de Granada

Aspectos curriculares de la formación matemática y didáctica en el plan de estudios de magisterio 1991-2010

Pedro Gómez, Universidad de los Andes; **Araceli Gutiérrez-Gutiérrez**, Universidad de Granada

Conocimiento matemático y conocimiento didáctico del futuro profesor español de Primaria. Resultados del estudio TEDS-M

Replicantes

Nuria Planas Raig, Universidad Autónoma de Barcelona

Réplica a "Aspectos curriculares de la formación matemática y didáctica en el plan de estudios de magisterio 1991-2010"

José Carrillo Yánez, Universidad de Huelva

El conocimiento de los estudiantes para maestro (TEDS-M España) desde la perspectiva de su especialización

SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN:
LA FORMACIÓN INICIAL DEL MAESTRO COMO FUTURO PROFESOR DE MATEMÁTICAS. RESULTADOS DEL ESTUDIO TEDS-M DE LA IEA

Luis Rico

Universidad de Granada

Antecedentes

Los informes de la IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement) estudian el rendimiento escolar, singularmente en matemáticas, y los factores relacionados. Estos estudios comienzan en la década de los 60. España no participó en el Primer Estudio Internacional sobre Matemáticas y Ciencias (FIMSS) realizado en 1967. Tampoco participó en el segundo de estos estudios (SIMSS), llevado a cabo entre 1980 y 1982. La no participación implicó la exclusión de nuestros investigadores en los debates que tuvieron lugar por esta causa y que hicieron progresar nuestra disciplina. Hay que esperar al tercer estudio de evaluación del rendimiento en matemáticas (TIMSS), promovido en 1995 por la IEA, para la incorporación española definitiva. Desde entonces la administración educativa española ha mantenido una vinculación estable con los estudios y evaluaciones promovidos desde la IEA: http://www.mecd.gob.es/inee/portada.html

El estudio TEDS-M

Uno de los estudios relativo a factores relacionados con el rendimiento matemático escolar es TEDS-M, primer estudio internacional comparativo sobre varias cuestiones, entre ellas el conocimiento adquirido durante su formación inicial por los futuros profesores de matemáticas en educación primaria y secundaria obligatoria.

El estudio TEDS-M se desarrolló entre 2006 y 2012 en cuatro fases. En la primera se organizó el diseño y se elaboraron los instrumentos de recogida de información. En la segunda fase en 2007se llevó a cabo un estudio piloto, que preparó las versiones finales de cuestionarios y pruebas. En 2008 se realizó el estudio principal. Finalmente, el análisis de la información, junto con la redacción y publicación de los informes internacionales y nacionales constituyó la cuarta fase. Estos datos se encuentran en: http://www.iea.nl/teds-m.html y http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/teds-mlinea.pdf?documentId=0901e72b8143866e

Contexto

En el momento de la realización del estudio, el sistema educativo español se encontraba ocupado con la puesta en marcha de las nuevas titulaciones universitarias de grado y de master, lo cual abarcaba los planes para la formación inicial del profesorado de educación primaria y de educación secundaria. Entre 2007 y 2009, la participación española en el estudio TEDS-M dio oportunidad para obtener información contrastada sobre los planes vigentes de formación de profesorado, lo que permitió su valoración y ser uso en la toma de decisiones sobre el diseño de los nuevos programas de formación.

Propósito principal del estudio fue analizar las diferencias que muestran los programas de formación, entre países y dentro de cada país, junto con el impacto de esos programas en la formación del futuro profesor. Los análisis secundarios de los datos se inician en 2013.

Rico, L. (2014). Seminario de investigación: la formación inicial del maestro como futuro profesor de matemáticas. Resultados del estudio TEDS-M de la IEA. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 61-65). Salamanca: SEIEM.

Organización y coordinación

El estudio TEDS-M fue organizado por la Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educativo (IEA). La Michigan State University (MSU) asumió su dirección y también colaboró el ACER (Australian Council for Educational Research). TEDS-M ha recibido financiación de la IEA, de la Fundación Nacional para la Ciencia de Estados Unidos [REC 0514431]. Los 17 países que han participado en el estudio TEDS-M son: Alemania, Botsuana, Canadá (cuatro provincias), Chile, China Taipéi, España (primaria), Estados Unidos (instituciones públicas, rutas concurrentes y consecutivas únicamente), Filipinas, Georgia, Malasia, Noruega, Omán (secundaria), Polonia, Rusia, Singapur, Suiza (cantones de habla alemana) y Tailandia. En cada país se creó un centro coordinador nacional y un equipo de investigación.

La coordinación global del estudio TEDS-M en España correspondió a la Secretaría de Estado de Educación y Formación del Ministerio de Educación, a través del Instituto de Evaluación que, como centro nacional, fue la institución responsable ante la dirección internacional y lo cofinanció. La coordinación de la investigación correspondió al Instituto Superior de Formación y Recursos en Red para el Profesorado, también de dicha Secretaría de Estado, que designó al Coordinador Nacional de Investigación y responsable de la dirección científica del estudio en España, profesor Luis Rico de la Universidad de Granada. La participación institucional de las universidades y la gestión de datos correspondió a la Dirección General de Política Universitaria, Secretaría General del Consejo de Coordinación Universitaria del Ministerio de Educación.

Implementación de TEDS-M

La realización en España del estudio TEDS-M quedó limitada a estudiar la formación inicial del profesorado de educación primaria. Diversas razones aconsejaron no aplicar este estudio al futuro profesorado de educación secundaria, entre otras, los distintos calendarios y modalidades del Curso de Aptitud Pedagógica (CAP) que imposibilitaban llevar a cabo el estudio de campo en las fechas previstas.

La participación española en el estudio TEDS-M persigue analizar y caracterizar la formación inicial en matemáticas del profesorado de educación primaria, compararla con la de otros países y establecer propuestas de trabajo y posibles líneas para mejorar dicha formación inicial. Estudia el sistema español de formación inicial del profesorado de matemáticas, vigente en 2008, desde tres perspectivas que son objetivos del estudio:

1. las políticas educativas que subyacen a sus programas de formación;
2. las facultades, escuelas y profesorado universitario responsable de dicha formación, que fijan los contenidos y oportunidades de aprendizaje para los futuros profesores;
3. el análisis comparativo de los conocimientos sobre las matemáticas y su didáctica que tienen los futuros profesores en su último año de estudios.

Participación

En la realización del estudio participaron la Secretaría de Estado de Educación y Formación del Ministerio de Educación, donde se decidió la participación de España en el estudio, y desde la Secretaría General del Consejo de Coordinación Universitaria del entonces Ministerio de Ciencia e Innovación (MICINN), que cooperó y contribuyó a su realización. El Consejo Escolar del Estado respaldó la participación española e invitó al coordinador nacional a presentar el estudio. También expresó su apoyo el Comité Español de Matemáticas (CEMat), mediante su Comisión de Educación en 2007. Por su parte, la Junta de Andalucía apoyó la realización del estudio financiando la participación del grupo encargado de su coordinación científica dentro del programa de Proyectos de Investigación de Excelencia del Plan Andaluz de Investigación de 2007.

Investigaciones internacionales y estudios comparativos

Kilpatrick (1984) identifica en las décadas de los 60 y los 70 del pasado siglo el despegue de la investigación en educación matemática, como así muestran las publicaciones editadas por la Unesco bajo el título de New Trends in Mathematics Education, así como en el Tercer ICMI celebrado en Karlsruhe en 1976. Este incremento tiene lugar por el número de las publicaciones y también por la facilidad con que los investigadores se movían entre diversas disciplinas y entre distintos países.

Informes como los llevados a cabo en USA por el NAEP y en el UK por el APU, figuran entre los primero estudios comparativos del rendimiento escolar en matemáticas de estudiantes preparados con propuestas curriculares diferentes. También señala los estudios de la IEA, el primero FIMSS (1967) y el segundo SIMSS (1980-1982), como precursores de los estudios actuales conocidos con las siglas generales de TIMSS, que evalúan periódicamente el conocimiento de los escolares en matemáticas.

Características de las evaluaciones internacionales

En las últimas décadas del siglo XX son varios los trabajos de evaluación en matemáticas que coinciden en un mismo periodo de tiempo y que se caracterizan por la participación de investigadores y educadores matemáticos de varios países, y por la implicación de centros de investigación e instituciones de innovación curricular en educación matemática. Estos trabajos comparten las siguientes características:

- la integración de diversos grupos y expertos participantes,
- su interés por el funcionamiento de los sistemas educativos,
- la teorización sobre la estructura curricular de las matemáticas escolares
- la atención por el rendimiento en matemáticas de los escolares,
- el esfuerzo por obtener datos que permitan comparar la eficacia y la eficiencia de los sistemas escolares para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Interés de los investigadores en educación matemática por las evaluaciones

El interés de la comunidad de investigadores ha destacado en multitud de publicaciones desde la década de los 80. Destacan por su interés los siguientes trabajos:

- Robitaille, D. (1984). International Studies of Achievement in Mathematics. En D. A. Grows (Ed.): Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: Macmillan, pp 687-709..
- Robitaille, D. & Down, S. (1993). TIMSS: The Third International Mathematics and Science Study. En M. Niss (Ed.) Investigations into Assessment in Mathematics Education, pp 229-244. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Jacobsen, E. (1996). International Co-operation in Mathematics Education. En A. J. Bishop el al. (eds.) International Handbook of Mathematics Education, pp 1235- 1256. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers,
- Clarke, D. (2003). International Comparative Research in Mathematics Education. En A. J. Bishop el al. (eds.) Second International Handbook of Mathematics Education, pp 143-184. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Interés en España por los estudios sobre rendimiento

Por contraste, en España ha sido escaso el interés de los investigadores por la evaluaciones sobre el rendimiento matemático escolar; estos estudios se han considerado con prevención cuando no con desconfianza por motivos imprecisos o inapropiados. Quizás debido a la falta de los recursos materiales y personales necesarios para llevar a cabo estos trabajos, quizás por el desconocimiento o la falta de dominio de las técnicas cuantitativas de análisis apropiadas para estos estudios o, posiblemente, por un cierto distanciamiento hacia metodologías de orientación positivista, posiblemente por una combinación de todos estos motivos, la realidad es que son muy escasas las investigaciones hechas sobre rendimiento matemático escolar por los especialistas españoles en educación matemática. Finalmente suelen ser instituciones de la administración educativa y especialistas de otras disciplinas quienes asumen el liderazgo en este tema, por dejadez o desconocimiento de los expertos en didáctica de la matemática. Se desaprovechan los planteamientos teóricos considerablemente útiles para el diseño de los cuestionarios y el análisis de los datos, se descuida la puesta en práctica de los marcos interpretativos de gran potencialidad para explicar y entender los resultados, se desaprovecha toda la información generada por estos estudios para la formación de jóvenes investigadores, que en la mayoría de países están encomendados a los especialistas en educación matemática. Se desaprovecha, en fin, la fuerza y vigor de estos estudios, de un conjunto sugerente de datos, para incidir en la práctica escolar, en el aprendizaje de los escolares y en la docencia de sus profesores. En definitiva, nos excluimos de un campo de estudio en el que participan expertos en educación y de muchas otras ciencias sociales

Estudios internacionales en las actas de la SEIEM

Muestra de las reflexiones anteriores son las escasas producciones de nuestra comunidad de investigadores sobre estos temas. Los trabajos localizados en las Actas de la SEIEM hacen escasa mención a las investigaciones que sustentan o que se derivan de los estudios internacionales. En las actas de los XVII encuentros celebrados hasta la fecha, solo hemos localizado tres comunicaciones sobre esta temática:

- Rico, L. (2004). Evaluación de competencias matemáticas, Proyecto PISA/OCDE 2003. En E. Castro, E y E. De la Torre: *Investigación en educación matemática. Octavo simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, pp 89- 102. A Coruña: Universidade da Coruña.
- Rico, L, Gómez, P. y Cañadas, M. C. (2009). Estudio TEDS-M: Estudio internacional sobre la formación inicial de profesores de matemáticas. En M. J. González; M. T. González y J. Murillo: *Investigación en Educación Matemática. XIII Simposio de la SEIEM*, pp 425-434. Santander: Universidad de Cantabria.
- Gutiérrez, A.; Gómez, P. y Rico, L. (2012). Conocimientos en didáctica de la matemática de estudiantes españoles de Magisterio en TEDS-M. En A. Estepa, A. Contreras, J, Deulofeu et al. *Investigación en Educación Matemática. XVI*, pp 341- 351. Jaén: Universidad de Jaén.

Estos trabajos son insuficientes como muestra de la actividad de un grupo cualificado de expertos como el nuestro. TEDS-M es un ejemplo.

Propuesta

Con la organización de este seminario de investigación se quiere impulsar el conocimiento de un campo de trabajo escasamente explorado entre nosotros. Las tres ponencias abordan tres de sus facetas importantes: los documentos y fuentes primarias obtenidas, la caracterización del conocimiento del contenido y del conocimiento didáctico del profesor de matemáticas y la estructura de los planes de formación inicial. Se quiere así mostrar la pujanza y el interés de este tipo de estudios. Se quiere dar a conocer el trabajo de sistematización de resultados y promoción de nuevos estudios llevado a cabo por el INEE desde hace mas de dos décadas; se quieren difundir las bases de datos, las fuentes documentales y los logros ya conseguidos. Las demandas sociales para encontrar respuesta profesionales, maduras y fundadas, a las deficiencias del conocimiento matemático de nuestros conciudadanos son urgentes. Se quieren debatir los datos obtenidos sobre formación inicial de profesores españoles de matemáticas y compararlos con los reflejados por los de otros países.

El debate sobre el rendimiento matemático en la población escolar española está teniendo lugar; como especialistas y profesionales no debemos quedar al margen.

EL ESTUDIO TEDS-M DE LA IEA EN EL MARCO DEL INSTITUTO NACIONAL DE EVALUACIÓN EDUCATIVA (INEE)

The iea-TEDS-M study in the framework of the spanish national institute of educational assessment (INEE)

Ismael Sanz, Ruth Martín

Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE)

Resumen

El INEE es el organismo del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte encargado de la evaluación del sistema educativo español. Entre los estudios que coordina se encuentra TEDS-M, el primer estudio comparativo a nivel internacional a gran escala sobre educación superior. Su objetivo ha sido evaluar la formación inicial del profesorado de Matemáticas en Educación Primaria y Secundaria Obligatoria. Analiza las políticas educativas y el currículo de formación del profesorado de matemáticas, además del conocimiento en Matemáticas y Didáctica de las Matemáticas de los futuros maestros. Participaron 17 países, entre ellos España, que evaluó a más de mil estudiantes de último curso de Magisterio en Educación Primaria, de 48 instituciones. El presente artículo resume las principales características y conclusiones del estudio cuyo informe de resultados se publicó en 2012, seguido de un segundo volumen con análisis secundarios en 2013.

Palabras clave: *INEE, TEDS-M, formación y evaluación del profesorado, matemáticas.*

Abstract

The INEE (National Institute for Educational Assessment) is the institution within the Ministry of Education, Culture and Sport in charge of the evaluation of the Spanish Education System. Among other studies, the INEE coordinates TEDS-M, the first large-scale comparative international study on Higher Education. Its main aim has been to evaluate the initial training for Mathematics teachers in Primary and Secondary Education. TEDS-M analyzes the education policies and the curriculum of Mathematics Education. It also examines teacher's mathematics knowledge and pedagogy. Seventeen countries participated, Spain among them. More than one thousand Spanish students were assessed. They belonged to 48 institutions in the final academic year of "Magisterio en Educación Primaria" (Primary Teacher Education). This paper summarizes the main features and conclusions of the study whose report was published in 2012, followed up by a second volume on further research in 2013.

Keywords: *INEE, TEDS-M, teacher training, teacher assessment, mathematics.*

EL INSTITUTO NACIONAL DE EVALUACIÓN EDUCATIVA

El Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE), dependiente de la Dirección General de Evaluación y Cooperación Territorial, es el organismo del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte encargado de la evaluación del sistema educativo español. Las funciones que tiene encomendadas son:

- La coordinación de las políticas de evaluación general del sistema educativo y la realización, en colaboración con los organismos correspondientes de las administraciones educativas, de las evaluaciones nacionales.
- La coordinación de la participación del Estado español en las evaluaciones internacionales.

Sanz, I., Martín, R. (2014). El estudio TEDS-M de la IEA en el marco del Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE). En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 67-81). Salamanca: SEIEM.

• La participación en la elaboración de los indicadores internacionales de la educación, así como el seguimiento de las actuaciones de la Unión Europea en este ámbito.

• La elaboración del Sistema Estatal de Indicadores de la Educación, y la realización de investigaciones y estudios de evaluación del sistema educativo y la difusión de la información que ofrezcan ambas actuaciones.

En la actualidad el INEE tiene también adscrita la Revista de Educación, una publicación científica del MECD fundada en 1940 y editada por la Subdirección General de Documentación y Publicaciones del MECD. El INEE presta especial atención a la tarea de difusión que tiene encomendada a través de la publicación de informes, boletines informativos y otros materiales con el objetivo principal de ser útiles para los miembros de la comunidad educativa y en particular a los investigadores en educación.

Las principales organizaciones internacionales que promueven este tipo de evaluaciones son:

1. **OCDE (Organización para la Cooperación y Desarrollo Económicos)** Esta organización está formada por 34 estados, entre ellos España, y su objetivo es la coordinación de sus políticas económicas y sociales. Organiza las siguientes evaluaciones:

- **PISA** (Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes. *Programme for International Student Assessment*)

Este estudio se realiza cíclicamente cada tres años desde 2000. Evalúa, con carácter muestral, la comprensión lectora y las competencias matemática y científica de los alumnos que cumplen 16 años en el año en que se realiza la prueba (en España 4º de ESO y 2º o 3º de ESO si no se está escolarizado en el curso correspondiente a la edad). La última edición ha tenido lugar en 2012. En esta ocasión se ha evaluado también en papel la competencia en finanzas para la vida. Ha contado además con una prueba en formato digital, *Computer Based Assessment* (CBA) sobre matemáticas, lectura y resolución de problemas. Los resultados del bloque de competencias clásicas se publicaron en diciembre de 2013. En esta edición se profundiza más en el área de matemáticas por ser la principal. En 2014 se publicaron los correspondientes a las competencias de resolución de problemas y finanzas para la vida.

- **TALIS** (Estudio Internacional de Enseñanza y Aprendizaje. *Teaching and Learning International Survey*)

La última edición de este estudio se ha realizado en 2013. Sus resultados se han publicado en junio de 2014. Ofrece información sobre los procesos educativos a través de encuestas a los profesores y a los directores de Educación Secundaria. En diciembre de 2014 se publicarán los resultados de una nueva opción, en la que ha participado España, en la que los profesores de la muestra pertenecen a los centros seleccionados en la muestra de PISA.

- **PIAAC** (Programa para la Evaluación Internacional de las Competencias de Adultos. *Programme for the International Assessment of Adult Competences*)

Este estudio se ha realizado entre 2011 y 2012 y se pretende que tenga un carácter cíclico cada 10 años. Su objetivo es conocer el nivel de conocimientos y destrezas (lectura y matemática) de la población adulta (personas adultas de 16 a 65 años). Tiene carácter muestral y la recogida de datos se realiza mediante pruebas efectuadas a domicilio. Sus resultados se publicaron en octubre de 2013.

2. **Unión Europea (UE)** La Unión Europea ha promovido el primer Estudio Europeo de Competencia Lingüística (*European Survey Language Competence*) con el objetivo de conocer el nivel de competencia en la primera y segunda lenguas europeas extranjeras (inglés, francés, alemán, español e italiano) en los países de la UE. El estudio principal

ha tenido lugar en 2011. Los alumnos evaluados en España estaban en 4º curso de ESO. Los informes de resultados (internacional y español) se publicaron en junio de 2012.

3. **IEA (*International Association for the Evaluation of Educational Achievement*)** La IEA es una asociación independiente, cuyos miembros son universidades, institutos o agencias ministeriales dedicadas a la investigación sobre evaluación educativa. El Instituto Nacional de Evaluación Educativa es miembro de la IEA. Organiza las siguientes evaluaciones:

- **PIRLS** (Estudio Internacional de Progreso en Comprensión Lectora. *Progress in International Reading Literacy Study*)

Este estudio evalúa la comprensión lectora en 4º de Educación Primaria. Se realiza con una periodicidad de cinco años. Es de carácter muestral. España ha participado en 1990, 2006 y 2011. Recoge también información sobre el contexto educativo a través de cuestionarios de alumnos/as, padres y profesores/as. El último estudio principal tuvo lugar en 2011. Los informes de resultados (internacional y español) se publicaron en diciembre de 2012. En esta última ocasión ha coincidido con el estudio TIMSS.

- **TIMSS** (Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias. *Trends in International Mathematics and Science Study*)

Con carácter muestral, evalúa los conocimientos de matemáticas y ciencias de los alumnos/as en 4º de Educación Primaria. (Existe la opción de 8º grado en la que participó España en 1995). Recoge también información sobre el contexto educativo a través de cuestionarios de alumnos/as, padres y profesores/as. El último estudio principal ha tenido lugar en 2011. En esta ocasión ha coincidido con el estudio PIRLS. Los informes de resultados (internacional y español) se publicaron en diciembre de 2012.

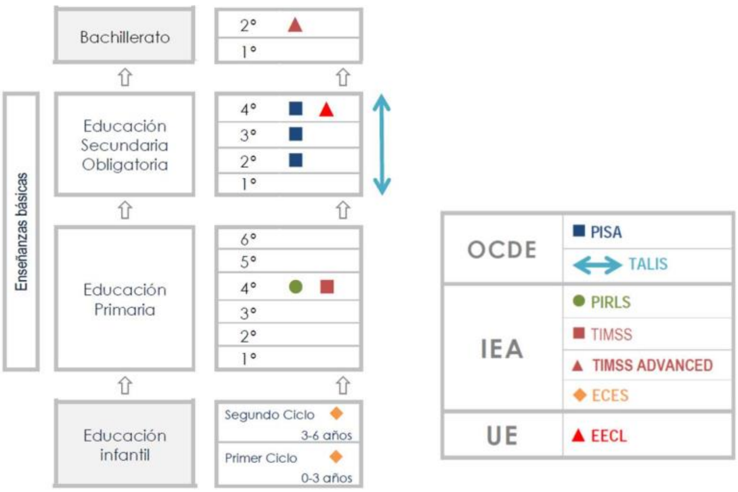


Figura 1. Distribución de las evaluaciones externas nacionales e internacionales en el sistema educativo español

- **ICCS** (Estudio Internacional sobre Educación Cívica y Ciudadana. *International Civic and Citizenship Education Study*)

Este estudio se realizó en 2009 y evaluó la competencia cívica y ciudadana con muestras de alumnos/as de 2º curso de ESO representativas a nivel nacional.

- **TEDS-M (**Estudio Internacional sobre la Formación Inicial del Profesorado de Matemáticas. *Teacher Education and Development Study in Mathematics***)**

A este estudio se dedica este seminario monográfico, por lo que más adelante se describirán sus características y resultados.

Otros estudios promovidos por esta organización, en cuyas próximas ediciones participará España, son TIMSS-Advanced es un estudio cuya primera edición se realizó en 2008, si bien España participará por primera vez en 2015. Evalúa los conocimientos y competencias adquiridas por los alumnos que van a acceder a estudios universitarios (en España, los de 2º de Bachillerato) en matemáticas avanzadas y en física. Su objetivo es analizar el nivel de preparación de los alumnos que van a comenzar a cursar carreras universitarias científicas, tecnológicas, de ingeniería o de matemáticas. Por último, ECES (*Early Childhood Education Study*) se dedicará al análisis y evaluación de la educación infantil.

Todo el conjunto de evaluaciones descritas con anterioridad dibujan el mapa de evaluaciones internacionales de la Figura 1.

IMPORTANCIA DE LA CALIDAD DEL PROFESORADO. EL ESTUDIO TEDS-M

Numerosas investigaciones recientes han puesto de manifiesto la enorme importancia de la calidad de los profesores en los resultados de sus alumnos (Eurydice, 2006; Eurydice, 2013; Hanushek, 2004; Hattie, 2008; OCDE, 2005). El estudio PISA destaca que, entre los países con economías desarrolladas, los que priorizan la inversión en formación de los profesores frente a otros conceptos (por ejemplo, nuevas tecnologías o la reducción del tamaño de la clase) suelen tener mejores resultados. Dentro de los centros educativos, el profesorado constituye el factor más importante que influye en el aprendizaje de los estudiantes. Los profesores son los principales encargados de involucrar a los alumnos en las tareas escolares y promover su aprendizaje. En el reciente estudio de Chetty, R. et al. (2011) se muestra, además, que la eficacia del profesorado no se muestra solo en el resultado de las pruebas académicas, sino que tiene un impacto a largo plazo en el crecimiento económico. Este estudio estima el valor añadido por el profesor, a partir de los resultados de sus alumnos, y lo relaciona con los datos fiscales de sus familias y con la carrera profesional que los estudiantes desarrollaron posteriormente. A partir del estudio longitudinal de dos millones y medio de alumnos de educación primaria y primer ciclo de educación secundaria obligatoria, obtenidos desde 1989 hasta 2009, se aportan evidencias de que un buen profesor consigue, entre otros efectos positivos, que sus alumnos falten menos a clase, ganen salarios más altos en su vida profesional, vivan en su vida adulta en barrios con mejor entorno socioeconómico o ahorren más para su jubilación. En el Volumen II del Informe Español de TEDS-M (INEE, 2013), Montalvo y Gorgels profundizan en este aspecto a partir de los datos de TEDS-M.

La enseñanza de las matemáticas en educación primaria y secundaria, atendiendo de forma efectiva a todo el alumnado, independientemente de sus condiciones socioeconómicas y culturales y sus diversas capacidades y motivaciones, etc. es una tarea cada vez más complicada. A medida que los países de todo el mundo van desarrollando currículos de matemáticas cada vez más complejos, los legisladores en materia educativa y los propios educadores necesitan datos válidos y fiables sobre la efectividad de la formación de los profesores. Esto es particularmente cierto en las matemáticas de la educación secundaria, para la que el conjunto de candidatos con la cualificación adecuada tiende a ser más pequeño que para otras materias. La formación inicial del profesorado es uno de los factores que parecen tener influencia en la calidad del mismo y que afecta a los resultados de los estudiantes La organización de la formación de los docentes es, en este contexto, un reto de máxima actualidad. Para abordar cualquier reforma con ciertas garantías de éxito, es necesario disponer de una evidencia empírica sobre las medidas que son realmente efectivas.

La literatura existente ha identificado cinco fuentes de variación principales entre países en la formación del profesorado y en relación con el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

4. Los resultados de los alumnos. Diversos estudios de evaluación externa, por ejemplo TIMSS y PISA en sus distintas ediciones, han mostrado una gran amplitud en las puntuaciones obtenidas por los países.

5. El currículo de matemáticas. Los currículos de matemáticas en los niveles 4º, 8º y 10º analizados no tienen grandes discrepancias entre países (Tatoo, Lerman y Novotná, 2009). Sin embargo, del análisis de los libros de texto de países participantes en la evaluación TIMSS se concluye que en algunos países se tratan temas más complejos que en otros (Valverdem Bianchi, Schmidt, McKnight y Wolfe, 2002). También se observan diferencias en los aciertos a los distintos tipos de ítems propuestos en estas evaluaciones entre los alumnos de distintos países.
6. La calidad de las clases de matemáticas.
7. La naturaleza y el tipo de programas de formación del profesorado. Por ejemplo, en algunos países las universidades son los únicos centros de formación inicial del profesorado, sin embargo, en otros existen agencias externas al sistema educativo superior que proporcionan también formación a los profesores. Existe también variación en cuanto a la formación en pedagogía. En algunos países la formación en contenidos de la materia o asignatura que el estudiante va a impartir se realiza a la vez que el aprendizaje de pedagogía. En otros, este aprendizaje es posterior a la formación
8. Los contenidos de los programas de formación del profesorado. No existe un consenso sobre la totalidad de contenidos que debería cubrir un programa de formación. Los profesores deben tener una sólida formación en las materias que van a enseñar, pero es necesario tener otros conocimientos de didáctica o pedagogía que permitan al profesor transmitir el conocimiento y hacerlo comprensible a los estudiantes.

Algunos estudios muestran que el conocimiento de matemáticas de los alumnos de educación primaria y secundaria, en muchos países, no es lo suficientemente preciso y debería mejorarse. Estos pobres resultados pueden deberse a que el conocimiento de contenidos y pedagogía que aprende el profesorado no es el más adecuado y útil para enseñar matemáticas. Las reformas que afectan directamente a la formación del profesorado y al currículo que se debería enseñar se guían a veces por normativas desarrolladas con una escasa base empírica, hecho que, en ocasiones, conduce a sistemas de formación del profesorado que no responden a las necesidades efectivas del alumnado. Se produce además una cierta desorientación entre el profesorado de matemáticas que necesita disponer de herramientas útiles que le ayude a formarse para poder enseñar las matemáticas de forma eficaz. La casi totalidad de los estudios internacionales de evaluación (PIRLS, TIMSS, PISA), como se ha visto, tienen como foco de atención los conocimientos, competencias, actitudes y otras capacidades de los estudiantes de educación obligatoria. Sin embargo, estos estudios no han prestado suficiente atención a la formación del profesorado. La singularidad del estudio TEDS-M ha consistido en ser el primer estudio promovido por la (IEA) sobre educación superior y sobre formación inicial de profesores de matemáticas de educación primaria y educación secundaria obligatoria que utiliza muestras representativas a nivel de país. Ha sido el primer estudio comparativo a nivel internacional y a gran escala, sobre educación superior, centrado en la formación inicial de los profesores de matemáticas de educación primaria y primeros cursos de educación secundaria. Disponer de datos comparativos con otros países era sin duda una buena oportunidad por la que se decidió la participación española en este estudio. En el momento de la realización de TEDS-M, el sistema educativo español se encontraba en una etapa crucial donde confluyen la puesta en marcha de las nuevas titulaciones universitarias de grado y de máster, junto con el desarrollo de la normativa reguladora de los planes para la formación inicial del profesorado de educación primaria y de educación secundaria. En esos años, que transcurren entre 2007 y 2009, la participación española en el estudio TEDS-M se consideró una excelente oportunidad para obtener información contrastada sobre los planes de formación de profesorado vigentes hasta esa fecha. Los resultados del estudio permitirían detectar fortalezas y debilidades de estos planes y realizar una valoración de los mismos útil para la toma racional de decisiones en el diseño de los nuevos programas de formación. La participación española se limitó a los programas de formación inicial para maestros de educación primaria. El rigor y seriedad de los estudios e informes de la

IEA, junto con el marco internacional y comparativo del estudio reforzaron el interés por la participación.

EL MARCO DE TEDS-M

TEDS-M (traducido al español como Estudio internacional sobre formación inicial en matemáticas de los maestros,) elaboró, a partir de un enfoque comprensivo, un marco para estudiar y entender la formación inicial de profesores, que incluye una propuesta para conocer cómo las políticas nacionales y las prácticas institucionales influyen en la calidad de los profesores en formación. Se trata del primer proyecto centrado en analizar cómo las instituciones universitarias o de otro tipo, en los distintos países, preparan para enseñar matemáticas en educación primaria y en educación secundaria obligatoria, investigando qué conocimientos tienen y qué saben hacer los futuros profesores en formación. El estudio TEDS-M se desarrolló entre 2006 y 2012. Participaron 17 países: Alemania, Botsuana, Canadá (cuatro provincias), Chile, China Taipéi, España (Educación Primaria), Estados Unidos (instituciones públicas, rutas concurrentes y consecutivas únicamente), Filipinas, Georgia, Malasia, Noruega, Omán (Educación Secundaria), Polonia, Rusia, Singapur, Suiza (cantones de habla alemana) y Tailandia. Contempló en su diseño tres componentes interrelacionados:

- El primero, a nivel nacional, estudia las políticas generales de formación del profesorado, el sistema educativo y los contextos sociales. Para recoger información, los países participantes respondieron un cuestionario sobre el marco legislativo que regula la formación del profesorado y sobre las características de los principales programas de formación. Además, cada país elaboró un informe sobre el contexto y la organización de la formación del profesorado, las políticas y requisitos para asegurar la calidad de esa formación, y los recursos y las reformas que se han implementado en esa área.
- El segundo componente se centró en las instituciones de formación del profesorado. Contempla las rutas, centros, programas, estándares y expectativas sobre la formación de profesores. El objetivo de este segundo sub-estudio consistió en examinar el currículo de formación del profesorado de matemáticas (el declarado oficialmente y el aplicado) y los contenidos que ofrece dicho currículo.
- Por último, el tercero se refirió a los resultados de la formación. Estudia los conocimientos matemáticos y de enseñanza de la materia adquiridos por los futuros profesores de matemáticas de educación primaria y educación secundaria obligatoria. En particular, se estudió el conocimiento matemático y en didáctica de la matemática que los futuros profesores han adquirido como resultado de su formación y la profundidad de su comprensión, además de otras características que ayudan a explicar su dominio de esos conocimientos y las creencias e ideas que tienen los futuros profesores sobre la naturaleza de las matemáticas, su aprendizaje y enseñanza.

La participación de España en el estudio TEDS-M quedó limitada a la formación inicial del profesorado de educación primaria. El Real Decreto 1440/1991 establecía las directrices para la obtención del título de Maestro en España. TEDS-M España se centró en el plan de formación de maestros en educación primaria, por ser este el programa dirigido a la formación de los futuros profesores de matemáticas en ese nivel educativo. Diversas razones aconsejaron no aplicar este estudio al futuro profesorado de educación secundaria, entre otras, los distintos calendarios y modalidades del Curso de Aptitud Pedagógica (CAP) que imposibilitaban llevar a cabo el estudio de campo en las fechas previstas

El estudio TEDS-M definió un esquema de muestreo aleatorio, dependiente del tamaño (TEDS-M, *Thecnical Report*, 2013). En el caso de España, sirvió para seleccionar 50 instituciones de formación sobre un total de 73 que ofrecían formación inicial a futuros profesores de Educación

Primaria. Dentro de cada institución se seleccionó, al azar, a 30 estudiantes de magisterio de último curso. Todos los profesores formadores respondieron un cuestionario. La Tabla 1 muestra las tasas de participación españolas, que cumplió con creces los requisitos exigidos.

Tabla 1. Tasas de la participación española

	Participantes	*Tamaño muestra*	*Tasa de participación*
Instituciones	48	50	96.0%
Futuros profesores	1093 (de 47 instituciones)	1263	77.9%
Formadores	533 (de 48 instituciones)	574	85.6%

POLÍTICAS DE FORMACIÓN, FORMADORES Y FUTUROS PROFESORES

El objetivo del primer sub-estudio de TEDS-M fue examinar las políticas de formación dirigidas a los profesores de matemáticas, incluyendo su preparación, certificación, selección y contratación, y su contexto cultural y social. Se proponía describir cómo las políticas educativas estructuran y organizan los programas de formación de profesores, examinar las condiciones socio-laborales y profesionales que regulan el empleo de los profesores y conseguir información sobre las normas nacionales que aseguran la calidad de la formación de profesores. El resumen de esta información se puede encontrar en TEDS-M *Encyclopedia*, 2013.

Entre los países participantes en TEDS-M, incluso dentro de algunos de ellos, hay gran diversidad de programas de formación inicial de profesores de matemáticas que se aprecia en las políticas que estructuran los programas, en sus objetivos y organización así como en las características de los profesores universitarios encargados de la formación y de los estudiantes que la reciben. Esta complejidad llevó a organizar las comparaciones entre países entre programas similares.

En TEDS-M se analizan las **instituciones de formación de profesores,** escuela, facultad o universidad que ofrece a los futuros profesores oportunidades estructuradas para aprender a través de una ruta de formación. Las instituciones ofrecen titulaciones para formar futuros profesores y capacitarles en el ejercicio de la profesión docente. Una **titulación** es un grado académico reglado que atiende a unas directrices formativas según ciclos y especialidades. Las instituciones de formación de profesores de cada país tienen un ámbito de autonomía que se concreta en sus planes de estudios. Un **plan de estudios** es un itinerario académico de formación que desarrolla una institución, que se ajusta a las directrices de una titulación. Requiere que los estudiantes cursen unas asignaturas y lleven a cabo una serie de experiencias, a cuyo término obtendrán una certificación o diploma que les capacitará para el ejercicio profesional como profesores según la titulación cursada.

Con el fin de organizar la variedad de titulaciones y planes de estudios y hacer comparaciones entre ellos, TEDS-M utiliza la noción de **programa,** un curso de formación reglada que conduce a la obtención de un título en una institución académica. Los programas de un mismo tipo desarrollan una única titulación y comparten determinadas características estructurales, entre las que destacan el tipo de institución en la que se ofrecen, los propósitos y las características estructurales de los planes de estudio, el grado de especialización que los futuros profesores reciben en diferentes materias, los cursos en que los futuros profesores podrán impartir docencia, la ubicación de las prácticas, su duración, etc.

Un programa de formación puede ofrecer una cualificación **especializada** o **generalista**. En la mayoría de los países participantes en TEDS-M, los planes de estudio que forman a futuros profesores de educación primaria eran programas generalistas, mientras que los que preparaban para dar clase en los últimos cursos de educación secundaria formaban especialistas en matemáticas.

El estudio TEDS-M clasifica también los programas en **concurrentes** o **consecutivos**. Un programa concurrente incluye, de manera conjunta y sin interrupciones, tanto el estudio de asignaturas que los futuros profesores deberán enseñar, como el estudio de otras asignaturas y la experiencia práctica en el aula. Los programas consecutivos se encuentran precedidos por otro de preparación académica sobre matemáticas que, normalmente, conduce a la obtención de una titulación o diploma propios. Algunos programas, como los de Alemania, son más bien de tipo híbrido entre concurrentes y consecutivos. La formación inicial de los profesores de educación secundaria en España es un ejemplo de programa consecutivo y la formación inicial de profesores de educación primaria en España es un ejemplo de programa concurrente.

Para facilitar las comparaciones entre los resultados de los distintos países, TEDS-M organizó los programas en seis grupos en función de la especialización en matemáticas y los cursos para cuya docencia estaban siendo formados los futuros profesores. Los grupos se muestran en la Figura 2.

Grupo	Especialización	Máximo curso que podrá impartir
1	Generalista de primeros cursos de educación primaria	4º de Educación Primaria (Grado 4)
2	Generalista de educación primaria	6º de Educación Primaria (Grado 6)
3	Generalista de educación primaria y primeros cursos de educación secundaria	4º de ESO (Grado 10)
4	Especialista en matemáticas de educación primaria	6º de Educación Primaria (Grado 6)
5	Especialista en matemáticas de los primeros cursos de educación secundaria	4º de ESO (Grado 10)
6	Especialista en matemáticas de los últimos cursos de educación secundaria	1º de Bachillerato y superior (Grado 11 y superior)

Figura 2. Grupos de programas según la clasificación TEDS-M

La Figura 3 recoge las características de los distintos programas de formación de profesores de educación primaria en los países participantes en TEDS-M. El estudio pone en evidencia la alta variabilidad en las características de las instituciones, programas y futuros profesores en los distintos países, incluso aunque se hayan clasificado dentro del mismo grupo. La mayoría de los países participaron en el estudio con programas concurrentes, para formación de profesores generalistas de primaria, junto con programas consecutivos, para formación de profesores especialistas de enseñanza secundaria. Malasia y Tailandia fueron la excepción ya que sus programas para formación inicial de profesores de primaria preparaban profesores especialistas en matemáticas. España, junto con Omán, solo participó con sus planes para formación de futuros profesores de primaria, o de secundaria, respectivamente. TEDS-M ha sacado a la luz las diferencias entre los programas de los países que, en general provienen de la búsqueda del equilibrio óptimo entre los conocimientos matemáticos y didácticos. En Noruega se implementó en 2010 un paso hacia la especialización a partir de un programa generalista incorporando mayor cantidad de matemáticas.

Con el objetivo de conocer la formación matemática exigida en los distintos programas se tuvieron en cuenta la formación previa en matemáticas de los futuros profesores y la estrategia curricular de los mismos. TEDS-M exploró la profundidad y amplitud de la oferta curricular de los programas, singularmente en lo que se refiere a la formación matemática, mediante el análisis del número de horas dedicadas a unas determinadas áreas de conocimiento sobre otras.

En cuanto a los requisitos que tienen que cumplir los futuros profesores para completar su formación satisfactoriamente, el estudio consideró si los programas requerían aprobar todas las asignaturas del plan de estudios; aprobar un examen global, escrito, oral, establecido por autoridades estatales o autonómicas, o establecido por la institución o programa; demostrar la competencia para enseñar; aprobar la experiencia de campo o defender una tesis de diplomatura.

TEDS-M también recoge datos del profesorado que forma a los futuros profesores y analiza sus características. El análisis de las respuestas aporta información sobre el perfil personal, académico y profesional y la posición que tienen en cada institución. Se analiza, en particular, su edad, distribución por sexo, nivel de estudios, tipo de asignatura que imparte, especialización en matemáticas, titulación administrativa y necesidad de poseer una licencia especial para ejercer la docencia. Por ejemplo, en Filipinas solo el 7% de los educadores contaban con el título de doctor frente al 35% y 50%, respectivamente, de los formadores españoles que impartían disciplinas de pedagogía y matemáticas y más del 60% en China-Taipéi, Georgia o Polonia. Muchos de los formadores de didáctica de las matemáticas se consideraban a sí mismo como no especialistas.

Grupo	País	Programa	Duración del programa de formación (años)	Concurrente/ Consecutivo	Intervalo de cursos en los que podrán impartir docencia
1	Alemania	Profesores de grados 1-4 (con matemáticas como asignatura de enseñanza)	3.5+2.0	Híbrido	1-4
		Profesores de grados 1-4 (sin matemáticas como asignatura de enseñanza)	3.5+2.0	Híbrido	1-4
		Profesores de grados 1-10 (sin matemáticas como asignatura de enseñanza)	3.5+2.0	Híbrido	1-4
	Georgia	Grado en Pedagogía	4	Concurrente	1-4
	Polonia	Grado en Educación (primer ciclo)	3	Concurrente	1-3
		Máster en Educación (primer ciclo)	5	Concurrente	1-3
	Rusia	Profesor de Educación Primaria	5	Concurrente	1-4
	Suiza	Profesor de grados 1-2/3	3	Concurrente	1-2/3
2	China-Taipéi	Profesor de Educación Elemental	4,5	Concurrente	1-6
	España	Maestro en Educación Primaria	3	Concurrente	1-6
	Estados Unidos	Concurrente de Educación Primaria	4	Concurrente	1-3/4/5
		Consecutivo de Educación Primaria	4+1	Consecutivo	1-3/4/5
	Filipinas	Grado en Educación Elemental	4	Concurrente	1-6
	Singapur	PGDE (Diploma de posgrado en Educación Primaria), opción C	4+1	Consecutivo	1-6
		BA (Educación Primaria)	4	Concurrente	1-6
		BSc (Educación Primaria)	4	Concurrente	1-6
		Diploma en Educación Primaria, opción C	2	Concurrente	1-6
	Suiza	Profesor de Educación Primaria (Grados 1-6)	3	Concurrente	1-6
		Profesor de Educación Primaria (Grados 3-6)	3	Concurrente	3-6
3	Botsuana	Diploma en Educación Primaria	3	Concurrente	1-7
	Chile	Generalista	4	Concurrente	1-8
	Noruega (ALU+)	ALU con opción de matemáticas	4	Concurrente	1-10
	Noruega (ALU)	ALU sin opción de matemáticas	4	Concurrente	1-10
4	Alemania	Profesores de grados 1-9/10 (con matemáticas como asignatura de enseñanza)	3.5+2.0	Híbrido	1-9/10
	Estados Unidos	Concurrente de Educación Primaria + Secundaria	4	Concurrente	4/5-8/9
		Consecutivo de Educación Primaria + Secundaria	4+1	Consecutivo	4/5-8/9
	Malasia	Licenciado en Educación (Primaria)	4	Concurrente	1-6
		Diploma en Educación (Matemáticas)	4+1	Consecutivo	1-6
		Diploma malasio de enseñanza (Matemáticas)	3	Concurrente	1-6
	Polonia	Grado en Educación (Matemáticas)	3	Concurrente	4-9
		Máster en Educación (Matemáticas)	5	Concurrente	4-12
	Singapur	PGDE (Diploma de posgrado en Educación Primaria) opción A	4+1	Consecutivo	1-6
	Tailandia	Grado en Educación	5	Concurrente	1-12
		Diploma en Enseñanza	4+1	Consecutivo	1-12

Figura 3. Características de los distintos programas de formación de profesores de educación primaria en los países participantes en TEDS-M

También se analizó el perfil de los estudiantes de los programas de formación del profesorado. Se analizó su edad, distribución por sexo, nivel de rendimiento en educación secundaria, contexto socioeconómico y cultural, intereses profesionales y en particular por la profesión docente, profesiones anteriores, etc. En su mayor parte son mujeres en casi todos los países y sus hogares cuentan con recursos y hablaban la lengua de sus países. Por último se describió el sistema de empleo, las condiciones laborales, los salarios e incentivos, y la oferta y demanda de empleo para profesores en educación primaria y los sistemas de garantía de la calidad para la formación de profesores de educación primaria existentes en los países en cuanto a la garantía de la calidad en la formación y selección de futuros profesores evaluación y acreditación de las instituciones de formación de profesores y entrada en la profesión docente.

Teniendo en consideración los criterios descritos, TEDS-M clasificó los países en función de la fuerza de cada procedimiento, según fuese fuerte, moderado o débil. La Figura 4 resume la clasificación de los países participantes según los criterios descritos. Según este análisis, la fuerza de los sistemas de la garantía de la calidad en España puede considerarse como moderada/baja.

POLÍTICAS DE FORMACIÓN, FORMADORES Y FUTUROS PROFESORES. ESPAÑA

Los programas de formación de maestros de educación primaria del plan de estudios español de 1991 eran generalistas y concurrentes, y estaban organizados para ser desarrollados en 3 años. Estos programas de formación son estudios universitarios y se realizaban bien en escuelas universitarias de formación de profesores, bien en facultades de educación u otros centros de formación de profesores asociados a esas facultades. Los futuros profesores que terminaban el programa de formación eran cualificados para impartir docencia en las materias de matemáticas, lengua, ciencias sociales y naturales de la educación primaria. Se accedía a los estudios de magisterio después de haber obtenido el Título de Bachillerato. No era obligatorio haber cursado ninguna asignatura de matemáticas en bachillerato (RD. 1467/2007). El bachillerato tiene diferentes modalidades con diferentes contenidos en las asignaturas de matemáticas. Por lo tanto las matemáticas superiores básicas requeridas para ser maestro de educación primaria eran las que establece el currículo de matemáticas para educación secundaria obligatoria. Por razón de las distintas modalidades de bachillerato, el nivel de los conocimientos de matemáticas de los estudiantes que inician sus estudios de magisterio es muy variado. En la mayoría de las instituciones de los países participantes se establece como requisito haber superado el Bachillerato para acceder al programa de formación. Sin embargo, hay diferencias en la importancia que los programas asignan a la formación previa en matemáticas como criterio de selección. Dentro de los países del Grupo 2, en el que se sitúa España, se dan diferentes situaciones. En los programas de Suiza la formación previa en matemáticas no es un criterio de selección, como pasa también en el 90% de los programas en España. En otros países de este mismo grupo las condiciones son diferentes: en Singapur, por ejemplo, la formación previa en matemáticas es un criterio importante, y también lo es en el 65% de los programas en Filipinas.

En relación con las pruebas y baremos nacionales para el acceso a los programas de formación, la mayoría de los estudiantes españoles responden haber obtenido una nota igual a la media del país para entrar al programa de formación. No obstante, España es el país del Grupo 2 donde un mayor porcentaje de estudiantes reconocen tener notas inferiores a la media (18%) para el acceso al programa. En el curso de realización de TEDS-M, no se exigía una nota superior al aprobado en la prueba de acceso a la universidad para acceder a los estudios de Magisterio. Sin embargo, la mayoría de los futuros profesores, en todos los países, dicen haber obtenido unos resultados previos que están por encima de la media.

La oferta curricular a los futuros profesores se establece en términos del número de horas de los diferentes tipos de asignaturas consideradas. Los programas dedicaban una media de 548 horas a asignaturas de humanidades, 30 horas a asignaturas de matemáticas avanzadas, 63 horas a asignaturas relacionadas con las matemáticas escolares, 137 horas a asignaturas de didáctica de la matemática, 328 horas a asignaturas de fundamentos, y 345 horas a las asignaturas de pedagogía. España es el país de su grupo que más horas dedicaba a asignaturas de humanidades en la totalidad del programa. Los datos españoles para las asignaturas de pedagogía, de matemáticas avanzadas o relacionadas con las matemáticas escolares son similares a los de los países de su grupo, siendo superiores para las asignaturas de didáctica de la matemática. La estrategia curricular de los planes españoles de formación de profesores se expondrá dentro de este mismo seminario por Mª Consuelo Cañadas en la ponencia “Formación matemática y didáctica en el plan de estudios de Magisterio 1991-2010. Aspectos culturales y currículo común”. Esta estrategia, definida como currículo pretendido, se contrastó con las respuestas de los estudiantes en el apartado denominado “Oportunidades de aprendizaje”.

Países	Entrada en los programas de formación de profesores			Certificación y contratación		Fuerza de los sistemas de la garantía de la calidad
	Control de la oferta-demanda	Hacer atractiva la profesión docente	Estándares de selección para los programas de formación de profesores	Certificación	Entrada a la profesión docente	
Alemania	Moderados	Moderados	Moderados	Moderados	Fuertes	Moderado/Alto
Botsuana	Moderados	Moderados	Moderados	Moderados	Débiles	Moderado
Canadá	Moderados	Fuertes	Débiles	Moderados	Débiles	Moderado
Chile	Débiles	Débiles	Débiles	Débiles	Débiles	Bajo
China Taipéi	Fuertes	Fuertes	Fuertes	Fuertes	Fuertes	Alto
España	**Débiles**	**Moderados**	**Débiles**	**Débiles**	**Moderados**	**Moderado / Bajo**
EE.UU.	Débiles	Débiles	Débiles	Moderados	Moderados	Moderado
Filipinas	Débiles	Débiles	Débiles	Débiles	Moderados	Bajo
Georgia	Débiles	Débiles	Débiles	Débiles	Débiles	Bajo
Malasia	Fuertes	Moderados	Débiles	Moderados	Débiles	Moderado
Noruega	Débiles	Débiles	Moderados	Moderados	Débiles	Moderado / Bajo
Omán (secundaria)	Fuertes	Moderados	Débiles	Débiles	Débiles	Bajo
Polonia	Moderados	Moderados	Moderados	Moderados	Débiles	Moderado
Rusia	Fuertes	Moderados	Moderados	Moderados	Débiles	Moderado / Alto
Singapur	Fuertes	Fuertes	Fuertes	Fuertes	Moderados	Alto
Suiza	Débiles	Moderados	Moderados	Moderados	Débiles	Moderado
Tailandia (secundaria)	Moderados	Débiles	Débiles	Moderados	Débiles	Bajo

Figura 4. Procedimientos para la garantía de la calidad en la formación de profesores

En España se distinguen dos tipos de prácticas: prácticum y experiencias prácticas introductorias. El prácticum consta de dos o más semanas de trabajo continuado en colegios. Su principal objetivo es formar y capacitar a los futuros profesores para que asuman la responsabilidad plena de enseñar en una clase. Las experiencias prácticas introductorias son tareas, durante periodos cortos de tiempo en centros de primaria, con el objetivo de experimentar y formarse en cuestiones como conocer el funcionamiento de las instituciones escolares y el trabajo de los profesores, comprobar si se ha elegido la profesión adecuada; observar y entrevistar a estudiantes, profesores y padres; y ayudar en tareas de enseñanza de un forma limitada y supervisada muy de cerca. El 100% de los programas españoles ofertan el prácticum, dada la normativa curricular a nivel nacional. El 100% de las instituciones de la mayoría de los países del Grupo 2 ofertan el prácticum a sus estudiantes. En el Volumen II del Informe Español de TEDS-M (INEE, 2013), Egido y López analizan el prácticum en los estudios de Magisterio a partir de los datos de TEDS-M. El 25% de los programas españoles ofertan experiencias prácticas introductorias, del tipo de las anteriormente descritas, dato es sustancialmente inferior al de los demás los países.

El requisito fundamental para superar el plan de formación en España es aprobar todas las asignaturas que lo componen. Esta es la tónica general de la mayoría de los países participantes en TEDS-M. Más de la mitad de las facultades y escuelas de formación de profesorado españolas (52%) exigen que los futuros profesores demuestren un nivel requerido de competencia para enseñar en el aula. Este porcentaje es muy inferior al del resto de los países del Grupo 2, que presentan unos porcentajes del 100% o muy cercanos. Solo un 36% de las facultades y escuelas de formación de profesores españolas requieren la realización de una tesis de diplomatura, mientras que en el resto de los países del Grupo 2 este porcentaje es muy superior (89% y mayores). España es uno de los países del Grupo 2 que menor peso asigna a la superación de un examen global. La procedencia de los estándares y directrices es diversa en España (gobierno nacional, gobiernos autonómicos y las propias instituciones). El 13% de las facultades y escuelas de formación del profesorado españolas dicen poseer un documento de estándares para el propio plan de estudios elaborado por el centro. En España, este sistema de coordinación del sistema educativo, alta inspección y evaluación corresponden al gobierno.

CONOCIMIENTOS EN MATEMÁTICAS Y DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

El sub-estudio III de TEDS-M tuvo por objetivo evaluar los conocimientos alcanzados por los estudiantes tras su formación inicial como profesores de matemáticas. En este ámbito, el estudio se centra, por un lado, en el conocimiento matemático y de didáctica de la matemática que los futuros profesores adquieren en su formación y, por el otro, en las creencias o ideas asumidas por estos sobre la naturaleza de las matemáticas, su aprendizaje y su enseñanza.

Para plantear y seleccionar las preguntas sobre conocimiento matemático, TEDS-M se sirvió del marco conceptual elaborado para TIMSS 2007 (Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias), mientras que el marco conceptual para elegir las preguntas con las que evaluar los conocimientos en didáctica de la matemática de los futuros profesores fue desarrollado por el equipo de dirección del estudio y otros investigadores, con base en investigaciones previas.

El cuestionario para los futuros profesores combinaba en un mismo cuadernillo la prueba propiamente dicha y un cuestionario de contexto. La escala utilizada es común para la dificultad de las preguntas y para el rendimiento de los alumnos, tipificada con media de 500 puntos y desviación típica de 100 (muestra completa). Los resultados de este sub-estudio se expondrán, dentro de este mismo seminario, por Pedro Gómez y Araceli Gutiérrez en la ponencia "Conocimiento del contenido matemático escolar y conocimiento didáctico del profesor de Primaria. Resultados del estudio TEDS-M".

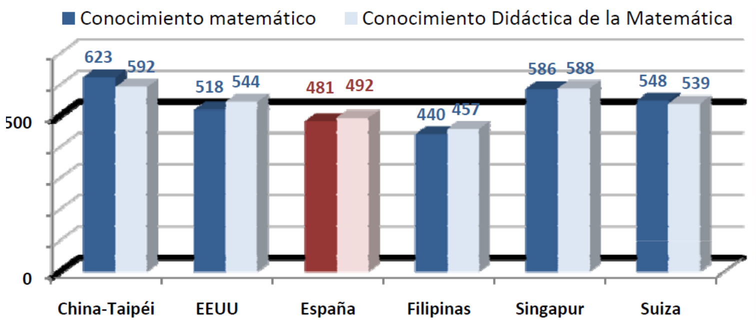


Figura 5. Conocimiento matemático y en didáctica de las matemáticas de los futuros maestros de educación primaria de los países del Grupo 2

La Figura 5 presenta las puntuaciones medias en conocimientos matemáticos y en didáctica de las matemáticas de los futuros profesores. Como era de esperar, la puntuación media de los futuros profesores especialistas (grupo 4) es, en general, más alta que la obtenida por los que siguen programas generalistas (grupos 1, 2 y 3). Si analizamos los resultados de los grupos 1, 2 y 3, los resultados de España se situarían en el límite inferior de la franja de países con resultados medios, que incluye a EE.UU., Suiza, Noruega y Alemania entre los países próximos a nuestro entorno socioeconómico y cultural.

Como sucede con los conocimientos matemáticos, el grupo de países-programas de profesorado especialista en matemáticas obtiene también, en general, rendimientos más elevados que el resto de programas de formación, salvo los casos de China-Taipéi y Singapur, claramente destacados sobre el resto de países. Si se consideran solo los programas de formación de profesorado generalista, los resultados de España en conocimientos sobre didáctica de la matemática (492 puntos) están más cercanos a la media que los correspondientes a conocimientos matemáticos (481), pero aún por debajo de los países de nuestro entorno.

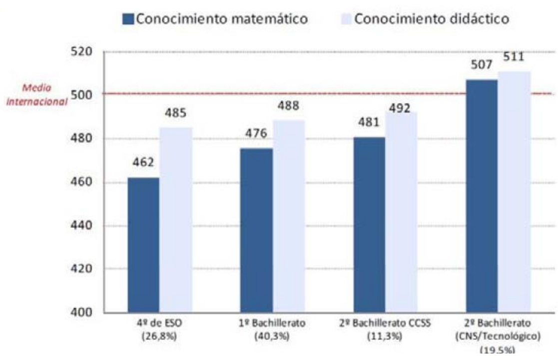


Figura 6. Relación entre las puntuaciones medias de los estudiantes españoles y el último curso en el que el alumno estudió matemáticas

El informe de TEDS-M describe también la distribución en niveles de rendimiento de los resultados de los futuros maestros y la descripción de las tareas que es capaz de resolver un alumno situado en cada uno de ellos. Estos datos, una vez analizados, pueden proporcionar una orientación en la elaboración de los currículos, con el objetivo de mejorar los resultados.

El informe recoge la relación entre los resultados y algunas variables de contexto. Por ejemplo, la Figura 6 pone en evidencia la relación de los resultados con el último curso en el que el alumno estudió matemáticas. Los alumnos que cursaron matemáticas en 2º de Bachillerato en la opción científica y tecnológica obtienen resultados significativamente superiores al promedio (500 puntos).

CREENCIAS SOBRE LAS MATEMÁTICAS Y SU APRENDIZAJE

En el ámbito de las ciencias de la educación el término creencia se utiliza con un significado específico. En educación matemática, las creencias son conocimientos subjetivos, convicciones generadas a nivel personal por cada individuo para explicarse y justificar muchas de sus decisiones y actuaciones en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Los resultados obtenidos en TEDS-M permiten observar que las orientaciones conceptuales y constructivistas reciben un fuerte apoyo. Sin embargo, hay variabilidad apreciable entre los países en cuanto al apoyo al enfoque basado en el cálculo y en la transmisión directa. Destacan los bajos porcentajes de respuestas favorables a la creencia de que “El rendimiento en matemáticas depende de la capacidad natural del alumno”.

En general, los países con mayor puntuación media en conocimientos han tenido mayor apoyo en la orientación conceptual. Alternativamente, los países en que los futuros profesores dan mayor puntuación a la concepción algorítmica o computacional de las matemáticas son aquellos que obtienen menores puntuaciones medias, con algunas excepciones como China-Taipéi.

En general, los futuros profesores que muestran su acuerdo con las creencias de “Matemáticas como proceso de indagación” y “Aprendizaje de las matemáticas a través de la participación activa”, obtienen puntuaciones más altas en conocimientos en matemáticas y en didáctica de la matemática en relación con aquellos otros que no apoyan estas creencias. Análogamente, los futuros profesores que apoyan las creencias “Matemáticas como un conjunto de reglas y procedimientos”, “Aprendizaje de las matemáticas siguiendo las instrucciones del profesor”, y “El rendimiento en matemáticas depende de la capacidad innata del alumno”, obtienen puntuaciones más bajas en conocimiento y didáctica de las matemáticas respecto a sus compañeros que no comparten estas creencias. Cabe destacar la similitud entre las creencias sobre las matemáticas que tienen los futuros maestros y sus profesores; cualquier programa encaminado a su modificación debe estar orientado tanto a los futuros maestros como a sus profesores universitarios.

CONCLUSIONES PRINCIPALES DE TEDS-M. ESTRATEGIAS FUTURAS

Los datos de TEDS-M fueron recogidos en 2008, por lo que la situación que describen se refiere a los planes de estudio y condiciones existentes en ese momento. Con posterioridad a esa fecha se han producido cambios importantes en el sistema educativo, en los planes de estudios universitarios españoles, así como en los de otros países que participaron en el estudio TEDS-M. Algunas conclusiones sobre los planes de formación españoles analizados son:

- Los programas de formación de los maestros eran programas generalistas en educación primaria que combinaban formación teórica y práctica. Los profesores formados en esos programas pueden impartir hasta 6º curso de Educación Primaria. El 18% de los alumnos accedían a Magisterio con notas inferiores a las de los compañeros de promoción. Solo el 21% lo hacía con notas superiores a la media. El nivel superior de matemáticas exigido era el de Educación Secundaria Obligatoria. Los alumnos que habían cursado matemáticas en Bachillerato obtuvieron puntuaciones significativamente superiores a la media. Los resultados de los que cursaron la opción científico-tecnológica fueron aún mejores. Los planes de estudios no trataban de forma equilibrada todos los dominios de conocimiento. La formación en matemáticas era escasa e insuficiente, tratada en un bajo porcentaje de materias, presentada de un modo global y sin diferenciar las componentes de los conocimientos matemáticos y de su enseñanza y aprendizaje.

- España es el país de su grupo que más horas dedicaba a las asignaturas de humanidades y uno de los países que menor peso otorgaba a la superación de un examen final. El nivel de exigencia en los procedimientos establecidos para garantizar la calidad de los programas de formación era medio/bajo. Existían grandes diferencias en la organización del prácticum en las distintas instituciones. La práctica totalidad de los estudiantes lo aprobaban. Existe poca variabilidad entre los resultados obtenidos por los estudiantes de las distintas escuelas y universidades españolas.

Los resultados obtenidos y analizados en este estudio coordinado por el INEE podrán servir de base para guiar la política educativa destinada al diseño de planes de formación para futuros profesores que elaboran la Secretaria General de Universidades y las propias Universidades. Atendiendo a las conclusiones del estudio, parece recomendable explorar vías para hacer más atractiva la profesión a estudiantes que, además de mostrar interés por la docencia, sean capaces de seguir un programa más exigente en contenidos matemáticos y en su didáctica. Convendría también reflexionar sobre el diseño y criterios de evaluación del prácticum, para que los futuros profesores conozcan en mayor profundidad las dinámicas del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Referencias

Brese, F. y Tatto, M.T. (2012). TEDS-M 2008 User Guide for the International Database. Amsterdam, IEA.

Cañadas, M.C. (2014). Formación matemática y didáctica en el plan de estudios de Magisterio 1991-2010. Aspectos culturales y currículo común. En xxxxxxxx (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVIII, pp-pp, Lugar, SEIEM.

Carnoy, M., Beteille, T., Brodziak, I. et al. (2009). TEDS-M, Do Countries Paying Teachers Higher Relative Salaries Have Higher Student Mathematics Achievement? Amsterdam, IEA

Chetty, R. Friedman, J.N. y Rockoff, J.E. (2011). The Long-Term Impacts of Teachers: Teacher Valua-Added and Student Outcomes in Adulthood. NBER Working Papers.

Gómez, P. y Gutiérrez, A. (2014). Conocimiento matemático y conocimiento didáctico del futuro profesor español de primaria. Resultados del estudio TEDS-M. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 83-92). Salamanca: SEIEM.

INEE (2010). ICCS, Estudio Internacional de Civismo y Ciudadanía. Informe Español. Madrid, MECD.

INEE (2012a). EECL, Estudio Europeo de Competencia Lingüística. Volumen I. Informe Español. Madrid, MECD.

INEE (2012b). *TEDS-M, Estudio Internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros. Informe Español*. Madrid, MECD.

INEE (2013a). *PIAAC, Programa internacional para la evaluación de las competencias de la población adulta. Volumen I: Informe español*. Madrid, MECD.

INEE (2013b). *PIRLS 2011. Estudio Internacional de progreso en comprensión lectora. Volumen I: Informe español*. Madrid, MECD.

INEE (2013c). *TIMSS 2011. Estudio Internacional de tendencias de las matemáticas y ciencias. Volumen I: Informe español*. Madrid, MECD.

INEE (2013d). *TEDS-M, Estudio Internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros. Informe Español. Volumen II. Análisis secundario*. Madrid, MECD.

INEE (2014a). *PISA 2012: Programa para la evaluación internacional de los alumnos. Informe español. Volumen I: Resultados y contexto*. Madrid, MECD.

INEE (2014b). *PISA 2012 Resolución de problemas de la vida real. Resultados de matemáticas y lectura por ordenador*. Madrid, MECD.

INEE (2014c). *TALIS, Estudio Internacional de Enseñanza y Aprendizaje*. Madrid, Autor.

Ingvarson, L., Schwille, J., Tatto, M.T., et al (2013). *An Analysis of Teacher Education Context, Structure, and Quality-Assurance Arrangements in TEDS-M Countries*. Amsterdam, IEA.

Ina V.S., Mullis y Michael O. Martin, Eds. (2014). *TIMSS Advanced 2015. Assessment Frameworks*, IEA

OECD (2010). *PISA 2009 Results: What Makes a School Successful? – Resources, Policies and Practices. Volumen IV*. [Recurso electrónico] disponible en: http://dx.doi.org/10.1787/9789264091559-en

OECD (2005). *Teachers matter: Attracting, developing and retaining effective teachers.* Paris, Autor

Real Decreto por el que se establece el título universitario oficial de Maestro, en sus diversas especialidades y las directrices generales propias de los planes de estudios conducentes a su obtención (1440/1991, de 30 de agosto). Boletín Oficial de Empleo, 244, 11 de octubre de 1991, 33003-33018.

Real Decreto por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas (1467/2007, de 2 de noviembre). Boletín Oficial de Empleo, 266, 6 de nov. 2007, 45381-45447.

Schwille, J., Ingvarson, L. y Holdgreve-Resendez, R. (2013). *TEDS-M Encyclopedia, a Guide to Teacher Education Context, Structure, and Quality Assurance in 17 Countries*. Amsterdam, IEA.

Tatto, M.T. (2013). *TEDS-M, Policy, Practice, and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics in 17 Countries. Technical Report.* Amsterdam, IEA.

Tatto, M.T., Peck, R., Schwille, J. et al. (2012). *Policy, Practice, and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics in 17 Countries.* Amsterdam, IEA.

Tatto, M.T., Lerman, S. y Novotná, J. (2009). Overview of teacher education systems across the world. En Even, R. y Ball, D.L. (Eds.), *The professional education and development of teachers of mathematics: The 15th ICMI Study,* 15-23. Nueva York, Springer.

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., et al. (2008). TEDS-M, Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics. Conceptual framework. East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.

Valverde, G.A., Bianchi, L.J., Schmidt, W.H., et al. (2002). *According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice in the world of textbooks.* Dordrecht, Kluwer Academic Publichers.

ASPECTOS CURRICULARES DE LA FORMACIÓN MATEMÁTICA Y DIDÁCTICA EN EL PLAN DE ESTUDIOS DE MAGISTERIO 1991-2010[1]

Curricular aspects of the mathematical and didactic training in the programs of primary teachers training 1991-2010

María C. Cañadas, Luis Rico

Universidad de Granada

Resumen

En este seminario presentamos algunos resultados que proceden de los datos recogidos en TEDS-M España. Describimos la estructura, y la formación matemática y didáctica de los futuros maestros de educación primaria en el plan de estudios de magisterio que estuvo vigente en el período 1991-2010 en España. Basamos esta descripción en el análisis de los documentos curriculares que se corresponden con los tres niveles de análisis que se establecen en TEDS-M: nacional, institucional y formador. Finalmente, presentamos los contenidos de los documentos curriculares que permiten determinar el currículo común del plan de estudios. Los resultados evidencian la necesidad de prestar mayor atención a los contenidos de Matemáticas y de Didáctica de las Matemática en la formación inicial de maestros de primaria.

Palabras clave: *análisis de documentos curriculares, didáctica de la matemática, programas de formación de maestros, TEDS-M*

Abstract

In this seminar, we present some results that come from the data collected in TEDS-M Spain. We describe the structure, and the mathematical and didactic training of future primary teachers in the teacher education program into effect in the period 1991-2010 in Spain. We base this description in the analysis of curricular documents that respond to the three levels established in TEDS-M: national, institutional, and educator. Finally, we present the contents of the curricular documents that allow to determinate the core curriculum in the teacher education program. The results evidence the need to pay more attention to contents related to mathematics and didactics of mathematics in the primary teacher training in Spain.

Keywords: *didactics of mathematics, mathematics teacher training programs, syllabi analysis, TEDS-M*

INTRODUCCIÓN

El estudio TEDS-M se centra en tres componentes:

- Estudios de la política de formación de profesores, escolarización y contextos sociales a nivel nacional.
- Estudios de los itinerarios de formación para profesores de matemáticas de educación primaria y secundaria, de las instituciones, de los programas, de los estándares y de las expectativas sobre su aprendizaje.
- Estudios sobre las matemáticas y los conocimientos para su enseñanza de los futuros profesores de matemáticas.

(Rico, Gómez y Cañadas, 2014, p. 37)

Cañadas, M. C., Rico, L. (2014). Aspectos curriculares de la formación matemática y didáctica en el plan de estudios de magisterio 1991-2010. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 83-92). Salamanca: SEIEM.

TEDS-M España optó por participar en el estudio relativo a la formación de profesores de educación primaria, por lo que esas tres componentes se atuvieron a este nivel educativo. En este trabajo nos centramos en las oportunidades de aprendizaje en relación con la segunda componente mencionada. Las oportunidades de aprendizaje se definen usualmente como el contenido que se enseña, la importancia relativa que se da a diversos aspectos de matemáticas y los logros de los estudiantes relativos a esas prioridades y contenidos (Travers y Westbury, 1989). Existen evidencias del impacto que producen las oportunidades de aprendizaje sobre los resultados de los planes de formación de maestros de matemáticas (Boyd, Grossman, Lankford, Loeb & Wyckoff, 2009; Cochran-Smith & Zeichner, 2005). Por tanto, la descripción de los programas de formación es crucial para explicar las oportunidades de aprendizaje que se brindan a los futuros maestros.

En general, la literatura sobre análisis de programas de formación de profesores es escasa (Eberly, Newton y Wiggins, 2001). En España, diferentes autores destacan que la presencia de matemáticas en los programas de formación de maestros de matemáticas es escasa, mientras que las disciplinas pedagógicas son un tema predominante y la Didáctica de la Matemática no se trata de un modo diferenciado y específico (Rico, 1994; Rico y Sierra, 1996). La revisión de los programas de formación de profesores de matemáticas era una cuestión postergada hasta hace unos años (Rico, 2004).

Nuestra participación en este seminario tiene como objetivo describir la estructura, y la formación matemática y didáctica de los futuros maestros de educación primaria en el plan de estudios de magisterio que estuvo vigente en el período 1991-2010 en España. Con base en esta descripción, especificamos el currículo común, entendido como aquel constituido por los contenidos que se enseñan en más del 50% de las instituciones que forman maestros de educación primaria en España (Cañadas, Gómez y Rico, 2014, p. 880). Abordamos estos propósitos a través del análisis de los documentos curriculares que constituyen este plan de formación.

DOCUMENTOS CURRICULARES QUE REGULAN LOS PLANES DE FORMACIÓN INICIAL DE MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN ESPAÑA 1991-2010

TEDS-M considera varios niveles para el análisis de los documentos curriculares en los países participantes. En España, estos niveles se concretan en tres: (a) nivel nacional, (b) nivel institucional y (c) nivel formador.

Las directrices nacionales para la formación de maestros de educación primaria (Ministerio de Educación y Ciencia, 1991) regulan la formación básica que deben recibir los futuros maestros que se forman en cualquier institución universitaria española, pública o privada. Las directrices establecen el currículo a nivel nacional. Este documento prescribe la obligatoriedad de cursar 120 créditos, del total de los 180 necesarios que conducen al título de Maestro-Especialidad de Educación Primaria, créditos que vienen organizados a través de 14 asignaturas troncales, cada una definida mediante unos descriptores (Castro y Flores, 2008).

Cada universidad concreta sus planes de estudio a partir de las directrices nacionales. Estos planes de estudio dan oportunidad para que cada universidad añada descriptores propios a las materias troncales establecidas en el nivel nacional, e introduzca asignaturas obligatorias (que deben cursar todos los futuros maestros de esa universidad), optativas o de libre elección por un mínimo de 60 créditos. Esto hace que las universidades españolas tengan autonomía para el diseño de sus planes de estudio y, al mismo tiempo, cumplan lo establecido a nivel nacional. Los planes de estudio de cada universidad constituyen los documentos curriculares en el nivel institucional.

Los departamentos universitarios se encargan de desarrollar o ampliar los programas de las asignaturas establecidos en las directrices nacionales y en los planes de estudio institucionales. Los programas de las asignaturas, acordados en cada departamento, constituyen los documentos curriculares en el nivel formador.

METODOLOGÍA DE TEDS-M PARA EL ANÁLISIS DE DOCUMENTOS CURRICULARES

El análisis de los documentos curriculares se organizó teniendo en cuenta las características de estos documentos en los tres niveles descritos.

Muestra

La muestra la constituyen los documentos curriculares de los tres niveles. Las directrices están publicadas en un único documento, que fue el que consideramos para su análisis (Ministerio de Educación y Ciencia, 1991).

Para los niveles institucional y formador, realizamos una selección de las instituciones españolas que forman maestros de educación primaria en España y una selección de programas de asignaturas de los programas de formación en las instituciones elegidas. El diseño de la recogida de información estuvo asesorado y coordinado, para todos los países participantes en TEDS-M, desde la *International Association for the Evaluation of Educational Achievement* (IEA).

En el caso de las instituciones, aplicamos un muestreo de probabilidad proporcional al tamaño[2] de las instituciones, seleccionando a 50 de las 83 instituciones que en 2008 impartían la titulación de Maestro de Primaria. Dado que dos de las instituciones seleccionadas declinaron la invitación, contamos con 48 instituciones. Recopilamos los planes de estudio de estas 48 instituciones (documentos curriculares del nivel institucional) y los programas de las asignaturas (troncales, obligatorias y optativas) relacionadas con matemáticas, didáctica de la matemática y pedagogía general en cada una de esas instituciones (documentos curriculares del nivel formador).

La fase de recogida de documentos curriculares del estudio en España se realizó en el curso académico 2007-2008. En total, el equipo español de TEDS-M recopiló unos 1800 documentos curriculares.

Codificación de los documentos curriculares

Realizamos la codificación de los documentos de la muestra siguiendo las instrucciones de TEDS-M (2008a). Para los niveles nacional e institucional, el estudio distingue seis campos: (a) matemáticas escolares, (b) matemáticas avanzadas, (c) pedagogía, (d) didáctica de la matemática, (e) prácticum y (f) otros. La codificación en estos dos niveles consistió en asignar las asignaturas a los diferentes campos.

Para el nivel formador, el estudio considera cuatro *dominios de conocimiento*: (a) matemáticas escolares, (b) matemáticas avanzadas, (c) pedagogía y (d) didáctica de la matemática. Para cada uno de estos dominios de conocimiento, se definen una serie de temas y, dentro de cada tema, una serie de apartados[3]. Consideramos que cuando un apartado se aborda en una asignatura, también se aborda el tema en el que está contenido. Los temas y apartados permiten describir los programas atendiendo a dos tipos o niveles de análisis. Por ejemplo, aspectos de la habilidad y el pensamiento matemático, métodos para presentar los principales conceptos matemáticos o conocimiento del currículo de matemáticas y estándares son algunos de los temas incluidos en el dominio de conocimiento de Didáctica de la matemática. Desarrollar conceptos matemáticos; razonamiento, argumentación y prueba; abstracción y generalización son apartados del tema relativo a aspectos de la habilidad y el pensamiento matemático. Siguiendo las instrucciones de TEDS-M (2008b), dividimos el contenido de los programas en bloques y, a cada bloque, asignamos temas y apartados.

Tras la asistencia a un programa de entrenamiento para investigadores de los países participantes en TEDS-M centrado en el proceso de codificación, tres investigadoras realizamos el proceso de codificación. Una de ellas es experta en Matemáticas y Didáctica de la matemática; y dos son expertas en Pedagogía.

Análisis de datos

En el nivel nacional, calculamos los porcentajes de créditos de cada uno de los cuatro campos considerados en este nivel dentro de los 120 créditos que establecen las directrices, de los 180 requeridos para que los futuros maestros obtengan su título como Maestros de Educación Primaria.

En el nivel institucional, calculamos los porcentajes de créditos para cada uno de los seis campos considerados en el total de créditos de las asignaturas analizadas en los planes de estudio de las 48 instituciones.

En el nivel formador, establecemos el porcentaje de temas y apartados que se tratan en las asignaturas de un porcentaje determinado de instituciones.

RESULTADOS

Organizamos los resultados con base en las diferencias presentadas para los niveles nacional, institucional y formador. Dados los objetivos de este seminario, nos centramos en la formación matemática y didáctica que los futuros maestros reciben a través de los planes de formación.

Nivel nacional

En términos de asignaturas troncales contempladas en las directrices de la titulación de Maestro de Educación Primaria, la materia “Matemáticas y su Didáctica” es la única relativa a matemáticas y didáctica de la matemática. Por tanto, en esta primera aproximación, destacamos que en las directrices no se establece distinción entre los campos de las matemáticas escolares, las matemáticas avanzadas y la didáctica de la matemática. En la figura 1 presentamos los porcentajes de créditos que las directrices establecen para los campos considerados en TEDS-M, teniendo en cuenta matemáticas escolares, matemáticas avanzadas y didáctica de la matemática como un campo único.

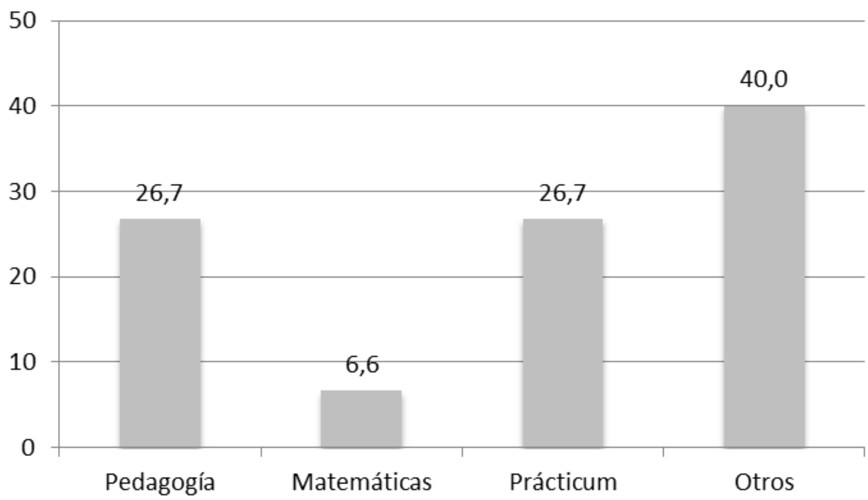


Figura 1. Porcentajes de créditos según campos en el nivel nacional

El 6,6% de los créditos dedicados a matemáticas se corresponde con la única asignatura de las directrices que aborda contenidos relativos a matemáticas y didáctica de la matemática. Hay un 26,7% de créditos dedicados a asignaturas relativas a la Pedagogía y otro tanto para el Prácticum. En España, el campo Otros incluye asignaturas relacionadas con la educación como son la historia, la sociología o la filosofía, didácticas de materias específicas diferentes de matemáticas y aspectos relacionados con las necesidades educativas especiales.

Nivel institucional

En la figura 2 recogemos los porcentajes de créditos en los planes de estudio de las instituciones españolas participantes en el estudio según los campos considerados para este nivel. En el nivel institucional se observa la distinción entre los campos Matemáticas escolares, avanzadas y Didáctica de la matemática. Sin embargo, estos campos representan los porcentajes más bajos de créditos. En particular, destacamos el casi nulo porcentaje de créditos dedicados a Matemáticas escolares o Matemáticas avanzadas.

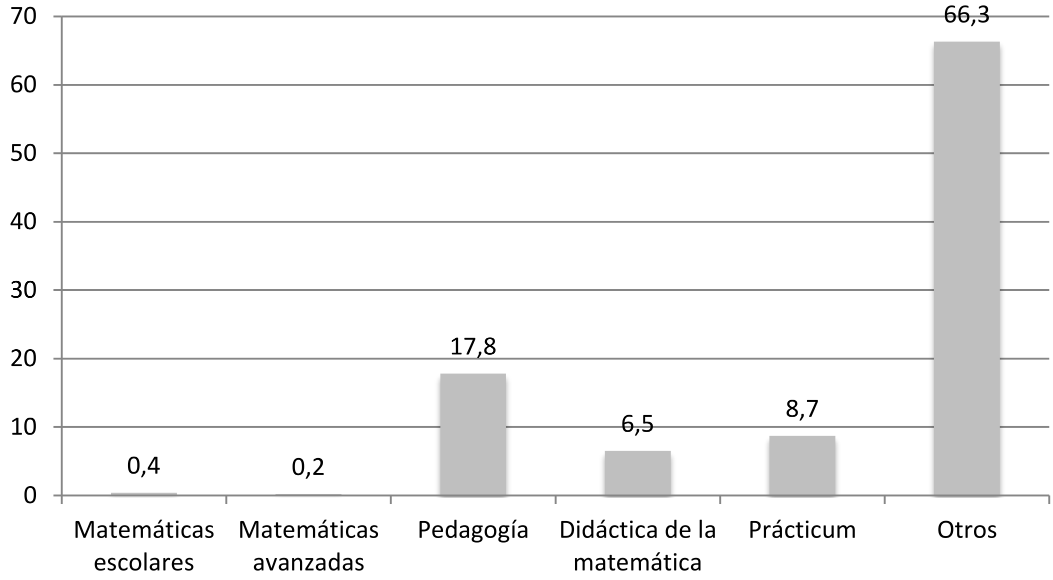


Figura 2. Porcentajes de créditos según campos en el nivel institucional

La autonomía que tienen las instituciones españolas en el diseño de sus planes de estudio hace posible que existan diferencias entre los porcentajes de créditos según campos de los niveles institucional y nacional. Observamos que se mantiene el porcentaje de créditos en el caso de Matemáticas y Didáctica de la matemática, apreciamos una disminución de los porcentajes de créditos de Pedagogía y Prácticum en el nivel institucional así como un aumento de los créditos del campo Otros.

Nivel formador

En el nivel formador, presentamos los resultados según los temas y los apartados.

Por temas

En la tabla 1, presentamos el porcentaje de temas que se tratan en un porcentaje concreto de instituciones españolas, según los dominios de conocimiento considerados para este nivel. La primera columna de esta tabla muestra los cuartiles de las instituciones. Por ejemplo, el 37,5% de los apartados de matemáticas escolares se tratan en un rango entre el 75 y el 100% de las instituciones.

Tabla 1. Porcentajes de temas tratados en un porcentaje de instituciones

Porcentaje instituciones	Matemáticas escolares	Matemáticas avanzadas	Pedagogía	Didáctica de la matemática
[0, 25)	25,0%	95,0%	0,0%	7,7%
[25, 50)	25,0%	5,0%	8,3%	30,8%

[50, 75)	0,0%	0,0%	16,7%	23,1%
[75, 100)	37,5%	0,0%	41,7%	30,8%
100	12,5%	0,0%	33,3%	7,7%

Según la definición de currículum común considerada, las tres últimas filas recogen los temas que constituyen el currículo común de España. Destacamos que el 91,7% de los temas de Pedagogía, 61,6% de los temas de Didáctica de la matemática y el 50% de los temas de Matemáticas escolares forman parte del currículo común. No hay temas de matemáticas avanzadas que formen parte del currículo común, mientras que sí los hay de los otros dominios de conocimiento.

Por tanto, el núcleo central de los temas que forman parte del currículo común son de Pedagogía.

Por apartados

En la tabla 2, presentamos el porcentaje de apartados que se tratan en un porcentaje concreto de instituciones españolas, según los dominios de conocimiento considerados para este nivel. Dado que no hay apartados definidos para el domino de conocimiento de Matemáticas avanzadas, no incluimos este tema. La primera columna de esta tabla muestra los cuartiles de las instituciones. Por ejemplo, el 20% de los apartados de Pedagogía se tratan en entre un 25 y un 50% de las instituciones españolas objeto de análisis.

Las tres últimas filas arrojan información sobre los porcentajes de apartados que forman parte del currículo común español. Destacamos que un 41,8% de los apartados de Pedagogía, un 30,8% de apartados de matemáticas escolares y un 15,4% de Didáctica de la matemática forman parte del currículo común. Observamos que los porcentajes de apartados que forman parte del currículo común en los tres dominios de conocimiento son menores al 50%. Se sigue manteniendo el predominio de la Pedagogía.

Tabla 2. Porcentajes de apartados tratados en un porcentaje de instituciones

Porcentaje instituciones	Matemáticas escolares	Pedagogía	Didáctica de la matemática
[0, 25)	53,8%	38,2%	59,0%
[25, 50)	15,4%	20,0%	25,6%
[50, 75)	30,8%	10,9%	7,7%
[75, 100)	0,0%	20,0%	7,7%
100	0,0%	10,9%	0,0%

Los resultados por apartados permiten conocer los contenidos tratados con un mayor nivel de detalle. Podemos observar que las diferencias entre las Matemáticas escolares y la Pedagogía son menores que por temas.

TEMAS Y APARTADOS EN EL CURRÍCULO COMÚN

Hay once temas de Pedagogía que forman parte del currículo común español: (a) psicología de la educación; (b) sociología de la educación; (c) introducción a la educación o teorías educativas; (d) conocimiento práctico de la enseñanza; (e) principios de instrucción; (f) medios en la instrucción; (g) historia de la educación y sistemas educativos; (h) evaluación y teoría de la medida; (i) métodos de investigación en educación; (j) gestión del aula; y (k) filosofía de la educación. Los presentamos según orden descendiente del porcentaje de instituciones en las que se encuentran, de forma que los cuatro primeros temas se recogen en el 100% de las instituciones. A continuación presentamos los 23 apartados de Pedagogía incluidos en el currículo común español: (a) teorías del desarrollo psicológico, desarrollo cognitivo e inteligencia; (b) organización de los actuales sistemas educativos; (c) organización y cultura de la escolarización y de la escuela; (d) relaciones de la educación y otros apartados; (e) papel del profesor; (f) teoría del currículo y teoría del desarrollo curricular; (g) condiciones sociales, cambio social, desarrollo social y recursos sociales, y educación escolar; (h) desarrollo profesional del profesor; (i) métodos y modelos de enseñanza; (j) uso de las tecnologías de la información y de la comunicación y otros métodos para apoyar la instrucción; (k) diversidad (indígenas, cultural, lengua, género y necesidades especiales); (l) políticas educativas, reforma y aspectos educativos actuales; (m) teorías de aprendizaje; (n) conocimiento de cómo tratar con estudiantes con diferencias lingüísticas, culturales y recursos económicos, y necesidades educativas especiales; (o) cooperación entre profesores; (p) relaciones profesor-estudiante; (q) gestión de la comunicación en clase y entornos de aprendizaje; (r) desarrollo de sesiones de clase; (s) objetivos de la institución escolar; (t) evaluación de la clase; (u) propósito y función de la educación en la sociedad; (v) desarrollo de habilidades para el diseño de medios; y (w) ética de la educación y educación moral. Los seis primeros apartados presentados están incluidos en todas las instituciones españolas.

A continuación presentamos los ocho temas que Didáctica de la matemática que pertenecen al currículo común: (a) Aspectos de la habilidad y el pensamiento matemático; (b) instrucción matemática; (c) métodos para presentar los principales conceptos matemáticos; (d) problemas matemáticos; (e) conocimiento del currículo de matemáticas y estándares; (f) contextos de la Educación Matemática; (g) fundamentos de las matemáticas; y (h) naturaleza y desarrollo de la habilidad y el pensamiento matemático. El primero de los temas se incluye en todas las instituciones. Y los seis apartados de Didáctica de la matemática que pertenecen al currículo común español son: (a) utilización de materiales manipulativos; (b) desarrollo de procedimientos; (c) resolución de problemas; (d) dificultades de los estudiantes; (e) historia de la matemática y de la educación matemática; y (f) números. No hay apartados de Matemáticas escolares ni de Didáctica de la matemática que se incluyan en todas las instituciones.

En lo relativo a las Matemáticas escolares, hay tres temas que forman parte del currículo común español: (a) número; (b) medida; (c) geometría; y (d) representación de datos, probabilidad y estadística. El primero de ellos se trata en el 100% de las instituciones. Los ocho apartados de Matemáticas escolares que forman parte del currículo común son: (a) fracciones y decimales; (b) enteros, racionales y números reales; (c) otros números, conceptos numéricos y teoría de números; (d) geometría euclídea; (e) geometría de las transformaciones; (f) geometría tridimensional; (g) representación y análisis de datos (incluyendo muestreo, inferencias y correlaciones); y (h) incertidumbre y probabilidad.

CONCLUSIONES

Hemos analizado documentos curriculares que dan muestra de la formación matemática y didáctica del plan de estudios de magisterio vigentes en el período 1991-2010. En el contexto del estudio internacional TEDS-M, consideramos tres niveles en este análisis: (a) nacional, (b) institucional y (c) formador.

En el nivel nacional se observa una tendencia clara hacia el predominio de los contenidos pedagógicos generales, dado que la mayor parte de las asignaturas troncales pertenecen a este campo. Destacamos el hecho de que no se distingue entre contenidos de Matemáticas (escolares y avanzadas) y contenidos de Didáctica de la matemática. Únicamente existe una asignatura que combina descriptores de estos contenidos: Matemáticas y su Didáctica. Esto apunta hacia una formación de maestros generalista.

Los documentos en el nivel institucional sí distinguen entre la formación en Matemáticas y Didáctica de la matemática. Por tanto, se observa una intención de las instituciones por, haciendo uso de su autonomía, profundizar en la formación matemática de los maestros a través de asignaturas obligatorias y optativas que diversifican la formación. Aun así, se sigue manteniendo la predominancia de los contenidos de Pedagogía mencionada en el nivel nacional.

En el nivel formador nos hemos centrado en el análisis de los contenidos de los programas de las asignaturas según los temas y apartados definidos por TEDS-M. Hemos utilizado la definición de currículo común de Cañadas, Gómez y Rico (2014) para identificar los temas y apartados que se presentan en más del 50% de las instituciones españolas que forman maestros.

Según el análisis realizado en el nivel formador, el currículo común español para la formación de maestros de educación primaria los temas considerados consisten en un 41,8% de los establecidos para Pedagogía, un 30,8% de los de Matemáticas escolares y un 15,4% de temas de Didáctica de la matemática. Los programas de las asignaturas enfatizan la Pedagogía y las Matemáticas escolares. En particular, número, psicología de la educación y sociología de la educación son los temas más tratados en estos programas. Por el contrario, la Didáctica de la matemática se trabaja con menos amplitud.

El tipo de análisis presentado en este documento también aporta ideas para describir los documentos curriculares de los planes de formación de futuros profesores de matemáticas de otros niveles educativos. En este sentido, somos conscientes de que el análisis llevado a cabo presenta unas limitaciones impuestas por un estudio internacional en el que había que tener en cuenta las peculiaridades de diferentes países y que influyeron claramente en los temas y apartados considerados para la codificación. Sin embargo, los campos o dominios fueron generales y ahí los resultados siguen siendo claros y en el mismo sentido que cuando se entra en niveles más específicos del análisis. Debiera plantearse un análisis más específico de los documentos curriculares que, para el caso español, permitiera describir con mayor precisión el currículo común de los planes de formación de profesores en nuestro país.

En particular, los resultados presentados pueden ser especialmente interesantes para países de la Unión Europea, ya que constituyen una forma de analizar las oportunidades de aprendizaje que se les ofrecen a los futuros maestros de educación primaria a través del análisis de documentos curriculares y puede llevar a la toma de decisiones conjuntas.

Aunque el plan de estudios analizado en este seminario ha cambiado y es distinto en la actualidad, por motivo de la nueva estructura de planes de estudio derivada de la implantación del Espacio Europeo de Educación Superior (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007), hay resultados del informe TEDS-M de gran interés que deben ser tenidos en cuenta para futuras revisiones y mejoras. Es claro que los resultados del estudio subrayan la necesidad de prestar atención a los contenidos relativos a la Didáctica de la matemática y de ampliar los contenidos relativos a las matemáticas escolares. Queda pendiente mejorar y profundizar la reflexión sobre los programas del plan de formación de maestros vigente en la actualidad, sobre los conocimientos a estudiar, las capacidades a lograr y las competencias profesionales a desarrollar. Singularmente, delimitar y analizar las deficiencias encontradas por TEDS-M en España, ayudará a abordarlas y superarlas.

Desde este foro en que presentamos el trabajo, requerimos el compromiso de los investigadores en Educación Matemática españoles para que elaboren e implementen propuestas de formación inicial y permanente para los maestros, que acrecienten sus conocimientos teóricos y prácticos sobre las matemáticas escolares, que contribuyan a renovar su conocimiento del contenido y su conocimiento didáctico.

Referencias

Boyd, D., Grossman, P., Lankford, H., Loeb, S. y Wyckoff, J. (2009). Teacher preparation and student achievement. *Educational Evaluation and Policy Analysis, 31*(4), 416-440.

Cañadas, M. C., Gómez, P. y Rico, L. (2014). Structure of primary mathematics teacher education programs in Spain. *International Journal of Science and Mathematics Education,11*(4), 879-894.

Castro, E. y Flores, P. (2008). Spanish report on teacher education at primary level. En J. Schwille, L. Ingvarson y R. Holdgreve-Resendez (Eds.), *TEDS-M encyclopedia. A guide to teacher education context, structure, and quality assurance in 17 countries, findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M)* (pp. 209-226). Michigan, MI: Michigan State University.

Cochran-Smith, M. y Zeichner, K. M. (Eds.) (2005). *Studying teacher education. The report of the AERA panel on research and teacher education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Eberly, M., Newton, S. y Wiggins, R. (2001). The syllabus as a tool for student-centered learning. *The Journal of General Education, 50*(1), 56-74.

Ministerio de Educación y Ciencia (1991). Real Decreto 1440/1991, de 30 de agosto, por el que se establece el título universitario oficial de Maestros en sus diversas especialidades y las directrices generales propias de los planes de estudios conducentes a su obtención. *Boletín Oficial del Estado (España), 244*, 33004-33008.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007). Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales. *Boletín Oficial del Estado, 260, 44037-44048.*

Rico, L, Gómez, P. y Cañadas, M. C. (2014). Formación inicial en educación matemática de los maestros de Primaria en España, 1991-2010. *Revista de Educación, 363,* 35-59.

Rico, L. (1994). Componentes básicas para la formación del profesor de matemáticas de secundaria. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 21*, 33-44.

Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. Profesorado. *Revista de Currículum y Formación del Profesorado, 8*(1), 1-15.

Rico, L. y Sierra, M. (1996). History and background of Spanish primary teachers training on mathematics and its didactics. In J. Giménez, S. Llinares, & M. V. Sánchez (Eds.), *Becoming a primary teacher. Issues from mathematics education*. Badajoz, España: Indugraphic.

TEDS-M (2008a). *Teacher preparation curriculum analysis primary and secondary teacher preparation curriculum/standards analysis at national or local levels.* Documento no publicado.

TEDS-M (2008b). *Survey operations procedures-Unit 8*. Documento no publicado.

Travers, K. J. y Westbury, I. (1989). *The IEA study of mathematics I: Analysis of mathematics curricula*. Oxford, Reino Unido: Pergamon.

---

[1] El estudio TEDS-M en España está coordinado por la Secretaría de Estado de Educación y Formación Profesional del Ministerio de Educación, a través del Instituto de Evaluación y del Instituto Superior de Formación y Recursos en Red para el Profesorado. La coordinación institucional con las universidades y la gestión de los datos ha correspondido a la Secretaría General del Consejo de Coordinación Universitaria. Agradecemos a estas instituciones la ayuda proporcionada al Grupo Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico, grupo FQM-193 del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación, cuyo director y miembros han llevado la coordinación y el trabajo científico del estudio en España.

Este trabajo ha sido apoyado por el Proyecto de Excelencia de la Junta de Andalucía P07-FQM03244 «TEDS-M España» y parcialmente subvencionado por el proyecto EDU2009-10454 del Ministerio de Ciencia e Innovación.

TEDS-M está subvencionado por la International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA), bajo la dirección de la Michigan State University (MSU), en colaboración con the Australian Council for Educational Research (ACER) y los países participantes. Los costes internacionales de TEDS-M los ha financiado la IEA, mediante una ayuda de US National Science Foundation NSF REC 0514431 a la MSU (M. T. Tatto, PI) junto con la financiación de cada país participante. Cada uno de estos asume los costes del proyecto nacional y de la implementación local de

TEDS-M de acuerdo con los procedimientos y estándares internacionales. Las opiniones, hallazgos y conclusiones o recomendaciones expresadas en este trabajo son de los autores y no necesariamente reflejan la visión de la IEA, MSU, ACER o la NSF.

[2] Siguiendo los criterios establecidos por TEDS-M, definimos este tamaño en términos del número de estudiantes para Maestro de Primaria en el último curso.

[3] Los temas y apartados definidos para los dominios de conocimiento están disponibles en http://www.ugr.es/~tedsm/TemasyApartadosTEDS-M.pdf

RÉPLICA A 'ASPECTOS CURRICULARES DE LA FORMACIÓN MATEMÁTICA Y DIDÁCTICA EN EL PLAN DE ESTUDIOS DE MAGISTERIO 1991-2010'

Response to 'Curricular aspects of the mathematical and didactic training in the program of primary teachers training 1991-2010'

Núria Planas

Universidad Autónoma de Barcelona

Resumen

En este documento de réplica me centro en dos de las ideas principales elaboradas por Cañadas y Rico en su ponencia escrita sobre el plan de estudios de Magisterio 1991-2010: la predominancia de contenidos de Pedagogía y la insuficiente singularización de contenidos específicos de Didáctica. Sitúo ambas ideas en relación con la mejora de las oportunidades de aprendizaje que se ofrecen a los futuros maestros de educación primaria, tomando así otra de las ideas clave del texto que replico. Acabo con reflexiones acerca de las posibilidades de cambio que se abren en el actual escenario post Bolonia con las titulaciones de grado.

Palabras clave: *TEDS-M España, formación de maestros de primaria, oportunidades de aprendizaje, sesgo pedagógico, singularización didáctica.*

Abstract

In this report I elaborate my response to Cañadas and Rico by focusing on two of the main ideas in their written text about the Spanish teacher education program during 1991-2010: the dominance of pedagogical contents and the insufficient singularization of didactical contents. I situate both ideas in respect of the growth of learning opportunities for the initial teacher education of primary teachers, which is another of the key ideas in the responded text. Some reflections on the opened possibilities of change in the post Bologna scenario with the new degrees are posed at the end.

Keywords: *TEDS-M Spain, primary teacher education, learning opportunities, pedagogical bias, didactical singularization.*

DOS RESULTADOS DE TEDS-M ESPAÑA

Con respecto a los niveles nacional, institucional y formador del plan de estudios de Magisterio 1991-2010, en España el proyecto TEDS-M (*Teacher Education Study in Mathematics*) ha proporcionado evidencias de la escasa profundización en el conocimiento matemático y su enseñanza lograda por los estudiantes para maestro al final del programa de formación. El análisis realizado por el equipo de la Universidad de Granada coordinado por L. Rico, del cual se hace eco la ponencia escrita a la que replico, señala dos resultados en torno a esta escasa profundización:

(i) la predominancia de contenidos de Pedagogía y

(ii) la singularización insuficiente de contenidos de Didáctica de la Matemática.

Con base en mi selección de estos resultados, organizo la réplica en cuatro apartados. Tras esta introducción, señalo aspectos históricos e ideológicos que pueden haber llevado al fenómeno de desequilibrio curricular entre contenidos pedagógicos y contenidos didácticos y matemáticos en la formación inicial del profesorado. Sigo con la elaboración de razones para explicar la orientación excesivamente generalista de los programas de formación de maestros de primaria, entre ellas, la

Planas, N. (2014). Réplica a 'Aspectos curriculares de la formación matemática y didáctica en el plan de estudios de magisterio 1991-2010'. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 93-98). Salamanca: SEIEM.

relación confusa entre contenidos de Didáctica de la Matemática y contenidos de Pedagogía. Acabo con una reflexión sobre las posibilidades de cambio que se abren en la actual época post Bolonia.

Tengo muy presente la noción de oportunidad de aprendizaje aplicada al caso de los futuros maestros de educación primaria durante su participación en el plan de formación inicial. Entiendo, como Cañadas y Rico, que entre 1991 y 2010 los estudiantes para maestro de educación primaria en España hubieran tenido más y mejores oportunidades de aprendizaje de la tarea de enseñar matemáticas si hubieran recibido una formación con mayor peso en la didáctica específica. No entro a discutir el efecto del escaso peso de matemáticas avanzadas en la creación de oportunidades de aprendizaje durante la puesta en práctica del total de 48 planes de estudios analizados.

En mi trabajo con compañeros del equipo GIPEAM –Grupo de Investigación en Práctica Educativa y Actividad Matemática, 2014-SGR972, de la Generalitat de Catalunya– vengo utilizando la noción de oportunidad de aprendizaje aplicada al caso de estudiantes de enseñanza secundaria. En Planas (2014), por ejemplo, se ilustra la creación y el aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje matemático en el desarrollo de la interacción entre estudiantes. En Ferrer, Fortuny, Planas y Boukafri (2014; ver actas de este Simposio), se muestra que la calidad de las oportunidades de aprendizaje creadas por un profesor tiene un impacto detectable en algunos de los aprendizajes matemáticos logrados por sus alumnos en clase. Este segundo estudio señala el conocimiento del profesor sobre el contenido matemático y sobre la gestión pedagógica de la actividad en el aula como dos de los factores involucrados en el aprendizaje matemático del alumno. Hasta ahora, sin embargo, no hemos realizado estudios que examinen la calidad de las oportunidades donde el objeto del aprendizaje sean el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido a cargo del estudiante para maestro de primaria en relación con la materia de matemáticas.

A raíz de la preparación de la réplica, he podido comprobar que varios autores utilizan la noción de oportunidad de aprendizaje en el dominio de la formación inicial del profesorado de matemáticas. He empezado consultando dos de los trabajos citados en el texto de Cañadas y Rico: el de Boyd y otros (2009) y el más antiguo de Travers y Westbury (1989). Ambos trabajos aluden al currículo establecido e implementado en los programas de formación del profesorado como un factor decisivo en la generación y explotación de oportunidades de aprendizaje para los futuros maestros. El currículo, en el sentido del contenido que se enseña a los futuros maestros, se ve determinante hasta el punto de que variaciones pequeñas en él pueden conseguir explicar variaciones importantes en la emergencia de oportunidades de aprendizaje profesionalmente relevantes.

Otras investigaciones vinculan las oportunidades de aprendizaje al currículo pero no tanto desde la perspectiva de los contenidos sino de acuerdo con una instrucción orientada a una modelización efectiva de la enseñanza. En la revisión producida por encargo de la Comisión Internacional de Instrucción Matemática para el Congreso ICME-10, Adler y otros (2005, p. 363) destacan que uno de los fines de la investigación sobre formación del profesorado de matemáticas es llegar a "comprender cómo los profesores aprenden y desde qué oportunidades" (en el original, "*understanding how teachers learn, and from what opportunities*"). Habiendo rastreado estudios de varios países (España no incluida), estos autores alertan sobre el débil conocimiento matemático de muchos maestros que ejercen su profesión en las primeras etapas de la educación obligatoria; de ahí infieren la urgencia de ofrecer oportunidades de aprendizaje del contenido matemático que se tendrá que enseñar mediante su uso en simulaciones y prácticas reales de enseñanza. En síntesis, pues, la creación de oportunidades se asocia al establecimiento de conexiones entre la formación inicial, el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento de su puesta en práctica.

En los dos apartados que siguen comento respectivamente dos de los resultados del proyecto TEDS-M España, recogidos en el texto de Cañadas y Rico y asociados a la limitación de la cantidad de oportunidades de aprendizaje de calidad que se ofrecen a los estudiantes para maestro. La mirada conjunta a estos resultados resalta un escenario donde el sesgo pedagógico en los programas de formación de maestros se agrava por la insuficiente singularización de lo didáctico, que queda diluido y a veces soslayado en favor de la enseñanza del contenido de la materia escolar.

EL FENÓMENO DEL SESGO PEDAGÓGICO

En Rico, Gómez y Cañadas (2014, p. 55) se indica la existencia de "un sesgo pedagógico considerable" en los diseños a escala nacional e institucional y en la implementación en el aula universitaria del plan de estudios de Magisterio que ha estado vigente en el país entre 1991 y 2010. Uno de los aportes del estudio TEDS-M, en España pero también en otros países al respecto de sus planes de estudio, es que examina y da evidencias de este fenómeno, el del sesgo pedagógico, del que se ha hablado bastante sin haber sido analizado antes de un modo sistemático y transnacional.

Desde hace tiempo defiendo la complementariedad entre contenidos didácticos, matemáticos y pedagógicos, que no son opuestos, divergentes ni distantes. Algunos educadores del área trivializan el valor de la Pedagogía en el aprendizaje de la tarea de enseñar matemáticas por interpretar que esta ciencia trata cuestiones de orden general que no resultan útiles en Didáctica de la Matemática. Este es un equívoco común sobre la naturaleza de los contenidos pedagógicos y su papel en las Didácticas específicas. A la práctica de poco sirven los conocimientos didácticos si no incorporan aspectos de particularización pedagógica sobre el perfil del estudiante y el de profesor, el contexto de la instrucción, las características del currículo, etc. Igualmente, de poco sirven los conocimientos pedagógicos si no van acompañados de una explotación didáctica y matemática adecuada.

Por lo anterior, sería igual de preocupante la existencia de un sesgo didáctico o de uno matemático que anulara la atención a contenidos pedagógicos básicos en la formación inicial del maestro de primaria. Con todo, el sesgo pedagógico es el que cabe problematizar por ser el que se ha detectado. Yo misma he intuido este sesgo de manera informal en el transcurso de mi experiencia profesional con estudiantes de tercer curso, primero de la diplomatura y luego del grado, quienes acostumbran a experimentar importantes dificultades en la comprensión de nociones matemáticas básicas, a la vez que dicen sentirse cómodos con el manejo de otras nociones que han estudiado en distintas materias del programa, tales como constructivismo, sistema educativo o diversidad. Es probable que la investigación en Didáctica de las Ciencias Experimentales u otras Didácticas específicas haya detectado un sesgo pedagógico similar en la formación de los maestros.

En los países de tradición occidental, varios motivos históricos explican la aparición y continuidad del sesgo pedagógico en la formación de maestros (de matemáticas). A medida que en el siglo pasado se fue detectando el aumento de situaciones de exclusión en la escuela y de fracaso escolar en matemáticas para ciertos grupos de alumnos, se pensó que el ideal de la democracia corría serio peligro. Popkewitz (1988, 1990) relata la reacción de las instituciones públicas, que empezaron a producir discursos sobre el alumno como persona. En las políticas educativas surgieron los procesos de personalización de los currículos y de los planes de estudios vinculados a profesiones docentes (Giroux y MacLaren, 1986). Los procesos de personalización consistían esencialmente en la introducción de acciones de atención a la diversidad según la clasificación de tipos esperados de diferencias. Junto con otras circunstancias, así se fue gestando la representación de los contenidos pedagógicos en los programas de formación de maestros en oposición a los contenidos didácticos.

La distinción entre aprendiz de matemáticas y persona banaliza el valor de la ciencia pedagógica en la profesión docente y la hace competir injustificadamente con las Didácticas específicas. Aunque la Pedagogía no reúne las condiciones del conocimiento requerido para organizar las prácticas de enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar, ha desarrollado conocimientos sólidos sin los cuales no sería posible explicar los hechos educativos. Ahora bien, esto no hace menos crítico el problema del sesgo pedagógico en la formación inicial del maestro de primaria, en especial cuando algunos contenidos pedagógicos se pretenden utilizar para configurar una imaginada Didáctica General. Son los expertos en el conocimiento de cada disciplina los que se hallan en situación de trabajar en la didáctica de esa disciplina. La cercanía entre Pedagogía y Didáctica de la Matemática no debe buscarse en puntos de intersección referidos a una supuesta Didáctica General. La superación del sesgo pedagógico requiere que a cada ciencia se le atribuya su espacio y potencial formador, sin recurrir a argumentaciones falaces sobre principios y ciencias enfrentadas.

EL FENÓMENO DE LA INSUFICIENTE SINGULARIZACIÓN DIDÁCTICA

En Rico, Gómez y Cañadas (2014, p. 57) se pone de relieve "la débil presencia de la Didáctica de la Matemática" en los programas españoles examinados de formación inicial de maestros. Del mismo modo que ocurre con el fenómeno del sesgo pedagógico, los avances del proyecto TEDS-M España han servido para documentar un fenómeno, el de la insuficiente singularización didáctica en los programas de estudio, sobre el cual no se había llevado a cabo antes una identificación metódica.

En la Figura 2 del texto que replico, Cañadas y Rico ilustran el bajo porcentaje de créditos dedicados a la Didáctica de la Matemática (un 6.5%) según el vaciado de 48 planes de estudio particularizados a nivel institucional. En las Tablas 1 y 2 se observa que, en el nivel formador dado por los temas y apartados que los distintos equipos docentes universitarios elaboran, el núcleo central está constituido por temas y apartados principalmente de Pedagogía. Si atendemos al total de apartados del currículo común, en el sentido definido por el equipo de TEDS-M España, el porcentaje de apartados de Didáctica de la Matemática es de un 15.4%. En general, estos y otros índices proporcionados por Cañadas y Rico dan cuenta de la insuficiente singularización didáctica en la formación del maestro de primaria que habrá de enseñar matemáticas.

A fin de ejemplificar qué se requiere para la singularización de contenidos de Didáctica de la Matemática, y a la luz del análisis de Cañadas, Rico y el resto de investigadores del equipo, tomo uno de los 23 apartados de Pedagogía incluidos en el currículo común español, el de 'teorías de aprendizaje' y uno de los seis apartados de Didáctica de la Matemática, el de 'dificultades de aprendizaje'. Si bien es cierto que todo estudiante para maestro debe tener conocimientos sobre qué es el aprendizaje y cómo se aprende, estos conocimientos generales no bastan a la hora de interpretar el aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. Los contenidos sobre por qué existen teorías diversas y qué las caracteriza son un marco de referencia para ubicar los contenidos sobre por qué hay conceptos matemáticos elementales cuyo aprendizaje es especialmente costoso a lo largo de la escolarización del alumno de primaria. Pero se requieren marcos teóricos concretos sobre la gestión de una enseñanza de matemáticas que no agrave dificultades inherentes al desarrollo de conceptos del currículo de matemáticas. Es primordial que el estudiante para maestro sepa que hay marcos teóricos sobre las dificultades habituales en el aprendizaje de las fracciones, de las isometrías, de la probabilidad… y que su conocimiento debe informar a la práctica docente.

Sigo con otro ejemplo sobre la singularización didáctica que se requiere en la formación inicial de maestros que habrán de enseñar matemáticas. Las teorías constructivistas del aprendizaje, por citar el enfoque dominante en la actualidad, apuntan a la promoción de ambientes de comunicación e interacción entre alumnos. Ahora bien, cuando se enseñan contenidos de geometría euclídea y transformaciones, no deben obviarse los recursos tecnológicos para la comunicación matemática que se han probado como facilitadores de procesos de visualización y de formulación de conjeturas (Arnal-Bailera y Planas, 2014; ver actas de este Simposio). Los beneficios del uso de programas de geometría dinámica en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría es un conocimiento didáctico singular que modifica los modos de entender la comunicación e interacción en el trabajo de geometría en el aula de primaria. En este sentido, otro de los apartados de Pedagogía, el de 'uso de las tecnologías de la información y de la comunicación y otros métodos para apoyar la instrucción', enseña las bondades del uso de las tecnologías en clase, pero desde la perspectiva de la Didáctica de la Matemática lo que se espera que el futuro maestro aprenda es que hay artefactos tecnológicos y usos con efectos beneficiosos en el pensamiento geométrico de los alumnos. Así, las teorías constructivistas dan cuenta del valor de la comunicación, de la interacción, de la combinación de recursos en la enseñanza…, pero es la Didáctica de la Matemática la que informa sobre formas de comunicación, tipos de interacción, recursos… idóneos en el desarrollo de unos u otros contenidos.

Análogamente a lo que he discutido para el fenómeno del sesgo pedagógico, conviene mencionar de nuevo la complementariedad entre contenidos didácticos, matemáticos y pedagógicos. El problema de la insuficiente singularización didáctica no se resuelve banalizando la relevancia de la formación pedagógica de los futuros maestros, ni otorgando a la Pedagogía un papel que no le atañe. Enseñar las teorías del aprendizaje, el papel de la comunicación en clase y el de las tecnologías al servicio de la educación es solo una parte de lo que se necesita para lograr que los estudiantes para maestro avancen en la comprensión de la tarea particular de enseñar matemáticas en la escuela.

REFLEXIONES SOBRE POSIBILIDADES DE CAMBIO

Los resultados discutidos alertan sobre un escenario insatisfactorio que requiere cambios. De acuerdo con el hilo argumental de esta réplica, el propósito que oriente los cambios tiene que ver con la mejora de las oportunidades de aprendizaje que se ofrecen a los estudiantes para maestro, en concreto de las relativas a la superación del sesgo pedagógico y al logro de una singularización didáctica. Además del compromiso incuestionable de los investigadores en el área, cabe pensar que se cuenta con el compromiso de las autoridades, dada la preocupación manifestada a raíz de la diseminación de datos y resultados del equipo de TEDS-M España, y de la colaboración en este Seminario de un representante de la Secretaría de Estado de Educación, Formación Profesional y Universidades. Dicho esto, paso a centrar estas reflexiones finales en el nivel formador.

En Cañadas, Gómez y Rico (2013, p. 891) se lee la siguiente afirmación que traduzco del inglés: "Incluso cuando diferentes educadores enseñan el mismo curso en la misma institución, se pueden observar diferencias en términos de las materias y de los contenidos". Esta conclusión lleva a pensar en los formadores de formadores como agentes involucrados en la activación de cambios para la mejora de la formación didáctica en matemáticas del futuro maestro. Aun habiendo leyes y directrices que deben aplicarse por igual en todas las titulaciones de grado para la formación de maestros en España, los equipos docentes en Didáctica de la Matemática tienen un elevado grado de libertad durante la preparación e implementación de su enseñanza en el aula universitaria.

Por otra parte y a pesar de que el escenario general es insatisfactorio, estamos ante datos promedios tomados para 48 instituciones, con la evaluación indirecta de hasta 48 equipos docentes cuyo encargo ha sido/es enseñar materias con/de Didáctica de la Matemática. Desconozco si se ha notado una variabilidad significativa en los datos sobre conocimientos de los futuros maestros entre instituciones, y si ha habido algún caso donde la profundización en conocimientos de Didáctica de la Matemática se haya probado mejor en comparación con los conocimientos de estudiantes de otras universidades. Si así fuera, convendría examinar el detalle de los niveles institucional y formador. Las posibilidades de cambio adquirirían fuerza si se contara con la referencia de un modelo de "éxito"; el estudio de las características de un nivel formador que haya sido experimentado con logros efectivos de los futuros maestros respecto a conocimientos didácticos en matemáticas, es un punto de partida. Estoy convencida de que disponemos de algún modelo de éxito en al menos una institución del territorio español. De manera adicional, pueden buscarse otros modelos de éxito en instituciones de los 16 países restantes con participación en el proyecto TEDS-M.

Referencias

Adler, J., Ball, D., Krainer, K., Lin, F.-L. y Novotná, J. (2005). Reflection on an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics, 60*(3), 359-381.

Arnal-Bailera, A. y Planas, N. (2014). La actividad docente de un profesor: Geometría, tecnología y grupos de riesgo. En M. T. González, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII*. Salamanca: SEIEM.

Boyd, D., Grossman, P., Lankford, H., Loeb, S. y Wyckoff, J. (2009). Teacher preparation and student achievement. *Educational Evaluation and Policy Analysis, 31*(4), 416-440.

Cañadas, M. C., Gómez, P. y Rico, L. (2013). Structure of primary mathematics teacher education programs in Spain. *International Journal of Science and Mathematics Education, 11*(4), 879-894.

Ferrer, M., Fortuny, J. M., Planas, N. y Boukafri, K. (2014). Modos de actuación e interacción y generación de oportunidades de aprendizaje matemático. En M. T. González, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII*. Salamanca: SEIEM.

Giroux, H. A. y McLaren, P. (1986). Teacher education and the politics of engagement: The case for democratic schooling. *Harvard Educational Review, 53*(3), 213-238.

Planas, N. (2014). One speaker, two languages: Learning opportunities in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, DOI: 10.1007/s10649-014-9553-3*.

Popkewitz, T. S. (1988). Institutional issues in the study of school mathematics: Curriculum research. *Educational Studies in Mathematics*, *19*(2), 221-249.

Popkewitz, T. S. (Ed.) (1990). *Formación del profesorado. Tradición. Teoría. Práctica*. Valencia: Universitat de València (traducción del original en inglés de 1987).

Rico, L., Gómez, P. y Cañadas, M. C. (2014). Formación inicial en educación matemática de los maestros de Primaria en España, 1991-2010. *Revista de Educación*, *363*, 35-59.

Travers, K. J. y Westbury, I. (1989). *The IEA study of mathematics I: Analysis of mathematics curricula*. Oxford, Reino Unido: Pergamon.

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO Y CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL FUTURO PROFESOR ESPAÑOL DE PRIMARIA. RESULTADOS DEL ESTUDIO TEDS-M[1]

Spanish preservice primary school teachers' mathematics content knowledge and mathematics pedagogical content knowledge. Results from TEDS-M

Pedro Gómez[a], Araceli Gutiérrez-Gutiérrez[b]

[a]Universidad de los Andes, [b]Universidad de Granada

Resumen

En este documento, profundizamos en el estudio del conocimiento matemático y didáctico manifestado por los futuros profesores españoles que participaron en el estudio TEDS-M. Para ello, describimos el marco teórico propuesto por TEDS-M y proponemos una aproximación alternativa a la conceptualización del conocimiento didáctico del futuro profesor. Describimos el procedimiento metodológico, con el que analizamos las preguntas del cuestionario, que nos permitió caracterizar y detallar los resultados españoles y compararlos con los resultados de los países con programas de formación similares al español. Ejemplificamos estos resultados para el subdominio de números y operaciones y hacemos un análisis crítico del diseño de la prueba.

Palabras clave: *conocimiento didáctico del contenido, Didáctica de la Matemática, formación inicial de profesores, contenido Números, educación primaria, TEDS-M.*

Abstract

In this paper, we delve in the study of the content and pedagogical content knowledge exhibited by the Spanish future teachers that participated in the TEDS-M study. We describe the theoretical framework proposed by TEDS-M and propose an alternative approach to the conceptualization of the pedagogical content knowledge of the future teacher. We describe the method we used for analysing the survey items that allowed us to characterize and detail the Spanish results and compare them with the results of the countries that have teacher education programs similar to the Spanish one. We exemplify these results for the subdomain of numbers and operations and present a critical analysis of the survey design.

Keywords: *mathematics pedagogy; pedagogical content knowledge; preservice teacher education; primary education; TEDS-M.*

ESTUDIO TEDS-M

El estudio TEDS-M (Teacher Educationand Development Study in Mathematics) fue el primer estudio internacional comparativo sobre los planes de formación inicial y sobre los conocimientos de los futuros profesores de primaria y secundaria obligatoria al final de su preparación como profesores de matemáticas. El estudio se realizó durante los años 2006-2010. El informe internacional (Tatto, Sharon, Senk, Ingvarson y Rowley, 2012) y el informe español (INEE, 2012) se publicaron en 2012. TEDS-M fue patrocinado por la Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educativo (IEA, por sus siglas en inglés). España participó en el estudio para —entre otros objetivos— analizar y caracterizar, sobre una sólida base empírica, cómo era la formación inicial del profesorado de primaria de matemáticas en España; establecer relaciones entre ese conocimiento y las características del plan de estudios en el que habían recibido su formación (1991-2010); y poder realizar comparaciones internacionales (INEE, 2012).

Gómez, P., Gutiérrez-Gutiérrez, A. (2014). Conocimiento matemático y conocimiento didáctico del futuro profesor español de primaria. Resultados del estudio TEDS-M. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 99-114). Salamanca: SEIEM.

Los resultados españoles sobre el conocimiento matemático y didáctico que se presentaron en el informe internacional de TEDS-M (Tatto et al., 2012, p. 143) y en el informe nacional (INEE, 2012, p. 85) son globales. Desde la perspectiva de los conocimientos evaluados, estos resultados se restringen a la media obtenida por los futuros profesores de primaria españoles —maestros, como se les denomina habitualmente en España— en el conocimiento matemático (481) y didáctico del contenido (492), en relación con una media internacional de 500. Por consiguiente, es necesario caracterizar y describir con mayor detalle el conocimiento manifestado por los futuros profesores de primaria españoles y ubicarlo a nivel internacional.

En este documento profundizamos en esta cuestión. Para ello, describimos y extendemos el marco teórico propuesto por TEDS-M para los dos tipos de conocimiento. En particular, abordamos la caracterización del conocimiento didáctico con base en el modelo del análisis didáctico (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013). Proponemos un procedimiento de análisis de las preguntas del cuestionario que nos permite delimitar el conocimiento evaluado y describir, de manera detallada, los resultados obtenidos por los futuros profesores de primaria de matemáticas. Ejemplificamos estos resultados con el subdominio de números y operaciones para el caso de España. Finalmente, hacemos un análisis crítico del cuestionario y de sus guías de corrección.

MARCO TEÓRICO

TEDS-M parte de la premisa de que no existe un acuerdo entre los expertos y los responsables políticos sobre cómo determinar y medir los apartados que se requieren para enseñar bien matemáticas (Ball, Lubienski, y Mewborn, 2001). Para ello, sería necesario llegar a acuerdos sobre, entre otras cosas, la importancia de la materia objeto de conocimiento y su didáctica, la relación entre la teoría y la práctica, lo que los profesores aprenden de la experiencia, las expectativas de aprendizaje de los programas de formación de profesores, y la relevancia del conocimiento previo de los futuros profesores (Schwille y Dembélé, 2007; Tatto, 2007). TEDS-M, siguiendo las ideas de Shulman (1987), consideró que el conocimiento para la enseñanza de las matemáticas tiene dos componentes: el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido. TEDS-M estableció su marco conceptual sobre esta premisa y diseñó un cuestionario que abordaba estos dos tipos de conocimientos por separado (Tatto, Schwille, Senk, Ingvarson, Peck y Rowley, 2008).

Conocimiento matemático

Para evaluar el conocimiento matemático, TEDS-M se basó en el marco conceptual elaborado para TIMSS 2007 (*Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias*) (Mullis, Martin, Ruddock, O'Sullivan, Arora, y Erberber, 2007). El objetivo de la evaluación fue el conocimiento de los futuros profesores de primaria sobre el contenido de las matemáticas escolares. De la misma forma que se realiza en TIMSS, el conocimiento matemático de los futuros profesores se evaluó atendiendo a una dimensión conceptual estructurada en cuatro subdominios —números y operaciones, geometría y medida, álgebra y funciones, y datos y azar— y a una dimensión cognitiva compuesta por tres subdominios —conocimiento, aplicación y razonamiento— (INEE, 2012).

Conocimiento didáctico

La evaluación del conocimiento didáctico no partió de un marco conceptual previamente establecido. TEDS-M organizó este conocimiento en tres subdominios, prestando atención a la dimensión temporal del proceso de enseñanza aprendizaje —curricular, planificación de la enseñanza e implementación de la enseñanza—. La versión inicial del marco conceptual caracterizó cada subdominio en términos de unos temas (Tatto et al., 2008, p. 39) que presentamos en la tabla 1.

Tabla 1. Conocimiento didáctico del contenido matemático en TEDS-M

Currículo	Planificación	Implementación
• Establecer objetivos de aprendizaje apropiados • Conocer diferentes formatos de evaluación • Establecer itinerarios y conexiones dentro del currículo • Identificar ideas clave en los programas de aprendizaje • Conocer el currículo de matemáticas	• Planificar o seleccionar actividades apropiadas • Elegir formas de evaluación • Predecir respuestas típicas de los estudiantes, incluidas las concepciones erróneas • Planificar métodos apropiados para la representación de ideas matemáticas • Vincular los métodos didácticos y los diseños de instrucción • Identificar los diferentes enfoques para resolver los problemas matemáticos • Planificar la enseñanza matemática	• Analizar o evaluar las soluciones o los argumentos matemáticos de los estudiantes • Analizar el contenido de las preguntas de los estudiantes • Diagnosticar las respuestas típicas de los estudiantes, incluidas las concepciones erróneas • Explicar o representar los conceptos matemáticos o los procedimientos • Generar preguntas fructíferas • Responder a inesperados problemas matemáticos • Realizar una retroalimentación adecuada

Fuente: Tatto et al. (2008, p. 39)

Cuatro años más tarde, TEDS-M, en su informe internacional, consideró que los temas que se presentan en la tabla 1 eran solamente ejemplos del subdominio correspondiente (Tatto et al., 2012, p. 131). Por consiguiente, estos listados de temas no proporcionan una caracterización completa de los subdominios establecidos y caracterizan de manera parcial el conocimiento didáctico de un futuro profesor de matemáticas. Por otra parte, y como veremos más adelante, los subdominios propuestos implican una distinción entre la planificación y la implementación que resulta difícil de establecer cuando se evalúa, con un cuestionario, el conocimiento didáctico de futuros profesores.

Las razones anteriores nos indujeron a abordar la caracterización del conocimiento didáctico de los futuros profesores desde otro marco conceptual. Para ello, seleccionamos el modelo del análisis didáctico, como conceptualización de las actividades necesarias para diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas para un tema de las matemáticas escolares. El modelo del análisis didáctico permite caracterizar el conocimiento didáctico de un profesor de matemáticas (Gómez, 2006). Se organiza en torno a cuatro análisis (de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación) que siguen las dimensiones del currículo (conceptual, cognitiva, formativa y social). Cada análisis se configura alrededor de nociones de la Educación Matemática que denominamos organizadores del currículo. Un organizador del currículo (a) es una noción que forma parte del conocimiento disciplinar de la educación matemática y (b) permite analizar un tema de las matemáticas escolares con el propósito de producir información sobre el tema que sea útil en el diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas (Rico, 1997, pp. 45-46). Con el propósito de mantener la terminología utilizada en el informe internacional de TEDS-M en los apartados relativos a la evaluación de los conocimientos, en este trabajo, establecemos los subdominios del conocimiento didáctico en términos de los cuatro análisis del análisis didáctico: contenido, cognitivo, instrucción y evaluación. Cada subdominio se caracteriza en términos de unos temas que corresponden a los organizadores del currículo. El subdominio conceptual se compone de tres temas: los conceptos y procedimientos y las relaciones entre ellos que caracterizan el contenido estudiado (estructura conceptual), las formas de representar ese contenido y las relaciones entre ellas (sistemas de representación) y la organización de los fenómenos que le dan sentido (fenomenología). El subdominio cognitivo está compuesto por tres temas: las expectativas de aprendizaje, las limitaciones de aprendizaje y las oportunidades o hipótesis de aprendizaje. El subdominio de instrucción incluye las nociones de tarea (con sus diversas componentes —metas, enunciado, materiales y recursos, agrupamiento e interacción—) y de secuencias de tareas (con los procedimientos para establecer su adecuación a las expectativas y limitaciones de aprendizaje). Finalmente, el subdominio de evaluación incluye los instrumentos y procedimientos que permiten evaluar el conocimiento del escolar y la actuación del profesor.

Nos basaremos, cuando presentemos el método, en esta estructura de subdominios y temas para establecer el conocimiento didáctico que evalúan las preguntas del cuestionario de TEDS-M. Por ejemplo, las limitaciones de aprendizaje es uno de los temas del subdominio cognitivo. El cuestionario de TEDS-M incluye varias preguntas de este tema que se refieren específicamente a la capacidad del futuro profesor para reconocer los errores en los que incurren los alumnos. Como ejemplificaremos más adelante, el análisis de estas preguntas dio lugar a un apartado de este tema que hemos caracterizado como “reconocer la dificultad y/o describir el tipo de error en el que incurren los alumnos al realizar una actividad o sus concepciones erróneas sobre un concepto o procedimiento determinado”. Codificamos estas preguntas con este apartado. Realizamos este análisis para todas las preguntas que se refieren al conocimiento didáctico. De esta forma, para cada subdominio, identificamos los apartados que se evalúan en los temas que lo caracterizan.

OBJETIVO Y MÉTODO DE LA INVESTIGACIÓN

El objetivo de este estudio es describir y caracterizar el conocimiento matemático y didáctico manifestado por los futuros maestros de primaria españoles que participaron en el estudio TEDS-M. Se trata, por tanto, de una investigación descriptiva cuantitativa a partir de los datos procedentes del cuestionario TEDS-M, de las guías de corrección diseñadas para la corrección de las preguntas y de las respuestas de los futuros profesores participantes al cuestionario.

Muestra

España fue uno de los 17 países que participaron en el estudio. El trabajo de campo siguió el diseño establecido en Tatto et al. (2008). En cada país, se seleccionaron, de manera aleatoria, muestras representativas de las instituciones que ofrecían formación a la población diana de futuros profesores que se estaban preparando para enseñar matemáticas y que se encontraban en su último año de formación. Se seleccionó una muestra aleatoria de 30 futuros profesores de cada institución. Participaron un total de 483 instituciones con sus respectivos programas de formación y 13871 futuros profesores de primaria de matemáticas de esas instituciones (Tatto et al., 2012). La muestra de instituciones españolas estuvo compuesta por 48 instituciones que ofrecían formación inicial a futuros maestros de primaria y 1093 futuros maestros que seguían el programa de formación establecido por el Real Decreto 1440/1991 (MEC, 1991), anterior al actual título de Grado. Dada la diversidad de programas de formación, y para facilitar las comparaciones internacionales, el equipo de TEDS-M identificó rasgos distintivos que distinguen los programas de formación inicial de profesores de primaria de los países participantes y ubicó cada programa en uno de los cuatro grupos establecidos. Los programas de formación de España quedaron incluidos en el grupo 2, junto con programas de formación de China-Taipéi, Singapur, Suiza, Estados Unidos y Filipinas. Estos países coinciden en impartir programas generalistas y preparar a los futuros profesores para dar clase a alumnos de hasta 12 años (INEE, 2012). A continuación, y con base en el marco teórico que presentamos anteriormente, describimos el procedimiento que seguimos para caracterizar el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico evaluado por las preguntas del cuestionario.

Caracterización del conocimiento matemático

En este apartado, sintetizamos los pasos del procedimiento que utilizamos para caracterizar el conocimiento matemático manifestado por los futuros maestros españoles en el subdominio conceptual de números en TEDS-M (Gutiérrez-Gutiérrez, Gómez y Rico, en prensa) y lo ejemplificamos con el análisis de una pregunta de ese subdominio.

En primer lugar, seleccionamos y analizamos las preguntas que evalúan el conocimiento matemático en el subdominio de números y operaciones. Este análisis nos permitió determinar, para cada pregunta, el tipo de problema numérico que plantea, los conceptos matemáticos que se trabajan y los conocimientos y capacidades matemáticos implicados en las respuestas correctas e incorrectas de los futuros profesores.

En el segundo paso, caracterizamos cada pregunta según el tipo de subdominio de la dimensión cognitiva —razonamiento, aplicación y conocimiento— que evalúa y el nivel curricular del contenido matemático al que se refiere. Para ello, atendimos a la normativa vigente en España en el momento del estudio para primaria y secundaria (MEC, 2007; MECD, 2004) y caracterizamos los niveles curriculares de los contenidos según los siguientes criterios. Ubicamos en el nivel básico aquellos contenidos previstos en el currículo español de primaria. En el nivel intermedio, incluimos aquellos contenidos previstos en los tres primeros cursos de secundaria. El nivel avanzado incluye los contenidos previstos a partir del cuarto curso de secundaria.

Finalmente, y con base en la caracterización de los conocimientos evaluados en las preguntas —que surge de los pasos anteriores—, interpretamos los resultados de los futuros maestros españoles, con el propósito de describir y caracterizar el conocimiento matemático que ellos pusieron de manifiesto en las preguntas que evaluaban el conocimiento sobre números y operaciones.

Ejemplo de análisis de una pregunta de conocimiento matemático

Presentamos a continuación, como ejemplo del método, el análisis de una pregunta del subdominio conceptual de números y operaciones que describimos en detalle en Gutiérrez-Gutiérrez, Gómez y Rico (en prensa). La figura 1 presenta la formulación de la pregunta tal y como aparece en el cuestionario de TEDS-M.

Una máquina consume 2,4 litros de combustible cada 30 horas de funcionamiento. ¿Cuántos litros de combustible consumirá la máquina en 100 horas si sigue consumiendo combustible al mismo ritmo?

Marque la opción que crea correcta.

A. 7,2
B. 8,0
C. 8,4
D. 9,6

Figura 1. Pregunta sobre proporcionalidad directa

TEDS-M clasificó la pregunta de la figura 1 dentro del subdominio de aplicación de la dimensión cognitiva. La pregunta de la figura 1 propone un problema de proporcionalidad directa entre magnitudes en un contexto de la vida cotidiana. Este contenido matemático se contempla en el primer curso de secundaria en el bloque de aritmética y álgebra. Es de respuesta múltiple y la solución correcta es la opción B.

Para responder correctamente a esta pregunta, el futuro profesor debería tener el conocimiento matemático para reconocer que se trata de un problema de proporcionalidad directa entre magnitudes, en el que hay que averiguar una cantidad desconocida que forma proporción con otras tres cantidades conocidas, así como saber qué operaciones son necesarias para resolverlo y realizarlas correctamente. En este caso, solo se valora el resultado concreto del problema; no se valoran los procedimientos llevados a cabo para lograr este resultado. Con los datos que proporciona la codificación de las respuesta, no podemos saber si los futuros profesores que contestaron de forma incorrecta manifestaron reconocer o no el problema como un problema de proporcionalidad directa entre magnitudes. No obstante, sí podemos identificar, dependiendo de la opción de respuesta elegida, qué tipo de cálculos hicieron y con qué datos del problema trabajaron. De esta forma, podemos comprobar que los cálculos realizados no coinciden con los necesarios para resolver el problema. En la tabla 2, presentamos, a manera de ejemplo, la caracterización del conocimiento manifestado por los futuros maestros españoles en esta pregunta con base en el análisis anterior.

Tabla 2. Caracterización del conocimiento matemático manifestado en el problema de la figura 1

%	Respuesta	Conocimientos
77,4 %	Correcta (B)	Reconoció el problema de proporcionalidad directa entre magnitudes y supo resolverlo Operó correctamente con números decimales sencillos
15,7%	Incorrectas (A y D)	No realizó los cálculos adecuados para resolver el problema Solo utilizó uno de los datos que ofrece el problema
6,9%	Incorrecta (C)	El resultado no procede de los datos dados por el problema

Los resultados de la tabla 2 indican que el 77,4% de los futuros maestros manifestó saber resolver el problema de proporcionalidad directa entre magnitudes, mientras que un 22,6% no supo resolverlo, ya sea porque no realizó los cálculos adecuados, no utilizó los datos proporcionados o el resultado no procede de esos datos. El anterior, es un ejemplo de la forma como analizamos las preguntas e interpretamos los datos que se obtienen de ese análisis. Nuestro objetivo consiste en caracterizar el conocimiento matemático de los futuros profesores españoles con base en el análisis de todas las preguntas.

Caracterización del conocimiento didáctico

TEDS-M elaboró la mayoría de las preguntas que evaluaban el conocimiento didáctico del contenido matemático. El resto de preguntas provenían de otros estudios como *Learning Mathematics for Teaching Projects* (Hill y Ball, 2004) y *Mathematics Teaching for the 21st Century Project* (Schmidt, Blömeke y Tatto, 2011). Sintetizamos a continuación el procedimiento que utilizamos para caracterizar el conocimiento didáctico de las matemáticas escolares manifestado por los futuros maestros españoles y su comparación con los resultados de los futuros profesores de los países de su grupo que participaron en TEDS-M. Este procedimiento consta de los siguientes pasos.

En primer lugar, seleccionamos, analizamos y clasificamos las 22 preguntas que evalúan el conocimiento didáctico de las matemáticas escolares. Para ello, establecimos el conocimiento didáctico concreto evaluado por cada una de ellas de acuerdo con los subdominios, temas y aspectos establecidos en el marco conceptual. Presentaremos más adelante un ejemplo del análisis de una pregunta y la tabla resumen con la clasificación de las preguntas. En segundo lugar, establecimos unos criterios de valoración de las respuestas de los futuros profesores. Para ello, valoramos las respuestas de los futuros profesores a cada pregunta atendiendo a los distintos tipos de respuesta. Por ejemplo, si la pregunta era de respuesta abierta, asignamos el valor 1 si el futuro profesor contestó correctamente, 0 si contestó de forma incorrecta y 0,5 si contestó de forma parcialmente; si la pregunta era de respuesta múltiple compuesta, asignamos el valor 1 si el futuro profesor contestó correctamente todas las opciones de respuesta, 0,5 si contestó correctamente todas menos una y 0 para el resto de los casos (Gutiérrez-Gutiérrez, Gómez y Rico, 2014).

Como último paso, resumimos los datos obtenidos de la valoración anterior a partir del cálculo de parámetros que nos permitieron realizar diversas comparaciones. Tuvimos en cuenta los siguientes parámetros: (a) la media y la desviación típica de cada uno de los países, (b) la media y la desviación típica del total de países participantes en TEDS-M, y (c) la media y la desviación típica del conjunto de países que forman parte del grupo 2.

Ejemplo de análisis de una pregunta de conocimiento didáctico

En la figura 2, presentamos la formulación de una pregunta que evalúa el conocimiento didáctico de los futuros profesores. Ejemplificamos, para esta pregunta, el procedimiento de análisis que describimos en el apartado anterior.

> Jeremy se da cuenta de que cuando introduce 0,2 x 6 en la calculadora el resultado es menor que 6, y que cuando introduce 6 : 0,2 tiene un resultado mayor que 6. Él está perplejo por esto, y le pide a su profesor ¡una nueva calculadora!
>
> ¿Cuál es la concepción errónea más probable de Jeremy?

Figura 2. Pregunta sobre números decimales

El análisis que realizamos a continuación de la pregunta de la figura 2 nos permitió determinar que la pregunta evalúa el conocimiento didáctico del futuro maestro acerca del subdominio cognitivo, del tema limitaciones de aprendizaje y para el apartado “describir el tipo de error en el que incurren los alumnos al realizar una actividad o sus concepciones erróneas sobre un concepto o procedimiento determinado”.

En primer lugar comprobamos que, en la pregunta de la figura 2, se estudia el conocimiento didáctico de los profesores de primaria en formación sobre el contenido matemático de la multiplicación y división con números decimales. A partir del análisis del enunciado de la pregunta y de la guía de corrección que describimos en detalle en Gutiérrez-Gutiérrez, Gómez y Rico (2014), consideramos que TEDS-M busca evaluar si los futuros maestros conocen una de las concepciones erróneas más frecuentes que tienen los alumnos de primaria sobre multiplicación y división con números decimales: muchos niños extienden su conocimiento de los naturales y lo aplican de manera equivocada a las operaciones con decimales (Castro, 2001, p. 335).

En la tabla 3, presentamos los resultados de los futuros maestros españoles con base en el análisis que hemos hecho de esta pregunta. En la primera columna de la tabla aparece el porcentaje de futuros maestros españoles que corresponde a cada tipo de respuesta —segunda columna—. En la tercera columna, describimos estos resultados en términos de los conocimientos que los futuros maestros españoles pudieron poner en juego.

Tabla 3. Conocimientos manifestados por los futuros maestros españoles en la pregunta de la figura 2

%	Respuesta	Conocimientos
22,1%	Correcta	Reconoció el error en el que incurre el alumno
7%	Parcialmente Correcta	Manifestó un conocimiento didáctico parcial: solo reconoció el tipo de error con números decimales bien en la multiplicación o bien en la división pero no en ambas
0,7%	Otras parcialmente correctas	Manifestó cierto conocimiento didáctico sobre los números decimales al expresar otro error frecuente entre los alumnos de primaria como es la falta de comprensión de la notación decimal, en este caso sería ignorar el 0 que hay antes de la coma
35,5%	Incorrectas	No reconoció el error en el que incurre el alumno

%	Respuesta	Conocimientos
34,7%	Otras incorrectas: ilegibles, tachadas y en blanco	No es posible determinar que conocimientos pusieron en juego

Destaca el bajo porcentaje (22,1%) de maestros españoles en formación que es capaz de reconocer el error en el que incurre el alumno, a pesar de estar este tipificado en los manuales de didáctica de la matemática españoles (p. ej., Castro, 2001). Un 35,5% no tiene el conocimiento didáctico necesario para contestar correctamente a esta pregunta y destaca también el 34,7% de respuestas de los futuros maestros españoles que contestaron de forma ilegible o en blanco.

Nuestro objetivo es caracterizar el conocimiento didáctico manifestado por los futuros maestros españoles para el conjunto de preguntas que evaluaban este conocimiento, al analizar todas las preguntas con base en el procedimiento que acabamos de ejemplificar. Mostramos a continuación la clasificación de las preguntas sobre conocimiento didáctico que hemos hecho a partir del análisis de los enunciados y de las guías de corrección.

Clasificación de las preguntas sobre conocimiento didáctico

En la tabla 4, presentamos la clasificación que surge del análisis de las preguntas según el conocimiento didáctico del contenido matemático que evalúa cada una de ellas. La tabla está estructurada en cuatro partes que corresponden a los subdominios del conocimiento didáctico que establecimos en el apartado de marco teórico. Para cada subdominio, indicamos los temas que lo caracterizan. Para cada tema, identificamos los apartados de este tema que son evaluados por preguntas del cuestionario e indicamos el número de preguntas que lo evalúan.

Tabla 4. Clasificación de las preguntas de conocimiento didáctico de TEDS-M

Tema	Apartado	Nº
	Conceptual	
Estructura conceptual	Reconocer/ identificar los conceptos, relación de conceptos y procedimientos matemáticos involucrados en la enseñanza-aprendizaje de un tema de las matemáticas escolares y las relaciones entre ellos	7
Sistemas de representación	Modos de representar conceptos y procedimientos matemáticos en el proceso de enseñanza	4
Fenomenología	No se evalúa en TEDS-M	
	Cognitivo	
Expectativas de aprendizaje	No se evalúa en TEDS-M	
Limitaciones de aprendizaje	Identificar y distinguir las variables que afectan a la dificultad de un problema	3
	Reconocer la dificultad y/o describir el tipo de error en el que incurren los alumnos al realizar una actividad o sus concepciones erróneas sobre un concepto o procedimiento determinado	3
Oportunidades de aprendizaje	No se evalúa en TEDS-M	

	Instrucción	
Funciones y secuencias de tareas	Diseñar tareas o estrategias de enseñanza y aprendizaje que contribuyan al desarrollo de conceptos y procedimientos o a la superación de errores conceptuales por parte de los alumnos	1
	Justificar estrategias de enseñanza que contribuyan al aprendizaje de conocimientos y procedimientos	1
Materiales y recursos	No se evalúa en TEDS-M	
Gestión del aula	No se evalúa en TEDS-M	
	Evaluación	
Criterios e instrumentos	Formular cuestiones que permitan evaluar conocimientos y destrezas determinadas	2
Rendimientos, resultados e interpretación	No se evalúa en TEDS-M	
Toma de decisiones	No se evalúa en TEDS-M	

RESULTADOS

Presentamos a continuación algunos resultados obtenidos para los dos tipos de conocimientos evaluados por TEDS-M para números y operaciones.

Conocimiento matemático

A manera de ejemplo, presentamos en la tabla 5 el conocimiento manifestado por los futuros maestros españoles en las tres preguntas cuyo contenido matemático corresponde al nivel avanzado. En el primer grupo de columnas, aparece el porcentaje de futuros maestros españoles que contestaron de forma correcta o incorrecta. En el segundo grupo de columnas, identificamos el tipo de subdominio de la dimensión cognitiva asignado por TEDS-M. Incluimos en la última columna una descripción de los conocimientos manifestados por los futuros maestros españoles a partir del análisis que hicimos de cada pregunta (Gutiérrez-Gutiérrez, Gómez y Rico, en prensa).

Tabla 5. Caracterización del conocimiento del contenido matemático manifestado en el nivel avanzado

Porcentaje		Subdominio cognitivo			
Co	I	C	A	R	Descripción
					Cantidad de números decimales entre dos números decimales
54%		✓			Sabía que entre dos números decimales hay infinitos números decimales
	46%	✓			Manifestó que entre dos números decimales hay un número finito de números decimales
					Distinción entre números racionales e irracionales
10%		✓			Distinguió, de una relación de números, los racionales de los irracionales
	90%	✓			No distinguió, de una relación de números, los números racionales de los irracionales en todas las ocasiones

Porcentaje		Subdominio cognitivo			
Co	I	C	A	R	Descripción
					Reconocer la validez de propiedades del M.C.D. y m.c.m de números naturales
16%		✓			Reconoció que el m.c.m. de dos números primos es el producto de los dos números
					Reconoció que el M.C.D. de dos números es menor que ambos números o igual a uno de ellos.
					Reconoció que no siempre si se aumenta uno de los números el m.c.m. aumenta
	84%	✓			No reconoció como ciertas alguna de las tres propiedades anteriores

Nota: Co = porcentaje de respuestas correctas; I = porcentaje de respuestas incorrectas; C = conocimiento; A = aplicación; R = razonamiento; M.C.D. = máximo común divisor; m.c.m. = mínimo común múltiplo.

Produjimos, para cada nivel curricular al que se referían las preguntas sobre conocimiento matemático —básico, intermedio y avanzado—, una tabla como la que acabamos de presentar. El análisis de esas tablas nos permitió caracterizar el conocimiento matemático manifestado por los futuros maestros españoles en el subdominio de números y concluir que ellos mostraron tener el conocimiento matemático correspondiente a los contenidos de primaria que tendrán que enseñar en un futuro, pero que manifestaron limitaciones para los contenidos escolares correspondientes al primer ciclo de secundaria, en particular para el trabajo con los conceptos razón/proporción/porcentaje y la traducción de operaciones con fracciones sencillas en problemas verbales. Con respecto a los contenidos correspondientes al nivel avanzado, los futuros maestros españoles evidenciaron carencias en su conocimiento, aunque manifestaron conocer la propiedad de la densidad en el conjunto de los números racionales (Gutiérrez-Gutiérrez, Gómez y Rico, en prensa).

Conocimiento didáctico

Presentamos, en la tabla 6, un resumen de los datos sobre el conocimiento didáctico del contenido de los futuros maestros españoles para números y operaciones, de acuerdo con los procedimientos que describimos en el apartado de método. Incluimos en la última columna de la tabla el porcentaje de futuros maestros españoles que contestaron correctamente cada una de las preguntas que evaluaban el conocimiento didáctico sobre números y operaciones. Seguimos el esquema de subdominios, temas y apartados que propusimos en la tabla 4. La penúltima columna indica el contenido matemático al que se refiere cada pregunta. Estos resultados se pueden consultar con mayor detalle en Gutiérrez-Gutiérrez, Gómez y Rico (2014).

Tabla 6. Porcentaje de respuestas correctas de conocimiento didáctico para números y operaciones

Tema	Apartado	Cont	%
	Subdominio conceptual		
Estructura conceptual			
	Reconocer/identificar los conceptos, relación de conceptos y procedimientos matemáticos involucrados en la enseñanza-aprendizaje de un tema de las matemáticas escolares y las relaciones entre ellos	OF	33,3
		AR	30,6
Sistemas de representación			
	Modos de representar conceptos y procedimientos matemáticos en el proceso de enseñanza	RND	10,9
		SGF	39

Tema	Apartado	Cont	%
	Subdominio cognitivo		
Limitaciones de aprendizaje			
	Identificar y distinguir los elementos que afectan a la dificultad de un problema	PA PD	80,4 59
	Reconocer la dificultad y/o describir el tipo de error en el que incurren los alumnos al realizar una actividad o sus concepciones erróneas sobre un concepto o procedimiento determinado	OND ONM	22,1 12,6

Nota: AR = algoritmos de la resta; Cont = contenido matemático; OF = ordenar fracciones; OND = operaciones con números decimales; ONM = operaciones con números mixtos; PA = problemas aritméticos; PD = proporcionalidad directa; RND = representación de números decimales; SGF = significado gráfico de la división de fracciones

Como se aprecia en la tabla 6, un alto porcentaje de futuros profesores españoles manifestaron capacidad para distinguir los elementos que afectan a la dificultad de los problemas escolares. Los datos ponen de manifiesto que los futuros profesores españoles tienen carencias importantes cuando deben reconocer los errores en los que incurren los alumnos al realizar tareas matemáticas, realizar representaciones gráficas en el proceso de enseñanza-aprendizaje o reflexionar sobre el contenido de las matemáticas escolares y su aplicación a la enseñanza (Gutiérrez-Gutiérrez, Gómez y Rico, 2014).

La tabla 7 ubica los datos anteriores en el contexto internacional, al comparar los resultados españoles con la media internacional y con los datos de los países que formaban parte del grupo 2. Estos datos se obtienen con base en los procedimientos que describimos en el apartado de método. La tabla está compuesta por tres sub-tablas. En la primera sub-tabla, presentamos los datos correspondientes a todas las preguntas que evalúan el conocimiento didáctico para números. En las otras dos sub-tablas, presentamos los datos correspondientes a los subdominios conceptual y cognitivo. Las primeras dos columnas de la tabla identifican el tema y el apartado evaluado para cada subdominio del conocimiento didáctico. En las siguientes seis columnas, presentamos la media y el error típico de España, del conjunto de países que participaron en el estudio y de los países pertenecientes al grupo 2. En las dos últimas columnas, identificamos los países del grupo 2 cuyas medias son estadísticamente superiores o inferiores a la media de España. Por ejemplo, la cuarta fila de la tabla se refiere al apartado que evalúa la capacidad de los futuros profesores para identificar y distinguir las variables que afectan a la dificultad de un problema. Este apartado corresponde al tema limitaciones de aprendizaje del subdominio cognitivo del conocimiento didáctico. En este apartado, España obtuvo una media de 0,7; la media internacional fue de 0,72; la media de los países del grupo 2 fue de 0,69; Singapur, Estados Unidos y Suiza tuvieron una media estadísticamente superior a la de España; y China-Taipéi y Filipinas tuvieron una media estadísticamente inferior a la de España. Estos datos y los demás datos que aparecen en este trabajo deben leerse teniendo en cuenta las limitaciones de participación de Chile, Estados Unidos, Noruega, Rusia, Polonia y Suiza (INEE, 2012, p.136).

Tabla 7. Comparación internacional de los datos sobre conocimiento didáctico en el subdominio de números

T	A	España		Internacional		Grupo 2			
		Me	E	Me	E	Me	E	Me Sup	MeInf
				Conocimiento didáctico					
		0,39	0,01	0,44	0,00	0,44	0,01	China-Taipéi Singapur Suiza	Filipinas

T	A	España Me	España E	Internacional Me	Internacional E	Grupo 2 Me	Grupo 2 E	Me Sup	MeInf
				Subdominio conceptual					
E	CPM	0,33	0,01	0,36	0,01	0,39	0,01	China-Taipéi Suiza Singapur	EE.UU. Filipinas
R	REP	0,24	0,02	0,30	0,01	0,33	0,01	China-Taipéi Singapur Suiza EE.UU.	Filipinas
				Subdominio cognitivo					
L	DI	0,70	0,02	0,72	0,01	0,69	0,01	Singapur EE.UU. Suiza	China-Taipéi Filipinas
L	RE	0,23	0,02	0,31	0,01	0,32	0,01	Singapur China-Taipéi Suiza	Filipinas

Nota: A = apartado; CPM = Reconocer/ identificar los conceptos, relación de conceptos y procedimientos matemáticos involucrados en la enseñanza-aprendizaje de un tema de las matemáticas escolares y las relaciones entre ellos; DI = Identificar y distinguir las variables que afectan a la dificultad de un problema; Me: media; E: error típico; Inf = inferior; L = limitaciones de aprendizaje; R = representaciones; RE = Reconocer la dificultad y/o describir el tipo de error en el que incurren los alumnos al realizar una actividad o sus concepciones erróneas sobre un concepto o procedimiento determinado; REP = Modos de representar conceptos y procedimientos matemáticos en el proceso de enseñanza; Sup = superior; T = tema

Como se aprecia en la tabla 7, la media española es inferior a la media de los países del grupo 2, excepto en el apartado del subdominio cognitivo, en el que se evalúa la capacidad de los futuros profesores para identificar y distinguir las variables que afectan a la dificultad de un problema, en el que no hay diferencia significativa. Este es el único apartado en el que la media de España supera ampliamente la media de China-Taipéi. Los datos españoles son inferiores, en todos los apartados considerados, a los resultados de Suiza y Singapur y superiores solo a Filipinas. La media de España no presenta diferencias significativas con la media de Estados Unidos, excepto en el apartado que evalúa la capacidad de los futuros profesores para reconocer e identificar los conceptos involucrados en la enseñanza-aprendizaje de un tema de las matemáticas escolares y las relaciones entre ellos. En este apartado, la media española supera a la estadounidense.

A nivel del conjunto de países del grupo 2, Singapur, Suiza y China-Taipéi son los países que obtienen los mejores resultados para todos los apartados, con excepción del apartado sobre identificar y distinguir las variables que afectan a la dificultad de un problema, para el caso de China-Taipéi.

DISCUSIÓN

Aunque, en el trabajo que venimos realizando, nos hemos limitado a estudiar los resultados que se obtuvieron con los instrumentos propuestos por el estudio TEDS-M, el análisis pormenorizado que realizamos de las preguntas nos ha permitido percibir carencias y limitaciones en el diseño del cuestionario y las guías de corrección. Algunas de estas limitaciones ya han sido identificadas por otros investigadores. En particular, Döhrmann, Kaiser y Blömeke (2014) reconocen, como es usual en cualquier evaluación, que el cuestionario no podía cubrir todo el espectro del conocimiento matemático y didáctico del contenido matemático. Estos investigadores destacan la falta de concreción en la definición del conocimiento matemático y didáctico por parte de TEDS-M. Como lo pondremos de manifiesto en los párrafos que siguen, este hecho no permite fundamentar apropiadamente la interpretación de los resultados. Por otro lado, ellos también resaltan que el marco teórico y el desarrollo de la prueba se basan en una concepción pragmática de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, propia de los países anglosajones. Esto implica, por ejemplo, que el cuestionario da poca importancia a temas como la argumentación y la prueba que son considerados relevantes en la didáctica europea.

Como hemos visto, la principal dificultad que encontramos a la hora de interpretar los resultados fue la de describir el conocimiento didáctico de los futuros profesores a partir del marco teórico propuesto por TEDS-M. Por esa razón, nos basamos en el modelo del análisis didáctico para conceptualizar el conocimiento didáctico del futuro profesor y establecer el conocimiento didáctico evaluado por cada pregunta. Esta aproximación nos permitió identificar los subdominios y temas del conocimiento didáctico evaluados por las preguntas, distinguir aquellos temas que no se evalúan en la prueba, y resumir y organizar los resultados en términos de esos subdominios, temas y apartados.

El análisis de las preguntas pone de manifiesto la dificultad de establecer el conocimiento didáctico de un futuro maestro independientemente de su conocimiento matemático. Si bien es posible distinguir entre contenido matemático y contenido didáctico matemático, los dos están altamente correlacionados (Krauss et al., 2008; Schilling, Blunk, y Hill, 2007). Hemos comprobado esta limitación del estudio al constatar que, para responder correctamente a la mayoría de las preguntas analizadas, se requiere tanto conocimiento matemático como conocimiento didáctico. Por esta razón, nos planteamos la duda de si algunos futuros profesores, teniendo el conocimiento didáctico requerido, no pudieron responder correctamente algunas preguntas como consecuencia de carencias en su conocimiento matemático.

La diferencia temporal que TEDS-M utiliza para distinguir si una pregunta corresponde a la planificación de la enseñanza o a su implementación implica otras dificultades a la hora de interpretar los resultados. TEDS-M juega con la redacción del enunciado para establecer esta distinción y clasifica las preguntas de manera diferente con el solo hecho de decir “di qué idea matemática está queriendo mostrar un profesor al planificar una actividad …” o bien “di cuál es la concepción matemática de los alumnos en las distintas respuestas a esta tarea”. En realidad, las dos preguntas pueden requerir el mismo conocimiento, pero TEDS-M las ubica antes y después del proceso de enseñanza y las clasifica en diferentes categorías —planificación e implementación—, atendiendo a los verbos utilizados y a los tiempos verbales que aparecen en los enunciados. Por ello, en el caso de este ejemplo, nosotros clasificamos las dos preguntas en el apartado “conocimiento del contenido de las matemáticas escolares desde la perspectiva de su enseñanza y aprendizaje”, sin distinguir si se refieren a la planificación o a la implementación.

Como es natural en los estudios que, como este, incluyen una proporción importante de preguntas con respuestas múltiples o múltiples complejas, resulta difícil contrastar las conjeturas que formulamos sobre el conocimiento manifestado por los futuros maestros españoles, dado que no disponemos de datos adicionales para analizar si sus respuestas eran realmente indicadores del conocimiento que la pregunta pretendía evaluar. Este es el caso, por ejemplo, de la pregunta representada en la figura 1 en la que un futuro profesor podría haber contestado correctamente o incorrectamente por azar sin poner en juego ningún tipo de conocimiento.

Los resultados que hemos presentado para las preguntas de respuesta abierta se basan en la codificación que surge de las guías de corrección. Estas guías establecen, a través de ejemplos, la intencionalidad de cada pregunta con respecto al conocimiento del futuro profesor. Así, en algunos casos, contestar correctamente a una pregunta según la guía de corrección supone asumir un marco determinado sobre el aprendizaje, como ocurre al ordenar por orden de dificultad los problemas verbales que se resuelven con una sola operación (Gutiérrez, Gómez y Rico, 2012). En otros casos, se exige un conocimiento en la guía de corrección que no se especifica en el enunciado de la pregunta. Esto ocurre, por ejemplo, en una de las preguntas de geometría, en la que se pide al futuro maestro que proponga una práctica de enseñanza para que el alumno supere la dificultad de no reconocer como triángulo rectángulo el que se muestra en la figura 3. La pregunta se refiere a un triángulo específico. No obstante, la guía de corrección codifica como correctas aquellas respuestas que sean generales y sirvan para el todos los triángulos o al menos para todos los triángulos rectángulos. Y codifica como parcialmente correctas aquellas respuestas que se refieren a prácticas de enseñanza que solo trabajen con el triángulo del enunciado. En este caso, la guía de corrección no profundiza en las dificultades que pueden explicar por qué los alumnos no reconocen el triángulo como rectángulo y no caracteriza las posibles respuestas del futuro profesor en términos de esa caracterización y de las estrategias de enseñanza que podrían abordarla.

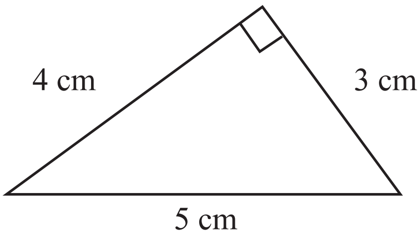


Figura 3. Ejemplo de triángulo propuesto

Las reflexiones anteriores identifican algunas de las limitaciones del cuestionario de TEDS-M que podrían abordarse en estudios futuros sobre el conocimiento del futuro profesor. En particular, la información de la tabla 4 pone de manifiesto un desequilibrio en los subdominios y temas evaluados y en el número de preguntas con las que se evalúan estos subdominios y temas. En este sentido, es posible concebir el diseño de un cuestionario que, con el mismo número de preguntas, aborde de manera más uniforme los subdominios y temas que caracterizan el conocimiento didáctico de un futuro profesor de matemáticas.

Referencias

Ball, D. L., Lubienski, S. T., y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teacher’s mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433–453). Washington, DC: American Educational Research Association.

Castro, E. (2001). Números decimales. En E. Castro (Ed.) *Didáctica de la Matemática en la educación primaria* (pp. 315-345). Madrid, España: Síntesis.

Döhrmann, M., Kaiser, G. y Blömeke, S. (2014). The conceptualisation of mathematics competencies in the international teacher education study TEDS-M. En S. Blömeke, F. J. Hsieh, G. Kaiser y W. H. Schmidt (Eds.), International Perspectives on Teacher Knowledge, Beliefs and Opportunities to Learn (pp. 431-456). Drodrecht, Países Bajos: Springer.

Gómez, P. (2006). Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 15-35). Huesca, España: Instituto de Estudios Aragoneses.

Gutiérrez, A., Gómez, P. y Rico, L. (2012). Conocimientos manifestados por los futuros maestros de magisterio sobre Didáctica de la Matemática en el estudio TEDS-M. Ejemplo del análisis de una pregunta. *Seminario de Investigación de los Grupos de Pensamiento Numérico y Algebraico (de la Universidad de Granada) e Historia de la Educación Matemática (de la Universidad de Valencia)*. Valencia, España, Marzo 2012.

Gutiérrez-Gutiérrez, A. Gómez, P., Rico, L. (2014). Conocimiento didáctico de los estudiantes españoles de magisterio sobre números: resultados en TEDS-M. *Cultura y Educación.* (Publicación prevista en julio de 2014)

Gutiérrez-Gutiérrez, A., Gómez, P. y Rico, L. (En prensa). Conocimiento matemático sobre números y operaciones de los estudiantes de magisterio. *Educación XX1*.

Gutiérrez-Gutiérrez, A., Rico, L. y Gómez P. (En prensa). *Caracterización del conocimiento didáctico sobre números y operaciones manifestado por los futuros maestros en TEDS-M. Metodología para una comparación internacional*. Seminario de Investigación de los Grupos de Pensamiento Numérico y Algebraico (de la Universidad de Granada) e Historia de la Educación Matemática (de la Universidad de Valencia). Málaga, Febrero 2014.

Hill, H., Schilling, S. y Ball, D. (2004). Developing measures of teachers' mathematical knowledge for teaching. *Elementary School Journal*, *105*(1), 11–30.

Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE) (2012). *TEDS-M. Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros. Informe español*. Madrid, España: Autor.

Krauss, S., Brunner, M., Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., y Jordan, A.(2008). Pedagogical content knowledge and content knowledge of secondary mathematics teachers. *Journal of Educational Psychology, 100*(3), 716–725.

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (1991). Real Decreto 1440/1991, de 30 de agosto, por el que se establece el título universitario oficial de Maestros en sus diversas especialidades y las directrices generales propias de los planes de estudios conducentes a su obtención. *BOE, 244*, 33004-33008.

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2007). Orden ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación primaria. *BOE, 173*, 31487-31566.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (MECD) (2004). Real Decreto 116/2004, de 23 de enero, por el que se desarrolla la ordenación y se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. *BOE, 35*, 5712-5791.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Ruddock, G. J., O'Sullivan, C. Y., Arora, A., y Erberber, E. (2007). *TIMSS 2007 assessment frameworks*. Chestnut Hill, MA: Boston College.

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona, España: ICE-Horsori.

Rico, L., Lupiáñez, J. L. y Molina, M. (Eds.). (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Innovación Curricular y Formación de Profesores*. Granada, España: Comares.

Schilling, S., Blunk, M., y Hill, H. (2007).Test validation and the MKT measures: Generalizations and conclusions. *Measurement: Interdisciplinary Research and Perspectives*, *5*(2–3), 118–127.

Schmidt, W. H., Blömeke, S., y Tatto, M. T. (Eds.). (2011). *Teacher education matters: A study of middle school mathematics teacher preparation in six countries*. New York, NY: Teachers College Press.

Schwille, J., & Dembélé, M. (2007). *Global perspectives on teacher learning: Improving policy and practice* (Fundamentals of Educational Planning, No. 84). Paris, Francia: International Institute for Educational Planning, UNESCO.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22.

Tatto, M. T. (Ed.). (2007). *Reforming teaching globally*. Oxford, Reino Unido: Symposium Books.

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Peck, R. y Rowley, G. (2008). *Teacher Education and Development Study In Mathematics (TEDS-M): policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics. Conceptual framework.* East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.

Tatto, M. T., Sharon, J. S., Senk, L., Ingvarson, L. y Rowley, G. (2012). *Policy, Practice, and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics in 17 Countries. Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M).* Amsterdam, Países Bajos: International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

[1]*Agradecimientos:* Este trabajo ha sido apoyado por el Proyecto de Excelencia de la Junta de Andalucía P07-FQM03244 "TEDS-M España" y parcialmente subvencionado por el proyecto EDU2009-10454 del Ministerio de Ciencia e Innovación. También se ha realizado en el marco del proyecto *Procesos de aprendizaje del profesor de matemáticas en formación*, EDU2012-33030 del MEC. Los resultados de este trabajo forman parte de la tesis doctoral titulada: *Evaluación de los maestros en formación en matemáticas*. *Estudio TEDS-M en España* que lleva a cabo A. Gutiérrez-Gutiérrez, bajo la dirección de los doctores L. Rico y P. Gómez.

EL CONOCIMIENTO DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO (TEDS-M ESPAÑA) DESDE LA PERSPECTIVA DE SU ESPECIALIZACIÓN[1]

Student primary teachers' knowledge (TEDS-M Spain) from the perspective of their specialization

José Carrillo

Universidad de Huelva

Resumen

Se extraen algunas ideas de Gómez y Gutiérrez-Gutiérrez (2014) para contextualizar este artículo. A continuación se presenta una perspectiva sobre lo que va a entenderse por conocimiento profesional en la que destaca su amplitud y utilidad, y el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), que permitirá interpretar el contenido del artículo de los autores mencionados. Se subrayan las limitaciones de los futuros maestros en el conocimiento del tema y de la estructura matemática en relación con números y operaciones, así como las limitaciones propias de los estudios basados en cuestionarios. Asimismo, se analiza la propuesta de temas de TEDS-M desde el modelo MTSK y se presenta una tabla que relaciona el análisis didáctico del contenido con este modelo, lo que permite mirar los resultados desde otra perspectiva, estableciendo algunas conclusiones en relación con el conocimiento didáctico del contenido.

Palabras clave: *conocimiento matemático, conocimiento didáctico del contenido, formación inicial de maestros, TEDS-M, números*

Abstract

Some ideas from Gómez y Gutiérrez-Gutiérrez (2014) are included to contextualize this paper. It follows, on the one hand, the perspective we are using to understand professional knowledge, which emphasizes wideness and usefulness, and, on the other hand, the mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK), that will allow interpret the content of the abovementioned authors' paper. One highlights limitations of pre-service primary teachers concerning knowledge of topics and of the structure of mathematics with respect to numbers and operations, as well as limitations owed to the questionnaire-based studies in general. Likewise one analyses TEDS-M proposal of themes using the MTSK model, and one presents a table with the relationship between the didactical analyses of content and this model; it allows look at the results from another perspective, and establish some conclusions about the pedagogical content knowledge domain.

Keywords: *mathematical knowledge, pedagogical content knowledge, pre-service primary teacher education, TEDS-M, numbers*

ESTUDIO TEDS-M

La participación de España en el estudio TEDS-M tuvo el propósito de establecer relaciones entre la formación inicial de nuestros maestros (entendiendo formación como conocimiento) y las características del plan de estudios correspondiente a dicha formación inicial, así como situar a esta en una perspectiva internacional (Gómez y Gutiérrez-Gutiérrez, 2014). Los resultados globales colocan el conocimiento matemático de nuestros futuros maestros en 481 puntos, y el conocimiento didáctico del contenido matemático en 492, en relación con la media internacional de 500. El

Carrillo, J. (2014). El conocimiento de los estudiantes para maestro (TEDS-M España) desde la perspectiva de su especialización. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 115-123). Salamanca: SEIEM.

análisis efectuado y los resultados obtenidos proporcionan descriptores y categorías de esa formación y del conocimiento de los futuros maestros.

El análisis presentado por Gómez y Gutiérrez-Gutiérrez (2014) supone una profundización en los resultados del estudio TEDS-M en relación con contenidos de números y operaciones. Para ello, han necesitado elegir un marco conceptual diferente del utilizado en TEDS-M respecto al análisis del conocimiento didáctico del contenido: el marco del análisis didáctico (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013).

Los autores analizan críticamente aspectos metodológicos y conceptuales de TEDS-M, como el diseño del cuestionario y las guías de corrección, y la deficitaria caracterización de los dos dominios estudiados (el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido), lo que conlleva la dificultad de justificar la interpretación de algunos resultados. Expresan asimismo la duda de si algunas respuestas incorrectas a preguntas sobre conocimiento didáctico del contenido pueden explicarse por la falta de conocimiento matemático, debido a la necesidad de ambos conocimientos para responder a dichas preguntas.

PERSPECTIVA TEÓRICA

No existe un acuerdo general sobre cuál debería ser el contenido de la formación inicial del profesor para la enseñanza de la matemática, ni sobre cómo determinar los niveles de logro en relación con el conocimiento construido en dicha formación. Sin embargo, parece que hay consenso en cuanto a la necesidad de que esos niveles de logro informen del conocimiento como producto y como proceso (incluyendo, por tanto, su construcción y sus dimensiones).

Caracterizaciones amplias de conocimiento, como la de Llinares o la de Pajares, ayudan a establecer cierto grado de acuerdo sobre aquello a lo que nos referimos cuando hablamos de conocimiento. Mientras que Pajares (1992) habla del conocimiento como una amplia red de conceptos, imágenes y habilidades, Llinares (1998) afirma que el conocimiento (profesional) "*incluye no sólo la información específica sobre datos y métodos de comprobación de resolución de problemas, sino también la información necesaria para definir y comprender los problemas con los que debe enfrentarse el profesional*" (p. 55). Obsérvese que la caracterización de Pajares incluye las habilidades, lo que es coherente con la formulación de los temas que se consideran en el estudio TEDS-M, como se verá más adelante. Por su parte, Llinares nos habla de la utilidad del conocimiento, se trata de un conocimiento con una orientación clara.

Al enfrentar la elaboración de los instrumentos de recogida de información y de análisis de datos, la diferenciación clásica de Shulman (1987) entre conocimiento matemático y conocimiento didáctico del contenido se impone. Varios modelos han emergido con base en la propuesta de Shulman; entre otros:

- *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) (Ball, Thames y Phelps, 2008), con la inclusión del subdominio del conocimiento especializado del contenido dentro del dominio del conocimiento matemático;
- *Knowledge Quartet* (KQ) (Rowland, Turner, Thwaites y Huckstep, 2009), con la consideración de una dimensión para las conexiones entre contenidos y otra para las situaciones de contingencia;
- *Conocimiento Didáctico-Matemático* (CDM) (Godino, 2009), que propone un refinamiento de los subdominios del MKT a partir de la consideración de las facetas epistemológica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica, con correspondientes niveles de análisis y consignas para su evaluación.

Con base en el MKT fundamentalmente, y en las conexiones del KQ desde el enfoque de Martínez, Giné, Fernández, Figueiras y Deulofeu (2011) (con la diferenciación entre conexiones intraconceptuales, interconceptuales y temporales), en la Universidad de Huelva hemos desarrollado el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK por sus siglas en inglés -*Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*) (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013). El MTSK (ver figura 1) intenta trascender la diferenciación entre el conocimiento común y el especializado, y superar las dificultades de delimitación entre los subdominios del conocimiento especializado, del horizonte matemático y del conocimiento del contenido y los estudiantes del modelo MKT (Carrillo, Flores y Contreras, 2013). Para ello, los subdominios del conocimiento matemático se definen desde una perspectiva interna a la matemática y en función de las necesidades del profesor, sin interesarle si ese conocimiento es compartido por otros colectivos (como ocurre en el MKT):

- Conocimiento de los Temas (KoT): incluye, entre otros, aspectos fenomenológicos, significados, definiciones, y ejemplos que caractericen aspectos del tema abordado, además de referirse al contenido disciplinar de las matemáticas que figura en manuales y textos matemáticos.
- Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM): sistema integrado de conexiones que permita al profesor comprender y desarrollar conceptos avanzados desde una perspectiva elemental y conceptos elementales mediante una visión avanzada.
- Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM): incluye el conocimiento de las formas de conocer, crear o producir en matemáticas, conocimiento de aspectos de la comunicación matemática, del razonamiento y la prueba. Saber, por ejemplo, qué es definir y cómo usar definiciones.

Por otra parte, los subdominios del conocimiento didáctico del contenido se enfocan desde la matemática, de modo que esta condiciona su caracterización, no es intersección entre matemática y enseñanza o aprendizaje.

- Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT): incluye conocer distintas estrategias que permitan al profesor fomentar un desarrollo de las capacidades matemáticas procedimentales o conceptuales. Conocer la potencialidad de recursos, ejemplos o modos de representación para hacer comprensible un contenido determinado. Conocer elementos teóricos sobre enseñanza de la matemática.
- Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM): conocimiento de las características del proceso de comprensión de los estudiantes sobre los distintos contenidos, del lenguaje asociado a cada concepto, así como de errores, dificultades u obstáculos posibles. Conocer elementos teóricos sobre aprendizaje de la matemática.
- Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS): conocimiento acerca de lo que el estudiante debe/puede alcanzar en un curso escolar determinado. Además de lo prescrito en el currículo institucional, este conocimiento puede provenir de las investigaciones y de las opiniones de profesores expertos.

Se añade en el MTSK el estudio de las creencias del profesor sobre la matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje. Todo esto significa considerar la especialización del conocimiento del profesor en el modelo en su conjunto, sin restringirla al dominio matemático. No se supone que el futuro maestro sea un especialista en el contenido matemático, sino que el conocimiento que posee en relación con la enseñanza de las matemáticas tiene un carácter especializado[2].

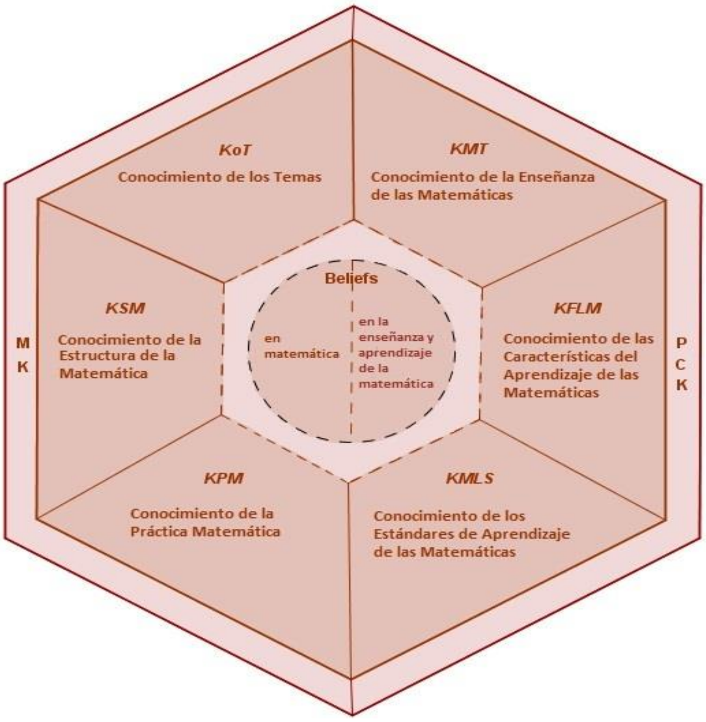


Figura 1. Dominios del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Carrillo *et al*., 2013).

La perspectiva del MTSK me ayudará a interpretar el contenido de Gómez y Gutiérrez-Gutiérrez (2014). Naturalmente, solo abordaré aquellos puntos que, a mi entender, pueden enriquecerse o complementarse al mirarlos de otro modo.

ANÁLISIS

Conocimiento matemático

Gómez y Gutiérrez-Gutiérrez (2014) analizan el conocimiento matemático teniendo en cuenta el tipo de problema numérico que plantea, los conceptos matemáticos que se trabajan y los conocimientos y capacidades matemáticos implicados en las respuestas. Asimismo, caracterizan cada pregunta según el tipo de subdominio de la dimensión cognitiva —razonamiento, aplicación y conocimiento— que evalúa y el nivel curricular del contenido matemático al que se refiere.

Como es frecuente en los estudios basados en cuestionarios, y los mismos autores señalan, hemos de ser muy cautos en la interpretación de los resultados y su (plausible) procedencia[3]. En la sección *Objetivo y método de la investigación*, presentan el análisis de la pregunta que se enuncia en la figura 2 como ejemplo de análisis del conocimiento matemático.

Una máquina consume 2,4 litros de combustible cada 30 horas de funcionamiento. ¿Cuántos litros de combustible consumirá la máquina en 100 horas si sigue consumiendo combustible al mismo ritmo? *Marque la opción que crea correcta.* *A. 7,2* *B. 8,0* *C. 8,4* *D. 9,6*

Figura 2. Pregunta sobre proporcionalidad directa

Los autores caracterizan el conocimiento matemático correspondiente a las respuestas incorrectas A y D como realización de cálculos inadecuados y utilización de solo uno de los datos del enunciado. Entiendo que pueden darse estas soluciones empleando todos los datos, pero aplicando indebidamente una aproximación, considerando 100/3=3 o bien 100/3=4. Para la opción A también puede decirse que, como en 90 horas consume 7,2 litros y con el siguiente múltiplo de 30 se pasa, la respuesta es 7,2 por corresponder al menor múltiplo posible (90). De un modo similar, puede decirse en D que la respuesta corresponde al siguiente múltiplo de 30, ya que con 90 no se llega. Análogamente, la procedencia del error en la respuesta C no tiene por qué ser que no se usen los datos, también puede deberse al hecho de considerar 100/3=3,5, media de las aproximaciones anteriores. Dicho de otra forma, como en 90 horas se consumen 7,2 litros y en 120 horas se consumen 2,4 litros más, al estar 100 entre 90 y 120, se suma a 7,2 la mitad de 2,4.

En los resultados globales (sobre números y operaciones), los autores afirman que los futuros maestros españoles mostraron tener el conocimiento matemático correspondiente a los contenidos de primaria, que manifestaron limitaciones para los contenidos del primer ciclo de secundaria, y que evidenciaron carencias con respecto a los contenidos correspondientes al nivel avanzado. Estos resultados confirman el estudio de Muñoz-Catalán y Carrillo (2007), en el que se abordaron contenidos conceptuales relativos a fracciones y decimales, divisibilidad, y uso de la calculadora para la obtención de cifras ocultas. Estas carencias y limitaciones son un indicio, no solo de la imposibilidad de poseer un conocimiento fundamentado del tema (KoT), sino de las lagunas en el conocimiento de la estructura de la matemática (KSM): establecer relaciones interconceptuales supone una sutileza en el conocimiento de los contenidos que parece difícil de desarrollarse sin un conocimiento en profundidad de los núcleos conceptuales; la estructura conceptual (foco de interés del análisis didáctico en relación con el análisis de contenido) se resiente.

Conocimiento didáctico del contenido

Tatto, Schwille, Senk, Ingvarson, Peck y Rowley (2008) (en Gómez y Gutiérrez-Gutiérrez, 2014) consideran los subdominios currículo, planificación de la enseñanza e implementación para organizar el conocimiento didáctico del contenido, e incluyen unos temas en cada subdominio. La tabla 1 de Gómez y Gutiérrez-Gutiérrez (2014) presenta la caracterización de estos subdominios a partir de un listado de temas (a modo de descriptores) que en su formulación parecen corresponderse más con el conocimiento matemático que con el conocimiento didáctico del contenido, y en su mayoría aluden a acciones, competencias o habilidades para las cuales se necesita la intervención de ambos dominios del conocimiento.

Por ejemplo, dentro del subdominio del currículo, para el tema *establecer itinerarios y conexiones dentro del currículo*, el maestro deberá poseer conocimiento de los estándares de aprendizaje matemático (KMLS) y conocimiento de la estructura de la matemática (KSM), el primero perteneciente al dominio del conocimiento didáctico del contenido, y el segundo al dominio del conocimiento matemático del modelo MTSK. Lo mismo sucede en relación con el tema *identificar ideas clave en los programas de aprendizaje*, donde, además de referir a una competencia que habrá de poseer el maestro para organizar su enseñanza, necesita del conocimiento de las *grandes* ideas (como la de igualdad/semejanza/congruencia) desde un punto de vista matemático (Kuntze, Murphy, Lerman, Kurz-Milcke, Siller y Winbourne, 2011), el cual situamos en el conocimiento de la estructura de la matemática.

El conocimiento de los temas (KoT) surge en el subdominio de la planificación al referirse a *identificar los diferentes enfoques para resolver los problemas matemáticos*. Puede considerarse la participación del conocimiento de las características del aprendizaje matemático (KFLM), pero es evidente la necesidad de disponer de un conocimiento sobre las distintas formas de abordar los problemas en cuestión.

Del mismo modo, en el subdominio de la implementación, respecto a *analizar o evaluar las soluciones o los argumentos matemáticos de los estudiantes*, es necesario que el maestro posea conocimiento del tema e incluso, si se trata de analizar la coherencia argumentativa, conocimiento de la práctica matemática (KPM). O si consideramos el tema *responder a inesperados problemas matemáticos*, que alude a la capacidad del maestro para enfrentarse a situaciones de contingencia, una de las dimensiones del Knowledge Quartet (*Contingency*), en la cual confluyen conocimientos pertenecientes a todos los subdominios del MTSK, al menos conocimiento de los temas y los tres subdominios del conocimiento didáctico del contenido (conocimiento de la enseñanza de las matemáticas –KMT-, conocimiento de las características del aprendizaje matemático y conocimiento de los estándares de aprendizaje matemático).

Encontramos otros temas para los que, a pesar de venir formulados como acciones o competencias, como antes se ha indicado, y a pesar de que, por lo general, se pueden asociar descriptores de varios subdominios del MTSK, existe un subdominio del conocimiento didáctico del contenido que podríamos considerar como su vinculación natural. Tal es el caso de *planificar la enseñanza matemática*, vinculado al subdominio del conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, o el de *predecir respuestas típicas de los estudiantes, incluidas las concepciones erróneas*, que puede asociarse al conocimiento de las características del aprendizaje matemático.

Más tarde, Tatto, Sharon, Senk, Ingvarson y Rowley (2012) (en Gómez y Gutiérrez-Gutiérrez, 2014) afirman que la caracterización del conocimiento didáctico del contenido es parcial, lo que, unido a la dificultad de diferenciar planificación e implementación en el análisis del TEDS-M, lleva a Gómez y Gutiérrez-Gutiérrez a caracterizar el conocimiento didáctico del contenido usando el modelo del análisis didáctico (Gómez, 2006; Rico *et al*, 2013), lo que supone la consideración de los subdominios de análisis de contenido, cognitivo, de instrucción y de evaluación.

En la tesis de Nielka Rojas (Rojas, Flores y Carrillo, en prensa) se relacionan los temas del análisis didáctico (en lo relativo al análisis de contenido, cognitivo y de instrucción) con los subdominios del MTSK (tabla 1).

Tabla 1. Relación entre los componentes del análisis didáctico y los dominios de conocimiento especializado del profesor de matemática

	Dominios de conocimiento					
	Conocimiento del contenido			Conocimiento didáctico del contenido		
Análisis Didáctico	**KoT**	**KSM**	**KPM**	**KMT**	**KFLM**	**KMLS**
Análisis de contenido						
Análisis conceptual	X	X	X	X	X	X
Análisis fenomenológico	X	X		X		
Sistemas de representación	X	X		X		
Análisis cognitivo						
Expectativas de aprendizaje					X	X
Limitaciones de aprendizaje				X	X	
Oportunidades de aprendizaje				X	X	
Análisis de instrucción						
Tareas y secuencias de tareas	X			X	X	X
Materiales y recursos				X	X	X

La tabla 1 permite reinterpretar la tabla 6 de Gómez y Gutiérrez-Gutiérrez (2014) en los términos que aparecen en la figura 2. Se han calculado medias aproximadas con los datos de la tabla 6 mencionada.

No consta información sobre los subdominios del conocimiento de la práctica matemática y del conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas. Salvo en el subdominio del conocimiento de la estructura de la matemática (KSM), del que se tiene la información asociada a la estructura conceptual, las medias deben entenderse al lado de desviaciones típicas altas, sobre todo en el subdominio del conocimiento de las características del aprendizaje matemático (KFLM), con porcentajes extremos de 12,6 y 80,4. El conocimiento de los temas de números y operaciones, particularmente sobre ordenación de fracciones, algoritmo de la resta, representación de números decimales y significado gráfico de la división de fracciones, queda reflejado en un porcentaje del 28,4, que asciende al 32% cuando nos referimos al establecimiento de relaciones entre conceptos y procedimientos (conocimiento de la estructura de la matemática). Su posible plasmación en el proceso de enseñanza desciende al 25% (conocimiento de la enseñanza de la matemática). Finalmente, la identificación de elementos de dificultad en problemas aritméticos y problemas de proporcionalidad directa (80,4% y 59%, respectivamente) contrasta con el reconocimiento de errores en el trabajo con números mixtos y en las operaciones con números decimales (12,6% y 22,1%, respectivamente), descriptores del subdominio del conocimiento de las características del aprendizaje matemático.

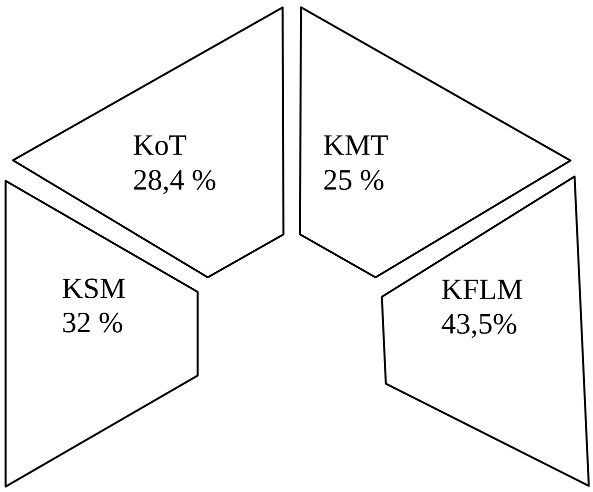


Figura 2. Porcentaje de respuestas correctas de números y operaciones según subdominios del MTSK

REFLEXIÓN FINAL

Las relaciones de la tabla 1 dan sentido a la interpretación del análisis y de los resultados de TEDS-M desde la perspectiva del modelo MTSK, particularmente de los resultados reportados en Gómez y Gutiérrez-Gutiérrez (2014) sobre TEDS-M España, en concreto respecto al bloque de números y operaciones.

Cuando estos autores asocian, en una de las preguntas del cuestionario, la falta de reconocimiento de errores de los alumnos a una carencia en el conocimiento didáctico del contenido, podríamos preguntarnos si cabría la posibilidad de deberse a una carencia en el conocimiento del tema (KoT), como ellos mismos afirman de manera general en la sección Discusión, reconociendo una limitación del estudio TEDS-M. Poseer un buen nivel en el dominio del conocimiento matemático no garantiza un buen desempeño docente, en particular no garantiza un buen nivel en el dominio del conocimiento didáctico del contenido, pero parece evidente que la carencia de conocimiento matemático supone carencia de conocimiento didáctico del contenido.

Coincido con Gómez y Gutiérrez-Gutiérrez (2014) al subrayar la escasa relevancia en el cuestionario de la argumentación y la prueba. Realmente, se da poca importancia globalmente al conocimiento de la práctica matemática (KPM), como refleja la figura 2.

La comparación internacional con el grupo de países que comparten sistema formativo de maestros sitúa a España por debajo de la media, en general. Más allá de esta comparación, los resultados españoles ponen de relieve un conocimiento de los futuros maestros que dista mucho de ser aquella información disponible para alcanzar las metas y resolver los problemas profesionales (Llinares, 1998).

En el año 2005, Nuria Climent y yo presentamos en el congreso de la EARLI algunos resultados del proyecto europeo METE[4]. Una de las conclusiones fue que los profesores españoles eran los que menos actividades proponían basadas en situaciones de la vida real o con datos genuinos. ¿Guardará alguna relación el hecho de no trabajarse problemas con situaciones de la vida real en la Educación Primaria y la Educación Secundaria con el conocimiento matemático de nuestros futuros maestros?

Finalmente, los resultados que se ofrecen muestran el porcentaje de futuros maestros que respondieron correcta o incorrectamente a las preguntas, no indican la relación entre respuestas correctas e incorrectas por individuo. Para saber cuál es el conocimiento de los que son maestros actualmente, entre los sujetos participantes, necesitaríamos ese dato. Los resultados, por tanto, informan, como se señala al comienzo, de la formación inicial de los maestros. Ampliar el estudio en la línea que aquí se comenta podría arrojar luz a la relación entre la formación inicial, el conocimiento de los maestros y las expectativas tanto de los (posibles) futuros maestros, como de sus formadores.

Referencias

Ball, D., Thames, M.H., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What makes it Special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: Middle East Technical University, Ankara.

Carrillo, J., Flores, P., y Contreras, L.C. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 193-200). Granada: Editorial Comares.

Flores, E., Escudero, D. I., y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Bilbao: SEIEM.

Godino, J.D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, 13-31.

Gómez, P. (2006). Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 15-35). Huesca: Instituto de Estudios Aragoneses.

Gómez, P., y Gutiérrez-Gutiérrez, A. (2014). Conocimiento matemático y conocimiento didáctico del futuro profesor español de Primaria. Resultados del estudio TEDS-M. En Editor1, Editor2 y Editor3 (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. inicial-final). Salamanca: SEIEM.

Kuntze, S., Murphy, B., Lerman, S., Kurz-Milcke, E., Siller, S-H., y Winbourne, P. (2011). Development of pre-service teachers' knowledge related to big ideas in mathematics. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th PME* (Vol. 3, pp. 105-112). Ankara, Turkey: Middle East Technical University.

Llinares, S. (1998). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación. *Revista UNO*, *17*, 51-63.

Martínez, M., Giné, C., Fernández, S., Figueiras, L., y Deulofeu. J. (2011). El conocimiento del horizonte matemático: más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro. En M. Marín, G. Fernández, L.J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 429-437). Cuidad Real: SEIEM.

Moriel Junior, J. G., y Carrillo, J. (2014). Explorando indícios de conhecimento especializado para ensinar Matemática com o modelo MTSK. En Editor1, Editor2 y Editor3 (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. inicial-final). Salamanca: SEIEM.

Muñoz-Catalán, M.C., y Carrillo, J. (2007). Conocimiento numérico de futuros maestros. *Educación Matemática*, *19*(1), 5-26.

Pajares, F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*. *62*(39), 307-332.

Rico, L., Lupiáñez, J.L., y Molina, M. (Eds.). (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Innovación Curricular y Formación de Profesores*. Granada, España: Comares.

Rojas, N.; Flores, P., y Carrillo, J. (en prensa). Conocimiento Especializado de un Profesor de Matemáticas de Educación Primaria al Enseñar los Números Racionales. *Bolema*.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A., y Huckstep, P. (2009). *Developing Primary Mathematics Teaching: reflecting on practice with the Knowledge Quartet*. London: Sage.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22.

---

[1] Este trabajo se ha realizado al amparo del proyecto de investigación "Caracterización del conocimiento especializado del profesorado de matemáticas", EDU2013-44047-P.

[2] El MTSK se ocupa de aquello para lo que la matemática es determinante, no enfoca el conocimiento psicopedagógico general, ni otras componentes de conocimiento en los que la matemática solo desempeña un papel contextual (como la componente sociológica).

[3] En los estudios del MTSK consideramos la idea de oportunidades que brindan distintos escenarios para seguir indagando en el conocimiento del profesor, de modo que se identifican diversos acercamientos metodológicos con la intención de obtener evidencias del conocimiento del profesor (Flores, Escudero y Aguilar, 2013). Asimismo, contemplamos la idea de indicios de conocimiento como paso previo a la posterior indagación en profundidad (Moriel-Junior y Carrillo, 2014).

[4] Mathematics Education Traditions in Europe: a five way comparative study. Universidades participantes: Cambridge, Lovaina, Budapest, Joensuu y Huelva.

COMUNICACIONES

RESPUESTAS DE ESTUDIANTES DE SECUNDARIA A TAREAS DE SENTIDO NUMÉRICO

RESPONSES FROM SECONDARY STUDENTS TO NUMBER SENSE TASKS

Rut Almeida, Alicia Bruno

Universidad de La Laguna

Resumen

En ese trabajo se analizan las respuestas de estudiantes de secundaria a tareas numéricas susceptibles de resolverse haciendo uso de sentido numérico. Se analizan las estrategias y los razonamientos de sentido numérico frente a los procedimientos algorítmicos y de aplicación de reglas. Se observa cómo el uso del sentido numérico queda condicionado por dificultades y errores en conceptos numéricos propios de niveles básicos y por el tipo de actividad. Las tareas con enunciados semejantes a los tradicionales presentan mayor aparición de reglas y algoritmos.

Palabras clave: *sentido numérico, estrategias, educación secundaria, estudiantes.*

Abstract

It is presented a study in which it was analyzed the answers from secondary students when working numerical tasks prone to be solved using number sense. The strategies and their tendency choosing number sense reasoning versus standard algorithms or rule is analyzed. It is observed how the use of number sense is conditioned by the difficulties and errors in numerical concepts from basic levels and by the type of activity. Those tasks with a formulation similar to traditional classroom activities presented a greater appearance of rules and algorithms.

Keywords: *number sense, strategies, secondary education, students.*

INTRODUCCIÓN

Este trabajo está dedicado a analizar respuestas de estudiantes españoles de secundaria a tareas numéricas que se pueden resolver haciendo uso de estrategias propias de *sentido numérico*. Aunque la expresión *sentido numérico* se utiliza en ocasiones de un modo amplio, sustituyendo a la de *conocimiento numérico*, en este estudio lo entendemos como "una red conceptual bien organizada que permite relacionar los números y las operaciones, sus propiedades y resolver los problemas numéricos de una forma creativa y flexible" (Sowder, 1992).

Para hacer un uso del término *sentido numérico* de un modo operativo, los currículos de distintos países, y también la investigación en didáctica de las matemáticas, lo han caracterizado a través de distintas componentes (McIntosh, Reys, y Reys, 1992; Reys y Yang, 1998; Yang, 2005; Yang, Li, y Lin, 2008). Las componentes que se describen en los trabajos citados son las siguientes: SN1. Comprender el significado de los números. SN2. Reconocer el tamaño relativo y absoluto de los números. SN3. Usar puntos de referencias. SN4. Usar representaciones de los números y las operaciones. SN5. Identificar el efecto relativo de las operaciones. SN6. Establecer las relaciones entre las operaciones. SN7. Hacer uso de las propiedades de las operaciones para facilitar un cálculo numérico. SN8. Estimar el resultado de operaciones. SN9. Comprender la relación entre el contexto del problema y la operación necesaria. SN10 Ser consciente de que existen múltiples estrategias. SN11. Reconocer cuándo el resultado obtenido es razonable.

Almeida, R., Bruno, A. (2014). Respuestas de estudiantes de secundaria a tareas de sentido numérico. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 127-136). Salamanca: SEIEM.

Las componentes del sentido numérico no son independientes, están relacionadas y pueden utilizarse varias de ellas en la resolución de una misma tarea. Siguiendo la clasificación de McIntosh, Reys, y Reys, (1992) las componentes de la 1 a la 8 anteriormente enumeradas implican conocer y tener habilidades numéricas, mientras que las tres últimas se refieren a la aplicación dicho conocimiento y habilidades. Este trabajo se centra especialmente en la observación de las componentes SN3, SN4 y SN11 que describimos a continuación.

SN3. Usar puntos de referencia

Se refiere a la habilidad para usar apropiadamente puntos de referencia numéricos para resolver problemas sobre mediciones de objetos comunes, para comparar números y realizar cálculos. Los puntos de referencia son generalmente valores con los que una persona se siente cómoda haciendo comparaciones o cálculos. Por ejemplo, múltiplos de potencias de 10, números como ½, 50% o cualquier referente numérico personal. McIntosh et al. (1992) sugiere que "así como un compás es una herramienta básica para la navegación, los puntos de referencia son referentes mentales esenciales para pensar sobre los números".

SN4. Usar representaciones de los números y las operaciones

Significa ser capaz de utilizar de manera flexible representaciones (manipulativas, pictóricas o simbólicas) para resolver problemas numéricos. Por ejemplo, representar números en la recta numérica para comparar o para estimar el resultado de una operación, expresar una multiplicación de dos números como el cálculo de un área para estimar el resultado, comparar dos fracciones con una representación parte todo, etc.

SN11. Reconocer cuándo el resultado obtenido es razonable

Implica determinar si el resultado de una tarea numérica está en el rango de posibilidades esperable o si la respuesta tiene sentido en función del contexto y los números implicados. Por ejemplo, la operación 600×0.245 es aproximadamente $600 \times 0.25 = 600 \times 1/4$, por lo que el resultado final, no debe alejarse de 150. Un estudiante que evalúa si un resultado es razonable, no debe dar por válida una respuesta que sea muy lejana a este valor. Indica McIntosh et al. (1992) que la reacción de muchos estudiantes cuando se les pide valorar si un resultado es razonable es volver a calcular lo que se ha hecho, antes que reflexionar sobre el resultado.

Los investigadores que han evaluado el sentido numérico de estudiantes de educación primaria y secundaria han concluido que la mayoría de los estudiantes tienen un apego a las reglas y los algoritmos, y estos últimos predominan sobre las estrategias propias del sentido numérico (Sengul y Gulbagci, 2012; Yang, 2005; Yang, Li, y Lin, 2008; Veloo, 2010). Hay estudiantes que tienen altos niveles de competencia al realizar algoritmos, pero muestran una pobre comprensión en las tareas de sentido numérico (Mohamed y Johnny, 2010). Es decir, que las altas habilidades en cálculo escrito, sin comprensión, son poco útiles en contextos en los que se necesita algo más que los algoritmos. Diferentes trabajos han comparado la dificultad entre determinadas componentes del sentido numérico, concluyendo que entender *el efecto relativo de las operaciones* y *reconocer si un resultado es razonable* son las componentes más compleja para los estudiantes entre las analizadas (Mohamed y Johnny, 2010; Yang, Li, y Lin, 2008).

En España se han realizado investigaciones que se sitúan en el sentido numérico, las principales relacionadas con la estimación de cantidades, de medidas y de operaciones, así como de cálculo mental (Albarracín y Gorgorío, 2013; Castillo-Mateo, Segovia, Castro y Molina, 2012; De Castro, Castro, y Segovia, 2004, Goméz, 1995).

La adquisición del sentido numérico es gradual y empieza desde los primeros años de la escolaridad. Indica McIntosh et al. (1992) que al comienzo del aprendizaje numérico hay niños que demuestran estrategias creativas y eficientes para operar con los números, pero la atención que se pone en los algoritmos formales, muchas veces hace detener el uso de métodos informales. Los métodos numéricos tradicionales se convierten en estrategias más apreciadas a medida que los estudiantes avanzan en su aprendizaje numérico. Los estudiantes van creando la idea de que estos métodos son los válidos para la resolución de problemas en un contexto académico. Por esa razón los investigadores proponen cambios en la metodología de enseñanza de los números, ya que una instrucción adecuada que fomente sentido numérico produce aprendizajes más significativos que las metodologías tradicionales (Veloo, 2010).

El trabajo que presentamos se sitúa en esta última línea y forma parte de un estudio más amplio cuyo objetivo es analizar el sentido numérico de estudiantes de secundaria en un contexto de aula, en España. En concreto se estudia la evolución del conocimiento numérico de los estudiantes cuando se desarrollan tareas en el aula que fomentan el sentido numérico. Lo que presentamos en este trabajo corresponde a cuatro tareas de la prueba inicial de dicho estudio, en las que se pide a los estudiantes buscar métodos alternativos a los tradicionales en tareas numéricas.

OBJETIVO Y METODOLOGÍA

El objetivo del trabajo que se presenta es el análisis de las estrategias que utilizan estudiantes de 2º de E.S.O en la resolución de tareas que admiten ser resueltas con componentes del sentido numérico. Dado que el sentido numérico es muy amplio, focalizamos nuestro análisis en las tres componentes antes descritas: SN3. *Usar puntos de referencia;* SN4. *Usar representaciones de los números* y *las operaciones*; y SN11. *Reconocer cuándo el resultado obtenido es razonable*.

Se realizó una prueba escrita en dos grupos de estudiantes de 2º de E.S.O. de un centro público de Tenerife (España), con 22 y 25 estudiantes cada uno. Dicha prueba consta de 12 ítems o tareas, diseñados por las investigadoras o modificadas de Reys (1991). Las tareas abarcaron la estimación de magnitudes, orden de fracciones, representación gráfica estimada de la suma y producto de fracciones, estimación y representación gráfica de porcentajes, fracciones, decimales y naturales, estimación de un producto de decimales y la valoración de la validez de una colección de datos numéricos a situaciones contextualizadas.

Cada tarea se presentó en hojas separadas; tuvieron 3 minutos para resolver cada uno; se les indicó que no realizaran cálculos o algoritmos para llegar al resultado exacto, sino que utilizaran estimaciones o sus ideas sobre los números o las operaciones; se les pidió que escribiesen cómo habían llegado al resultado o el razonamiento utilizado. Estas instrucciones estaban escritas en la primera página de la prueba y el investigador las leyó en alto antes de que comenzaran a responder.

Para la presentación de este trabajo se han escogido 4 tareas de la prueba, para mostrar el análisis que hemos realizado. Se han seleccionado ejemplos de las estrategias de los estudiantes para su resolución. La elección de las 4 tareas se ha hecho teniendo en cuenta que presentaran características diferentes en cuanto: a los tipos de números (naturales, fracciones y decimales); al concepto matemático (ordenar, sumar fracciones, estimar magnitudes de cantidades y de medida); al tipo de enunciado (con gráfico y sin gráfico).

En la corrección de la prueba se tuvo en cuenta si las respuestas eran correctas y el tipo de razonamiento utilizado. Los razonamientos se clasificaron en las siguientes categorías: Sentido numérico, SN (distinguiendo las componentes descritas en la introducción de SN1 a SN11); Parcialmente sentido numérico, PSN, la justificación combina el uso de componentes del sentido numérico con el uso de reglas memorizadas y/o algoritmos (distinguiendo las componentes descritas en la introducción de SN1 a SN11); No sentido numérico (NSN), utilizan estrategias que no incluyen el uso de componentes de sentido numérico como el uso exclusivo de reglas o algoritmos; Otros (Otros), no proporcionan suficientes argumentos para identificar qué razones les llevan a su respuesta o no presentan justificación; Blanco (B), no responden a la pregunta. Por otra parte, las respuestas en las que se hizo uso de Sentido Numérico, fueron codificadas con la componente a la que se estaba usando.

RESULTADOS

A continuación, se muestra el uso que hacen los estudiantes de las componentes de sentido numérico, en las 4 tareas seleccionadas, así como otros tipos de estrategias.

Tarea 1

Ordenar los siguientes números de menor a mayor:

$\frac{9}{20}, \frac{8}{5}, \frac{3}{10}$ Explica tu respuesta.

La tarea 1 se plantea con el objetivo de observar si los estudiantes hacen uso del concepto de fracción, a través de los puntos de referencia o representaciones gráficas. Ambas estrategias de *SN* surgen en un 31,91%, aunque no son tan frecuentes como las pertenecientes a la categoría de *NSN* que fue de un 46,81% (ver Tabla 1). Solo un 14,89% de los estudiantes siguen un SN correcto.

Tabla 1. Resultados de la tarea 1 (%)

		Correcto	Incorrecto	Total
Tipo de razonamiento	SN	14,89	17,02	31,91
	NSN	31,92	14,89	46,81
	Otros	2,13	19,15	21,28
	Total	48,94	51,06	

Tabla 2. Componentes de sentido numérico utilizadas en la tarea 1 (%)

	Correcto	Incorrecto
SN2	4,25	12,76
SN3	4,25	-
SN2 y SN3	-	2,13
SN4	6,39	2,13

En la tabla 2 se muestran las diferentes componentes de *SN* objeto de estudio y de las que se muestran ejemplos a continuación.

SN3. Usar puntos de referencia.

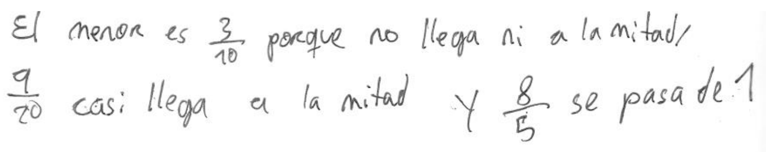


Figura 1. Uso de componente SN3 en la tarea 1

SN4. Usar representaciones gráficas de los números.

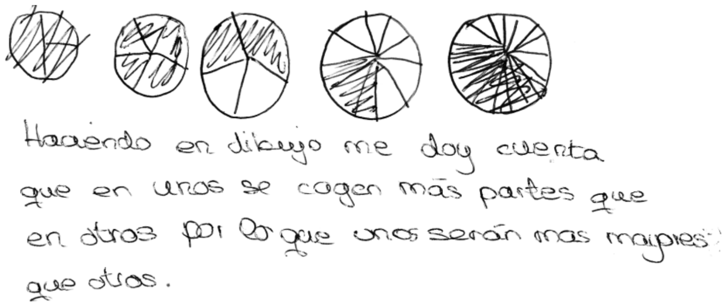


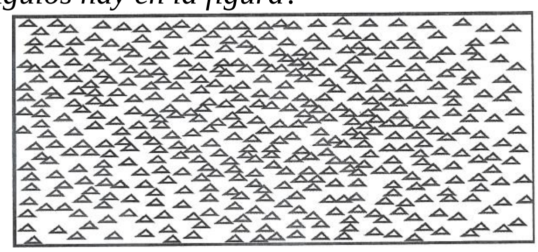
Figura 2. Uso de componente SN4 en la tarea 1

En la Figura 1 aparece la estrategia para ordenar fracciones haciendo uso de puntos de referencia, 1 y ½, sin realizar cálculos (SN3), mientras que en la Figura 2 se ejemplifica el uso de la representación gráfica de fracciones como parte todo (SN4). En ambos casos los estudiantes muestran un dominio del concepto de fracción que les lleva a no usar de reglas memorizadas o algoritmos.

También se encontraron estrategias en las que no hicieron uso del sentido numérico (NSN), por ejemplo, calcular el mínimo común múltiplo para expresar las fracciones con un denominador común, o expresar la fracción en forma decimal, mediante el algoritmo de la división. Este tipo de estrategias en las que se aplica una regla o algoritmo, en muchas ocasiones, dio lugar a respuestas incorrectas debidas a errores de cálculo. En la explicación no se observa que evaluaran si el resultado obtenido era razonable, y normalmente la aplicación de reglas no va acompañada justificaciones del proceso o de la comprensión del concepto de fracción.

Tarea 2

Aproximadamente, ¿cuántos triángulos hay en la figura?



a) 50 b) 100 c) 200 d) 300 e) 400

Explica tu respuesta.

En la tarea 2 se les presentó una situación gráfica en la que debían decidir, aproximadamente, el número de triángulos contenidos en la imagen. Para ello los estudiantes escogían una de las opciones que se les facilitaba reconociendo qué resultado era más razonable (componente SN11). Encontramos en esta tarea un alto porcentaje de estrategias de *SN*, aunque no siempre de forma correcta (ver Tabla 3 y 4).

Más de la mitad de los estudiantes hicieron uso de estrategias correctas de sentido numérico tanto de las componentes SN3 (ver Figura 3), como SN4. En la respuesta de la Figura 4 se relaciona una representación gráfica con un área y con el producto de dos números (SN4).

Tabla 3. Resultados de la tarea 2

		Correcto	Incorrecto	Total
Tipo de razonamiento	SN	63,83	17,02	80,85
	PSN	4,25	0	4,25
	NSN	10,64	0	10,64
	Otro	2,13	0	2,13
	B	0	2,13	2,13
	Total	80,85	19,15	

Tabla 4. Componentes de sentido numérico utilizadas en la tarea 2 (%)

	Correcto	Incorrecto
SN3	55,32	17,02
SN4	8,51	-
PSN4	4,25	-

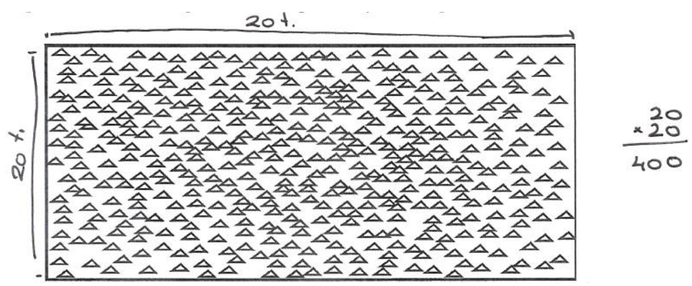
Las respuestas incorrectas de SN (17,02%) se deben a que cometen algún error de estimación de cálculo o de elección del punto de referencia. Además, encontramos estudiantes que hicieron uso de estrategias similares a SN2, pero que no estimaron el producto, sino que realizaron un cálculo exacto mediante el algoritmo de la multiplicación. En estos casos se clasificó como *parcialmente sentido numérico.*

SN3. Usar puntos de referencia.

Conté la mitad y habían aproximadamente 200 entonces en la otra mitad habrán otros 200 más, por lo cual 200+200=400.

Figura 3. Uso de componente SN3 en la tarea 2

SN4. Usar representaciones gráficas de las operaciones.



a) 50 b) 100 c) 200 d) 300 e) 400

Explica tu respuesta.

Hay aproximademente 400 triángueos porque al multiplicar ~~tantos~~ los triangulos de un lado por los del otro lado da 400 triángulos.

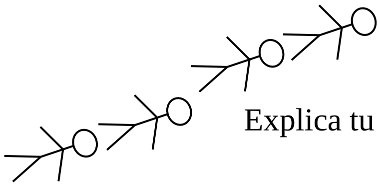
Figura 4. Uso de componente SN4 en la tarea 2

En esta tarea encontramos también estrategias en la categoría de NSN, aunque menos numerosas que en la tarea 1. En esta ocasión todas respondieron de la misma manera, llegaron el número exacto de triángulos, contándolos todos.

Tarea 3

Si hacemos una fila acostados en el suelo con todos los estudiantes de tu clase, ¿qué longitud conseguiríamos ***aproximadamente****?*

a) 500 cm *b) 5.000 cm*
c) 50.000 cm d) 500.000c



Explica tu respuesta

En esta tarea los estudiantes debían estimar una magnitud, en concreto una longitud, escogiendo entre una serie de opciones que se les proporcionaba. Si analizamos las opciones del enunciado observamos que distan entre sí lo suficiente como para decidir qué sólo 5000 cm es la respuesta razonable. En este caso entra en juego el uso de la componente SN3, *reconocer cuándo el resultado obtenido es razonable*.

Dada la naturaleza de la tarea, la necesidad de realizar la estimación de una magnitud lleva al uso del sentido numérico, al menos parcialmente, es decir, todas aquellas estrategias que surgieron se engloban en las categorías que hacen uso del mismo (*sentido numérico* o *parcialmente sentido numérico*) (ver Tabla 5 y 6).

Tabla 5. Resultados de la tarea 3 (%)

		Respuesta tarea 3		
		Correcto	Incorrecto	Total
Tipo de razonamiento	SN	27,66	6,38	34,04
	PSN	21,28	8,51	29,79
	Otro	21,28	12,76	34,04
	B	0	2,13	2,13
	Total	70,22	29,78	

Tabla 6. Componentes de sentido numérico utilizadas en la tarea 3 (%)

	Correcto	Incorrecto
SN3	25,53	6,38
SN11	2,13	-
PSN3	21,28	8,51

Las estrategias que encontramos fueron análogas a las de la Figura 5, en la que se usan puntos de referencia, SN3, aunque difieren en los puntos tomados. Aquellas que tomaron magnitudes razonables y realizaron una buena estimación escogieron una respuesta correcta. En cambio las respuestas incorrectas se debieron a malas estimaciones, por tomar puntos de referencia incorrectos, o bien a errores en el cambio de unidad. Este tipo de dificultades se recogen extensamente en De Castro, Castro y Segovia (2004). También se encontraron ejemplos de respuesta en las que se evalúa lo razonable de la elección, SN11 (Figura 6). En los casos en los que los estudiantes utilizaron el algoritmo de la multiplicación para calcular la longitud exacta a partir de los dos referentes tomados (estatura y número de estudiantes) se clasificó como *parcialmente sentido numérico* (PSN3).

SN3. Usar puntos de referencia.

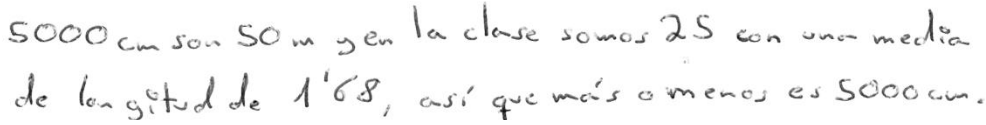

5000 cm son 50 m y en la clase somos 25 con una media de longitud de 1'68, así que más o menos es 5000 cm.

Figura 5. Uso de la componente SN3 en la tarea 3

SN11. Reconocer cuándo el resultado obtenido es razonable.

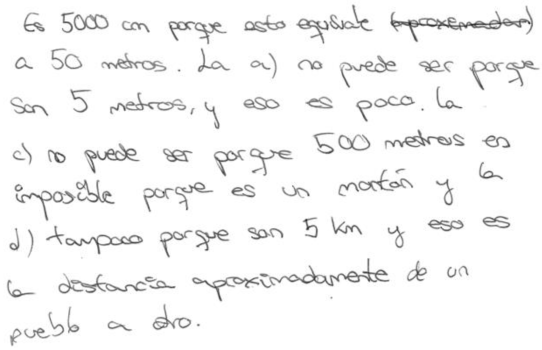
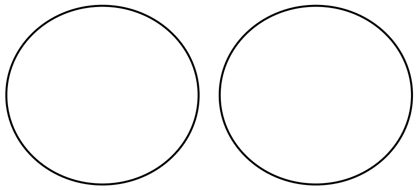

Es 5000 cm porque esto equivale ~~(aproximadamente)~~ a 50 metros. La a) no puede ser porque son 5 metros, y eso es poco. La c) no puede ser porque 500 metros es imposible porque es un montón y la d) tampoco porque son 5 km y eso es la distancia aproximadamente de un pueblo a otro.

Figura 6. Uso de la componente SN11 en la tarea 3

Tarea 4

Carlos tiene dos pizzas. Su padre se come un tercio de una pizza, su hermana se come media pizza y su madre un cuarto de una pizza. ¿Cuánta pizza le queda a Carlos?



A. *Más de una pizza.*
B. *Menos de una pizza.*
C. *Exactamente una pizza.*
D. *No le queda pizza.*
E. *No sé decidir sin realizar el cálculo exacto.*

En la tarea 4 se presentó una situación contextualizada en la que el estudiante debía utilizar una estrategia apropiada para aproximar la suma de fracciones, para ello se le proporciona la representación gráfica de las pizzas, con el objetivo de promover repuestas basadas en SN2.

En la Tabla 7 se observa que el mayor porcentaje de respuestas de esta tarea se encuentra en la categoría de sentido numérico, aunque en su mayoría incorrecta.

Tabla 7. Resultados de la tarea 4 (%)

		Correcto	Incorrecto	Total
Tipo de razonamiento	SN	27,67	53,19	80,86
	NSN	2,13	2,13	4,26
	Otro	4,25	6,38	10,63
	B	0	4,25	4,25
	Total	34,05	65,95	

Tabla 8. Componentes de sentido numérico utilizadas en la tarea 4 (%)

	Correcto	Incorrecto
SN4	27,67	53,19

Como se muestra en la tabla 8, la única estrategia de sentido numérico que surgió fue estimar el resultado usando la representación gráfica del enunciado (SN4), como se ejemplifica en la Figura 7, aunque no siempre fue correcta. Entre los errores (53,19%) encontramos dos tipos: los estudiantes que no representaron correctamente las fracciones (en su mayoría por dificultades para representar 1/3) y los que, a pesar de realizar una representación correcta de la situación, no fueron capaces de interpretar el resultado obtenido. Las respuestas en la categoría *no sentido numérico,* aunque poco frecuentes (4,26%) presentaba el algoritmo de la suma de fracciones, calculando el mínimo común múltiplo para expresarlas con denominador común.

SN4. Usar representaciones gráficas de las operaciones.

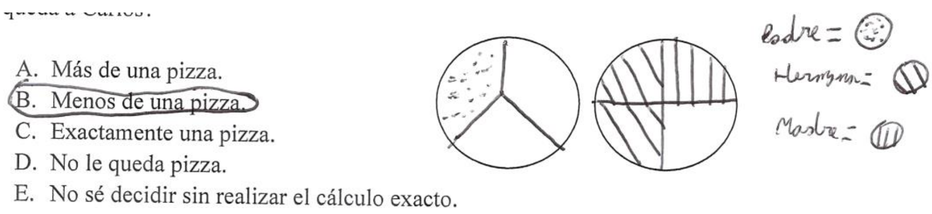


Figura 7. Uso de la com*p*onente SN4 en la tarea 4

DISCUSIÓN FINAL

En las respuestas de los estudiantes a las 4 tareas expuestas encontramos diferencias en el éxito y en las estrategias utilizadas para responder cada una de ellas. Se observa que surgen las componentes de sentido numérico esperadas *a priori*, SN3 y SN4, sin embargo, en algunas las tareas encontramos baja frecuencia en el uso de las mismas, estando el rango del SN entre un 31,91% - 80,85%. También observamos un escaso uso de la componente SN11, ya que en las justificaciones de los estudiantes hay escasas alusiones a si es un resultado razonable o no.

En el caso de la tarea 1 se da un alto uso de estrategias clasificadas como de *no sentido numérico,* con un 46,81%, en oposición a los otros tareas en los que sí predomina el uso del sentido numérico. Aunque esto se muestra en las 4 tareas seleccionadas, ocurre lo mismo con el resto de las tareas de la prueba. Es decir, existe una influencia del tipo de concepto matemático y de enunciado para elegir la estrategia correcta de sentido numérico. Por ejemplo, la tarea 1 pide ordenar fracciones, pero utilizando estrategias que no implique hacer cálculos escritos o algoritmos de la división. El bajo sentido numérico observado puede deberse a que es un enunciado estándar que los alumnos asocian con seguir un procedimiento mecanizado, que les da seguridad, o bien, que la enseñanza no les ha llevado a usar métodos alternativos para ordenar fracciones.

Destacan los estudiantes que escogen un procedimiento propio del sentido numérico, pero la falta de dominio de conceptos les lleva a una respuesta incorrecta. Esta situación es predominante en la tarea 4, en el que un 53,19% de los estudiantes realizaron una representación gráfica de la situación para estimar una suma de fracciones, pero cometen errores en la propia representación o interpretación de la misma; o en la tarea 3, en la que muchos estudiantes tienen dificultades con las unidades de medida.

En conclusión, aunque encontramos que un porcentaje de estudiantes de este estudio hizo uso correcto de las componentes del sentido numérico analizadas, es en la mayoría de las tareas insuficiente para el nivel académico que cursaban. Esto refleja la necesidad de trabajar en el aula de manera explícita este tipo de estrategias. Por otra parte, sería de interés analizar si el desarrollo de estrategias de sentido numérico en secundaria llevaría a retomar y mejorar aspectos conceptuales no superados de la educación primaria.

Agradecimientos

Este trabajo forma parte del proyecto EDU2011-29324: Modelos de competencia formal y cognitiva en pensamiento numérico y algebraico de estudiantes de primaria, de secundaria y de profesorado de primaria en formación. Ministerio de Ciencias e Innovación, Madrid.

Referencias

Albarracín, LL & Gorgorió, N. (2013). Problemas de estimación de grandes cantidades: Modelización e influencia del contexto. Relime, 16(3), 289-315.

Castillo-Mateo, J. J., Segovia, I., Castro, E. & Molina, M. (2012). Categorización de errores en la estimación de cantidades de longitud y superficie. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática (pp. 63-74). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.

De Castro, C., Castro, E. & Segovia, I. (2004). Errores en el ajuste del valor posicional en tareas de estimación: Estudio con maestros en formación. En E. Castro y E. de la Torre (eds.) Actas del VIII Simposio de la SEIEM, pp.183-194. A Coruña: Universidad da Coruña.

Gómez, B. (1995). Tipología de errores en el cálculo mental. Un estudio en el contexto educativo. Enseñanza de las Ciencias, 13(3), 313-325.

McIntosh, A., Reys, B. J. & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. For the learning of mathematics, *12*(3), 2-8.

Mohamed, M. & Johnny, J. (2010). Investigating Number Sense Among Students. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, *8*, 317-324.

Reys, B. J. (1991). *Developing number sense: Addenda series, grades 5-8*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Reys, B.J. & Yang, D.C. (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth and eighth grade students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(2), 225-237.

Sengul, S. & Gulbagci, H. (2012). An investigation of 5th grade Turkish students' performance in number sense on the topic of decimal numbers. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, *46*, 2289-2293.

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. En Grouws, D. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 245-275. MacMillan Publishing Company. New York.

Veloo, P.K. (2010). *The development of number sense and mental computation proficiencies: An intervention study with secondary one students in Brunei Darussalam*. Doctor Ph. University of Otago, Dunedin. New Zealand.

Yang, D.C., Li, M.N. & Lin, C.I. (2008). A study of the performance of 5th graders in number sense and its relationship to achievement in mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *6*, 789-807.

Yang, D. C. (2005). Number sense strategies used by 6th grade students in Taiwan. *Educational Studies*, *31*(3), 317-333.

¿CÓMO TRANSCRIBEN LOS ALUMNOS EN SUS CUADERNOS LAS REGLAS Y TÉCNICAS DE DERIVACIÓN? UN ESTUDIO EN TRES AULAS DE BACHILLERATO

How do the students write out derivative rules and techniques in your student notebooks? A study in three classrooms of high school students

Matías Arce, Laura Conejo, Tomás Ortega

Universidad de Valladolid

Resumen

En este trabajo presentamos un estudio exploratorio de tipo descriptivo-interpretativo, llevado a cabo en tres aulas de 1º de Bachillerato. En él se hace un análisis de las transcripciones realizadas por los alumnos en sus cuadernos en la presentación del tópico de reglas y técnicas de derivación por parte de los docentes. El marco utilizado es el análisis de contenido (Bardin, 1996; Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008). Hemos detectado diferentes comportamientos en el alumnado, destacando varios perfiles de alumnos selectivos al tomar las reglas de derivación y sus ejemplos ilustrativos. Además, los porcentajes de transcripción de estos elementos han sido mucho mayores cuando el enfoque del profesor se ha centrado, exclusivamente, en la aplicación práctica de reglas; siendo más variables cuando este enfoque se comparte con la fundamentación de las mismas.

Palabras clave: *Reglas de derivación, cuadernos de los alumnos, análisis de contenido, Bachillerato.*

Abstract

In this paper we present an exploratory and interpretative descriptive study that was carried out in three classrooms of high school students (16-17 years). We analyzed the transcriptions that the students have registered in their student notebooks from the theoretical content presented by teachers in the topic of derivative rules and techniques. The framework was the content analysis (Bardin, 1996; Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008). We detected different behaviors in the students: there were some profiles of selective students in the transcription of derivative rules and their illustrative examples. Besides, the percentage of transcription of these elements has been much greater when the focus of the teacher was, exclusively, the practical application of rules. This percentage has been more variable when this focus is shared with the proof of the rules.

Keywords: *Derivative rules, student notebooks, content analysis, high school students.*

INTRODUCCIÓN. ANTECEDENTES

Este estudio se enmarca en un proyecto de investigación que se está desarrollando en la Universidad de Valladolid sobre los cuadernos de matemáticas (de ahora en adelante, CM) de los alumnos en 1º de Bachillerato, entendidos como el medio en el cual el alumno toma notas o apuntes durante el desarrollo de las clases, recopila material y recoge actividades, bien sean intentadas por él o transcritas de su corrección en el aula. Partiendo de un trabajo inicial, que puede leerse en Arce (2013, 2014), la investigación está centrada en varios de los tópicos de Análisis Matemático de Bachillerato (funciones, límites y derivadas) y sus objetivos principales son la detección de perfiles de elaboración y utilización del CM en el alumnado participante y sus posibles relaciones con el rendimiento académico en la asignatura. En el trabajo que aquí presentamos nos centramos específicamente en la detección de perfiles de elaboración del CM en uno de los tópicos en concreto, la derivada, y, en particular, en las reglas y técnicas de derivación.

Arce, M., Conejo, L., Ortega, T. (2014). ¿Cómo transcriben los alumnos en sus cuadernos las reglas y técnicas de derivación? Un estudio en tres aulas de bachillerato. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 137-146). Salamanca: SEIEM.

Múltiples investigaciones atestiguan la dificultad relacionada con la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial e integral y, en particular, de la derivada. Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008) realizan una exhaustiva revisión de las investigaciones realizadas en Educación Matemática sobre la comprensión de la noción de derivada, desde diferentes perspectivas teóricas. Estos autores indican la necesidad de la integración, en la presentación de esta noción, de una perspectiva tanto analítica (límite del cociente incremental) como gráfica (pendiente de la recta tangente a una curva), su carácter puntual (derivada en un punto) o global (función derivada), el operador derivada y la regla de la cadena. Algunos aspectos, como la relación entre la derivada en un punto y la función derivada, suelen pasar desapercibidos en la docencia, y son objetos cuya diferenciación es confusa o no perceptible, incluso entre profesores de matemáticas (Badillo, Azcárate y Font, 2011).

En relación a las reglas y técnicas de derivación, Godino, Contreras y Font (2006) realizan un análisis de una sesión de clase centrada en este tópico utilizando diferentes nociones teóricas dentro del marco del Enfoque Ontosemiótico (EOS). Fonseca y Gascón (2002) indican que, generalmente, su desarrollo en las aulas de Secundaria adolece de un carácter integrador. Estos autores construyen una *organización matemática local* (en términos de Chevallard, 1999, citado en Fonseca y Gascón) que busca integrar estas reglas y técnicas y dar respuesta a cuestiones problemáticas que no pueden responderse por separado. No obstante, el papel esencial que tiene en su enfoque la aplicación de logaritmos neperianos y la técnica de derivación logarítmica, hace que aparezca un problema añadido a tratar en la derivación cuando la función es negativa o en los cambios de signo.

La regla de la cadena ha sido la regla estudiada con mayor profundidad. Destacamos el trabajo de Clark et al. (1997), que pone de manifiesto la existencia de varios niveles en la comprensión de la regla: desde la existencia de una "colección de casos especiales" (incluso de la propia regla) sin establecer relaciones ni conexiones entre ellas, hasta la construcción de la estructura subyacente a todas ellas, pasando de una "lista" de reglas a una única, válida para cualquier composición.

Font (2000, 2005) interpreta el cálculo de la derivada de una función como una práctica en la que intervienen tres subprocesos: las traducciones y conversiones entre diferentes representaciones, tanto de f(x) como de f'(x), y el paso de una representación de f a una de f'. Debido a la complicación que supone en muchas funciones el cálculo de la derivada a partir del límite de la tasa de variación media, este autor propone, aunque se pierda rigor en el cálculo, la utilización de una mayor variedad de representaciones (simbólica, gráfica, tablas de valores, incluso verbal) para f y f' en la realización de estos cálculos con los alumnos, con ayuda de la tecnología.

No obstante, a pesar de tantos trabajos de investigación, no hemos encontrado estudios relacionados con la forma en que estos elementos son transcritos por parte de los estudiantes.

PLANTEAMIENTO DEL TRABAJO: PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

El tema de derivadas fue desarrollado en tres de las aulas de 1º de Bachillerato que participan en nuestra investigación global sobre los CM. Nos hemos centrado para este trabajo en una parte de ese tema, las reglas y técnicas de derivación; en particular, en su desarrollo teórico en las aulas. En las tres aulas, la metodología de los docentes fue similar (más información en el apartado sobre el contexto del estudio) con una presentación de los contenidos por parte del profesor. Sin embargo, se observaron diferencias importantes entre los contenidos desarrollados, que nos llevaron a plantearnos las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Qué semejanzas y diferencias pueden detectarse en el contenido de reglas y técnicas de derivación impartido por los docentes de estas tres aulas?
- ¿Qué comportamientos se detectan en el alumnado al transcribir este contenido en sus CM?
- ¿Qué relaciones pueden existir entre los comportamientos detectados en el alumnado y los contenidos desarrollados por sus profesores sobre reglas y técnicas de derivación?

MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO DE ANÁLISIS

Inspirándonos en Courant y Robbins (1964), que hablan de la *técnica de derivación* indicando que "se puede derivar casi automáticamente cualquier función de las que normalmente aparecen en matemáticas, una vez dominadas unas pocas reglas muy sencillas y aprendido a reconocer su aplicabilidad" (p. 437), llamaremos *reglas de derivación* a las que pueden obtenerse aplicando la definición de derivada directamente (reglas para las funciones elementales, operaciones con funciones). Llamaremos *técnica de derivación* a la aplicación de un algoritmo, compuesto por una serie de reglas y transformaciones, que nos permite obtener la derivada de funciones con una estructura o propiedad determinada. Ejemplos son la técnica de derivación logarítmica (para derivar funciones de la forma $f(x)^{g(x)}$), o la técnica de derivación de la función recíproca[1]. No obstante, estos conceptos están relacionados, ya que las funciones pueden ser derivadas de diferentes maneras y obtenerse reglas de derivación a partir de diferentes reglas y técnicas.

Rico y colaboradores (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008; Picado y Rico, 2011; Rico, 2012; Rico, Lupiáñez y Molina, 2013) adaptan la terna establecida por Frege (1998, citado en Rico, 2012) de signo, sentido y referencia de un término, y establecen tres dimensiones o componentes de análisis para poder analizar los significados de los contenidos de las matemáticas escolares:

- La *estructura conceptual*, sistema organizado de conceptos y de procedimientos, junto con sus relaciones, que dan lugar a la estructura matemática que los organiza y justifica. Hay tres tipos de conocimiento conceptual de complejidad creciente (hechos, conceptos, estructuras), así como de conocimiento procedimental (destrezas, razonamientos, estrategias).
- La *fenomenología*, compuesta por los fenómenos (situaciones, contextos o problemas) que dan origen (y sentido) a la estructura conceptual. Dicha estructura nos permite modelizar y estudiar estos fenómenos, ayudando a su organización y comprensión.
- Los *sistemas de representación*, en el que están incluidos los diferentes tipos de símbolos, de signos o de gráficos a través de los cuales se hace presente un contenido matemático; en ellos se manifiestan las facetas de un mismo concepto u objeto de la estructura conceptual.

En nuestro estudio, la estructura conceptual es la asociada a la derivada. Dentro de ella, consideramos que las reglas y técnicas de derivación conforman lo que Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008) denominan un *foco conceptual*, es decir, una "agrupación específica de conceptos, estrategias y estructuras, que adquiere importancia especial ya que expresa, organiza y resume agrupamientos coherentes de los contenidos" (p. 11). Tomando como referencia el marco anterior y de acuerdo con la naturaleza de este foco conceptual, para poder analizar tanto el contenido teórico expuesto por los docentes como el transcrito por los alumnos, hemos planteado una división en elementos de su contenido, que presentamos a continuación.

Dentro de la estructura conceptual, hemos distinguido tres tipos de elementos:

- Los *enunciados* de las reglas y técnicas de derivación, que forman parte de los hechos (primer nivel de complejidad en la estructura conceptual).
- Las *justificaciones* de dichas reglas, que nos permiten construir la estructura matemática que sistematiza y fundamenta la estructura conceptual, es decir, la organización lógica de los resultados en un sistema coherente y unificado (de Villiers, 1993).
- Otros *comentarios*: observaciones destinadas a relacionar diferentes enunciados, a aclarar su aplicabilidad o a destacar elementos importantes dentro de este foco conceptual.

La fenomenología en la exposición teórica de este foco conceptual se ha reducido a los *ejemplos* de aplicación de las reglas y técnicas de derivación, que muestran funciones cuyo cálculo de la derivada dota de sentido a los enunciados desarrollados. Además, indirectamente, el desarrollo de justificaciones también dota de sentido a otros enunciados o elementos de la estructura conceptual de la derivada o con otros temas, a través de las cuales se conecta.

En relación a los sistemas de representación, su estudio será considerado de forma transversal a los diferentes elementos en que hemos dividido el contenido.

El paradigma general en el que se enmarca este estudio exploratorio es el descriptivo-interpretativo. A partir de la división del contenido considerada (enunciados, justificaciones, comentarios y ejemplos), analizaremos el contenido presentado por los tres docentes en la teoría asociada a este foco conceptual, haciendo énfasis no sólo en la presencia de los elementos, sino en las relaciones y conexiones que establecen entre ellos o con otros elementos, y en los sistemas de representación utilizados. Contamos para hacer este análisis con los diarios de clase desarrollados (a petición nuestra) por los profesores, así como las notas que tomamos como observadores en las aulas.

Para analizar las transcripciones de los alumnos también hemos realizado un análisis de contenido, entendido en el sentido de Cohen, Manion y Morrison (2011): "un conjunto de procedimientos estricto y sistemático para el análisis riguroso, el examen y verificación de los contenidos de datos escritos." (p. 563). Los datos analizados serán las fotocopias de esta parte de los CM de los alumnos. La metodología funciona mediante procedimientos sistemáticos y objetivos de descripción analítica de mensajes (Bardin, 1996) y su principal objetivo es pasar de la descripción de un texto a su interpretación y a la formulación de inferencias, teniendo en cuenta para estas el contexto del análisis. El análisis realizado será de tipo mixto, con componentes cuantitativas y cualitativas, que nos permitan detectar diferentes comportamientos y características de transcripción en el alumnado.

CONTEXTO EN QUE SE DESARROLLA EL ESTUDIO

En este estudio participan tres aulas de 1º de Bachillerato, elegidas por disponibilidad y con profesores de matemáticas distintos, de dos centros de Valladolid: un instituto público de barrio (donde participan dos aulas: de la modalidad Científico-Técnica [con un profesor al que nos referiremos como Profesor[2] 1] y de Sociales [con el Profesor 2]) y un colegio privado-concertado en las afueras de la ciudad (donde participa la clase de la modalidad de Sociales, con el Profesor 3). Las tres aulas tienen un número reducido de estudiantes, participando todos ellos en este estudio salvo una minoría que manifiesta no seguir la asignatura. Los 26 estudiantes participantes serán identificados en el estudio con una "A" seguida de un número: del A1 al A9 los alumnos del aula del Profesor 1, del A10 al A16 los del Profesor 2 y del A17 al A26 los del Profesor 3.

La docencia desarrollada en esta parte fue la natural de los profesores, sin directrices ni intervenciones del equipo investigador, y puede considerarse como *tradicional* o *magistral* en el desarrollo de la teoría, con una presentación y exposición de contenidos por parte del docente, sin intervenciones previstas para el alumnado. Esa presentación combinó, en los tres casos, la exposición oral del profesor con el uso de la pizarra (de tiza) para reflejar elementos como enunciados, ejemplos o justificaciones; y podemos considerar que es relativamente personal, sin referencias explícitas al libro de texto utilizado, que en las tres aulas fue de la misma editorial (Colera y García, 2008a, 2008b), y cuya labor principal fue la de ser repositorio de tareas. La única diferencia metodológica entre profesores fue que el Profesor 2 utilizó explícitamente el dictado verbal (personal, no leído) para presentar algunas reglas y varios comentarios.

ANÁLISIS DEL CONTENIDO DESARROLLADO POR LOS DOCENTES

El desarrollo de un contenido en el aula está en un nivel avanzado de concreción curricular, pero su planificación debe basarse en niveles anteriores menos concretos, como los decretos curriculares y, posiblemente, los libros de texto, que analizamos sucintamente. En el decreto 42/2008, por el que se establece el currículo de bachillerato en Castilla y León, encontramos las "reglas de derivación" entre los contenidos de 1º de Bachillerato en las matemáticas de ambas modalidades, sin mayor concreción, manteniéndose este comportamiento en segundo curso. Los criterios de evaluación sí destacan el cálculo en funciones polinómicas o racionales sencillas, para su representación gráfica.

El libro de texto utilizado en las tres aulas (Colera y García, 2008a, 2008b), tiene el mismo contenido sobre reglas y técnicas de derivación en ambas modalidades. El texto tiene 19 enunciados, que abarcan las reglas para derivar funciones usuales (incluyendo trigonométricas y sus recíprocas, exponenciales y logarítmicas) y las operaciones con funciones. El libro contiene tan sólo dos justificaciones de tipo gráfico (derivada de función constante e identidad), ambas incompletas (no se justifica por qué la recta tangente es la propia gráfica de la función). Además, existen en él dos comentarios (prototípicos: utilidad de la regla para derivar funciones potenciales y posibilidad de derivar funciones polinómicas aplicando varias reglas) y 14 ejemplos, ilustrando diferentes reglas, generalmente uno por regla, salvo para las funciones potenciales (cuatro, con exponentes de distinto tipo) y para las funciones exponenciales y logarítmicas (ejemplos con bases 2 y 10).

Del desarrollo teórico en el aula de los tres profesores, observamos que ninguno de ellos siguió el libro de texto como una guía de actuación, ni tampoco de planificación del mismo, al no haber coincidencias (salvo alguna puntual) en los ejemplos o en el orden de los enunciados. En la tabla 1 indicamos el número de elementos de cada tipo desarrollados por los docentes. La comparación entre el número y la naturaleza de los diferentes elementos desarrollados, así como las relaciones establecidas entre ellos y los sistemas de representación utilizados nos permiten establecer algunas semejanzas y diferencias en el contenido teórico desarrollado, que se resumen a continuación.

Tabla 1. Número de elementos desarrollados por los docentes en cada una de las aulas

Profesor	*Nº enunciados*	*Nº justificaciones*	*Nº comentarios*	*Nº ejemplos*
Profesor 1	23	11	6	17
Profesor 2	14	3	3	34
Profesor 3	21	0	1	14

Entre las semejanzas, encontramos varios enunciados comunes a las tres clases (derivada de funciones constantes, potenciales, exponenciales y logarítmicas, reglas para derivar operaciones con funciones). Se realizan ejemplos abundantes y con diferente tipología numérica del exponente para ilustrar la derivada de una función potencial. También se ejemplifican las reglas para derivar operaciones con funciones. Entre las características que diferencian a cada profesor:

El Profesor 1 hace el desarrollo de mayor completitud y profundidad. Realiza muchas de las justificaciones para las derivadas de las funciones usuales, institucionalizando la regla una vez justificada. Con ellas pretende recordar contenidos anteriores, estando fuera de sus *expectativas de aprendizaje* (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008) para los alumnos. Es el único profesor que presenta y utiliza (en justificaciones) la construcción de la función derivada, que presenta dos técnicas de derivación (logarítmica, función recíproca) y que utiliza el sistema de representación gráfico (para justificar la derivada de la función constante y afín). En resumen, este profesor mezcla en su desarrollo la aplicación práctica de las reglas de derivación con su sistematización y fundamentación matemática, sobre todo en las reglas para derivar funciones elementales.

El Profesor 2 hace el desarrollo más limitado en número de enunciados (por ejemplo, no trata las funciones trigonométricas), combinando en la presentación de algunos de ellos el dictado oral con su escritura simbólica en la pizarra. También dicta los comentarios. Presenta varios ejemplos para ilustrar las reglas que ejemplifica, poniendo el énfasis únicamente en la aplicación de la regla correspondiente. Realiza solo tres justificaciones (derivada de una constante, de una suma de funciones y del producto de constante por una función) utilizando la definición analítica de derivada, sin llegar a construir la función derivada. En resumen, su enfoque está centrado, principalmente, en la aplicación práctica de las reglas enunciadas.

El Profesor 3 centra su desarrollo en los enunciados y los ejemplos ilustrativos de éstos, sin realizar justificaciones y con sólo un comentario. Suele realizar un ejemplo por regla. Destacamos cómo este profesor siempre busca proporcionar a sus alumnos reglas de aplicación directa para cualquier tipo de función, frente a poder relacionarlo o aplicar las ya existentes. Por ejemplo, da una regla específica para derivar la raíz enésima de una función, después de haber presentado la regla de la cadena. Mezcla dos representaciones simbólicas para la derivada: f'(x) y Df(x). Este profesor tiene un enfoque muy centrado en la aplicación práctica, y además directa, de las reglas.

El tratamiento diferente que se ha dado en las tres aulas a la regla de la cadena muestra, implícitamente, los niveles de comprensión indicados por Clark et al. (1997). Mientras el Profesor 2, que no había trabajado previamente la composición de funciones, se limita a escribir y ejemplificar la regla en cuatro casos particulares ($e^{f(x)}$, ln(f(x)), $2^{f(x)}$ y $f(x)^3$); el Profesor 1 presenta la regla y realiza dos ejemplos, uno de ellos con tres funciones, buscando generalizar la estructura subyacente a la regla. Entre medias, el profesor P3 primero enuncia y ejemplifica la regla, pero después lo complementa con el tratamiento explícito de varios "casos particulares" (sen(f(x)), $e^{f(x)}$, $f(x)^n$ y ln(f(x)), evidenciándose de nuevo su enfoque hacia la aplicación directa de reglas.

ANÁLISIS DE LAS TRANSCRIPCIONES DE LOS ESTUDIANTES Y POSIBLES RELACIONES CON EL DESARROLLO DE LOS DOCENTES

Por motivos de espacio, la comunicación se centra en el análisis cuantitativo del registro en los CM de los alumnos de los diferentes elementos (enunciados, justificaciones, comentarios y ejemplos) presentados por cada docente. Hemos considerado para ello tres niveles de transcripción, según su completitud: transcripción completa (TC), transcripción parcial (TP) o no transcripción (NT). En la tabla 2 se presentan los porcentajes de transcripción considerando globalmente cada aula, mientras que la tabla 3 refleja los porcentajes de cada uno de los alumnos participantes.

Tabla 2. Frecuencias (f) y porcentajes (%) de transcripción (respecto al total) de los diferentes tipos de elementos desarrollados en las aulas por cada profesor

Elemento	Profesor	Nº elem.	Nº alum.	Total	Niveles de transcripción y porcentajes					
					TC (f)	TC (%)	TP (f)	TP (%)	NT (f)	NT (%)
ENUNCIADOS	Prof. 1	23	9	207	96	46,4	7	3,4	104	50,2
	Prof. 2	14	7	98	83	84,7	0	0	15	15,3
	Prof. 3	21	10	210	193	91,9	1	0,5	16	7,6
JUSTIFICA-CIONES	Prof. 1	11	9	99	31	31,3	12	12,1	56	56,6
	Prof. 2	3	7	21	6	28,6	4	19,0	11	52,4
	Prof. 3	0	10	0	0		0		0	
COMENTA-RIOS	Prof. 1	6	9	54	1	1,9	2	3,7	51	94,4
	Prof. 2	3	7	21	21	100	0	0	0	0
	Prof. 3	1	10	10	1	10	0	0	9	90
EJEMPLOS	Prof. 1	17	9	153	44	28,8	7	4,6	102	66,7
	Prof. 2	34	7	238	184	77,3	0	0	54	22,7
	Prof. 3	14	10	140	120	85,7	3	2,1	17	12,1

El número tanto de justificaciones como de comentarios fue muy desigual en las aulas. Además, el dictado verbal de comentarios por el Profesor 2 provoca una diferencia muy evidente en los porcentajes de transcripción de éstos. Así, para detectar comportamientos del alumnado comunes a las tres aulas centraremos nuestro análisis en el número y porcentajes de transcripción de enunciados y ejemplos. En la tabla 3 observamos cuatro alumnos (A16, A17, A18 y A19) que toman todos estos elementos; un alumno, A5, toma todos los enunciados y casi todos los ejemplos; así como cuatro alumnos (A12, A20, A22 y A24) toman todos los ejemplos, pero no todos los enunciados. Otros alumnos también tienen porcentajes altos, aunque similares, de transcripción de estos elementos. Sin embargo, sorprende la presencia de bastantes casos en que el porcentaje en la transcripción de ejemplos es sensiblemente inferior al porcentaje de enunciados transcritos.

Tabla 3. Porcentajes por niveles de transcripción de los diferentes tipos de elementos en los alumnos

Alumno	**Enunciados**			**Justificaciones**			**Comentarios**			**Ejemplos**		
	TC	TP	NT	TC	TP	NT	TC	TP	NT	TC	TP	NT
A1	34,8	4,4	60,9	36,4	18,2	45,5	0	0	100	17,7	0	82,4
A2	13,0	0	87,0	9,1	0	90,9	0	0	100	11,8	0	88,2
A3	56,5	0	43,5	27,3	0	72,7	0	0	100	29,4	11,8	58,8
A4	52,2	4,4	43,5	63,6	9,1	27,3	0	0	100	29,4	5,9	64,7
A5	100	0	0	81,8	18,2	0	0	16,7	83,3	94,1	0	5,9
A6	0	0	100	0	0	100	16,7	0	83,3	11,8	5,9	82,4
A7	13,0	4,4	82,6	9,1	9,1	81,8	0	0	100	0	5,9	94,1
A8	78,3	4,4	17,4	9,1	9,1	81,8	0	0	100	23,5	11,8	64,7
A9	69,6	13,0	17,4	45,5	45,5	9,1	0	16,7	83,3	41,2	0	58,8
A10	85,7	0	14,3	0	33,3	66,7	100	0	0	58,8	0	41,2
A11	71,4	0	28,6	33,3	0	66,7	100	0	0	61,8	0	38,2
A12	85,7	0	14,3	33,3	33,3	33,3	100	0	0	100	0	0
A13	92,9	0	7,1	33,3	33,3	33,3	100	0	0	94,1	0	5,9
A14	71,4	0	28,6	33,3	0	66,7	100	0	0	47,1	0	52,9
A15	85,7	0	14,3	33,3	0	66,7	100	0	0	79,4	0	20,6
A16	100	0	0	33,3	33,3	33,3	100	0	0	100	0	0
A17	100	0	0				0	0	100	100	0	0
A18	100	0	0				0	0	100	92,9	7,1	0
A19	100	0	0				0	0	100	100	0	0
A20	90,5	0	9,5				0	0	100	100	0	0
A21	81,0	0	19,0				0	0	100	28,6	0	71,4
A22	95,2	0	4,8				0	0	100	100	0	0
A23	85,7	4,8	9,5				0	0	100	71,4	14,3	14,3
A24	95,2	0	4,8				100	0	0	100	0	0
A25	81,0	0	19,0				0	0	100	92,9	0	7,1
A26	90,5	0	9,5				0	0	100	71,4	0	28,6

Para conocer mejor los comportamientos del alumnado en este sentido, decidimos hacer un estudio conjunto sobre la transcripción en aquellas reglas que se ilustran con ejemplos y sus ejemplos de aplicación correspondientes. Tras estudiar cómo es su transcripción en estos casos y atendiendo a cuál ha sido su comportamiento mayoritario, hemos establecido una clasificación del comportamiento del alumnado en siete perfiles, apareciendo tres comportamientos que podríamos considerar como selectivos en la toma de reglas y ejemplos ilustrativos de aplicación:

- Alumnos *exhaustivos*, que han tomado siempre tanto las reglas como todos sus ejemplos ilustrativos: A5, A16, A17, A18, A19, A20, A22 y A24 (8 alumnos).
- Alumnos *mayoritariamente exhaustivos*, que casi siempre toman tanto las reglas como todos sus ejemplos ilustrativos, salvo casos contados: A12, A13, A15 y A25 (4 alumnos).
- Alumnos *entre exhaustivos y selectivos*, cuyo comportamiento difiere según las situaciones, sin que ninguno sea mayoritario: A3 (1 alumno).

- Alumnos *selectivos al ejemplificar*, que toman uno o algunos de los ejemplos asociados a las reglas, pero no todos: A10, A11, A14, A23 y A26 (5 alumnos).
- Alumnos que *transcriben la regla sin ejemplos*, que de forma mayoritaria no toman ninguno de los ejemplos asociados a las reglas que se han ilustrado: A8, A9 y A21 (3 alumnos).
- Alumnos que *transcriben los ejemplos sin la regla*, que en varios casos transcriben al menos uno de los ejemplos ilustrativos de una regla sin tomar ésta: A1, A2 y A4 (3 alumnos).
- Alumnos que *no transcriben ni reglas ni ejemplos ilustrativos*: A6 y A7 (2 alumnos).

Como vemos en la tabla 2, en las dos aulas (Profesores 2 y 3) en las que el desarrollo de los profesores se centró más en la aplicación práctica de reglas (y no en su fundamentación) los porcentajes de transcripción de enunciados y ejemplos son mucho más altos y homogéneos, frente a una transcripción más variable en los alumnos del Profesor 1. La mayoría de alumnos que hemos considerado como *exhaustivos* (total o mayoritariamente) pertenecen a las dos últimas aulas, encontrando tan sólo un alumno de este tipo en el aula del Profesor 1 (A5), aula en que se concentran los tres últimos perfiles que hemos reseñado, asociados a mayor incompletitud.

El porcentaje más alto se da en los alumnos del Profesor 3, el que más claramente había centrado el desarrollo de este foco conceptual en la aplicación práctica de las reglas. Este hecho, junto con la realización mayoritaria de tan sólo un ejemplo ilustrativo por regla, pueden haber provocado la transcripción casi total de estos elementos, existiendo además en varios alumnos algunas aclaraciones o ayudas que indican explícitamente la regla aplicada en el ejemplo o las derivadas de las funciones por separado al ejemplificar las reglas para derivar operaciones con funciones. El mayor número de ejemplos por regla desarrollados por el Profesor 2 y la presencia detectada en este aula de varios alumnos *selectivos al ejemplificar* (A10, A11 y A14) hace que el porcentaje aquí sea algo menor (aunque todos estos alumnos toman siempre, al menos, un ejemplo por regla). Las reglas dictadas por el Profesor 2 son transcritas en su totalidad por los alumnos. De hecho, los alumnos transcriben todas las reglas, salvo, quizá, los “casos particulares” de la composición, cuya transcripción es variable en el alumnado (A11 y A14 no los transcriben, A16 las transcribe todas).

Ante las justificaciones, los alumnos del Profesor 2 han tenido un comportamiento más o menos homogéneo, frente a la mayor variabilidad de los alumnos del Profesor 1 (A5 y A9 toman casi todas las justificaciones, total o parcialmente; otros tienen un porcentaje muy bajo de transcripción, como A8, que parece considerar su CM como un repositorio de reglas, casi sin ejemplos ilustrativos ni justificaciones). Las justificaciones han tenido, en esas dos aulas, un porcentaje bajo de transcripción (alrededor del 30% de TC), con bastantes transcripciones parciales (demostraciones incompletas: sólo toman algunos pasos). Establecemos tres causas posibles para estos hechos:

- Las justificaciones están fuera de las *expectativas de aprendizaje* (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008) que fijaron los docentes para sus alumnos en este foco conceptual (indicación explícita del Profesor 1: “no es necesario que las aprendáis, si acaso, entenderlas”).
- Las justificaciones precisan mayor atención del alumnado, por los procesos y relaciones que involucran, para su comprensión y seguimiento, lo que dificulta combinar el seguimiento con su transcripción, dando lugar a transcripciones parciales, o a no transcripciones.
- Ibañes y Ortega (2003) ya detectaron las dificultades, en este nivel educativo, para distinguir los procesos asociados a la justificación: si no las identifiquen como tales, ni su propósito, pueden optar por no tomarlas, frente a elementos más fácilmente identificables, como los enunciados y los ejemplos.

El dictado verbal de los elementos que hemos considerado como comentarios por parte del Profesor 2 provoca una transcripción total de éstos, frente a su transcripción casi nula en las otras dos aulas.

De todos los comentarios, únicamente alguno de los hechos por los Profesores 1 y 3 han hecho explícitas relaciones entre reglas o la posibilidad de aplicar varias reglas distintas para derivar una función. Estos comentarios apenas han sido recogidos por los alumnos, que no parecen dar importancia a la transcripción de estas relaciones.

Si nos fijamos en los sistemas de representación, el sistema de representación simbólico es predominante en los CM de los alumnos, transcribiendo, no siempre correctamente, el simbolismo utilizado en la pizarra. Tan sólo dos alumnos (A5 y A9) tienen algún tipo de representación gráfica en sus cuadernos (algunas de las desarrolladas por el Profesor 1). En relación al sistema de representación verbal, los siete alumnos A10 a A16 toman las tres reglas que el profesor dictó en el aula, no apreciándose ningún otro caso (salvo parcialmente en una regla en el alumno A21). Además de los alumnos del Profesor 2 (debido al dictado en algunas partes), tan solo tres alumnos (A8, A19 y A21) indican verbalmente en varios casos los tipos de funciones u operaciones cuya derivada presentan, siendo esporádico o nulo este comportamiento en el resto de alumnos.

CONCLUSIONES

Este estudio en tres aulas con profesores de metodología relativamente similar, ha puesto de manifiesto la existencia de diferentes enfoques en el profesorado al planificar y desarrollar en el aula las reglas y técnicas de derivación, así como diferentes comportamientos en el alumnado al transcribir estos contenidos en sus CM. Hemos detectado cómo la transcripción de enunciados de las reglas y ejemplos ha sido mucho mayor en las aulas cuyos profesores han tenido un enfoque centrado en la aplicación práctica de las reglas, frente a un enfoque compartido entre la aplicación práctica y la fundamentación de las reglas, donde la transcripción ha sido mucho más variable entre diferentes alumnos. Las justificaciones han tenido un porcentaje relativamente bajo de transcripción en las dos aulas donde ha habido, estableciendo varias causas para ello en el punto anterior. Este hecho, unido al uso de la justificación como descubrimiento de la regla por parte del Profesor 1, puede ser otra explicación posible para la mayor variabilidad en la transcripción de las reglas por parte de sus alumnos.

Un estudio detallado de la transcripción que realizan los alumnos de las reglas enunciadas y sus ejemplos ilustrativos nos ha permitido detectar siete perfiles en el alumnado en este sentido. Destacamos la presencia de varios tipos de alumnos selectivos al transcribir estos contenidos, de diferente naturaleza: hemos encontrado alumnos *selectivos al ejemplificar*, que optan por tomar uno o algunos (pero no todos) los ejemplos que ilustran una regla, alumnos que *transcriben la regla sin ejemplos*, obviando la componente fenomenológica y de aplicación de dichas reglas y alumnos que, sorprendentemente y en varias ocasiones, *transcriben los ejemplos sin la regla*, lo que puede dificultar su asimilación de la misma, o la necesidad de recurrir a otros medios para encontrarla.

En la transcripción de los alumnos predomina el sistema de representación simbólico, transcribiendo los elementos de la pizarra frente al discurso oral de la explicación (salvo cuando es dictada). Aparición escasa del sistema gráfico y el verbal, sólo en un grupo reducido de alumnos.

La diversidad de comportamientos detectada en el alumnado en este estudio pone de manifiesto la necesidad de seguir profundizando en las diferentes formas que tienen los alumnos de elaborar y utilizar el CM para su estudio y aprendizaje de la materia, así como el papel y la influencia que puede ejercer el profesor en ellas. El trabajo global de investigación del que forma parte este estudio exploratorio busca aumentar nuestro conocimiento en estas líneas de investigación, insuficientemente tratadas en didáctica de la matemática.

Agradecimientos

El primer autor de este trabajo cuenta con la ayuda y financiación de una beca FPU (Referencia AP2012-2241) del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Referencias

Arce, M. (2013). Análisis de los cuadernos de un grupo de alumnos (1). *SUMA*, 74, 45-53.

Arce, M. (2014). Análisis de los cuadernos de un grupo de alumnos (y 2). *SUMA*, 75, 51-59.

Badillo, E., Azcárate, C. y Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f'(a) y f'(x) en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(2), 191-206.

Bardin, L. (1996). *Análisis de contenido*. Madrid: Editorial Akal (2ª ed.).

Colera, J. y García, R. (2008a). *Matemáticas I. 1º de Bachillerato.* Madrid: Editorial Anaya.

Colera, J. y García, R. (2008b). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I. 1º de Bachillerato.* Madrid: Editorial Anaya.

Clark, J. M., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D. J., St. John, D., Tolias, G. & Vidakovic, D. (1997). Constructing a Schema: The Case of the Chain Rule? *Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), 345-364.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. Londres: Routledge.

Courant, R. y Robbins, H. (1964). *¿Qué es la Matemática?* Madrid: Ed. Aguilar (4ª edición).

de Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Épsilon*, 26, 15-30. Traducción, documento original de 1990.

Fonseca, C. y Gascón, J. (2002). Organización matemática en torno a las técnicas de derivación en la Enseñanza Secundaria. En J. Murillo, P. M. Arnal, R. Escolano, J. M. Gairín y L. Blanco (Eds.), *Actas del VI Simposio de la SEIEM* (pp. 205-223). Logroño, La Rioja: SEIEM.

Font, V. (2000). Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo de f'(x). El caso de la función seno. *UNO*, 25, 21-40.

Font, V. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Noveno simposio de la SEIEM* (pp. 111-128). Córdoba: SEIEM.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26(1), 39-88.

Ibañes, M. y Ortega, T. (2003). Reconocimiento de procesos matemáticos en alumnos de primer curso de bachillerato. *Enseñanza de las ciencias*, 21(1), 49-64.

Picado, M. y Rico, L. (2011). Análisis de contenido en textos históricos de matemáticas. *PNA*, 6(1), 11-27.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *AIEM*, 1, 39-63.

Rico, L., Lupiáñez, J. L. y Molina, M. (2013). *Análisis didáctico en Educación Matemática*. Granada: Comares.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *SUMA*, 58, 7-23.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en Didáctica de la Matemática. *RELIME*, 11(2), 267-296.

---

[1] Entendemos por función recíproca la función simétrica para la composición de funciones (función tal que su composición con la función inicial es el elemento neutro para la composición); en contraposición con la función inversa (simétrica para el producto). No obstante, es usual nombrar la primera como la segunda, lo cual es motivo de confusión.

[2] En toda la comunicación utilizaremos el genérico masculino para profesores y alumnos, sin hacer referencia al sexo concreto de los participantes.

LA ACTIVIDAD DOCENTE DE UN PROFESOR: GEOMETRÍA, TECNOLOGÍA Y GRUPOS DE RIESGO

The teaching activity of a teacher: Geometry, technology and groups at risk

Alberto Arnal-Bailera[a], Núria Planas[b]

[a]Universidad de Zaragoza, [b]Universidad Autónoma de Barcelona

Resumen

En este informe se presentan algunos de los resultados de una investigación de tesis doctoral (Arnal, 2013) sobre el diseño, la implementación y la evaluación de una situación escolar de enseñanza y aprendizaje de la Geometría en un entorno tecnológico con alumnado de secundaria. En un informe anterior (Arnal y Planas, 2013) se documentaron dos resultados sobre aprendizaje derivados de la construcción del caso de un alumno. Ahora documentamos dos resultados sobre la actividad docente de un profesor. Por un lado, indicamos el efecto del uso de un programa de geometría dinámica en la superación parcial de percepciones limitadoras sobre la capacidad matemática de una alumna. Por otro, señalamos las reticencias ante el aprovechamiento del entorno tecnológico en el apoyo de la participación matemática de los alumnos.

Palabras clave: *actividad docente, Geometría, uso de tecnología, alumnado en riesgo, estudio de caso.*

Abstract

In this report we present results from a doctoral dissertation (Arnal, 2013) on the design, implementation and evaluation of a school situation of teaching and learning Geometry in a technological environment with secondary students. In a previous report (Arnal & Planas, 2013), two results about learning coming from the construction of the case of a student were documented. Now we document two results about the teaching activity of a teacher. On the one hand, we point to the effect of the use of dynamic geometry software on the partial overcoming of limiting perceptions of a student's mathematical ability. On the other, we indicate the reservation concerning the exploitation of the technological environment in the support of the students' participation.

Keywords: *teaching activity, Geometry, use of technology, at-risk students, case study.*

INTRODUCCIÓN

En el trabajo de tesis doctoral Arnal (2013) se construyeron casos de alumno y de profesor a fin de examinar relaciones entre enseñanza y aprendizaje de la Geometría en aulas de secundaria con alumnado en situación de riesgo social. En Arnal y Planas (2013) se expuso parte del caso de un alumno para ilustrar resultados sobre su participación matemática en un entorno de clase caracterizado por el uso de artefactos tecnológicos y discusiones en gran grupo. Se probó que la tecnología había influido notablemente en la generación de oportunidades de aprendizaje matemático en el aula y, en particular, en las formas de hacer matemáticas del alumno en interacción con sus compañeros y con el profesor. En este informe, de modo complementario, presentamos resultados derivados de la elaboración del caso de un profesor sobre la actividad de enseñanza en un mismo tipo de entorno didáctico-pedagógico pero en otra aula del centro escolar.

Para la construcción de casos de profesor y de modo similar a lo que se realizó con los casos de alumno, se recurrió a dos dimensiones cuyo análisis se corresponde respectivamente con la consecución de los siguientes objetivos científicos:

Arnal-Bailera, A., Planas, N. (2014). La actividad docente de un profesor: geometría, tecnología y grupos de riesgo. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 147-155). Salamanca: SEIEM.

- Objetivo 1 (dimensión instrumental). Identificar progresos y dificultades relativos al uso directo o indirecto de tecnología en la enseñanza de la Geometría.
- Objetivo 2 (dimensión afectiva). Identificar actitudes y emociones relativas a la introducción de un entorno tecnológico en dicha enseñanza.

Hay una dimensión, la discursiva, que está presente a lo largo de nuestra investigación y se cruza con la instrumental y la afectiva. Tomamos como supuesto que cada intervención de alumno o profesor influye en la producción de los significados que acaban siendo realizables (en el sentido de discutidos) mediante acciones concretas de habla en el aula. En la articulación conjunta de actividades de enseñanza y aprendizaje, asumimos que las intervenciones locales del alumno tienen un impacto observable en las intervenciones locales del profesor, y viceversa. No hay, por otra parte, discursos o intervenciones "individuales" que sean explicables según características de una única persona. Cualquier apreciación de un profesor sobre, por ejemplo, las posibilidades de rendimiento matemático en una clase con alumnado en riesgo social, es el resultado de la integración de varios y distintos discursos con impacto en el contexto escolar. Esto implica que los contenidos de cualquiera de los estudios de caso informan sobre el caso específico y, a su vez, sobre el resto de casos potencialmente configurables en torno a otros participantes del aula.

En lo que sigue, resumimos el enfoque teórico aplicado al análisis de las dimensiones instrumental y afectiva. Luego relatamos el experimento didáctico para la toma de datos y el procedimiento de análisis aplicado al desarrollo de casos de profesor. Continuamos con la ejemplificación parcial del caso de Josean y la síntesis de dos resultados obtenidos durante su construcción. Acabamos con una breve discusión que apunta a acciones futuras de investigación.

RELEVANCIA DE LA DIMENSIÓN INSTRUMENTAL

En las aulas del centro escolar de nuestra investigación, la mayoría del alumnado vive procesos de exclusión social de distinta índole, mientras que una parte importante del profesorado menciona la necesidad de diseñar dinámicas de clase que logren más motivación e implicación en el aprendizaje. En este escenario surge el proyecto de innovación, basado en la utilización de ordenadores, pizarras digitales y un programa de geometría dinámica, cuya implementación es el punto de partida del estudio. No hay, pues, un interés intrínseco e inicial por la dimensión instrumental, sino que se llega a ella desde el interés por identificar recursos pedagógicos y didácticos que contribuyan al logro de cambios positivos en las trayectorias de participación matemática del alumnado.

Siguiendo a Morera (2013), por dimensión instrumental nos referimos al conjunto de procesos que intervienen en la gestión de situaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con presencia y uso significativo de herramientas tecnológicas. Disponemos de trabajos cercanos que adaptan el análisis de esta dimensión a la caracterización de entornos de enseñanza de Geometría, entre los que destaca el de Ferrer, Morera y Fortuny (2014). En el ámbito internacional Mariotti (2000) explora la actividad docente del profesor en el desarrollo de procesos de génesis instrumental en clase, con énfasis en la gestión del grupo y del programa de geometría dinámica durante la resolución de problemas. Esta autora señala que debe ser explorado hasta qué punto y cómo la presencia de ordenadores y programas específicos "perturba", en el sentido de cuestionar y modificar, el contexto pedagógico y didáctico del profesor.

Hohenwarter, Hohenwarter y Lavizca (2010) en su trabajo con profesores de secundaria usando el programa GeoGebra, relatan dificultades de dominio e integración de la tecnología en clase de matemáticas. Respecto a estas dificultades Laborde, Kynigos, Hollebrands y Strässer (2006) destacan los retos de manejar distintas dinámicas en clase, combinar nuevas tecnologías con lápiz y papel, y adecuar convenientemente los objetivos de la enseñanza. En un esfuerzo por imaginar prácticas de aula que faciliten la actividad matemática con tecnología, Drijvers y sus colegas (2010) formulan seis tipos de orquestación instrumental. De estos tipos, dada la importancia que damos a la dimensión discursiva, tomamos los de ‘demostración técnica’ y ‘explicación de pantalla’ para el trabajo individual y en parejas con el programa de geometría dinámica en los portátiles, y los de ‘discusión de pantalla’ y ‘trabajo del sherpa’ para la discusión en gran grupo con la visualización en la pantalla digital interactiva de producciones de alumnos.

La ‘demostración técnica’ es un tipo de orquestación consistente en el uso y ejemplificación de instrumentos técnicos a cargo del profesor. Cuando el profesor prioriza el contenido matemático ante el grupo clase guiado por lo que ocurre en la pantalla del ordenador, el tipo es ‘explicación de la pantalla’. Por otro lado, el tipo ‘discusión de pantalla’ consiste en la participación del grupo clase en una discusión sobre lo que el profesor muestra en la pantalla mediante video-proyección, con el objetivo de impulsar la génesis instrumental colectiva. El cuarto tipo en nuestro estudio es el de ‘trabajo del sherpa’, donde un estudiante denominado sherpa usa la tecnología para presentar su trabajo y realizar las acciones que el profesor le solicite.

RELEVANCIA DE LA DIMENSIÓN AFECTIVA

Así como el interés por la dimensión instrumental se origina al pensar en recursos de clase motivadores para grupos en situación de riesgo, el interés por la dimensión afectiva surge al identificar obstáculos al logro de cambios en las trayectorias de participación matemática del alumnado. Nos referimos a la identificación de una percepción generalizada entre el profesorado de matemáticas del centro del estudio acerca de la dificultad de mejorar el rendimiento en clase de sus alumnos. De ahí asumimos que en el análisis de la implementación de la propuesta didáctica que se elabora como parte del proyecto de innovación, se deberán tener en cuenta aspectos afectivos que puedan estar influyendo en la toma de decisiones y en el desarrollo u omisión de acciones concretas en la gestión de la actividad docente. Dentro de los aspectos afectivos, por tanto, situamos las percepciones como fundamentales en la generación e interpretación de prácticas (Arnal, 2010).

Siguiendo a Blanco (2012), por dimensión afectiva entendemos el conjunto de experiencias que provocan distintas reacciones emocionales que influyen en la formación de creencias, en el comportamiento y en el rendimiento en las situaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El trabajo de Casas, Luengo y Maldonado (2012), junto con el de Hidalgo, Maroto, Ortega y Palacios (2012), son ejemplos de la atención prestada al estudio de este tipo de experiencias por equipos de investigación del país. Los primeros se centran en las emociones del profesorado respecto al trabajo con ordenadores y los segundos en la caracterización del dominio afectivo. Unos y otros apuntan a la importancia de examinar cómo las experiencias interiorizadas por el profesorado se expresan mediante actitudes y emociones que condicionan las acciones orientadas al desarrollo de estrategias y dinámicas de clase.

En nuestra investigación, profesores y alumnos tienen que regular sus experiencias emocionales en un entorno de trabajo tecnológico y colaborativo de reciente introducción y, por tanto, sometido a un sistema de normas poco desarrollado. Al respecto y a pesar de que uno de los objetivos es identificar cambios en la dimensión afectiva asociados al uso de tecnología en clase de matemáticas, no debe obviarse que también se está experimentando una situación de establecimiento y ajuste a normas sobre cómo gestionar y participar en las discusiones en grupo acerca de la resolución de las tareas. Estas consideraciones sobre las normas contribuyen a poner de relieve el carácter social de los procesos de construcción de la dimensión afectiva; y en particular, señalan la especial complejidad de las experiencias emocionales por hallarse profesores y alumnos en un escenario didáctico-pedagógico distinto al habitual.

DISEÑO EXPERIMENTAL Y MÉTODOS

En primavera de 2010 se empezó a trabajar con tres profesores de matemáticas que impartían clase en aulas de un centro de secundaria en Huesca, ubicadas dentro de los denominados programas institucionales de apoyo. Los tres profesores aceptaron implementar una secuencia didáctica de Geometría que se les proporcionó y comentó con antelación. En el diseño de la secuencia se tuvo en cuenta la inclusión de problemas cuyos enunciados evocaran contextos extra-matemáticos cercanos a los alumnos, como el que se ejemplifica en la Figura 1. Otro aspecto que se trató con los profesores fue el de considerar el uso del software dinámico en la presentación de los distintos problemas y en la fase de acercamiento durante las explicaciones iniciales dirigidas a la familiarización con la doble situación matemática y extra-matemática sugerida por el enunciado.

La secuencia didáctica estuvo compuesta por cinco sesiones de clase que, a su vez, incluían varias tareas. Para cada sesión, se elaboró un guión que se suministró a los profesores a fin de concretar opciones de configuración didáctica y modos de explotación de las tareas (Trouche, 2004). La segunda sesión, de la que tomamos datos para este informe, trató las nociones de mediatriz y circuncentro y su construcción como lugares geométricos. En las primeras tareas de la sesión y de acuerdo con el guión, se proponía una aproximación con lápiz y papel, seguida de una construcción punto a punto de la mediatriz como lugar geométrico donde concurren los puntos que equidistan de los extremos de un segmento representados por dos amigos en un parque. Luego se proponía una tarea de profundización sobre qué ocurriría si hubiera tres amigos y se buscara un punto a la misma distancia de los tres, pidiendo relacionar esto con las mediatrices consideradas (ver Fig. 1). Se sugería buscar la solución por parejas con ayuda de los portátiles. Además de las recomendaciones para los modos de explotación, para todas las tareas el guión del profesor describía la solución. Por ejemplo, en la parte destinada a la tarea de profundización, se indicaba la suficiencia de la solución con la intersección de solo dos mediatrices (ver fotografía de la derecha en Fig. 1).

Abdel, Blanca y Conrad están en los puntos blancos. Queremos situarnos en un lugar que esté a la misma distancia de los tres. Buscad un lugar que cumpla esta condición.

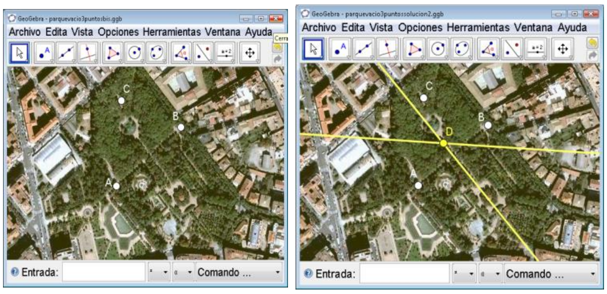


Figura 1. Enunciado y solución propuesta de una tarea

Las sesiones se grabaron en video, con una cámara enfocada en la pizarra y otras dos en los alumnos; con esto bastó para obtener el registro de las acciones del profesor. En cada guión del profesor, se incluyeron preguntas para identificar actitudes y emociones, entre ellas: “¿Cómo te encuentras ahora, antes de empezar a trabajar con los alumnos? Da un par de calificativos que expresen cómo te sientes”. Hubo cuestiones intercaladas para identificar progresos y dificultades en el desarrollo de la enseñanza, además de posibles cambios en actitudes y emociones, entre ellas: “Comenta: Hoy mis alumnos están más implicados que otras veces en la actividad” y “Comenta: La tecnología ha hecho más fácil desarrollar mis explicaciones”. Tras cada sesión y durante el mismo día lectivo, se llevó a cabo una entrevista con el profesor. Las cinco entrevistas con un profesor se organizaron según las respuestas escritas que este hubiera dado en los guiones de sesión. Si, por ejemplo, el profesor había escrito sobre la dificultad de mantener la atención de los alumnos en las actividades en la pizarra, se le leía su frase exacta y se le pedía que la comentara. Videos, guiones y entrevistas fueron la fuente primaria en la construcción de cada caso.

Los métodos de análisis fueron esencialmente cualitativos e interpretativos, con adecuación al principio de comparación constante, vuelta en repetidas ocasiones a datos ya revisados y agrupación de datos comparables en torno a aspectos afectivos e instrumentales. Respecto al primer objetivo, para identificar progresos y dificultades en la enseñanza se buscaron y contrastaron episodios que evidenciaran progresos o dificultades en la enseñanza de un concepto o procedimiento matemático. Respecto al segundo objetivo, para identificar (cambios en) actitudes y emociones se asignaron valores positivos, negativos y no concluyentes a datos donde hubiera manifestaciones explícitas de afecto (e.g., “Felicita a un alumno, mientras se ríe, satisfecho de su trabajo” –valor positivo; “Me fui desesperando según avanzaba la sesión” –valor negativo; “(La secuencia) resulta interesante, pero se pasa muy rápido el tiempo” –valor no concluyente). Estos valores se compilaron y luego se compararon. El total de (cambios en) actitudes y emociones y el total de progresos y dificultades son los resultados principales involucrados en la construcción de cada caso de profesor.

CONSTRUCCIÓN DEL CASO DE JOSEAN

Pasamos a explicar dos resultados obtenidos en la elaboración del caso de Josean. El primer resultado alude a la dimensión afectiva, por lo que contribuye a la consecución del objetivo sobre identificación de cambios en actitudes y emociones del profesor durante su gestión del entorno tecnológico. El segundo resultado alude a la dimensión instrumental, por lo que contribuye a la consecución del objetivo sobre identificación de progresos y dificultades en la enseñanza de Geometría durante la resolución de problemas. Hemos seleccionado estos resultados porque señalan dos temas de especial relevancia, que son respectivamente: la percepción generalizada en el profesorado acerca de la baja capacidad matemática del alumnado en riesgo de exclusión social y la naturaleza problemática de la transición de la enseñanza de las matemáticas sin tecnología y centrada en la práctica magistral a la enseñanza con tecnología y discusión guiada por el profesor.

Superación parcial de percepciones limitadoras sobre los alumnos

En la segunda sesión de clase, al comenzar la discusión de la tarea sobre la construcción del circuncentro como lugar geométrico (ver Fig. 1), Josean da valor a las realizaciones matemáticas de Stefani, que ha sido la primera en terminar y que ha utilizado de modo efectivo aunque incompleto el programa de geometría dinámica (i.e., localización del triángulo con vértices en los tres amigos; representación de solo dos mediatrices; comprobación de la intersección de dos mediatrices en un punto). El profesor anima a esta alumna a explicar su proceso de resolución a Ikram, quien ha manifestado dificultades tal como se lee en el siguiente episodio:

Josean: Ahora tenemos tres personas, Abdel, Blanca y Conrad, y la pregunta que os hace es si hay algún punto que esté a la misma distancia de los tres y si lo sabéis encontrar.

Ikram: [en su mesa] Josean, ¡no sale!

Josean: A ver quién es el primero que consigue encontrar el punto.

Stefani: [en su mesa, al lado de Ikram] ¡Es que no hay mediatriz!

Josean: Ya casi lo has sacado, a ver cómo lo has hecho, esta es la mediatriz de B y A y esta… se cortan en un punto… ¿Sabes cómo sacar el punto donde se cortan dos rectas? Cuando lo hagas puedes medir la distancia a A o B, a ver qué pasa.

Stefani: [transcurridos unos instantes] Josean, ¡ya me ha salido! ¡Mira!

Josean: ¡Muy bien!

Stefani: Ocho, ocho y ocho, este es este, este es este…

Josean: Los tres son cero coma ochenta y ocho. Muy bien. Stefani ha encontrado el punto que está a la misma distancia, en concreto le sale cero coma ochenta y ocho a los tres puntos. Además lo ha hecho por el proceso correcto. Así que coméntaselo a Ikram y explícale el proceso.

Argumentamos que Josean aprovecha la construcción parcial del circuncentro de Stefani con dos mediatrices para animarla públicamente, explicarle cómo construir el punto de corte y pedirle que compruebe la solución con la herramienta de GeoGebra “distancia/longitud” (lo cual queda claro en los datos de video). Posteriormente pone en valor la realización de la alumna, haciendo hincapié en la validez matemática del proceso seguido. Profundiza en ello cuando le pide que explique la resolución a Ikram. Josean se refiere a Ikram en varias de las entrevistas como la de mejor rendimiento matemático en clase, mientras que habla de Stefani como la de peor rendimiento. De nuestro análisis se infiere que el profesor supera puntualmente sus percepciones sobre la capacidad de Stefani para explicar matemáticas a una compañera. El episodio de la sección que sigue a esta se ha seleccionado para ilustrar otro tipo de resultado, pero en él también se observa una actuación docente que facilita la participación matemática de Stefani.

La información recabada en otras sesiones nos obliga a matizar el grado de validación pública de la capacidad matemática de los alumnos y de Stefani en particular. En la quinta sesión, por ejemplo, cuando el profesor pregunta por la interpretación geométrica de la expresión algebraica del Teorema de Pitágoras, tras varias respuestas erróneas de alumnos, Stefani responde “a y b suman lo que c” (a, b y c son los nombres dados a los segmentos del triángulo rectángulo que hay en la pizarra). Josean, sin embargo, no indaga en la respuesta de Stefani; en su lugar responde: “¿Cómo que a y b suman lo de c? No me convence esa explicación, alguien que me lo sepa decir mejor”. No hay, por tanto, una actuación docente que reafirme la superación de percepciones limitadoras sobre la capacidad matemática de Stefani. A pesar de ello, entendemos que lo que ocurre en el episodio reproducido es paradigmático de un inicio de cambio en los modos de considerar las posibilidades de participación matemática de los alumnos. Entendemos, además, que este inicio de cambio en la actuación docente (que podrá o no consolidarse) viene propiciado por los cambios didáctico-pedagógicos en la cultura del aula que llevan a cambios en las formas de participación de alumnos que antes del uso del programa de geometría dinámica apenas intervenían.

Reticencias ante la explotación compartida del entorno tecnológico

En la segunda sesión, se verifica la opción de construir el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos amigos. Tras la exploración con lápiz y papel y la construcción punto a punto con ordenador, los alumnos concluyen que estos puntos forman una recta y utilizan la herramienta “mediatriz” que dibuja el objeto. GeoGebra interpreta la mediatriz como lugar geométrico ya que la construye a partir de dos puntos, no a partir del segmento que los une, y por tanto no aplica la definición de recta perpendicular por el punto medio del segmento. En discusión conjunta se ve que los puntos que equidistan de tres amigos son construibles con el programa de geometría dinámica y que forman una recta que cumple las condiciones de mediatriz. De ahí y tal como se lee en el siguiente episodio, los alumnos se enfrentan a la utilización reiterada de la funcionalidad del programa que construye la mediatriz de dos puntos:

Stefani: [en la pizarra digital] Ah, sale un círculo, claro…

Josean: Pasa por los tres puntos, porque todos están a la misma distancia del punto que has hallado. Bueno, explícaselo a tus compañeros. Chicos, atendedla, que os va a explicar cómo ha resuelto ella el problema.

Stefani: ¿Cómo que lo explique?

Josean: Lo que has hecho.

Stefani: He sacado la mediatriz, he hallado el punto donde se cortaban…

Josean: Has sacado dos mediatrices… Esta que es el conjunto de todos los puntos que están a la misma distancia de A y de C y esta que es el conjunto de todos los puntos que están a la misma distancia de A y de B. ¿De acuerdo? Y estas dos rectas se cortan en un punto. Y ese punto es especial. ¿Por qué?

Stefani: Porque la distancia de los tres puntos...

Josean: Porque este punto está a la misma distancia…

Stefani: De los tres.

Josean: …de los tres. ¿De acuerdo? Todos los puntos de aquí están a la misma distancia de A y de B, todos los puntos de aquí están a la misma distancia de A y de C. Pero hay un punto especial, que es donde se cortan las dos rectas, que está a la misma distancia de los tres. Y solamente ese punto, ¿de acuerdo? De hecho has trazado luego una circunferencia con centro en ese punto, y que pasaba por uno de los tres puntos, y hemos visto que pasaba por los tres, porque estaba a la misma distancia ese punto de los tres puntos. Está a cero coma ochenta y ocho, luego si trazamos una circunferencia de centro el punto que hemos hallado y radio cero coma ochenta y ocho, tiene que pasar obligatoriamente por los tres puntos… [sigue el profesor].

Del conjunto de datos, inferimos la existencia de reticencias del profesor ante el aprovechamiento de la intervención de Stefani en el entorno tecnológico. Josean no incorpora en la discusión el descubrimiento de la mediatriz como línea recta. A pesar de haber interactuado explícitamente con la alumna, no aprovecha el resultado para proseguir la explicación o para que Stefani reflexione algo más, por ejemplo mediante la funcionalidad de GeoGebra de construir la línea recta que pasa por dos puntos y comprobar que contiene todos los puntos dibujados. Más tarde pide a la alumna salir a la pizarra a explicar la construcción del circuncentro como lugar geométrico de los puntos que equidistan de los tres amigos, pero poco después la interrumpe sin revisar lo explicado ni clarificar una imprecisión matemática. Josean devalúa el valor de la participación de los alumnos al anticiparse y ser él quien termina resolviendo la tarea, aún cuando esto suponga modificar los tipos de orquestación planificados sobre todo en lo respecta al ‘trabajo del sherpa’.

Josean concibe la utilidad de la tecnología desde la perspectiva de la actuación docente por delante de la participación de los alumnos. Entendemos que este profesor no facilita ciertas oportunidades de aprendizaje en torno a la construcción y propiedades de la bisectriz y del circuncentro, en parte por las restricciones que impone a la participación de Stefani en la pizarra digital, y de otros alumnos en otras sesiones. La interrupción de las explicaciones matemáticas de un alumno ante el grupo clase provoca que quede minimizado el impacto de su participación en los procesos de aprendizaje del resto de alumnos. En general, se incorpora la pizarra digital interactiva como recurso en el aula pero no se le da a este recurso un papel transformador de los modos de actuación docente centrados en el control y la explicación matemática a cargo del profesor. Por el mero hecho de introducir el uso de la pizarra digital se produce una mejora en las condiciones de participación matemática y de discusión en grupo. Esta mejora, sin embargo, es gestionada de un modo que repercute débilmente en el incremento de la participación matemática de los alumnos.

DISCUSIÓN FINAL Y ACCIONES FUTURAS

El caso de Josean proporciona conocimiento acerca de cómo este profesor gestiona su actividad de enseñanza para facilitar en el alumnado formas de participación en clases de matemáticas caracterizadas por el uso de la tecnología (pizarra digital interactiva y programa de geometría dinámica) y la discusión en grupo. Se ha presentado un primer resultado sobre la superación parcial de percepciones limitadoras respecto a la capacidad matemática de los alumnos por hallar propiedades geométricas de segmentos y triángulos. La documentación de un segundo resultado ha puesto de manifiesto las reticencias del profesor ante la explotación compartida y equilibrada con los alumnos de la actividad matemática producida en el entorno tecnológico.

Convendrá examinar hasta qué punto los modos de actuación e interacción del profesor quedan determinados por el uso matemáticamente significativo y pedagógicamente compartido de artefactos tecnológicos en clase. Si bien abundan en el área las investigaciones sobre modos de actuación docente ante el uso de programas de geometría dinámica, no conocemos investigaciones sobre entornos tecnológicos que además atiendan al uso de la pizarra digital interactiva en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. De nuestro estudio actual se desprende que la opción pedagógica de hacer que los alumnos interactúen con la pizarra digital no va asociada a la opción didáctica de hacer que la participación de los alumnos en la pizarra sea tenida en cuenta como contenido relevante de la discusión matemática. Es fundamental preguntarse sobre qué modos de actuación docente favorecerán la función didáctica, y no solo pedagógica, del tipo de orquestación denominado 'trabajo del sherpa', donde el alumno no ejerza simplemente de ayudante del profesor sino que tenga un papel de guía en su aprendizaje matemático y el de sus compañeros.

Agradecimientos

Al Ministerio de Economía y Competitividad, por la financiación del Proyecto EDU2012-31464, y al equipo de GIPEAM –Grupo de Investigación en Práctica Educativa y Actividad Matemática, con referencia 2014 SGR 972 de la Generalitat de Catalunya– por las aportaciones al trabajo.

Referencias

Arnal, A. (2010). *El uso de la pizarra digital interactiva como elemento dinamizador del aprendizaje de las matemáticas en aulas con población en riesgo de exclusión social*. Trabajo para la Obtención de la Suficiencia Investigadora. Madrid: UNED.

Arnal, A. (2013). *Mediación tecnológica en la enseñanza y el aprendizaje de Geometría con grupos de riesgo: Estudio múltiple de casos*. Manuscrito de Tesis Doctoral. Bellaterra: UAB.

Arnal, A. y Planas, N. (2013). Uso de tecnología en el aprendizaje de la Geometría con grupos de riesgo: un enfoque discursivo. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Actas del XVII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 157-164). Bilbao: SEIEM.

Blanco, L. J. (2012). Influencias del dominio afectivo en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp.171-185). Barcelona: Graó.

Casas, L. M., Luengo, R. y Maldonado, A. M. (2012). Emociones ante el uso de las TIC en Educación. En V. Mellado, L. J. Blanco, A. B. Borrachero y J. A. Cárdenas (Eds.), *Las emociones en la enseñanza y el aprendizaje de las Ciencias y las Matemáticas. Volumen I* (pp. 89-102). Badajoz: DEPROFE.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H. y Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *75*, 213-234.

Ferrer, M., Morera, L. y Fortuny, J. M. (2014). Efectos de la actuación docente en la generación de oportunidades de aprendizaje matemático. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(en prensa).

Hidalgo, S., Maroto, A. Ortega, T. y Palacios, A. (2012). Influencia del dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. En V. Mellado, L. J. Blanco, A. B. Borrachero y J. A. Cárdenas (Eds.), *Las emociones en la enseñanza y el aprendizaje de las Ciencias y las Matemáticas. Volumen I* (pp. 217-242). Badajoz: DEPROFE.

Hohenwarter, J., Hohenwarter, M. y Lavicza, Z. (2010). Evaluating difficulty levels of dynamic geometry software tools to enhance teachers' professional development. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 17*(3), 127-134.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. y Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 275-304). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 25-53.

Morera, L. (2013). *Contribución al estudio de la enseñanza y el aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología.* Manuscrito de Tesis Doctoral. Bellaterra: UAB.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9*(3), 281-307.

PROMOVIENDO LA CREATIVIDAD MATEMÁTICA A TRAVÉS DEL DISEÑO COLABORATIVO DE C-UNIDADES[1]

Fostering mathematical creativity through the collaborative design of innovative c-units

Berta Barquero, Andrea Richter, Mario Barajas, Vicenç Font

Universidad de Barcelona

Resumen

Este trabajo se centra en las primeras fases de investigación desarrolladas en el marco del proyecto europeo MC2 (Mathematical Creativity Squared) que se propone indagar cómo promover la creatividad matemática a través del diseño innovador de unidades didácticas (c-unidades). Este diseño, en manos de las denominadas comunidades de interés (CdI), llevará a confluir diferentes formas de interpretar qué es la creatividad en nuestra sociedad, en las matemáticas y cómo es posible promover la creatividad y el pensamiento matemático creativo en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En este trabajo nos centraremos en explorar las distintas interpretaciones y preconcepciones de nuestra CdI sobre la creatividad en matemáticas y sobre los primeros criterios a tomar en cuenta para el diseño matemático y didáctico de estas c-unidades.

Palabras clave: *creatividad matemática, pensamiento matemático creativo, creatividad social, comunidades de interés, criterios de diseño*

Abstract

This paper focuses on the first research phases developed in the frame of the European project MC2 (Mathematical Creativity Squared) that leads the main objective of looking into how to foster mathematical creativity through the innovative design of didactic units (called c-units). This design, carried out by the communities of interest (CoI), will come together different ways of understanding what creativity is in our society and in mathematics and ways of proposing how to promote creativity and a creative mathematical thinking in the teaching and learning of mathematics. In this work, we focus on investigating about the different conceptions and ways of understanding that different components of the CoI express when they are asked about mathematical creativity and about the first principles to take into account for the mathematical and didactic design of these c-units.

Keywords: *mathematical creativity, creative mathematical thinking, social creativity, communities of interest, design principles*

INTRODUCCIÓN

En este trabajo presentamos una investigación realizada en el ámbito del proyecto MC2 (Mathematical Creativity Squared) iniciado a finales de 2013. A continuación describimos brevemente los objetivos de este proyecto. El MC2 se propone, en términos generales, el diseño y desarrollo de un entorno digital que pueda servir de apoyo para la interacción de diversos individuos y comunidades de prácticas involucradas en la enseñanza de las matemáticas. Esta interacción tendrá como objetivo central el diseño de los recursos didácticos apropiados para promover la creatividad y el pensamiento matemático creativo en la enseñanza de las matemáticas en los distintos niveles educativos, dando preferencia a la Educación Secundaria.

La búsqueda de cómo promover el pensamiento matemático creativo (PMC) se plantea como uno de los objetivos centrales de la Unión Europea (EC, 2006), tanto a nivel de la aula como de los

Barquero, B., Richter, A., Barajas, M., Font, V. (2014). Promoviendo la creatividad matemática a través del diseño colaborativo de c-unidades. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 157-166). Salamanca: SEIEM.

sistemas educativos en general. El proyecto que aquí nos ocupa se centra en la propuesta de diseños innovadores para promover la creatividad y el PMC en sus futuros usuarios (estudiantes y profesores de secundaria o de otros niveles educativos). Estos diseños incidirán sobre nuevas formas de pensar, desarrollar, aprender y enseñar matemáticas.

El proyecto MC2 se propone, además, indagar en: (a) la creatividad social (Fischer, 2011) que surge en el proceso de diseño colaborativo o de co-diseño de unidades y secuencias didácticas que llamaremos *c*-unidades (la *c* en referencia a creatividad) y, (b) describir hasta qué punto y en qué medida estas unidades pueden promover la creatividad matemática y el PMC en profesores y estudiantes. El énfasis se pone en el proceso de diseño de estas propuestas y en el desarrollo del entorno digital necesario para darles soporte.

Para conseguir estos objetivos, el proyecto MC2 irá desarrollando en paralelo un nuevo formato de *e*-book (libros electrónicos) denominado "*c*-book" (*c*-libro, *c* de creativo). Este *c*-libro reunirá distintas *c*-unidades (unidades creativas) que serán diseñadas por las denominadas Comunidades de Interés (CdI) (Fisher, 2001). Cada país participante en los bloques dedicados al diseño de *c*-unidades, un total de cuatro países: España, Francia, Inglaterra y Grecia constituirá su CdI local. En estas CdI, formadas por unas 12-20 personas, van a confluir perfiles bastante diferentes provenientes de distintas comunidades de prácticas y con diferentes "culturas" epistemológicas y pedagógicas. En nuestro caso la CdI está formada por: profesores de Primaria y de Secundaria, investigadores en Educación Matemática, editoriales educativas, desarrolladores de tecnología educativa y expertos externos del ámbito de la educación matemática, que pueden aportar su visión distinta sobre cómo promover la creatividad en la sociedad y, en particular, en las matemáticas. Este punto de apertura y de confluencia de los distintos perfiles, intereses e interpretaciones será la que dé origen a interesantes puntos de discusión y aporte criterios originales y novedosos en el diseño de las *c*-unidades. Los grupos participantes se proponen así formar una comunidad interdisciplinar de profesionales e investigadores donde los roles de "diseñadores", "consultores" y "consumidores" van a entremezclarse permitiendo un continuo rediseño de las *c*-unidades.

LA CREATIVIDAD MATEMÁTICA Y EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO CREATIVO

La creatividad y, en particular, la creatividad matemática es un concepto complejo y polisémico que ha sido considerado en muchas investigaciones y abordado desde muchos puntos de vista. Diversas caracterizaciones sobre qué es la creatividad, la creatividad en matemáticas y el PMC han sido propuestas. Algunas de ellas se han centrado más en los sujetos creativos, otras en el proceso creativo o en los productos resultantes (Haylock 1987, Mann 2006) e incluso otras introduciendo nuevas dimensiones culturales y sociales inherentes a la creatividad (Csikszentmihalyi 2000, Sriraman 2009).

Ervynck (1991) describe la creatividad matemática a través de tres etapas: una etapa técnica conceptual preliminar, seguida de una actividad más algorítmica y, finalmente, una actividad creativa que consiste en la habilidad de resolver problemas y de tomar decisiones con estrategias no algorítmicas. Por su parte, Hadamard (1945) después de indagar en los procesos mentales que matemáticos y científicos seguían haciendo matemáticas, describe el proceso creativo utilizando el modelo Gestalt con sus cuatro fases: *preparación-incubación-iluminación-verificación*. Trabajos más recientes, como el de Liljedahl (2013), aceptan y extienden los trabajos de Hadamard añadiendo el fenómeno que denomina "AHA! experience" que, según el autor, es clave en el momento de la iluminación. A pesar de la descripción más a menos aceptada de las etapas en los procesos creativos en matemáticas, no deja de ser misterioso el cómo promover los mecanismos adecuados para que la vivencia y transición de estos distintos momentos puedan ocurrir. En este sentido:

> Los misteriosos mecanismos mediante los cuales actúa la *incubación* de los problemas con los que se ocupa la mente hasta el momento en que en ella surge la *inspiración* o *iluminación* decisiva en todo

> proceso verdaderamente creativo es otro de los temas poco conocidos y bastante controvertidos de los que habrá que ocuparse (Guzmán, 1995)

A pesar de las dificultades en definir y describir estos términos, tanto la comunidad matemática como la comunidad de investigadores en educación matemática muestran su acuerdo en el papel esencial que tiene la creatividad en el quehacer matemático. Los investigadores distinguen entre la creatividad matemática en la comunidad matemática y la creatividad en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a nivel escolar. Por ejemplo, Kaufman y Beghetto (2008) distinguen entre "big-C, middle-C o little-C" para centrarse en la comunidad de matemáticos como productores de conocimiento, en los alumnos en grupo o en los alumnos individualmente. En el proyecto MC2, nos centraremos en la creatividad a nivel escolar (o middle-c), que Liljedahl & Sriraman (2006) sugieren caracterizar como:

> Mathematical creativity at school level is: (1) the process that results in unusual (novel) and/or insightful solution(s) to a given problem or analogous problem, and/or (2) the formulation of new questions and/or possibilities that allow an old problem to be regarded from a new angle. (Ibid., p.19)

Cómo promover la creatividad y el PMC, más allá del problema de su caracterización, es un problema de investigación relevante en Educación Matemática y, en particular, para el proyecto MC2 en el cual está enmarcada esta investigación.

La paradoja escolar en torno a la creatividad: ¿cómo promover la creatividad en la escuela?

¿Cómo una actividad que potencialmente es muy creativa deja de serlo al ser enseñada? Por una parte tenemos que la actividad matemática promueve la emergencia de nuevos objetos matemáticos: nuevos problemas, nuevas estrategias de resolución, nuevas nociones teóricas, así como nuevas relaciones entre estos. Por otra parte esta creatividad potencial se pierde en muchos casos en su proceso de enseñanza, como explican Chevallard, Bosch & Gascón (1997):

> En las instituciones escolares actuales impera una fuerte tendencia a fraccionar la matemática enseñada. El estudiante se encuentra con unos objetos matemáticos poco relacionados entre sí, con unas estrategias de resolución muy rígidas con problemas relativamente aislados y con una teoría poco relacionada con la práctica matemática concreta. Resulta, en definitiva, que la actividad matemática escolar que llevan a cabo los alumnos no está sostenida a las condiciones de un proceso sostenido y estructurado y, por lo tanto, tiene pocas posibilidades de ser creativa.

Silver (1997, p.75) señala la coexistencia de dos visiones sobre creatividad matemática. La visión de la creatividad del "genio" que sugiere que la creatividad matemática difícilmente puede ser modificada con procesos formativos y que el trabajo creativo surge de momentos de inspiración puntual que pocos consiguen y, por otro lado, la creatividad que se asocia a largos procesos de estudio y de indagación que, a través de procesos de formación adecuados, puede llegarse a desarrollar. Situándonos en esta segunda perspectiva, se da una situación paradójica: por una parte, la propia estructura de la matemática escolar puede llegar a dificultar el desarrollo de una actividad matemática creativa que requiere de procesos largos y profundizados de estudio, y, por otra parte, la escuela (y la sociedad) otorga un gran valor a la creatividad. Se produce, en cierta manera, un desfase entre los medios y dispositivos escolares que se ponen en juego y los fines que se dice que se pretende alcanzar.

Con relación a la paradoja comentada, en el proyecto MC2 se asume que, mediante el diseño apropiado de unidades y secuencias didácticas, se podrá incidir en el desarrollo de la creatividad y el PMC en nuestras aulas. El problema de investigación que nos planteamos aquí trata un aspecto relacionado con la siguiente problemática (que es el objetivo general del proyecto MC2):

> ¿Cómo podemos caracterizar una actividad escolar creativa en matemáticas? ¿Qué características y condiciones son cruciales a considerar en el diseño matemático y didáctico de *c*-unidades para

promover la creatividad matemática y el PMC en las aulas? ¿Qué restricciones pueden aparecer cuando estos diseños quieran convivir con los medios y dispositivos escolares existentes?

En este artículo nos centraremos en describir la primera fase de investigación del proyecto. Esta fase incluye la configuración de las comunidades de interés y un primer estudio acerca de sus ideas preconcebidas sobre la creatividad. Más concretamente, nos centraremos en la indagación sobre las preconcepciones epistemológicas, pedagógicas y didácticas sobre la creatividad en matemáticas, el PMC y en cómo promoverlo a través del diseño de *c*-unidades. Cabe destacar que, a lo largo del proyecto, vamos a abordar cuestiones mucho más amplias que van a ir evolucionando junto con sus propuestas de diseño.

LAS COMUNIDADES DE INTERÉS: INDAGANDO SOBRE SUS PRECONCEPCIONES SOBRE LA CREATIVIDAD MATEMÁTICA

Configuración de las comunidades de interés

La noción de comunidad de interés, CdI (Fisher, 2001) surge en el proyecto MC2 extendiendo la noción más popularizada de comunidad de prácticas (Wegner, 1998). En el marco del proyecto, cada universidad participante en este bloque de trabajo constituirá independientemente su CdI. En términos generales, la configuración de estas comunidades tienen que incluir miembros que directamente estén involucrados en la enseñanza de las matemáticas en distintos niveles educativos y aportando diferentes perspectivas de actuación (profesores, editoriales educativas, tecnología educativa, etc.), pero a la vez incluyendo un punto de apertura de la escuela a la sociedad, incluyendo profesionales externos al mundo de educación matemática que puedan problematizar y cuestionar el papel de la creatividad en las matemáticas, en su enseñanza y en el diseño de actividades para promover un pensamiento creativo. Su configuración va a ser central porqué estos van a ser los encargados de desarrollar el diseño de las *c*-unidades a lo largo de todo el proyecto.

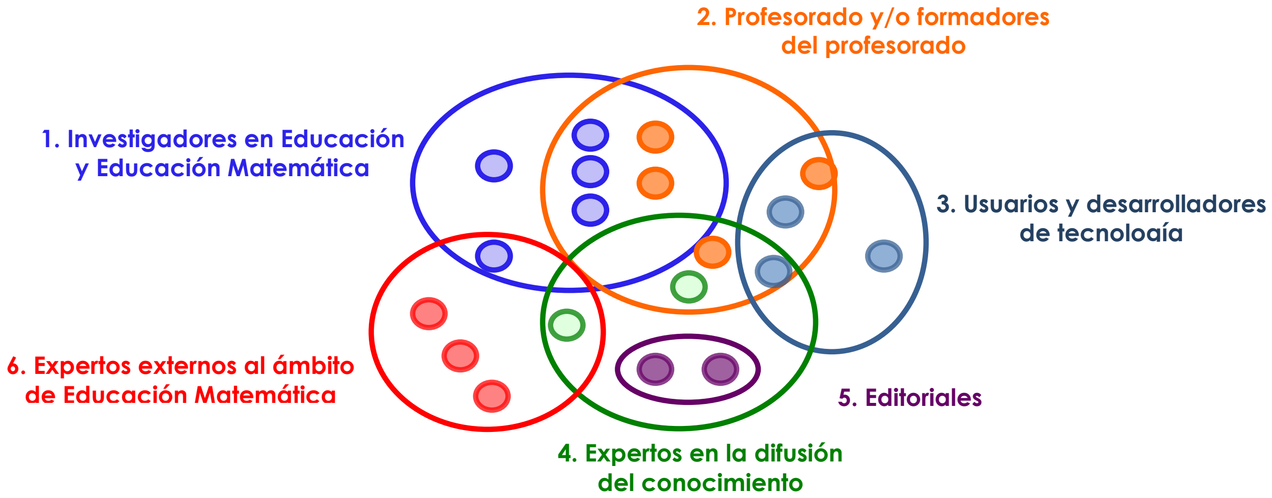


Figura 1. Configuración de la CdI según las CdP involucradas

Con relación al caso que aquí nos ocupa, el de la Universidad de Barcelona (UB), a lo largo el proceso de configuración de la CdI, hemos distinguido las siguientes categorías permitiendo delimitar las diferentes CdP involucradas: 1. Investigadores en educación y/o en educación matemática; 2. Profesorado y/o formadores del profesorado; 3. Desarrolladores de tecnología para la educación matemática y usuarios especializados; 4. "Expertos" en la difusión del conocimiento; 5. Editoriales y 6. "Expertos" externos al ámbito de Educación Matemática. Esta categorización nos sirve, por un lado, para establecer divisiones en términos de las CdP involucradas y, por otro lado, describir los puntos de encuentro o de interés entre los distintos miembros asegurando el máximo de riqueza y complementariedad entre dominios distintos del conocimiento, culturas y perspectivas institucionales diferentes. Por ejemplo, un profesor de secundaria que desarrolla su práctica principal como docente puede también encargarse del diseño y difusión de dispositivos innovadores para la enseñanza de las matemáticas. O, un investigador ajeno al ámbito de educación matemática puede ser gran conocedor de qué características tienen las actividades de modelización matemática y del papel que las matemáticas pueden jugar en contacto con otras disciplinas. Nuestra CdI ha quedado constituida por 19 personas cuya configuración se muestra en la Figura 1.

Al margen de los miembros de la CdI de tipo permanente y, dado que varios de ellos están involucrados en la enseñanza Primaria/Secundaria o en la formación del profesorado de estos niveles educativos, contaremos a lo largo de los distintos ciclos del proyecto con estudiantes en estas etapas educativas para implementar, analizar y mejorar las distintas versiones de las *c*-unidades.

Primer estudio exploratorio sobre las preconcepciones de la CdI sobre creatividad y PMC

El objetivo de este primer estudio exploratorio es conocer mejor las preconcepciones y formas de describir y expresarse que tienen los distintos miembros de la CdI cuando se les pregunta sobre qué es y cómo se puede caracterizar la creatividad, la creatividad matemática y la forma en que se puede promover a través del diseño adecuado de unidades o secuencias didácticas. Dado que en la CdI conviven diferentes perfiles, nos interesa empezar a conocer los puntos de encuentro y de divergencia que estos expresan sobre cómo la creatividad y, en particular, la creatividad matemática de desarrolla, se manifiesta, se promueve, etc. en sus distintos ámbitos profesionales.

Con relación a este objetivo, las investigaciones que se describen en Bolden, Harries & Newton (2010), Lev-Zamir & Leikin (2011, 2013), Leiken et al. (2013) y Sriraman (2009) resultan un punto de partida muy importante. Su principal objetivo se centra en indagar en las creencias y preconcepciones que distintitas comunidades: matemáticos, profesores y estudiantes, tienen sobre la creatividad en matemáticas y cómo estas pueden llegar a transformarse en limitaciones en la puesta en práctica en las aulas de cierto tipo de actividad creativa. Más concretamente, Leiken et al. (2013) trabajan en la validación del uso de un cuestionario como herramienta central en un estudio internacional sobre las preconcepciones de los profesores de matemáticas sobre qué es una persona creativa, un profesor creativo y un alumno creativo. Por su parte, Bolden et al. (2010) centra su estudio en preconcepciones de futuros maestros de Primaria en formación.

En una primera fase, con este objetivo, y siguiendo los trabajos mencionados, nuestro estudio se ha basado, en el análisis de los datos obtenidos a través de una encuesta elaborada a partir de indicadores que caracterizan lo que entendemos por creatividad y creatividad matemática. Esta encuesta combinó principalmente preguntas cerradas con afirmaciones frente a las cuales se solicitó a los miembros de la CdI que las valorasen en una escala Likert del 1 al 5 según si se estaba totalmente en desacuerdo (1) o totalmente de acuerdo (5), además de algunas preguntas abiertas[2]. En la segunda fase, los resultados de las encuestas se complementaron con entrevistas a los distintos miembros de la CdI (individualmente o en CdP cuando ha sido posible) con el objetivo de darles la oportunidad de ampliar sus respuestas, principalmente en relación con las cuestiones abiertas. Las entrevistas fueron realizadas por el equipo interno de investigadores de la UB siguiendo la estructura que ya incorporaba la encuesta aunque centrándose principalmente en las cuestiones abiertas, la Figura 2 muestra la estructura y algunas de las preguntas de dos de los tres bloques de la entrevista (se realizó un tercer bloque dedicado a la creatividad en su ámbito profesional que no entraremos a describir).

A. ¿Qué caracteriza la creatividad y el pensamiento creativo? ¿Qué elementos son importantes en un proceso creativo?

- ¿Podemos suponer que la creatividad es una calidad innata o, por el contrario, se puede educar/instruir/enseñar, etc.?

- ¿El pensamiento creativo se puede considerar una consecuencias de momentos puntuales de inspiración o, por el contrario, una consecuencia de un proceso de estudio largo y profunda de un problema?

- ¿Un proceso creativo es más un proceso individual o en comunidad e interacción con otras personas y disciplinas?

B. Promover la creatividad en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

- ¿Qué elementos (actitudes y motivaciones, diseño de tareas, estudio multidisciplinar, etc.) consideras que tienen más impacto en promover la creatividad matemática en la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina?

- ¿Qué tres características debe tener una actividad matemática que promueva la creatividad? ¿Podrías dar un ejemplo de tarea o actividad matemática con estas características? ¿Qué elementos o características esenciales incorpora tu propuesta?

Figura 2. Guión breve de las entrevistas de acuerdo con la encuesta previa

Resultados del estudio

A continuación, se presentan conjuntamente los resultados del cuestionario complementados por algunas respuestas obtenidas en las entrevistas. La encuesta ha sido completada por 17 personas (de las 19) que forman nuestra CdI. Después de haber completado dicho cuestionario, 14 de estas personas han sido entrevistadas individualmente, o en su CdP cuando nos ha sido posible. Esencialmente, hemos organizado las preguntas en dos categorías. Una primera referente a la caracterización de la creatividad y el PMC y centrándose en identificar qué elementos son importantes en un proceso creativo. Y una segunda categoría más focalizada en la promoción de la creatividad en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

A. ¿Qué caracteriza la creatividad y el pensamiento creativo? ¿Qué elementos son importantes en un proceso creativo?

Hay opiniones muy diversas sobre si la creatividad es una capacidad innata o no, pero podemos ver que mayoritariamente dentro de la CdI se considera que la creatividad es una cualidad que se puede desarrollar, educar, instruir, etc. (el 82% de la muestra indica un 4 (41%) o un 5 (41%) en una escala de Likert donde 1 es “muy en desacuerdo” y 5 es “completamente de acuerdo”).

Como elementos importantes que puedan caracterizar un proceso creativo de estudio o resolución de un problema o situación problemática podemos destacar que se describe la interacción como una fuente de creatividad, ya sea la interacción con otras personas así como el estudio multidisciplinar.

E1: La interacción, me da la sensación que, es un elemento clave de la creatividad, sea entre herramientas, entre personas o entre conocimientos.

E2: Posiblemente como más interacción tengas con otras personas, más fácil es que los detonadores [de la creatividad] se activen. (...) para mi es mucho más fácil que estas chispas, a las que te costaría llegar o no llegarías tú solo, el intercambio y la interacción con otra gente las hace surgir y te hace avanzar mucho más rápido, hace que estos detonadores estén en la superficie para saltar con estos nuevos inputs.

E3: El proceso creativo es un proceso individual. La interacción con otras personas es muy importante, aporta ideas, puntos de vista, requiere del proceso de explicar y comunicar. (...) pero es una parte complementaria ya que es individualmente que se decide y se marca el camino.

E4: La creatividad en matemáticas podría ser esto, poner en contacto campos diferentes, podría ser aplicar herramientas no estándares de un campo en otro campo.

E5: Una vez hablábamos de las actividades frontera, de manera que te sacan de tu zona de comodidad, donde no te hace falta recurrir a otras herramientas, cuando quizás tampoco te ayuda. En el momento en que sales de tu espacio de comodidad y las herramientas que tienes completamente asumidas no funcionan es cuando has de poner en juego otras cosas y posiblemente esto ayuda a despertar la creatividad.

B. Promover la creatividad en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

Con el objetivo de caracterizar una tarea matemática o extra-matemática que pueda fomentar y promover la creatividad, inicialmente se pregunta sobre las capacidades que se atribuyen a un estudiante creativo y a un profesor creativo o que promueva la creatividad.

En la encuesta podemos ver que para caracterizar a un estudiante creativo se da importancia a las competencias de razonamiento, de generar preguntas y de comunicar. Un 94% de las personas de la muestra identifican un estudiante creativo como aquel que es capaz de formular cuestiones e iniciar investigaciones, y que, además, sabe encontrar diferentes maneras de representar los conceptos o cómo llegar a la solución de un problema. Para promover la creatividad, un 88% de la CdI opina que el profesorado debe tener herramientas y recursos para estimular la creatividad en sus estudiantes y ha de saber valorar la creatividad en sus trabajos.

En cuanto a la necesidad de tener una base sólida de conocimientos y herramientas matemáticas, vemos que hay una gran diferencia entre si hablamos de un estudiante o de un profesor. A continuación algunos de los comentarios referidos a un estudiante afrontando una situación o problema de manera creativa en matemáticas:

> E6: No hacen falta conocimientos específicos. En algunas situaciones te pueden ayudar. Dependiendo de cómo se hayan adquirido los conocimientos, puede ser que no se puedan usar de forma creativa. A veces eres creativo porqué te faltan recursos y has de crearlos. La experiencia puede determinar el proceso.

> E7: La idea creativa te fuerza a trabajar los conocimientos para poderla llevar a cabo. Tengo una idea y me gustaría hacer esto, pero no sé suficiente, a partir de aquí ¿qué conocimientos necesito tener para poder avanzar? El orden no está establecido, a veces a partir de los conocimientos y del trabajo, viene el detonador que ayuda a que salga la idea creativa; a veces la idea creativa es la que crea la necesidad de construir unos conocimientos para poder llevarla a cabo.

En cambio, cuando hablamos concretamente sobre el profesorado:

> E8: La creatividad se manifiesta cuando ponemos en juego conocimientos y habilidades, por eso creo que sí que una base sólida de conocimientos específicos cataliza la creatividad.

> E9: Yo distinguiría entre ser un profesor creativo y ser un profesor que fomenta la creatividad, que no tiene porqué estar ligado. Probablemente ser creativo ayude a fomentar la creatividad pero no tiene porqué estar ligado.

> E10: [Delante de un ejemplo en el que un alumno propone una metodología diferente y el profesor responde "quizás sí que se podría hacer de esta manera"] El único profesor que es capaz de decir este "quizás sí" es el profesor que conoce muy bien la materia. El profesor inseguro, por falta de conocimientos del territorio que pisa, es un matador de creatividad. Puede ser un buen transmisor de conocimientos pero un matador de creatividad.

En la encuesta se pide a los participantes que expliquen tres características que consideren que ha de tener una actividad que promueva la creatividad y que pongan un ejemplo concreto de actividad, durante las entrevistas se da la oportunidad de extender más estas respuestas. En la Tabla 1 se resumen las características más destacadas en las propuestas de la CdI.

Como se puede ver en la tabla 1 hay varios aspectos referentes al proceso de resolución de la actividad. Por un lado, todos los participantes consideran que una actividad promueve la creatividad si admite diferentes formas de resolución, expresado en sus palabras: "que tenga más de una estrategia para llegar a la solución (si la tiene)", "que permita diferentes caminos de abordaje, que acepte procesos de resolución no convencionales" o "ellos se han de cuestionar diferentes maneras de resolverlo y han de estudiar la viabilidad de cada una de esas posibilidades". La existencia de diferentes caminos, se asocia también a "que haya variedad en el uso de herramientas y/o conocimientos" así como "que invite a usar diferentes tipos de representación de las ideas matemáticas (simbólica, gráfica, a través de objetos...)". Para la mayoría, también es clave que la solución no sea única sino que existan diferentes soluciones o "incluso se admitan aproximaciones", otras actividades proponen que los alumnos generen sus propias preguntas y, por lo tanto, cada trabajo parta de un mismo estímulo pero se enfoque de manera diferente, atendiendo a diferentes niveles de profundización e intereses.

Tabla 1. Resumen de las respuestas proporcionadas por 16 participantes de la CdI

Más de una vía de resolución		Más de una solución		Uso de diferentes representaciones y herramientas	
No explícito	Explícito	No explícito	Explícito	No explícito	Explícito
0	16	1	15	0	16
Comunicación		Cautivar a los alumnos		Enmarcar en un contexto / interdisciplinariedad	
No explícito	Explícito	No explícito	Explícito	No explícito	Explícito
9	7	5	11	3	13

Para algunos participantes, la comunicación es una de las características que se ha citado para la promoción de la creatividad: "que permita argumentar, discutir y confrontar opiniones". Sus propuestas incluyen momentos de intercambio y expresión: "lo explican con un mural, con una presentación de diapositivas, con un dibujo, con un texto..." o "charlas en grupo para exponer el trabajo que se está desarrollando".

Como muestra la tabla 1, la mayoría de las propuestas sitúan la actividad en un contexto que sea comprensible y accesible a los alumnos. En muchos de los casos se propone partir de una situación real, como por ejemplo medir la altura de un edificio o intentar entender un truco de magia.

En esta misma dirección, cuando se les pregunta sobre qué tipo de diseño de actividad matemática sería interesante trabajar con el objetivo de promover la creatividad, 9 de los 17 encuestados hacen referencia a trabajar en problemas en "contextos reales" y de "modelización matemática" y otros 4 aluden a diseñar actividades centradas en la "resolución de problemas abiertos que lleve a la constante formulación de preguntas", así como también a actividades que lleven a la "indagación" fuera y dentro de las matemáticas. Se abren así unas líneas de actuación y de diseño que son bastante propias por parte del equipo de investigación involucrado (Barquero, Bosch & Gascón, 2010; García et al. 2011).

Perspectivas de la investigación

En este trabajo nos hemos centrado en describir la primera fase de investigación en el ámbito del proyecto MC2. El estudio presentado se ha basado en la realización y análisis de encuestas y de las consiguientes entrevistas con nuestra CdI que nos permite tener una primera aproximación sobre, por un lado, las preconcepciones epistemológicas, pedagógicas y didácticas que los distintos miembros de la CdI, con distintos perfiles profesionales, tienen sobre la creatividad matemática, el PMC y las formas cómo promoverlos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Por otro lado, nos permite empezar a detectar temáticas y líneas generales de interés que comparten los distintos miembros de la CdI, como por ejemplo: diseños basados en "modelización matemática", en "planteo de problemas abiertos con múltiples trayectorias solución", en "situaciones de comunicación y de planteo de preguntas en contextos realistas", etc. que serán un punto de partida esencial para los próximos ciclos del proyecto y para el diseño de las futuras *c*-unidades.

Actualmente, la CdI está trabajando en el co-diseño de las dos primeras *c*-unidades. La CdI se ha organizado en dos subgrupos de trabajo mezclando distintos perfiles profesionales. Dentro de estos subgrupos se han asignado dos tipo de roles: el de diseñadores y el de revisores. Por su parte, los diseñadores de la *c*-unidad se encargarán de: (1) decidir la temática en la que desarrollarán la unidad y el nivel educativo, (2) pactar y explicitar los criterios o principios con los que se van a llevar a cabo el diseño y (c) desarrollar el diseño completo e integrarlo en la plataforma digital del *c*-book. De forma complementaria, los revisores se encargarán principalmente de analizar cómo y donde se han ido integrando las criterios de diseño y cómo han ido evolucionando a lo largo del desarrollo de la unidad. Actualmente se han definido dos temáticas: la primera *c*-unidad centrada en la "necesidad definir puntos mediante coordenadas" (1º ESO) y la segunda c-unidad sobre el "comportamiento viral de las redes sociales" (3º-4º ESO). Las próximas etapas del proyecto se centrarán en analizar cómo las preconcepciones sobre creatividad puestas de manifiesto en la primera fase del proyecto se han integrado en el diseño de las c-unidades y cómo los criterios base para llevar a cabo dichos diseños van evolucionando en estos primeros ciclos de diseño colaborativo.

Referencias

Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2010). Génesis y desarrollo de un problema didáctico: el papel de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las CCEE. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carillo & T.A. Sierra, *Investigación en Educación Matemática XIV*, pp. 235 – 244. Edicions de la Universitat de Lleida.

Bolden, D., Harries, T. & Newton, D. (2010). Pre-service primary teachers' conceptions of creativity in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 73*, 143–157.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y aprendizaje.* ICE Universitat de Barcelona: Editorial Horsori.

Csikszentmihalyi, M. (2000). *Implications of a systems perspective for the study of creativity. In R. J. Sternberg* (Ed.), Handbook of creativity (pp. 313–335). Cambridge: Cambridge University Press.

EC. (2006). Recommendation 2006/962/EC of the European Parliament and of the Council of 18 December 2006 on key competences for lifelong learning, Official Journal L 394 of 30.12.2006, 10–18, http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=OJ:L:2006:394:0010:0018:EN:PDF

Ervynck, G. (1991). Mathematical Creativity. In A. M. Thinking, & D. Tall (Eds.) *Advanced mathematical thinking* (pp. 42-53). Springer Netherlands.

Fischer, G. (2001). Communities of Interest: Learning through the Interaction of Multiple Knowledge Systems. In S. Bjornestad, R. Moe, A. Morch, A. Opdahl (Eds.) *Proceedings of the 24th IRIS Conference* (pp. 1-14). August 2001, Ulvik, Department of Information Science, Bergen, Norway.

Fischer, G. (2011). Social Creativity: Exploiting the Power of Cultures of Participation, *Proceedings of SKG2011. 7th International Conference on Semantics, Knowledge and Grids* (pp. 1-8). Beijing, China.

García, F.J. et al. (2011). Aprendizaje en ciencias y matemáticas basado en la investigación,para la formación del profesorado europeo: proyecto PRIMAS. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática*. *Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 321-319). Lleida.

Guzmán, M. de (1995). *Para pensar mejor. Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos.* Pirámide, Madrid.

Hadamard J. (1945). *An essay on the psychology of invention in the mathematical field*. Princeton, NJ: Princeton University Press

Haylock, D. W. (1987). A framework for assessing mathematical creativity in school children. *Educational Studies in Mathematics*, 18(1), 59-71.

Kaufman, J. C. & Beghetto, R. A. (2008). Exploring “mini-c:” Creativity across cultures. In R. L. DeHaan & K. M. Narayan (Eds.), *Education for Innovation in India, China and America*. The Netherlands: Sense Publishers

Leiken, R., Subotnik, R., Pitta-Pantazi, D., Singer, F.M., Pelczer, I. (2013). Teachers’ views on creativity in mathematics education: an international survey. *ZDM Mathematics Education* 45:309–324.

Lev-Zamir H. & Leikin R. (2011). Creative mathematics teaching in the eye of the beholder: Focusing on teachers' conceptions. *Research in Mathematics Education*, 13, 17-32.

Lev-Zamir, H.; Leikin, R. (2013) Saying versus doing: teachers’ conceptions of creativity in elementary mathematics teaching. *ZDM Mathematics Education*, 45, 295-308.

Liljedahl, P. (2013). Illumination: An Affective Experience? *The International Journal on Mathematics Education, 45*(2), 253-265.

Liljedahl, P. & Sriraman, B. (2006). Musing on mathematical creativity. *For the learning of mathematics*, 26(1), 20-23.

Mann, E. (2006). Creativity: The essence of mathematics. *Journal for the Education of the Gifted*, 30, 236–230.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM Mathematics Education*, 3, 75-80.

Sriraman, B. (2009). The characteristics of mathematical creativity. *ZDM Mathematics Education*, 41, 13-27.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: learning, meaning, and identity.* Cambridge University Press.

---

[1] Este trabajo se ha realizado al amparo del proyecto MCSquared (http://mc2-project.eu) financiado por la Comisión Europea bajo en programa FP7 (Project no. 610467), Strategic Objective ICT-2013.8.1 “Technologies and scientific foundations in the field of creativity” y en el marco del proyecto I+D+i: EDU2012-32644 del Ministerio de Ciencia e Innovación del Gobierno de España.

[2] La versión completa del cuestionario puede solicitarse a la primera autora del trabajo (Autora 1). Esta primera fase ha servido para contrastar esta herramienta y mejorarla. Actualmente se esta extendiendo su estudio a una muestra más amplia de participantes.

ALTERNATIVA METODOLÓGICA PARA EL DESARROLLO INTEGRAL DEL SENTIDO NUMÉRICO EN NIÑOS Y NIÑAS DE PRIMER CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Alternative methodology for integral development of number sense in children of first stage of Primary Education

Rafael Bracho-López, Natividad Adamuz-Povedano, Mª del Carmen Gallego-Espejo, Noelia Jiménez-Fanjul

Universidad de Córdoba

Resumen

Sin duda el desarrollo del sentido numérico en general y particularmente el aprendizaje de las operaciones aritméticas básicas constituyen un pilar fundamental para el conocimiento matemático en los primeros años de aprendizaje. Por otro lado, la idoneidad de los algoritmos tradicionales para el desarrollo de la competencia matemática en la actualidad es algo que se viene cuestionando en las últimas décadas. En el presente trabajo nos centramos en analizar el desarrollo de las competencias numéricas en un grupo de alumnos y alumnas al finalizar el primer ciclo de Educación Primaria, tras haber utilizado como alternativa metodológica para el aprendizaje del cálculo los denominados algoritmos abiertos basados en números (ABN).

Palabras clave: *sentido numérico, algoritmos tradicionales, algoritmos ABN, competencia matemática, matemática formal e informal.*

Abstract

Certainly the development of number sense in general and particularly the learning of basic arithmetic operations are a fundamental pillar for the mathematical knowledge in early learning years. On the other hand, nowadays, the suitability of traditional algorithms for the development of mathematical competence is something very questioned in the last decades. In this paper we focus on analyzing the development of numerical skills in a students group after the first cycle of primary education, having used as a methodological alternative for calculation learning the algorithms called open algorithms based on numbers (ABN).

Keywords: *Number Sense, traditional algorithms, ABN algorithms, mathematical literacy, mathematics formal and informal.*

INTRODUCCIÓN

En el caso de las matemáticas escolares y más concretamente en lo relativo al dominio del cálculo en los primeros años de aprendizaje matemático, son muchas las voces que se alzan pidiendo cambios metodológicos. Hace más de cuarenta años Ablewhite (1971) ya advertía de los problemas que se derivaban del aprendizaje de las operaciones básicas. Pocos años más tarde la aparición de las calculadoras hizo que comenzara a cuestionarse la enseñanza de los algoritmos tradicionales y su papel en la escuela (Barba y Calvo, 2011; Castro, Rico y Castro, 1987), y desde entonces han sido muy numerosos los autores que han escrito sobre el poco sentido pedagógico que los algoritmos tradicionales tienen en la actualidad (Alcalá, 1986; Baroody, 1988; Castro, Rico y Castro, 1987; Chamorro, 2005; Dickson, Brown y Gibson, 1991; Ferrero, 1984; Gómez-Alfonso, 1999; Jaulin-Mannoni, 1980; Kamii, 1986; Martínez, 2011; Maza, 1989; Mialaret, 1977; N.C.T.M., 2000; Pereda, 1987; Resnick y Ford, 1990; Vergnaud, 1991).

Bracho-López, R., Adamuz-Povedano, N., Gallego-Espejo, M. C., Jiménez-Fanjul, N. (2014). Alternativa metodológica para el desarrollo integral del sentido numérico en niños y niñas de primer ciclo de educación primaria. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 167-176). Salamanca: SEIEM.

Ante esta realidad, tanto los referentes universales sobre educación matemática como los marcos normativos actuales de los países desarrollados, inciden en la importancia de fomentar en los escolares el desarrollo del denominado “sentido numérico”, entendido este como un concepto amplio que hace referencia al desarrollo de capacidades tan importantes como el cálculo mental flexible, la estimación numérica y el razonamiento cuantitativo, entre otras (Greeno, 1991), todo ello con un enfoque orientado hacia el desarrollo de la competencia matemática (García et al., 2011).

Sin embargo, a pesar de que todos los referentes coinciden en que es necesario un cambio metodológico en el abordaje del cálculo en la Educación Primaria, en la práctica totalidad de las escuelas, incluso en muchas de las que se consideran innovadoras en otros aspectos, todavía se sigue enseñando a calcular por medio de los algoritmos tradicionales (Martínez, 2001; Martínez, 2008).

¿Pero cómo podría hoy día un maestro o maestra o, mejor un colegio, lanzarse a la aventura de afrontar metodológicamente el aprendizaje de las operaciones aritméticas básicas de una manera distinta a la tradicional y adecuada a los tiempos que corren? Buenos ejemplos a seguir tomados de nuestro entorno más cercano pueden ser las experiencias basadas en “aritmética mental” auspiciadas por David Barba y Cecilia Calvo en Cataluña (Barba y Calvo, 2011); el caso del CEIP Aguamansa de La Orotava (Tenerife), basado en el uso didáctico de la calculadora y el fomento del cálculo mental, exportado a otros centros canarios y peninsulares (Iglesias y Martín, 2011), o la metodología basada en algoritmos abiertos basados en números (en adelante ABN), ideada por Jaime Martínez Montero, puesta en marcha inicialmente en varios centros de la provincia de Cádiz y actualmente en prometedora fase de expansión dentro y fuera de Andalucía e incluso en Sudamérica y Europa (Martínez, 2011). Todas estas experiencias comparten características comunes, como que se basan en un conocimiento profundo del sistema de numeración decimal (en adelante SND), se trabaja con números en todo su sentido y no con cifras aisladas, se utilizan constantemente las propiedades de las operaciones, los cálculos se realizan de forma personalizada y toman su sentido a partir de situaciones problemáticas contextualizadas.

En el presente trabajo nos centraremos en analizar el impacto escolar de una de estas metodologías: la que se desarrolla en torno a los algoritmos ABN, basada en un aprendizaje profundo del sistema de numeración decimal (en adelante SND), en el manejo de las propiedades de los números y de las operaciones, y la utilización de unos procedimientos de cálculo que se caracterizan por ser abiertos (A) y porque están basados en números (BN), con todo su significado (Martínez, 2011). Nuestro objetivo es analizar el desarrollo del sentido numérico en general y de manera más específica en los aspectos relacionados con la matemática formal e informal, tras la utilización de la metodología basada en los algoritmos ABN, contrastándolo con el que se consigue con la inspirada en el uso de los algoritmos tradicionales. A partir de dicho objetivo general, nuestra hipótesis de trabajo es que la metodología basada en la utilización de los algoritmos ABN mejora de forma significativa el desarrollo del sentido numérico y de la competencia matemática en los primeros años del aprendizaje matemático.

METODOLOGÍA

Nuestra investigación se centra en situaciones concretas, particularizando los resultados y ofreciendo una perspectiva contextualizada a través de técnicas descriptivas e inductivas. Desde un enfoque empírico analítico, se trata de una investigación cuantitativa con un diseño cuasi-experimental donde se ha realizado un estudio descriptivo e inferencial con dos grupos no equivalentes.

La muestra está formada por sendos grupos de estudiantes de Educación Primaria de dos colegios de la provincia de Córdoba. Ambos centros tienen características parecidas y pertenecen a entornos socioeconómicos similares. Esta muestra ha sido configurada de manera no probabilística y no aleatoria.

El alumnado de uno de los centros siguió durante el primer ciclo de Educación Primaria la metodología basada en los algoritmos ABN, mientras que el alumnado del otro colegio utilizó los algoritmos de cálculo tradicionales, por lo que el primer grupo ha sido considerado grupo experimental y el segundo grupo de control. Hemos de comentar que cada grupo ha estado formado por 26 alumnos, pero en el grupo experimental se encontraron seis niños con necesidades educativas específicas, mientras que en el grupo de control no había ninguno, por lo que se optó por no incluir al alumnado de estas características en el estudio comparativo general, si bien sí se estudiaron esos casos por separado aunque su análisis no sea objeto de este trabajo.

La interpretación de los datos se ha basado en la realización del test de competencia matemática básica, desarrollado por Ginsburg y Baroody y adaptado al medio español por Núñez y Lozano (2007). Se trata de un test estandarizado específico de matemáticas y validado a nivel internacional, el cual se aplica de manera individualizada y cuyo objetivo es evaluar el desarrollo del pensamiento matemático temprano y detectar las dificultades de aprendizaje del alumnado, facilitando el diagnóstico y el tratamiento de las mismas.

La variable dependiente que se ha analizado ha sido el sentido numérico del alumnado, y para cuantificar esta variable nos hemos ayudado de una serie de variables específicas, como son el índice de competencia matemática (en adelante ICM), la puntuación directa (PD), el percentil, la edad y el curso equivalentes, variable ítem i (i € [1,72]), además de los conocimientos matemáticos formales e informales de cada discente, que se desglosan en los aspectos que se describen más tarde en la Tabla 3. Como variable independiente tenemos la variable grupo que clasifica al alumnado del estudio en grupo de control y grupo experimental.

ANALISIS DE RESULTADOS

Al tratarse de una tarea de cierta complejidad, la aplicación de los tests ha sido realizada por evaluadores entrenados para tal fin, ya que entre otras cosas, para cada alumno había que contar con las condiciones adecuadas, seleccionar los ítems de partida en función de su edad exacta, así como los que constituyen los denominados “suelo” y “techo”, que determinan en cada caso el intervalo del que se extraerán las conclusiones acerca de la competencia matemática en general y de los aspectos concretos de la matemática formal e informal de cada niño en particular. Estos datos personales han sido de gran valía para las maestras de cada grupo; sin embargo, no serán tenidos en cuenta como tales en el presente estudio, sino que nos centraremos en los resultados grupales para extraer nuestras conclusiones.

Índice de Competencia Matemática

En la Tabla 1 se ofrecen los rangos, las medias y las desviaciones típicas de las puntuaciones estándar, que denominamos “Índices de Competencia Matemática”, ya que dicho parámetro ofrece una información bastante fiel de la competencia matemática de cada estudiante dependiendo de su edad en comparación con su grupo de referencia (Ginsburg y Baroody, 2007).

Tabla 1. Estadísticos descriptivos del ICM en ambos centros

	N	Mínimo	Máximo	Media	Des. Típ.
ICM en el Grupo Experimental	20	75	137	111,25	17,559
ICM en el Grupo de Control	26	64	116	96,08	16,287

Como puede observarse a primera vista, la media del ICM del grupo experimental es bastante superior. Para analizar si esta diferencia puede considerarse significativa se aplicó la prueba de

Kolmogorov-Smirnov para los ICM de los dos colegios obteniéndose significaciones mayores que 0,05 en ambos casos, por lo que podemos afirmar que esta variable se ajusta a una distribución normal y por tanto tiene sentido aplicar la prueba paramétrica de T de Student. La hipótesis nula, H_0, sería que no tenemos evidencias de que las diferencias entra las medias del ICM sean significativas, mientras que la H_1 sería que habría evidencias de que sí lo son.

La significación obtenida para la prueba de Levene para igualdad de varianzas fue de 0,530, es decir, mayor que 0,05, y por tanto podemos asumir que las varianzas son iguales. El resultado de la prueba T de Student (0,004) es menor que la significación que asumimos para el estudio (0,05), por lo que aceptamos la hipótesis alternativa (H_1), es decir, tenemos evidencias de que hay diferencias significativas entre las medias del ICM de ambos centros.

Por otro lado, en la Tabla 1 también puede observarse una dispersión considerable, lo que es indicativo de una gran diversidad entre el alumnado de ambos grupos a pesar de haber excluido al alumnado con necesidades educativas especiales.

Si nos centramos en la interpretación del ICM por niveles, obtenemos los siguientes resultados:

Tabla 2. Datos del ICM por niveles

	Índice de Competencia Matemática			
	Grupo Experimental		Grupo de Control	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
Muy superior (> 130)	2	10%	0	0%
Superior ([121, 130])	7	35%	0	0%
Por encima ([111, 120))	1	5%	6	23,1%
Medio([90, 110))	8	40%	12	46,2%
Por debajo ([81, 90))	1	5%	3	11,5%
Pobre ([70, 80))	1	5%	2	7,7%
Muy pobre (< 70)	0	0%	3	11,5%
Total	20	100,0	26	100,0

Observamos que los mayores porcentajes de alumnos y alumnas en uno y otro caso (40 % y 46,2 % respectivamente) obtienen un ICM medio, que podemos considerar adecuado a su edad. Sin embargo, en el caso del grupo de control, el 30,7 % tiene valores inferiores y el 23,1 % superiores, mientras que en el experimental, tan solo encontramos a 2 alumnos con niveles inferiores a los considerados medios y la mitad de los chicos del grupo obtienen niveles superiores a estos.

Matemática formal e informal

Más allá de los aspectos generales analizados hasta ahora, resultaría interesante ofrecer información acerca del nivel de desarrollo específico en lo referente a los aspectos fundamentales de la matemática formal e informal. En la Tabla 3 se presentan los aspectos concretos que hemos estudiado dentro de estos dos grandes apartados, con indicación de los ítems dedicados a cada uno de ellos:

Tabla 3. Aspectos analizados en el estudio realizado

Matemática informal		Matemática formal	
Numeración	23 ítems	Convencionalismo	8 ítems
Comparación	6 ítems	Hechos numéricos	9 ítems

Cálculo informal	8 ítems	Cálculo formal	9 ítems
Conceptos informales	4 ítems	Conceptos formales	5 ítems
Total de ítems	72 ítems		

Estas habilidades se refieren (Ginsburg y Baroody, 2007):

- Numeración: Supone el dominio de la secuencia numérica verbal y su aplicación a la determinación de la cardinalidad de conjuntos.
- Comparación de cantidades: El conocimiento del “orden” va ligado a la comprensión intuitiva de hacia donde crecen los números o estos se hacen menores. Con un desarrollo adecuado los niños serán capaces de establecer distancias relativas entre cantidades.
- Cálculo informal: Se refiere al manejo de los números en situaciones sencillas que implican sumar y restar. Se parte del uso de estrategias de conteo básicas, para en la fase final afrontar la resolución de cálculos de forma mental, es decir, sin el uso de algoritmos.
- Conceptos informales: Se refieren a los conocimientos previos, naturales e intuitivos que los niños poseen sobre el conteo, la numeración, incluso ciertas estrategias de cálculo, etc.
- Convencionalismos: Básicamente se centran en la valoración de la capacidad de lecto-escritura de cantidades.
- Hechos numéricos: Implican el conocimiento del resultado de operaciones aritméticas sencillas (suma, resta y multiplicación) sin necesidad de realizar el cálculo, es decir, el resultado debe conocerse de manera inmediata.
- Cálculo formal: Supone la realización de cuentas de suma y resta de dificultad creciente, incluyendo la consideración de “llevadas” y los “ceros intermedios”.
- Conceptos formales: Se refieren a los conocimientos matemáticos introducidos en el proceso de enseñanza y aprendizaje en el aula. Las actividades que se plantean son del tipo: ¿Qué expresiones numéricas son correctas para un problema determinado? o ¿cuál es el menor número de una cifra o el mayor de dos cifras?, etc.

Pues bien, analizando los ítems correspondientes a cada uno de estos aspectos se observan diferencias considerables entre los dos grupos de escolares, pero también habría que analizar si pueden considerarse o no significativas estas diferencias. En este caso, al aplicarle la prueba de Kolmogorov-Smirnov a las variables de matemática informal y a las de matemática formal obtuvimos que ninguna de las primeras se ajustaban a la distribución normal, mientras que entre las de matemática formal, si se ajustaban los hechos numéricos y el cálculo formal y no lo hacían los convencionalismos y los conceptos formales. Por ello, se optó por aplicar la prueba paramétrica T de Student en los dos casos que había ajuste, y en el resto de variables se aplicó la no paramétrica U de Mann-Whitney.

Se observaron evidencias de la existencia de diferencias significativas entre las medias de las variables numeración (p=0,028), cálculo informal (p=0,004), convencionalismos (p=0,028) y conceptos formales (p□ 0), pero no en las otras cuatro variables. Sin duda resultaría provechoso el análisis de los datos de todas las variables, ya que pensamos que de ellos se extraen conclusiones interesantes; sin embargo, nos centraremos en las que se han detectado diferencias significativas y, también analizaremos los resultados sobre cálculo formal, dado su significado en el análisis comparativo entre las metodologías tradicional y ABN.

Como comentamos, los ítems sobre numeración se centran en el dominio del conteo y en el conocimiento informal del SND. Los resultados sobre esta variable se recogen en la Tabla 4. En ella puede observarse que el 60% del alumnado del grupo experimental responde correctamente a los 23 ítems mientras que solo el 11,5% del alumnado del grupo de control lo consigue. En este colegio el mayor porcentaje se encuentra en 73,1% correspondiente a responder correctamente 22 ítems. Las diferencias se dan concretamente en los ítems 37 y 45, que se refieren al dominio regresivo de la serie numérica en las primeras decenas y a las transiciones entre decenas a partir de la centena, respectivamente.

Tabla 4. Ítems respondidos correctamente sobre numeración

Numeración (23 ítems)			
	Ítems respondidos correctamente	Nº alumnos/as	Porcentaje
Grupo Experimental	21	3	15
	22	5	25
	23	12	60
	Total	20	100
Grupo de control	19	1	3,8
	21	3	11,5
	22	19	73,1
	23	3	11,5
	Total	26	100

Pensamos que el aprendizaje significativo del SND, al que se le da una particular importancia en el caso de la metodología ABN, abordándose sistemáticamente de la mano de unos materiales manipulativos concretos, junto con el fomento del cálculo mental, son elementos que refuerzan estos aspectos del conocimiento matemático provocando estas diferencias.

En cuanto al cálculo informal, el 40% del alumnado del grupo experimental responde correctamente a todos los ítems relacionados con el cálculo informal, mientras que tan solo un estudiante del grupo de control consigue hacerlo. En este colegio el mayor porcentaje (53,8%) corresponde al de los estudiantes que responden correctamente 5 ítems.

Tabla 5. Ítems respondidos correctamente sobre cálculo informal

Cálculo informal (8 ítems)			
	Ítems respondidos correctamente	Nº alumnos/as	Porcentaje
Grupo Experimental	5	5	25
	6	4	20
	7	3	15
	8	8	40
	Total	20	100
Grupo de control	4	1	3,8
	5	14	53,8
	6	6	23,1
	7	4	15,4
	8	1	3,8
	Total	26	100

El buen conocimiento del SND y de las propiedades de los números y de las operaciones, también repercute sobre las habilidades formales a la hora de leer, escribir y representar los números, así como en la comprensión de los conceptos numéricos que se introducen en el aula en los primeros años de aprendizaje matemático. Así, en el caso de los 8 ítems dedicados a las habilidades en lectoescritura y representaciones numéricas, el 90 % del alumnado del grupo experimental responde correctamente, mientras que este porcentaje se reduce al 61,5 % en el caso del grupo de control.

Tabla 6. Ítems respondidos correctamente sobre convencionalismos

	Convencionalismo (8 ítems)		
	Ítems respondidos correctamente	Nº alumnos/as	Porcentaje
Grupo Experimental	7	2	10
	8	18	90
	Total	20	100
Grupo de control	5	1	3,8
	6	1	3,8
	7	8	30,8
	8	16	61,5
	Total	26	100

Los ítems relacionados con conceptos formales se refieren a la representación escrita, los conceptos de decena, centena y millar y a la propiedad de conmutatividad, cuestiones muy relacionadas también con el conocimiento profundo del SND y sus propiedades.

De las 5 preguntas que evalúan estos aspectos, el 45% del alumnado del grupo experimental responde correctamente a 4 o más en comparación con el 7,7% de estudiantes del grupo de control que lo consigue. Además, el 46,2% de este último colegio solo responde a una de estas preguntas, que son de las que más dificultad entrañan del test.

Tabla 7. Ítems respondidos correctamente sobre conceptos formales

	Conceptos formales (5 ítems)		
	Ítems respondidos correctamente	Nº alumnos/as	Porcentaje
Grupo Experimental	1	1	5
	2	7	35
	3	3	15
	4	8	40
	5	1	5
	Total	20	100
Grupo de control	1	12	46,2
	2	9	34,6
	3	3	11,5
	4	2	7,7
	Total	26	100

Aunque en conjunto no se hayan observado diferencias significativas entre los grupos en las preguntas relacionadas con cálculo formal, analicemos los datos relativos a este aspecto, ya que pensamos que se podrían observar cuestiones de interés.

Tabla 8. Ítems respondidos correctamente sobre cálculo formal

	Cálculo formal (9 ítems)		
	Ítems respondidos correctamente	Nº alumnos/as	Porcentaje
Grupo Experimental	1	1	5
	2	1	5
	4	2	10
	5	1	5
	6	3	15
	7	2	10
	8	4	20
	9	6	30
	Total	20	100
Grupo de control	2	5	19,2
	3	1	3,8
	4	3	11,5
	5	2	7,7
	6	4	15,4
	7	4	15,4
	8	4	15,4
	9	3	11,5
	Total	26	100

El 30% del alumnado del grupo experimental responde correctamente a todos los ítems que evalúan esta variable, mientras que este porcentaje se reduce a un 11,5% en el caso del alumnado del grupo de control. En este colegio el mayor porcentaje de alumnos (19,2%) tan solo responde correctamente a dos ítems de este apartado.

Por otro lado, en las preguntas que se corresponden con meros cálculos algorítmicos sencillos no se aprecian grandes diferencias, pero las diferencias de rendimiento son más evidentes en las sumas y restas con llevada y en los ítems 54, 59, 62 y 63 que se corresponden con situaciones problemáticas que conllevan cálculos mentales. Ante dichas situaciones se aprecia que los estudiantes que han trabajado el método tradicional se encuentran con dificultades al intentar representar mentalmente las operaciones como una cuenta de lápiz y papel y resolverlo de igual manera, por lo que los resultados que obtenían además de ser más lentos fueron, en la mayoría de los casos, erróneos. En cambio, el alumnado que ha trabajado el cálculo ABN opera directamente de izquierda a derecha haciendo valer su destreza obtenida con la utilización de material manipulativo además de la realización de las operaciones con un sentido numérico adecuadamente desarrollado.

CONCLUSIONES

En términos generales y a la vista de los resultados obtenidos se puede determinar que la competencia matemática desarrollada por el grupo de alumnos y alumnas del grupo experimental (grupo que han seguido la metodología basada en los algoritmos ABN) es superior a la desarrollada por el grupo de control (grupo que ha seguido la metodología basada en los algoritmos tradicionales). En este sentido creemos que nuestra hipótesis de trabajo, a saber: *la metodología basada en la utilización de los algoritmos ABN mejora de forma significativa el desarrollo del sentido numérico y de la competencia matemática en los primeros años de aprendizaje matemático,* se ha visto cumplida.

Estas diferencias se observan en todos los aspectos de la matemática formal e informal (numeración, comparación, convencionalismo, hechos numéricos y conceptualización y cálculo, tanto formal como informal), si bien solo se pueden considerar estadísticamente significativas en numeración y cálculo, en el caso de la matemática informal, y en convencionalismos y conceptualización, en el caso de la matemática formal. Ello demuestra que la metodología objeto de estudio, no solo mejora los aspectos formales del conocimiento matemático, sino que de manera colateral refuerza los no formales de manera considerable.

Centrándonos en el bloque de cálculo, tanto formal como informal, unos contenidos que se han trabajado de forma más mecánica en el caso del grupo de control, frente a la metodología basada en la comprensión del sistema de numeración decimal y en las propiedades de los números y de las operaciones, propia de los algoritmos ABN, los resultados del grupo experimental han sido notablemente superiores en general, y de manera particular en lo que respecta al cálculo mental y a los cálculos asociados a situaciones problemáticas concretas, hecho que apoya los resultados obtenidos en su día por el propio Martínez (2011), creador de los algoritmos ABN, cuando concluía que ni siquiera el adiestramiento mecánico y repetitivo puede superar la velocidad y la efectividad que se alcanzan al realizar las operaciones con sentido y de manera reflexiva. Especial significado por su relevancia como eje vertebrador del conocimiento matemático, tienen los resultados relativos a las destrezas en la resolución de problemas, donde se pone de manifiesto la importancia de abordar los cálculos de manera comprensiva en el contexto de la situación problemática, ya que si se utilizan técnicas sistemáticas alejadas de la realidad del problema se corre el riesgo de perderse en el proceso.

En resumen, pensamos que de los resultados obtenidos en la investigación se desprende la importancia de encontrar hoy día alternativas metodológicas que aborden el aprendizaje del sistema de numeración decimal y de las operaciones aritméticas básicas de manera significativa y comprensible, frente a las metodologías basadas en los algoritmos tradicionales, cuyos mecanismos son sin duda incomprensibles para el alumnado en toda la enseñanza primaria y especialmente en los primeros años de aprendizaje, además de carecer de mucho sentido, puesto que su aplicación actual fuera del entorno escolar es muy escasa, por no decir prácticamente nula. Particularmente y con independencia de que puedan existir otras metodologías idóneas, la basada en la utilización de los denominados algoritmos ABN se muestra como una alternativa metodológica que responde a los objetivos actuales en lo relativo al desarrollo del sentido numérico y a la orientación de este hacia el desarrollo de la competencia matemática.

Para terminar, comentamos que, relacionadas con el estudio realizado, se nos plantean las futuras líneas de trabajo siguientes:

- Estudiar los aspectos motivacionales del alumnado y del profesorado durante el proceso de implementación en el aula de la metodología ABN, algo que puede resultar determinante en los primeros años de aprendizaje matemático.
- Analizar el impacto de la utilización del método ABN en la formación del profesorado, tanto permanente como inicial.
- Analizar el impacto escolar de la metodología basada en los algoritmos ABN en niños y niñas con necesidades educativas especiales.
- Analizar otras metodologías que poseen características similares a la basada en los algoritmos ABN.

Referencias

Ablewhite, R. C. (1971). *Las matemáticas y los menos dotados*. Madrid: Ediciones Morata.

Alcalá, M. (1986). *Otra matemática, otra escuela*. Granada: Escuela Popular.

Barba, D. y Calvo, C. (2011). Sentido numérico, aritmética mental y algoritmos. En J. E. García y J.L. Álvarez (Eds.), *Elementos y razonamientos en la competencia matemática* (pp. 47- 78). Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Baroody, A. J. (1988). *El pensamiento matemático de los niños*. Madrid: MEC-Visor.

Castro, E., Rico, L., y Castro, E. (1987). *Números y operaciones* (Vol. 2). Madrid: Síntesis.

Chamorro, M. C. (coord.) (2005). *Didáctica de las matemáticas*. Madrid: Prentice Hall.

Dickson, L., Brown, M., y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: MEC-Labor.

Ferrero, L. (1984). *Operaciones con números naturales*. Madrid. Papeles de Acción Educativa.

García, T.; Bracho, R.; Maz, A.; Lucena, M.; Hidalgo, M.D.; Adrián, C., y Jiménez, N. (2011). Una comunidad de investigación orientada al aprovechamiento de recursos didácticos para el desarrollo del sentido numérico en niños y niñas de primer ciclo de Educación Primaria. En J.L. Lupiáñez, M.C. Cañadas, M. Palarea y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática* (pp. 113-121). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Ginsburg, H., y Baroody, A. J. (2007). *Tema-3: test de competencia matemática básica* (M. C. Núñez del Río y I. Lozano Guerra, Trans.). Madrid: TEA Ediciones.

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for research in mathematics education, 22*(13), 170-218.

Gómez-Alfonso, B. (1999). El futuro del cálculo. *Uno*, 22, 20-27.

Iglesias, J. M. y Martín A.R. (2011). Algorismes personals per al desenvolupament del càlcul mental: una experiència real. *Perspectiva escolar*, 355, 46-53.

Jaulin-Mannoni, F. (1980). *Las cuatro operaciones básicas de la matemática*. Madrid: Pablo del Río.

Kamii, C. K. (1986). *El niño reinventa la aritmética*. Madrid: Visor.

Martínez, J. (2001). Los efectos no deseados (y devastadores) de los métodos tradicionales de aprendizaje de la numeración y de los cuatro algoritmos de las operaciones básicas. *Epsilon,* 49, 13-26.

Martínez, J. (2008). *Competencias básicas en matemáticas. Una nueva práctica*. Madrid: Wolters Kluwer.

Martínez, J. (2011). El método de cálculo abierto basado en números (ABN) como alternativa de futuro respecto a los métodos tradicionales cerrados basados en cifras (CBC). *Bordón. Revista de pedagogía, 63*(4), 95-110.

Maza, C. (1989). *Sumar y restar*. Madrid: Visor.

Mialaret, G. (1977). *Las matemáticas. Cómo se aprenden. Cómo se enseñan*. Madrid: Pablo del Río.

N. C. T. M. (2000). *Principios y estándares para la educación matemáticas*. Granada: SAEM Thales.

Pereda, L. (1987). *Didáctica de las cuatro operaciones*. Bilbao: D. De Brouwer.

Resnick, L. B., y Ford, W. W. (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Madrid: MEC. Paidos.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad*. México DF: Trillas.

COMPRENSIÓN DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL DE UNA ALUMNA CON SÍNDROME DE DOWN

Understanding of the decimal numeral system of a student with Down syndrome

Alicia Bruno, Aurelia Noda

Universidad de La Laguna

Resumen

Se presenta un caso de una alumna con síndrome de Down sobre la comprensión del sistema de numeración decimal. Se utiliza un marco que consta de cinco niveles de pensamiento, organizados jerárquicamente según el tamaño de los números y el razonamiento usado. En cada uno de los niveles se abordan cuatro constructos: recuento, agrupación, partición y relaciones numéricas. Los resultados muestran que la alumna se sitúa en el nivel 3 de comprensión de tareas, lo que corresponde a números de dos dígitos, a pesar de que puede utilizar números mayores. En muchas tareas demuestra un dominio no solo algorítmico y procedimental de los números, sino que hace explícito su comprensión de la decena y la centena.

Palabras clave: *síndrome de Down, sistema de numeración decimal, contar agrupar, particionar, relaciones numéricas.*

Abstract

A case of a student with Down syndrome about understanding the decimal system is presented. It is used a framework including five levels of reasoning organized hierarchically according to the size of the numbers and the thinking skills used. In each level it was addressed four constructs: counting, grouping, partitioning and number relationships. Results show the student is at third level of tasks understanding, which corresponds to three-digit numbers, although she can use greater numbers. In several tasks she demonstrates a command of numbers not only algorithms and learning by rotes but she made explicit their understanding of tens and hundreds.

Keywords: *Down syndrome, decimal numeral system, counting, grouping, partitioning and numerical relationships.*

INTRODUCCIÓN

Un adecuado uso de los números ayuda a las personas con síndrome de Down (SD, a partir de ahora) a resolver situaciones cotidianas, y por lo tanto, a tener mayor autonomía social. Comprender los principios que estructuran el sistema de numeración decimal permite usar los números con flexibilidad y establecer relaciones entre las cantidades o las medidas. Es por ello que adquirir dicha comprensión constituye uno de los objetivos esenciales que se aspira a desarrollar en las personas con SD.

Las investigaciones sobre cómo las personas sin discapacidad construyen las ideas asociadas al sistema de numeración decimal son numerosas. Algunas de ellas indican la existencia de dificultades en el uso flexible de los números de varios dígitos y en el aprendizaje del valor posicional (Baroody, 1990; Fuson, 1990; Kamii, 1986). Sin embargo, son escasas las investigaciones que se ocupan de la comprensión del sistema de numeración (Gaunt, Moni y Jobling, 2012).

En trabajos previos con alumnado con SD en los que se analizó dificultades y errores en la adición, sustracción y resolución de problemas (Noda, Bruno, González, Moreno y Sanabria, 2011), observamos una escasa comprensión del valor posicional de las cifras, lo que dificulta avanzar el conocimiento numérico. Por ello planteamos profundizar en la comprensión de las ideas básicas que

Bruno, A., Noda, A. (2014). Comprensión del sistema de numeración decimal de una alumna con síndrome de Down. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 177-186). Salamanca: SEIEM.

subyacen al sistema de numeración decimal por parte de esta población. El trabajo que presentamos evalúa el conocimiento sobre el sistema de numeración decimal de una persona con SD que permite establecer sus puntos débiles y fuertes, con vistas a elaborar secuencias de enseñanza adecuadas a sus características cognitivas y conseguir mejoras en el aprendizaje numérico.

APRENDIZAJE Y SÍNDROME DE DOWN

Las personas con SD tienen dificultades de aprendizaje debido a las alteraciones que presentan en la estructura y función del cerebro, consecuencia de su trisomía. Las capacidades cognitivas no son las mismas en todos los individuos con SD, ya que las alteraciones cerebrales son diferentes de una persona a otra, y además influye notablemente el ambiente educativo y familiar en el que crecen. Sin embargo, tienen deficiencias comunes en rasgos cognitivos que afecta al aprendizaje, como la atención y percepción de estímulos, la memoria (a corto y largo plazo) y el lenguaje y la comunicación (Flórez, 2001a).

Respecto a la percepción de estímulos, los estudios demuestran que las personas con SD tienen mejor rendimiento en el procesamiento visual que en el procesamiento auditivo (Pueschel y Sustrova, 1997). Los déficits de atención los manifiestan por la inconstancia al realizar tareas, la inhibición o la retención de las respuestas, una tendencia a la distracción y a la hiperactividad. Por otro lado, la atención se encuentra estrechamente relacionada con la memoria a corto plazo o memoria de trabajo. Las personas con SD, tienen dificultad para retener y almacenar brevemente la información y para responder de forma inmediata con una operación mental o motriz. Además no suelen usar estrategias que faciliten la retención (López Melero, 1999). Esta reducción de la memoria a corto plazo es más acentuada cuando la información se presenta de forma verbal o auditiva que cuando se presenta de forma visual (Chapman y Hesketh, 2000).

Por otra parte, para transferir la información de la memoria a corto plazo a la memoria a largo plazo, es preciso que ocurra un proceso de consolidación, que en las personas con SD se encuentra afectado, debido principalmente a dificultades relacionadas con la falta de atención o motivación, a carencias intrínsecas en las conexiones interneuronales y a deficiencias en ciertos núcleos y áreas del cerebro. Estas dificultades en los procesos de consolidación se manifiestan en la inestabilidad de los conocimientos que presentan las personas con SD, de manera que una determinada información que parece que han captado y retenido, en otro momento no son capaces de evocarla (Flórez, 2001b; Wishart, 2002); por ello es necesario un repaso sistemático y organizado de lo aprendido.

De los dos grandes sistemas de memoria a largo plazo, el sistema de memoria declarativa o explícita (saber qué) y el sistema de memoria no declarativa o implícita (saber cómo), las personas con SD tienen más afectada la primera. Esto se manifiesta por: escasa capacidad para indicar con precisión hechos; dificultad para generalizar una experiencia de modo que les sirva para situaciones familiares; problemas para recordar conceptos que parecían comprendidos y aprendidos; lentitud para captar la información y responder a ella; dificultad para narrar o expresar un hecho (Nadel, 2000).

Un último rasgo problemático del perfil de las personas con SD son las dificultades en la comunicación o lenguaje, siendo las más frecuentes: retraso en la adquisición de vocabulario; mejor nivel de lenguaje comprensivo que expresivo (Roizen, 2001); realización de oraciones de menor longitud y complejidad; dificultad en la organización del discurso (Rondal, 2000). Este conjunto de dificultades va a interferir gravemente en su comunicación y en su aprendizaje (Flórez, 2001a).

EL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL

La investigación ha mostrado que los estudiantes tienen dificultades para comprender el sistema de numeración decimal, y en especial, el valor posicional de las cifras (Batturo, 2002, Peled, 2007). La construcción del sistema de numeración decimal es un proceso que implica construir nuevas unidades, en el que deben demostrar flexibilidad en el conteo y en la agrupación (Thomas, 2004).

Los niños en las fase iniciales del aprendizaje numérico usan los números como unidades simples de conteo, y posteriormente va construyendo la noción de unidad compuesta (Steffe, 1994). Fuson (1990) detalló algunas dificultades implicadas en este proceso y demostró el efecto positivo de los modelos de instrucción que utilizan representaciones concretas de las decenas y las centenas (como los bloques de Dienes). Steffe, Cobb y Von Glasersfeld (1988) señalan que los alumnos deben entender la decena como una *unidad compuesta numérica* y posteriormente, adquirir la idea de *unidad compuesta abstracta*, que es la que permite coordinar decenas y unidades.

La investigación identifica cuatro constructos fundamentales que permiten desarrollar la comprensión de los números de varios dígitos: Contar (C), Particionar (P), Agrupar (A) y Establecer relaciones (R). En Jones y otros (1996) se presenta un marco de instrucción y de evaluación del sistema de numeración decimal sobre los números de varios dígitos que consta de cinco niveles de pensamiento, en cada uno de los cuales se abordan los cuatro constructos citados. Los resultados de dicho estudio en alumnado sin discapacidad muestran que los niveles son jerárquicos y que los cuatro constructos son igual de importantes para evaluar el conocimiento de los números de varios dígitos. A continuación describimos brevemente este marco que además ayuda a diseñar secuencias de actividades para su desarrollo en el aula.

- Nivel 1. Pre-valor posicional. Piensan en términos de unidades individuales. Carecen de estructuras de agrupamiento. Poseen una concepción limitada de la partición.
- Nivel 2. Valor posicional inicial (< 100). Se inicia la comprensión del valor posicional de las cifras, y el uso de las decenas como una unidad compuesta numérica.
- Nivel 3. Desarrollo del valor posicional (<100). Muestran estructuras de unidad compuesta abstracta. Capacidad para formar dos representaciones numéricas basadas en decenas y unidades y para operar o comparar las dos representaciones al mismo tiempo.
- Nivel 4. Extensión del valor posicional (<1000). Desarrollan la unidad numérica compuesta como la unidad compuesta abstracta para estructuras de 100. Se generan soluciones mentales, incorporando estrategias que integran contar, repartir, agrupar y ordenar.
- Nivel 5. Valor posicional esencial (hasta 1000 o superior). Poseen una comprensión coordinada de los cuatro constructos y muestran preferencia por la representación mental antes que por las representaciones de papel y lápiz o las físicas.

El marco de Jones et al., validado con alumnado sin discapacidad, lo utilizamos en este trabajo para evaluar el conocimiento de estudiantes con SD.

OBJETIVOS Y METODOLOGÍA

Los objetivos de esta investigación son: 1) Evaluar el conocimiento sobre el sistema de numeración decimal de una alumna con SD y determinando su nivel del marco descrito por Jones et al. (1996), 2) Analizar sus destrezas y sus dificultades en los cuatro constructos: contar, agrupar, particionar y establecer relaciones numéricas.

Dado que se trata de conocer en profundidad los modos de pensamiento de una población a la que es difícil evaluar debido a sus dificultades con el lenguaje, planteamos un estudio observacional descriptivo de casos, con entrevistas a seis alumnos con SD. Para este trabajo presentamos los resultados de la alumna que obtuvo los mejores logros de los seis entrevistados. La alumna con SD seleccionada, tiene 26 años, finalizó con éxito un ciclo de formación profesional adaptado de nivel básico. Actualmente trabaja en Talleres Laborales, promovidos por la Asociación Tinerfeña de Trisómicos 21 (Tenerife) y recibe diariamente, en esta Asociación, apoyo escolar de distintas materias, entre ellas Matemáticas. En este contexto educativo se realizaron las entrevistas que fueron videograbadas en sesiones de 45 minutos.

La alumna posee una conversación fluida, suficiente para establecer una adecuada comunicación; narra acontecimientos de forma ordenada; es capaz de mantener la atención durante una hora (aprox.); y posee ciertas estrategias de memorización.

Para complementar la anterior información, antes de comenzar las entrevistas, le planteamos cuestiones referidas a: leer y escribir números; encontrar el anterior y posterior de un número dado; sumas y restas sin y con llevadas.

Tabla 1. Conocimiento de procedimientos numéricos

Escribir números	Leer números	Indicar número anterior y posterior	Sumar sin llevadas	Restar sin llevadas	Sumar con llevadas	Restar con llevadas
6 dígitos	6 dígitos	3 dígitos	4 dígitos	4 dígitos	4 dígitos	4 dígitos

Se comenzó por ejercicios con números de un solo dígito y se fue aumentando el tamaño de los números a medida que la respuesta era correcta. En la tabla 1 se indica el tamaño de los números hasta los que respondió de forma correcta en cada uno de estos procedimientos. Esta información sirvió para concluir que la alumna podía responder tareas de los diferentes niveles del marco.

La entrevista fue semiestructurada, siguiendo un protocolo básico que se amplió para comprobar si una respuesta errónea se debía a un problema de atención, de cansancio o de comprensión del enunciado. Para ello, se repitió la explicación de las tareas o se propuso con otros números.

El protocolo de las entrevistas estaba diseñado con tareas correspondientes a los cinco niveles en los cuatro constructos (aprox. cinco tareas por constructo en cada nivel). Si la alumna respondía correctamente a la mayoría de las tareas de un nivel se continuaba con las tareas correspondientes al nivel siguiente. A continuación se describen los indicadores evaluados en cada nivel y constructo.

- Nivel 1. Pre-valor posicional. C1.1. Utilizar estrategias contar todo y/o contar a partir de. C1.2. Contar informalmente por decenas. P1.1. Particionar de diferentes formas números menores de 10. A1.1. Estimar cantidades usando agrupamientos como puntos de referencia. A1.2. Contar de 5 en 5 y de 10 en 10. A1.3. Agrupar para hacer el conteo más fácil y rápido. R1.1. Determinar números mayores o menores que otro dado menor o igual a 20. R1.2 Ordenar números inferiores a 20.
- Nivel 2. Valor posicional inicial (< 100). C2.1. Contar grupos de decenas como si fueran ítems independientes. C2.2. Formar y contar grupos de decenas y unidades. C3.2. Contar a partir de decenas y unidades. P2.1. Formar números de varios dígitos de diferente forma, especialmente en decenas y unidades. A2.1. Estimar el número de objetos en un grupo usando la unidad apropiada. A2.2. Agrupar para hacer una comprobación rápida y fácil de 10 en 10. R2.1. Ordenar números de dos dígitos, después de intercambiar el orden de las unidades. R2.2. Ordenar números de dos dígitos próximos a decenas y entre decenas.
- Nivel 3. Desarrollo del valor posicional (<100). C3.1. Contar a partir de o hacia atrás decenas, sumando y restando. C3.2. Contar a partir de o hacia atrás decenas y unidades, sumando y restando. P3.1. Formar números de varios dígitos de diferente forma. P3.2. Encontrar la parte desconocida de un número. A3.1. Determinar si la suma de dos números de 2 dígitos está entre dos decenas determinadas. R3.1. Ordenar números de dos dígitos. R3.2. Ordenar números de dos dígitos, después de añadir e intercambiar el orden de las unidades.
- Nivel 4. Extensión del valor posicional (<1000). C4.1. Contar centenas, decenas y unidades, sumando y restando. P4.1. Formar números de varios dígitos de diferente forma. P4.2. Encontrar la parte desconocida de un número. A4.1. Dada una cantidad determinada de decenas y unidades, expresada de manera verbal, indicar el número sin referencia a los

materiales. A4.2. Determinar si la suma de dos números de 3 dígitos es mayor o menor que una cantidad dada. R4.1 Ordenar números de dos dígitos próximos a centenas y entre centenas. R4.2. Ordenar números de varios dígitos intercambiando el orden de las unidades.

- Nivel 5. Valor posicional esencial (hasta 1000 o superior). C5.1. Contar centenas, decenas y unidades para sumar y restar mentalmente. P5.1. Formar números de varios dígitos de diferente forma (algunos > 1000). P5.2. Encontrar la parte desconocida de un número. A5.1. Determinar si la suma o resta de dos números de 2 y/o 3 dígitos es mayor o menor que otra dada. A5.2. Dada una cantidad determinada de centenas, decenas y unidades, expresada de manera verbal, indicar el número sin referencia a los materiales. R5.1. Ordenar números de varios dígitos (algunos > 1000), determinando cuál de dos números dados está más cerca de un tercero.

Las tareas se resolvían con materiales concretos, como caramelos, lápices, monedas de céntimos, bloques encajables, material numérico Herbinière-Lebert (a partir de ahora, material HL) y juegos de cartas numéricas. También se plantearon problemas de enunciado verbal explicados a través de dibujos. Dada la relación que existe entre los constructos, una misma tarea puede servir para evaluar indicadores de varios de ellos. Por ejemplo, las tareas de contar dan información sobre agrupar, o viceversa.

RESULTADOS

En esta sección exponemos, los resultados organizados por constructos, destacando los rasgos que caracterizan las respuestas de cada uno de ellos en los diferentes niveles de pensamiento, así como los logros y dificultades de la alumna.

Contar

En las tareas de contar de los tres primeros niveles de pensamiento, que requieren el conocimiento de los números menores de 100, la alumna realiza recuentos en los que coordina el conteo de decenas y unidades, es decir, no piensa en términos de unidades individuales. Esto muestra que tiene adquirido la estructura de "unidad compuesta abstracta". Sin embargo, este uso de la unidad compuesta abstracta no se da en todos los tipos de tareas ni se extiende a números superiores.

En la tarea C3.1 (Tabla2), se le representan cantidades con el material HL, por ejemplo 45. La alumna cuenta la primera placa de 10, diciendo: “dos por cinco, son diez” (estrategia multiplicativa), y a partir de ahí, señala las restantes placas diciendo: “diez, veinte, treinta, cuarenta y cuarenta y cinco”; cuando se le pide el número resultante de añadir 20, lo realiza mentalmente e indica que: “cuatro y dos son seis, entonces tenemos 65”. Realiza el mismo proceso con las siguientes preguntas, es decir, opera mentalmente, demostrando utilizar la decena como unidad compuesta abstracta.

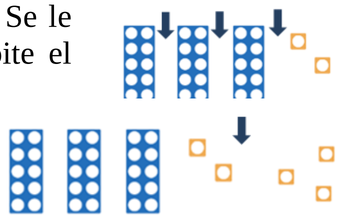
Tabla 2. Tarea C3.1 (Contar del Nivel 3. Indicador C3.1)

Con HL se le presenta el número 45. *¿Qué cantidad está representada?; si añades 20, ¿cuánto tienes ahora?, si ahora me das 10, ¿con cuántas te quedas?, y si ahora me das 25, ¿con cuántas te quedas?*

Sin embargo, en tareas en las que las unidades se van añadiendo poco a poco (Tarea C2.1, Tabla 3) no hace un uso de la decena como unidad de conteo, sino que parte de las 2 unidades contadas inicialmente, y al añadir una placa de 10, cuenta de dos en dos, diciendo: “dos, cuatro, seis, ocho, diez y doce”; al añadir las siguientes placas de 10 repite el proceso contando de dos en dos hasta llegar a 32.

Tabla 3. Tarea C2.1 (Contar del Nivel 2. Indicador C2.2, C2.3)

Con HL se presentan 2 unidades. *¿Qué cantidad está representada?* Se le añade una decena, *¿Qué cantidad está ahora representada?* Se repite el proceso añadiendo decenas hasta llegar a 32.
Se añaden 3 unidades al número anterior. *¿Qué cantidad está ahora representada?*



De igual manera, en tareas en las que se le muestran dos tipos de representaciones numéricas (Tarea C3.2, tabla 4), no es capaz de operar mentalmente con las dos representaciones, sino que recurre a contar a partir de 12, de dos en dos, hasta completar el recuento.

Tabla 4. Tarea C3.2 (Contar del Nivel 3. Indicador C3.2)

Se le muestra una cantidad (68), en la que una parte de la misma está representada con el material HL (56) y la otra parte expresada de manera simbólica (12), *¿cuántos hay? Represéntalo con HL.*

Con números de tres dígitos (tareas del nivel 4), la alumna mostró comprensión de la unidad compuesta abstracta para las centenas, en tareas con materiales; sin embargo, en otras tareas con otras representaciones o indicaciones verbales, no demostró utilizar las centenas mentalmente, como unidades de conteo. En esos casos usó una aproximación algorítmica y procedimental. Además, no mantiene 10 decenas o 100 unidades como medida de la numerosidad de una centena. Este hecho motivó que a la alumna no se le evaluase las tareas del nivel 5.

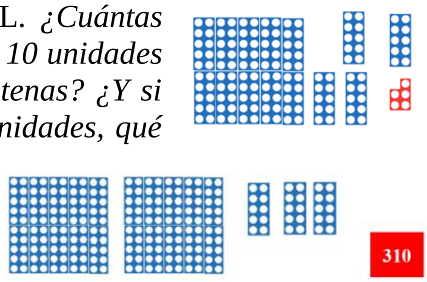
Por ejemplo, con el material HL se le muestra una centena, y a la pregunta de: "¿Cuántas unidades de 10 hay en esta centena?", cuenta y responde: "diez"; al preguntarle cuántas unidades hay en total, cuenta de 10 en 10 y dice: "cien"; sin embargo, al preguntarle: "¿cuántas decenas hay en esta placa de 100?", dice: "cero decenas". Es decir, que indica el dígito escrito en la posición de las decenas en la escritura del número.

En la tarea C4.1 (tabla 5), al preguntarle qué número resulta al añadir una decena al número 145 representado con HL, recurre al algoritmo y responde correctamente; de forma similar procede al pedirle que añada 4 decenas, 6 centenas, 50 decenas y 300 unidades. En la tarea C4.2 (tabla 5) no utiliza las centenas y decenas como unidad de conteo para dar una respuesta mentalmente, sino que escribe el algoritmo: 310+100+100+30 = 540.

Tabla 5. Tareas C4.1 y C4.2 (Contar del Nivel 4. Indicador C4.1)

Tarea C4.1 Se le presenta el número 145 representado con HL. *¿Cuántas unidades hay? Escribe el número ¿Cuántas decenas? Si añades 10 unidades ¿Qué número es? ¿Y si añades 4 decenas? ¿Y si añades 6 centenas? ¿Y si ahora añades 50 decenas, qué número es? ¿Y si añades 300 unidades, qué número es?*

Tarea C4.2 *¿Cuántas unidades hay en total si tapadas hay 310?*



Esta dificultad para operar mentalmente con números menores y mayores que 100 se observa en las tareas de los otros constructos.

Agrupar

La alumna no realiza estimaciones de cantidades, probablemente porque no es una tarea usual para ella, pero sí manifiesta ciertas estructuras de agrupamiento y reconoce 10 como una unidad al representar números de dos dígitos. Esto le ayuda a realizar conteos de forma más rápida y fácil. Sin embargo, no siempre reconoce el agrupamiento de 10 como el más efectivo. Por ejemplo, en la tarea A2.1 (tabla 6), no utiliza estrategias de estimación, sino que cuenta visualmente los 53 objetos y dice: “hay treinta y cinco”; para comprobar su estimación, utiliza diversos agrupamientos (de 2 en 2; de 5 en 5; de 3 en 3; de 10 en 10…), diciendo: “dos y cuatro son seis, y tres son nueve…”, después sigue de 1 en 1 y de 2 en 2. Ante la indicación de que forme grupos para contar más rápido, comienza a formar grupos de 10 (5 grupos) y luego cuenta de 10 en 10 hasta 53.

Tabla 6. Tarea A2.1 (Agrupar del Nivel 2. Indicadores A2.1 y A2.2)

Se le entregan 53 bloques para que estime cuántos hay. *¿Cuántas crees que hay?* Se le pide que lo compruebe *¿Cuántas hay? ¿Cómo harías para que sea más fácil y rápido a contarlas?*

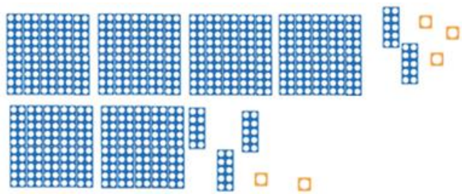
Al igual que en el constructo contar, cuando las tareas no se presentan con materiales, como en las tareas de problemas de enunciado verbal (tarea A3.1, tabla 7), manifiesta dificultad para operar mentalmente y recurre a plantear el algoritmo.

Tabla 7. Tarea A3.1 (Agrupar del Nivel 3. Indicador A3.1)

Si tienes 23 caramelos y te compras 34, la cantidad de caramelos que tienes ahora, ¿de quién está más cerca de 40, de 50, de 60…?

En todas las tareas en las que se le pide que sitúe los resultados en la decena más próxima, la regla que emplea es situar la cantidad en la decena del número resultante. Por ejemplo, en la tarea A3.1 (tabla 7) indica que 57 está más próximo a 50 porque “está en el grupo de los 50”.

Tabla 8. Tarea A4.1 (Agrupar del Nivel 4. Indicador A4.1)

Le mostramos dos números representados con HL (423 y 232) y le planteamos la siguiente situación: *Tenemos 423 y 232. Si sumamos las dos cantidades, el número que resulta ¿Es mayor que 350? ¿Y que 632?*	

En las tareas con números mayores que 100 manifiesta un uso de las decenas y centenas de forma procedimental, pero no conceptual, tanto con materiales como de manera simbólica. Recurre en todos los casos a plantear el algoritmo y resolverlo. Por ejemplo, en la tarea A4.1 (tabla 8), cuenta las centenas (de 100 en 100) y las anota, cuenta las decenas y unidades y las anota, y procede a resolver el algoritmo para responder a las preguntas planteadas.

Particionar

La alumna descompone con mucha seguridad números menores de 1000, tanto con materiales como de manera simbólica. Utiliza la estrategia de buscar siempre números menores al que debe descomponer, da diferentes formas de descomposición para un mismo número, mostrando el uso de la partición única y múltiple, e incluso emplea hechos numéricos básicos. Por ejemplo, en el juego de las cartas (Tarea P2.1, tabla 9), forma el número 16 con 10+6; el 24 con 10+10+4; el 58 con 10+10+10+10+10+8.

Tabla 9. Tarea P2.1 (Particionar del Nivel 2. Indicador P2.1)

Juego de cartas de números. Se colocan boca arriba en fila, tarjetas de números del 1 al 9 (dos de cada) y 20 tarjetas del número 10. Se pone un montón de cartas de números de dos dígitos boca abajo: 24, 16, 45, 58… Se destapa una carta con un número de dos dígitos del montón que está boca abajo. El alumno debe coger cartas del 1 al 10, cuya suma sea el número de dos dígitos que ha destapado.

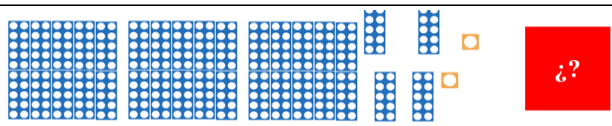
Sin embargo, no en todas las situaciones es capaz de ver en una cantidad determinada, otra cantidad como parte de la misma. Por ejemplo, con números menores de 100, en la tarea P3.1 (tabla 10), utiliza las decenas como unidades de conteo, y mentalmente, responde que hay 10 escondidos. Sin embargo, en la tarea P3.2 (tabla 10), no ve 40 como parte de 65, sino que utiliza el algoritmo de la resta para encontrar la solución correcta.

Tabla 10. Tareas P3.1 y P3.2 (Particionar del Nivel 3. Indicador P3.2)

Tarea P3.1. Se le muestra una cantidad (34), en la que una parte de la misma está representada con el material HL (24) y la otra parte está oculta. *Sobre la mesa hay 34 unidades representadas con el material HL, pero una parte está oculta debajo del papel ¿Cuántas están debajo del papel?* 
Tarea P3.2. *Estamos preparando una fiesta de cumpleaños. Tenemos 40 globos, pero necesitamos 65 ¿Cuántos globos más necesitamos?*

Aunque la alumna es capaz de descomponer correctamente números de tres dígitos de diferentes formas, no es capaz de ver cuándo es apropiado combinar centenas, decenas y unidades mentalmente, sino que su estrategia es plantear el algoritmo. Por ejemplo en la tarea P4.1 (tabla 11), plantea directamente el algoritmo de 462-342, al igual que ocurre con los problemas de enunciado verbal.

Tabla 11. Tarea P4.1 (Particionar del Nivel 4. Indicador P4.1)

Se le muestra una cantidad (462), en la que una parte de la misma está representada con el material HL (342) y la otra parte está oculta. *Sobre la mesa hay 462 unidades, pero una parte está oculta debajo del papel ¿Cuántas están tapadas?* 

Relaciones numéricas (ordenar)

La alumna ordena números menores de 1000 correctamente, tanto con materiales como de forma simbólica y distingue el vocabulario de mayor y menor. Sin embargo, no es capaz de invertir mentalmente el orden de las unidades e indicar quién es mayor o menor, sino que necesita recurrir a la escritura de los números para dar la respuesta correcta (tareas R2.1 y R3.1, tabla 12).

Tabla 12. Tareas R2.1 y R3.1 (Relación y orden de los Niveles 2 y 3. Indicadores R2.1 y R3.2)

Tarea R2.1. Le mostramos escritos los números 61 y 67. *¿Cuál es mayor? Si cambiamos el orden de las unidades, ¿cuál es mayor ahora?*
Tarea R3.1. *Si al número 47 le añades 2 decenas, al cambiar el orden de las unidades ¿el número es mayor o menor?*

Sus dificultades con el valor posicional de los números de tres dígitos, no le llevan a establecer correctamente la distancia entre dos cantidades. En el apartado a) de la tarea R4.1 (tabla 13), se fija solo en las centenas, descarta las decenas y unidades y responde: "más cerca de trescientos, pues en cuatrocientos la centena es mayor"; en el apartado b), se fija en las centenas y decenas, obvia las unidades y responde "más cerca de 320, pues en 330 la decena es mayor".

Tabla 13. Tarea R4.1 (Relación y orden del Nivel 4. Indicador R4.1)

a) *El número 327, ¿de quién está más cerca, de 300 o de 400"* b) *¿De quién está más cerca de 320 o de 330?*

<u>Resumen de la evaluación:</u> Dada la forma de razonar en las tareas planteadas, la alumna se sitúa en el Nivel 3 de pensamiento en los cuatro constructos; manifestó un conocimiento estable en las tareas con números de dos dígitos, que incluye el uso de "diez" como una unidad compuesta

abstracta, en el recuento, la agrupación, la partición, y el orden de los números. Sin embargo demostró un nivel de pensamiento incompleto del Nivel 4 (con números mayores que 100), pues aunque utiliza y maneja la centena en las diferentes tareas, no la utiliza como unidad compuesta abstracta. Para realizar tareas en las que es necesario agrupar o particionar números de tres dígitos recurre al algoritmo tradicional, en lugar de seguir un proceso mental que es, por otra parte, a lo que está habituada.

CONCLUSIONES

El marco teórico utilizado en este trabajo ha permitido analizar el conocimiento de una alumna con SD sobre los principios que estructuran y dan sentido al sistema de numeración decimal, permitiendo observar sus logros y sus deficiencias.

Esta alumna mostró en las cuestiones iniciales ser capaz de leer números de seis dígitos, y de operar con números de cuatro dígitos. Este dominio procedimental no va acorde con sus respuestas en la evaluación de los diferentes niveles y constructos, donde demostró carencias conceptuales sobre el valor posicional de los números de tres dígitos. Es decir, hay un distanciamiento entre la habilidad para realizar procedimientos numéricos (escribir, leer números o realizar algoritmos de suma y resta) y las tareas en las que tiene que poner en marcha por sí misma, los conocimientos numéricos. Es característico de esta población el preferir realizar procedimientos repetitivos, por lo que las actividades de respuesta abierta, con diferentes soluciones, suponen un reto importante para ellos, que se refleja en mayor inseguridad en las respuestas. En muchas tareas de los tres primeros niveles (números de dos dígitos), la alumna muestra comprensión conceptual e incluso emplea diferentes estrategias. Es el caso de cuando hace múltiples particiones del mismo número. Esto es un resultado alentador para una población que tradicionalmente se ha caracterizado por presentar grandes dificultades con las actividades numéricas y sobre la que se ha indicado que no adquieren comprensión conceptual. Por otra parte, demuestra cierto conocimiento inestable y carencias para realizar tareas en las que tiene que manejar mentalmente varios números. Un aspecto importante observado es su dificultad para manejar los números de varios dígitos de manera mental. Necesita la escritura algorítmica para responder a las tareas en las que se esperaba que manejase mentalmente dos números.

Las metodologías y los diseños de instrucción de este alumnado deben poner más peso en aspectos conceptuales que les permitan avanzar en la comprensión del sistema de numeración decimal. No parece un buen enfoque de enseñanza, el insistir en que sean capaces de realizar sumas y restas con llevadas de hasta cuatro dígitos, y sin embargo, no puedan resolver una tarea de la vida cotidiana con números menores. Es necesario tener en cuenta sus individualidades adaptando las actividades a cada uno de ellos, según sus potencialidades y necesidades. Dadas sus deficiencias con el lenguaje y la memoria a corto plazo, es adecuado presentarles la información utilizando diferentes sistemas sensoriales de manera que se reduzca la demanda de memoria. Es útil en esta población la secuenciación de las tareas en partes más cortas ya que ello requiere el poner en juego menos habilidades verbales. Además, la retención de la información a corto plazo se favorece mediante estrategias de repetición y con tareas que les motiven.

Estos aspectos junto con el marco utilizado en esta investigación nos proporcionan la base para la creación de programas de enseñanza, que ayuden a ampliar su conocimiento matemático y superar sus dificultades más destacadas en el aprendizaje matemático, objetivo que estamos desarrollando.

Referencias

Baroody, A. J. (1990). How and when should place-value concepts and skills be taught? Journal for Research in Mathematics Education, 21, 281-286.

Baturo, A.R (2002). Number sense, place value and "odometer" principle in decimal numeration: Adding 1 tenth and 1 hundredth. In Cockburn, Anne D. and, N. Elena, Eds. *Proceedings 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* Vol. 2, pages pp. 65-72, Norwich, UK.Chapman, R.S. y Hesketh, L.J. (2000). Behavioral Phenotype of Individuals with Down Syndrome. Mental Retardation and Developmental Disabilities Research Reviews, 6, 84-95.

Flórez, J. (2001a). Las bases del aprendizaje. Descargado el 14 de mayo de 2010 de http://www.down21.org/salud/neurobiologia/bases_aprend.htm

Flórez, J. (2001b). Aprendizaje y síndrome de Down: III: La memoria (1ª parte). Descargado el 03 de mayo de 2002 de www.down21.org/salud/neurobiologia/aprend_sd_memoria_1.htm

Fuson, K. C. (1990). Conceptual structures for multiunit numbers: Implications for learning and teaching multidigit addition, subtraction and place value. *Cognition and Instruction* 7(4), 343-403.

Gaunt, L., Moni, K. and Jobling, A. (2012). Developing numeracy in young adults with Down syndrome: a preliminary investigation of specific teaching strategies. *Journal on Developmental Disabilities, 18*(2), 10-25.

Jones, G., Thornton, C., Putt, I., Hill, K., Mogill, A., Rich, B. y Van Zoest, L.R. (1996). Multidigit Number sense: a Framework for instruction and assessment. *Journal fort Research in Mathematics Education, 27*(3), 310-336.

Kamii, C. (1986). Place Value: An Explanation of Its Difficulty and Educational Implications for the Primary Grades. Journal of Research in Childhood Education, 1(2), 75-86.

López Melero, M. (1999). Aprendiendo a conocer a las personas con síndrome de Down. Málaga: Aljibe.

Nadel, (2000). Aprendizaje y memoria en el Síndrome de Down. En Rondal, J.; Perera, J. y Nadel, L. (Coords.), Síndrome de Down: Revisión de los últimos conocimientos (197-209). Madrid: Espasa-Calpe.

Noda, A., Bruno, A., González, C., Moreno L. y Sanabria, H. (2011). Addition and subtraction by students with Down syndrome. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 42*(1), 13-35.

Peled, I.; Meron, R; Rota, S. (2007). Using a multiplicative approach to construct decimal structure. En Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4, pp. 65-72. Seoul: PME.

Pueschel, S.M. y Sustrova, M. (1997). Percepción visual y auditiva en los niños con Síndrome de Down. En Rondal, J.A.; Perera, J.; Nadel, L. y Comblain, A., Síndrome de Down: Perspectivas psicológica, psicobiológica y socioeducativa (85-98). Madrid: Ministerio de Trabajo y Asuntos Sociales.

Roizen, N.J. (2001). Down syndrome: progress in research. *Mental Retardation and Developmental Disabilities Research Reviews*, 7, 38-44.

Rondal, J.A. (2000). El lenguaje en el síndrome de Down: perspectivas actuales. En Rondal, J.; Perera, J. y Nadel, L. (Coords.), Síndrome de Down: Revisión de los últimos conocimientos (211-218). Madrid: Espasa-Calpe.

Steffe, L. (1986). Composite units and their constitutive operations. Paper presented at the Research Presession to the Annual Meeting of the National Council of Teachers of Mathematics, Washington, DC.

Steffe, L.P., Cobb, P., y Von Glasersfeld, E. (1988). *Construction of Arithmetical Meanings and Strategies*. Springer-Verlag, New York.

Thomas, N. (2004). The development of structure in the number system. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2004 Vol 4 pp 305–312.

Wishart, J.G. (2002). Learning in young children with Down syndrome: public perceptions, empirical evidence. En Cuskelly, M.; Jobling, A. y Buckley, S.; *Down syndrome: Across the life span* (18-27). London, Philadelphia: Whurr Publishers.

APRENDIENDO A RECONOCER EVIDENCIAS DEL PROCESO DE GENERALIZACIÓN DE LOS ESTUDIANTES A TRAVÉS DE UN DEBATE VIRTUAL

Learning to notice evidences of students' generalization processes through on-line discussions

María Luz Callejo[a], Ceneida Fernández[a], Gloria Sánchez-Matamoros[b], Julia Valls[a]

[a]Universidad de Alicante, [b]Universidad de Sevilla

Resumen

Este estudio tiene como objetivo examinar cómo los futuros profesores de secundaria (EPS) reconocen evidencias de la comprensión del proceso de generalización en estudiantes de secundaria. Los EPS realizaron dos tareas: (1) describir las respuestas dadas por estudiantes de secundaria a dos problemas de generalización lineal y agrupar las que reflejaban características comunes de la comprensión del proceso de generalización; (2) participar en un debate virtual sobre las características de la comprensión del proceso de generalización. Los resultados indican que la participación en el debate virtual permitió a los EPS centrar su mirada en las ideas que subyacen en el proceso de generalización (generalización cercana y lejana e intento de expresar la regla general, pasando de una estrategia aditiva a una funcional) más que en el procedimiento realizado.

Palabras clave: *mirar de una manera profesional, comprensión de los estudiantes, problemas de generalización lineal*

Abstract

This study examines how prospective secondary school teachers (EPS) characterize the generalization process in secondary school students. EPS had to solve two tasks: (1) answer a test where they had to describe secondary school students' answers to two linear generalization problems and realize groups of students that had same characteristics of the generalization process; (2) participate in an on-line debate to reach agreement about students' common characteristics of the generalization process. Results show that the participation in the on-line debate helps EPS to notice on the mathematical ideas of the generalization process (near and far generalization process and attempt to express the general rule (since the additive strategy to a functional one)).

Keywords: *professional noticing, students' mathematical thinking, linear generalization problems*

INTRODUCCIÓN

En los últimos años se ha destacado la importancia de la competencia docente "mirar de una manera profesional" la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Mason, 2002; Sherin, Jacobs y Philipps, 2010). En este contexto, las investigaciones han mostrado que esta competencia se puede desarrollar en los programas de formación (Fernández, Llinares y Valls, 2012; Sánchez-Matamoros et al., 2012; Magiera, van den Kieboom y Moyer, 2013).

Por ejemplo, van Es y Sherin (2002), en el contexto de "video clubs" donde se visionan y discuten segmentos de enseñanza, han mostrado que los profesores podían mejorar "su mirada profesional" si se les ayudaba a desplazar su foco de atención: desde las descripción general de las estrategias a la comprensión de los estudiantes; y desde los comentarios evaluativos a las interpretaciones basadas en evidencias. Otro foco de atención han sido la observación de las interacciones durante las discusiones matemáticas (Scherrer y Stein, 2013), y más específicamente cómo la participación

Callejo, M. L., Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. (2014). Aprendiendo a reconocer evidencias del proceso de generalización de los estudiantes a través de un debate virtual. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 187-196). Salamanca: SEIEM.

en debates en línea ayuda al desarrollo de una mirada profesional, al identificar los elementos matemáticos importantes en dominios específicos y relacionar estos elementos con las características de la comprensión matemática de los estudiantes (Fernández et al., 2012).

Estas investigaciones muestran que el desarrollo de la competencia docente “mirar profesionalmente” se facilita al incorporar dominios matemáticos específicos. Con el objetivo de ampliar nuestra comprensión del desarrollo de esta competencia docente en futuros profesores de secundaria nos centramos en el desarrollo de la comprensión de los procesos de generalización de patrones en el contexto de los debates virtuales o en línea.

Problemas de generalización de patrones

El proceso de identificar patrones en una secuencia implica, según Radford (2008): (1) tomar conciencia de una propiedad común, (2) generalizar dicha propiedad a todos los términos de la secuencia y (3) usar esa propiedad común a fin de encontrar una regla que permita calcular directamente cualquier término de la secuencia. Stacey (1989) distingue entre cuestiones que pueden ser resueltas paso a paso a través de un dibujo o contando (generalización cercana), y cuestiones que difícilmente pueden resolverse paso a paso, por ejemplo, obtener el número de elementos de la figura 100 de una sucesión (generalización lejana). La generalización cercana demanda identificar un esquema numérico que es el patrón de crecimiento de la sucesión numérica, mientras que la generalización lejana implica la coordinación de dos esquemas, el numérico, o identificación del número de elementos de cada figura de acuerdo con el patrón de la sucesión, y el espacial, o distribución de los elementos de cada figura de acuerdo con el patrón de la sucesión (Radford, 2011).

En esta investigación usamos problemas de sucesiones donde la regla que relaciona la posición de un término con el número de elementos es una función afín, $f(n)=an+b$, con $b\neq 0$ (“problemas de generalización lineal”). Estos problemas se pueden resolver usando distintas estrategias: (1) *estrategias aditivas*, cuando el estudiante observa que cada término aumenta en una diferencia constante, ya sea a través de un recuento directo, o reconociendo el carácter iterativo de la pauta lineal, o con un *proceso recursivo*, obteniendo un término a partir del anterior; (2) *estrategia funcional*, donde el estudiante utiliza una expresión para calcular directamente un término específico de la sucesión (generalización local), o el número de elementos de un término cualquiera (generalización global); y (3) *razonamiento proporcional*, usando la relación $f(n) = dn$, siendo d la diferencia entre términos consecutivos, que es incorrecto cuando la relación no es lineal.

Se ha constatado que los estudiantes más competentes intentan buscar una relación funcional mientras que otros usan estrategias aditivas o un razonamiento proporcional incorrecto (García-Cruz y Martinón, 1999). Dentro de las estrategias funcionales, Rivera y Becker (2008) distinguen entre estrategias *constructivas*, que consisten en calcular el número de elementos de una figura descomponiéndola en partes discretas disjuntas, y estrategias *deconstructivas*, donde la figura se descompone en partes que tienen elementos comunes. Además, García-Cruz y Martinón (1998) han identificado tres niveles de generalización en estudiantes de secundaria cuando resuelven este tipo de problemas: en el *nivel 1, actividad procedimental*, los estudiantes reconocen el carácter iterativo o recursivo del modelo lineal, lo que se traduce en hacer un recuento o añadir la diferencia constante; en el *nivel 2, generalización local*, los estudiantes hacen uso de una regla para un cálculo específico; y en el *nivel 3, generalización global*, los estudiantes transforman la regla usada en tareas anteriores en un objeto que se aplica en nuevas situaciones. El paso de un nivel a otro exige cambiar de estrategia de resolución, pues difícilmente se puede responder a una tarea de generalización lejana, correspondiente al nivel de generalización local, con una estrategia aditiva, que sin embargo es eficaz en tareas de generalización cercana.

Algunas de las investigaciones sobre el conocimiento del profesor acerca de la generalización de patrones se han realizado con futuros profesores de primaria y se han centrado principalmente en la forma en que resuelven problemas de generalización de patrones con secuencias numéricas (Zazkis y Liljedahl, 2002) o con sucesiones formadas por figuras y números que respondían a una pauta de crecimiento lineal o cuadrático (Rivera y Becker, 2007). Otras han estudiado cómo futuros maestros (Yesildere-Imre y Akkoç 2012; Zapatera y Callejo, 2013) o profesores en ejercicio de secundaria (Mouhayar y Jurdak, 2012) analizan respuestas de estudiantes a problemas de generalización de patrones.

El papel de los debates virtuales

Estudios previos han mostrado que los debates virtuales ayudan a los estudiantes a entablar una argumentación dialógica. La argumentación dialógica ocurre cuando se examinan diferentes perspectivas con el propósito de conseguir un acuerdo. En este sentido los debates en línea proporcionan un contexto donde los estudiantes para profesor interactúan para poder convencer a otros de la validez de sus ideas (Clark, Sampson, Weinberger y Erkens, 2007). Por otra parte Wells (2002) argumentó que se puede explotar el poder de la escritura para crear nuevos significados. En este sentido crear un texto escrito para tratar de convencer a otros en el debate en línea puede ayudar a los futuros profesores a desarrollar la competencia docente de mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes y profundizar en su propia comprensión. El texto producido por los futuros profesores en estos debates les puede ayudar a pasar desde la descripción de estrategias a la interpretación de la comprensión de los estudiantes aportando evidencias.

Teniendo en cuenta los estudios previos, el objetivo de nuestra investigación es examinar cómo a través de un debate en línea los EPS muestran evidencias de la comprensión matemática de los estudiantes cuando éstos resuelven problemas de generalización lineal.

MÉTODO

Participantes

Los participantes fueron 7 estudiantes del “Máster Universitario en profesorado de Educación Secundaria”, en el contexto de un módulo que tenía como objetivo desarrollar una “mirada profesional” sobre las características de la resolución de problemas en estudiantes de secundaria.

Instrumentos de recogida de datos

Los EPS contestaron un cuestionario que tenía como objetivo obtener información sobre su capacidad de observar la comprensión matemática de los estudiantes de secundaria sobre el proceso de generalización. Una vez contestado el cuestionario realizaron un debate virtual con el objetivo de discutir entre ellos y consensuar un informe sobre la manera en la que interpretaban lo que estaban considerando como evidencias de diferentes niveles de comprensión de la generalización lineal.

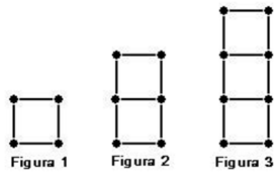
Cuestionario

El cuestionario constaba de las respuestas de seis estudiantes de secundaria a dos problemas de generalización lineal (Figura 1), que fueron adaptados de investigaciones previas (Zapatera y Callejo, 2011; Rivera y Becker, 2005). Las preguntas que se plantearon a los EPS fueron:

A. Describe cómo ha resuelto cada estudiante los problemas 1 y 2 en relación al proceso de generalización. B1. Agrupa los estudiantes que presentan características comunes del desarrollo del proceso de generalización. B2. Caracteriza cada uno de los subgrupos que has formado. C. Indica en qué se diferencian los distintos grupos.

Problema 1

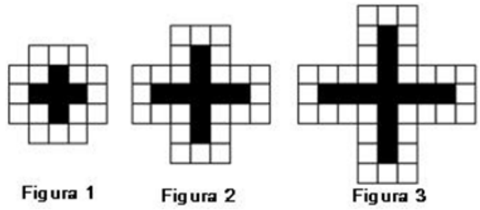
Las tres figuras siguientes son los primeros términos de una sucesión donde los cuadrados están formados por puntos (bolas) y segmentos (palos):



1. ¿Cuántos palos y bolas se necesitan para construir la figura 4?
2. ¿Cuántos palos y bolas se necesitan para construir la figura 6?
3. ¿Cuántos palos y bolas se necesitan para construir la figura 20?
4. Busca una regla general que relacione el número de la figura y el número de bolas.
5. Busca una regla general que relacione el número de la figura y el número de palos.

Problema 2

Las tres figuras siguientes son los primeros términos de una sucesión:



1. ¿Cuántos cuadrados blancos y negros se necesitan para construir la figura 4?
2. ¿Cuántos cuadrados blancos y negros se necesitan para construir la figura 6?
3. ¿Cuántos cuadrados blancos y negros se necesitan para construir la figura 20?
4. Busca una regla general que relacione el número de la figura y el número de cuadrados negros.
5. Busca una regla general que relacione el número de la figura y el número de cuadrados blancos.

Figura 1. Problemas seleccionados

En los dos problemas se presenta una sucesión de figuras compuestas por: cuadros y bolas (problema 1; Zapatera y Callejo, 2011) y cuadrados blancos y negros (problema 2; Rivera y Becker, 2005). La regla general es siempre una función afín: $f(n) = an + b$, con $b \neq 0$.

Las dos primeras cuestiones de los dos problemas son de generalización cercana y se pueden resolver siguiendo una estrategia aditiva mediante recuento, con o sin dibujo, o con un método recursivo, apoyándose en el término anterior. La cuestión 3, de generalización lejana, también se puede resolver con una estrategia aditiva, aunque resulta laborioso. Las cuestiones 4 y 5 piden expresar la regla general, ya sea en forma verbal o algebraica, y permiten conocer si los estudiantes son capaces de coordinar el esquema numérico de la información procedente de la sucesión numérica con el esquema de la posición que ocupa el número en la secuencia numérica. Las respuestas de los alumnos de secundaria que los EPS debían analizar (Figura 2) reflejaban distintos grados de desarrollo del proceso de generalización (Cañadas, Castro y Castro, 2007; García-Cruz y Martinón, 1999; Radford, 2011):

- No coordinación de la estructura espacial ni la numérica (Radford, 2011): **Carlos** (C).
- Utilización de estrategias aditivas (Zapatera y Callejo, 2011):
    - Utilización de un método recursivo en los apartados de generalización cercana e intento de encontrar una relación funcional en el apartado de generalización lejana usando una regla de tres: **Fernando** (F).
    - Utilización de un método recursivo en los apartados de generalización cercana y lejana sin intentar buscar una relación funcional: **Daniel** (D).
    - Paso de una estrategia aditiva a una multiplicativa (relación funcional) en la generalización cercana (n=6):

- Sin identificar la constante de crecimiento: **Ana** (A).
- Identificando la constante de crecimiento: **Beatriz** (B).

- Utilización de un método directo deconstructivo (Rivera y Becker, 2008) descomponiendo la figura: **Elena** (E).

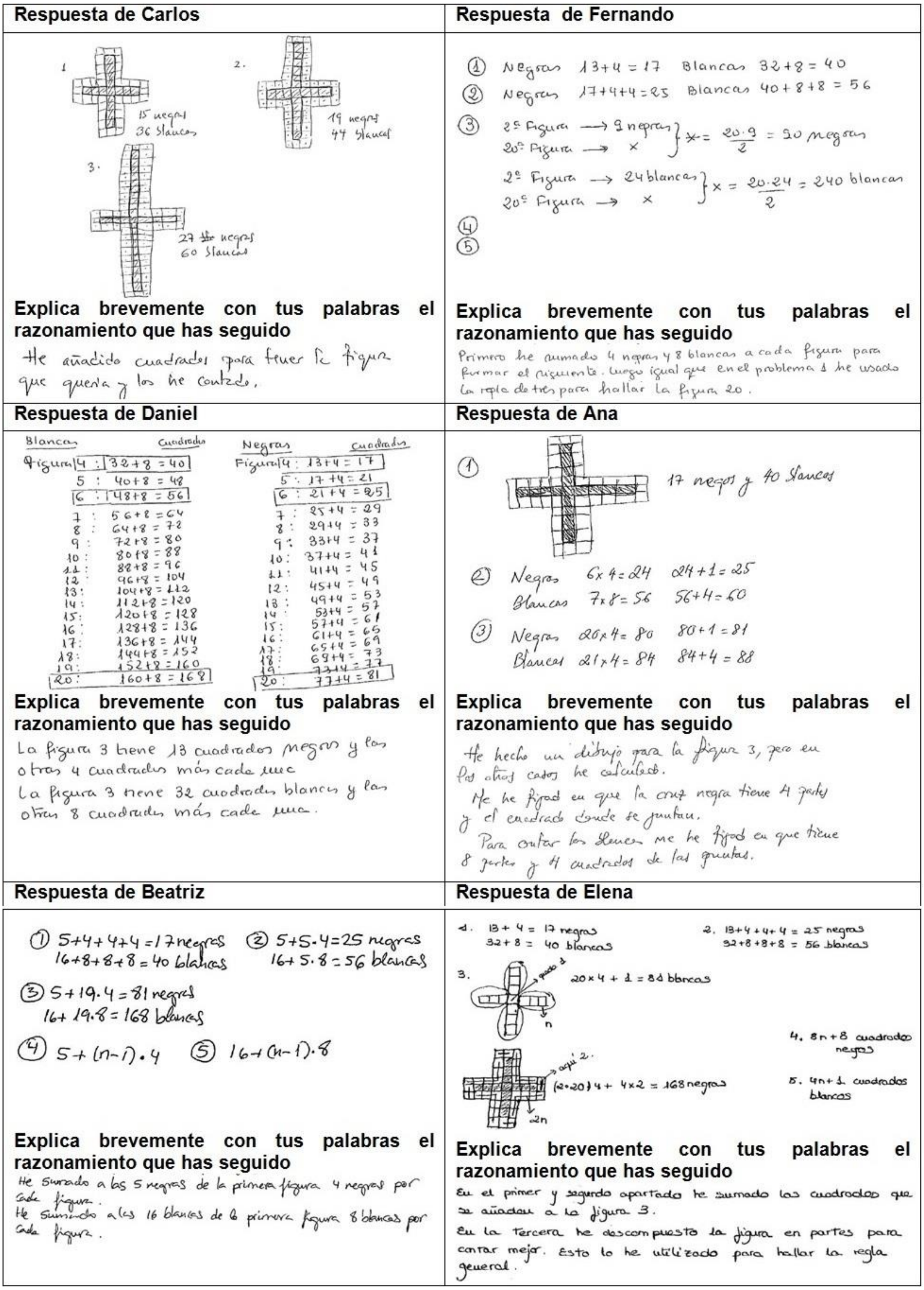


Figura 2. Respuestas de los seis estudiantes de secundaria al problema 2

Debate

Con el objetivo de que los EPS consensuaran las interpretaciones realizadas de la comprensión de los estudiantes de secundaria sobre el proceso de generalización, se activó un debate virtual de dos semanas de duración. En la primera semana los EPS debían debatir sobre las siguientes cuestiones:

- *Características de cada uno de los grupos formados en relación al proceso de generalización.*
- *Diferencias de los distintos grupos formados.*

El debate quedó registrado por escrito. En la segunda semana, debían elaborar un informe conjunto. El informe debía recoger el consenso alcanzado sobre el número y las características de los grupos formados en relación al desarrollo del proceso de generalización y las diferencias entre ellos.

Análisis de los datos

El análisis de los datos se desarrolló en dos etapas. En la primera se analizó las agrupaciones realizadas por los EPS de los estudiantes de secundaria, a partir de las características del desarrollo del proceso de generalización que aportaban para justificar las agrupaciones realizadas. Este análisis lo realizaron cuatro investigadores. Los desacuerdos y acuerdos fueron discutidos con el objetivo de consensuar las evidencias que aportaban los EPS sobre las características del desarrollo del proceso de generalización. Este análisis permitió identificar cuatro caracterizaciones dadas por los EPS del proceso de generalización (se exponen en el apartado de resultados).

En la segunda etapa de análisis, se observaron los cambios producidos en las agrupaciones de los estudiantes de secundaria en relación al proceso de generalización y en las justificaciones dadas por los EPS al debatir virtualmente sobre estas cuestiones entre ellos.

RESULTADOS

En esta sección describimos el papel del debate como instrumento para consensuar las características del proceso de generalización, ya que éste ha jugado un papel importante en el desarrollo de la mirada profesional de los EPS de la comprensión del proceso de generalización, ante la necesidad de tener que tomar una decisión consensuada sobre la idea de generalización. Esta necesidad cambió la forma en la que los EPS parecía que estaban interpretando lo que consideraban como evidencias de la comprensión del proceso de generalización en los estudiantes de secundaria.

Momento inicial del debate

El debate se inició aportando cada EPS sus agrupaciones y justificaciones. Las agrupaciones identificadas fueron cuatro:

- *Intento de llegar a la regla general.* Estos EPS agruparon a los estudiantes de secundaria teniendo en cuenta: si habían intentado llegar a la regla general aunque no lo hubiesen conseguido (Ana y Fernando); si no lo habían intentado (Daniel y Carlos); y por último si habían llegado con éxito a obtener la regla general (Beatriz y Elena). Por lo tanto, estos EPS se fijaron en si los alumnos de secundaria habían dado el salto de una estrategia aditiva a una funcional, aunque el intento no hubiera tenido éxito.
- *Generalización cercana y lejana*. Estos EPS agruparon a los estudiantes de secundaria teniendo en cuenta qué apartados de los problemas habían resuelto correctamente: generalización cercana (Ana y Fernando), generalización lejana (Daniel) y regla general (Elena y Beatriz), haciendo notar que Carlos lo había resuelto incorrectamente.
- *Uso de método recursivo*. Estos EPS agruparon a los estudiantes de secundaria teniendo en cuenta si habían utilizado en algún apartado un método recursivo (Elena, Beatriz, Ana, Daniel y Fernando) o si lo habían hecho incorrectamente (Carlos).

- *Todo o nada*. Estos EPS agruparon a los estudiantes de secundaria teniendo en cuenta si habían llegado a una fórmula general (Beatriz y Elena) o no (Ana, Daniel, Carlos y Fernando).

Desarrollo del debate

En el desarrollo del debate identificamos cuatro momentos: exposición de qué se entiende por "generalización", necesidad de establecer niveles de generalización, negociación sobre los criterios para establecer los niveles y, por último, refinamiento de lo que entiende por "generalización." Este proceso provocó un cambio en lo que los EPS identificaban como evidencias de diferentes niveles de desarrollo de la comprensión de la generalización lineal.

La dificultad en consensuar una determinada manera de mirar la comprensión de la generalización lineal entre los EPS, hizo que JIN planteara la necesidad de compartir primero su significado:

> Tal vez no nos ponemos de acuerdo [en relación a cómo agrupar a los estudiantes] por la idea que cada uno de nosotros tenemos de generalizar. Quizás si expresamos lo que cada uno entendemos por generalizar veremos si tenemos ideas distintas.
>
> Para mi generalizar es "comenzando en los casos particulares pasar a través de un proceso a lo general, que bien puede ser a través de una fórmula matemática o bien mediante palabras, pero siempre y cuando se pueda llegar a cualquier valor a partir de esa fórmula o expresión."

La definición dada por JIN motivó la necesidad de establecer niveles en función de la "aproximación" a la regla general. La discusión derivó en dos posturas diferentes dependiendo de cómo caracterizaban el proceso de generalización en los niveles intermedios (Tabla 1).

Tabla 1. Posturas en relación a cómo los EPS caracterizaban el proceso de generalización

Postura 1	Postura 2
Nivel 1: Carlos (no coordinación de la estructura espacial ni numérica)	Nivel 1: Carlos (no coordinación de la estructura espacial ni numérica)
Nivel 2: Ana y Fernando (uso de estrategias aditivas y paso de una estrategia aditiva a la multiplicativa sin identificar constante de crecimiento	Nivel 2: Daniel (uso de método recursivo en apartados de generalización cercana y lejana sin buscar una relación funcional)
Nivel 3: Daniel	Nivel 3: Ana y Fernando
Nivel 4: Beatriz y Elena (paso de una estrategia aditiva a multiplicativa (relación funcional) en la generalización cercana identificando la constante de crecimiento)	Nivel 4: Beatriz y Elena

Ambas posturas coinciden en que en el nivel 1 están los estudiantes de secundaria que "no observan ningún patrón además de no establecer la relación entre los distintos términos de la sucesión, resolviendo los problemas sin sentido" (Carlos) y que en el nivel 4 se encuentran los estudiantes de secundaria que "llegan a la fórmula y que por tanto generalizan de forma correcta" (Beatriz y Elena). La diferencia entre las dos posturas se pone de manifiesto en qué se debía considerar en los niveles 2 y 3. La postura 1 tuvo en cuenta la caracterización del proceso de generalización como "generalización cercana y lejana" y agruparon a Ana y Fernando en el nivel 2 por haber realizado correctamente los apartados relativos a la generalización cercana, y a Daniel en el nivel 3 por haber realizado correctamente los tres primeros apartados de generalización cercana y lejana. La postura 2 tuvo en cuenta la caracterización del proceso de generalización como "intento de llegar a la regla general" ya que en el nivel 2 pusieron a Daniel porque no había intentado buscar la regla general, y en el nivel 3 a Ana y a Fernando por intentar obtener una regla general aunque el método seguido fuera erróneo.

El debate permitió a los EPS llegar a un consenso sobre cómo caracterizar el proceso de generalización, lo que provocó un cambio en la manera de mirar las respuestas de los estudiantes de secundaria. Algunos EPS, que en el cuestionario habían agrupado en función de "todo o nada" o en función del "uso o no de un método recursivo", cambiaron su forma de mirar las respuestas centrándose en el proceso de generalización, y no en si había llegado a la regla general o no, o si había usado un método recursivo o no. Así SVD, que en el cuestionario había caracterizado el proceso de generalización como "todo o nada", en el debate puso de manifiesto que las justificaciones verbales dadas por los alumnos son un paso previo hacia la generalización, lo que le permitía ver la existencia de distintos niveles de desarrollo del proceso de generalización:

> Creo que es muy importante tener en cuenta la explicación verbal de los alumnos como un paso previo hacia la generalización, para mí es un síntoma de que el alumno es capaz de intuir que va a haber algo que le permita encontrar cualquier figura superior que le pidan, aunque lo haga mal, pero por lo menos es consciente de que existe ese algo.

Otro ejemplo de cambio de mirada profesional con relación al proceso de generalización se observa en JCB, que en el cuestionario caracterizó el proceso como "uso de método recursivo", y debatir con el resto de participantes le ayudó a caracterizar el proceso de generalización como "intento de llegar a la regla general":

> A todos nos parece correcto establecer en el nivel más alto (nivel 4) a Elena y Beatriz por ser las que llegan a la regla general y en el más bajo (nivel 1) sólo a Carlos ya que además de no entender la sucesión su forma de generalizar es dibujar las figuras y hacer un conteo. Desde mi punto de vista Ana y Fernando estarían en el nivel 3 ya que intentan generalizar, en cambio Daniel estaría en un nivel 2 pues para resolver la figura siempre parte de la anterior por lo que no veo el intento de generalizar por ningún lado.

El debate también ayudó a los EPS a refinar la caracterización que habían hecho previamente del proceso de generalización. Por ejemplo, ante el comentario de JIN de considerar en el mismo grupo a Carlos y Daniel por usar la misma estrategia: "*Si decidimos ordenarlos por su forma de generalizar habría que meter a Daniel y Carlos en el mismo grupo pues usan la misma estrategia, aunque Carlos se confunda"*, PVR manifestó su desacuerdo por considerar que las estrategias utilizadas por los estudiantes de secundaria eran diferentes y por tanto no mostraban el mismo nivel de generalización. Refiriéndose a la resolución del problema 2 dijo:

> Daniel y Carlos no pueden estar en el mismo grupo. Daniel en su razonamiento dice: "la figura tres tiene trece cuadrados negros y las otras cuatro más y tienen treinta y dos cuadrados blancos y las otras ocho cuadrados más", mientras que Carlos dice: "que ha añadido cuadrados para tener la figura que tenía y los ha contado". Por tanto, creo que el nivel de generalización es diferente, Daniel observa el número de cuadrados blancos y negros que aumentan con cada figura, mientras que Carlos no.

DISCUSIÓN

Este estudio aporta información sobre el desarrollo de la competencia docente "mirar de manera profesional" en el dominio específico de los problemas de generalización lineal. Contribuimos en este campo aportando información sobre cómo los EPS caracterizan el proceso de generalización en los estudiantes de secundaria y el papel del debate virtual en el desarrollo de la mirada profesional, ante la necesidad de tener que tomar una decisión consensuada (Fernández et al., 2012; Sánchez, García y Escudero, 2013).

Las caracterizaciones del proceso de generalización dadas por los EPS fueron varias: el intento de llegar a la regla general, generalización cercana y lejana, uso del método recursivo y todo o nada. Sin embargo el debate permitió a los EPS intercambiar diferentes posicionamientos sobre cómo caracterizar el proceso de generalización, lo que provocó un cambio en la manera de mirar las respuestas de los estudiantes de secundaria en algunos de ellos. Así, los EPS que en el cuestionario habían agrupado en función de "todo o nada" o en función del "uso o no de un método recursivo" cambiaron su forma de mirar las respuestas centrándose en el proceso de generalización y no en si había llegado a la regla general, o si había usado un método recursivo. Así el debate ayudó a los EPS a centrar su mirada en las ideas que subyacen en el proceso de generalización: generalización cercana y lejana e intento de expresar la regla general (paso de la estrategia aditiva a la funcional), más que en el procedimiento realizado. En este sentido, la interacción con otros para poder convencer de la aceptabilidad y validez de las diferentes ideas ayudó a los EPS a trasladarse desde meras descripciones del uso de procedimientos a mostrar evidencias de la comprensión de los estudiantes de secundaria sobre el proceso de generalización, detallando ideas que subyacen en el proceso. Estos resultados confirman, en otro dominio matemático (problemas de generalización lineal), los resultados obtenidos por Fernández et al. (2012) con respecto a que los debates en línea puede favorecer el desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes.

Reconocimientos. Esta investigación ha recibido el apoyo del Proyecto I+D+i EDU2011-27288 del Ministerio de Ciencia e Innovación. España,

Referencias

Cañadas, M. C., Castro, E., y Castro, E. (2007). Descripción de la generalización de estudiantes de 3º y 4º de ESO en la resolución de problemas que involucran sucesiones lineales y cuadráticas. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L.J. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI*. (pp. 283-294). Badajoz: SEIEM.

Clark, D.B., Sampson, V., Weinberger, A., y Erkens, G. (2007). Analytic frameworks for assessing dialogic argumentation in online learning environments. *Educational Psychology Review, 19*(3), 343-374.

Fernández, C., Llinares, S., y Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM Mathematics Education*, 44, 747-759.

García-Cruz, J.A., y Martinón, A. (1998). Levels of generalization in linear patterns. En A. Olivier y K. Newstead (eds.) *Proceeding of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, 329-336. University of Stellenbosch. Stellenbosch, South Africa.

García-Cruz, J. A., y Martinón, A. (1999). Estrategia visual en la generalización de pautas lineales. *Enseñanza de las Ciencias*, 17(1), 31-43.

Magiera, M., van den Kieboom, L., y Moyer, J. (2013). An exploratory study of preservice middle school teachers' knowledge of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *84*, 93-113.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer.

Mouhayar, R.R., y Jurdak, M.E. (2012). Teachers' ability to identify and explain students' actions in near and far figural pattern generalization tasks. *Educational Studies in Mathematics, 82,* 379-396.

Radford, L. (2008). Iconicity and construction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education, 40*, 83-96.

Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education, 4* (pp. 17-24). Ankara, Turquía: PME.

Rivera, F.D., y Becker, J. (2005). Establishing and justifying algebraic generalization at the sixth grade level. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 465-472. Prague: PME.

Rivera, F.D., y Becker, J. (2007). Abduction in pattern generalization. En W. Jeong-Ho, L. Hee-Chan, P. Kyo-Sik y J. Dong-Yeop (Eds.), *Proceedings of the 31stbconference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 97-104). Seoul, Korea: Korea Society of Educational Studies in Mathematics.

Rivera, F.D., y Becker, J. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM Mathematics Education*, *48,* 65-82.

Sánchez, V., García, M., y Escudero, I. (2013). An analytical framework for analyzing student teachers' verbal interaction in learning situations. *Instructional Science, 41*(2), 247-269.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., Valls, J., García, M., y Llinares, S. (2012). Cómo estudiantes para profesor interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato. La derivada de una función en un punto. En A. Estepa, A. Contreras, J. Delofeu, M.C. Penalva, F.J. García, y L. Ordoñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI.* (pp. 497-508). Jaén: SEIEM.

Scherrer, J., y Stein, M.K. (2013). Effects of a coding intervention on what teachers learn to notice during whole-group discussion. *Journal of Mathematics Teacher Education*. 16(2), 105-124

Sherin, M. G., Jacobs, V. R., y Philipp, R. A. (Eds) (2010). Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes. New York: Routledge

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(2), 147-164.

Van Es, E. y Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, 10(4), 571-596.

Wells, G. (2002). *Dialogic Inquiry. Towards a sociocultural practice and theory of education* (2nd ed.). Cambridge: Cambridge University Press.

Yesildere-Imre, S., y Akkoç, H. (2012). Investigating the development of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge of generalizing number patterns through school practicum. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*, 207-226.

Zapatera, A., y Callejo, M.L. (2011). Nivel de éxito y flexibilidad en el uso de estrategias resolviendo problemas de generalización de pautas lineales. En M. Marín, G. Fernández, L.J. Blanco y M. Palarea (Eds). *Investigación en Educación Matemática XV.* (pp. 351-360). Ciudad Real: SEIEM.

Zapatera A., y Callejo, M.L. (2013). Cómo interpretan los estudiantes para maestro el pensamiento matemático de los alumnos sobre el proceso de generalización. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Etepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 535-544). Bilbao: SEIEM

Zazkis, R., y Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, *49*, 379-402.

MEDIACIÓN SEMIÓTICA Y CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADO DEL RAYO A TRAVÉS DE SU USO[1]

Semiotic mediation and meaning-making of ray through its use

Leonor Camargo, Patricia Perry, Carmen Samper, Óscar Molina

Universidad Pedagógica Nacional, Colombia

Resumen

Presentamos una conceptualización de las nociones "construcción de significado" y "mediación semiótica del profesor" ilustradas con el análisis de la construcción de significado del objeto geométrico rayo, a la luz de una perspectiva semiótica inspirada en la idea peirceana de signo triádico. Introducimos el concepto "objeto dinámico didáctico" derivado de la identificación de signos-objeto, sugeridos por Peirce como uno de los componentes de la semiosis. Ejemplificamos el tipo de análisis con el que recurrimos a las dos nociones mencionadas para estudiar a fondo cómo se construye conocimiento matemático en el aula, con un fragmento de clase tomado de un curso de geometría de nivel universitario.

Palabras clave: *construcción de significado, mediación semiótica del profesor, análisis semiótico desde una perspectiva peirceana, objeto dinámico didáctico*

Abstract

We present a conceptualization of the notions "meaning-making" and "teacher semiotic mediation" illustrated with the analysis of meaning-making of the geometric object ray, in the light of a semiotic perspective inspired by the Peircean idea of triadic sign. We introduce the concept of "didactic dynamic object" derived from the identification of sign-objects, suggested by Peirce as one of the components of semiosis. We illustrate the type of analysis, in which we resorted to the two notions mentioned, to study in depth how mathematical knowledge is constructed, with a class fragment from a university level geometry course.

Keywords: *meaning-making, teacher semiotic mediation, semiotic analysis from a Peircean perspective, didactic dynamic object*

INTRODUCCIÓN

En el sistema educativo colombiano, el objeto geométrico rayo se introduce en los primeros años de educación primaria, se menciona ocasionalmente en secundaria y se usa en cursos universitarios de geometría euclidiana. En primaria, por lo regular, se presenta mediante una representación icónica, como sinónimo de semirrecta; se describe como porción de una recta que tiene "un punto inicial y [otros puntos] que siguen indefinidamente en una dirección" (Camargo, Castiblanco, Leguizamón y Samper, 2003) y se establece visualmente su distinción con una recta y un segmento. En secundaria, en ocasiones se introduce la definición de rayo y se proponen ejercicios tendientes a interpretar los términos involucrados. Por ejemplo, se define el rayo *LK* como "el conjunto de puntos del segmento *LK* junto con todos los demás puntos de la recta *LK*, tal que *K* esté entre cualquiera de estos puntos y *L* (Samper, 2008). A partir de la definición, se proponen algunos ejercicios de reconocimiento y diferenciación de rayos y se definen rayos opuestos. Consideramos que la construcción de significado de rayo va más allá de la interpretación de su definición; se puede continuar a través del uso de la definición en la resolución de problemas matemáticos. Específicamente, es un objeto que usado con los números reales positivos permite justificar que en un sistema teórico de geometría plana euclidiana se puede determinar un punto en una interestancia y a una distancia dada de otro.[2]

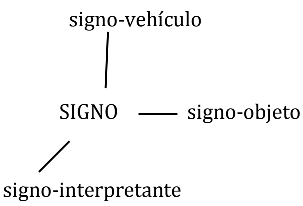
Camargo, L., Perry, P., Samper, C., Molina, O. (2014). Mediación semiótica y construcción de significado del rayo a través de su uso. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 197-206). Salamanca: SEIEM.

Como parte de un proyecto de investigación en curso, cuya problemática se centra en la búsqueda de mecanismos para propiciar y favorecer la construcción de significados en el aula de clase, de nivel universitario, y se propone interpretar en detalle cómo se da este proceso, optamos por recurrir a elementos de la teoría del Signo triádico de Peirce basándonos en elaboraciones de dicha teoría realizadas por Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012). Consideramos que esta teoría es útil para describir el aprendizaje de las matemáticas e interpretar la gestión del profesor denominada mediación semiótica. Las nociones de construcción de significado (Robles, Del Castillo y Font, 2010) y mediación semiótica del profesor (Muñoz-Catalán, Carrillo y Climent, 2010; Salinas, 2010; Mariotti, 2012; Samper, Camargo, Molina y Perry, 2013) son constructos útiles, que tienen su origen en la perspectiva sociocultural de Vygotsky (1995), para describir, interpretar y explicar fenómenos específicos de aprendizaje, dado la aproximación metodológica de la enseñanza con la que se desarrolla el curso de geometría plana, escenario de varias investigaciones que desde 2004 hemos adelantado en torno a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración (e. g., Camargo, Samper, Perry, Molina y Echeverry, 2009; Molina, Samper, Perry y Camargo, 2011).

El objetivo de este escrito es presentar un análisis de un episodio de aula, en el que se avanza en la construcción de significado de rayo[3], con la mediación semiótica del profesor. Nos interesa contribuir a precisar lo que significa adoptar una perspectiva semiótica de la enseñanza y del aprendizaje inspirada en la idea peirceana de Signo triádico, no solo como aporte a la investigación sino también a la enseñanza de conceptos matemáticos. Comenzamos delineando los elementos centrales de la teoría. Luego presentamos una síntesis del proceso metodológico investigativo, incluyendo la descripción del contexto experimental. Enseguida, ejemplificamos el análisis hecho al episodio y exponemos los resultados de dicho análisis. Concluimos el texto con algunas reflexiones que son producto del análisis realizado.

MARCO DE REFERENCIA

La perspectiva semiótica de la enseñanza y el aprendizaje que desarrollan Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012) está basada en la teoría del Signo triádico de Peirce. Desde el punto de vista de Peirce, la semiosis es la actividad comunicativa o mental en la que se crean o se usan SIGNOS.

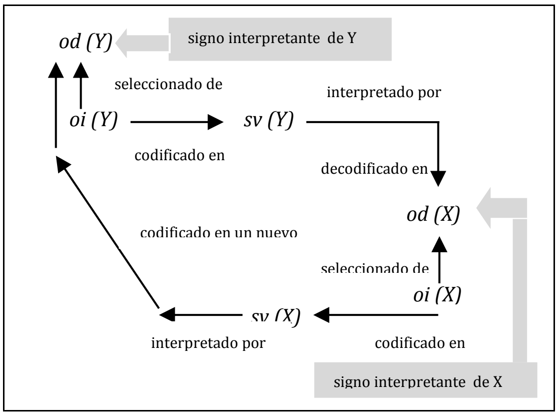


En un SIGNO se ponen en relación tres componentes: signo-objeto (so), a lo que se alude en la comunicación o el pensamiento; signo-vehículo (sv), representación con la que se alude al objeto (e. g., palabras, gestos, gráficos, combinación de estos tres elementos, etc.); y signo-interpretante (si), lo que produce el signo-vehículo en la mente de quien lo percibe e interpreta.

A continuación, describimos, de manera esquemática, la semiosis que tiene lugar en un intercambio verbal constituido por dos turnos. Para dar inicio a la comunicación, una persona Y elige un determinado aspecto de un *signo-objeto* que hace parte de su *signo-interpretante*, lo codifica y expresa un *signo-vehículo* dirigido a una persona X. En un acto de interpretación de lo dicho por Y, que se da en el marco de su conocimiento y experiencia, X decodifica el *signo-vehículo* emitido por Y, y surge en la mente de X un *signo-interpretante*, que determina su *signo-objeto* que puede o no estar en consonancia con el *signo-objeto* incluido en el *signo-vehículo* de Y. En su turno, X centra la atención en un aspecto de su *signo objeto* y lo codifica en un *signo-vehículo* dirigido a Y. Ahora es Y, quien en el marco de su conocimiento y experiencia, decodifica el *signo-vehículo* emitido por X y surge en Y su *signo-interpretante* que determina un nuevo *signo-objeto.*

La complejidad del proceso descrito hace evidente la necesidad y conveniencia de identificar clases de *signos-objeto, signos-interpretante* y *signos-vehículo.* Para efectos del análisis realizado al episodio que es tema de este documento, solo nos referimos a la distinción que hacen Sáenz-

Ludlow y Zellweger (2012) de tres clases de *signo-objeto:* el *Objeto Real* (*OR*), matemático en nuestro caso, que es un objeto aceptado por la comunidad del discurso matemático de referencia; el *objeto inmediato del emisor* (*oi*), constituido por un aspecto específico del *OR* que el emisor representa con un *signo-vehículo*; y el *objeto dinámico del receptor* (*od*), que se refiere a un aspecto de lo interpretado por el receptor, a partir del *signo-vehículo* del emisor.



Esta clasificación pone en evidencia la complejidad de la comunicación, no solo porque los objetos *inmediato del emisor* y *dinámico del receptor* generalmente no están en consonancia, sino porque el *objeto inmediato del emisor* está explícito en el *signo-vehículo* que lo acarrea, mientras que el *objeto dinámico del receptor* es generado en su *signo-interpretante*, no es explícito, y debe ser inferido a través de uno o más *signos-vehículos* producidos por el receptor, cuando asume el papel de emisor. Esto hace que sea difícil distinguir claramente el *objeto dinámico* del *objeto inmediato* cuando la persona cambia su papel de receptor a emisor, pero no se da un cambio sustancial en el aspecto del *OR* al que la persona se está refiriendo.

En particular, en una interacción dialógica en el aula, cuyo propósito es el aprendizaje de los estudiantes con el apoyo de un experto representante de la comunidad del discurso matemático, se produce una semiosis colectiva cuya intención es la *construcción de significado* de un *Objeto Real* matemático, ligado a una meta educativa particular. La comunicación genera una secuencia de SIGNOS triádicos. Los *objetos inmediatos del profesor*, son aspectos del *OR* que quiere representar en sus *signos-vehículos.* Los *objetos dinámicos de los estudiantes*, inferidos a partir de sus respectivos *objetos inmediatos*, y que hacen parte de sus *signos-interpretantes*, están en menor o mayor coincidencia con los *objetos inmediatos* del profesor. La meta de la enseñanza es lograr la convergencia de los *objetos dinámicos* de los estudiantes hacia *objetos inmediatos* que se correspondan con los *objetos inmediatos del profesor.*

Llamamos *mediación semiótica del profesor* a las acciones comunicativas deliberadas que realiza con el propósito de lograr la convergencia mencionada en el párrafo previo. Tal propósito hace que, en el intercambio comunicativo, se vea en la necesidad de ajustar sus *objetos inmediatos*, a aquellos aspectos interpretados por él, cuando actúa como receptor, que considera útiles en la evolución que pretende. Por esta razón, la mayoría de los *objetos dinámicos* generados en sus *signos-interpretantes* no son *objetos dinámicos* matemáticos "genuinos" pues el objetivo de la interacción no se centra en que el profesor avance en la construcción de significado del *OR*, objetivo de la interacción, (aun cuando eventualmente sí lo haga), sino contribuir a que sus estudiantes sí avancen en ello. En Perry, Camargo, Samper, Sáenz-Ludlow y Molina (2014) les pusimos el adjetivo "didácticos" y los llamamos *objetos dinámicos didácticos del profesor* (*odd*). Con este constructo pretendemos interpretar la mediación semiótica del profesor en acciones que resultan de las interpretaciones que hace de los significados que los estudiantes van construyendo.

ASPECTOS METODOLÓGICOS DE LA INVESTIGACIÓN

El episodio analizado se compone de interacciones comunicativas entre los estudiantes, cuando resolvían algún problema en grupos de dos o tres personas (constituidos voluntariamente), con el apoyo del programa de geometría dinámica Cabri, o entre el profesor y todos los estudiantes, durante una puesta en común de las soluciones al problema. Específicamente se consideraron algunos momentos de dos clases de una implementación del curso de geometría euclidiana plana de un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, en la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia). Estaba constituido en esta oportunidad por 14 estudiantes cuyas edades estaban entre 18 y 24 años. El curso se ubica en el segundo semestre del programa y tiene como propósito que los estudiantes aprendan a demostrar, participando en actividad demostrativa asociada a la resolución de problemas geométricos abiertos que incluyen la realización y exploración de una construcción en Cabri, a partir de la cual deben formular conjeturas y validarlas en el sistema teórico que se va conformando en el curso. El profesor, coautor de este artículo, tiene amplia experiencia en el respectivo desarrollo curricular. Una de sus tareas en las clases consiste en guiar la exposición del trabajo de los grupos para discutir las conjeturas formuladas, promover la demostración de aquellas que se admiten como ciertas e institucionalizarlas como teoremas del sistema.

Desde 2004, el curso de geometría plana ha sido escenario de un experimento de enseñanza (Cobb y Whitenack, 1996) que busca analizar diversos fenómenos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la demostración (Camargo, Samper, Perry, Molina y Echeverry, 2009; Molina, Samper, Perry y Camargo, 2011). A continuación presentamos algunos aspectos del registro de información, la construcción de datos experimentales y el análisis de los mismos.

Registro de información

La información sobre la actividad semiótica desplegada en la clase, provino de cinco fuentes: (i) video grabaciones de todas las clases de geometría plana del segundo semestre de 2013, hechas con dos cámaras; se accionaban para enfocar al profesor, el tablero, los computadores o a los estudiantes, según el interés de capturar la interacción comunicativa y poderla reproducir lo más fielmente posible; (ii) grabaciones de audio tomadas con dos dispositivos: uno de ellos situado muy cerca del profesor y el otro cerca a los estudiantes; (iii) notas de clase de los estudiantes, como tarea cotidiana en la clase; distribuidos por grupos, los estudiantes se turnaban a diario para reconstruir los principales aspectos tratados en la clase y enviar las notas al profesor; él las revisaba y las ubicaba en una carpeta virtual en la web para uso de todo el grupo; (iv) notas tomadas por algún miembro del equipo de investigación que acompañaba las clases y hacía observaciones no participantes, *in situ*, de los aspectos de la interacción que le parecía oportuno registrar y comentar en las reuniones de investigación; (v) reconstrucción narrativa a cargo del profesor en las reuniones de investigación para evaluar los sucesos de la clase y definir el rumbo de nuevas acciones.

Construcción de datos experimentales

Para la construcción del episodio, cuyo análisis se presenta aquí, se revisaron las interacciones registradas en las video grabaciones y las notas de clase del 5, 11 y 12 de septiembre, clases en las que se introdujo el objeto rayo y se usó para demostrar, en la última clase, el Teorema de Localización de Puntos (TLP)[4]. De acuerdo a la aproximación metodológica del curso, a raíz de una tarea, los estudiantes se involucraron en un proceso de resolución de un problema abierto con Cabri que los llevó a realizar una construcción que podía interpretarse haciendo referencia a un rayo. Se expusieron y se estudiaron las conjeturas que formularon, con el objetivo de determinar si el proceso de construcción y exploración realizada se podía validar teóricamente.

Para posibilitar que el lector se haga una idea global de lo sucedido en esas tres clases, presentamos un recuento rápido de estas, aunque el episodio se construyó únicamente con fragmentos de las clases del 5/09 y 12/09. La clase del 5/09 comienza con la presentación de las producciones de dos grupos de estudiantes, fruto de la resolución del problema “de los cuatro puntos” propuesto en una clase anterior, que el profesor recuerda así: *Dados tres puntos A, B y C, nos preguntan si es posible construir un punto D tal que [los segmentos] AB y CD se bisequen.* Con el problema, se busca que los estudiantes tengan la experiencia de construir un punto con unas condiciones específicas: en una interestancia[5] dada y a una distancia específica de otro punto. Casi todos los grupos se valen de una circunferencia con centro en el punto medio del segmento *AB* y radio *CM*[6]. Pero como el objeto circunferencia no hace parte del sistema teórico construido hasta el momento, el problema busca preparar el camino para introducir el TLP como sustituto del Postulado recta-números reales[7], el cual permite justificar el procedimiento usado para determinar el punto *D* a una distancia de *M* igual a *CM*. El episodio se construye a partir de la exposición de Juan, del trabajo realizado por María, Elisa y él. El profesor los escoge precisamente porque ellos se valen de un rayo, además de la circunferencia, para encontrar el punto *D*. Los fragmentos de la interacción correspondiente al 5/09, escogidos para construir el episodio, incluyen: la explicación de Juan sobre cómo construyeron el punto *D*, una interacción comunicativa en la que discuten cuál es el término apropiado para referirse al rayo y si se puede denominar vector o semirrecta, la comparación que se hace de la construcción del grupo de Juan con la hecha por otros grupos que usaron una recta y no un rayo, y la escritura en el tablero del listado de conjeturas obtenidas, fruto de la resolución del problema.

En la clase del 11/09 se demuestra la conjetura: Dados tres puntos no colineales *A*, *B* y *C*, si *D* pertenece a la recta *CM*, *D* es diferente de *C*, *M* punto medio del segmento *AB*, y *MD* igual a *MC*, entonces el segmento *AB* y el segmento *CD* se bisecan. Para justificar la interestancia *C-M-D* se valen del Postulado recta-números reales y descartan las opciones *D-C-M* y *C-D-M*. Finalmente, dado que Juan menciona el uso de un rayo se introduce la definición: “Un rayo *AB* es la unión del segmento *AB* con el conjunto formado por los puntos *Y* tal que *A-B-Y*”.

En la clase del 12/09, el profesor les pide analizar si la demostración cambia o no, en caso de construir el punto *D* usando el rayo *CM* y no la recta *CM*. Los fragmentos de clase que se incluyen en la construcción del episodio contienen la reconstrucción de los primeros pasos de la demostración hecha el 11 de septiembre donde se resalta la diferencia entre las garantías teóricas que permiten validar la interestancia *C-M-D* según si se usa una recta o un rayo. En el caso de usar un rayo, es necesario expresar la pertenencia de un punto a un rayo como una disyunción, valiéndose de la unión incluida en la definición, para luego poder identificar dos posibles interestancias y descartar una. El episodio queda entonces constituido por fragmentos de interacción de las clases del 5/09 y 12/09, aunque en algunas intervenciones se aluda a sucesos del 11/09.

Una vez seleccionados los fragmentos de interacción para el análisis, se hizo la trascripción de los mismos, procurando una reproducción fiel de la interacción comunicativa. Esta se revisó varias veces, cotejando los registros de audio y video, y se incluyeron anotaciones entre paréntesis, para aclarar algunos aspectos del contexto de las intervenciones. Después, se hizo un primer ejercicio de análisis, poniendo en juego el marco teórico, lo que permitió dividir el episodio en 10 ciclos de interpretación, cada uno alusivo a un *objeto inmediato* introducido por el profesor; tres miembros del equipo de investigación resaltaron los *signos-vehículos* de profesor y estudiantes (lo que dicen), que consideraban relevantes para la reconstrucción de la semiosis correspondiente al significado del rayo, identificaron en los *signos-vehículos* los *objetos inmediatos*, como aquellos aspectos del significado de rayo explícitos en tales signos, y propusieron inferencias acerca de los *signos-interpretantes* (lo que piensan), *objetos dinámicos* (aspectos del significado que se percibe están en los interpretantes y se codifican en el siguiente *signo-vehículo* dando lugar a otro ciclo) y *objetos dinámicos didácticos del profesor* (aspectos del significado que el profesor espera movilizar con la mediación y que se codifican en el siguiente ciclo de la semiosis). Posteriores ejercicios de depuración permitieron afinar el análisis de cada ciclo y unificar las formulaciones para hacer referencia a cada uno de los componentes de la semiosis.

En la Tabla 1 ilustramos el ejercicio analítico realizado para cada ciclo. Corresponde al ciclo 8 del episodio, ocurrido después de revisar el procedimiento de construcción del punto *D* (ver enunciado del problema), comparar las interestancias resultantes si se construye *D* usando la recta *CM* o el rayo *CM*, diferenciar las garantías teóricas para la demostración de la conjetura, según si se usa la recta *CM* o el rayo *CM*, y establecer la pertenencia de un punto de un rayo a alguno de los conjuntos de la unión que aparece en la definición. El profesor considera necesario revisar qué significa que un punto pertenezca a un rayo y qué relación tiene con la disyunción mencionada en el paso de la demostración. En la primera columna se encuentra la identificación de la persona o personas que toma(n) la palabra. En la segunda columna está la verbalización: resaltado en gris, se encuentra el *signo-vehículo* de interés. En el caso del profesor, él pregunta por qué aparece una “o” cuando se expresa el significado de la pertenencia de un punto a un rayo y pide hacer explícita la definición. En el caso de los estudiantes, ellos definen el rayo *CM;* su intervención es parafraseada por el profesor, a manera de aprobación. En la tercera columna se identifica el *objeto inmediato* del profesor y se infiere un *objeto dinámico didáctico del profesor* y un *objeto inmediato del estudiante*. No en todos los ciclos se identifican los mismos componentes de la semiosis ni en el mismo orden. Eso depende de la dinámica de la interacción en cada caso. En este ciclo no hay suficiente información para inferir un objeto dinámico de los estudiantes.

Tabla 1. Ejemplificación del análisis realizado para cada fragmento

<table>
<tr><td>Profesor:</td><td>C, M, Y. (Ha quedado escrito en el tablero: “D pertenece al segmento CM o D pertenece al conjunto de los Y tal que C-M-Y”) ¿Ven el asunto? Ahora, ¿por qué acá aparece una “o”? Surge esta pregunta. Porque cuando analizamos la definición de rayo… en términos de notación ¿qué es el rayo CM? El rayo CM ¿es igual a qué?</td><td rowspan="5">oi-p: disyunción obtenida como consecuencia de la unión en la definición de rayo. (Se identifica de manera explícita en el sv)

odd-p: El uso de la definición de rayo en la demostración requiere expresar la pertenencia de un punto a un rayo en términos de disyunción, afirmando que el punto puede pertenecer a cualquiera de los conjuntos que componen la definición. (Este odd se infiere del sv emitido por el profesor en el ciclo anterior).

oi-estudiante: definición de rayo en términos de unión de dos conjuntos. (Se identifica de manera explícita en su sv).</td></tr>
<tr><td>Estudiante:</td><td>Al segmento CM</td></tr>
<tr><td>Profesor:</td><td>Al segmento CM, ajá.</td></tr>
<tr><td>Estudiante:</td><td>unido con los puntos Y tal que C, M, Y.</td></tr>
<tr><td>Profesor:</td><td>unido con… los puntos Y tales que C, M, Y ¿cierto? Eso es lo que significa en términos de notación. ¿Se acuerdan que yo les decía que la definición de unión en términos verbales desde la lógica tiene el conector o? Eso significa que si yo quiero hablar de un punto [D] que pertenezca a este conjunto (señala la notación del rayo CM), que es el rayo, entonces tengo que decir: D está en este conjunto (señala la notación del segmento CM) o D está en este conjunto (señala la otra expresión que hace parte de la definición del rayo CM), ¿ven el asunto? […].</td></tr>
</table>

RESULTADOS

Exponemos los resultados del análisis del episodio, con respecto a dos asuntos, aunque por falta de espacio no presentamos el análisis de los diez ciclos de interpretación. El primero es la construcción de significado del objeto rayo, ligada al uso de su definición como garantía teórica en una demostración. Específicamente, se busca que los estudiantes se percaten de la unión que define al rayo, y que reconozcan que si un punto pertenece a un rayo debe pertenecer exclusivamente a uno de dos conjuntos disyuntos. En este caso, el análisis de la evolución de los *objetos inmediatos de los estudiantes y de los objetos dinámicos* de los estudiantes, a lo largo de los diez ciclos, es central. El segundo asunto es la mediación semiótica del profesor. En este caso, los *objetos inmediatos del profesor* y los *objetos dinámicos didácticos*, nos permiten explicar la mediación de forma detallada.

Acerca de la construcción del significado de rayo

En el análisis del episodio pudimos identificar un avance en la evolución del significado de rayo a través de los *objetos inmediatos* de los estudiantes, que construyen a partir de la interpretación que hacen del *OR* rayo, en su uso, promovido por los *signos-vehículos* del profesor. Se logra una evolución en los *objetos-dinámicos* contenidos en los *signos-interpretantes*, desde la representación geométrica de un rayo, hasta la interpretación de lo que significa que un punto pertenezca a un rayo, aspecto central para hacer operativa la definición en una demostración. En la Figura 1 ilustramos la evolución a la que hacemos referencia.

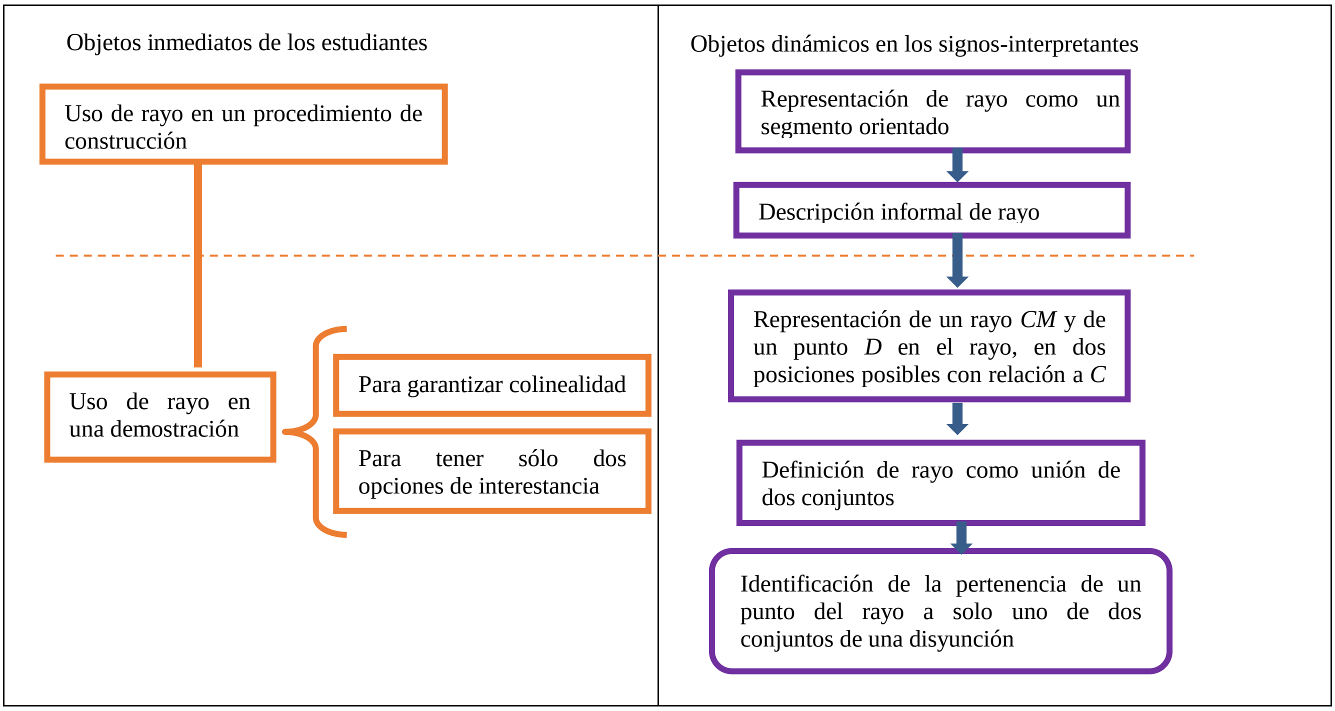


Figura1. Esquema de la evolución en la construcción de significado del objeto rayo

Inicialmente, el significado de rayo se asocia a su representación gráfica. En el procedimiento de construcción del punto *D*, tal que los segmentos *AB* y *CD* se bisequen (ver enunciado del problema), es necesario garantizar que el punto pertenezca a la recta *CM*, con *M* punto medio del segmento *AB* y luego que *D* quede a la misma distancia que *C*, de *M*. Los estudiantes recurren a la recta *CM* o al rayo *CM* para garantizar la colinealidad de *C*, *M* y *D*. Para efectos de la construcción en Cabri, no es necesario usar una recta, por eso algunos estudiantes usan un rayo. El profesor no desaprovecha la oportunidad para recordar la notación y la definición de este trabajada en el curso previo.

El significado inicial da paso a otras interpretaciones, cada vez más elaboradas. La representación geométrica se complementa con los nombres del punto origen *C*, otro punto en el rayo *M* y un tercer punto, *D*, que pertenece al rayo, hecho que permite afirmar que los tres puntos son colineales, aunque no se sepa la ubicación de *D* respecto a los otros dos. Con ello, el significado del rayo se asocia a su uso para garantizar la colinealidad de tres puntos. Luego, el significado se asocia a la definición matemática de rayo, especialmente a la identificación de este como unión de conjuntos. Y finalmente, la construcción de significado se hace más compleja aún, cuando se interpreta la implicación de la pertenencia de un punto a un rayo como una disyunción en términos de la pertenencia a uno u otro conjunto que componen la definición. Este último significado es potente matemáticamente, pues se usa en demostraciones que requieren validar interestancias.

Acerca de la mediación semiótica del profesor

La mediación semiótica del profesor se lleva a cabo a partir de los *objetos-inmediatos* que introduce en sus *signos-vehículos*. Como representante experto de la comunidad de discurso matemático tiene la responsabilidad de modular el acercamiento de los estudiantes al *Objeto Real* matemático presente en la interacción comunicativa. Consciente de su papel, aprovecha la oportunidad para contribuir a la evolución de los significados de los objetos matemáticos involucrados en el teorema, por parte de los estudiantes. Pero no es un asunto que pueda planearse completamente y de manera lineal, pues depende de los *signos-interpretantes* de los estudiantes, que el profesor va infiriendo de los signos vehículos que ellos producen. Algunos *signos-vehículos* del profesor no resultan tan pertinentes como otros para favorecer la construcción de *objetos dinámicos* de los estudiantes, cercanos al *Objeto Real* matemático. Además, los interpretantes de los estudiantes no evolucionan todos al mismo tiempo.

Objetos inmediatos del profesor	Objetos dinámicos didácticos del profesor
***oi*$_1$** Procedimiento de construcción de punto *D* en interestancia dada y a una distancia específica de un punto que se tiene, en el que se usa un rayo.	
***oi*$_2$** Denominación del objeto construido, notación y definición.	
***oi*$_3$** Diferencia de garantías para interestancias *C-D-M* y *C-M-D*, si se usa recta o rayo.	
***oi*$_4$** Justificación de colinealidad de *C, M, D* dado que *D* pertenece a la recta *CM*.	***odd*$_1$** Respecto de la inclusión de una recta en la construcción del punto *D*, es necesario hacer explícito que la construcción permite afirmar la colinealidad de *C, D* y *M*.
***oi*$_5$** Diferencia de las posibilidades de interestancia que puede tener un punto *D* cuando pertenece a una recta *CM* o un rayo *CM*.	***odd*$_2$** Respecto de las posibilidades de interestancia es necesario diferenciar los casos en los que *D* pertenece a recta o a rayo.
***oi*$_6$** Justificación, por definición de rayo, de que solo hay dos posibilidades de interestancia.	***odd*$_3$** Sobre la inclusión de un rayo en la construcción del punto *D* hay que reconocer que son posibles solo dos interestancias.
***oi*$_7$** Pertenencia de un punto de un rayo a solo uno de los conjuntos involucrados en la definición.	***odd*$_4$** En relación a lo que significa que *D* esté en el rayo *CM*, se debe precisar: la unión de dos conjuntos que conforman el rayo; la relación entre unión de dos conjuntos y la disyunción de proposiciones; el significado de pertenencia a un conjunto.
***oi*$_8$** Disyunción obtenida como consecuencia de la unión en la definición de rayo.	***odd*$_5$** En relación a la unión en la definición de rayo *CM*, que un punto pertenezca a un rayo conduce a considerar las dos opciones que corresponden a la disyunción.
***oi*$_9$** Posibilidades de punto *D* en segmento *CM*: *C-D-M,* {D}= {C} o {D}={M}.	***odd*$_6$** Sobre el análisis de la pertenencia de *D* a un segmento *CM* : hay que considerar si *D* puede ser *C* o *M*, además de la posible interestancia *C-D-M.*
***oi*$_{10}$** Cambios en garantías en la demostración de la conjetura correspondiente al problema de los cuatro puntos, si se usa recta o si se usa rayo.	***odd*$_7$** En relación a las opciones de interestancia si se construye el punto *D* sobre un rayo o sobre una recta, hay que identificar que los casos de interestancia diferenciados se deben al uso de garantías diferentes.

Figura 2. Esquema de la mediación semiótica del profesor

Algunos de los *objetos inmediatos* y los *objetos dinámicos didácticos* más significativos del episodio se presentan en la Figura 2. El primer aspecto del *OR* en el que se enfoca el profesor es el procedimiento de construcción del punto *D* en el que algunos estudiantes usan un rayo (oi_1) (ver problema de los cuatro puntos). Ello conduce de manera casi natural a la necesidad de acordar una denominación, una notación y una definición (oi_2). El profesor introduce un tercer *oi* (oi_3) con una pregunta que pretende enfocar la diferencia en las garantías teóricas para justificar las posibles interestancias, según si se ha construido una recta o un rayo. Sin embargo, muy rápidamente se da cuenta de que su tratamiento sería prematuro y, en consecuencia, enfoca la atención en la justificación de la colinealidad de los puntos *C, D* y *M* (oi_4); parece percibir que los estudiantes no han notado esta implicación (odd_1). Además se enfoca en el número de interestancias que se pueden obtener si *D* se ubica en la recta *CM* o en el rayo *CM* (oi_5 y odd_2). A continuación, introduce otro *objeto inmediato* (oi_6) con el que pretende que los estudiantes capten que la inclusión del rayo en la construcción solo da lugar a dos posibilidades de interestancia, *C-M-D* o *C-D-M.* Probablemente piensa que los estudiantes no han caído en cuenta de esta consecuencia (odd_3). Una nueva intervención del profesor busca que los estudiantes relacionen la definición de rayo con la pertenencia del punto *D* a alguno de los conjuntos de una disyunción (oi_7) porque quizá supone que los estudiantes no han precisado que al haber definido rayo como la unión de dos conjuntos, el punto *D* puede pertenecer a alguno de los dos conjuntos (odd_4). Después, con el siguiente *objeto-inmediato* (oi_8) el profesor se centra en las implicaciones de la "o" en la interpretación de la definición de rayo; probablemente piensa que los estudiantes deben fijarse en la necesidad de considerar las dos opciones que genera la disyunción (odd_5). Luego, se analizan las posibilidades relacionadas con la ubicación de un punto *D* en el rayo (oi_9 y odd_6), para finalizar retomando el interés por los cambios en las garantías en la demostración del enunciado de la conjetura correspondiente al problema de los cuatro puntos, según si se usa una recta *CM* o un rayo *CM* (oi_{10}). El profesor interpreta que los estudiantes necesitan identificar que los dos casos de interestancia que surgen, cuando se construye el rayo *CM,* precisamente se deben a la unión que define rayo (odd_7).

CONCLUSIONES

Con este artículo hemos querido ilustrar el tipo de análisis que estamos realizando con la intención de identificar, en detalle, el proceso de construcción de significado de un objeto matemático, objetivo último de nuestra investigación. El marco teórico nos ha permitido ver el aprendizaje como un proceso de evolución de significados personales de los objetos geométricos hacia significados adoptados por la comunidad de discurso matemático de referencia. Tal evolución se hace evidente en los cambios en los *objetos dinámicos,* contenidos en los *signos-interpretantes* e inferidos de los *signos-vehículos* de los estudiantes. En esta ponencia, en particular, hemos podido puntualizar qué significa construir el significado del rayo, ligado al uso de su definición en una demostración. Análisis similares realizados con otros objetos matemáticos nos permiten entrever la utilidad del marco de referencia con fines investigativos y divulgativos.

El proceso de construcción de significado se logra a medida que se van construyendo *objetos inmediatos*, fruto de la interacción comunicativa con un experto. Por esto ligamos estrechamente tal evolución a la mediación semiótica del profesor y a la ruta didáctica que siguió en la mediación. Consideramos que la identificación de *objetos dinámicos didácticos* apunta a identificar acciones explícitas de mediación del profesor que asume el reto de contribuir a construir significado. La perspectiva semiótica sugerida por Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012) se constituye en un marco de referencia útil para profundizar en la mediación puesto que brinda herramientas analíticas para identificar de qué manera el experto guía la evolución de significados matemáticos. No por ello es un reto complejo pues en ocasiones algunas respuestas de los estudiantes se pueden ver como eficaces con relación a una interpretación de una pregunta del profesor, pero no capturan el objeto inmediato que el profesor pretende que se identifique. Esto le impone al profesor un esfuerzo adicional por redireccionar la semiosis por otra vía, en busca de un resultado eficaz.

Referencias

Camargo, L., Castiblanco, C., Leguizamón, C. y Samper, C. (2003). *Espiral 2*. Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Norma.

Camargo, L., Samper, C., Perry, P. Molina, Ó. y Echeverry, A. (2009). Use of dragging as organizer for conjecture validation. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proc. 36rd Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 257-264). Thessaloniki, Greece: PME.

Cobb, P. y Whitenack, J. W. (1996). A method for conducting longitudinal analyses of classroom videorecordings and transcripts. *Educational Studies in Mathematics, 30*(3*),* 213-228.

Mariotti, M. A. (2012). ICT as opportunities for teaching-learning in a mathematics classroom: The semiotic potential of artefacts. En T. Y. Tso (Ed.), *Proc. 36th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 25-40). Taipei, Taiwan: PME

Molina, Ó., Samper, C., Perry, P. y Camargo, L. (2011). Actividad demostrativa: participar en la producción de un teorema. *Revista Integración*, *29*(1), 73-96.

Muñoz-Catalán, M.C., Carrillo, J. y Climent, N. (2010). Modelo de análisis de interacciones en un contexto colaborativo de desarrollo profesional. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 451-462). Lleida, España: SEIEM.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C., Sáenz-Ludlow, A. y Molina, Ó. (en evaluación). *Teacher semiotic mediation and student meaning-making: A Peircean perspective.*

Robles, M.G., Del Castillo, A.G., Font, V. (2010). La función derivada a partir de una visualización de la linealidad local. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 523-532). Lleida, España: SEIEM.

Sáenz-Ludlow, A. y Zellweger, S. (2012). The teaching-learning of mathematics as a double process of intra- and inter-interpretation: A Peircean perspective. En *Pre-proceedings of the 12th ICME*. Bajado de http://www.icme12.org/data/ICME12_Pre-proceedings.zip

Salinas, J. (2010). El uso de la historia de las matemáticas para el aprendizaje de la geometría en alumnos del bachillerato. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 557-568). Lleida, España: SEIEM.

Samper, C. (2008). *Geometría*. Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Norma.

Samper, C., Camargo, L., Molina, Ó. y Perry, P. (2013). Instrumented activity and semiotic mediation: Two frames to describe the conjecture construction process as curricular organizer. En A. M. Lindmeier y A. Heinze (Eds.), *Proc. 37th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 145-152). Kiel, Germany: PME.

Vygotsky, L. (1995). *Pensamiento y lenguaje.* Barcelona: Paidós.

---

[1] La investigación *Conjeturas y construcción de conocimiento en clase de geometría*, de la cual extraemos las ideas de la presente ponencia cuenta con el apoyo financiero de COLCIENCIAS y del CIUP, Universidad Pedagógica Nacional.

[2] Esta es la propuesta sugerida en Birkhoff, G. (1932). A set of postulates for plane geometry, based on scale and protractor. *Annals of Mathematics, 33*(2), 329-345. Disponible en http://www.jstor.org/ stable/1968336.

[3] En el curso se diferencian rayo y semirrecta: el rayo incluye el extremo y la semirrecta no lo hace.

[4] Teorema de Localización de Puntos: Dado el rayo CT y un número real z, z > o, entonces existe un único punto X que pertenece al rayo *CT* tal que la distancia de *C* a *X* es igual a *z*.

[5] Definición de interestancia: El punto *B* está entre *A* y *C* si: i) *A*, *B* y *C* son colineales y ii) distancia de *A* a *B* más distancia de *B* a *C* es igual a distancia de *A* a *C* ($AB + BC = AC$). La notación es: *A*-*B*-*C*.

[6] Usamos la notación *CM* sin otra alusión para representar la distancia de *C* a *M.*

[7] Postulado recta-números reales: Dada una recta, existe una correspondencia entre los puntos de la recta y los números reales tal que: (i) a cada punto de la recta le corresponde exactamente un número real; (ii) a cada número real le corresponde exactamente un punto de la recta.

MEDIDAS DE ASOCIACIÓN EN TABLAS 2X2: EVALUACIÓN DE UNA EXPERIENCIA DE ENSEÑANZA CON ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Association coefficients in 2x2 tables: Assessing a teaching experience with university students

Gustavo R. Cañadas, Carmen Batanero, Pedro Arteaga, María M. Gea

Universidad de Granada

Resumen

El objetivo de este trabajo fue evaluar una experiencia de enseñanza dirigida a desarrollar la competencia de cálculo e interpretación de las medidas de asociación en tablas 2x2 en estudiantes universitarios. Se describe la experiencia desarrollada en un curso reglado de análisis de datos, y la evaluación del aprendizaje en 92 estudiantes. Se encuentra que la mayoría es capaz de calcular estas medidas en una tarea abierta, con ayuda de Excel y una proporción alta proporciona interpretación estadística del tipo de asociación. Sin embargo se observa mayor dificultad en la interpretación probabilística del resultado y en la contextualización del mismo.

Palabras clave: *Tablas 2x2, medidas de asociación, interpretación, enseñanza.*

Abstract

The aim of this paper was to evaluate a teaching experience directed to develop competence in computing and interpreting association measures in 2x2 tables by university students. We describe the experience developed in a regular data analysis course and the evaluation of learning in a sample of 92 students. We found that most students were able to compute these measures and a high proportion provided correct interpretation of the type of association: however it was more difficult to provide a probabilistic interpretation of the result and to contextualize this result.

Keywords: T*able 2x2, measures of association, interpretation, teaching.*

INTRODUCCIÓN

Las tablas de contingencia tienen un papel esencial en la organización y análisis de datos y se presentan con frecuencia en actividades profesionales donde se debe interpretar la asociación entre estas variables y tomar una decisión adecuada. A pesar de su importancia, encontramos poca investigación sobre la comprensión del tema después de la enseñanza, pues la investigación existente se centra en la comprensión o estrategias intuitivas de interpretación de dichas tablas.

Objetivo: El objetivo del presente estudio fue analizar la competencia en el cálculo e interpretación de las medidas de asociación en una tabla 2x2 en estudiantes de psicología, después de haber recibido enseñanza sobre el tema. Con ello se quiere llenar esta laguna en la investigación.

Investigaciones previas

Una tabla de contingencia 2x2, formada por dos filas y dos columnas (Ver Tabla 1) es un objeto semiótico complejo. Aunque los datos de las celdas *a, b, c, d,* son frecuencias absolutas dobles, su significado no es equivalente desde un punto de vista psicológico, pues la celda *a* representa la presencia conjunta de los dos caracteres y tiene mayor impacto en la atención que la celda *d* (ausencia conjunta) o las otras dos celdas (sólo un carácter) (Estepa, 1994).

Cañadas, G. R., Batanero, C., Arteaga, P., Gea, M. M. (2014). Medidas de asociación en tablas 2x2: evaluación de una experiencia de enseñanza con estudiantes universitarios. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 207-216). Salamanca: SEIEM.

La investigación sobre tablas de contingencia se ha concentrado en el estudio de las estrategias intuitivas para analizar la asociación en tablas 2x2, mostrándose una gran dificultad en la tarea en adolescentes (Inhelder y Piaget, 1955). La investigación con adultos describe estrategias incorrectas, como usar solo una o dos celdas de la tabla (Smedslund, 1963; Estepa, 1994; Cañadas, 2011) o realizar comparaciones aditivas (Jenkins y Ward, 1965; Meiser y Hewstone, 2006).

Tabla 1. Esquema de una tabla de contingencia 2x2

	B	No B	Total
A	a	B	a+b
No A	c	D	c+d
Total	a+c	b+d	a+b+c+d

La interpretación intuitiva de las tablas de contingencia se complica por la existencia de la "correlación ilusoria" (Chapman, 1967) donde los sujetos son influidos por sus creencias previas al determinar la asociación. Batanero, Godino y Estepa (1998) describen concepciones incorrectas en relación a la asociación en tablas de contingencia, como la concepción causal o confusión entre asociación y causalidad; unidireccional, cuando no se acepta una asociación inversa, y local, donde se deduce la asociación de sólo una parte de los datos. Otros autores (ej. Cañadas, Batanero, Díaz y Estepa, 2013)han estudiado la precisión en la estimación intuitiva de la intensidad de la asociación y las variables que la afectan, constatando que es más precisa si las personas no tienen ninguna teoría respecto al tipo de asociación sobre los datos y cuando la asociación es directa e intensa.

Todas estas investigaciones se han realizado en sujetos que no han recibido una enseñanza formal en el tema. Para complementarlas el *objetivo de este trabajo* fue analizar la competencia que adquieren los estudiantes en el cálculo e interpretación de medidas de asociación en tablas 2x2 después de la enseñanza del tema. Para ello se diseñó un proceso de enseñanza, y se evaluó al final de la misma la competencia de cálculo e interpretación de estas medidas, que constituyen un recurso matemático para valorar objetivamente la asociación en dichas tablas. En lo que sigue se describe el método del estudio y el resultado de la evaluación.

MÉTODO

Muestra contexto educativo

La experiencia se llevó a cabo dentro de un curso reglado de Técnicas de Análisis en la Investigación Psicológica, obligatorio en el grado de Psicología en la Universidad de Granada, pues las tablas de contingencia son un contenido de dicho curso. En el estudio participaron 92 estudiantes del primer curso, divididos en dos grupos: 51 estudiantes en el primer grupo (8 hombres y 43 mujeres) y 53 en el segundo (16 hombres y 37 mujeres). La mayoría se encontraba en un rango de edad comprendido entre 19 y 20 años, con algún estudiante aislado que superaba esta edad.

Diseño de la enseñanza

El diseño de la enseñanza comenzó fijando su contenido a partir de un análisis previo del tema en libros de estadística orientados a Psicología o Educación (por ejemplo, Ato y López, 1996; Guàrdia, Freixa, Peró y Turbany, 2007). A partir de dicho análisis, se seleccionaron los objetos matemáticos más adecuados a la construcción de la propuesta didáctica (problemas, conceptos, propiedades, procedimientos, representaciones, argumentos) organizándolos en un proceso de estudio pretendido.

Se preparó un material escrito específico (Cañadas, 2011) colocado también en Internet (www.ugr.es/~analisisdedatos/webcurso/presentacion.html). Dicho material contenía los temas que se desarrollarían, ejemplos de ejercicios resueltos y otros propuestos para resolver, pruebas de autoevaluación para cada tema y una colección de programas Excel que facilitarían los cálculos y representaciones gráficas.

Se dedicaron seis sesiones de una hora de duración cada una a la enseñanza de las tablas de contingencia. Cuatro sesiones fueron desarrolladas en el aula tradicional y se dedicaron a la presentación de los temas; en otras dos sesiones prácticas realizadas en el laboratorio de informática, en pequeños grupos de 15-20 estudiantes, cada alumno trabajó independientemente con el ordenador utilizando los programas Excel citados para realizar las actividades prácticas. Se aseguró la validez de la observación mediante la presencia de observadores y la grabación en audio de las sesiones. Los profesores habituales de los cursos también asistieron a las sesiones.

El proceso de estudio se organizó alrededor de cuatro temas:

- *Tablas de contingencia, lectura e interpretación.* Se pretendía que el alumno aprendiese a: (a) Resumir datos en tablas de contingencia; (b) Interpretar los distintos tipos de frecuencias; (c) Representar gráficamente los datos y (d) Calcular probabilidades simples, compuestas y condicionales.
- *Asociación estadística, dependencia funcional e independencia*. Se pretendía que los alumnos adquiriesen competencia para (a) Diferenciar la asociación estadística, dependencia funcional e independencia; (b) Reconocer el tipo de relación comparando las frecuencias condicionales; (c) Calcular las frecuencias esperadas en caso de independencia y (d) Analizar posibles explicaciones de una asociación estadística.
- *El estadístico Chi-cuadrado y contrastes asociados*. Con los siguientes objetivos (a) Calcular e interpretar el estadístico Chi-cuadrado y sus grados de libertad; (c) Comprender los pasos en el contraste de independencia, y de homogeneidad interpretando sus resultados y comprendiendo sus supuestos.
- *Medidas de asociación*. Se trata de (a) Calcular e interpretar medidas de asociación en tablas 2x2; (b) Calcular e interpretar medidas de asociación en tablas rxc.

Como se ha indicado, se proporcionó al estudiante un programa Excel para facilitar los cálculos. Dicho programa constaba de cinco componentes, cada uno de ellos presentado en hojas indpendientes de Excel: "Frecuencias", "Gráficos", "Test Chi cuadrado", "Medidas asociación tablas 2x2" y "Medidas asociación tablas rxc". Se entregó a los estudiantes una descripción del programa en que, para cada una de las hojas se describen los objetivos, datos requeridos y resultados.

En el diseño de la enseñanza también se tuvieron en cuenta los principios de diseño instruccional propuestos por Cobb y McClain (2004) para el aprendizaje de la estadística:

1. Énfasis en el desarrollo de las ideas estadísticas fundamentales, tratando de relacionar los principales objetos estadísticos en forma progresiva y sin excesiva formalidad.
2. Uso de situaciones reales y motivadoras que apoyen el desarrollo del razonamiento de los estudiantes Para ello se contextualizaron los ejemplos y ejercicios en el campo de la Psicología, tomados de los textos citados o de artículos de investigación en dicho campo. Se puso especial cuidado en enfatizar la interpretación de los resultados en todos los problemas propuestos.
3. Integrar la tecnología, en forma que permita a los estudiantes evaluar sus conjeturas, explorar y analizar datos y desarrollar su razonamiento estadístico. Por este motivo se proporcionó a los estudiantes un programa de cálculo, liberando así tiempo para actividades de interpretación y exploración.
4. Promover el debate en el aula, favoreciendo el intercambio de las ideas y argumentos de los estudiantes y el descubrimiento dirigido.
5. Uso de la evaluación para informar sobre lo que los estudiantes aprenden, apoyarles en el aprendizaje y comprobar que se alcanzan los objetivos educativos.

Tarea de evaluación propuesta a los estudiantes

Al finalizar la enseñanza se realizaron varias pruebas de evaluación, que se resolverían todas ellas individualmente, incluyendo cuestionarios de opción múltiple para evaluar el conocimiento teórico adquirido y problemas abiertos que se resolvían con al apoyo de los programas Excel mencionados.

En este trabajo se analizan los resultados en uno de estos problemas abiertos, dirigido a evaluar el aprendizaje sobre medidas de asociación en tablas 2x2. En la tarea propuesta (Figura 1) existe una asociación inversa media-alta (coeficiente Phi de Pearson = -0,592), que es estadísticamente significativa (p=0,000). Se espera que el alumno tenga expectativas (teorías previas) que coincidan con el tipo de asociación; es decir que a priori piense que cuanto mayor tiempo de residencia, menor será el grado de ansiedad del inmigrante. Se trataría de una relación de tipo causal, donde el tiempo de residencia actuaría como causa y el efecto es un bajo ó alto grado de ansiedad.

Tarea. Se desea estudiar hasta qué punto existe relación entre el tiempo de residencia de inmigrantes en nuestro país y su grado de ansiedad. Se dispone de una muestra de 207 inmigrantes a los que se les evaluó en ambas variables obteniéndose la siguiente tabla de frecuencias observadas.

Tiempo de Residencia	Grado de ansiedad Bajo	Alto	Total
Poco tiempo	36	81	117
Mucho tiempo	81	9	90
Total	117	90	207

Calcule e interprete las medidas de asociación para tablas 2x2

(Adaptado de Guàrdia, Freixa, Peró, y Turbany, 2007, pág. 130)

Figura 1. Tarea propuesta

En las tablas 2x2 podemos diferenciar entre dependencia directa y dependencia inversa observando la frecuencia en algunas celdas. Las celdas *a* (presencia-presencia) y *d* (ausencia-ausencia) contribuyen a la asociación directa, mientras las otras dos celdas, donde se da un solo carácter y el otro no, apoyan la asociación inversa. En nuestro caso puesto que las celdas *b* y *c* tienen conjuntamente mayor frecuencia que las *a* y *d*, la asociación es inversa.

Para calcular los coeficientes se espera que el alumno utilice el programa Excel, y obtenga los coeficientes mostrados en la Figura 2, realizando las siguientes interpretaciones (Ato y López, 1996):

- *El coeficiente Phi de Pearson* mide la diferencia entre las frecuencias observadas en la tabla y las que se obtendrían en caso de perfecta independencia. En tablas 2x2 su valor es: $\Phi = \dfrac{a.d - b.c}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+c)(b+d)}}$

  Su interpretación es similar a la del coeficiente de correlación para variables numéricas, pues toma valores entre -1 y 1. Si el coeficiente es positivo, la dependencia es directa y más alta cuanto más se acerque a 1; este valor solo se obtiene cuando la dependencia es directa y perfecta, todos los casos están en las celdas *a* y *d*. Si el coeficiente es negativo, la dependencia es inversa y más alta cuanto más se acerque a -1 (valor que se obtiene cuando todos los casos están en las celdas *b* y c). El valor 0 se obtiene cuando hay independencia. En nuestro caso se obtiene un valor *0,592*, que corresponde a asociación moderada alta. El programa no proporciona el signo, que el estudiante ha de deducir mediante la observación de la tabla, donde se observa una asociación negativa, debido a que la mayoría de las frecuencias se concentran en las celdas b y d.

- *El riesgo relativo* puede calcularse tanto por filas como por columnas, aunque en este problema sus valores coinciden en 0,3418. Su valor absoluto informa del tipo de asociación, de modo que cuando RR = 1 no hay asociación entre las variables, si RR > 1 existe asociación positiva y si RR < 1, existe una asociación negativa, como en el problema dado. En la enseñanza, también se enseñó la interpretación probabilística de este coeficiente, que es la siguiente:
    - *El riesgo relativo por filas:* $RR_{filaz} = \dfrac{P(B/A)}{P(B/noA)} = \dfrac{a/(a+b)}{b/(c+d)}$ indica cuánto es más probable llevar poco tiempo de residencia, cuando el grado de ansiedad es bajo que cuando es alto. Como el valor es 0,3418, la probabilidad de llevar poco tiempo de residencia cuando se tiene poca ansiedad es la tercera parte de cuando se lleva mucho tiempo.
    - *El riesgo relativo por columnas:* $RRcolumnas = \dfrac{P(A/B)}{P(A/noB)} = \dfrac{a/(a+c)}{b/(b+d)}$ indica cuánto es más probable tener un bajo grado de ansiedad en personas con poco tiempo de residencia, al comparar con las que ya llevan un tiempo mayor. También en este caso la probabilidad es la tercera parte.
- *La razón de productos cruzados* toma el valor 0,0493. Como su nombre indica, es el cociente entre el producto de las celdas favorables a la asociación positiva y las favorables a la asociación negativa y se calcula mediante la expresión:

$$RC = \frac{a.d}{b.d} = \frac{a/c}{b/d} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Como vemos, es la razón entre dos cocientes: C_1 es la razón de casos en que se presenta o no se presenta *A* cuando está presente *B*. C_2 es la razón de casos en que se presenta *A* y no se presenta *A* cuando no está presente el factor *B*. El valor obtenido del coeficiente indica que la razón entre el número de emigrantes con “menos tiempo” de residencia y “más tiempo” de residencia es menor cuando el grado de ansiedad es bajo, que cuando llevan mucho tiempo. Además el valor absoluto del coeficiente informa del tipo de asociación, de modo que cuando *RC = 1* no hay asociación entre las variables, si *RC* > 1 existe asociación positiva y si *RC < 1*, existe una asociación negativa, como en el problema dado.

I16 =(D8*E10)/(D10*E8)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
2		TABLA DE DATOS								
3										
4				Variable Y						
5				Grado de ansiedad						
6				y1	y2					
7				Bajo	Alto	Total				
8	Variable X	x1	Poco	36	81	117				
9	T. residencia	x2	Mucho	81	9	90				
10			Total	117	90	207				
11										
12							Chi cuadrado		72,62	
13							Phi de Pearson		0,592	
14							Riesgo Relativo		0,34188034	Columnas
15									0,34188034	Filas
16										
17							Razón de productos cruza		0,04938272	

Figura 2. Cálculo de medidas de asociación mediante el programa facilitado a los estudiantes

MÉTODO DE ANÁLISIS Y RESULTADOS

Recogidas las respuestas escritas a la tarea se procedió a realizar un análisis de su contenido (Krippendorff, 1991)- La primera operación fue la lectura atenta de las producciones de los estudiantes, buscando las componentes relacionadas con cada uno de los apartados del problema. Las respuestas de todos los estudiantes fueron transcritas en un fichero de texto, asignando al estudiante su número y a cada respuesta un código correspondiente al apartado.

Las respuestas en cada apartado, se compararon entre sí, mediante un proceso inductivo y cíclico, hasta llegar a un número suficiente de categorías para mostrar la diversidad de soluciones. Todos los autores revisaron varias veces la codificación, hasta llegar a un acuerdo sobre las categorías que se utilizarán en el estudio. Somos conscientes de que a priori es posible otros tipos de respuestas, pero sólo se han considerado las que dieron los estudiantes, quienes mostraron en general poca capacidad de argumentación.

A continuación se exponen los resultados en cada apartado de la tarea.

Coeficiente Phi de Pearson

RC. El estudiante calcula bien el coeficiente Phi y su signo y lo interpreta adecuadamente, usando una notación adecuada. Por tanto tiene que combinar un procedimiento formal (cálculo del coeficiente con un programa), con otro informal (comparación de las frecuencias en las celdas de la tabla que corresponden a asociación directa e inversa). Interpreta correctamente el signo e intensidad. En general la interpretación es de tipo estadístico, como en la siguiente respuesta: *"Phi de Pearson = -0,592. La dependencia es inversa y moderada"* (E26). En pocos casos se añade o se sustituye por la interpretación en contexto: *"Como el coeficiente de Pearson es -0,592 la dependencia es inversa; quiere decirse que a mayor tiempo menor ansiedad"*. Fueron muy escasos los que hicieron esta interpretación, por lo que en las siguientes categorías y apartados sólo consideramos si la interpretación es correcta o incorrecta.

RP.1. *Cálculo correcto con error en el signo e interpretación correcta.* Aunque usa una notación adecuada y calcula el valor del coeficiente, haciendo interpretación correcta, se confunde el signo: *"Coeficiente Phi de Pearson Φ =0,592. Dado que el coeficiente es positivo, la dependencia es directa y moderada"* (E22).

RP.2. E*rror en el cálculo y signo del coeficiente, con interpretación correcta.* En lugar de obtener el coeficiente Phi de Pearson con el programa, lo calcula manualmente produciéndose un error. Se observa también conflicto en el signo, pero la interpretación final es adecuada: *"Phi de Pearson = Raíz de (72,61)/207 = 0,04. Observamos que es un valor positivo (dependencia directa). Es un valor moderadamente bajo"* (E102).

RP.3. *Cálculo correcto del coeficiente y signo con interpretación incorrecta*. No se reconoce los valores del coeficiente que corresponden a la asociación directa y cuáles de asociación inversa: "*Φ = -0,592. Como el valor es menor que 0, la dependencia es directa*" (E36).

RP.4. *Cálculo correcto, con signo e interpretación incorrecta*. Similar al caso anterior, e incluye error en el signo: "*Phi de Pearson = 0,592. Hay dependencia directa y perfecta*" (E19).

RP.5. *Valor correcto, con signo incorrecto y sin interpretación.* Se observan conflictos de cálculo del signo de la raíz cuadrada, y además no se interpreta el resultado: *"Phi de Pearson = 0,592"* (E4).

Como resumen, en la Tabla 2 podemos observar que el 35,8% de estudiantes calculan e interpretan correctamente el coeficiente, siendo mayoría los estudiantes que tienen algún error. El cálculo del valor absoluto y su interpretación fueron sencillos (93,4% y 85,8%), dándose la mayor dificultad en la deducción del signo. Una respuesta frecuente fue RP.1, donde obtienen el valor numérico, pero no el signo, realizando una interpretación correcta del resultado que obtiene.

Tabla 2. Frecuencias y porcentajes de respuestas para el valor Phi

	Frecuencia	Porcentaje	% valor absoluto correcto	% signo correcto	% interpretación correcta
RC.1	33	35,8	35,8	35,8	35,8
RP.1	43	46,7	46,7		46,7
RP.2	3	3,3			3,3
RP.3	2	2,2	2,2	2,2	
RP.4	5	5,4	5,4		
RP.5	3	3,3	3,3		
No responde	3	3,3			
Total	92	100	93,4	3,8	85,8

Riesgo relativo

RC.1. *Calcula e interpreta correctamente ambos valores*, interpretando de forma correcta que como el coeficiente toma un valor menor que 1, existe una dependencia inversa entre las variables: *"El riesgo relativo nos indica que existe una asociación negativa 0,34188034 < 1"* (E 9).

RC.2. *Cálculo correcto e interpretación probabilística.* Son los estudiantes que en su interpretación nos informan de cuanto es más probable la presencia de una variable respecto de la otra; lo que indica uso correcto de la probabilidad condicional y diferencia entre las variables independientes y dependientes, proceso difícil, según Ruiz (2006). Además, realizan una interpretación en el contexto del problema:

> Riesgo relativo: RR columnas = 0,34188034, es 0,3418 veces más difícil tener menos tiempo de residencia con ansiedad baja. RR filas = 0,34188034, es 0,3418 veces más difícil tener más tiempo de residencia con ansiedad baja. En ambos casos tenemos que RR < 1, por lo tanto, existe una asociación negativa (E22).

RP.1. *Cálculo correcto pero no interpreta los valores obtenidos*, lo que podría deberse a falta de competencias probabilísticas para interpretar el coeficiente: *"Riesgo Relativo = 0,3418034 Filas y columnas"* (E4).

RP.2. *Cálculo correcto e interpretación incorrecta*, no habiendo relacionado el resultado con la asociación negativa: "*RR < 1, 0,34 como es menor a 1, la asociación es positiva*" (E83).

RP.3. *Cálculo incorrecto con interpretación correcta* como el siguiente ejemplo: "*Los valores de riesgo relativo (RR) son por filas 6,92 y por columnas 2,92. Como las dos son mayores que 1 sabemos que existe asociación positiva*" (E 91).

Tabla 3. Frecuencias y porcentajes de respuestas para el riesgo relativo

	Frecuencia	Porcentaje	% RR correcto	% interpretación correcta
RC.1	60	65,2	62.7	62.7
RC.2	8	8,7	8.7	8.7
RP.1	3	3,3	3.3	
RP.2	5	5,4	5.4	
RP.3	7	7,6		7.6
No responde	9	9,8		
Total	92	100	79.9	78.8

En la Tabla 3 observamos que una gran parte de la muestra deduce un valor correcto que identifican adecuadamente con la asociación existente en la tabla. Sin embargo pocos hacen una interpretación probabilística del significado del coeficiente (RC2). Este resultado posiblemente se deba a las dificultades de los estudiantes con las probabilidades condicionales, descritas, entre otros autores por Falk (1986), y Contreras (2011). Exceptuando esta interpretación en términos de probabilidad condicional, se han tenido buenos resultados en la obtención del valor del riesgo relativo pues aproximadamente el 80% calcula o interpreta correctamente y el 70% las dos cosas.

Razón de productos cruzados

RC.1. *Cálculo e interpretación correctos*, identificando la asociación inversa: "*Razón de productos cruzados: 0,04938272. Como RC < 1, esto nos indica que hay dependencia inversa*" (E14).

RP.1. *Cálculo correcto* de la razón de productos cruzados, pero no lo interpreta, lo que sugiere algún conflicto sobre la comprensión del coeficiente ó en la noción de razón: *"Razón de productos cruzados = 0,04938272"* (E8).

RP.2. *Cálculo correcto e interpretación incorrecta* indicando que la asociación es directa: "*Razón de productos cruzados = 0,04938272. Existe asociación directa*" (E19).

RP.3. *Cálculo incorrecto, con interpretación correcta de tipo probabilístico,* mostrando una buena comprensión de la probabilidad condicional y la diferenciación de la variable dependiente e independiente:*"Razón de productos cruzados es 20,25, y esto implica que la razón entre los casos que aparecen A y no A es mayor cuando está presente B"* (E86).

En la Tabla 4 se observa que ningún estudiante dio una respuesta totalmente incorrecta, obteniendo el valor correcto (77,2%) ó interpretación correcta (65,2%). Pero, como el caso anterior, poco dan una interpretación en términos de probabilidad aplicándolo al contexto del problema.

Tabla 4. Frecuencias y porcentajes de respuestas para la razón de productos cruzados

	Frecuencia	Porcentaje	% cálculo correcto RR	% interpretación correcta
RC.1	54	58,7	58.7	58.7
RP.1	10	10,9	10.9	
RP.2	7	7,6	7.6	
RP.3	6	6,5		6.5
No responde	15	16,3		
Total	92	100	77.2	65.2

DISCUSIÓN Y CONSECUENCIAS PARA LA ENSEÑANZA

Nuestros resultados muestran que el porcentaje de estudiantes que llega a deducir, utilizando alguno de los coeficientes una asociación adecuada entre las variables es mucho mayor respecto al encontrado en investigaciones previas con estudiantes que no han recibido instrucción sobre el tema, quieres usan estrategias intuitivas, incorrectas en el 80% de los casos (Estepa, 1994; Cañadas et al.; 2013). En consecuencia, la experiencia de enseñanza desarrollada parece contribuir a la mejora de los estudiantes en su razonamiento sobre la asociación en tablas de contingencia 2x2.

En nuestra investigación la mayoría muestra competencia en el cálculo de los valores correctos y una amplia proporción llegan a una interpretación correcta del tipo de asociación. El cálculo del signo y valor de estas medidas de asociación parecen sencillos de comprender, aplicar e interpretar, siendo la más sencilla el riesgo relativo, seguido por la razón de productos cruzados y finalmente el coeficiente Phi. Asociados a las respuestas parcialmente correctas, se puede identificar algunas dificultades, como no comprensión del papel de cada celda de la tabla para indicar asociación directa o inversa (aunque sólo en una parte de los estudiantes) que lleva a asignar un signo erróneo.

Hacemos también notar que la mayor parte de los alumnos se limitan a dar una interpretación estadística del enunciado (tipo de asociación correcta) sin interpretar qué significa el tipo particular de asociación en el contexto del problema (implicación de la asociación estadística para la relación entre grado de ansiedad y tiempo de residencia). Ello sugiere la necesidad de poner mayor atención en la enseñanza a las actividades interpretativas en futuras replicaciones de la experiencia de enseñanza.

En la actividad pedida los alumnos parten de un problema de la vida real (estudiar la relación entre grado de ansiedad y tiempo de residencia) que modelizan matemáticamente mediante el estudio de las frecuencias de la tabla de contingencia y las diferentes medidas de asociación. Los alumnos recorren así el ciclo de modelización descrito por Henry (1997) pasando de la realidad (situación de los emigrantes) al modelo matemático (medidas de asociación) y trabajando con el modelo (cálculo en interpretación de las medidas). Pero no completan el último paso del ciclo, que sería traducir los resultados del trabajo con el modelo matemático a la realidad modelizada. Hemos encontrado este mismo comportamiento en otros trabajos previos como el de Batanero, Arteaga y Ruiz (2010), donde hemos resaltado la necesidad de que la enseñanza de la matemática tenga en cuenta este último paso del ciclo de modelización que posiblemente no fue bien resaltado en la experiencia analizada.

La escasez de interpretaciones de los coeficientes en término de probabilidades sugiere también dificultad al interpretar probabilidades condicionales, como las encontradas por Contreras (2011), que influyen en la interpretación de los riesgos relativos, aunque este sería un tema que requiere una investigación más detallada.

Como se indicó en la introducción, las tablas de contingencia son un instrumento útil para la investigación, el trabajo profesional y la toma de decisiones por lo que una persona estadísticamente culta debiera ser capaz de comprender e interpretar este objeto matemático. Ello sugiere la necesidad de una mayor investigación sobre la enseñanza de las tablas de contingencia y sobre la comprensión de las herramientas matemáticas para el estudio de la misma, como son los coeficientes de asociación. Nuestro trabajo ha dado un paso en este sentido, pero es necesario revisar la experiencia de enseñanza para mejorar los puntos débiles encontrados.

Agradecimientos: Proyecto EDU2010-14947 (MINN-FEDER) y Grupo FQMN-126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Ato, M. y López, J. J. (1996). *Análisis estadístico para datos categóricos*. Madrid: Síntesis

Batanero, C., Arteaga, P. y Ruiz, B. (2010). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(1), 141-154.

Batanero, C., Godino, J. & Estepa, A. (1998). La construcción del significado de la asociación mediante actividades de análisis de datos: Reflexiones sobre el papel del ordenador en la enseñanza de la Estadística. En J. R. Pascual (Eds.), *II Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 169-185). Pamplona: Universidad Pública de Navarra.

Cañadas, G. R. (2011). *Las tablas de contingencia para psicología.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Cañadas, G., Batanero, C., Díaz, C. Estepa, A. (2013). Un estudio de evaluación de la precisión de los estudiantes de psicología en la estimación de la asociación. *Bolema, 27 (47),* 759-778.

Chapman, L. J. (1967). Illusory correlation in observational report. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior, 6*(1), 151-155.

Cobb, P. y Mc Clain, K. (2004). Principles of instructional design for supporting the development of students‟ statistical reasoning. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking. Netherlands:* Kluwer Academic Publishers.

Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Estepa, A. (1994). *Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*. (pp. 292-297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.

Guàrdia, J., Freixa, M., Peró, M. y Turbany, J. (2007). *Análisis de datos en psicología,* Delta, Publicaciones Universitarias.

Henry, M. (1997). Notion de modéle et modélization en l'enseignement. En M. Henry (Ed.), *Enseigner les probabilités au* lycée (pp. 77-84). Reims: Commission Inter-IREM.

Inhelder, B. y Piaget, J. (1955). *De la logique de l´enfant à la logique de l´adolescent.* Paris: Presses Universitaires de France.

Jenkins, H. M. y Ward, W. C. (1965). Judgment of the contingency between responses and outcomes, *Psychological Monographs, 79,* 1-17.

Krippendorff, K. (1991). *Metodología de análisis de contenido,* Barcelona, Paidós.

Meiser, T. y Hewstone, M. (2006). Illusory and spurious correlations: Distinct phenomena or joint outcomes of exemplar-based category learning? *European Journal of Social Psychology, 363*(3), 315-336.

Ruiz, B. (2006). *Un acercamiento cognitivo y epistemológico a la didáctica del concepto de variable aleatoria*. Tesis de Máster. IPN, México.

Smedlund, J. (1963). The concept of correlation in adults. *Scadinavian Journal of Psychology, 4,* 165-174.

INDICIOS VERBALES EN LOS PAEV ADITIVOS PLANTEADOS POR ESTUDIANTES PARA MAESTRO

Verbal cues in the additive word problems posed by pre-service teachers

Angela Castro, Núria Gorgorió, Montserrat Prat

Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

Presentamos un estudio con futuros maestros acerca de la percepción que tienen y del uso que hacen de indicios verbales en el planteamiento de problemas aditivos de enunciado verbal de una etapa. A partir de los problemas propuestos por 128 alumnos del Grado de Educación Primaria, analizamos: (a) cómo usan los indicios verbales cuando plantean problemas aditivos de enunciado verbal; (b) cómo valoran la no correspondencia entre el indicio verbal y la operación a realizar en este tipo de problemas; y, (c) si los enunciados que proponen y los argumentos que ofrecen para justificarlos son coherentes. Constatamos que, en su mayoría, los alumnos plantean problemas que no requieren una comprensión profunda de enunciado y están construidos esencialmente en base al uso de indicios verbales. En nuestras conclusiones argumentamos la importancia de incidir en el papel de los indicios verbales en la formación de maestros.

Palabras clave: *Problema aritmético elemental verbal aditivo, indicios verbales, palabras clave, futuros maestros.*

Abstract

We herein present a study conducted on future teachers about their perception of verbal cues and the use they make of them when approaching additive word problems. In the problems posed by 128 students of the Degree in Primary School Education we analyse the following: (a) the way the students use verbal cues when approaching additive word problems; (b) their evaluation of the relationship between the verbal cues and the operation needed to solve this type of problems; and (c) whether the problems the students pose and the arguments they offer as justification are coherent. We conclude that most of the students pose problems that do not require a deep comprehension of the problem statement and are essentially constructed upon the use of verbal cues. As a conclusion of the study we argue upon the importance of modifying the role of verbal cues in the education of teachers.

Keywords: *elemental additive word problems, verbal cues, keywords, future teachers.*

INTRODUCCIÓN

Uno de los propósitos que ofrece el uso del marco conceptual de la invención de problemas en la investigación en Educación Matemática es la posibilidad de observar la comprensión matemática de los estudiantes (Silver, 1994; Castro, 2008). En nuestra experiencia como docentes de las asignaturas de Didáctica de las Matemáticas del Grado de Educación Primaria, observamos que al inicio de su formación los nuestros estudiantes tienen una visión limitada sobre la invención de problemas aritméticos de enunciado verbal de suma y resta con una operación –en adelante PAEV aditivos de una etapa (Castro, 1995; Socas, Hernández & Noda, 1997). La mayoría de nuestros estudiantes basan la formulación de problemas en el uso de indicios verbales o palabras clave, a la vez que utilizan las estructuras aditivas más sencillas de resolver. Así, al pedirles que redacten un problema de suma o resta, la mayoría de ellos propone enunciados del tipo: "*Si tengo 3 canicas y mi*

Castro, A., Gorgorió, N., Prat, M. (2014). Indicios verbales en los PAEV aditivos planteados por estudiantes para maestro. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 217-226). Salamanca: SEIEM.

madre ***me regala*** *1 más, ¿Cuántos canicas tendré?", o "Si tengo 5 galletas y* ***me como*** *3, ¿cuántas galletas me quedan?"*

Coincidimos con Orrantia, González y Vicente (2005) en que la utilidad práctica de las matemáticas se refleja, entre otros aspectos, en la resolución de situaciones problemáticas verbales. Estas situaciones ayudan a los alumnos a desarrollar habilidades necesarias para aplicar conocimientos matemáticos a situaciones del mundo real. Por ello, consideramos importante que los futuros maestros reflexionen sobre qué tipo de situaciones son las que permitirán a sus alumnos desarrollar estas capacidades. En particular, resulta importante que los futuros maestros reflexionen acerca de si los enunciados elaborados en base a palabras clave favorecen realmente el desarrollo de las capacidades vinculadas a la resolución de problemas. Esto nos lleva a preguntarnos qué piensan nuestros estudiantes acerca del uso de indicios verbales en el planteamiento de PAEV aditivos de una etapa y cuál es el uso que hacen de ellos en la formulación de este tipo de problemas. En una primera fase, partiendo de las propuestas de Puig y Cerdán (1988), Orrantia, et al. (2005) y Vicente, Orrantia y Verschafel (2008), entre otros, analizamos los PAEV aditivos propuestos por 128 alumnos de segundo año del Grado de Educación Primaria, antes de iniciar su formación en didáctica de las matemáticas. El análisis se desarrolla considerando la estructura semántica de los problemas y el papel de los indicios verbales. En una segunda fase, preguntamos a nuestros estudiantes por la posibilidad de que el indicio verbal presente en el enunciado y la operación a realizar no se correspondan y analizamos sus respuestas estudiando la coherencia entre los argumentos y los enunciados que proponen.

LA CLAVE: EL USO DE INDICIOS VERBALES

Orrantia (2003) señala que la resolución de un problema supone un elaborado proceso en el que interactúan distintas componentes y en el que la comprensión del enunciado tiene gran importancia. Para comprender el enunciado se crea una representación del mismo, desde la cual se deriva el modelo matemático que lleva a la solución del problema. Sin embargo, según este autor, en muchas ocasiones para determinar la operación a realizar, los alumnos hacen una representación menos elaborada, basada en la transposición directa de números y palabras clave al modelo matemático. En este procedimiento de transposición directa del texto a la operación, también llamado método de la palabra clave, se emparejan ciertos términos específicos con operaciones de suma y resta. Por ejemplo, si en el enunciado aparece el indicio verbal "gana" habrá que sumar. Esto lleva a que los alumnos seleccionen desde el enunciado números e indicios verbales que trasladan directamente al modelo matemático, sin construir una representación cualitativa de la situación del problema.

Según Orrantia, et al. (2005) el uso de este tipo de estrategias superficiales pone de manifiesto que los alumnos se enfrentan a situaciones problemáticas sin leer cuidadosamente el problema, lo que no les permite acceder a una representación de la situación en base al enunciado. Estos autores sostienen que las prácticas de enseñanza y los materiales curriculares a menudo promueven este tipo de estrategias. Señalan como ejemplo los problemas de suma y resta que aparecen en los libros de texto, que tienden a ser formulados y agrupados de modo que el uso de estrategias superficiales puede conducir a una ejecución correcta del problema. Cabe señalar que el uso de este tipo de estrategias resulta efectivo para resolver problemas cuando no se precisa comprender los enunciados para llegar a su solución, pero llevan al fracaso cuando los problemas precisan hacer algo más que una traducción directa de palabras clave a operaciones. Seguir las pistas textuales que aparecen en el enunciado del problema, en algunos casos, permite obtener su solución sin necesidad de una comprensión profunda de éste. Los indicios verbales o las palabras clave determinan "al menos parcialmente, la elección de la operación o influyen en ella. Estas palabras son cruciales a la hora de establecer la conexión existente entre la incógnita y los datos" (Puig y Cerdán, 1988, p. 94).

Los problemas de enunciado verbal en los que se utiliza un vocabulario especializado y limitado, promueven la utilización de indicios verbales como indicadores de la operación matemática a realizar[1] (Nesher, 2000). Para Nesher (2000) el hecho de que los textos de los problemas de enunciado verbal estén sobrecargados de números de forma artificial, resalta el rol especial que se les da a los objetos para ser manipulados numéricamente, sin recordar el propósito que estos tienen en sus contextos. Destaca que como consecuencia de presentar a los alumnos problemas de enunciado verbal de forma artificial, donde se utiliza un especializado y limitado vocabulario, se promueve la utilización de indicios verbales como indicadores de la operación que debe utilizarse. En consecuencia, muchos alumnos basan su proceso de resolución en la búsqueda de estos indicios verbales; actitud promovida en muchos casos por los maestros en un intento por ayudar a sus alumnos a pasar del enunciado verbal al lenguaje matemático, sugiriéndoles apoyarse en el significado de indicios verbales para encontrar la operación necesaria. En particular en el caso de los problemas de suma y resta, palabras como “ganar”, “perder”, entre otras, son las que los alumnos asocian con las operaciones de suma o resta (Orrantia, 2003).

Autores como Martínez y Gorgorió (2004) estudiaron las concepciones que un grupo de maestros de educación primaria de México tenían sobre la enseñanza de la resta. Constataron que para ellos, enseñar a los alumnos a resolver problemas en clase de matemáticas significaba, principalmente, plantear y resolver problemas que tuvieran un mismo tipo de estructura relacional y que involucraran palabras clave que pudieran ser utilizadas para saber qué operación debe realizarse. Estos autores señalan que para la mayoría de los maestros es fundamental incluir en el texto del problema palabras clave para que sean utilizadas por los niños como indicadores del tipo de operación aritmética que permite resolverlos, argumentando que estas palabras al ser utilizadas por los alumnos, serán de ayuda para resolver el problema.

TIPOLOGIA DE PAEV ADITIVOS

Los PAEV son problemas de contenido aritmético de enunciado verbal enunciados en un contexto de información verbal (Castro, 1995). En función de su estructura semántica, podemos hablar de distintos tipos de PAEV aditivos dependiendo de las relaciones que se establecen entre los elementos que aparecen en el enunciado. A partir de la propuesta de Vergnaud (1982) diferentes autores han propuesto esquemas de clasificación para los PAEV aditivos de una etapa: Riley, Greeno y Heller (1983), Puig y Cerdán (1988), Maza (1991), Carpenter, Fennema, Loef, Levi y Empso (1999), Orrantia (2003 y 2006), Orrantia, et al. (2005), y Cañadas y Castro (2011), entre otros.

Las clasificaciones de los PAEV aditivos de una etapa que encontramos en la literatura esencialmente diferencian tres categorías básicas que corresponden a los tres tipos de problemas a los que los alumnos se enfrentan frecuentemente en el aula: cambio, combinación y comparación. Puig y Cerdán (1988), Orrantia (2003), Orrantia, et al., (2005), Vicente, Orrantia y Verschaffel (2008) y Cañadas y Castro (2011), entre otros, definen los problemas de cambio como aquellos que parten de una cantidad inicial a la que se le añade o se le quita algo para obtener una nueva cantidad mayor o menor que la inicial; y definen los problemas de combinación y comparación como aquellos que parten de dos cantidades iniciales que se combinan o comparan para producir una tercera cantidad. Todos ellos coinciden en que, con el trascurso de los años, a estas tres categorías básicas se les ha agregado una cuarta categoría, llamada de igualación, resultante de una combinación de las categorías de cambio y comparación, en la que la relación de comparación entre las dos cantidades no se expresa de forma estática. Así, en función de las relaciones que se establecen entre los elementos que intervienen en el enunciado, tenemos problemas de cambio, comparación, combinación e igualación.

No obstante, consideramos que no basta con tener en cuenta las relaciones entre los elementos que aparecen en el enunciado, también debe considerarse si el orden de presentación de los datos en el enunciado corresponde o no con el orden en que éstos han de ser considerados al efectuar la operación requerida (Puig y Cerdán, 1988). Esta perspectiva permite extender esta clasificación, e identificar 20 tipos de PAEV aditivos de una etapa: 6 de cambio, 6 de comparación, 2 de combinación y 6 de igualación (al presentar el análisis de los datos se incluyen ejemplos de estos distintos tipos).

Vicente, Orrantia y Verschafel (2008) señalan que en función de la coincidencia o no coincidencia de los indicios verbales que aparecen en el enunciado del problema, se pueden clasificar los 20 tipos de problemas aritméticos elementales verbales presentes en la literatura en consistentes (cuando hay coincidencia) e inconsistentes (cuando no hay coincidencia). Sin embargo, consideramos que si queremos analizar la complejidad de los PAEV aditivos de una etapa, es necesario hacerlo no sólo desde el punto de vista de qué tipo de estructura semántica presentan y los indicios verbales presentes en el enunciado, sino que también se debe considerar el orden de presentación de los datos en el enunciado.

Tras un proceso de revisión de la literatura y de análisis de las propuestas de los estudiantes para maestro, proponemos una definición que permite analizar y clasificar los PAEV aditivos de una etapa, en problemas directos y no directos. Teniendo en cuenta los trabajos de Orrantia et al. (2005); Vicente, Orrantia y Verschafel (2008); y Puig y Cerdán (1988), elaboramos una definición que tiene en cuenta tanto la estructura semántica, como los indicios verbales y el orden de presentación de los datos. De esta forma, decimos que un problema es de tipo directo cuando cumple simultáneamente las siguientes condiciones: (1) el orden de presentación de los datos del problema coincide con el orden en el que estos datos deben ser considerados para resolver el problema y, (2) las operaciones que deben realizarse se deducen de forma inmediata del enunciado, a partir de indicios verbales o palabras clave. En el caso que no se cumpla una o ninguna de las condiciones, se trata de problemas no directos.

METODOLOGIA

Método y participantes

En este texto presentamos un estudio cualitativo de carácter interpretativo desarrollado con 128 estudiantes del Grado de Educación Primaria. Nuestro objetivo es: (i) estudiar el uso que hacen los futuros maestros de los indicios verbales al plantear PAEV aditivos de una etapa, (ii) valorar la no correspondencia entre el indicio verbal y la operación a realizar en este tipo de problemas; y, (iii) estudiar si los enunciados que proponen y los argumentos que ofrecen son coherentes.

Instrumento

Elaboramos un cuestionario en cuya primera parte tenían que plantear 3 problemas de suma y 3 problemas de resta con una única operación que fueran distintos entre sí, en el sentido de que involucraran el uso de diferentes estructuras aditivas. En una segunda parte buscamos conocer qué saben los futuros maestros acerca de los indicios verbales, con preguntas del tipo: *¿Es posible redactar el enunciado de un problema que contenga el verbo faltar y se resuelva con una suma? ¿Por qué? Redacta un problema de este tipo*. Las otras preguntas jugaban con las combinaciones: agregar/resta, menos/suma, y más/resta.

RESULTADOS

En una primera etapa de la investigación, analizamos los problemas propuestos por nuestros estudiantes clasificándolos en una tabla Excel en problemas directos y no directos. Observamos que la mayoría de ellos plantea enunciados usando un único tipo de estructura, a lo sumo dos. Dado que nos interesa identificar las estructuras más utilizadas y si éstas están construidas en base a indicios verbales; aunque uno de los alumnos plantee 2 o 3 problemas, si responden a un mismo tipo de estructura contamos su respuesta una única vez. Por ejemplo, para la categoría de cambio con incógnita en el cambio aumento (cambio 1), obtuvimos 114 problemas planteados por 51 alumnos, por lo que contamos 51 problemas. En la categoría de cambio con incógnita en el cambio disminución (cambio 2), obtuvimos 145 problemas propuestos por 88 alumnos, contando 88 problemas.

En nuestro análisis observamos que los enunciados propuestos con más frecuencia para la suma, son de tipo directo y corresponden a las estructuras de:

- Combinación con la incógnita en el todo; e.g. *"María tiene 5 galletas y Daniela 7 galletas ¿Cuántos galletas tienen entre las dos?"*, con 59 problemas. En este problema vemos que los indicios verbales "y" y "tienen entre las dos" dan pistas de la operación a realizar.
- Cambio con la cantidad final desconocida; e.g. *"Si tengo 3 caramelos y me regalan 8 más. ¿Cuántos caramelos tendré?"*, con 51 problemas. En este problema vemos que el indicio verbal "me regalan… más" sugieren que la suma es la operación a realizar.

Para la resta, observamos que el tipo de problema que más se repite es el de cambio con la cantidad final desconocida, también de tipo directo, propuesto por 88 alumnos; e.g. *"Si tengo 5 manzanas y me como 3. ¿Cuántos manzanas me quedan?".* En este caso, el indicio verbal "*me como"* sugiere que la operación a realizar es una resta.

Son muy pocos los estudiantes que proponen problemas pertenecientes a las categorías restantes, siendo algunos de tipo directo y otros no. Así, recogemos entre otros enunciados:

- 7 de comparación con la incógnita en el comparando; e.g. *"Juan tiene 12 caramelos y Pedro tiene 5 menos. ¿Cuántos caramelos tiene Pedro?"*
- 6 de combinación con incógnita en una parte; e.g. "Mi hermano y yo tenemos 30 globos entre los dos. Si 17 son míos, ¿Cuántos globos son de mi hermano?"
- 2 de comparación con incógnita en la diferencia; e.g. *"Si tengo 32 años y mi hermana 7 menos que yo. ¿Cuántos años tiene mi hermana?"*

De manera global, el 92.9% de nuestros estudiantes redacta enunciados de tipo directo, donde los indicios verbales presentes en el enunciado coinciden con la operación a realizar, y el orden en el que se presentan los datos es el conveniente para resolver el problema. Sólo el 7.1%, proponen problemas no directos, que requieren una compresión profunda del enunciado dado que el uso de indicios verbales o la trasposición secuencial de los datos del enunciado no conduzcan directamente a una correcta solución del problema, los llamados no directos (ver Tabla 1).

Tabla 1. Estructuras presentes en los enunciados.

Estructura	Descripción	Directos		No directos	
		Nº A	% A	Nº A	% A
Cambio 1	Aumento con incógnita en la cantidad final	51	20	0	0
Cambio 2	Disminución con incógnita en cantidad final	88	34.6	2	0.8
Cambio 3	Aumento con incógnita en el cambio	*	*	2	0.8
Cambio 4	Disminución con incógnita en el cambio	6	2.4	1	0.4
Cambio 5	Aumento con incógnita en la cantidad inicial	*	*	0	0
Cambio 6	Disminución con incógnita en cantidad inicial	*	*	1	0.4
Comparación 1	Aumento con incógnita en la diferencia	*	*	6	2.4
Comparación 2	Disminución con incógnita en la diferencia	2	0.8	0	0
Comparación 3	Aumento con incógnita en el comparando	2	0.8	*	*
Comparación 4	Disminución con incógnita en el comparando	7	2.8	1	0.4
Comparación 5	Aumento con incógnita en el referente	*	*	0	0
Comparación 6	Disminución con incógnita en el referente	*	*	1	0.4
Igualación 1	Aumento con incógnita en la igualación	12	4.7	4	1.5
Igualación 2	Disminución con incógnita en la igualación	3	1.2	*	*

Igualación 3	Aumento con incógnita en el comparando	*	*	0	0
Igualación 4	Disminución con incógnita en el comparando	*	*	0	0
Igualación 5	Aumento con incógnita en el referente	0	0	*	*
Igualación 6	Disminución con incógnita en el referente	0	0	*	*
Combinación 1	Aumento con incógnita en el todo	59	23.2	*	*
Combinación 2	Disminución con incógnita en una parte	6	2.4	*	*
Totales		236	92.9	18	7.1

La distribución de los distintos enunciados no directos recogidos es la siguiente:

- En el planteamiento del 3.4% de enunciados no se cumple la condición (1), pues el orden de los datos no es el conveniente para resolver el problema, pero el indicio verbal coincide con la operación a realizar (2). Estos problemas son del tipo: *María tiene 27 años* ***menos*** *que su madre. ¿Cuántos años tiene si su madre tiene 46?*
- En el 3.7% los que los indicios verbales no se corresponden con la operación a realizar (2), pero en ellos el orden de los datos es el conveniente para resolver el problema (1). Un ejemplo sería: *Javier tiene 56 cromos de futbol y Dani. ¿Cuántos cromos* ***más*** *tiene Javier?*
- No encontramos ningún enunciado en el que no se cumpla ninguna de las dos condiciones establecidas, es decir, en que: ni el uso de indicios verbales, ni la trasposición secuencial de los datos del enunciado conducen directamente a la solución correcta.

Resumiendo, de los enunciados no directos propuestos por los futuros maestros, sólo un 3.7% corresponden a enunciados en los cuales no es necesario el indicio verbal como indicador de la operación a realizar. Siendo el 97.3% problemas con indicio verbal, de los cuales el 92.9% son directos y sólo el 3.4% no directos.

En la segunda parte del cuestionario, se pregunta a los futuros maestros qué piensan de los indicios verbales, sirviéndonos de preguntas como: *¿Es posible redactar el enunciado de un problema que contenga el verbo* ***faltar*** *y se resuelva con una* ***suma****? ¿Por qué? Redacta un problema de este tipo.* Las otras preguntas jugaban con las combinaciones: agregar/resta, menos/suma, y más/resta. Al analizar las respuestas de los futuros maestros a estas 4 combinaciones, de manera general vemos que:

- El 85.2% cree posible redactar enunciados como los que proponemos, un 6% cree que no y un 8.8% no contesta.
- Independientemente de si la respuesta es positiva o negativa, el 2.4% de nuestros estudiantes sólo la justifica con argumentos, un 42.5% sólo con ejemplos, y un 33.1% argumentan y ejemplifican a la vez. Un 22% de los alumnos explican otras situaciones que no responden a nuestra pregunta, y proponen enunciados que involucran otro tipo de operaciones o acciones (multiplicar, contar letras de una palabra, entre otras).

Presentamos a modo de ejemplo sólo el análisis de la pregunta 1, *¿es posible redactar el enunciado de un problema que contenga el verbo faltar y se resuelva con una suma? ¿Por qué? Redacta un problema de este tipo*. En primer lugar, se analizan los argumentos propuestos por los alumnos; seguidamente se observa el uso que hacen del indicio verbal *faltar* en los enunciados que elaboran; y, finalmente, se analiza si existe coherencia entre lo que argumentan y las propuestas que hacen.

Agrupamos en 5 categorías las respuestas positivas que emergen de las explicaciones recogidas al preguntar por posibilidad de redactar un enunciado de un problema que contenga el verbo *faltar* y se resuelva con una suma. La distribución entre las categorías es la siguiente:

- El 15.5% dice que puede haber el verbo faltar en el enunciado siempre y cuando no tenga relevancia para la suma. Por ejemplo: *"siempre que no repercuta en el proceso de* *resolución, o sea un dato irrelevante"*; *"si se utiliza como planteamiento del problema y no se requiere para su resolución"*; *"es una información complementaria*"; entre otros.

- El 23.7% considera que sí es posible, pero sus razonamientos no justifican su respuesta; por ejemplo: *"si se puede sumar, también se puede restar", "es posible, pero es muy complicado".*
- El 11.8% considera que depende del objetivo del problema y de cómo se redacte el enunciado, dando argumentos tales como: "*depende de cómo se redacte, de lo que quieres que resuelvan"*; *"faltar no necesariamente implica una resta, depende de lo que queremos que resuelvan"*; *"lo que importa es la operación final"*; o *"depende de cómo redactes en enunciado".*
- El 15.8%, dice que una palabra no indica la operación a realizar, con argumentos del tipo: *"no tiene que utilizarse esta palabra para realizar la operación"*; *"no tiene porque influir la palabra en la operación a realizar"*; o *"no hace falta que el verbo utilizado sea la operación".*
- El 25% establece que si a una cantidad le falta algo, se le puede añadir otra, proponiendo argumentos como: *"porque cuando falta algo hay que añadir"*; *"si falta alguna cosa puedes completar con una suma"*; "*implica la ausencia de algo y se puede sumar para completar"*; o *"si a una cosa le falta algo es añadir".*

Por otro lado, los argumentos de los estudiantes que no creen posible redactar un enunciado de suma con el verbo faltar, se distribuyen de la siguiente forma:

- Un 7.9% dice que el verbo faltar siempre implica resta; por ejemplo: *"el verbo faltar siempre implica restar"*; *"siempre que falte alguna cosa se deberá restar"*; *"el verbo faltar siempre se usa con la operación de restar"*; o *"falta un verbo que concuerde más con los problemas de resta".*
- Uno de los estudiantes considera que el alumno que lo lea no entenderá qué problema le proponemos, y lo argumenta diciendo que *"no porque los alumnos no lo entenderán, ellos esperan palabras como añadir o más para la suma, no faltar".*

En segundo lugar organizamos y clasificamos los enunciados propuestos por los fututos maestros en base al uso que hacen del indicio verbal *faltar,* en función si lo utilizan como palabra clave o no. Agrupamos los enunciados en los que el verbo *faltar* no se usa como palabra clave en dos tipos:

- Por un lado, hay enunciados que involucran más de una operación. En ellos el verbo *faltar* implica directamente una resta y luego se agrega una suma: serían ejemplos: *"Carlos tiene 10 bolígrafos y a Isaac le faltan 3 para tener los mismos que Carlos. ¿Cuántos bolígrafos tienen entre los dos?*". El 31.6% de estos enunciados los dan estudiantes que afirman que es posible redactar un problema de suma con el verbo *faltar* y por un 1.7% de los que no responden nuestra pregunta.
- Por otra parte, encontramos enunciados en los que se utiliza el verbo *faltar*, pero este sólo implica una resta, como por ejemplo: *"¿Cuántos cromos me faltan para llegar a 50 si tengo 20?"*. El 6% de los enunciados de este tipo corresponde a estudiantes que afirman que es posible redactar un problema de suma con el verbo *faltar*, un 3.4% que afirma que no lo es, y un 0.9% no contestan.

Los enunciados en los que el verbo *faltar* no se usa como palabra clave se pueden organizar en:

- Un primer grupo formado por aquellas propuestas donde se utiliza el verbo *faltar* y se resuelven con una suma: *"Tengo 44 películas y me faltan 9 para tener la colección entera.*

¿Cuántas películas tiene en total la colección?”. Los enunciados de este tipo son propuestos por un 36.8% de los futuros maestros que afirman que es posible redactar un enunciado de suma con el verbo *faltar* y un 0.9% no contestan.

- Un segundo tipo agrupa aquellas respuestas en el que aparece el verbo *faltar* pero éste no tiene relevancia para el problema: *“A tú amigo le faltan 5 galletas para tener las mismas que tú. Él tiene 8 y tú 13. ¿Cuántas galletas reúnen entre los dos?”* Este tipo de enunciados son propuestos sólo por el 5.1% de nuestros estudiantes que afirma que se puede redactar el enunciado de un problema de suma con el verbo *faltar*.

- Y aquellos enunciados en los que aparece el verbo *faltar*, pero en el sentido de ausencia de una persona u objeto, como por ejemplo: *“Hoy han faltado 3 personas a clases y por la tarde faltan 10 personas más. ¿Cuántos alumnos han faltado durante el día?”* Este tipo de enunciado es propuestos sólo por el 5.1% de los que afirman que es posible redactar un problema de suma con el verbo *faltar*.

Por último, para comprobar la coherencia en las respuestas de los futuros maestros; es decir, la relación entre lo que afirman y los enunciados que proponen, tomamos las respuestas de los futuros maestros que argumentan y a la vez ejemplifican (ver Tabla 2).

Tabla 2. Argumentos y enunciados que proponen los futuros maestros.

Futuros maestros que argumentan y ejemplifican		Tipos de enunciados: No utilizan faltar como indicio verbal						Tipos de enunciados: Utilizan faltar como indicio verbal			
		Usa e implica suma		Sin relevancia para sumar		Sentido de ausencia		Más de una operación		Usa pero implica resta	
	Tipo de argumento	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%
Sí	Depende del objetivo problema	5	11.6	*	*	*	*	3	7	*	*
Sí	Una palabra no indica la operación a realizar	2	4.7	*	*	1	2.3	4	9.3	*	*
Sí	Faltar implica añadir	9	20.9	1	2.3	2	4.7	6	14	1	2.3
Sí	Utilizar sin relevancia para la suma	*	*	*	*	*	*	3	7	*	*
No	Siempre implica resta	*	*	*	*	*	*	*	*	6	14
	Totales	16	37.2	1	2.3	3	7	16	37.3	7	16.3

Analizar de manera conjunta los enunciados y argumentos nos permitió saber que:

- El 16.3% de nuestros estudiantes piensa que una palabra no indica la operación a realizar. El 42.9% de este grupo no utiliza el verbo *faltar* como indicio verbal. Entre ellos, el 28.6% propone enunciados que se resuelven con una suma como única operación en el sentido que esperamos; mientras que el 14.3% restante, utiliza este verbo en el sentido de ausencia de una persona u objeto. Por otro lado, un 57.1% propone enunciados en los que *faltar* es indicio verbal para la resta, planteando problemas que requieren restar y luego sumar.

- El 44.2% de nuestros estudiantes piensa que faltar implica añadir. El 36.9% de este grupo propone enunciados en los que se utiliza *faltar* como palabra clave para la resta, ya sea en problemas que involucran más de una operación (restar y luego sumar), o en los que sólo se requiere restar. Un 43.3% propone enunciados en los que *faltar* no es indicio verbal para la resta, elaborando enunciados en los que se utiliza este verbo en el sentido que esperamos y se resuelven con una suma como una única operación. El 15.8% restante, propone enunciados en los que el verbo *faltar* no tiene relevancia para la resta o se utiliza en el sentido de ausencia de una persona u objeto.

- El 14% creen que no es posible redactar un enunciado de suma con el verbo *faltar*, sus argumentos indican que consideran que *faltar* es palabra clave para la resta, y proponen enunciados directos que requieren una resta.

CONCLUSIONES

Para terminar, presentamos algunas reflexiones que nos planteamos como formadoras de maestros frente al reto de cambiar formas de hacer muy arraigadas entre nuestros estudiantes. Los resultados observados nos obligan a plantearnos la necesidad de trabajar para que aprendan a formular enunciados verbales de suma y de resta, más allá de enunciados directos con indicios verbales que facilitan directamente la resolución del problema.

Respecto al uso que hacen los futuros maestros de los indicios verbales al plantear PAEV aditivos de una etapa, y a la correspondencia entre el indicio verbal y la operación a realizar, vemos que el comportamiento descrito por Nesher (2000) y por Martínez y Gorgorió (2004) entre los maestros, y por Orrantia et al., (2005) en relación a los libros de texto coincide con lo que observamos en nuestro estudio. Resolver los problemas que proponen nuestros estudiantes requiere un sencillo ejercicio de traducción directa del enunciado verbal al lenguaje matemático, apoyada en el uso de palabras clave. Posiblemente esto es debido a que éstas son las situaciones a las que se han enfrentado con mayor frecuencia a lo largo de su experiencia escolar, son las que sus maestros les han propuesto y las que aparecían más a menudo en sus libros de texto. Lo que también puede explicar que al relacionar los argumentos que dan los futuros maestros sobre el uso de los indicios verbales en la invención de sus problemas, con los enunciados que proponen no existe coherencia entre lo que opinan y lo que plantean. Siendo sus argumentos muy superficiales.

Hemos apuntado también otras razones por las que se plantea a los alumnos únicamente problemas directos con estructuras simples. Posiblemente la más importante sea que se da por supuesto que en clase de matemáticas los problemas se resuelven exclusivamente con lápiz y papel. Sostenemos que la competencia de los alumnos para resolver problemas aumentaría si se plantease el trabajo con problemas verbales como algo que va más allá de un simple un ejercicio de traducción directa del lenguaje verbal a lenguaje matemático.

Como formadoras de maestros tenemos ante nosotras el reto de revertir esta situación. Consideramos que es importante hacer hincapié en el impacto que tiene el uso indebido de indicios verbales en los enunciados que plantean. Coincidimos con Martínez y Gorgorió (2004) en que el uso de palabras clave como indicadores del tipo de operación que los niños han de utilizar para resolverlos, tiene repercusiones didácticas importantes, puesto que el planteamiento de problemas en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria tienen un papel fundamental. Consideramos necesario promover la reflexión entre los futuros maestros, para que hagan un uso consciente de los indicios verbales y así evitar los errores que pueden derivarse de las representaciones simples de los problemas, como apunta Orrantia (2003). Coincidimos con Vergnaud (1991) al pensar que las palabras clave son un factor que puede limitar el desarrollo del cálculo relacional, al centrarse en el aprendizaje del cálculo numérico. Aparentemente, seguir los indicios verbales disminuye la dificultad en la resolución de un problema, pero, como apunta Orrantia (2005), no alcanzar un nivel de razonamiento óptimo en los PAEV aditivos provocará a la larga una mayor dificultad en la resolución de problemas de mayor complejidad.

En definitiva, queremos ofrecer a nuestros estudiantes elementos que les permitan plantear en su futura práctica docente problemas que fomenten la capacidad de sus alumnos para interpretar situaciones y resolverlas a partir de una profunda comprensión de su planteamiento.

Referencias

Cañadas, M.C. y Castro E. (2011). Aritmética de los números naturales. Estructura aditiva. En I.Segovia y L.Rico (coords.), *Matemáticas para maestros de Educación Primaria*. Pirámide: Madrid.

Carpenter, T.P., Fennema, E., Franke, M.L, Levi, L., & Empson, S.B. (1999). *Children's Mathematics. Cognitively Guided Instruction.* Potysmouth: Heinemann.

Castro, E. (1995). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicative.* Granada: Editorial COMARES.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En *Investigación en educación matemática XII* (p. 6). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Martínez, M. & Gorgorió, N. (2004). Concepciones sobre la enseñanza de la resta: un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado. Revista Electrónica de Investigación Educativa, 6 (1). Consultado el día 20 de enero del 2014 en: http://redie.uabc.mx/vol6no1/contenido-silva.html.

Maza, C. (1991). *Enseñanza de la suma y de la resta*. Madrid: Editorial Síntesis.

Nesher, P. (2000). Posibles relaciones entre lenguaje natural y lenguaje matemático. En N. Gorgorió, J. Deulofeu y A. Bishop (comp.), *Matemáticas y educación: Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp. 109-121). Barcelona: Graó.

Orrantia, J. (2003). El rol del conocimiento conceptual en la resolución de problemas aritméticos con estructura aditiva. *Infancia y Aprendizaje*, 2(4), 451-468.

Orrantia, J. (2006). Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva evolutiva. *Rev. Psicopedagogía*, 23(71), 158-180.

Orrantia, J., González, L., & Vicente, S. (2005). Un análisis de los problemas aritméticos en los libros de texto de Educación Primaria. *Infancia y Aprendizaje,* 28(4), 429-451.

Puig, L., & Cerdán Pérez, F. (1988). *Problemas aritméticos escolare*s. Síntesis.

Riley, M., Greeno, J., & Heller, J. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H.P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp.153-196). NY: Academic Press.

Silver, E. A. (1994). On Mathematical Problem Posing. *For the learning of mathematics*, *14*(1), 19-28.

Socas, M., Hernández, J. & Noda, A. (1997). Clasificación de PAEV aditivos de una etapa con cantidades discretas relativas. En M. Sierra & L. Rico (Eds.), *Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 46-62). Zamora: Universidad de Granada.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and substraction problems. In T.P.Carpenter, J.M.Moser & T.A.Romberg (eds.), *Additions and Subtraction:A Cognitive Perspective* (pp.39-59). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Trillas.

Vicente, S., Orrantia, J., & Verschaffel, L. (2008). Influencia del conocimiento matemático y situacional en la resolución de problemas aritméticos verbales: ayudas textuales y graficas. *Infancia y Aprendizaje*, 31(4), 463-483.

---

[1] Existen listados de palabras clave, por ejemplo el elaborado por el Grupo de EGB de la APMA en 1987, para la adición y la substracción, citado en Puig y Cerdán (1988, p. 5).

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO FUNDAMENTAL PARA EL GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA: INICIO DE UNA LÍNEA DE INVESTIGACIÓN

Fundamental mathematical knowledge to access a teacher training degree: starting a research agenda

Ángela Castro, Elena Mengual, Montserrat Prat, Lluís Albarracín, Núria Gorgorió

Universidad Autónoma de Barcelona

Resumen

En esta comunicación establecemos el concepto de Conocimiento Matemático Fundamental (CMF) como aquel conocimiento disciplinar en matemáticas necesario para seguir con aprovechamiento las materias de Matemáticas y de Didáctica de las Matemáticas del Grado en Educación Primaria. Relacionamos esta primera definición de CMF con las teorías que describen el conocimiento del profesor en relación a la enseñanza de las matemáticas; revisamos algunas de las propuestas de evaluación presentes en la literatura; y finalmente proponemos distintos estudios que podrían permitir establecer una concreción del CMF.

Palabras clave: *Conocimiento matemático fundamental, Formación inicial de maestros, PAP*

Abstract

In this paper we establish the concept of Fundamental Mathematical Knowledge (FMK) as the disciplinary knowledge in mathematics necessary for keeping up with the subjects of Mathematics and Didactics of Mathematics in Teacher Education Programs. We relate this first definition of FMK with theories describing teacher knowledge regarding the teaching of mathematics; we review some of the proposals present in the literature for its assessment; and finally, we propose a research agenda that could help to establish a specification of FMK.

Keywords: *Fundamental Mathematical Knowledge, Initial Teacher Education, PAP*

INTRODUCCIÓN

En estos últimos meses, la prensa se ha hecho eco de la decisión tomada en Cataluña por los responsables del acceso a la Universidad que establece una Prueba de Aptitud Personal (PAP) para el acceso a los Grados de Educación Primaria (GEP) y Educación Infantil (GEI). Además de los requisitos vigentes hasta ahora, a los alumnos que quieran iniciar sus estudios el curso 2014-15 se les exigirá que la media aritmética de las notas de Lengua Castellana y Lengua Catalana de las pruebas comunes en la Prueba de Acceso a la Universidad (PAU) sea superior a cinco[1]. La Comunidad Autónoma de Madrid parece que sigue los pasos de Cataluña. En ambas comunidades están teniendo lugar reuniones de trabajo entre los responsables de educación, de universidades y de los centros que ofrecen los GEP y GEI para retomar el debate de la formación inicial de los maestros. La necesidad y oportunidad del requisito de unas pruebas PAP para al acceso a dichos grados y las características y contenidos de estas pruebas es también tema de preocupación en el marco de la Comisión Permanente de Decanos y Directores de Centros con Títulos de Magisterio y Educación.

En este debate de las PAP se incluyen, además de los conocimientos de lengua, los conocimientos de matemáticas, entre otros. La posición en relación a las matemáticas no se ha concretado para el curso 2014-15 puesto que no hay una prueba de matemáticas común en las PAU. Establecer una

Castro, A., Mengual, E., Prat, M., Albarracín, L, Gorgorió, N. (2014). Conocimiento matemático fundamental para el grado de educación primaria: inicio de una línea de investigación. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 227-236). Salamanca: SEIEM.

nota mínima de matemáticas relacionada con las PAU como requisito de acceso complementario resulta inapropiado no sólo para los candidatos provenientes de CFGS sino también para los procedentes de Bachillerato, dado que ni tan siquiera puede asegurarse que los estudiantes que acceden a los GEP y GEI a través de las PAU hayan tenido que enfrentarse a una prueba de matemáticas. A partir de este punto se está empezando a barajar la posibilidad de establecer una prueba específica de matemáticas en las PAP del GEP y del GEI.

Frente a esta situación, como profesionales implicados en la formación en matemáticas y en didáctica de las matemáticas de los futuros maestros, consideramos esencial poder incidir en la toma de decisiones. Es imprescindible establecer las bases para una cultura de mejora de la formación de los maestros basada en conocimiento experto y evidencias empíricas. Las discusiones acerca de cuál es el conocimiento matemático imprescindible para iniciar el GEP, la forma y el momento en que éste debe ser evaluado y las implicaciones de esta evaluación no deberían tener lugar al margen de los profesionales de los departamentos de didáctica de las matemáticas.

En los siguientes apartados de esta presentación establecemos una primera definición de Conocimiento Matemático Fundamental (CMF) para el GEP; presentamos algunas evidencias empíricas que justifican la necesidad de que se produzca un debate acerca del conocimiento matemático de los estudiantes que acceden a los grados de magisterio; relacionamos esta primera definición de CMF con las teorías que describen el conocimiento del profesor en relación a la enseñanza de las matemáticas; revisamos algunas de las propuestas de evaluación presentes en la literatura; y, finalmente, proponemos distintas investigaciones que podrían permitir establecer una concreción del CMF.

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO FUNDAMENTAL: PRIMERA APROXIMACIÓN

El TEDS-M (Teacher Education Study in Mathematics) de la IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement), liderado por la Michigan State University, es un estudio comparativo sobre la formación inicial de los docentes de matemática de primaria y secundaria obligatoria. Surge de la constatación de diferencias y deficiencias en el conocimiento matemático de los escolares de distintos países proporcionados por estudios internacionales como el TIMSS (Trends in Mathematics and Science Study). Se apoya en el supuesto de que un factor importante para explicar estas diferencias es la diversidad de aproximaciones a la formación inicial del profesorado de matemáticas en los países participantes en el estudio. Dicho estudio pone de manifiesto que las características individuales de los escolares son la causa más clara de su rendimiento en matemáticas. Sin embargo, entre las características externas al alumno que influyen en su rendimiento escolar en matemáticas encontramos el conocimiento del profesor como factor que tendría una mayor influencia que el contexto social o el tiempo dedicado a la enseñanza de las matemáticas (Rico, Gómez y Cañadas, 2014).

Hasta hace poco, los estudios internacionales que comparaban la organización de los programas de formación de maestros evidenciaban grandes diferencias entre el énfasis que éstos ponían en el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento pedagógico del contenido (Döhrmann, Kaiser y Blömeke, 2012). Goos (2013) establece que existe una correlación entre el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido. Baumert y sus colaboradores (Baumert et al., 2010) constatan que el conocimiento pedagógico del contenido es una influencia decisiva tanto en la calidad de la instrucción como en la mejora de la calidad del aprendizaje de los escolares. Señalan también que para poder desarrollar conocimiento pedagógico del contenido es necesario un conocimiento sólido del contenido matemático. En esta línea, Lacasa y Rodríguez (2013) señalan que existe una correlación sustantiva entre el nivel de conocimientos matemáticos de los estudiantes de magisterio en España y su nivel de conocimientos de didáctica de las matemáticas y que la causalidad se mueve de los conocimientos de matemáticas a los conocimientos sobre su didáctica.

Al establecer una primera definición de CMF, partimos del supuesto de que el conocimiento disciplinar en matemáticas de los estudiantes del GEP constituye la base sobre la cual deberán construir durante su formación conocimiento para la enseñanza de las matemáticas (Aballe, 2000). En este sentido, el conocimiento disciplinar inicial constituye el fundamento o los cimientos para poder desarrollar las competencias que le permitirán iniciarse en la enseñanza de las matemáticas en Primaria. Por ello definimos, *a priori*, el CMF para el GEP como aquel conocimiento en matemáticas necesario para seguir con aprovechamiento las materias de matemáticas y de didáctica de las matemáticas del GEP, tomando en cuenta los requerimientos de la práctica profesional y las competencias matemáticas propias de Primaria. El CMF es el conocimiento disciplinar que los docentes de matemáticas y de didáctica de las matemáticas del GEP tomamos como punto de partida para que los estudiantes puedan desarrollar durante su formación las diferentes dimensiones del conocimiento para la enseñanza a través de los cursos de matemáticas, de didáctica de las matemáticas y de las prácticas que forman parte de su formación universitaria.

Hasta la fecha, no existe un acuerdo explícito acerca de cuál debería ser este conocimiento disciplinar de partida, ni tenemos instrumentos compartidos para establecer hasta qué punto los estudiantes que inician el GEP poseen este conocimiento. Tampoco hemos desarrollado un consenso sobre cómo actuar a partir de las evidencias que podamos obtener acerca de la distancia entre el conocimiento matemático de los alumnos y el CMF. De alguna forma, esperamos que nuestros estudiantes hayan desarrollado el CMF a lo largo de los cursos de matemáticas que han seguido en la etapa obligatoria y postobligatoria previa a su formación universitaria. Sin embargo, el conocimiento disciplinar en matemáticas de los estudiantes que inician su formación como maestros, construido durante su propia escolarización, incluso en los casos más satisfactorios, es insuficiente para enseñar matemáticas en Primaria (Stephens, 2003). Por otra parte, a menudo damos por supuesto que dominan algunos conceptos sobre los que hay un acuerdo tácito de que resultan imprescindibles. Sin embargo, las diferentes vías de acceso al GEP impiden que podamos tomar este supuesto como una certeza, algo que resulta evidente en nuestra práctica docente.

En nuestro centro hemos iniciado un estudio con el fin de determinar la distancia entre el conocimiento matemático de los alumnos cuando ingresan al GEP y el conocimiento que tomamos como punto de partida en las asignaturas de Didáctica de las Matemáticas. Basándonos en el currículum de Primaria, hemos elaborado una prueba que recoge los conocimientos que esperaríamos que nuestros alumnos tuviesen y que damos por supuestos en nuestra docencia. Para validarla, la hemos administrado a los alumnos de tercero de GEP justo después de finalizar la última de las asignaturas obligatorias de didáctica de las matemáticas. Los resultados muestran diferentes niveles de conocimiento matemático y evidencian carencias graves en aspectos que no son tratados en el grado por considerarse contenido que ya debería ser dominado. No es propósito de esta comunicación entrar en detalles del estudio desarrollado. Sin embargo, a continuación mostramos uno de los errores cometidos por uno de los alumnos con el propósito de desgranar el significado que atribuimos al CMF.

La multiplicación que se muestra en la Fig. 1es la respuesta de un alumno de tercer curso del GEP resolviendo una pregunta en la que se pide el cálculo de la superficie de un círculo de radio 6 cm. Observamos un error grave en el uso de la coma decimal; el alumno trata este símbolo como si “separara completamente” la parte entera de la parte decimal, mostrando así desconocimiento del sistema de numeración y de la notación decimal. Si queremos tratar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la multiplicación, entonces el conocimiento del sistema de numeración decimal y de la notación decimal resultan básicos; desde este punto de vista serían parte del CMF. Es claro que el tipo de error detectado en este caso y confirmado en el estudio TEDS-M (Senk et al., 2012) no es deseable en nuestros estudiantes. Los estudiantes de magisterio que evidencian carencias en destrezas y conceptos matemáticos elementales, normalmente dados por sabidos al iniciar su formación, tendrán dificultades para enseñar temas próximos (Aballe, 2000).

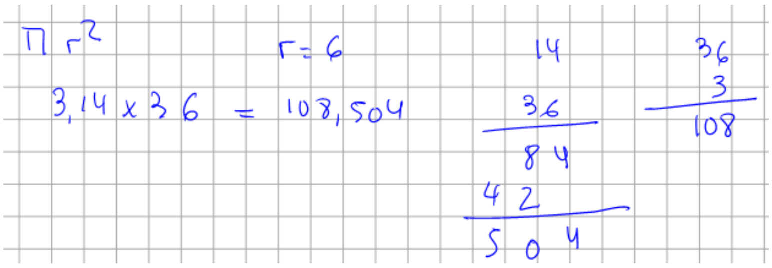


Fig. 1. Multiplicación de un estudiante de 3º del GEP

CONOCIMIENTO DEL PROFESOR Y CONOCIMIENTO MATEMÁTICO FUNDAMENTAL

En este apartado, hacemos una revisión de las teorías del conocimiento del profesor que se presentan con mayor frecuencia en la literatura, con la finalidad de situar en ellas el CMF, considerándolo como el primer paso para que el estudiante del GEP pueda enfrentarse a su formación e iniciar el desarrollo su conocimiento profesional.

Shulman, Fennema y Franke

Al analizar la literatura relacionada con el conocimiento del profesor, es inevitable comenzar por Shulman (1986) quien hace una revisión de investigaciones anteriores sobre el conocimiento del profesor y de las diferentes pruebas que los futuros docentes tenían que superar. En dichas investigaciones, basadas en la simplificación de las complejidades de la enseñanza, Shulman sostiene que los investigadores ignoran un aspecto central: la materia a enseñar. En este sentido, denomina conocimiento del contenido a la cantidad y organización del conocimiento de la materia en la mente del profesor. Sugiere considerar este conocimiento organizado en tres categorías: conocimiento de la materia, conocimiento pedagógico del contenido y conocimiento del currículo.

Más adelante, Shulman (1987) sostiene que existe una base de conocimientos para la enseñanza subyacentes a la compresión del profesor, necesarios para promover la comprensión de los estudiantes. Organiza estos conocimientos en un sistema de categorías que incluye, como mínimo: conocimiento del contenido; conocimiento pedagógico general; conocimiento del currículo; conocimiento pedagógico del contenido; conocimiento de los estudiantes y sus características; conocimiento de los contextos educativos; y conocimiento de los fines propósitos y valores educativos y sus fundamentos filosóficos e históricos. En relación con el conocimiento del contenido, afirma que el profesor debería comprender críticamente el conjunto de ideas que va a enseñar. Sin esta comprensión de la materia el profesor no podrá transformar las ideas para que puedan ser entendidas por sus estudiantes. En esta transformación entra en juego el conocimiento pedagógico del contenido, entendido como la amalgama entre el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico general.

Sin embargo, el modelo propuesto por Shulman (1986, 1987) no reconoce las interacciones entre las diferentes categorías del conocimiento. Ante esta situación, Fennema y Franke (1992) señalan que el conocimiento de la enseñanza tiene una naturaleza dinámica e interactiva. Estos autores defienden que el conocimiento del profesor no es monolítico, es un sistema de funcionamiento de gran tamaño e integrado donde cada parte es difícil de aislar. Además sostienen que no es posible separar las creencias del conocimiento del profesor. Petrou y Goulding (2011) indican que existe un paralelismo entre el conocimiento de las matemáticas propuesto por Fennema y Franke (1992) y la definición del conocimiento del contenido propuesto por Shulman (1986, 1987). Los profesores no sólo necesitan conocer los procedimientos, sino también entender los conceptos que subyacen a estos procedimientos. Para Fennema y Franke (1992) el conocimiento de las matemáticas comprende el conocimiento de los conceptos, procedimientos, los procesos de resolución de problemas, los conceptos subyacentes a los procedimientos, las interrelaciones de estos conceptos y la forma en que conceptos y procedimientos entran en juego en la resolución de problemas.

Desde este punto de vista, el CMF sería una parte del conocimiento del contenido de Shulman o del conocimiento de las matemáticas de Fennema y Franke, pero no podemos esperar que equivalga a su totalidad. Entendemos que a nuestros estudiantes, al inicio de su formación, únicamente podemos exigirles que conozcan algunos de los aspectos básicos de las matemáticas elementales sin esperar que hayan elaborado un tejido completo de relaciones entre conceptos, procedimientos y estructuras. En el proceso de concreción del CMF deberá establecerse cuáles son estos aspectos básicos para que los estudiantes del GEP puedan avanzar hacia una comprensión más profunda de las matemáticas que deberán enseñar.

Rowland y colaboradores

Rowland, Huckstep y Thwaites (2003) proponen un marco para la identificación y discusión del conocimiento del contenido matemático que los docentes evidencian en la práctica. Este marco definido como “cuarteto de conocimiento” tiene como base la distinción propuesta por Shulman (1986) y establece las formas en que el conocimiento de la materia y el conocimiento pedagógico del contenido entra en juego el aula (Petrou y Goulding, 2011). De esta forma la propuesta de Rowland y sus colaboradores se sitúa en la conceptualización de Shulman (1986), pero responde a Fennema y Franke (1992) en tanto que da respuesta a cómo las diferentes formas del conocimiento del profesor están integradas y entran en juego en el aula, respaldando su idea de que el conocimiento es dinámico.

El “cuarteto de conocimiento” está constituido por cuatro componentes: fundación, transformación, conexión y contingencia (Rowland, 2005; 2007; Rowland, Turner, Thwaites, 2012). La fundación comprende las creencias, el conocimiento proposicional de las matemáticas y de la pedagogía adquirido durante su proceso de formación que puede inferirse de las decisiones y acciones de aula. Involucra aspectos como el uso de la terminología matemática, el conocimiento explícito de la matemática, la identificación de los errores y la base teórica de las matemáticas, entre otros.

Desde esta perspectiva, podríamos considerar el CMF como parte del componente fundación, en tanto que el CMF incluiría el conocimiento de la base teórica y el dominio de la terminología matemática exigibles a nuestros estudiantes como fruto de su proceso escolar, dejando para su formación como maestros los aspectos relativos a conocimiento del alumno o la identificación de los errores, entre otros. Una vez más, formará parte del proceso de concreción del CMF establecer cuáles son estos conocimientos y terminología mínimos exigibles para que los estudiantes puedan desarrollar durante su formación el conocimiento proposicional necesario para enseñar matemáticas en Primaria.

Ball y colaboradores

A partir de las categorías propuestas por Shulman (1986), Ball, Thames y Phelps (2008) presentan una teoría del conocimiento del profesor basada en la práctica, donde establecen lo que denominan conocimiento para la enseñanza de las matemáticas tomando como ejes principales el conocimiento de la materia y el conocimiento pedagógico del contenido. Desarrollan el concepto del conocimiento de la materia organizándolo en 3 subdominios: conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido y conocimiento del horizonte matemático.

El conocimiento común del contenido es aquel conocimiento que todo adulto instruido en matemáticas debería tener y que se utiliza en una amplia variedad de entornos, es decir, no exclusivo de la enseñanza (Ball, Hill y Bass, 2005). El conocimiento especializado del contenido requiere una comprensión y un razonamiento matemático que son propios del profesor. Definen el conocimiento del horizonte matemático como el conocimiento de las matemáticas que van a aprender sus alumnos a lo largo de sus estudios. Fennema y Franke (1992) también recogen la necesidad de que el maestro conozca las matemáticas que sus alumnos continuarán aprendiendo.

Dado que nuestros estudiantes han superado satisfactoriamente los requisitos de acceso a la universidad y por tanto las etapas previas de escolarización, tiene sentido esperar que cuando acceden al GEP sean adultos instruidos en matemáticas. Desde este punto de vista, podemos considerar que el CMF es parte del conocimiento común. Asimismo, el CMF sería punto de partida para el desarrollo del conocimiento del horizonte, puesto que su formación debería haberles permitido abordar no sólo las relaciones entre los conceptos propios de las matemáticas de Primaria, sino también conocimientos más avanzados. De nuevo, formará parte del proceso de concreción del CMF establecer cuáles son los aspectos del conocimiento común y del conocimiento del horizonte exigibles a nuestros estudiantes.

Grupo SIDM, Universidad de Huelva

Montes, Contreras y Carrillo (2013), señalan que las asignaciones del conocimiento para la enseñanza de las matemáticas propuestas por Ball, Thames y Phelps (2008) generan problemas de indefinición en los subdominios, pues puede darse el caso de que el conocimiento que demuestre un profesor posea distintas naturalezas. Estos autores señalan que el grupo SIDM (Seminario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas) de la UHU ha propuesto un modelo sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas que proporciona un refinamiento del modelo de Ball y colaboradores. Dicho modelo, denominado “Modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas” (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013), se basa en la idea de que la especialización del conocimiento del profesor de matemáticas proviene de su práctica. Considera la distinción propuesta por Ball y sus colaboradores entre el conocimiento de la materia que denominan conocimiento matemático, y el conocimiento pedagógico del contenido como elementos esenciales del conocimiento especializado del profesor. El primero incluiría el conocimiento de los temas, de la estructura matemática y de la práctica matemática, mientras que el conocimiento pedagógico del contenido incluiría el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas y el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas. Subyacentes a ambos tipos de conocimiento se encontrarían las creencias relativas a las matemáticas y a su enseñanza y aprendizaje.

El modelo del SIDM hace referencia a elementos asociados e identificados desde la práctica de profesores expertos. En las materias de matemáticas y su didáctica del GEP el estudiante debe construir las bases para poder abordar su práctica profesional futura con una formación sólida para poder ser crítico y reflexivo en el proceso de construcción de su conocimiento profesional. Desde nuestro punto de vista, sin un CMF inicial sólido que reúna determinadas condiciones, resulta difícil que el alumno pueda construir los cimientos para desarrollar a través de su formación y su futura práctica un conocimiento especializado satisfactorio.

CONOCIMIENTO DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO Y CONOCIMIENTO MATEMÁTICO FUNDAMENTAL

En el apartado anterior hemos introducido únicamente algunas de las numerosas investigaciones que se están desarrollando en busca de modelos para describir y caracterizar el conocimiento del docente en relación la enseñanza de las matemáticas. Dichos estudios se centran en el conocimiento necesario para la enseñanza como práctica y algunos de ellos generan propuestas que conciernen a la formación del profesorado. Sin embargo, al intentar relacionar el CMF con dichas teorías, vemos que resultan inadecuadas para nuestro propósito –describir la naturaleza del conocimiento que los estudiantes para maestro necesitan para iniciar su formación– dado que están asociadas al conocimiento en la práctica profesional.

A nivel general, al interés por describir el conocimiento para la enseñanza de las matemáticas le ha seguido el interés por evaluar dicho conocimiento y, en particular, por evaluar el conocimiento de los estudiantes para maestro (Norton, 2012; Ryan y McCrae, 2005; Senk et al., 2012; Valshaw, 2012). A pesar de que presentan distintas aproximaciones, estos estudios comparten conclusiones al afirmar que el conocimiento matemático de los estudiantes para maestro, incluso al final de su formación, es insuficiente. En este sentido, Ryan y McCrae (2005) señalan que los futuros maestros cometen errores en aspectos clave para la docencia relacionados con el valor posicional de la notación decimal, la conversión de unidades de medida, las fracciones y cálculos con fracciones, entre otros. Por su parte, el estudio TEDS-M concluye que los futuros maestros tienen dificultades para utilizar las fracciones en problemas de enunciado verbal, para reconocer ejemplos de números racionales e irracionales o para determinar el área y el perímetro de figuras planas sencillas (Senk et al., 2012). Sin embargo, ninguno de estos estudios aborda la caracterización y evaluación del conocimiento matemático con que los estudiantes acceden a su formación inicial como maestros.

La evaluación del conocimiento disciplinar en matemáticas al inicio de la formación de maestros constituye una tradición académica en algunas universidades de países anglosajones como Nueva Zelanda, Australia, Gran Bretaña o Estados Unidos, ya sea como condición para el acceso o con finalidades diagnósticas y formativas. Sin embargo, las investigaciones que describen el conocimiento matemático de los estudiantes al inicio de su formación son escasas, con lo cual la evaluación de dicho conocimiento es un reto para sus formadores (Linsell y Anakin, 2012).

El conocimiento que los estudiantes traen consigo a sus programas de formación está posiblemente caracterizado por la memorización y la resolución de problemas bien definidos (Fennema y Franke, 1992; Linsell y Anakin, 2013). En general, la literatura presenta a los estudiantes con un conocimiento matemático incompleto, pero la teoría y los métodos para caracterizar estas carencias están poco consolidados. Tampoco se han estudiado en profundidad las implicaciones que estas carencias tienen para su formación inicial, ni de qué forma determinadas estrategias formativas pueden ayudar a superarlas. La teoría desarrollada hasta el momento alrededor del conocimiento para la enseñanza de las matemáticas está estructurada a partir de marcos cognitivos y marcos orientados a la práctica. Según Linsell y Anakin (2013) presenta limitaciones para el análisis del conocimiento de los estudiantes cuando ingresan a las facultades, dado que establece sus proposiciones en términos de deficiencia en lugar de plantearse la evaluación de los conocimientos como un punto de partida para el trabajo a desarrollar durante la formación.

Linsell y Anakin (2012) proponen el concepto de conocimiento del fundamento del contenido para referirse al conocimiento del contenido matemático que los maestros en formación inicial traen consigo y que son capaces de demostrar al inicio de los programas. El conocimiento del fundamento del contenido incluye, enlazados de manera inseparable, conocimientos conceptuales y procedimentales. Las características de este conocimiento están relacionadas con la capacidad para modelizar, hacer y deshacer, razonar y confirmar, usar múltiples representaciones, generalizar, trabajar con números reales y conocer hechos básicos, entre otros aspectos. Estos autores consideran que el conocimiento del fundamento del contenido podría asociarse al conocimiento común del contenido propuesto por Ball, Thames y Phelps (2008). Sin embargo, se cuestionan si este conocimiento es adecuado y suficiente para que el futuro maestro pueda construir y desarrollar el conocimiento necesario para una enseñanza eficiente.

Nuestra definición de CMF se aproxima a la que Anakin y Linsell (2012) proponen para el conocimiento del fundamento del contenido en tanto que se refiere esencialmente a los estudiantes que inician su formación como maestros. Sin embargo, se distingue de ella puesto que dichos autores se refieren al conocimiento que los estudiantes tienen al iniciar su formación y nosotros definimos CMF como el conocimiento deseable. De alguna forma, los estudios que mencionamos al inicio de este apartado evidencian que existe una distancia importante entre ambos tipos de conocimiento.

PLANTEAMIENTO DE UNA NUEVA LINEA DE INVESTIGACION

Ma (1999), en una de las primeras propuestas que desarrollan las ideas de Shulman, establece la noción de conocimiento profundo de las matemáticas fundamentales. Con este concepto establece el carácter particular del conocimiento disciplinar en matemáticas como algo fundamental –tanto en el sentido de primario y elemental, como en el sentido de profundo, vasto y extenso. Este conocimiento incluiría los conceptos y sus interconexiones y la comprensión de la estructura conceptual, junto con las actitudes básicas de matemáticas.

De alguna forma, coincidimos con Ma (1999) en que las matemáticas elementales son matemáticas fundamentales, puesto que entendemos fundamental en el sentido de básico y, a la vez, como sinónimo de primario, en el sentido de primero, como conocimiento inicial para el aprendizaje de las matemáticas. Las matemáticas elementales serían la base y el principio de la construcción de conocimientos matemáticos más elaborados. Los cimientos pueden resultar invisibles desde la perspectiva de un aprendizaje matemático más avanzado, pero es lo que sostiene este aprendizaje y permite que los distintos conceptos matemáticos constituyan una estructura robusta.

Al inicio de esta presentación, hemos definido CMF como el conocimiento disciplinar en matemáticas necesario para seguir con aprovechamiento las materias de matemáticas y de didáctica de las matemáticas, tomando en cuenta los requerimientos de la práctica profesional y las competencias matemáticas propias de la Educación Primaria. El CMF es el conocimiento disciplinar que los profesores tomamos como punto de partida para nuestra docencia. Este conocimiento fundamental debería sustentar el conocimiento para la enseñanza que el estudiante para maestro desarrollará a través de su formación en la facultad.

Independientemente de la posición teórica en la que nos situemos en relación a la descripción del conocimiento para la enseñanza de las matemáticas, tal como afirmábamos al inicio de esta presentación, no existe todavía un acuerdo explícito acerca de cuál debería ser este conocimiento disciplinar de partida, ni tenemos instrumentos compartidos para establecer hasta qué punto nuestros estudiantes poseen dicho conocimiento. Tampoco hay consenso sobre cómo actuar a partir de las evidencias que podamos obtener a partir de los instrumentos desarrollados. Por todo ello, parece claro que es necesario establecer una concreción del CMF y los elementos para evaluarlo.

La concreción del CMF puede abordarse desde distintas perspectivas complementarias. En la UAB hemos iniciado el proceso para establecer una caracterización del CMF desde la observación participante de las actividades que se desarrollan en las clases de didáctica de las matemáticas y desde el análisis del conocimiento disciplinar necesario para el uso del libro de texto de primaria como recurso docente. Asimismo, hemos iniciado una caracterización por criterio de expertos, en la que participan profesores de la UdG, la UVic y la URL. Nos planteamos, a partir de evidencias empíricas, establecer la viabilidad, pertinencia y adecuación de distintos instrumentos de evaluación del CMF que no sólo permitan obtener información sobre las capacidades de los alumnos, sino que puedan ser considerados como punto de partida para que el estudiante asuma la responsabilidad de implicarse en su propio proceso formativo para el desarrollo del CMF.

La investigación dirigida a la concreción del CFM debe tener en cuenta que el conocimiento disciplinar en matemáticas incluye elementos de carácter conceptual y procedimental, pero va más allá. No es un conjunto de elementos básicos, simple y bien definido, sino una combinación sofisticada y enactiva de concreciones y materializaciones de conceptos matemáticos, junto con el conocimiento de los procesos complejos a través de los cuales se construyen las matemáticas (Davis, 2011). El conocimiento disciplinar en matemáticas incluye conocimiento de carácter formal y explicitable, junto con conocimiento tácito. El conocimiento explicitable puede ser evaluado de distintas formas –cuestionarios escritos, observación, entrevistas– y puede desarrollarse a partir de la construcción reflexiva, tomando como punto de partida el diagnóstico del CMF. El conocimiento tácito, el que entra en juego en la práctica, no es directamente enseñable por ser conocimiento inerte

(Bauemert et al. 2010). Sin embargo, puede activarse a partir de un repertorio complejo de actividades entre las cuales el análisis de la práctica (Linsell y Anakin, 2012, 213) y las actividades desarrolladas desde el prácticum del GEP.

Parece razonable asumir que la formación de maestros en la universidad no es suficiente por ella misma para dotar a los futuros docentes de las competencias y conocimientos necesarios para enseñar matemáticas. Estos conocimientos y competencias sólo pueden desarrollarse a través de años de reflexión sobre su propia práctica docente. Sin embargo, la investigación pone de manifiesto que, si tienen un diseño adecuado, los programas de formación pueden poner los cimientos para el desarrollo de conocimientos y competencias y para generar una actitud crítica hacia la propia práctica (Rowland y Ruthven, 2011; Rowland, Turner, Thwaites y Huckstep, 2009).

Referencias

Aballe, M. (2000). Aproximación al nivel de conocimiento matemático básico de futuros maestros de primaria. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 25,* 89- 107. Barcelona: Graó.

Ball, D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Ball, D. L., Hill, H. C. y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator, 29*(1), 14–17, 20–22, 43–46.

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., Klusmann U, Krauss S, Neubrand M. y Tsai Y. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal*, *47,* 133–180.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Mathematics teacher specialized knowledge. En B. Ubuz, Ç. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th CERME*. Turkey.

Davis, B. (2011) Mathematics teachers' subtle, complex disciplinary knowledge. *Science*, *332*, 1506–1507.

Döhrmann, M., Kaiser, B. y Blömeke, S. (2012). The conceptualisation of mathematics competencies in the international teacher education study TEDS-M. *ZDM*, *44,* 325–340.

Fennema, E., y Franke, L.M. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147-164). New York, NY: MacMillan.

Goos, M. (2013). Knowledge for teaching secondary school mathematics: what counts? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44*(7), p. 1-13.

Hodgen, J. (2011). Knowing and identity: A situated theory of mathematics knowledge in teaching. En T. Rowland y K. Ruthven (Eds.), *Mathematical knowledge in teaching* (pp. 27-42). Londres: Springer.

Lacasa, J.M. y Rodríguez, J.C. (2013). Diversidad de centros, conocimientos y actitudes hacia la enseñanza de las matemáticas de los futuros maestros en España. En IEA (ed.) *TEDS-M Informe español. Estudio Internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros*. Volumen II. Análisis secundario. (pp. 63-108). Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Linsell, C., y Anakin, M. (2012). Diagnostic Assessment of Pre-Service Teachers' Mathematical Content Knowledge. *Mathematics Teacher Education and Development, 14*(2), 4–27.

Linsell, C., y Anakin, M. (2013). Foundation Content Knowledge: What do pre-service teachers need to know? En V. Steinle, L. Ball y C. Bardini (Eds.), *Mathematics Eduction: Yesterday, today and tomorrow (Proceedings f the 36th annual conference of MERGA)* (pp. 442-449). Melbourne, VIC: MERGA.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

McDiarmid, G.W., Ball, D.L., y Anderson, C.W (1989). Why staying one chapter ahead doesn't really work: Subject-specific pedagogy. En M.C. Reynolds (ed.). *Knowledge base for the beginning teacher* (pp. 193-206). Oxford: Pergamon.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2012). *TEDS-M Estudio Internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros.* Madrid (España).

Montes, M. A., Contreras, L. C. y Carrillo., J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 403-410). Bilbao: SEIEM.

Norton, S. (2012). Prior study of mathematics as a predictor of pre-service teacher's success on tests of mathematics and pedagogical content knowledge. *Mathematics Teacher Education and Development, 14* (1), 2-26.

Petrou, M., y Goulding, M. (2011). Conceptualising teachers' mathematical knowledge in teaching. En Rowland y Ruthven (coord.). *Mathematical knowledge in teaching,* (pp. 9-26). Londres: Springer.

Rico, L., Gómez, P. y Cañadas, M. (2014). Formación Inicial en educación matemática de los maestros de primaria en España, 1991-2010. *Revista de Educación*, *363,* 35-59.

Rowland, T. and Turner, F. (2007) Developing and using the Knowledge Quartet: a framework for the observation of mathematics teaching. *The Mathematics Educator, 10*(1), pp. 107-124.

Rowland, T. (2008). Researching teachers' mathematics disciplinary knowledge. En P. Sullivan and T. Wood (Eds.) *International handbook of mathematics teacher education*, *1*: 273-298. Rotterdam: Sense

Rowland, T., Huckstep, P., y Thwaites, A. (2003). The Knowledge Quartet. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 23*(3), 97-102.

Rowland, T., Martyn, S., Barber, P., y Heal, C. (2000). Primary teacher trainees' mathematics subject knowledge and classroom performance. En Rowland y Morgan (Eds.). *Research in mathematics education Volume 2: Papers of the British Society for Research into Learning Mathematics* (pp. 3-18). London: British Society for Research into Learning Mathematics.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A., y Huckstep, P. (2009). *Developing primary mathematics teaching: Reflecting on practice with the knowledge quartet*. London: Sage.

Rowland, T., y Ruthven, K. (Eds.). (2011). *Mathematical knowledge in teaching*. London: Springer.

Ryan, J., y McCrae, B. (2005/6). Assessing pre-service teachers' mathematics subject knowledge. *Mathematics Teacher Education and Development,* 7*,* 72-89.

Senk, S., Tatto, M., Reckase, M., Rowley, G., Peck, R., y Bankov, K. (2012). Knowledge of future primary teachers for teaching mathematics: An international comparative study. *ZDM, 44*(3), 307–324.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15* (2), 4-14.

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Stephens, M., (2003). Regulating the entry of teachers of mathematics into the profession: Challenges, new models, and glimpses into the future. En A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y F.K.S. Leung (Eds.) *Second Handbook of Mathematics Education* (pp. 767-174). Dordrecht: Kluwer Academic Pub.

Walshaw, M. (2012). Teacher knowledge as fundamental to effective teaching practice. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*(3), 181-185.

[1] PAP. Educació Infantil i Primària.

LA ENSEÑANZA INICIAL DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN: UN ESTUDIO CON MAESTROS EN FORMACIÓN

Initial teaching of the concept of fraction: a study about preservice primary school teachers

Elena Castro[a], Luis Rico[a], Pedro Gómez[b]

[a]Universidad de Granada, [b]Universidad de los Andes

Resumen

En este documento presentamos las indagaciones sobre el conocimiento didáctico del contenido que un grupo de futuros maestros de primaria pusieron en juego al redactar un texto con el cual iniciar a los escolares de primaria en la noción parte-todo de fracción. Para analizar las producciones de los futuros maestros usamos un modelo de análisis didáctico, con categorías propias para los análisis de contenido y de instrucción. Los resultados destacan los contenidos sobre fracciones que los participantes seleccionaron, el modo en que propusieron introducir esos contenidos y el uso que hicieron de las representaciones en sus propuestas.

Palabras clave: análisis didáctico, conocimiento didáctico del contenido, formación inicial de maestros, fracciones, relación parte-todo

Abstract

In this paper we investigate about the pedagogical content knowledge that a group of preservice primary school teachers put into play when composing a text with which to start primary school students in the part-whole notion of fraction. To analyse the productions, we used a model of didactic analysis, through its content and instructional analysis categories. The results highlight the content of fractions that the participants selected, how they proposed to introduce this content and the uses of the representations made in their responses.

Keywords: didactic analysis, fractions, part-whole relationship, pedagogical content knowledge, pre-service teacher education

INTRODUCCIÓN

Una de las formas usuales en que los docentes influyen en la comprensión de conceptos matemáticos por sus estudiantes es mediante las explicaciones que realizan. Estas exposiciones, orales o escritas, son un componente importante en el aprendizaje de los escolares (Charalambous, Hill and Ball, 2011), ya que explicaciones incoherentes, incompletas o poco claras pueden interferir en el aprendizaje (Weiss y Parsley 2004).

Diversas investigaciones sobre el conocimiento profesional de los profesores han puesto de manifiesto las dificultades que se les plantean a los profesores en formación cuando realizan exposiciones sobre un contenido matemático (Kinach 2002; Thanheiser 2009). Expertos en educación matemática afirman que, pesar de su relevancia en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, lo que conocemos sobre esta cuestión se limita a comparaciones entre las explicaciones ofrecidas por profesores expertos y novatos, así como sobre las dificultades que estos últimos suelen presentar (Charalambous, Hill y Ball, 2011).

Estas dificultades aumentan cuando se trata de contenidos de carácter problemático para los maestros, como es el tema de fracciones (Ball, 1990; Gairin, 2001; Newton, 2008; Simon, 1993). Entre las distintas investigaciones realizadas sobre el conocimiento didáctico de las fracciones

Castro, E., Rico, L., Gómez, P. (2014). La enseñanza inicial del concepto de fracción: un estudio con maestros en formación. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 237-246). Salamanca: SEIEM.

(Charalambous, Hill y Ball, 2011; Domoney, 2001; Fuller, 1996), encontramos estudios centrados en las operaciones con fracciones (Li y Kulm, 2008; Isiksal y Cakiroglu, 2011) o en la equivalencia de fracciones (Chick, 2003; Marks, 1990). Todos ellos resaltan las carencias que los maestros en formación presentan en sus conocimientos sobre la relación multiplicativa parte-todo y las fracciones y, por consiguiente, en las implicaciones para su enseñanza. Además, Charalambous, Hill y Ball (2011) y Li y Kulm (2008) afirman que la falta de conocimiento del contenido sobre fracciones, por parte de los profesores participantes en sus estudios, puede incidir en los niveles mostrados en su conocimiento didáctico de este contenido.

Esta cuestión y su escaso tratamiento en la literatura nos condujeron a centrarnos en un aspecto del conocimiento didáctico de los futuros maestros: su capacidad para introducir un contenido matemático con un propósito didáctico. El conocimiento didáctico del contenido, en el sentido de Hill, Ball, y Schilling (2008), implica estos y otros aspectos de las decisiones que el profesor toma en su proceso de planificación de la enseñanza.

Siguiendo esta línea, propusimos a un grupo de maestros en formación que redactaran una explicación para introducir la enseñanza de las fracciones mediante una relación parte-todo. Para ello, diseñamos una serie de ilustraciones que muestran los datos básicos de una relación parte-todo multiplicativa y pedimos a los maestros que redactasen una explicación con la que iniciar la noción de fracción a partir de las imágenes presentadas. Para dar respuesta a la cuestión planteada, los estudiantes para maestro se basaron en los datos e imágenes propuestos en las ilustraciones; además, al tratarse de una demanda sobre enseñanza, pusieron en juego su conocimiento didáctico del contenido. Para el análisis de las producciones, consideramos útil el método de análisis didáctico, el cual tomamos como base para organizar los aspectos del conocimiento didáctico de nuestro interés.

ANÁLISIS DIDÁCTICO

Por análisis didáctico, entendemos un procedimiento que, de manera ideal, debería realizar un profesor de Matemáticas para "diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje" (Rico y Fernández-Cano, 2013). Al caracterizar, de manera ideal, el proceso de planificación del profesor, el modelo del análisis didáctico permite establecer aquellos aspectos del conocimiento didáctico del profesor que son relevantes para ese propósito. Esos aspectos se organizan en cuatro tipos de análisis: un análisis de contenido, un análisis cognitivo, un análisis de instrucción y un análisis de actuación. Estos análisis, que permiten estructurar el conocimiento didáctico, han sido trabajados y utilizados en diversos estudios e investigaciones (Gómez, 2006; Lupiáñez y Rico, 2008; Valverde, 2012).

Nos centramos en el conocimiento didáctico del contenido que los maestros de primaria en formación inicial ponen en juego al redactar un texto con el cual iniciar a los escolares de primaria en la noción de fracción mediante una relación parte-todo. Para ello, abordamos el análisis de las redacciones realizadas mediante su análisis de contenido y su análisis de instrucción, cada uno de los cuales se estructura mediante sus propias componentes. A continuación, describimos estos dos análisis y sus componentes, aplicados a la noción parte-todo de fracción.

Análisis de contenido

El análisis de contenido se centra en analizar, describir y establecer los diferentes significados que tienen los conceptos y procedimientos que son objeto de enseñanza y aprendizaje y que el profesor considera relevantes a efectos de su planificación para la instrucción. Su propósito es la descripción de la estructura matemática que se analiza, desde la perspectiva de las Matemáticas escolares. Nuestro estudio articula el análisis de contenido según tres componentes: la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología.

Estructura conceptual

La estructura conceptual incluye conceptos, propiedades, proposiciones y relaciones entre los conceptos, que se derivan de un contenido matemático (Gómez, 2006). En el caso del concepto parte-todo de fracción consideramos los siguientes componentes básicos en su estructura: (a) el todo —T— que tomamos como punto de partida; (b) cada una de las n partes iguales en que se divide el todo —P—; (c) la relación — $R(P,T)=\frac{1}{n}$ — que expresa la relación entre una de las partes iguales P y el todo T; y (d) el complementario C de la parte P— .

Representaciones

Los conceptos se muestran a través de diferentes tipos de símbolos escritos, gráficos, imágenes o el lenguaje hablado, y cada uno constituye una representación (externa) del concepto en cuestión (Hiebert y Carpenter, 1992). Las fracciones como relación parte-todo pueden ser representadas de múltiples formas como son representaciones verbales, gráficas, numéricas o simbólicas.

Fenomenología

La fenomenología muestra los sentidos de los cuales proceden y con los cuales se usan los conceptos, sentidos que los vinculan con los mundos natural, cultural, social y científico; también muestra su conexión con las estructuras Matemáticas En el concepto parte-todo de fracción encontramos diversos sentidos, como son: división, reparto, medida o reconstrucción de la unidad.

Análisis de instrucción

El análisis de instrucción, aborda las decisiones del docente relacionadas con la actividad de enseñanza, como la selección y el diseño de tareas o la organización de sesiones de clase. Dado que estudiamos cómo los maestros en formación realizan una introducción del concepto de fracción a un grupo de escolares, nos centramos en una componente fundamental del análisis de instrucción: la explicación del profesor. Dentro de esta componente identificamos dos categorías para el análisis de las respuestas: modos de introducir los contenidos y usos de las representaciones.

La primera aborda los modos en que los participantes introducen en su explicación los contenidos seleccionados, que identificamos como modo instrumental, modo funcional y modo narrativo. En el modo instrumental, la redacción no incluye situaciones ni problemas contextualizados que puedan ayudar en la comprensión de los contenidos. En el modo funcional, se aborda el contenido a través de situaciones contextualizadas y presentando demandas cognitivas al escolar, la mayor parte de las veces a través de la resolución de problemas. En el modo narrativo, al igual que en el caso anterior, se introducen los contenidos a través de un texto que modeliza una situación real pero no se incluye ninguna demanda cognitiva.

La segunda componente, uso de representaciones, considera la función que tienen las ilustraciones dadas en la tarea en la narración, usos que son ilustrativo, explicativo y aclarativo. El primer tipo de uso agrupa aquellas respuestas en las que las imágenes sólo tienen una función ilustrativa: se usan únicamente para acompañar el texto. La explicación contenida en el texto es lo suficientemente completa para que sea comprensible, aun si se suprimen las imágenes. En el segundo uso, las imágenes tienen una función explicativa. Son respuestas escuetas, con escaso texto que no presenta ningún aspecto matemático; simplemente son expresiones introductorias o frases que enlazan unas imágenes con otras. La explicación la hace la serie de imágenes por lo que, si éstas se suprimen, el texto deja de tener sentido ya que por si sólo no explica ningún contenido. El último de los tipos de usos se encuentra en una situación intermedia a las dos anteriores. Las imágenes tienen una función aclarativa: forman parte de la explicación y la mejoran. El texto presenta información matemática pero por sí sólo no tiene sentido ni forma la explicación completa. La particularidad de este uso es que la combinación de texto e imágenes constituyen la explicación, en la que las ilustraciones ejemplifican, dan más detalles, aclaran o muestran nuevos contenidos.

OBJETIVO DE INVESTIGACIÓN

En este trabajo nos propusimos como objetivo explorar y describir el conocimiento didáctico del contenido que ponen en juego los maestros en formación inicial al introducir el concepto de fracción mediante una relación parte-todo.

MÉTODO

Sujetos

Los participantes de este estudio fueron 82 maestros en formación inicial que cursaban los estudios universitarios del Grado en Educación Primaria durante el curso académico 2011-2012. Los sujetos eran estudiantes del segundo curso de dicha titulación, matriculados en tres grupos distintos de la asignatura Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria.

Instrumento

La prueba se llevó a cabo al finalizar el bloque de aritmética, que conlleva el estudio de la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones. El instrumento que utilizamos en este estudio para incentivar el trabajo de los maestros en formación, y posteriormente recoger información, consta de diversas series de imágenes, cada una con tres tarjetas; las imágenes muestran objetos que son usuales en la introducción inicial de las fracciones. En la serie de tarjetas A, que denominaremos A1, A2 y A3, incluimos ilustraciones de objetos que ejemplifican distintas magnitudes que dan lugar a las fracciones unitarias $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$. Cada una de las ilustraciones presentes en las tarjetas muestran diferentes elementos básicos de una relación parte-todo multiplicativa: el todo o totalidad (T), las partes (P), y la relación entre una de las partes y el todo $P=\frac{1}{n}T$.

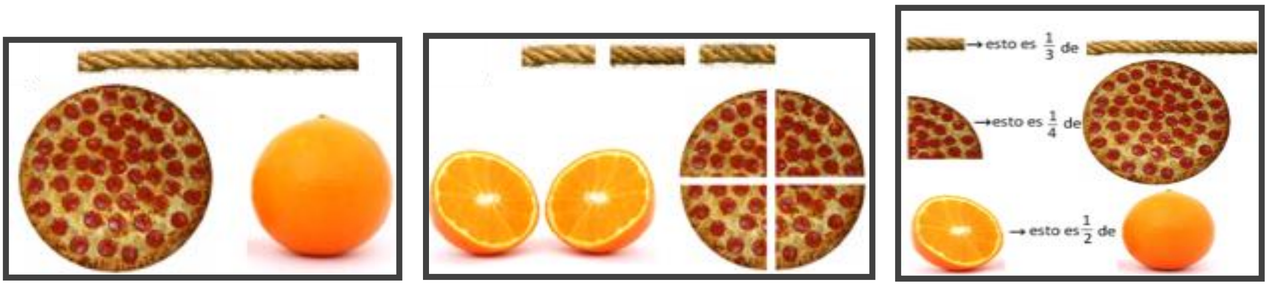


Figura 1. Tarjeta A1, A2 y A3

Las primeras ilustraciones de la tarjeta A1 (figura 1), muestran los objetos enteros, que representan, en cada caso, el todo del que se parte, con una, dos o tres dimensiones. En la tarjeta A2 se incluyen los objetos iniciales divididos en partes iguales. Por último, en las ilustraciones de la tarjeta A3 se muestra la relación de una de esas partes con el todo del que procede. Además de estas tarjetas, se proporcionó una ficha de trabajo que incluía las instrucciones para que los sujetos, de manera individual, realizaran la tarea. Esta ficha incluye el siguiente enunciado de la tarea propuesta.

> *Las tres tarjetas que aparecen a continuación pueden usarse para ilustrar el concepto de fracción. Se desea elaborar un material para iniciar a los alumnos de primaria en las fracciones. Establece el orden en que las tarjetas deben aparecer y redacta el texto que debe ir antes y después de cada tarjeta (como si fuese un libro de texto para primaria).*

Subrayamos la idea de que el grupo de escolares de primaria al que va dirigido el material es un grupo hipotético. No lo condicionamos a una edad y un nivel determinados; sólo se subraya la idea de que la actividad consiste en una introducción o iniciación al concepto de fracción.

Las ilustraciones fueron impresas como pegatinas para que pudiesen ser manejadas e insertadas libremente a criterio del estudiante durante el proceso de elaboración de la narración. La finalidad de la tarea es inducir a los sujetos a una situación docente, simulando las imágenes de un libro de texto escolar o de una ficha de trabajo. Para ello, dimos las ilustraciones de ese supuesto libro o ficha, y pedimos a los maestros que las ordenaran y que escribieran un texto que acompañara y explicara cada imagen.

Procedimiento

Para detectar y solventar posibles errores de interpretación y para que los maestros en formación se familiarizasen con la actividad, se realizó una prueba piloto, dos semanas antes, en la que los sujetos debían realizar una tarea similar sobre el concepto de multiplicación. La prueba piloto mostró que la actividad era clara, por lo que el procedimiento seguido y el tipo de material proporcionado para la actividad final fue similar al utilizado en la prueba piloto.

Durante el desarrollo de una sesión de clase, se entregó a cada uno de los sujetos una ficha y una de las series de tarjetas. Una vez distribuido todo el material, se les explicó cómo realizar la actividad y se respondió a las dudas que surgieron. Todos los estudiantes finalizaron la actividad en un tiempo máximo de media hora.

RESULTADOS

Se obtuvieron un total 82 respuestas de las cuales presentamos un ejemplo a continuación.

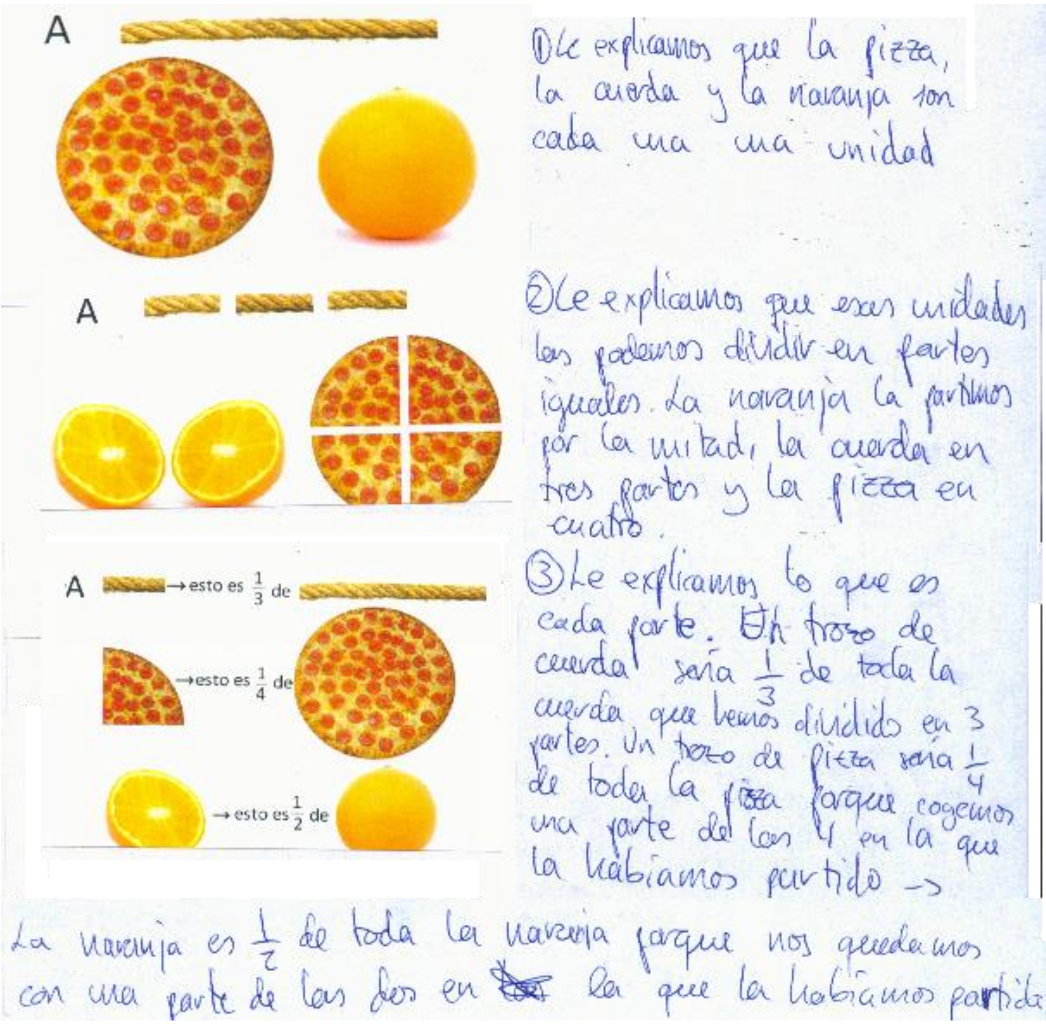


Figura 2. Ejemplo de narración realizada por un estudiante para maestro

En el análisis de los datos utilizamos técnicas cualitativas, cuyo objetivo es organizar y caracterizar las producciones a través del sistema de categorías. Para codificar y categorizar las respuestas, nos basamos en las componentes del análisis de contenido (estructura conceptual, representaciones y fenomenología) y análisis de instrucción (modos de introducir los contenidos y función de las ilustraciones). Estas componentes generales se concretan a través de nuestro marco conceptual en subcategorías más específicas. Además, tras una primera revisión de todas las respuestas, fue necesario ampliar las subcategorías, pues de los datos surgieron otras nuevas no contempladas. Un ejemplo de codificación para la respuesta de la figura 2, se incluye en la tabla 1.

Tabla 1. Ejemplo de codificación de los datos

<table>
<tr><th colspan="3">Análisis de contenido</th></tr>
<tr><td>Estructura conceptual</td><td>Representaciones</td><td>Fenomenología</td></tr>
<tr><td>Todo (pizza, cuerda, naranja); unidad; partes iguales; parte; $P=\frac{1}{n}T$</td><td>Verbal (mitad) y numérica</td><td>La fracción surge de una división en partes iguales y selección de algunas.</td></tr>
<tr><th colspan="3">Análisis de instrucción</th></tr>
<tr><td colspan="2">Modo de introducir contenidos</td><td>Uso de representaciones</td></tr>
<tr><td colspan="2">Instrumental</td><td>Ilustrativa</td></tr>
</table>

Los resultados obtenidos se presentan en dos secciones que corresponden a los dos análisis considerados, de contenido y de instrucción.

Datos sobre el análisis de contenido

En una instrucción inicial sobre el concepto parte-todo de fracción no es posible poner en juego todos los elementos del contenido del tema. Por ello, al realizar una explicación, los sujetos seleccionan aquellas componentes del concepto que conocen y/o eligen los que les parecen más adecuados para comunicar los nuevos conocimientos e iniciar y guiar el aprendizaje de los escolares. Estos conocimientos manifestados fueron codificados según cada una de las componentes del análisis del contenido: estructura conceptual, fenomenología y representaciones. Estas tres componentes permiten identificar, analizar e interpretar las producciones realizadas por los maestros en formación en términos de aquellos aspectos del contenido que seleccionan para realizar una introducción al concepto de fracción.

Datos sobre la estructura conceptual

En nuestro análisis identificamos conceptos y procedimientos distintos de los presentes en las ilustraciones que los sujetos añadieron como conocimiento adicional en sus respuestas. Como vemos en el ejemplo de la figura 2, los participantes introdujeron en su narración la explicación del concepto de unidad. Algunos de estos conceptos no se presentaron en el marco teórico como elementos fundamentales de la estructura conceptual (todo, parte, relación y complementario), por lo que se añadieron como nuevos valores para esta categoría. Los elementos, todo, parte y relación, fueron incluidos en casi la totalidad de respuestas, por el contrario el elemento complementario se incluyó sólo en el 24% de respuestas. La tabla 2 recoge aquellos valores para la categoría estructura conceptual que no se consideraron en el marco teórico.

Como se aprecia en la tabla 2, el conocimiento adicional más común consiste en identificar el significado del numerador y denominador con los elementos de la estructura conceptual en un proceso de división en partes de un objeto o en un proceso de reparto (34%). Otros dos contenidos que se incluyen con un porcentaje similar en las respuestas son el concepto de fracción entera y su relación con el todo dividido en partes (17%) y el concepto de unidad y su identificación con el todo u objeto inicial (14%). Por último, en algunas respuestas se introducen otros aspectos procedimentales como la suma y resta de fracciones, aunque en ningún caso se incluye el algoritmo de estas operaciones.

Tabla 2. Conceptos y procedimientos añadidos en las respuestas

Concepto o procedimiento	Ejemplo de respuesta	Porcentaje N=82
Concepto de numerador y denominador	"…en una fracción, el número o parte que cogemos del total se denomina numerador y el número en que dividimos el total y que se posiciona debajo es el denominador"	34%
Concepto de fracción entera	"…como la cuerda la hemos dividido en 3 partes, la parte entera y completa sería $\frac{3}{3}$, ya que 3 dividido entre 3 es 1 que es la parte entera…"	17%
Concepto de unidad	"para la explicación de las fracciones, hemos cogido tres objetos: pizza, naranja y una cuerda. Estos objetos representan la unidad, es decir 1"	14%
Suma o resta de fracciones	"cada trozo equivale a $\frac{1}{3}$ y tenemos 3 trozos, $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$=cuerda completa"; "nos comemos una porción $\frac{1}{4}$, al restarle $\frac{1}{4}$ a los $\frac{4}{4}$ nos quedan $\frac{3}{4}$"	10%

Datos sobre fenomenología

A pesar de que las ilustraciones inducen un proceso de división en partes, en sus respuestas los sujetos introducen otros sentidos distintos: repartir, medir y reconstruir la unidad dada una fracción. En este caso las respuestas no incluyen sentidos distintos a los considerados en el marco conceptual, por lo que no se ampliaron los valores para esta categoría.

Tabla 3. Sentidos presentes en las respuestas

	Porcentaje
Las fracciones surgen de una división en partes de un objeto y la selección de algunas de ellas.	37%
Las fracciones surgen de una división en partes de un objeto y la medida de una de las partes	20%
Las fracciones surgen de una división en partes de un objeto.	20%
Las fracciones surgen de un proceso de división y reparto	10%
Las partes se recomponen dando lugar a la unidad	7%
Las fracciones surgen de un reparto	6%

Como se observa en la tabla 3, los sentidos se presentan en las respuestas de manera única, como en el ejemplo de la figura 2, o combinando los sentidos de división con medida o reparto.

Datos sobre representaciones

Puesto que la tarea propuesta a los sujetos contiene ilustraciones con elementos gráficos y numéricos, solamente en 5 casos se incluyeron representaciones gráficas o simbólicas ($\frac{a}{b}$) distintas de las dadas en las ilustraciones: una simbólica, tres gráficas, y una simbólica y gráfica.

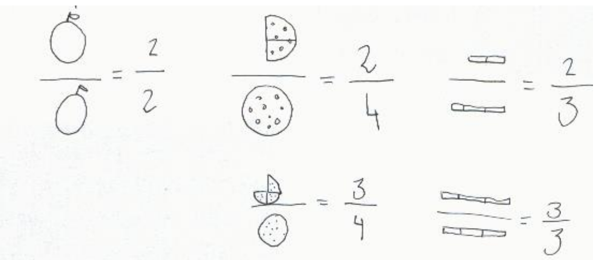


Figura 3. Ejemplo de representación gráfica presente en una respuesta

Estas nuevas representaciones, surgen para plantear nuevos ejemplos (figura 3), o reforzar la explicación de los ya presentes en las ilustraciones propuestas. No se detectan representaciones más abstractas de las mismas nociones, que muestren o aborden el concepto en estudio.

Datos sobre el análisis de Instrucción

Estos datos recogen los aspectos relativos a la explicación propuesta. En esta categoría, se identifican dos valores distintos: los modos en que los participantes introducen los contenidos seleccionados y el uso de las representaciones.

Modos de introducir los contenidos

Durante su redacción, los participantes, además de seleccionar aquellas componentes del concepto que conocen y consideran más adecuadas, utilizan diferentes modos de presentar los contenidos. Organizamos las producciones según tres modalidades: instrumental, narrativa y funcional.

El modo instrumental es predominante en las respuestas (73%). Un ejemplo de respuesta para este estilo se encuentra en la figura 2.

El modo funcional tiene una presencia escasa en las respuestas (13%). En la siguiente respuesta podemos verlo reflejado.

> (Tarjeta A1) Una familia de 4 personas, quiere repartirse una pizza pero no sabe cómo.
>
> (Tarjeta A2) Como son 4 personas, dividen en 4 partes quedando así $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, todo sumando da $\frac{1}{4}$.
>
> (Tarjeta A3) Cada uno pues, se come $\frac{1}{4}$ de pizza. El hijo se ha comido ya ¼ de pizza así que quedan $\frac{3}{4}$ de pizza.

En el modo narrativo tiene una presencia similar al caso anterior (14%). Una respuesta que se corresponde con este estilo es la siguiente.

> Hoy vamos a aprender lo que es una fracción, nos basamos en un ejemplo sencillo para ello.
>
> (Tarjeta A1) Como vemos en la figura 1 la pizza está entera, si queremos comerla deberíamos de partirla. Como estamos 4 amigos deberíamos de partirla, un trozo para cada uno.
>
> (Tarjeta A2) Como somos buenos amigos los trozos serán iguales para todos. Partiremos nuestra pizza y nos quedará como en la figura 2. Si tuviéramos que decir a cuánto nos a tocado cada uno y cuánto al resto ¿cómo lo haremos?
>
> (Tarjeta A3) ¡Exacto! Con fracciones. Si la pizza la partimos en 4 trozos y nos quedamos con un trozo lo que les toca a los demás es ¾ como aparece en la figura 3. Una fracción es una parte de la unidad. La unidad es la pizza, las porciones las partes en las que dividimos, y lo que nos corresponde (nuestra porción) es una fracción.

Al cruzar esta categoría para el análisis de la explicación con la categoría fenomenología para el contenido, se observó que en los modos narrativo y funcional, la mayoría de los participantes utilizaron el sentido de reparto, mientras que en el enfoque instrumental lo hicieron mediante el sentido de división.

Datos sobre el uso de representaciones

Puesto que la tarea propuesta obliga a los participantes en el estudio a usar unas determinadas ilustraciones, ellos les otorgaron una función determinada dentro de su narración. Estas funciones son ilustrativa, explicativa o aclarativa.

La primera de esas funciones —en la que las imágenes ilustran la explicación, pero no añaden o completan con nuevo conocimiento— es usada por un 43% de los participantes. El ejemplo de respuesta dado en la figura 2 se encuentra dentro de esta categoría.

La segunda —aquella en la que las imágenes tienen una función explicativa— es la que obtiene menor frecuencia (14%). Un ejemplo de respuesta para este valor de la categoría es: “El primer lugar presentamos a los alumnos los elementos (tarjeta A1), a continuación que es lo que queremos conseguir (tarjeta A2), por último les mostramos la equivalencia de cada porción en referencia al todo (tarjeta A3)".

El último valor de esta categoría, la función aclarativa, está presente en un 43% de las producciones. Un fragmento de respuesta, que pertenece a este caso se encuentra en la figura 4.

Figura 4. Ejemplo de ilustración con función aclarativa

En este ejemplo las imágenes y el texto se compaginan y forman parte de la explicación, relacionándose con ella a través de flechas.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de este estudio fue caracterizar el conocimiento didáctico del contenido, desde la perspectiva del análisis de contenido y el análisis de instrucción, que un grupo de maestros de en formación presentó cuando abordó una explicación para introducir el concepto de fracción. De la información recogida destacamos que, sin ninguna dificultad, los sujetos fueron capaces de ponerse en el papel de docentes y manifestar su conocimiento didáctico del contenido a través de sus respuestas. Además, manifestaron un conocimiento didáctico del contenido coherente en sus explicaciones, en el que se destaca la diversidad de modos en que los sujetos reconstruyen, adecuan o reestructuran el contenido para hacerlo comprensible a los escolares. A pesar de que los sujetos reconocieron los elementos básicos de las fracciones y los pusieron de manifiesto en sus explicaciones junto con otros contenidos, consideramos que una carencia a destacar en este conocimiento es la limitada planificación de la secuenciación de los contenidos atendiendo a su nivel dificultad.

Un logro de este estudio radica en que, a través de un instrumento aparentemente sencillo, nos pudimos aproximar a este tipo de conocimiento salvando las dificultades de otros estudios (Charalambous, Hill y Ball, 2011; Li y Kulm, 2008), en los que las carencias en el conocimiento del contenido sobre fracciones incidió en sus resultados. A pesar de que otros estudios utilizan ítems similares "¿Cómo explicarías las fracciones a alguien que no sabe lo que son?" (Domoney, 2001), la información obtenida no logró las expectativas esperadas, ya que las respuestas fueron escuetas debido al modo de plantear el ítem y el contexto en el que fue propuesto. Nuestro modo de formular la actividad y el uso de ilustraciones a través de pegatinas, dio lugar a una mayor riqueza de respuestas y resultados. Además, el contexto de la asignatura hizo que la dinámica de trabajo estuviese orientada hacia la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado con la ayuda y financiación del proyecto "Procesos de Aprendizaje del Profesor de Matemáticas en Formación" (EDU2012-33030) del Plan Nacional I+D+I (MICIN).

Referencias

Ball, D. (1990). Preservice elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(2), 132-144.

Charalambous, C.Y., Hill, H. C. y Ball, D. L. (2011). Prospective teachers' learning to provide instructional explanations: How does it look and what might it take? *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(6), 441-463.

Chick, H.L. (2003, Noviembre-Diciembre). Pre-service teachers' explanations of two mathematical concepts. Documento presentado en Annual Conference of the Australian Association for Research in Education, Auckland, New Zealand.

Domoney, B. (2001). Student teachers' understanding of rational numbers. En J. Winter (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics,* Vol. 21, num. 3 (pp. 13-18). Southampton: BSRLM

Fuller, (1996, Octubre). Elementary Teachers' Pedagogical Content Knowledge of Mathematics. Documento presentado en Mid-Western Educational Research Asociation Conference, Chicago, Ilinois.

Gairín, J. M. (2001). Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación. *Contextos educativos, 4,* 137-159.

Gómez, P. (2006). Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de Matemáticas de secundaria. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 15-35). Huesca, España: Instituto de Estudios Aragoneses.

Hiebert, J. y Carpenter, T. P. (1992). Learning and Teaching with Understanding. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan.

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

Isiksal, M. y Cakiroglu, E. (2011) The nature of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge: The case of multiplication of fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(3), 213-230.

Kinach, B. (2002). Understanding and learning-to-explain by representing mathematics: epistemological dilemmas facing teacher educators in the secondary mathematics "methods" course. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*(2), 153-186.

Li, Y. y Kulm, G. (2008) Knowledge and confidence of pre-service mathematics teachers: the case of fraction división. *ZDM, 40*, 833-843

Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *PNA*, *3*(1), 35-48.

Marks, R. (1990) Pedagogical Content Knowledge: From a Mathematical Case to a Modified Conception. *Journal of Teacher Education, 41*(3), 3-11.

Newton, K. J. (2008). An Extensive Analysis of Preservice Elementary Teachers' Knowledge of Fractions. *American Educational Research Journal*, *45*(4), 1080-1110.

Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiañez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática* (pp. 1-22). Granada, España: Comares, S.L.

Simon, M. A. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*, 5-25.

Thanheiser, E. (2009). Preservice elementary school teachers' conceptions of multidigit whole numbers. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*, 252-281.

Valverde, G. (2012). Competencias Matemáticas promovidas desde la razón y la proporcionalidad en la formación inicial de maestros de educación primaria. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Granada, España.

Weiss, I. R. y Parsley, J. D. (2004). What is high-quality instruction? *Educational Leadership, 65*(1), 24-28.

RELACIÓN ENTRE EL CONOCIMIENTO DE GEOMETRIA Y EL *“TRUNCAMIENTO”* DEL RAZONAMIENTO CONFIGURAL

Relationships between geometrical knowledge and the “*truncation”* of configural reasoning

Francisco Clemente, Salvador Llinares

Universidad de Alicante

Resumen

El objetivo de esta investigación es identificar las relaciones entre el conocimiento de geometría usado durante la resolución de problemas de probar y el truncamiento del razonamiento configural. Los resultados muestran diferentes trayectorias de resolución vinculadas a las sub-configuraciones relevantes. Estos resultados parecen indicar que el truncamiento del razonamiento configural está relacionado con la capacidad de los estudiantes de establecer relaciones significativas entre lo que conocen de la configuración y la tesis que hay que probar a través de algún conocimiento geométrico previamente conocido.

Palabras clave: *aprendizaje de la geometría, razonamiento configural, prueba*

Abstract

The goal of this study is to identify the geometrical knowledge used during the resolution of geometrical proof problems and its relation to the “truncation” of configural reasoning. The findings show different resolution trajectories linked to relevant sub-configurations. These findings seem to indicate that the truncation of configural reasoning is related to how the students are able to related what is known about the configuration (the date of problem, and new generated fact) to thesis of problem (the thesis, what has to be proofed) through of some known geometrical fact.

Keywords: *learning of geometry, configural reasoning, proof*

INTRODUCCIÓN

El análisis de la relación entre los procesos de visualización y el conocimiento de geometría en la resolución de problemas de probar ha puesto de manifiesto las dificultades que tienen algunos resolutores en aplicar el conocimiento de geometría previamente aprendido (Chinnappan y Lawson, 1998; Battista, 2007, 2008; Gal y Linchevski, 2010). En el contexto del aprendizaje de la geometría y de la resolución de problemas de probar, Duval (1995, 2007) y Fischbein (1993) subrayan el papel heurístico de las figuras puestas de manifiesto a través de dos tipos de aprehensiones. Duval caracteriza la aprehensión operativa como la modificación de una figura para considerar sub-configuraciones; esto se puede hacer añadiendo o quitando nuevos elementos geométricos, o manipulando las diferentes partes de una configuración geométrica como un puzle para fijar la atención sobre sub-configuraciones particulares. Y la aprehensión discursiva se evidencia cuando el estudiante asocia configuraciones o sub-configuraciones con afirmaciones matemáticas.

En este ámbito, la idea de razonamiento configural entendida como la coordinación de las aprehensiones operativas y discursivas nos está ayudando a comprender cómo los estudiantes para maestro resuelven los problemas de probar centrando la atención en la relación entre los procesos de visualizar y el conocimiento de geometría (Torregrosa y Quesada, 2007; Torregrosa, Quesada y Penalva, 2010). En la resolución de los problemas de probar el razonamiento configural puede desembocar en “truncamiento” (la coordinación proporciona la “idea” para resolver deductivamente el problema); o bien, en un “bucle” (situación de bloqueo que no permite el avance hacia la

Clemente, F., Llinares, S. (2014). Relación entre el conocimiento de geometria y el “truncamiento” del razonamiento configural. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 247-256). Salamanca: SEIEM.

solución). Las investigaciones previas han identificado dos momentos relevantes en los procesos de resolución de algunos problemas de probar en geometría (Clemente & Llinares, 2013; Llinares, & Clemente, 2014). En primer lugar, cuando el resolutor asocia algunas propiedades o definiciones a la configuración geométrica dada mediante aprensiones discursivas. En segundo lugar, cuando los diferentes hechos geométricos se relacionan mediante cadenas lógicas de inferencias "si… entonces…". En la resolución de estos problemas, algunos estudiantes tienen dificultades en "truncar" el proceso de razonamiento configural para inferir información adicional sobre la configuración (razonamiento deductivo). Esta evidencia pone de manifiesto la necesidad de comprender mejor la relación entre el razonamiento configural, el conocimiento de geometría y la generación de procesos deductivos durante la resolución de problemas de probar en geometría. Un factor que parece incidir en la generación de los procesos deductivos a partir del truncamiento del razonamiento configural, es la posibilidad de considerar un hecho geométrico no solo para identificar una propiedad de una configuración (aprehensión discursiva), sino también como parte de una secuencia de relaciones deductivas. Es decir, la posibilidad de reconocer que un hecho geométrico puede desempeñar papeles diferentes en el proceso de resolución (Herbst, et al. 2009).

Esta situación plantea la necesidad de estudiar cómo los resolutores consideran los hechos y proposiciones geométricas identificadas en una configuración, o dadas como datos de un problema, como premisas en secuencias deductivas. Llegar a comprender mejor cómo se relacionan los ítems de conocimiento geométrico en este proceso puede ayudarnos a entender lo que favorece el truncamiento del razonamiento configural. Por ejemplo, cuando en el problema 2 de la Figura 1 se considera como premisas del criterio de congruencia de triángulos A-L-A los hechos geométricos siguientes: la congruencia de los ángulos ∢CAM y ∢MAN (derivada de la definición de AM bisectriz del ángulo ∢CAB), y la congruencia de los ángulos ∢CMA y ∢AMN (derivada de la propiedad de la suma de los ángulos en un triángulo rectángulo conocido uno de los ángulos), para deducir la congruencia de los triángulos △ACM y △AMN, y por tanto la congruencia de los segmentos CM y MN.

La posibilidad de reconocer la relación entre los hechos geométricos identificados en la configuración y uno de los criterios de congruencia de triángulos, conlleva que los estudiantes puedan o no truncar el razonamiento configural para generar un proceso de deducción lógica. Esta situación pone de manifiesto la relación que debe existir entre los procesos de visualización puestos de manifiesto mediante la coordinación de aprehensiones operativas y discursivas que constituyen el razonamiento configural, y el conocimiento de geometría previamente aprendido por el estudiante. Considerando lo anterior, planteamos los siguientes objetivos de investigación:

- Identificar el conocimiento de geometría activado durante la resolución de problemas de probar y su relación al truncamiento del razonamiento configural al generarse procesos deductivos
- Caracterizar las relaciones establecidas entre los hechos geométricos que permiten generar el truncamiento del razonamiento configural

Método

Participantes

En el estudio participaron 51 estudiantes de un programa de formación de maestros. Los alumnos cursaban una asignatura centrada en el sentido geométrico organizada según los procesos cognitivos de visualización, prueba y construcción (Duval, 1995). Parte del contenido consistía en aprender a visualizar propiedades geométricas de figuras planas como polígonos, triángulos, cuadriláteros, paralelogramos, y generar procesos de probar y construir. Así como contenidos relativos a las transformaciones geométricas.

Instrumentos

Los estudiantes resolvieron dos problemas de probar (Figura 1) en los que se presentaba una configuración geométrica con información sobre algunos hechos geométricos vinculados a la configuración y se les pedía probar la congruencia de dos segmentos. Para su resolución, los estudiantes debían desarrollar aprehensiones operativas y discursivas identificando sub-configuraciones que les permitieran reconocer algunos objetos geométricos para generar una prueba. Para identificar los hechos geométricos que definían los problemas y que podrían usarse para resolverlos en el contexto en el que se encuentran los resolutores, se pidió a un grupo de formadores de maestros que propusieran diferentes alternativas para su resolución. En la Tabla 1, hemos situado en primer lugar los elementos geométricos que podían proceder de realizar asociaciones directas de elementos geométricos a la configuración a partir de los datos del problema; y, en segundo lugar, los elementos geométricos susceptibles de ser usados para inferir información adicional.

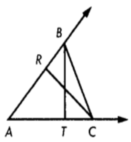
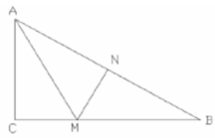
<table>
<tr><th>Problema 1</th><th>Problema 2</th></tr>
<tr><td>Dado el triángulo △ABC de la figura, con AB≡AC y ∢RCB≡∢TBC, probar que RC≡BT

</td><td>En la figura, AM es bisectriz de ∢CAB, △ACB es un triángulo rectángulo en C y MN⊥AB en N. Probar que CM≡MN

</td></tr>
</table>

Figura 1. Problemas de probar

Tabla 1. Contenido geométrico susceptible de ser usado en cada uno de los problemas

Problema 1	Problema 2
• Ángulos opuestos por el vértice son iguales • Caracterización de triángulo isósceles (dos lados congruentes, y por tanto, dos ángulos congruentes). En un triángulo, los ángulos opuestos a dos lados congruentes son congruentes y los lados opuestos a dos ángulos congruentes son congruentes • Si a dos ángulos congruentes se les resta la misma parte lo que queda son ángulos congruentes • Criterio de congruencia de triángulos A-L-A	• Definición bisectriz de un ángulo (es la semirrecta que pasa por el vértice del ángulo y lo divide en dos partes congruentes) • Definición de rectas perpendiculares • Definición de triángulo rectángulo • La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º (conocidos dos ángulos en un triángulo, conocemos el tercero) • Criterio de congruencia de triángulos A-L-A

Los resolutores podían identificar alguna sub-configuración (Figura 2) mediante una aprehensión operativa lo que les podía permitir reconocer triángulos con ángulos congruentes y lados congruentes como premisas de alguno de los criterios de congruencia de triángulos.

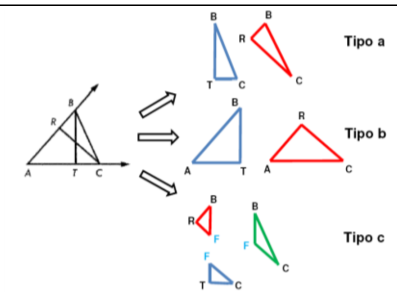
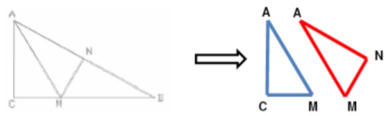
<table>
<tr><th>Problema 1</th><th>Problema 2</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Figura 2. Posibles sub-configuraciones consideradas en la resolución de los problemas

Análisis

El análisis de las respuestas de los estudiantes para maestro se realizó en dos fases, que describimos usando como ejemplo protocolos del problema 2.

- En la *fase 1*, identificamos:
  - Si los estudiantes reconocían los objetos geométricos dados como datos del problema en la configuración. Por ejemplo, si indicaban de alguna manera que la bisectriz del ángulo ∢CAB determinaba dos ángulos iguales en ∢A; que el ángulo ∢C era recto por ser △ACB un triángulo rectángulo en C; y que el ángulo ∢N es recto por ser MN perpendicular a AB.
  - Si los estudiantes usaban un conocimiento no dado en los datos del problema para generar información adicional. Por ejemplo, si utilizaban el hecho de que los ángulos interiores de un triángulo suman 180º, y por tanto, conocidos dos ángulos en un triángulo podemos conocer el tercero.
  - Evidencias de que los estudiantes han generado alguna aprehensión operativa que les permite identificar sub-configuraciones relevantes. Por ejemplo, cuando indican que están considerando los triángulos △ACM y △AMN.
  - Cuándo los estudiantes volvían a usar un hecho geométrico no dado en los datos para generar información adicional sobre la configuración. Por ejemplo, si usaban el criterio de congruencia de triángulos A-L-A al reconocer la información reunida en la configuración como premisas de este criterio de congruencia.

En esta fase de análisis identificábamos los momentos del proceso de resolución en los que intervenía un conocimiento de hechos geométricos no dados en los datos del problema, y la secuencia en la que mediaba la identificación de sub-configuraciones relevantes mediante una aprehensión operativa. Este manera de describir la trayectoria de resolución nos permitió identificar qué estudiantes asignaban un status lógico a algunos hechos geométricos al poderlos considerar premisas de alguna proposición a partir de la identificación de una sub-configuración relevante (Figura 3).

- En la *fase 2*, a cada respuesta a un problema se le asoció un 3-vector (Lin y Yang, 2007) V [(1),(2),(3)], con el fin de identificar diferentes trayectorias de resolución de los problemas definidas por la manera en la que se identificaban y relacionaban diferentes ítems de conocimiento de geometría necesarios para su resolución (Tabla 2).

Tabla 2. Descripción, puntuación e identificación del conocimiento activado en el proceso de resolución del problema 2

Ítem	**Descripción**	**Puntuación**	**Conocimiento activado**
(1)	Identificación de una sub-configuración relevante	0: no identifica 1: sí identifica	-Triángulo (CA1)
(2)	Identificación de ítems de conocimiento susceptibles de ser usados como hipótesis para aplicar un teorema (premisas en una cadena deductiva). Dos tipos de ítems: - Obtenidos directamente a partir de los datos del problema: H1: AM≡AM H2: ∢ACM≡∢MNA H3: ∢CAM≡∢MAN -Obtenido a partir de conocimiento de geometría previo: H4: ∢AMC≡∢AMN	0: no identifica 1: identifica H1, H2 y H3 2: identifica H1, H2, H3 y H4	-Bisectriz (semirrecta que pasa por el vértice del ángulo y lo divide en dos partes iguales) (CA5) -Definición de rectas perpendiculares (CA6) -Definición de triángulo rectángulo (CA7) -Ángulo (la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180º) (CA8)

(3)	Obtención de conclusiones: C1: △ACM≡△AMN (menciona la utilización del criterio A-L-A) para derivar… C2: CM≡MN (menciona la utilización del criterio de congruencia de triángulos)	0: no obtiene conclusiones 1: obtiene C1 y C2	-Congruencia de triángulos (criterio A-L-A) (CA9)

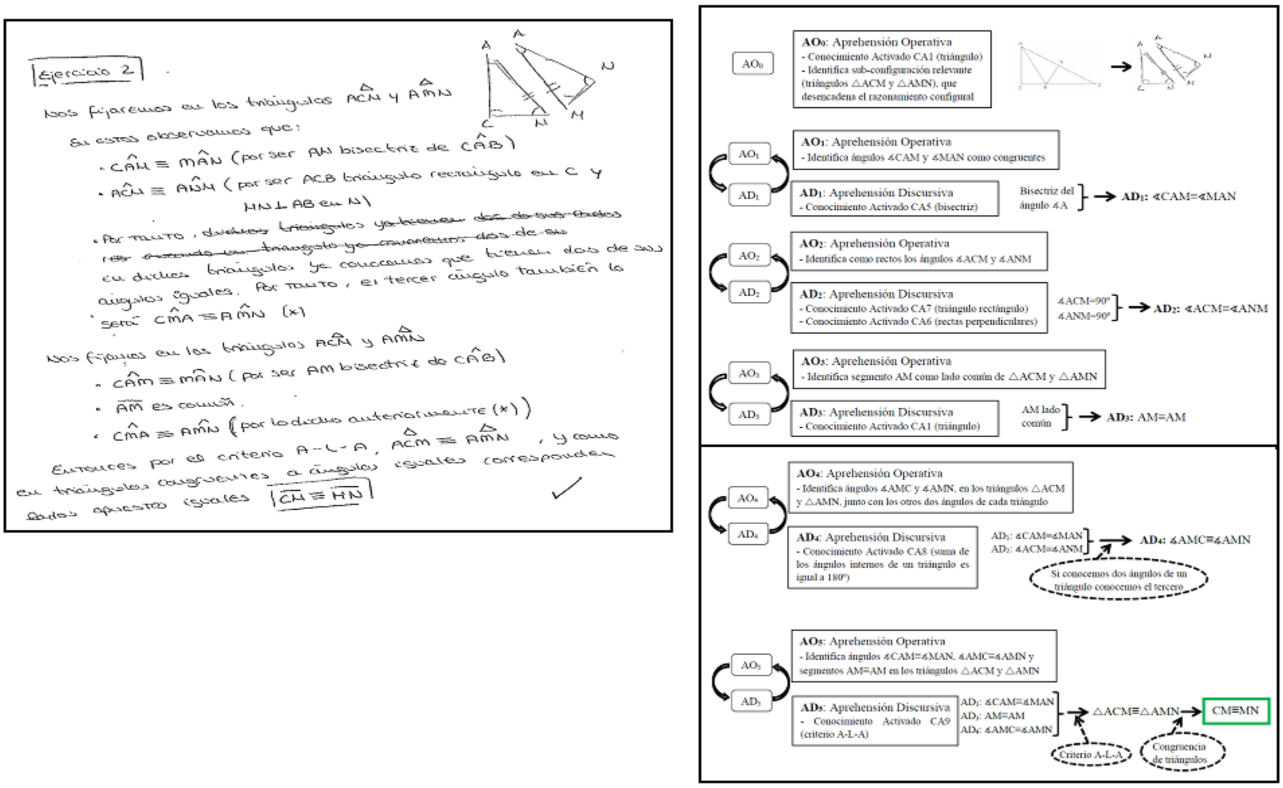


Figura 3. Ejemplo de respuesta de un estudiante al problema 2 descompuesto en unidades de análisis en la fase 1 del proceso de análisis seguido.

Resultados

Conocimientos geométricos

El análisis ha permitido identificar los ítems de conocimiento usados por los estudiantes en cada problema en relación a la sub-configuración identificada (tablas 3.1 y 3.2). El porcentaje de identificación de una sub-configuración relevante fue el mismo en los dos problemas: 92,2% (47 de 51). Sin embargo, el hecho de que el problema 1 pudiera tener tres trayectorias de resolución vinculadas cada una a determinadas sub-configuraciones (tipo a, b y c) ha implicado la activación de determinados conocimiento geométricos y plantea la cuestión de la relación con el nivel de éxito (generar un proceso deductivo correcto) vinculado a cada una de ellas. Las tablas 3.1 y 3.2 muestran la frecuencia en la que los estudiantes usaban diferentes hechos geométricos en relación a cada sub-configuración.

La identificación y las relaciones entre algunos de estos hechos geométricos pueden ayudar a producir el truncamiento del razonamiento configural, mientras que el uso de otros hechos geométricos podía introducir a los estudiantes en un bucle. Por ejemplo, en el problema 1 la sub-configuración *tipo a* fue identificada con más frecuencia (n=29), y vinculada a ella, los estudiantes usaron en el razonamiento configural los hechos geométricos: caracterización del triángulo isósceles (CA2, n=15), propiedad aditiva de los ángulos congruentes (CA3, n=9) y ángulos opuestos por el vértice son congruentes (CA4, n=1). Sin embargo, en la trayectoria de resolución asociada a esta sub-configuración no se requieren los hechos geométricos CA3 y CA4. Es decir, hubo estudiantes que activaron estos conocimientos innecesariamente. En esta situación, para poder determinar la relación entre el uso de un hecho geométrico en una determinada configuración y la realización o no del truncamiento en el razonamiento configural identificamos las trayectorias de resolución seguidas por los estudiantes.

Tabla 3.1 Conocimiento geométrico usado durante la resolución del problema 1

(CAi: ítem de conocimiento activado)

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="3">Conocimiento activado en P1</th><th colspan="3">Frecuencia</th></tr>
<tr><td colspan="3">Sub-configuración relevante</td></tr>
<tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr>
<tr><td rowspan="2">CA1</td><td rowspan="2">-Triángulo: identificación de una sub-configuración</td><td>29</td><td>12</td><td>6</td></tr>
<tr><td colspan="3">47</td></tr>
<tr><td rowspan="2">CA2</td><td rowspan="2">- Caracterización de Triángulo isósceles: tiene dos lados congruentes y por tanto dos ángulos congruentes</td><td>15</td><td>12</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="3">32</td></tr>
<tr><td rowspan="2">CA3</td><td rowspan="2">-Si a dos ángulos congruentes se les resta la misma parte, lo que queda son ángulos congruentes</td><td>9</td><td>11</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="3">22</td></tr>
<tr><td rowspan="2">CA4</td><td rowspan="2">-Ángulos opuestos por el vértice son congruentes</td><td>1</td><td>0</td><td>6</td></tr>
<tr><td colspan="3">7</td></tr>
<tr><td rowspan="2">CA9</td><td rowspan="2">-Congruencia de triángulos (criterio A-L-A)</td><td>10</td><td>12</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="3">24</td></tr>
</table>

Tabla 3.2. Conocimiento geométrico usado durante la resolución del problema 2

(CAi: ítem de conocimiento activado)

Conocimiento activado en P2		**Frecuencia**
CA1	-Triángulo: identificación de una sub-configuración	47
CA5	-Bisectriz: semirrecta que pasa por el vértice del ángulo y lo divide en dos partes congruentes	41
CA6	-Definición de rectas perpendiculares	36
CA7	-Definición de triángulo rectángulo	29
CA8	-La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º. Consecuencia: conocidos dos ángulos en un triángulo, conocemos el tercero)	33
CA9	-Congruencia de triángulos (criterio A-L-A)	30

Trayectorias de resolución

Una trayectoria de resolución es la secuencia de hechos geométricos (conocimiento) y sus relaciones seguida por un estudiante al intentar resolver el problema vinculado a una determinada configuración. El objetivo aquí es considerar el momento en el que una aprehensión operativa y/o discursiva genera un truncamiento del razonamiento configural. La tabla 4 muestra los vectores con los valores asociados a las respuestas de los estudiantes que nos permiten identificar las trayectorias de resolución. Dicha tabla recoge el número de respuestas asignadas a cada vector (no se muestran los vectores: V [0,1,0], V [0,2,0]…, ya que no se dieron estas trayectorias en las respuestas de los estudiantes). Las trayectorias de resolución de los estudiantes se han agrupado en tres grupos:

- El *primer grupo* (V [0,0,0]) corresponde a los estudiantes (n=4) que no identificaron una sub-configuración relevante y no iniciaron el razonamiento configural.
- El *segundo grupo* lo forman los estudiantes que han activado al menos un hecho geométrico (identificación de triángulos, CA1) permitiéndoles identificar alguna sub-configuración, pero que generaron un bucle y no fueron capaces de resolver el problema. En este grupo hemos identificado tres sub-grupos:
    - los que no han activado nuevos conocimientos siendo incapaces de considerar los hechos geométricos identificados como premisas susceptibles de ser usados como hipótesis de un teorema (V [1,0,0]);

  - los que han generado aprehensiones discursivas desde los datos del problema (V [1,1,0]);
  - los que han activado ítems de conocimiento que les ha permitido generar nueva información adicional a partir de los datos y del conocimiento previo (V [1,2,0]), pero no son capaces de considerar algunos ítems de conocimiento que han reunido como premisas de proposiciones del tipo “si… entonces…” (que en estos problemas era el criterio de congruencia de triángulos)
- El *tercer grupo* (V [1,2,1]) son los estudiantes que han activado los ítems de conocimiento necesarios para la resolución seguida, y en los que el razonamiento configural ha desembocado en un truncamiento, resolviendo el problema con éxito.

Tabla 4. Clasificación de las trayectorias de resolución adoptadas por los estudiantes

<table>
<tr><th>Grupo</th><th>Vector</th><th colspan="3">P1</th><th>P2</th></tr>
<tr><td>Sin identificación de sub-configuración relevante</td><td>V [0,0,0]</td><td colspan="3">4</td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="8">Bucle</td><td rowspan="2"></td><td colspan="3">Sub-configuración relevante</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>Tipo a</td><td>Tipo b</td><td>Tipo c</td></tr>
<tr><td rowspan="2">V [1,0,0]</td><td>5</td><td>0</td><td>1</td><td rowspan="2">2</td></tr>
<tr><td colspan="3">6</td></tr>
<tr><td rowspan="2">V [1,1,0]</td><td>12</td><td>0</td><td>3</td><td rowspan="2">11</td></tr>
<tr><td colspan="3">15</td></tr>
<tr><td rowspan="2">V [1,2,0]</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td rowspan="2">4</td></tr>
<tr><td colspan="3">2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Truncamiento</td><td rowspan="2">V [1,2,1]</td><td>10</td><td>12</td><td>2</td><td rowspan="2">30</td></tr>
<tr><td colspan="3">24</td></tr>
</table>

En el problema 1, de los 47 estudiantes que identificaron alguna sub-configuración, 24 consiguieron generar los procesos deductivos (51%). De los 24 estudiantes que generaron un truncamiento del razonamiento configural generando un proceso deductivo, 10 siguieron la trayectoria vinculada a la *sub-configuración a* (CA1+CA2+CA9), 12 (50%) siguieron la trayectoria vinculada a la *sub-configuración b* que implicaba la activación de cuatro ítems de conocimiento geométrico (CA1+CA2+CA3+CA9); y solo 2 se apoyaron en la *sub-configuración c* (CA1+CA2+CA3+CA4+CA9).

De los 29 estudiantes que la iniciaron la trayectoria vinculada a la *sub-configuración a*, , solo 10 consiguieron generar un truncamiento (34,5%). En esta trayectoria (CA1+CA2+CA9) identifican en primer lugar los dos triángulos de la *sub-configuración a* (CA1); también fueron capaces de relacionar la caracterización de triángulo isósceles a partir del dato del problema de que los lados AB y AC eran congruentes, derivando por tanto que el triángulo ABC es isósceles, y como consecuencia, que los ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes (H3: ∢TCB≡∢RBC), (CA2), (esta información es utilizada en las trayectorias de resolución vinculadas a las sub-configuraciones *a*, *b* y *c*). La relación de este hecho con el dato dado por el problema H2: ∢RCB≡∢TBC a través del criterio de congruencia de triángulos A-L-A (CA9) les permitía inferir que RC≡BT.

En la *sub-configuración b*, los 12 estudiantes que la iniciaron consiguieron realizar el truncamiento (100%). En la trayectoria de resolución de estos estudiantes (CA1+CA2+CA3+CA9) identifican en primer lugar los dos triángulos de la s*ub-configuración b* (CA1); asimismo, utilizan el dato del problema H1: AB≡AC; a partir de este dato y empleando la caracterización de triángulo isósceles obtienen que tiene dos ángulos congruentes (CA2); junto con la hipótesis H2: ∢BAT≡∢CAR, y a través de la propiedad aditiva de ángulos congruentes (CA3), derivan un ítem de información (H3: ∢ACR≡∢ABT), (esta información es utilizada en las trayectorias de resolución vinculadas a las *sub-configuraciones b y c*). Al ser capaces de relacionar esos dos ítems de conocimiento a través del criterio de congruencia de triángulos (CA9), generan el truncamiento del razonamiento configural que les permite resolver el problema.

Por último, la trayectoria definida por *la sub-configuración c*, fue generada por 6 de 47 estudiantes (12,8%) con un éxito del 33,3% (2 de 6). En la trayectoria de resolución, estos estudiantes (CA1+CA2+CA3+CA4+CA9) identifican en primer lugar los tres triángulos de la *sub-configuración c* (CA1), que les permite usar la caracterización del triángulo isósceles teniendo dos lados/ángulos congruentes (CA2); junto con el uso de la propiedad aditiva de los ángulos congruentes (CA3); y la congruencia de ángulos opuestos por el vértice (CA4) (esta información es utilizada únicamente en la trayectoria de resolución vinculada a la *sub-configuración c*). Con las premisas anteriores aplican un criterio de congruencia de triángulos (CA9, criterio A-L-A) y resuelven el problema.

En el problema 2, de los 47 estudiantes que han seguido la trayectoria de resolución definida por la única sub-configuración identificada, 30 generaron procesos deductivo (63,8%) que implicaba la activación de seis ítems de conocimiento geométrico (CA1+CA5+CA6+CA7+CA8+CA9). En la trayectoria de resolución de este problema, los estudiantes realizaron aprehensiones discursivas con H3: ∢CAM≡∢MAN derivada del dato del problema (AM es bisectriz del ángulo ∢CAB). A partir de este momento, para poder tener los datos para usar el criterio de congruencia de triángulos A-L-A, 33 estudiantes usan el ítem de conocimiento CA8 (la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º, y como consecuencia: conocidos dos ángulos en un triángulo conocemos el tercero), para derivar la información H4: ∢AMC≡∢AMN. A partir de aquí, 30 estudiantes consideran los datos H1: AM≡AM; H3: ∢CAM≡∢MAN; y H4: ∢AMC≡∢AMN como premisas del criterio de congruencia de triángulos A-L-A, y generan el truncamiento del razonamiento configural para generar el proceso deductivo que les permite resolver el problema.

Las diferentes trayectorias adoptadas por los estudiantes, que llevan a la resolución o no de los dos problemas (tabla 4), indican que los estudiantes identifican ítems de conocimiento a partir de los datos mediante aprehensiones discursivas y/o operativas, pero también generan nuevos datos usando ítems de conocimiento previamente conocidos y relacionándolos con la información de la configuración. En el problema 1 el CA3, si a dos ángulos congruentes se les resta la misma parte, lo que queda son ángulos congruentes; y en el problema 2 el CA8, la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º, y como consecuencia: conocidos dos ángulos en un triángulo, conocemos el tercero. Estos datos muestran diferencias en el tipo de relaciones entre los ítems de conocimiento de geometría que se establecen entre las trayectorias definidas por los vectores V[1,1,0], V[1,2,0] y V[1,2,1]), entre el conocimiento previo y lo puesto en evidencia por las aprehensiones discursivas y operativas (derivadas del proceso de visualización).

Discusión

Esta investigación intenta aportar características del conocimiento de geometría de los estudiantes para maestro que apoyen el truncamiento del razonamiento configural cuando se generan procesos deductivos durante la resolución de problemas de probar. Lo que motiva esta investigación es que los estudiantes para maestro deben llegar a conocer la geometría en el ámbito curricular de la educación primaria de forma que les permita ir más allá de simplemente reconocer propiedades y hechos geométricos en las figuras planas. La calidad del conocimiento de geometría puesto de manifiesto por las relaciones establecidas entre los hechos geométricos durante la resolución de problemas de probar, aporta información sobre la manera en la que los estudiantes para maestro deben llegar a conocer el contenido curricular de geometría. En este sentido, estos resultados indican rasgos del conocimiento de geometría del maestro que aportan información para caracterizar ámbitos específicos del conocimiento de matemáticas para enseñar.

A partir de nuestros resultados, podemos generar dos reflexiones en relación al papel del conocimiento de geometría en desencadenar el truncamiento del razonamiento configural en la resolución de los problemas de probar. En primer lugar, los resultados obtenidos muestran que las distintas trayectorias que llevan a la resolución o no de los dos problemas están determinadas por la identificación de una sub-configuración relevante que facilita el uso de ítems de conocimiento geométrico. Aunque en los problemas analizados hemos asociado inicialmente a esta identificación la activación de un conocimiento de geometría específico (CA1: triángulo), creemos que el reconocimiento de una configuración concreta (y no otra) en la figura inicial, puede responder a la activación simultánea de varios de estos conocimientos, que permiten visualizar una sub-configuración entre las varias posibles.

En segundo lugar, Chinnappan (1998) indicó que una diferencia entre los mejores y peores estudiantes en la resolución de un problema de probar, estaba en la capacidad que tenían los mejores estudiantes en relacionar la información identificada en la configuración (o dado por el problema), e inferir nueva información para ser usada en el proceso de resolución. Es decir, la capacidad que tenían los estudiantes en considerar un determinado hecho geométrico en relación a otros. En nuestra investigación, y considerando las características de los problemas usados, el truncamiento del razonamiento configural se daba en la medida en la que los estudiantes eran capaces de considerar un hecho geométrico como premisa de la proposición geométrica dada por el criterio de congruencia de triángulos. Para ello el hecho geométrico debía cambiar su estatus lógico y ser usado como premisa de un teorema o proposición lo que permite inferir información adicional. Chinnappan indicaba que los estudiantes con mayor éxito empleaban durante la resolución de problemas un mayor número de *relaciones entre los esquemas de conocimiento geométrico*, y que además, se relacionaban en mayor medida en cadenas de razonamiento deductivo. En este sentido, nuestros resultados indican que solo se genera una trayectoria con éxito cuando los estudiantes relacionaban los ítems de conocimiento geométrico considerándolos premisas en una proposición que desencadena una cadena lógico-deductiva (en este caso el criterio de congruencia de triángulos). Esta característica es la que añade sentido a la idea propuesta por Chinnappan de que "los esquemas geométricos activados por los estudiantes de mayor éxito eran más sofisticados y variados que los activados por sus homólogos de bajo rendimiento". Desde estos resultados, una característica de *la calidad del conocimiento geométrico* que determina que las estructuras de conocimiento sean cualitativamente superiores, es cuando un hecho geométrico puede desempeñar diferentes roles lógicos durante la resolución de un problema (Prior & Torregrosa, 2013).

Nosotros podemos entender que cuando los estudiantes son capaces de dotar de diferentes roles a los hechos geométricos en los intentos de resolución de los problemas, tiene como consecuencia el que sean capaces de construir una representación mental del problema, mostrando las conexiones entre los datos y la tesis (el objetivo del problema). Esta explicación incide en el hecho de que el éxito en establecer las conexiones a través da alguna proposición conocida entre los hechos geométricos dados, no depende solo de conocer los hechos y las proposiciones, sino también de haber dotado a los hechos geométricos de un estatus lógico que les permita considerarlos como premisas de una secuencia lógico-deductiva. Esto es así ya que, durante la resolución del problema, el estudiante debe establecer conexiones entre los ítems de conocimiento geométricos conocidos de manera aislada. Es decir, llegar a considerar la posibilidad de que un determinado hecho geométrico pueda ser premisa en una proposición estableciéndose una relación (conexión) entre hechos geométricos, como son los criterios de congruencia de triángulos, parece facilitar el truncamiento del razonamiento configural.

Reconocimientos

Esta investigación ha recibido el apoyo de los Proyectos I+D+i, EDU2011-27288 del Ministerio de Ciencia e Innovación, España.

Referencias

Battista, M. T. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Charlotte, N.C.: Information Age Publishing. NCTM.

Battista, M. T. (2008). Representations and cognitive objects in modern school geometry. In M. Kathleen & G. W. Blume (Eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 341-362). Charlotte: IAG.

Chinnappan, M. (1998). Schemas and mental models in geometry problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 36*, 201-217.

Clemente, F. y Llinares, S. (2013). Conocimiento de geometría especializado para la enseñanza en Educación Primaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación matemática XVII* (pp. 229- 236). Bilbao: SEIEM.

Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processes. In Sutherland, R. & Mason, J. (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematical Education* (pp. 142-157). Berlín, Germany: Springer.

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. In P. Boero (ed.), *Theorems in School. From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice*, (pp. 137-162). Rotterdam, Netherland: Sense Publishers.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24,* 139-162.

Gal, H. & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Studies in Mathematics, 74*(2), 163-183.

Herbst, P.; Chen, Ch.; Weiss, M.; Gonzalez, G.; Nachlieli, T.; Hamlin, M. & Brach, Ch. (2009). "Doing Proofs" in Geometry classrooms. En D. Stylianou, M.L. Blanton, & E. J.Knuth (eds). *Teaching and Learning Proof Across the Grades. A K-16 Perspectives* (pp.250-268). New York: Routledge.

Lin, F.L. & Yang, K. (2007). The reading comprehension of geometric proofs: The contribution of knowledge and reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education, 5*, 729-754.

Llinares, S. & Clemente, F. (2014). Characteristics of pre-service primary school teachers' configural reasoning. *Mathematical Thinking and Learning, 16*(3).

Mesquita, A.L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 183-195.

Prior, J. & Torregrosa, G. (2013). Razonamiento configural y procedimientos de verificación en contexto geométrico. [Configural reasoning and verification procedures in geometric context]. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 16*(3), 339-368.

Torregrosa, G., & Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en Geometría [Coordination of cognitive processes in geometry]. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*(2), 275-300.

Torregrosa, G., Quesada, H., & Penalva, M.C. (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización [Configural reasoning as coordination of visualisation process]. *Enseñanza de las Ciencias*, *28*(3), 327-340.

Yang, K. y Lin, F. (2008). A model of Reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(1), 59-76.

JUSTIFICACIÓN DE LAS REGLAS DE DERIVACIÓN EN LIBROS DE TEXTO DE CUATRO EDITORIALES DESDE LGE HASTA LOE

Justification of derivative rules on textbooks of four publishers since the LGE until the LOE

Laura Conejo, Matías Arce, Tomás Ortega

Universidad de Valladolid

Resumen

En el presente trabajo se muestra un estudio descriptivo del tratamiento justificativo de las reglas y técnicas de derivación en los libros de texto de 3º de BUP, COU correspondientes a la LGE, y 1º y 2º de Bachillerato de LOGSE y LOE. En primer lugar presentamos una adaptación del marco teórico que hemos desarrollado para el estudio de los esquemas de prueba presentes en los libros de texto al objeto de estudio de este trabajo, las reglas y técnicas de derivación. A continuación se muestra el análisis realizado, indicando las peculiaridades encontradas en el estudio. Por último, se consideran algunas reflexiones sobre las implicaciones que la diversidad de presentación y tratamiento de estas reglas puede tener en la enseñanza, por un lado del concepto de derivada y, por otro lado, de la demostración.

Palabras clave: *reglas de derivación, esquemas de prueba, libros de texto, demostración matemática.*

Abstract

In this paper, we show a descriptive study of the procedures used to justify derivative rules and techniques shown in textbooks of 3rd course of BUP and COU of LGE, and 1st and 2nd course of Bachillerato of LOGSE and LOE. Firstly, we show an adaptation of the theoretical framework about proof schemes in textbooks to the topic studied in this paper, derivative rules and techniques. Then, we show the analysis done, noting the most singular features of the study. Finally, we consider some reflections on the implications that different presentations and treatment of these rules may have on teaching the concept of derivative and of mathematical proof.

Keywords: *derivative rules, proof schemes, textbooks, mathematical proof.*

INTRODUCCIÓN

La demostración matemática (DM) es considerada, desde el punto de vista matemático, uno de los procedimientos más importantes de las matemáticas, su motor de desarrollo. En el campo de la educación matemática, Hanna (1995) defiende que contribuye a la comprensión de los conceptos matemáticos. Además, la DM es portadora de los conocimientos matemáticos, ya que contiene los métodos, herramientas, estrategias y conceptos que se necesitan para resolver problemas, y éstos elementos suponen la esencia principal de las matemáticas (Hanna y Barbeau, 2010). Entendiendo que es un elemento de las matemáticas de vital importancia, nos interesa conocer cómo se realiza su enseñanza en la educación preuniversitaria, y un elemento importante en los procesos de enseñanza-aprendizaje en este nivel es el libro de texto (LT). Entendemos como *libro de texto* aquellos que utilizan los profesores y alumnos, a lo largo de un curso escolar, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de un área de conocimiento (González, 2002). Schubring (1987) señala que, en la práctica, los libros de texto determinan la enseñanza de un país más que los decretos de los distintos gobiernos, ya que considera que tienen mayor influencia en la práctica educativa que los currículos

Conejo, L., Arce, M., Ortega, T. (2014). Justificación de las reglas de derivación en libros de texto de cuatro editoriales desde LGE hasta LOE. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 257-266). Salamanca: SEIEM.

educativos promulgados por las órdenes ministeriales. Además, su análisis nos proporciona información acerca del conocimiento matemático que una sociedad considera pertinente en un determinado momento histórico (González, 2002), ya que influyen en qué y en cómo deben aprender los alumnos (García-Rodeja, 1997).

Aunque el concepto de derivada es uno de los conceptos más complejos del Análisis Matemático que se introduce en la Educación Secundaria y, por tanto, entraña una gran dificultad para su comprensión, el cálculo de funciones derivadas se ha mecanizado hasta tal punto que se prescinde de la definición y, aunque los alumnos son capaces de aplicar bien las reglas de derivación, no han llegado a una comprensión satisfactoria del concepto de derivada (Artigue, 1995; Ortega y Sierra, 1998). Nosotros, además, apuntamos que la mecanización de dichas reglas de cálculo, prescindiendo de su justificación, puede contribuir a la no comprensión del concepto.

Este trabajo forma parte de una investigación más amplia que estudia la evolución de la demostración en los libros de texto de las últimas tres leyes españolas. El estudio descriptivo que aquí se presenta gira en torno a un aspecto de uno de los conceptos señalados anteriormente, el cálculo de derivadas (reglas y técnicas de derivación, derivadas de funciones elementales o familias de funciones). Mostramos un análisis de las reglas presentadas, si se justifican o no, un resumen de los esquemas de prueba utilizados y algunas reflexiones iniciales sobre las implicaciones para la enseñanza que se deducen del análisis realizado.

ANTECEDENTES SOBRE EL APRENDIZAJE DE LA DERIVDA

El concepto de derivada es uno de los conceptos matemáticos más complejos que se estudian en Educación Secundaria, y suele conllevar numerosas dificultades para la enseñanza y el aprendizaje, como apuntan los numerosos estudios realizados en torno a este concepto. Ortega y Sierra (1998) describen algunos de los *organizadores curriculares* (Rico, 1997) del concepto de derivada; Inglada y Font (2003) se plantean el objetivo de identificar, describir y explicar los significados institucionales y personales de derivada; Font (2005) realiza una revisión de varias investigaciones sobre la didáctica de la derivada que utilizan la teoría del Enfoque Ontosemiótico (EOS), en las que se menciona el cálculo de derivadas; Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008) también realizan una revisión de diferentes trabajos aunque en este caso están orientados hacia la comprensión del concepto de derivada; Robles, Del Castillo y Font (2010) diseñan, implementan y valoran una secuencia de actividades didácticas que promueve la construcción de un significado en torno a la función derivada y lo analizan con los criterios de idoneidad del EOS. Otros trabajos se centran en el conocimiento de los profesores sobre la comprensión de la derivada por parte de los alumnos, por ejemplo, los trabajos de Pino-Fan, Godino, Castro y Font (2012) y Sánchez-Matamoros, Fernández, Llinares y Valls (2013), o en el propio conocimiento del profesor sobre el concepto de derivada, como el de Badillo, Azcárate y Font (2011). Sí que hemos encontrado algún trabajo en el que se estudian ya no el concepto, sino el cálculo de derivadas, como por ejemplo el trabajo de Fonseca y Gascón (2002), que construyen una Organización Matemática Local (OML) en torno a las técnicas de derivación, entendiendo las OML en el contexto de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, y las *técnicas*, tal y como lo describen Chevallard, Bosch y Gascón (1997). Realizan una "simplificación" de las reglas necesarias para el cálculo de derivadas, aunque no tienen en cuenta ciertos aspectos matemáticos que conllevan errores en la aplicación de dichas técnicas (aplicación de la derivación logarítmica a cualquier función). Nuestra consideración de las técnicas es diferente, ya que está más orientada al sentido en el que lo describen Courant y Robbins (1964), y que concretaremos más adelante.

En cuanto a los trabajos revisados en torno a los otros dos ejes que vertebran nuestro trabajo, la demostración matemática y el libro de texto, ya han sido considerados en otros trabajos por los autores de esta aportación (Conejo y Ortega, 2013, 2014).

OBJETIVOS

Como ya hemos indicado anteriormente, nuestra hipótesis de partida es que la mecanización, sin justificación, de las reglas y técnicas de cálculo de derivadas contribuye a la no comprensión del concepto de derivada por parte de los alumnos. Por otro lado, tales reglas deben ser aprendidas para ponerlas en práctica y derivar funciones de forma automática; es decir, que el aprendizaje que debe realizarse de dichas reglas debe ser fundamentado y a la vez, orientado hacia una aplicación mecánica. Por tanto, el objetivo principal de este trabajo consiste en analizar la fundamentación, y la orientación a la aplicación práctica, de las reglas y técnicas de derivación que se encuentran en los libros de texto. Este objetivo se desglosa en los siguientes:

- O1. Analizar sí se justifican o no las reglas y técnicas de derivación y clasificarlos atendiendo al marco teórico considerado.
- O2. Describir la presencia de procesos de justificación en los tres currículos legales considerados.
- O3. Detectar errores en la presentación, justificación y tratamiento de las reglas de derivación

Este primer análisis nos permitirá realizar una radiografía del tratamiento justificativo que han recibido las reglas de derivación en los últimos 40 años para, en trabajos posteriores, realizar propuestas orientadas a subsanar errores y mejorar el tratamiento de este concepto en los libros de texto y así favorecer su enseñanza y su aprendizaje.

METODOLOGÍA

Tal y cómo hemos mencionado anteriormente, éste trabajo forma parte de un proyecto de tesis, en el que usamos el método histórico de investigación en educación (Ruiz-Berrio, 1976), que ya ha sido utilizado con éxito por González (2002) y López (2011). Una vez que se ha determinado el problema de investigación, consideramos las cuatro fases del método: heurística, crítica, hermenéutica y exposición. La primera fase (heurística) consiste en la búsqueda y selección de fuentes documentales sobre las que realizaremos nuestra investigación, tanto para conocer los antecedentes de nuestro estudio como para determinar la muestra que vamos a analizar. Esta fase ya se ha realizado con anterioridad, como puede verse en otros trabajos (Conejo y Ortega, 2013 y 2014), en las que se describe la muestra de editoriales seleccionadas, cuatro, elegidas atendiendo a criterios de amplia difusión y continuidad en el tiempo. La segunda fase (crítica) conlleva el análisis de toda la documentación seleccionada en la primera fase, tras la cual, pasamos a la tercera fase (hermenéutica), en la que se interpretan los datos obtenidos a la luz de los análisis realizados. El presente análisis se corresponde con la segunda fase (crítica) del método y con el inicio de la tercera (hermenéutica), ya que se realizan unas reflexiones iniciales, pero hay que profundizar en la interpretación de los datos. Finalmente, en la cuarta (exposición) damos a conocer los resultados obtenidos.

Para realizar el análisis, en primer lugar se ha tenido en cuenta el elemento a analizar, en este caso las reglas y técnicas de derivación, junto con el marco teórico, que se describe a continuación y que se ha adaptado al objeto de estudio, y que proporciona las características a observar en cada libro. Con dichas características hemos elaborado tablas de recogida de datos que hemos completado con los datos de cada libro de texto de la muestra para, a continuación, proceder a su análisis.

MARCO TEÓRICO

El marco teórico en este trabajo está vertebrado por dos ejes fundamentales: la demostración o justificación matemática, y el contenido matemático de las reglas y técnicas de derivación, que son el elemento a analizar. En primer lugar, consideramos el eje relacionado con la justificación matemática. Dicho marco teórico está desarrollado a partir de los trabajos sobre esquemas de prueba (EP) de Harel & Sowder (1998) y que han sido utilizados por Ibañes y Ortega (2001) y Dos Santos (2010) en sus respectivos trabajos, así como del concepto de prueba preformal, de van Asch (1993). Dicho marco ya ha sido adaptado para el análisis de la demostración en los libros de texto (LT) en Conejo y Ortega (2013) y aparece más desarrollado en Conejo y Ortega (2014). En ellos se definen los EP de un LT como lo *que el LT considera como persuasión y convencimiento para un posible lector*, entendiendo que convencimiento es *el proceso utilizado por el LT para eliminar las dudas del lector sobre la veracidad de una afirmación* y persuasión es *el proceso del libro que, utilizado por un individuo, elimina las dudas de otros sobre la veracidad de una afirmación*, y las pruebas preformales (PP) consisten en *una línea de razonamiento, que podría formalizarse a una prueba formal, y en la cual la idea esencial de la demostración se encuentra reflejada* (van Asch, 1993). Sin embargo, en este caso, se vuelve a hacer una adaptación del mismo para que se puedan analizar los diversos tratamientos de las reglas y de las técnicas de derivación.

Consideramos que el estudio de la derivada atiende a tres finalidades diferentes, que tienen que ver con el cálculo básico (reglas), con aplicaciones de este cálculo (técnicas) y con las aplicaciones teóricas conceptuales (teoremas relacionados con la derivada). No existe un acuerdo claro en la diferenciación entre reglas, fórmulas y teoremas de derivación entre los autores de textos de matemáticas para cursos universitarios. Por ejemplo, Spivak (1970) denomina teoremas a todos los resultados relacionados con el cálculo de la derivada; para Frank-Ayres (1964) las derivadas de las funciones constantes, de la suma, del producto, del cociente y de las funciones potenciales son fórmulas, mientras que llama reglas a las derivadas de las funciones trigonométricas y sus inversas, de la exponencial o de la logarítmica, denomina *chain rule* a la derivación de la función compuesta y vuelve a designar como fórmulas a las derivadas de las funciones hiperbólicas; Courant y Robbins (1964) son los únicos autores que aluden de una forma general a las técnicas como la aplicación de las reglas, pero después no vuelven a utilizar esta denominación; consideran que son reglas la derivada de las operaciones aritméticas y de la composición, mientras que las de otras funciones las realiza o bien antes de enunciar las reglas, aplicando la definición (seno) o bien tras enunciar las reglas (logarítmica, exponencial); Larson, Hostetler y Edwards (1998) denominan como reglas a la derivada de las operaciones aritméticas y de la composición, y la derivada de funciones elementales básicas las considera aparte: en algunos casos, como parte del estudio de la función (exponencial, logarítmica), en otros, como teoremas (funciones trigonométricas).

Por su parte, los libros de secundaria suelen nombrar como técnicas a la derivación de ciertas funciones elementales básicas, como la derivación logarítmica, la derivada de la función recíproca (entendiéndola como la inversa para la composición, aunque a veces se denota como “función inversa”, lo que puede llevar al error de identificarla con la inversa del producto) y la derivada de funciones implícitas. Nosotros interpretamos como *reglas de derivación* aquellas que se obtienen aplicando directamente la definición de derivada, es decir, las reglas de derivación de las funciones elementales básicas, de la aritmética de funciones y de la regla de la cadena. Las *técnicas* consisten en la aplicación compuesta de las reglas anteriores a cualquier función derivable; por ejemplo, en $f(x)=sen^{cos(x)}(x)$ se aplican las reglas de la cadena y del producto, tras la aplicación de la función logarítmica. Otro ejemplo sencillo: deriva la función recíproca de $f(x)=cos\ (x)+2$ en $[0, \pi]$.

El análisis realizado tiene dos niveles: en el primero, se considera la presencia o no en los libros de texto de los enunciados, de las justificaciones y de ejemplos en cada una de las reglas y técnicas consideradas (tabla 1); en el segundo nivel se analizan las propias justificaciones de los textos según el marco teórico considerado sobre EP. Para las justificaciones sobre las reglas de derivación de las operaciones de funciones (suma, producto por constante, producto, cociente, composición), consideramos las siguientes categorías de análisis:

- EP axiomático: utilizando la definición o reglas ya justificadas.

- EP transformacional: transforma la función en otra equivalente que se puede derivar más fácilmente.
- EP inductivo (uno o varios casos): se muestran uno o varios ejemplos y se considera que se extiende a cualquier función de ese tipo.
- Prueba preformal: aplica la definición, pero a una función en concreto.
- EP0: si no hace ningún tipo de justificación.

En cuanto a la derivación de funciones elementales básicas, o de familias de funciones (constantes, potenciales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas), entendemos que, aunque en la sistematización que se ha realizado de la teoría se pueden considerar como nuevos teoremas, en realidad no son enunciados generales, ya que se establecen sobre una función (o familia de funciones) en concreto. No obstante, clasificaremos la justificación como un EP axiomático si justifica aplicando la definición de derivada o reglas enunciadas anteriormente; como un EP transformacional, si se transforma la función en otra, y como EP0 si no se justifica. Sólo podremos considerar pruebas preformales o EP inductivos para las funciones potenciales (fijado el exponente) o para funciones exponenciales o logarítmicas de base cualquiera (fijada la base), ya que en el resto de funciones elementales básicas ya se enuncian sobre una función en concreto (y, por tanto, ya no se puede simplificar más).

Por último, nos queda considerar las técnicas, pero dado que se trata de la aplicación de varias reglas combinadas, su justificación está implícita en la aplicación de las reglas que se utilizan y en la propia teoría de funciones, por lo que no consideramos una clasificación de EP, sino que únicamente podremos encontrar explicaciones más o menos detalladas de cómo se aplican las técnicas o la aplicación de las mismas en el desarrollo de los ejercicios.

ANÁLISIS Y RESULTADOS EXTRAIDOS

Una vez descritas las categorías de análisis, hemos procedido a su estudio en los libros de texto de 3º de BUP y COU de la Ley General de Educación (LGE), de 1970, y 1º y 2º de Bachillerato de la Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE), de 1990 y de la Ley Orgánica de Educación (LOE), de 2006, de las editoriales de Anaya, Santillana, SM y Vicens-Vives (24 libros de texto). Para facilitar la identificación de cada libro en el texto, se han denotado con el código *editorial (año de edición),* que resulta más cómodo para la realización del análisis que el uso de citas de la normativa APA.

En la tabla 1 se refleja el primer nivel de análisis considerado, utilizando la siguiente codificación en todas las celdas: en la terna literal que aparece en cada celda, la primera letra indica la LGE, la segunda, LOGSE, y la tercera, LOE. Por otro lado, las columnas "T" indican si se ha enunciado el resultado, las "J", si se ha justificado, y las "E", si se acompaña de ejemplos. Además, "a" indica que se ha enunciado el resultado (respectivamente justificado o acompañado de ejemplos) en 3º de BUP o en 1º de Bachillerato, "b" en COU o en 2º de Bachillerato y "c" en ambos cursos; "0" significa que no se ha enunciado (respectivamente, justificado o acompañado de ejemplos) en ningún curso y "-" que no tiene sentido su tratamiento (por ejemplo, para la función identidad, al tratase de una función en concreto, no pueden considerarse ejemplos de dicha función; o bien, en los casos en que no se enuncia una regla, no tiene sentido considerar si se ha justificado o ejemplificado). En la tabla 1 hemos organizado las reglas de derivación en uno de los posibles órdenes derivados de una buena sistematización (se han ordenado de forma que las reglas que suceden a otras se pueden deducir tras aplicar la definición o alguna de las reglas anteriores). Esto no significa que sea el único orden posible, aunque nosotros consideramos que es el más coherente desde el punto de vista matemático. Por otro parte, en muchos de los libros analizados no se presenta este orden, aunque no lo reflejaremos en este trabajo.

El segundo nivel de análisis, en el que se estudian las justificaciones utilizadas, da lugar a una tabla más extensa, en las que clasifican éstas. No incluimos dicha tabla por razones de espacio. No obstante, el análisis que se presenta tras la Tabla 1 de forma discursiva comprende los datos recogidos en ambas tablas.

Tabla 1. Tratamiento justificativo general de las reglas de derivación en los LT

	LT de 3º de BUP y COU LGE, 1º y 2º Bachillerato LOGSE y LOE											
	Anaya			Santillana			SM			VV		
	T	J	E	T	J	E	T	J	E	T	J	E
Constante	ccc	0cc	000	aba	aba	000	ac0	ac-	00-	ccc	0b0	000
Identidad	ccc	0cc	---	aba	aba	---	aa0	aa-	---	0ca	0ba	---
Potencial	ccc	abb	baa	cbc	ab0	a0c	acc	acc	aac	ccc	0cb	000
Suma(resta)	ccc	abb	aaa	abc	abc	a00	acc	aca	a00	acc	0ca	0cc
Producto	ccc	abb	0aa	abc	abc	a00	acc	aca	0c0	acc	0ba	0cc
Cociente	bcc	000	0aa	abc	abc	ab0	acc	acc	ac0	acc	0ba	0cc
R. Cadena	ccc	abb	aaa	abc	abb	aba	acc	acc	0ac	acc	0bb	0cc
Ln x	ccc	abb	---	cbc	ab0	---	acc	acc	---	ccc	0bc	---
Log_a x	ccc	abb	0aa	cbc	ab0	abb	acc	acc	aa0	bcb	000	000
e^x	ccc	abb	---	bbc	0b0	---	acc	acc	---	ccc	0b0	---
a^x	ccc	abb	0aa	cbc	ab0	0bb	acc	acc	aa0	ccb	000	000
Sen	ccc	abb	---	cbc	aba	---	acc	acc	---	ccc	0ba	---
Cos	ccc	abb	---	cbc	ab0	---	acc	acc	---	ccc	0b0	---
Tan	ccc	abb	---	cbc	ab0	---	acc	acc	---	0cb	0a0	---
Arcsen	acc	abb	---	cbc	aba	---	acc	acc	---	ccb	0cb	---
Arccos	acc	abb	---	cbc	a00	---	acc	acc	---	ccb	0cb	---
Arctan	acc	abb	---	cbc	a00	---	acc	acc	---	ccb	0cb	---
Sec	000	---	---	c00	a--	---	ab0	ab-	---	00b	--0	---
Csc	000	---	---	c00	a--	---	ab0	ab-	---	00b	--0	---
Cot	000	---	---	cb0	ab-	---	ab0	ab-	---	00b	--0	---

En los LT de COU, a lo sumo se presenta una tabla resumen con las derivadas de las funciones más usuales, pero nunca se justifican (en el LT de SM, 1980, ni siquiera se presenta dicho cuadro). Se considera que el cálculo de derivadas se ha presentado en cursos anteriores y, por esta razón no se estudia en este nivel. Cabe destacar que, excepto el LT de Anaya (1989), el resto no presenta las reglas de derivación aritméticas (suma, producto, cociente…) en sus tablas resumen.

Por el contrario, todos los libros de 3º de BUP presentan el cálculo de derivadas, aunque el tratamiento justificativo es diferente dependiendo de la editorial. Tanto Santillana (1977) como SM (1981) justifican todas las reglas y técnicas que presentan, y las acompañan de ejemplos en los que se muestra la aplicación de la regla; Anaya (1988), por su parte, aunque justifica todas las reglas que presenta, no suele acompañarlas de ejemplos; por último, Vicens-Vives (1977) se limita a presentar los enunciados sin ningún tipo de justificación ni ejemplo, ya que asume que se han estudiado el curso anterior.

En cuanto a las reglas que se presentan, la única diferencia en los LT de 3º de BUP está en las funciones trigonométricas inversas, que únicamente se presentan en Santillana (1977) y SM (1981). En COU existe más diversidad y, aunque los tres textos que presentan el cuadro resumen de derivadas consideran uno diferente al de los demás, todos enuncian las derivadas de las funciones elementales básicas más usuales (potenciales, logarítmicas, exponenciales y trigonométricas).

En el periodo LOGSE notamos que cada editorial adopta una posición diferente tanto en la presentación como en la justificación de estos elementos. Anaya presenta los mismos resultados en 1º y en 2º, pero únicamente los justifica en el último curso, aunque algunos enunciados en primero están acompañados por ejemplos en los que se muestra la aplicación. Los tipos de EP utilizados son generalmente axiomáticos, ya que parte de la suma de funciones, la composición y la derivación logarítmica y justifica el resto de resultados a partir de estas tres reglas, sobre todo de la última, pero su aplicación es incorrecta, ya que para ello la función a la que se aplica la función logarítmica debe ser positiva. Este error aparece también en otros textos.

Santillana sólo trabaja el cálculo de derivadas en el segundo curso, limitándose en el primero a la definición de derivada. Sí que justifica la mayoría de reglas enunciadas, aunque no suele acompañar de ejemplos, y los EP utilizados son principalmente axiomáticos.

SM presenta y justifica prácticamente los mismos resultados en el primer y segundo curso, en ambos utilizando principalmente EP de tipo axiomático, aunque en el texto de segundo considera, a mayores, las derivadas de las funciones trigonométricas inversas. No obstante, conviene señalar que ésta es la única editorial en la que los textos que poseemos de este nivel no pertenecen a la misma colección, por lo que esta “repetición” de enunciados y justificaciones en ambos cursos podría deberse a un cambio en la política de la editorial de una colección a otra.

Vicens-Vives presenta los mismos resultados en ambos cursos. Justifica la mayoría de los enunciados, aunque para algunos lo hace en ambos cursos y para el resto sólo en el curso superior. Sin embargo, cabe destacar que los EP utilizados en cada curso son diferentes ya que, en 1º, salvo la suma de funciones y el producto de una función por una contante, para los que utiliza un EP axiomático, el resto son, o bien EP inductivos o bien aplicación de la regla de la cadena. Por su parte, en 2º, la mayoría de EP utilizados es de tipo axiomático, lo que indica una mayor tendencia a la justificación en el curso más elevado.

En el periodo LOE, los LT analizados para cada editorial pertenecen a la misma colección en ambos cursos, por lo que cada LT de 2º curso es la continuación del LT de 1º.

En el caso de la editorial Anaya, los textos analizados, a pesar de pertenecer a periodos legislativos diferentes, son iguales a los del Bachillerato LOGSE y, por tanto, no se repiten aquí los comentarios realizados antes.

Santillana prácticamente presenta los mismos enunciados en primero y segundo, aunque en este último curso prescinde de la función constante y la identidad. En cuanto a las justificaciones, presenta algunas únicamente en primero, la regla de la cadena, únicamente en segundo, y otras (suma, producto y cociente), en ambos cursos, aunque muchas reglas no se justifican. Las reglas justificadas en ambos cursos se realizan con EP inductivos, y los pocos EP axiomáticos que aparecen lo hacen en el primer curso, lo que indica que consideran la justificación de estas reglas más apropiada en 1º que en 2º. Además, en segundo se presentan más ejemplos de las reglas presentadas que en primero. Esta política es totalmente opuesta a la que la editorial consideraba en la legislación anterior, que como ya comentamos, presentaba los resultados y los justificaba únicamente en el segundo curso.

SM enuncia y justifica prácticamente los mismos resultados, aunque algunas reglas sólo las demuestra en el primer curso. Además, sus EP coinciden en su mayoría en ambos cursos. No suelen acompañar de ejemplos de aplicación cada enunciado.

Vicens-Vives presenta los resultados más elementales en primero, y los amplía en segundo. La mayoría de los resultados que presenta en ambos cursos sólo los justifica en primero, y en segundo justifica, principalmente, aquellos que son enunciados por primera vez. Sí acompaña de ejemplos las reglas de derivación de la aritmética de funciones.

En cuanto a las técnicas de derivación, éstas aparecen, por norma general, al aplicar logaritmos y derivar funciones implícitas, en la derivada de la función recíproca y en la aplicación sucesiva de reglas de derivación de las funciones elementales básicas, aritmética y composición. Aparte de la derivada de la función recíproca, las técnicas de derivación aparecen en los ejemplos resueltos y en los ejercicios propuestos. Todos ellos responden a los siguientes enunciados: *Calcula la derivada de* (aparecen muchas funciones elementales); *calcula la derivada de las siguientes funciones* (aparecen muchas funciones elementales); *calcula derivadas de orden superior de* (aparecen algunas funciones elementales); *deriva* (algunas funciones). También aparecen errores de enunciados. Por ejemplo,

$$\text{En } y=\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^3 \text{ considera } \ln(y)=ln\left[\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^3\right]$$

El procedimiento es erróneo ya que para x<0 la función logarítmica no está definida en estos valores, pero la función sí, y es derivable. Por tanto, en estos casos no se puede aplicar la función logarítmica. Este error es frecuente, se aplica la derivación logarítmica a funciones del tipo $y=u\cdot v$; $y=u/v$; $y=x^n$, donde u y v son funciones cualesquiera, no necesariamente positivas en sus dominios.

En resumen, vemos varios cambios reseñables en el tratamiento de las reglas de derivación en los LT: por un lado, la presentación y tratamiento de las reglas de derivación se realiza en cursos anteriores en la LGE que en las leyes posteriores, incluyendo las justificaciones; por otro, se detecta una mayor justificación en 2º que en 1º en el caso de LOGSE, pero en LOE esta tendencia no está tan marcada. Además, se observa una menor justificación en los LT de esta última legislación. Por otro lado, si consideramos los tipos de justificaciones utilizados, hemos comprobado que no se utilizan en ningún caso pruebas preformales y en muy pocos casos, EP inductivos de uno o varios casos (y los que se incluyen, en LOGSE o LOE). Por editoriales, Anaya no presenta variabilidad a lo largo de las leyes, Santillana elimina los EP axiomáticos y prescinde de las justificaciones, SM aumenta los EP axiomáticos y transformacionales utilizados, aunque también, las reglas sin justificar, y Vicens-Vives tiende a un aumento de EP axiomáticos.

PRIMERAS REFLEXIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

Como ya hemos apuntado anteriormente, si bien es conveniente para los alumnos mecanizar la aplicación de las reglas y técnicas de derivación, su justificación es necesaria tanto para una correcta sistematización de los resultados relacionados con el concepto de derivada como para una mejor comprensión de dicho concepto (Hanna, 1995).

El análisis realizado sí que nos permite extraer algunas reflexiones iniciales que nos guíen para subsiguientes trabajos. En primer lugar, el orden de presentación de las reglas atiende a tal diversidad, que requeriría de un estudio por sí solo. Pudiera parecer que este orden no tiene relevancia en la justificación que el libro considera para cada regla; sin embargo, exceptuando la definición de derivada, el orden en que se enuncian las reglas influye en la justificación que se realiza de cada una, ya que existen diversas formas de justificar un mismo resultado.

Cuando se justifica, el EP que más se utiliza es el axiomático o transformacional, antes que las pruebas preformales o los EP inductivos. Suponemos que los autores de los LT consideran el nivel de razonamiento necesario para estas justificaciones adecuado a los cursos considerados, aunque hay que matizar que en muchos casos, dichas justificaciones se realizan de forma incompleta, con simplificaciones y abusos en la notación. No se presentan pruebas preformales. Consideramos que sería interesante utilizarlas en aquellos casos en los que la se han utilizado EP incompletos, para no recurrir a la excesiva simplificación. Por otro lado, no todos los LT acompañen las reglas y técnicas de derivación de ejemplos de aplicación, si bien, se consideran en otros epígrafes de ejercicios resueltos y práctica.

No se observan patrones claros en el tratamiento de este tópico, ni asociados al periodo legislativo, ni a la línea editorial, lo que nos hace pensar que depende en cada caso del equipo de autores que ha realizado cada LT. Consideramos que esta diversidad puede conducir a errores para los alumnos de cara a estudios posteriores, ya que ni siquiera se plantea en los LT que el tratamiento que hacen no es el único posible, todo ello sin considerar los planteamientos erróneos, los cuales habría que evitar por completo.

No obstante, ya hemos señalado que en algunos casos, la sistematización de la reglas no es correcta porque se pasan por alto ciertas imprecisiones que llevan a error (derivación logarítmica). Estos textos parecen estar más preocupados por la mecanización y la algebrización de las reglas que por la fundamentación matemática.

Por último, señalar que el estudio que se pretende abordar es de tal complejidad, tanto por el tamaño de la muestra (24 libros de texto) como por la diversidad encontrada en el tratamiento del tópico seleccionado, que resultaría imposible abordar dicho estudio en una comunicación con la profundidad que merece. Por esta razón, en este trabajo únicamente presentamos una aproximación inicial a dicho estudio. No obstante, es una cuestión que pretendemos abordar en el futuro.

Referencias

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática (un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Badillo, E., Azcárate, C. y Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f'(a) y f'(x) en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias,* 29(2), 191-206.

Chevallard, Y., Bosch, M. Y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, Barcelona: ICE/Horsori.

Conejo, L. y Ortega, T. (2013). La demostración matemática en los libros de texto de 2º de B.U.P. y 1º de Bachillerato de LGE, LOGSE y LOE para el concepto de límite. Fase inicial. En A. Estepa, y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XVI Simposio de la SEIEM* (pp.121-132). Baeza: SEIEM.

Conejo, L. y Ortega, T. (2014). Las demostraciones de los teoremas de continuidad en los libros de texto para alumnos de 17-18 años correspondientes a las tres últimas leyes educativas españolas. *NÚMEROS, Revista de didáctica de las Matemáticas.* Aceptado para su publicación.

Courant, R y Robbins, H. (1964). *¿Qué es la matemática?* Madrid: Aguilar, S.A.

Dos Santos, C. (2010). *A demostraçao matemática e o profesor. Formulaçao e ensino.* Tesis doctoral. Valladolid: Universidad de Valladolid.

Fonseca, C. y Gascón, J. (2002). Organización matemática en torno a las técnicas de derivación en la enseñanza secundaria1. En J. Murillo, P. M. Arnal, R. Escolano, J. M. Gairín y L. Blanco (Eds.) *Actas del VI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en educación Matemática.* Logroño: SEIEM.

Font, V. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.) *Actas del IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.* Córdoba: SEIEM.

Frank Ayres, JR. (1964). *Theory and problems of differential and integral calculus*. New York: Schaum Publishing, CO.

García-Rodeja, I. (1997) ¿Qué propuesta de actividades hacen los libros de primaria? *Alambique,* 11, 35-43.

González, M. T. (2002). *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del análisis matemático: perspectiva histórica acerca de los puntos críticos*. Tesis doctoral. Salamanca: Universidad de Salamanca

Hanna, G. (1995). Challenges to the Importance of Proof. *For the learning of Mathematics,* 15(3), 42-49.

Hanna, G. and Barbeau, E. (2010). Proofs as bearers of Mathematical Knowledge. In G. Hanna et al. (Eds.), *Explanantion and proof in mathematics: philosophical and educational perspectives.* (85-100). New York: Springer.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' Proof Schemes: Results from exploratory studies. En: Dubinski, E.; Schoenfeld, A. y Kaput, J. (Eds), *Research on Collegiate Mathematics Education*, vol. III., 234-283. American Mathematical Society, Providence, USA.

Ibañes, M. y Ortega, T. (2001). Un estudio sobre los esquemas de prueba en alumnos de primer curso de bachillerato. *UNO,* 28, 39-60.

Inglada, N y Font, V. (2003). Significados institucionales y personales de la derivada. Conflictos semióticos relacionados con la notación incremental, *XIX Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM),* Córdoba (Boletín nº 15), pp. 1-18. [URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/ siidm/boletin15.htm]

Jefatura del Estado (1970). Ley 14/1970, de 4 de agosto, General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa. *Boletín Oficial del Estado*, 187, de 6 de agosto de 1970, 12525-12546

Jefatura del Estado (1990). Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre de 1990, de Ordenación General del Sistema Educativo. *Boletín Oficial del Estado,* 238, de 4 de octubre de 1990, 28927- 28942

Jefatura del Estado (2006). Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado,* 106, de 4 de mayo de 2006, 17158-17207

Larson, R.E, Hostetler, R.P., y Edwards, B.H. (1998).*CÁLCULO*. Madrid: MacGraw-Hill/Interamericana de España, S.A.U.

López, M. C. (2011). *La formación inicial de maestros en Aritmética y Álgebra a través de los libros de texto.* Tesis doctoral. Salamanca: Universidad de Salamanca.

Ortega, T. y Sierra, M. (1998). El concepto de derivada: algunas indicaciones para su enseñanza. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado.* 32, 87-115.

Pino-Fan, L.R., Godino, J.D., Castro, W.F., Font, V. (2012). Conocimiento didáctico-matemático de profesores en formación: explorando el conocimiento especializado sobre la derivada. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 427 - 434). Jaén: SEIEM

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de Matemáticas. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* Barcelona: ICE Universitat de Barcelona-Horsori edit.

Robles, M.G., Del Castillo, A.G., Font, V. (2010). La función derivada a partir de una visualización de la linealidad local. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (523-532). Lleida: SEIEM.

Ruiz-Berrio, J. (1976). El método histórico en la investigación histórica de la Educación. *Revista Española de Pedagogía,* 134, 449-475.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2013). El desarrollo de la competencia de estudiantes para profesor de matemáticas de educación secundaria en identificar la comprensión de la derivada en estudiantes de Bachillerato. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (501-509). Bilbao: SEIEM

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de Investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 11(2): 267-296

Schubring, G. (1987). On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as textbook author. *For the Learning of Mathematics*, 7(3), 41-51.

Spivak M. (1970). *Calculus. Cálculo infinitesimal*. Barcelona: Editorial Reverté, S.A.

van Ash, A.G. (1993). To prove, why and how? *International Journal Mathematics Education Science and Technology*, 2, 301-313.

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO SOBRE CUADRILÁTEROS EN ESTUDIANTES PARA MAESTRO

Mathematical knowledge of quadrilateral in prospective primary teachers

Ana Escudero-Domínguez[a], José Carrillo[b]

[a]Universidad de Sevilla, [b]Universidad de Huelva

Resumen

Se analiza el conocimiento matemático sobre cuadriláteros de los estudiantes de segundo curso del Grado en Educación Primaria de la Universidad de Sevilla. Utilizamos el marco teórico del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), originando una serie de indicadores, que ponen en evidencia importantes deficiencias aunque también alguna fortaleza relativa a este conocimiento. Como debilidades destacamos el poder distractor de la imagen prototípica, la falta de comprensión de definiciones no estándares y la dificultad en el manejo de la clasificación inclusiva; como fortaleza podemos señalar el uso correcto de representación prototípica.

Palabras clave: *cuadriláteros, formación inicial del profesorado, Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, fortaleza, debilidad*

Abstract

The mathematical knowledge of quadrilateral in initial training of teachers at the University of Seville is analyzed. We have used the theoretical framework of the Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK), yielding a series of indicators that highlight important strengths but also some weaknesses relating to this knowledge. We can point out weaknesses such as the power of distraction that the use of prototypical images has got, a weak understanding of non-standard definitions, and difficulty in using inclusive classifications; as strength we can highlight the correct use of prototypical representation.

Keywords: *quadrilateral, initial training of teachers, Mathematics Teacher's Specialised Knowledge, strength, weakness*

INTRODUCCIÓN

Son muchos los autores (Gutiérrez y Jaime, 1996; Contreras y Blanco, 2001; Climent, 2011; entre otros) que aseguran que el conocimiento que poseen los estudiantes para maestros (en adelante EPM) está muy lejos de poder calificarse de idóneo o adecuado para el desempeño de su futura labor docente. Este resultado es importante para la formación inicial pues la falta de conocimientos les genera inseguridad, predisponiéndolos negativamente ante el cuestionamiento de los fines educativos de algunos bloques de contenidos.

La presente investigación está centrada en geometría, debido al interés de sus autores por, partiendo de sus resultados, diseñar acciones formativas con el propósito de enfrentar las lagunas de conocimiento, al tiempo que revertir la imagen que los estudiantes asocian al estudio de la geometría, el cual ven como un proceso memorístico donde las situaciones se resuelven empleando conceptos y procedimientos que ha explicado el profesor o que están en el libro de texto. Somos conscientes de que parte de la explicación de esta situación procede de la escasa importancia que suele concederse a los contenidos geométricos en los niveles previos a la universidad, dedicándoles poco tiempo e impartiéndolos al final de curso (Corrales, Sanduay, Rodríguez, Malik y Poblete, 2001).

Escudero-Domínguez, A., Carrillo, J. (2014). Conocimiento matemático sobre cuadriláteros en estudiantes para maestro. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 267-276). Salamanca: SEIEM.

Esta comunicación es parte de una investigación más amplia donde nos planteamos indagar en diversos elementos de conocimiento que sobre geometría plana tienen los EPM, centrándonos aquí en cuadriláteros. Planteándonos el siguiente objetivo: profundizar sobre los conocimientos que los EPM poseen sobre cuadriláteros. Desgranándose en los siguientes objetivos específicos:

- Describir el conocimiento de los temas sobre cuadriláteros, puesto en juego por futuros maestros, al resolver ejercicios relativos a ese contenido matemático
- Obtener características del conocimiento que poseen los EPM
- Obtener una clasificación sobre debilidades y fortalezas sobre cuadriláteros

MARCO TEÓRICO

Numerosos estudios han investigado sobre el conocimiento profesional con la finalidad de analizar el contenido de este conocimiento que necesita un profesor y que difiere del que requiere otro profesional o del necesario para la vida cotidiana.

La reflexión sobre el modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) (Ball, Thames y Phelps, 2008), y la constatación de algunos problemas como la delimitación de sus subdominios, o la asignación de elementos de conocimiento en determinados casos, conduce al grupo SIDM de la Universidad de Huelva a proponer un nuevo modelo llamado Conocimiento especializado de los profesores de Matemáticas (MTSK), basado en la idea de que la especialización del conocimiento del profesor de matemáticas deriva de su profesión y no se circunscribe a un único subdominio del conocimiento matemático (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013a). También se diferencia del MKT por la inclusión de las concepciones y creencias sobre la matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje como dimensión que penetra todo el conocimiento del profesor. Mantiene, al igual que el MKT, los dos grandes dominios de Shulman, dividiendo éstos en tres subdominios cada uno. A continuación, pasamos a describirlos, prestando mayor atención al conocimiento de los temas, ya que va a ser el subdominio en el que centramos esta comunicación, aunque se incluirán también algunos resultados relativos al conocimiento de la práctica de la matemática.

Dentro del Conocimiento Matemático:

- *Conocimiento de los temas (KoT)* es más que el conocimiento de la matemática como disciplina; la matemática escolar también está incluida en este subdominio, así como lo relativo a su fundamentación teórica, y los procedimientos, estándar y alternativos, o las distintas formas de representación (Carrillo, Contreras y Flores, 2013b: p. 196).
- *Conocimiento de la estructura matemática*: constituido por los conocimientos que permiten al profesor establecer conexiones entre las matemáticas elementales y las avanzadas.
- *Conocimiento de la práctica de la matemática (KPM)*: está compuesto por todas aquellas formas de hacer y proceder en matemáticas que un profesor ha de conocer para desarrollar su clase, como son las diferentes formas de demostrar, el significado de definición, axioma o teorema como elementos constituyentes de la matemática, o el conocimiento de la sintaxis matemática (Carrillo *et al*., 2013b: p. 196).

Referidos al Conocimiento Didáctico del Contenido:

- *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje en Matemática*s: constituido por todos aquellos referentes que indican en qué momento debe aprenderse cada contenido y a qué nivel de profundidad (Carrillo *et al*., 2013b).

- *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas: incluye co*nocer distintas estrategias que permitan al profesor impulsar el desarrollo de las capacidades matemáticas procedimentales o conceptuales.
- *Conocimiento de las características del aprendizaje matemático: c*ontiene el conocimiento de las dificultades, errores y obstáculos en el aprendizaje de un concepto, así como el conocimiento de la forma en que los alu*m*nos aprenden un cierto contenido.

Por un lado, el MTSK nos permite operativizar una propuesta de conocimiento deseable (sobre cuadriláteros en este caso), que se manifiesta en las preguntas planteadas a los EPM. Por otro lado, los indicadores emergentes podrán ubicarse en sus subdominios (particularmente en nuestra investigación en el KoT y parte del KPM) y mejorar nuestra comprensión de dichos subdominios.

DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

El presente estudio se ubica dentro del paradigma interpretativo, ya que busca describir y comprender situaciones particulares sin la finalidad de generalizar las mismas (Latorre, del Rincón y Arnal, 1997).

Consideramos pertinente una investigación de carácter mixto (Castro y Godino, 2011), donde tener una primera aproximación, más general, de carácter cuantitativo, para luego, mediante el estudio cualitativo, comprender, descubrir e interpretar la realidad de nuestros EPM.

La parte cualitativa de esta investigación es un estudio de casos instrumental (Stake, 2005), ya que se trascienden los resultados de los participantes para lograr una mejor comprensión del conocimiento respecto a los cuadriláteros.

En el estudio han participado 51 estudiantes de segundo curso del Grado en Educación Primaria de la Universidad de Sevilla, que han cursado anteriormente otra asignatura de matemáticas, Matemáticas Específicas para Maestros, de nueve créditos, centrada en el contenido matemático: sentido numérico, sentido algebraico, sentido geométrico y sentido estadístico y probabilístico. De geometría han trabajado proporcionalidad geométrica, cuerpos en el espacio y construcción de polígonos, donde se encuentra el estudio de los cuadriláteros, incluyendo propiedades, definiciones, clasificaciones y transformaciones geométricas.

Para extraer información sobre el conocimiento matemático para la enseñanza de los estudiantes, utilizamos como instrumentos de primer orden un cuestionario administrado a todos los informantes, y en segundo lugar, entrevistas realizadas a 12 EPM, de las cuales se han realizado 5 entrevistas semiestructuradas individuales y 3 grupales; dos de ellas con 2 estudiantes y la otra con 3. Las entrevistas grupales se propusieron de modo que garantizara una suficiente heterogeneidad discursiva (fundamentalmente pluralidad de opiniones, actitudes y juicios), enriqueciendo las respuestas que nos ofrecen las individuales. Las entrevistas se realizaron una vez analizados los cuestionarios, con el objetivo de que los informantes respondieran de forma amplia las cuestiones planteadas.

Para elaborar el cuestionario nos basamos en Liñán (2012) y Álvarez (2012). El cuestionario tiene dos partes diferenciadas: una perteneciente a Liñán (2012) de preguntas con respuesta cerrada (1 a 4), donde cada pregunta consta de 4 respuestas posibles, de la que una sola es correcta y, dentro de las otras tres, se ha colocado una que consideramos que es más probable que elijan (respuesta esperada) cuando el conocimiento asociado es incorrecto; otra perteneciente a Álvarez (2012), compuesta por actividades de respuesta abierta (5 y 6) para que los informantes respondan libremente.

Tabla 1. Preguntas de respuesta cerrada

1. Considerando las siguientes figuras

¿Cuál o cuáles de ellas son rombos?

a) Solo la figura número 2 es un rombo
b) Las figuras números 2 y 4 son rombos
c) Las figuras números 2, 3 y 4 son rombos
d) Solo la figura número 1 es un rombo

2. ¿Cuántos ejes de simetría tiene un romboide?

a) Dos, que coinciden con sus diagonales
b) Cuatro, sus dos diagonales y las rectas que cortan a los lados opuestos por sus puntos medios
c) No tiene ningún eje de simetría
d) Dos, las rectas que cortan a los lados opuestos por sus puntos medios

3. ¿Cuáles de las siguientes definiciones describen únicamente a un cuadrado?

a) Un paralelogramo con dos diagonales iguales
b) Un cuadrilátero cuyas diagonales son bisectrices de sus ángulos
c) Un cuadrilátero con cuatro ángulos iguales
d)Un paralelogramo con dos diagonales iguales y perpendiculares

4. ¿Cuáles de los siguientes ejemplos son definiciones correctas de cuadrado?

a) Un paralelogramo de lados iguales
b) Son dos líneas horizontales perpendiculares a otras dos verticales
c) Es un rombo con un ángulo de 90º
d) Una figura de ángulos iguales

Tabla 2. Preguntas de respuesta abierta

5. Dibuja al menos ocho cuadriláteros y numéralos.
a) Considera las parejas de figuras formadas por la 1 y 5, y la 2 y 7, compara las figuras de cada pareja dando tres semejanzas y tres diferencias.
b) Considera todos los cuadriláteros.
b.1) Traza sus diagonales y haz cuatro clasificaciones distintas considerando criterios sobre las diagonales. Indica los grupos que obtienes en cada clasificación.
b.2) Considera uno de los criterios anteriores e intenta formar subgrupos dentro de los grupos obtenidos considerando otro criterio.

6. Indica si es verdadero o falso, explicando por qué (puedes poner ejemplos y si es posible demostrar de modo general). En el caso de que sea falso, formúlala de forma que sea verdadero.
a) Se puede considerar que un rombo es un cuadrado.
b) Para que un cuadrilátero tenga diagonales exteriores es necesario que al menos unos de sus ángulos sea mayor de 180º.

Las preguntas 1 y 6a buscan obtener información sobre el conocimiento acerca de la clasificación de cuadriláteros: caracterización de rombo (pregunta 1) y relación entre rombo y cuadrado (pregunta 6a). También la pregunta 5 aborda el conocimiento sobre la clasificación, en este caso solicitando la comparación entre dos figuras con características comunes y no comunes, para su posterior clasificación, con un criterio o varios simultáneamente. Además esta pregunta pretende conocer la imagen conceptual (Tall y Vinner, 1981) que los EPM poseen sobre distintos cuadriláteros ya que se les pide que representen varios. Las preguntas 2 y 6b buscan profundizar sobre la imagen y definición de eje de simetría y de diagonal exterior respectivamente. Ligados a las definiciones encontramos las preguntas 3 y 4, que abordan el conocimiento de la diferencia entre condiciones necesarias y suficientes para la definición de las figuras, concretamente trabajando definiciones no estándares del cuadrado.

RESULTADOS

Con las respuestas del cuestionario hemos realizado un análisis general mediante un estudio estadístico, además de un posterior análisis pormenorizado.

Resultados globales

Para mayor claridad de los resultados, este estudio es presentado mediante diagramas de distribución de errores versus aciertos. Mostramos el gráfico 1 que manifiesta la distribución de errores (respuesta esperada más las otras dos respuestas erróneas) *versus* el acierto, donde podemos comprobar que tres de las preguntas mantienen un porcentaje de fallos superior al de aciertos, lo que nos lleva a pensar que los conceptos candidatos a ser debilidades pueden estar en los contenidos relacionados con estas preguntas.

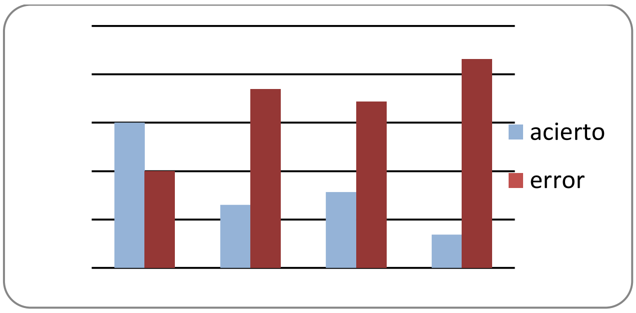


Gráfico 1. Error *versus* acierto. Preguntas 1, 2, 3 y 4

Seguidamente mostramos el gráfico 2 donde podemos comprobar que el apartado a mantiene un porcentaje de aciertos superior al de error, pensando que los conceptos aspirantes a ser fortalezas pueden residir en ese tema; y el otro apartado posee un porcentaje de error superior, lo que nos lleva a pensar que ese contenido será candidato a ser debilidad.

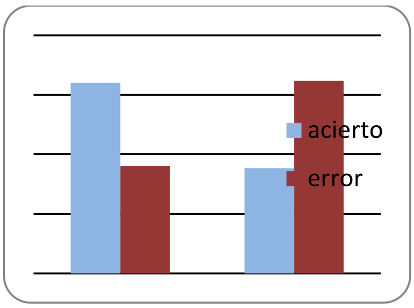


Gráfico 2. Error *versus* acierto. Pregunta 6

Resultados pormenorizados

Pasamos a analizar las respuestas de nuestros EPM para profundizar sobre el conocimiento que poseen sobre cada una de las preguntas del cuestionario. Organizamos estos resultados en función de lo que hemos llamado indicadores, que pueden ubicarse en el subdominio del conocimiento de los temas del MTSK (aunque incluiremos, como se ha anunciado, comentarios sobre el conocimiento de la práctica de la matemática).

Imagen prototípica

En cuanto a los resultados de la pregunta 1 observamos que algunos de los EPM analizados reconocen los distintos cuadriláteros mediante dibujos y se percatan de la existencia de figuras iguales a las que se les ha aplicado una traslación y/o giro, por lo que la posición de las figuras no influye en su caracterización. Otros, en cambio, no reconocen los distintos cuadriláteros, ya que algunas de las figuras representadas no se encuentran en la posición convencional en la que solemos encontrarlas, poniendo de relieve el poder distractor de los prototipos (Hershkowitz, 1990).

Lo anterior queda reflejado en la siguiente entrevista grupal:

I: EPM 7, ¿por qué marcaste la a? (ver tabla 1. Pregunta 1)

EPM 7: Puse la a porque, la verdad, es que es la que reconocía como figura de rombo. No me sonaba que un cuadrado pudiera ser un rombo y éstas [refiriéndose a figura 1 y 3] las veía más como romboides.

EPM 5: Pues yo creo que la figura 3 es un rombo, no romboide. Y la 2, para mí, es un cuadrado igual que la 4.

La pregunta 5 proponía a los estudiantes que dibujaran al menos 8 cuadriláteros. El considerar un número de cuadriláteros bastante alto nos ha mostrado las dificultades que poseen los EPM para representar más de cinco o seis cuadriláteros sin repetir alguno de ellos.

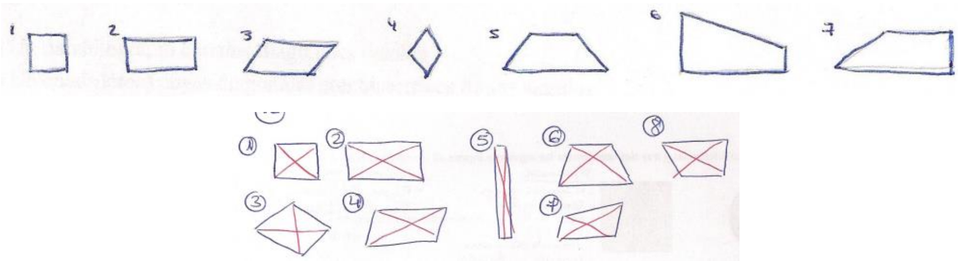


Figura 1. Respuesta a la pregunta 5 de varios EPM

También podemos contemplar que las representaciones nos muestran una imagen prototípica de cada una de las figuras, además de estar representadas en la posición convencional en la que suelen aparecer en los libros de texto. Mediante estas representaciones, corroboramos la investigación de Gutiérrez y Jaime (1996) en la que expresan que la imagen mental de cuadrilátero que tienen los EPM incluye la propiedad de ser convexo, por tanto, consideramos debilidad el poder distractor que nos ofrecen las imágenes prototípicas de las figuras.

Ligado a esto encontramos la pregunta 6b, que posee un porcentaje de error superior al de acierto, ya que muchos EPM poseen serias dificultades para poder representar un cuadrilátero cóncavo, debido a que poseen la imagen prototípica de cuadrilátero convexo, llevando consigo que la imagen prototípica de diagonal sea la de diagonal interior. Por tanto una debilidad patente es la de conocer la existencia de cuadriláteros cóncavos y que éstos poseen diagonales exteriores.

Definición

Dentro de este indicador tenemos que distinguir entre definiciones estándares y definiciones no estándares. Con respecto a las definiciones estándares, los resultados obtenidos nos indican que este indicador forma parte de lo que podemos considerar como fortaleza en el KoT, ya que vemos reflejado en las entrevistas realizadas sobre la pregunta 2 como la mayoría de los EPM usa de forma correcta la representación prototípica de eje de simetría. A continuación, se presenta un ejemplo que da muestra de lo anterior:

I: Y, ¿Qué es un eje de simetría?

EPM 2: Es ese espejo que lo parte y divide a la figura en figuras iguales

Tenemos que resaltar que, aunque caractericen correctamente eje de simetría, los EPM no usan adecuadamente las propiedades de simetría, en sintonía con el hecho de que *"saberse de memoria la definición de un concepto no garantiza en absoluto comprender su significado"* (Azcárate, 1997: p. 29), tendiendo a identificar la mitad de una figura como la mitad simétrica de ésta (Climent, 2011), confundiendo así las diagonales con los ejes de simetría en los cuadriláteros, siendo pocos EPM los que afirman que el romboide no tiene ningún eje de simetría.

Con respecto a las definiciones no estándares, trabajadas en las preguntas 3 y 4, hemos encontrado un porcentaje de error bastante superior al de aciertos, esto es debido a que en ambas se han presentado varias opciones con condiciones necesarias pero no suficientes para definir un cuadrado, algo que no han tenido en cuenta los EPM, ya que se han fijado en aquellas que contenían parte de la definición que están familiarizados a proporcionar, lo que nos lleva a pensar que suelen tener una definición convencional y estereotipada para cada figura. Esto nos revela que no están habituados a realizar diferentes definiciones de las figuras, centrándose en otras de sus características críticas que no sean lados y ángulos, o bien, utilizando los nombres de otras figuras más generales añadiéndoles alguna característica que la particulariza (Zazkis y Leikin, 2008) y que poseen dificultad en diferenciar necesidad y suficiencia de las condiciones de una definición (elemento propio del subdominio del conocimiento de la práctica matemática KPM).

A continuación se presenta un ejemplo extraído de la entrevista a EPM 6:

I: ¿Por qué has marcado la c? (ver tabla 1. Pregunta 3)

EPM 6: A mí siempre me han dicho que el cuadrado tiene los ángulos iguales y los lados iguales. Por eso, me he basado en esa definición.

Clasificación

Los resultados de las preguntas que informan sobre la clasificación inclusiva (preguntas 1, 5 y 6a) lo señalan como una debilidad en KoT de los EPM.

En cuanto a la pregunta 1 aunque posee un porcentaje de acierto mayor al de error no podemos considerar que justifique el dominio de la clasificación inclusiva. De hecho, al entrevistar a los EPM, pudimos entender el porqué de ese porcentaje, la mayoría la había marcado porque era la única en la que aparecía la figura que para ellos era realmente un rombo. Así, consideramos ausencia de conocimiento el afirmar que todo cuadrado se puede considerar rombo.

Ejemplo de lo anterior en la entrevista a uno de los EPM:

I: Explícame por qué has marcado la c (ver tabla 1. Pregunta 1)

EPM 5: A ver, la que sería más que nada un rombo sería la 3, pero como no me daba la opción de poner la 3 sólo, y donde sólo aparece la 3 es en la respuesta c, por eso lo puse, porque claro los demás no, éste y éste no son rombos, son cuadrados.

El conocer características que deben cumplir las figuras para ser rombo es otra debilidad, confirmando que los EPM no tienen adquiridas las características críticas de los diferentes cuadriláteros presentados.

Podemos reforzar lo anterior mediante la pregunta 6a, en la que aún encontrando un índice de acierto superior al de error, hemos podido constatar que esto no es debido a que dominen la clasificación inclusiva sino más bien a como está planteada la pregunta, ya que proponiéndola al revés, la mayoría también la consideró falsa.

Ejemplo de lo anterior en la entrevista a uno de los EPM:

I: ¿Se puede considerar que un rombo es un cuadrado?

EPM 2: No siempre. Será un cuadrado cuando tenga ángulos iguales.

I: ¿Se puede considerar que un cuadrado es un rombo?

EPM 2: También falso, [dibuja en papel un cuadrado] es que si esto fuera un rombo no existiría ninguna diferencia entre un rombo y un cuadrado.

La pregunta 5 también trabaja las clasificaciones, quedando patente que los EPM no están habituados a usar la clasificación inclusiva. En el primer apartado observamos que los criterios utilizados por la mayoría de los estudiantes son lados, ángulos, simetría y/o tamaño.

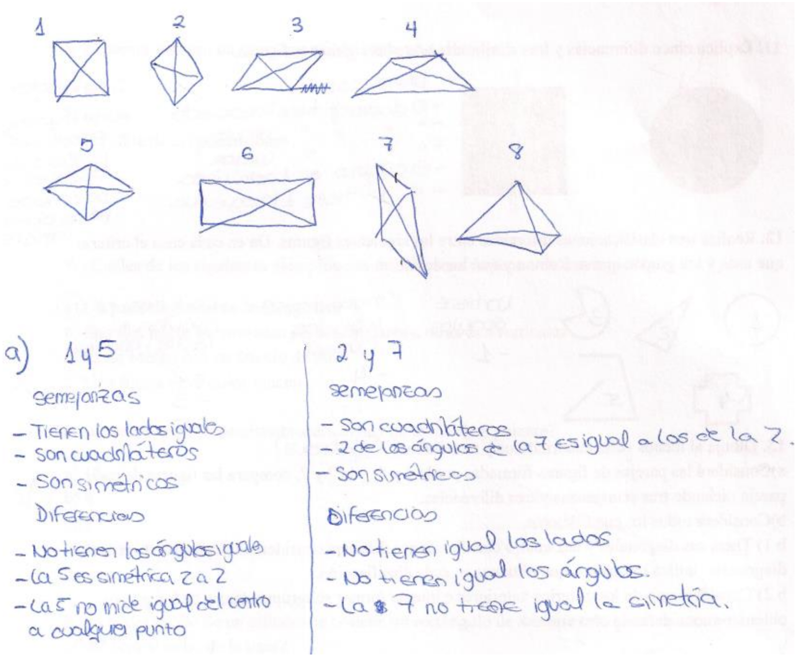


Figura 2. Respuesta a la pregunta 5 de EPM 6 (apartado a)

El segundo apartado les obliga a utilizar otro de los elementos (diagonal) para clasificar con criterios relacionados con éstas, dando lugar a clasificaciones no estándar. Observamos así que los EPM son capaces de clasificar con un criterio, siendo éstos simples y elementales, y no siempre utilizados de forma correcta (ver B1 en EPM6, figura 3), probablemente porque es una propiedad que no están acostumbrados a usar. En la segunda parte del ejercicio contemplamos que la mayoría de los estudiantes entrevistados no consiguen clasificar compatibilizando varios criterios, siendo ésta una debilidad.

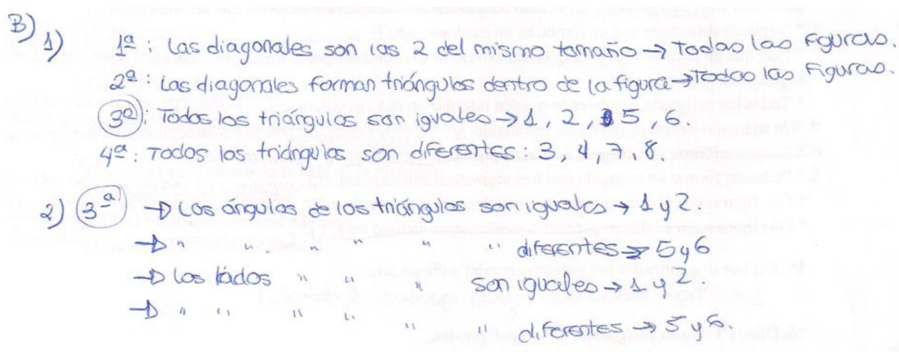


Figura 3. Respuesta a la pregunta 5 de EPM 6 (apartado b)

CONCLUSIONES

En primer lugar, mostramos una síntesis de los resultados obtenidos, donde debemos indicar que el marco elegido nos ha ayudado a describir el conocimiento que los EPM poseen sobre el conocimiento geométrico, pudiendo corroborar que éste es escaso. Este desconocimiento, no sólo de conceptos sino de relaciones inclusivas entre diferentes figuras geométricas, es muy preocupante debido a su futura profesión. Blanco y Barrantes (2003) reconocen que esta falta de conocimiento les generará inseguridad en la materia y por tanto, una menor dedicación temporal, además de producir una enseñanza poco eficaz (con mayor dependencia en el libro de texto y aumentando la memorización).

El carácter mixto de nuestra investigación permite la matización de los resultados globales en otros pormenorizados. Es de destacar que no sólo hemos detectado debilidades, sino también alguna fortaleza, que pasamos brevemente a describir.

Dicha fortaleza reside en que son capaces de asociar una representación prototípica a una definición, caracterización o nombre. Pensamos que ésta es insuficiente para futuros maestros, pero el hecho es que es muestra de un conocimiento.

Con respecto a las principales deficiencias podemos decir que recaen en la falta de comprensión de los conceptos geométricos. Son capaces de recitar correctamente una definición pero no saben aplicarla, evidenciándose la falta de relación entre distintos aspectos en el proceso de adquisición de un concepto. Esto es debido a que la apariencia de las figuras y de lo que se percibe a través de una representación gráfica *"predomina sobre los conceptos que los EPM tienen de los objetos geométricos"* (Carreño y Climent, 2009: p. 193), lo que nos hace tomar conciencia de que no se evidencia la capacidad de razonamiento, sino más bien se observa una postura apoyada en lo que *parece ser*.

La imagen prototípica de una figura provoca que muchos de los EPM proporcionen características incorrectas de las figuras, no llegando a distinguir las características críticas de las no críticas. Esto puede ser debido a la utilización constante de figuras estereotipadas (con frecuencia siempre en la misma posición).

Además, encontramos que no distinguen entre propiedades necesarias y suficientes, lo que produce que los EPM formulen definiciones que posean características redundantes y/o definiciones en las que, inconscientemente, incluyen a otras figuras. Tampoco asumen que una misma figura geométrica pueda poseer definiciones diferentes, en la que se recurra a otras propiedades que no sean las convencionales. Esto puede deberse a que en la escuela no se fomenta la realización de diferentes definiciones, sino la memorización de las definiciones estándar, favoreciendo una visión estática de la geometría (Vecino, 2003).

Por último, existen problemas en el manejo de las clasificaciones, ya que los libros de texto promueven una geometría intrafigural (favoreciendo las clasificaciones disjuntas), lo que produce que los estudiantes posean problemas para relacionar distintas figuras geométricas (Contreras y Blanco, 2001), sobre todo al tener que clasificar compatibilizando criterios.

Referencias

Álvarez, I. (2012). *Desarrollo profesional de maestros noveles en torno a la enseñanza de la clasificación de figuras geométricas. Una experiencia en entornos colaborativos*. Trabajo Fin de Máster no publicado. Universidad de Huelva.

Azcárate, C. (1997). "Si el eje de ordenadas es vertical, ¿qué podemos decir de las alturas de un triángulo?". Suma. *Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 25*, 23-30.

Ball, D.L., Thames, M.H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 399-406.

Blanco, L. J. y Barrantes, M. (2003). Concepciones de los estudiantes para maestro en España sobre la geometría escolar y su enseñanza-aprendizaje. *RELIME, 6*(2), 107-132.

Carreño, E. y Climent, N. (2009). Polígonos: conocimiento especializado del contenido de estudiantes para profesor de matemáticas. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 187-196). Santander: SEIEM.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. En B. Ubuz, C. Haser, & M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: Middle East Technical University, Ankara.

Carrillo, J., Contreras, L.C. y Flores, P. (2013b). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Libro homenaje a Encarnación Castro* (pp. 193-200). Granada, España: Comares.

Castro, W. F. y Godino, J. D. (2011). Métodos mixtos de investigación en las contribuciones a los simposios de la SEIEM (1997-2010). En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 99-116). Ciudad Real: SEIEM.

Climent, N. (2011). *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*. *Huelva*. Proyecto Docente y de Investigación no publicado. Universidad de Huelva.

Contreras, L.C., y Blanco, L.J. (2001). ¿Qué conocen los maestros sobre el contenido que enseñan? Un modelo formativo alternativo. XXI, *Revista de Educación, 3*, 211-220.

Corrales, J., M. Sanduay, G. Rodríguez, C. Malik y A. Poblete (2001). ¿Es posible dotar de alguna dinámica a los conceptos de geometría y a las propiedades de las figuras en el aula?, *Revista Números, 48*, 13–24.

Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (1996) Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio. En Giménez, J., Llinares, S. y Sánchez, V. (Eds.). *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática* (pp. 140-170). Granada: Publicaciones de la Universidad de Granada.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological Aspects of Learning Geometry. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.) (1990). *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 70-95). Cambridge: Cambridge UP.

Latorre, A., del Rincón, D., y, Arnal, J. (1997). Bases Metodológicas de la Investigación Educativa. Barcelona: Hurtado.

Liñán, M. M. (2012). *Debilidades y fortalezas en el conocimiento matemático común en geometría de los estudiantes para maestros*. Trabajo Fin de Máster no publicado. Universidad de Huelva.

Stake, R. E. (2005). Qualitative Case Studies. En N.K. Denzin y Y.S. Lincoln (Eds.), *The Sage handbook of qualitative research. Third edition* (443-466). Thousand Oaks: Sage Publications.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics, 1*2, 151-169.

Vecino, F. (2003). Didáctica de la geometría en la educación primaria. En M.C. Chamorro (Coord.). *Didáctica de las Matemáticas* (pp. 301-328). Madrid: Pearson-Prentice Hall.

Zazkis, R. y Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics, 69* (2), 131-148.

LA COMBINATORIA EN LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICA DE EDUCACIÓN SECUNDARIA EN ESPAÑA

Combinatory in Mathematics' textbook for Secondary Education in Spain

Jonathan Espinoza[a], Rafael Roa[b]

[a]Universidad Nacional de Costa Rica, [b]Universidad de Granada

Resumen

Los problemas combinatorios tienen profundas implicaciones tanto en el desarrollo de algunas ramas de la Matemática como en otras disciplinas (Batanero, Godino y Navarro-Pelayo, 1994). Una mención especial merece el papel de la Combinatoria en la Probabilidad, ya que una escasa capacidad del razonamiento combinatorio reduce la aplicación del concepto de Probabilidad a casos muy sencillos o de fácil enumeración (Piaget e Inhelder, 1951). Debido a la importancia del tema, decidimos concentrarnos en su tratamiento en algunos libros de texto de Matemáticas de Educación Secundaria. Nos basamos en el desarrollo de la teoría de los significados sistémicos, desarrollada por Godino y colaboradores, para considerar el libro de texto como una institución y, en ese contexto, el problema de investigación abordado es la caracterización del significado institucional del objeto matemático "Combinatoria" en los libros de texto citados.

Palabras clave: *Educación, Combinatoria, libros de texto.*

Abstract

The combinatorial problems have profound implications for both, the development of some branches of mathematics and other disciplines (Batanero, Navarro-Pelayo, and Godino, 1994). Special mention deserves the role of Combinatory in Probability, because a limited capacity in combinatorial reasoning reduces the application of the concept of probability in very simple or easy enumeration cases (Piaget and Inhelder, 1951). Due to the importance of the subject, we decided to concentrate on its treatment in some textbooks of Secondary Math Education. We rely on the theory of systemic meanings, developed by Godino y colleagues, to consider the textbook as an institution, and in this context, the research problem addressed is the characterization of the institutional meaning of the mathematical object "Combinatory" in the textbooks cited.

Keywords: Education, Combinatory, textbook.

INTRODUCCIÓN

Esta comunicación forma parte de un estudio más amplio que se realizó en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada en España, específicamente en el grupo de investigación "Didáctica de la Probabilidad, Estadística y Combinatoria", en la línea de investigación "Análisis de libros de texto y el currículo".

La investigación se realizó en dos etapas. En la primera identificamos, en todos los libros de texto seleccionados, aquellas tareas en las cuales puede aplicarse un contenido combinatorio en su resolución. En la segunda etapa describimos el desarrollo teórico del tema de Combinatoria incluido en algunos de los libros de texto de Matemática que conforman la muestra. Además, en esta misma etapa, seleccionamos uno de estos manuales para clasificar y describir las tareas propuestas en dicho capítulo. En la presente comunicación nos limitaremos a presentar los resultados obtenidos en la segunda etapa.

Espinoza, J., Roa, R. (2014). La combinatoria en libros de texto de matemática de educación secundaria en España. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 277-286). Salamanca: SEIEM.

Esta comunicación se divide en cinco secciones. En la primera se presenta el problema de investigación, en la segunda sección se muestran los fundamentos teóricos que sirven de base para el estudio. En la tercera se encuentra la metodología empleada. En la cuarta sección se presentan los resultados obtenidos. Por último se incluyen las conclusiones obtenidas y sus posibles implicaciones.

Es importante indicar que no se busca realizar una evaluación de dichos textos para enaltecerlos o devaluarlos, sino que se pretende analizarlos y discutirlos desde un punto de vista crítico y con objetivos meramente investigativos.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

La Combinatoria es un componente básico del razonamiento formal y constituye un recurso para la elaboración de la lógica proposicional en los adolescentes (Piaget e Inhelder, 1951). También contribuye al desarrollo del pensamiento sistémico, pues en la resolución de problemas combinatorios generalmente se deben examinar todas las posibilidades y enumerarlas. Además brinda oportunidades de realizar actividades características de la Matemática como hacer conjeturas, generalizar, indagar la existencia de soluciones, cuestiones de optimización, entre otros (Kapur, 1970).

Aunque la Combinatoria es un tema de importancia en la literatura, en el currículo actual de Educación Secundaria en España (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007) y en el correspondiente a la Comunidad Autónoma de Andalucía (Junta de Andalucía, 2007) su papel es poco significativo. En estos documentos no aparecen, de forma explícita, contenidos relacionados con la temática en ninguno de los cursos y bloques que lo componen, solo se puede encontrar, de modo indirecto y de forma implícita, referencias a recuentos de casos y a la construcción del espacio muestral de un experimento principalmente aplicadas al cálculo de probabilidades.

Aunado a lo anterior, el tema es considerado difícil por los propios profesores que lo enseñan (Navarro-Pelayo, 1994). Por su parte Roa (2000) en un estudio sobre el razonamiento combinatorio de estudiantes con preparación matemática avanzada, encontró que los problemas combinatorios son difíciles incluso para este tipo de estudiantes.

Debido a que este tema se encuentra aislado del currículo español; a la dificultad intrínseca que presenta y que por lo general su enseñanza se realiza sin conexión con los demás temas del currículo, provoca que en algunos casos se omita su enseñanza y cuando se enseña se basa principalmente en el aprendizaje de las fórmulas de combinatoria y en la realización de ejercicios estereotipados (Batanero et al., 1994).

La problemática descrita nos motivó a investigar el tema de Combinatoria concentrándonos en su tratamiento en libros de texto de Matemática de Educación Secundaria, principalmente porque el libro de texto es considerado por diversos autores como uno de los recursos didácticos más utilizados por los profesores y alumnos en los procesos de Enseñanza y Aprendizaje. Así el problema de investigación abordado es la caracterización del significado institucional del objeto matemático "Combinatoria" presente en la institución de los libros de texto de Matemática utilizados en la Educación Secundaria en España.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA DEL ESTUDIO

En la investigación se aplicaron algunas nociones desarrolladas por Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino y Font, 2007; Godino, Batanero y Font, 2009) quienes proponen un sistema teórico integrativo para la Didáctica de las Matemáticas desde un enfoque Ontológico y Semiótico. Principalmente nos concentramos en las nociones sobre los significados sistémicos.

Tomando como primitiva la noción de situación-problema, Godino y Batanero (1994) introducen las nociones de sistemas de prácticas, objetos emergentes de los sistemas de prácticas y significado (personal e institucional) de un objeto matemático, entendido en términos de los sistemas de prácticas que un sujeto (persona o institución) pone en juego en las cuales el objeto desempeña un papel relevante.

Godino y colaboradores consideran como práctica matemática toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas. Las prácticas pueden ser propias de una persona o compartidas en el seno de una institución.

Para estos autores el concepto de institución es muy amplio. Una institución especial es la Matemática (M) formada por los productores del saber matemático. Otras posibles son las instituciones de enseñanza en los diversos niveles. En un sentido amplio podemos considerar los libros de texto como instituciones, ya que en ellos se proponen problemas matemáticos y se describen prácticas específicas para resolverlos usando medios expresivos con frecuencia propios de la Matemática.

En cada institución se realizan ciertos tipos de prácticas asociadas a un campo de problemas, los autores descritos las llaman prácticas institucionales. Están constituidas por las prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas C y compartidas en el seno de la institución I. Su carácter social indica que son observables. Como tipos de tales prácticas se citan: descripciones de problemas o situaciones, representaciones simbólicas, definiciones de objetos, enunciados de proposiciones, procedimientos que son invariantes característicos del campo de problemas, argumentaciones, entre otras (Godino y Font, 2006).

Además de las prácticas institucionales hay que considerar también las prácticas realizadas por las personas en su intento de resolver situaciones-problema (prácticas personales).

De esta forma en cada campo de problemas e institución (persona) hay un sistema de prácticas institucionales (personales) significativas asociadas al campo de problemas. Los objetos institucionales (personales) son los emergentes de este sistema de prácticas que son indicadores empíricos que nos permiten caracterizar estos objetos. El sistema de prácticas de donde emerge un objeto institucional (personal) se define como el significado institucional (personal) del objeto dado.

En el estudio de las matemáticas tiene mayor interés considerar los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) puestas de manifiesto por las personas en su actuación ante cierto tipo de problemas, que una práctica particular ante un problema concreto (Godino et al., 2009). Así por ejemplo a la pregunta qué es el objeto matemático “Combinatoria” se propone como respuesta: el sistema de prácticas que realiza una persona (significado personal) compartidas en el seno de una institución (Significado institucional) para resolver situaciones-problemas en los cuales interviene dicho objeto.

METODOLOGÍA

El enfoque del estudio se enmarca en el paradigma cualitativo (Hernández, Fernández y Baptista, 2006). Por otra parte los datos se analizan desde el punto de vista descriptivo (Hernández et al., 2006).

Se utilizó la metodología de análisis de contenido la cual se basa en la lectura (textual o visual) como instrumento de recogida de información (Andréu, 2000). Los libros de texto que conforman la muestra son los de cuarto curso (Opción A y B) de Educación Secundaria en España, de las editoriales SM, Anaya y Santillana publicados en el 2008. En la tabla 1 se muestra la referencia de cada uno.

Para determinar variables asociadas a algunas de las prácticas descritas por Godino y Font (2006) recurrimos a estudios previos relacionados con la temática abordada. Tres investigaciones llamaron nuestra atención, las realizadas por Navarro-Pelayo (1991, 1994) y la elaborada por Ortiz (1999).

Las variables que empleamos para describir el desarrollo teórico del tema son: Ubicación del capítulo de Combinatoria en el libro de texto, Contenidos incluidos, notación empleada y orden de presentación, Tratamiento dado a las definiciones, Modelo combinatorio considerado en el enunciado del concepto combinatorio, Utilización de recursos didácticos, Presencia de consideraciones históricas y Ejemplos/ejercicios introductorios y posteriores a los contenidos sobre Combinatoria.

Tabla 1. Referencia de los libros de texto de Matemática seleccionados

N°	Referencia
1	Vizmanos, J. R., Anzola, M., De los Santos, I. y Hervás, J. C (2008). Matemáticas 4 ESO opción A, colección Esfera. Madrid: Ediciones SM.
2	Vizmanos, J. R., Anzola, M., Alcaide, F. y Peralta, J. (2008). Matemáticas 4 ESO opción B, colección Ábaco. Madrid: Ediciones SM.
3	Colera, J., Martínez, M., Gaztelu, I. y Oliveira, M.J. (2008). Matemáticas 4 opción A, Educación Secundaria. Madrid: Anaya.
4	Colera, J., Oliveira, M.J., Gaztelu, I. y Martínez, M. (2008). Matemáticas 4 opción B, Educación Secundaria. Navarra: Anaya.
5	Dolores, M., Hernández, J., Miranda, A.Y., Moreno, M, Parra, S., Redondo, M., et al. (2008). Matemáticas 4 opción A, proyecto la casa del saber. Madrid: Santillana.
6	Dolores, M., Hernández, J., Miranda, A.Y., Moreno, M, Parra, S., Redondo, M., et al. (2008). Matemáticas 4 opción B, proyecto la casa del saber. Madrid: Santillana.

Las variables utilizadas para describir todas las tareas del capítulo de Combinatoria de uno de los manuales de Matemática de cuarto curso de Educación Secundaria son: Contenido combinatorio utilizado para resolver la tarea, Valor numérico de los parámetros m y n, Naturaleza (contexto) de los elementos inmersos en la tarea, Modelo combinatorio considerado en el enunciado de las tareas, Ausencia o presencia de variables en los parámetros m y n, Número de operaciones combinatorias ligadas a una misma tarea y Tipo de tarea combinatoria.

De la investigación realizada por Ortiz (1999) se utilizó únicamente la variable: tipo de actividad que se pide al alumno, a la cual en nuestra investigación se llama ejemplos/ejercicios introductorios y posteriores a los contenidos sobre Combinatoria.

En el caso de los trabajos realizados por Navarro-Pelayo (1991, 1994) se tomaron las siguientes variables: contenidos incluidos y orden de presentación, notación empleada, definiciones presentadas, recursos didácticos, presencia de consideraciones históricas, tipo de operación combinatoria, presencia de variables, magnitud de los parámetros, contexto de los elementos, tipo de ejercicio combinatorio y número de operaciones combinatorias.

En la tabla 2 se muestran únicamente las variables consideradas por Navarro-Pelayo (1991, 1994) a las cuales realizamos adaptaciones y que utilizamos para clasificar y describir las tareas combinatorias propuestas por los libros de texto de nuestra muestra.

RESULTADOS

Encontramos que de los libros que conforman la muestra seleccionada, únicamente el manual de Matemática de cuarto curso opción A de la editorial Anaya no contiene un capítulo dedicado al estudio de la Combinatoria. Además el capítulo sobre el tema presente en los libros de texto de cuarto curso opción A y B de la editorial Santillana son exactamente iguales. De esta forma los resultados obtenidos corresponden al análisis realizado a cuatro manuales de Matemática de

Educación Secundaria: el del cuarto curso opción A de la editorial SM; cuarto curso opción B de SM; cuarto curso opción B de Anaya y cuarto curso opción A de Santillana.

Tabla 2. Variables consideradas por Navarro-Pelayo (1991, 1994) para analizar ejercicios a las cuales realizamos adaptaciones

Variables	Adaptaciones
Tipo de operación combinatoria.	Se incluyeron otros contenidos combinatorios como los números combinatorios o el factorial de un número, etc. La nueva variable recibe el siguiente nombre: contenido combinatorio utilizado para resolver la tarea
Magnitud de los parámetros.	Se agregó una nueva categoría para el caso de los valores de los parámetros de la regla del producto. El nombre de esta variable se reformula como valor numérico de los parámetros *m* y *n*.
Contexto de los elementos.	Se separó la categoría, letras y números, elaborada por Navarro-Pelayo (1991), en dos categorías mutuamente excluyentes. También se reformuló el nombre de la categoría "grafos" por el de caminos. Además se agregó una nueva categoría llamada "cálculo combinatorio" y se reformuló el nombre por el de naturaleza (contexto) de los elementos inmersos en la tarea.
Tipo de ejercicio combinatorio.	Se agregó el caso en que además de identificar la operación combinatoria se deba resolver una ecuación. También se incluyó dos nuevas categorías: "construcción o invención de un problema" y "tarea aplicada a la probabilidad". Se reformuló el nombre por el de tipo de tarea combinatoria.
Presencia de variables	Se reformuló el nombre por el de ausencia o presencia de variables en los parámetros *m* y *n*.

Para simplificar la presentación de los resultados se utilizará la siguiente notación: [A]: Cuarto curso opción A SM, [B]: Cuarto curso opción B SM, [C]: Cuarto curso opción B Anaya y [D]: Cuarto curso opción A Santillana.

Resultados del análisis del desarrollo teórico del tema de Combinatoria

Con relación a la ubicación del capítulo sobre Combinatoria presente en los manuales mencionados se observó que en tres de ellos ([A], [B] y [D]) el capítulo anterior es el Estadística y el posterior Probabilidad. Únicamente [C] presenta el tema después de Probabilidad y como último capítulo del libro.

Respecto a los contenidos sobre Combinatoria desarrollados en dichos manuales (Tabla 3), encontramos que todos contienen las variaciones ordinarias o con repetición, las permutaciones ordinarias, las combinaciones ordinarias y el diagrama en árbol. Solo [B] no contiene la regla del producto. Además ninguno incluye la regla de la suma o las combinaciones con repetición. Las permutaciones con repetición solo se encontraron en [A] y las permutaciones circulares únicamente en [B]. El libro de texto con mayor cantidad de contenidos es [D] con 10, seguido por [B] y [A] y el que presenta la menor cantidad es [C] con seis.

Dos de los textos hacen referencia al concepto de Combinatoria. Por ejemplo [C] menciona "La Combinatoria se ocupa de contar agrupaciones realizadas con distintos criterios" (p. 228) y [D] "Los métodos de conteo son estrategias utilizadas para determinar el número de posibles resultados que existen al realizar un experimento" (p. 230).

La notación empleada paras las operaciones combinatorias es similar en todos los manuales. Solo uno de los textos utiliza dos notaciones diferentes para algunos contenidos combinatorios, llegando incluso a mezclarlas en el desarrollo teórico del tema.

Tabla 3. Contenidos combinatorios presentes en los manuales

	Manual				
Contenido	[A]	[B]	[C]	[D]	Total
Regla del producto	1	0	1	1	3
Regla de la suma	0	0	0	0	0
Variaciones ordinarias	1	1	1	1	4
Variaciones con repetición	1	1	1	1	4
Permutaciones ordinarias	1	1	1	1	4
Permutaciones con repetición	1	0	0	0	1
Permutaciones circulares	0	1	0	0	1
Combinaciones ordinarias	1	1	1	1	4
Combinaciones con repetición	0	0	0	0	0
Diagrama de árbol	1	1	1	1	4
Factorial de n	1	1	0	1	3
N° combinatorios	0	1	0	1	2
Propiedades de N° Combinatorios	0	1	0	1	2
Binomio de Newton	0	0	0	1	1
Total	8	9	6	10	33

0: Ausente 1: Presente

En tres de los manuales ([A], [C] y [D]) las operaciones combinatorias se presentan en el siguiente orden: variaciones (ordinarias o con repetición), permutaciones (ordinarias o con repetición) y por último combinaciones.

El tratamiento dado a las definiciones de las operaciones combinatorias es equivalente en todos los manuales. Con frecuencia se inicia la definición con la frase “distintos grupos o agrupaciones que se pueden formar”, “formar agrupaciones ordenadas” o “distintas formas que se pueden ordenar”, por lo que está implícita en todos los casos la noción de muestra (ordenada o no).

Por ejemplo, en los manuales [A] y [B] definen las variaciones ordinarias de la siguiente forma:

Las variaciones ordinarias o sin repetición de *m* elementos tomados de *n* en *n* (de orden *n*) son los distintos grupos que se pueden formar con los *m* elementos, de manera que en cada grupo entren *n* elementos distintos, dos grupos son distintos si difieren en algún elemento o en el orden de colocación. ([A], p. 252 y [B], p. 282)

Además todas las definiciones utilizan al menos el modelo de selección.

Respecto a los recursos didácticos [A], [B] y [D] promueven el uso de la calculadora principalmente como un recurso para facilitar los cálculos. Solo [C] propone para introducir el tema el uso de material manipulativo.

Con relación a las consideraciones históricas, solo [D] introduce el tema con un breve relato histórico sobre el matemático Blaise Pascal y la máquina que inventó para contar; sin embargo no se relaciona con la construcción de los conceptos combinatorios. Ninguno de los manuales menciona cómo surge la Combinatoria, qué tipos de problemas motivaron su estudio o quiénes son sus principales precursores, por nombrar algunos aspectos relevantes.

En general la estructura de los ejemplos y ejercicios presentes en [A] y [B] es similar: ejemplos introductorios-ejemplos posteriores a la definición-ejercicios posteriores a la definición. En [C] ejemplos introductorios-ejercicios posteriores a la definición y en [D]: ejemplos posteriores a la definición-ejercicios posteriores a la definición.

Resultados del análisis de las tareas propuestas en el capítulo de Combinatoria de uno de los libros seleccionados

Después de realizar el análisis del desarrollo teórico del tema en los cuatro manuales mencionados, se seleccionó al azar uno de éstos para analizar todas las tareas que se deben resolver en el capítulo de Combinatoria. El texto seleccionado fue el del cuarto curso de Educación Secundaria opción A de la Editorial Santillana.

El manual descrito contiene 87 tareas planteadas para ser resueltas por los estudiantes, sin embargo algunas de ellas incluyen bajo una misma numeración varias tareas independientes, por lo que consideramos cada una de ellas como unidades de registro distintas entre sí. En total encontramos 170 tareas que se han resuelto y se les ha efectuado un análisis de contenido tanto del enunciado como del procedimiento utilizado en su solución.

La clasificación de las 170 situaciones según el tipo de tarea combinatoria se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 4. Tipo de tarea combinatoria

Tipo de tarea	Frecuencia	%
Reconocimiento de la fórmula	94	55,3
Identificación de la operación combinatoria	66	38,8
Enumeración	6	3,5
Demostración o búsqueda de propiedades	4	2,4
Total	170	100

Como se puede observar, la mayor cantidad de tareas (55%) corresponden al reconocimiento de la fórmula combinatoria, como por ejemplo: “Calcula 8!” (Tarea 8a, p. 232) y “Halla las variaciones con repetición de 20 elementos tomados de 5 en 5” (Tarea 48e, p. 241). Un porcentaje considerable de tareas (alrededor del 39%) se relacionan con la identificación de una operación combinatoria como la siguiente: “¿De cuántas formas podemos colocarnos 2 anillos diferentes en una mano de modo que no estén en el mismo dedo?” (Tarea 28, p. 237).

Respecto al concepto combinatorio que se puede utilizar para resolver las tareas (Tabla 5), se encontró que hay una distribución casi homogénea de los contenidos combinatorios utilizados para resolverlas, ya que ninguno se utiliza en más del 17%. El Binomio de Newton es el que aparece con mayor frecuencia (16,5%). 57% se resuelven utilizando la regla del producto, las variaciones, las permutaciones, el diagrama de árbol o las combinaciones ordinarias, siendo ésta última la más usada entre ellas (13,5%). Además una de cada cinco pide calcular el factorial de un número o un número combinatorio.

Con relación al número de operaciones combinatorias ligadas a una misma tarea, 8 de cada 10 se resuelven utilizando solo una operación, mientras que en 8% es necesario aplicar 2 operaciones a la vez.

El valor de los parámetros es una de los factores que influye en la dificultad de las tareas. En aquellas que se resuelven mediante variaciones, permutaciones o combinaciones y en las cuales el valor de los parámetros no es una variable, se encontró que la mayoría de valores de *m* son menores a 10 (68,5%), con mayor frecuencia pertenecen al intervalo discreto [6, 10] (38,4%). Alrededor del 15% está entre 16 y 20. En el caso del parámetro *n* la mayoría de valores son menores a 5 (67,1%) y aproximadamente el 90% es menor a 10.

Tabla 5. Contenido combinatorio utilizado para resolver la tarea

Operación	Frecuencia	%
Regla del producto	15	8,8
Variaciones ordinarias	18	10,6
Variaciones con repetición	13	7,6
Combinaciones ordinarias	23	13,5
Permutaciones ordinarias	19	11,2
Diagrama en árbol	9	5,3
Factorial	18	10,6
N° Combinatorio	24	14,1
Binomio de Newton	28	16,5
Ninguna operación combinatoria	3	1,8
Total	170	100,0

Sobre el contexto o naturaleza de los elementos inmersos en las tareas, se encontró que el cálculo combinatorio es el que aparece con mayor frecuencia (34,7%) seguido por el algebraico (22,4%). Alrededor del 11% efectúa operaciones combinatorias con objetos, 10% con números, 8% con personas y 8% con letras.

Los modelos de selección y colocación son los que aparecen con mayor frecuencia y en similar proporción (20% y 19,4%, respectivamente). Se encontraron dos tareas del modelo de particiones, sin embargo una cantidad considerable no corresponde a ningún modelo (101).

Un aspecto que puede aumentar la dificultad de la tarea es la presencia de variables en los parámetros (Hadar y Hadass, 1981). Al respecto encontramos 38 (22,3%) en las cuales el parámetro *n* es una variable de tipo indeterminada dado que no se debe calcular su valor como en la siguiente: "Demuestra con ejemplos que se verifica esta igualdad $\binom{n}{n-1} = n$" (tarea 40, p. 240).

Por último, es importante mencionar que las tareas propuestas se distribuyen dentro del texto según el contenido combinatorio que se debe aplicar para solucionarlas. Por ejemplo las que se resuelven por medio de las variaciones se presentan después de un título que indica "Halla estas variaciones".

CONCLUSIONES E IMPLICACIONES

Conclusiones del análisis del desarrollo teórico del tema de Combinatoria

El capítulo sobre Combinatoria se ubica en los libros de texto analizados principalmente después del tema de Estadística y antes de Probabilidad. Esto podría llevar a que los estudiantes utilicen técnicas de recuento para el cálculo de probabilidades, sin embargo en los capítulos sobre Probabilidad no observamos tareas en las cuales se promueva el uso de algún contenido combinatorio. Debido a lo anterior se concluye que el estudio del tema de Combinatoria se realiza de forma aislada en los textos analizados.

Los resultados obtenidos sobre el orden en que se presentan las operaciones combinatorias coinciden con los de Navarro-Pelayo (1991). Solo uno de los manuales sigue las recomendaciones de Fischbein y Gazit (1988), quienes consideran que la primera operación combinatoria que se debe estudiar cuando se utiliza el diagrama en árbol es la de variaciones con repetición, seguido por las permutaciones y por último las combinaciones que ofrecen mayor dificultad a los alumnos.

Respecto a la notación que empleada, Hadar y Hadass (1981) mencionan que la dificultad que poseen los estudiantes de elegir una notación que represente de forma adecuada la información y condiciones dadas en las tareas, aumenta debido a que algunos textos emplean diferentes notaciones para las operaciones combinatorias, resultado que hemos obtenido en uno de los textos analizados.

Respecto a las expresiones algebraicas (fórmulas) que se presentan para calcular las operaciones combinatorias dos de los textos emplean expresiones más simplificadas. Consideramos que esto facilitan su aplicación por parte del estudiante.

El único recurso didáctico que promueven los libros de texto es el uso de la calculadora y se utiliza principalmente para simplificar los cálculos. Sin embargo el currículo de Educación Secundaria para Andalucía recomienda que las calculadoras no deben suponer solo un apoyo para la realización de cálculos complejos, sino mucho más que eso, deben convertirse en herramientas para la construcción del pensamiento matemático y facilitar la comprensión de los conceptos, ya que permiten liberar de una parte considerable de carga algorítmica. Por otra parte no se promueve por ejemplo la metodología basada en juegos. Engel, Varga y Walser (1976) proponen usar para la enseñanza de la Combinatoria una metodología basada en juegos, el uso de diagrama en árbol y los materiales manipulativos. Esto para evitar sesgos en el razonamiento combinatorio de los estudiantes, no obstante en los textos estas orientaciones metodológicas no son reflejadas.

Los contenidos combinatorios son presentados primero con un ejemplo introductorio luego con uno o varios ejemplos después de la definición y por último diversos ejercicios posteriores a la definición. Ninguno de los manuales incluye ejercicios introductorios.

No se encontraron consideraciones históricas que se relacionen con la construcción de los conceptos combinatorios. Por lo tanto no se consideran los lineamientos del currículo de Educación Secundaria para Andalucía, donde se destaca que el conocimiento histórico de la Matemática debe entenderse como eje transversal en la enseñanza de las Matemáticas y ha de estar siempre presente en la construcción del conocimiento matemático durante la Educación Secundaria.

Conclusiones del análisis de las tareas propuestas en el capítulo de Combinatoria de uno de los libros seleccionados

Se da un mayor énfasis a tareas relacionadas con el reconocimiento de la fórmula combinatoria que se debe utilizar para resolverla. Sin embargo hay una cantidad considerable donde se debe identificar la operación combinatoria que la resuelve. Por el contrario se presentan pocas tareas de enumeración y de demostración o búsqueda de propiedades.

Hay una distribución homogénea de los contenidos combinatorios utilizados para resolver las tareas propuestas. La operación combinatoria más frecuente son las combinaciones ordinarias seguida por las permutaciones ordinarias y por último las variaciones con repetición. Hay pocas en las cuales se utilice el diagrama en árbol.

En la mayoría de las tareas propuestas solo es necesario aplicar una operación combinatoria para resolverlas.

Los valores de los parámetros m y n no son elevados y se encontró una gran cantidad considerable en las que los parámetros son variables, lo que según Hadar y Hadass (1981) aumenta su dificultad ya que los estudiantes pueden cometer el error de resolverlas usando valores concretos.

Se da gran importancia al contexto algebraico y al de cálculo combinatorio.

Existe correspondencia entre el modelo combinatorio usado para definir las operaciones combinatorias y los modelos implícitos en los enunciados de las tareas.

El texto en cuestión sugiere el concepto combinatorio que se debe emplear en la resolución de la tarea dado que las agrupa de acuerdo al contenido combinatorios que se deben utilizar. Esto impide la exploración e identificación del contenido combinatorio involucrado pues se infiere directamente.

Referencias

Andréu, J. (2000). Las técnicas de análisis de contenido; una revisión actualizada. Recuperado el 22 de julio, 2011 de http://public.centrodeestudiosandaluces.es/pdfs/S200103.pdf

Batanero, C., Godino, J. D. & Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento Combinatorio*. Madrid: Síntesis.

Engel, A., Varga, T. & Walser, W. (1976). *Hasard ou strategie? Jeux de combinatoire, de probabilités et de statistique*. París: O.C.D.L

Fischbein, E. & Gazit, A. (1988). The combinatorial solving capacity in children and adolescents. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik*, 5(1), 193-198.

Godino, J. D. & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.

Godino, J.D. & Font, V. (2006). Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos. Recuperado el 11 de junio, 2014 de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/anexo1_significados%20sistemicos.pdf.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado el 12 de junio, 2014 de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf.

Hadar, N. & Hadass, R. (1981). The road to solving a combinatorial problema is strew with pitfalls. *Educational Studies in Mathematics*, 12(1), 435-443.

Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación*. (4 ed.). México: McGraw-Hill.

Junta de Andalucía (2007). Orden de 10 de agosto por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía. BOJA, 171, 23-65.

Kapur, J. N. (1970). Combinatorial analysis and school mathematics. *Educational Studies in Mathematics Education*, 3(1), 111-127.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. BOE, 5, 677-773.

Navarro-Pelayo, V. (1991). *La enseñanza de la Combinatoria en el bachillerato*. Memoria de Tercer Ciclo. Universidad de Granada, España.

Navarro-Pelayo, V. (1994). *Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. Tesis Doctoral*. Universidad de Granada, España.

Ortiz, J. J. (1999). *Significados de los conceptos probabilísticos en los libros de texto de Bachillerato.* Tesis doctoral. Universidad de Granada, España.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1951). *La génèse de l´idée de hasard chez l´enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.

Roa, R. (2000). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación Matemática avanzada*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, España.

RELACIÓN ENTRE REPRESENTACIONES GRÁFICAS Y SIMBÓLICAS DEL CONCEPTO DE LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Relationship between graphical and symbolic representations of the concept of finite limit of a function at a point

José Antonio Fernández-Plaza, Juan Francisco Ruiz-Hidalgo, Luis Rico, Enrique Castro

Universidad de Granada

Resumen

Esta comunicación presenta un estudio exploratorio y descriptivo sobre los modos en los que un grupo de estudiantes de bachillerato describen gráficas de funciones mediante enunciados simbólicos. Se analizan las respuestas de los estudiantes a una tarea consistente en relacionar cuatro gráficas de funciones con pares de enunciados simbólicos propuestos. Los resultados muestran cómo esos estudiantes son capaces de asociar enunciados de propiedades de una función a partir de información gráfica sobre la misma. Mostramos un análisis más detallado de los pares de propiedades asociados a una gráfica particular describiendo las concepciones erróneas subyacentes. Por otro lado, se detecta un uso singular de pares de propiedades que son contradictorias en general y un uso ambiguo de la desigualdad entre el límite de la función en un punto y su imagen en ese mismo punto.

Palabras clave: *Significado de un concepto matemático, Límite finito de una función en un punto, Sistema de representación gráfico, Sistema de representación simbólico, Ambigüedad de la desigualdad.*

Abstract

This paper addresses an exploratory and descriptive study on the ways a group of students in Non-Compulsory Secondary Education describe graphs by means of symbolic statements. Students' responses to a task consisting of establish relationships between four graphs of functions with a pair of symbolic statements are analyzed. The main result is that those students are able to associate properties symbolically expressed from the graphical information. We show a more detailed analysis about pair of properties associated to a particular graph describing the underlying misconceptions. On the other hand, a singular use of pairs of properties, which are contradictory in general, is detected as well as an ambiguous use of the inequality between limit of the function and the image at a point.

Keywords: *Meaning of a mathematical concept, Finite limit of a function at a point, system of graphical representation, system of symbolic representation, Ambiguity of the inequality.*

PROBLEMA

La capacidad matemática de representar es una de las componentes de la competencia matemática que se espera lograr en los escolares al finalizar su escolaridad obligatoria, entendida como la interpretación, traducción entre y utilización de distintas representaciones, entre ellas gráficos, tablas, diagramas, ecuaciones y fórmulas. Esta capacidad se ha de desarrollar conjuntamente con la utilización de las operaciones y el lenguaje simbólico, formal y técnico, que implica la interpretación, manipulación y utilización de expresiones simbólicas, regido por convenios y reglas matemáticas, así como el uso de constructos formales basados en definiciones (OCDE, 2013). En

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F.; Rico, L., Castro, E. (2014). Relación entre representaciones gráficas y simbólicas del concepto de límite finito de una función en un punto. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 287-295). Salamanca: SEIEM.

este marco, nos interesa constatar los modos en que los estudiantes comparan dos o más representaciones en relación a una misma situación problemática.

Consultando trabajos de investigación basados en el análisis de libros de texto (Molfino y Buendía, 2010; Sánchez-Compaña, 2012) observamos que el sistema de representación simbólico identificado se reduce a la notación de límite, de límites laterales y de su formalización, destacando la ausencia de tareas que requieran la búsqueda o selección de funciones que satisfagan variedad de enunciados simbólicos que expresen igualdad o desigualdad entre la imagen del punto, ambos o alguno de los límites laterales y el límite de una función en un punto. Esta investigación supone una profundización de otra más amplia sobre el significado del concepto de límite finito de una función en un punto, que manifiestan los estudiantes del primer curso de Bachillerato (Fernández-Plaza, 2011) y tiene el siguiente objetivo:

- Describir los modos en que los estudiantes de bachillerato asocian “pares” de enunciados simbólicos de una lista con distintas funciones dadas por su representación gráfica.

SIGNIFICADO DE UN CONCEPTO MATEMÁTICO

Consideramos un modelo interpretativo que procede de la adaptación al ámbito de la matemática escolar de la relación semántica, lógica y formal, entre signo o representación, referencia o estructura conceptual y sentido o modo de uso. Este modelo, que puede consultarse en Rico (2012, pp. 51–53), considera las siguientes componentes para un concepto matemático escolar:

- Los *sistemas de representación*, definidos por los conjuntos de signos, gráficos y reglas que hacen presente el concepto y lo relacionan con otros.
- La *estructura conceptual*, que comprende conceptos, definiciones y propiedades, los argumentos y proposiciones que se derivan y sus criterios de veracidad.
- Los *sentidos*, que incluye aquellos modos de uso, contextos, situaciones y problemas que están en el origen del concepto y lo dotan de carácter funcional.

Sistema de representación gráfico. Modelos gráficos del concepto de límite

El sistema de representación gráfico del concepto de límite de una función en un punto se sustenta en el establecido para el concepto analítico de función, con las siguientes características adaptadas para el nivel curricular de bachillerato:

- La gráfica de la función es continua en un entorno reducido del punto x_0, en el que se aborda el estudio del límite.
- El comportamiento de la función en x_0 se considera irrelevante, es decir, el cómo está definida en el punto, o si bien no lo está.
- El concepto de límite involucra un proceso dinámico para el cual el sistema de representación gráfico es limitado y usualmente necesita de otros signos externos complementarios, tales como señales y movimientos de dedo, flechas, software dinámico, etc. para dotarle de ese carácter dinámico.

La Figura 1 muestra diversos modelos gráficos de límite que se incluyen en libros de nivel universitario (Apostol, 1974). Entre estos modelos, el de oscilación se suele excluir por su excesiva complejidad para el nivel de Bachillerato, asumiendo la existencia de ambos límites laterales (finitos o infinito).

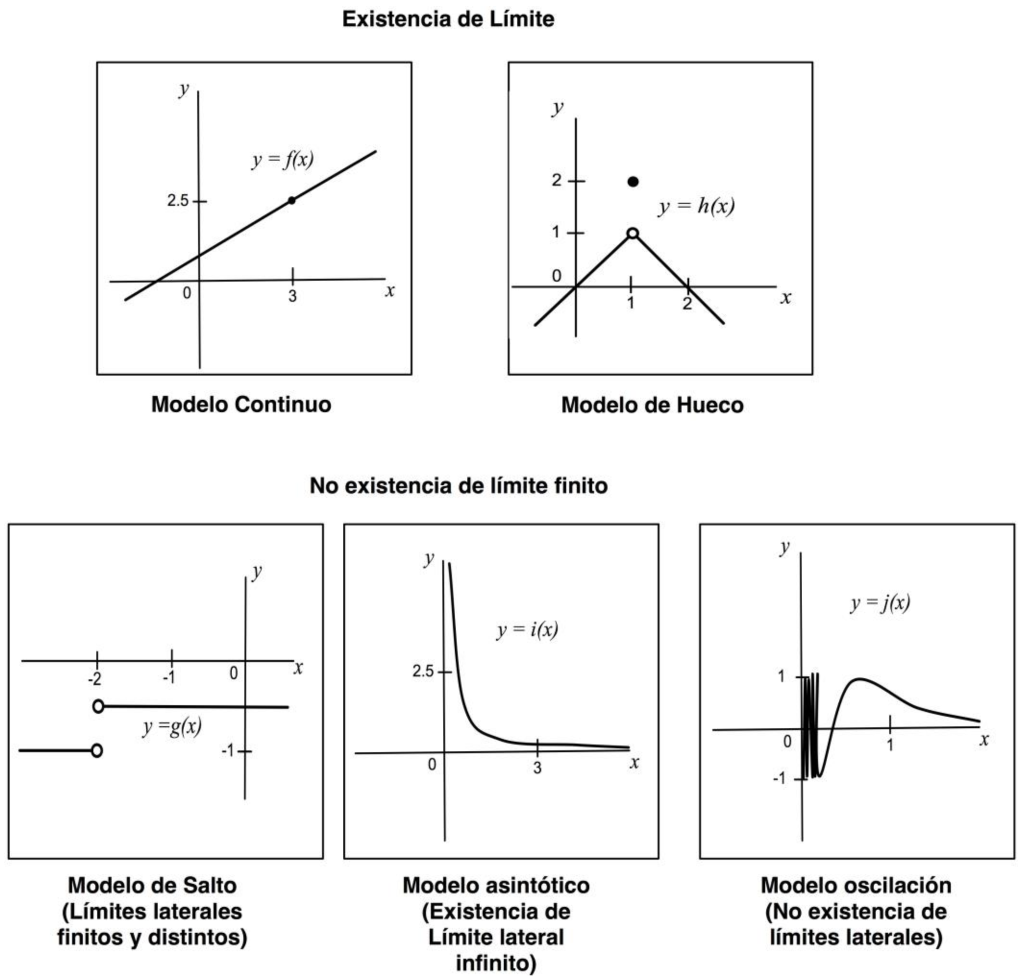


Figura 1. Diferentes modelos gráficos del concepto de límite

Sistema de representación simbólico

El sistema de representación simbólico de límite de una función $f(x)$ en un punto a, tiene la siguiente estructura:

$$\underset{x\to a^{+}}{lím} f(x) = \underset{x\to a^{-}}{lím} f(x) = \underset{x\to a}{lím} f(x)$$

El símbolo está formado por un operador *lím* que considera dos argumentos, una función *f(x)* y un punto *a* que es de acumulación del dominio de *f*, a los que le asocia un número real que es límite de la función $f(x)$ en el punto a. Para expresar los límites laterales por la derecha y por la izquierda, se emplean los signos + y - respectivamente como superíndices del símbolo a. La flecha es un convenio que expresa que la variable x tiende al punto a, pero no lo iguala.

En el estudio de la continuidad se añade a este sistema de representación la notación *f(a)* para discriminar los distintos tipos de discontinuidad.

El enunciado $f(1) \neq \underset{x\to 1}{lím} f(x)$ puede interpretarse de dos formas diferentes, lo cual supone una ambigüedad de significado del signo de desigualdad:

- *Algún miembro de la desigualdad no existe*. Si no existe el límite funcional el enunciado simbólico se puede leer "$f(1)$ no es límite de $f(x)$ cuando x tiende a 1", "$f(1)$ no tiene la propiedad de ser límite de $f(x)$ cuando x tiende a 1".

- *Ambos miembros de la desigualdad existen*, pero no denotan el mismo resultado. Si existe el límite funcional pero no es $f(1)$, el enunciado simbólico resultante tiene la siguiente interpretación "L es límite de $f(x)$ cuando x tiende a 1 y L es distinto de $f(1)$".

Para salvar dicha ambigüedad, algunas teorías del significado, por ejemplo, la de Strawson y Frege, citados por García (1997, pp.70-71) consideran imprescindible la *presuposición de existencia* de referencia para que cualquier afirmación acerca de ella tenga un valor de verdad, pero nosotros admitimos ambas interpretaciones pues los sujetos de este estudio pudieran ponerlas de manifiesto.

Ningún sistema de representación agota el concepto representado (Rico, 2009). En este caso, la representación gráfica y la simbólica son complementarias. El sistema de representación gráfico enfatiza aspectos topológicos de la tendencia, "entornos del límite se corresponden con entornos reducidos de x_0", con la limitación de que enfatiza otras propiedades no relevantes (monotonía). El sistema de representación simbólico abstrae relaciones de igualdad y desigualdad entre límites laterales, imagen de la función en un punto y límite de la función en un punto, organizando y discriminando diferentes modelos gráficos, siendo la limitación la opacidad sobre el dominio de validez de estas relaciones.

ANTECEDENTES

Gómez y Carulla (1998) señalan la necesidad de que los estudiantes analicen propiedades de los conceptos de forma gráfica sin que suponga una dificultad la interpretación y modificación desde el registro simbólico asociado, en definitiva, ponen de manifiesto una ruptura del equilibrio en la interacción entre ambos sistemas de representación.

Ward, Inzunsa, Hernández y López (2013) realizan una investigación con docentes de bachillerato informando varios errores en la manipulación simbólica de expresiones relacionadas con límite finito de una función en un punto y en la transformación de éstas en el sistema de representación gráfico.

En referencia al aprendizaje de los estudiantes de bachillerato, Elia y cols. (2009) obtienen entre otros resultados, que la gran mayoría son capaces de relacionar diferentes sentencias simbólicas y una gráfica dada, siendo menor el éxito en el procedimiento inverso, dadas las propiedades de una función simbólicamente proporcionar una gráfica que satisfaga simultáneamente tales propiedades.

Blázquez (2000) manifiesta en la puesta en marcha de una experiencia de investigación-acción sobre límite funcional, que los estudiantes incurrían en errores en ambos sistemas de representación tales como: La notación de límite lateral se asocia a números positivos, si es por la derecha, y a números negativos si es por la izquierda; insuficiente manejo de errores y cotas por abuso del registro simbólico; la visión global de las gráficas funcionales dificulta el análisis de propiedades locales; la interpretación gráfica no se vincula a relación entre variables (descoordinación).

CONTEXTO, PARTICIPANTES E INSTRUMENTO

Contexto y participantes

Esta investigación se realiza en el mismo contexto descrito en Fernández-Plaza, Castro, Rico y Ruiz-Hidalgo (2012). Se seleccionaron de manera intencional y por disponibilidad 36 estudiantes de un grupo de bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología. Estos estudiantes habían recibido instrucción previa por parte de su profesor sobre la aproximación numérica intuitiva y la interpretación gráfica del concepto de límite, salvo las técnicas específicas de cálculo. Como guía de ejercicios y referencia teórica, utilizamos el libro de texto *Matemáticas.1 Bachillerato* (Ciencias y Tecnología) (Vizmanos y col., 2008) y los apuntes propios del profesor.

Instrumento y aplicación

Se diseñó un cuestionario del cual describiremos una tarea en la que se combinan los sistemas de representación gráfico y simbólico denotados respectivamente por G y S. El enunciado de esta tarea es el siguiente:

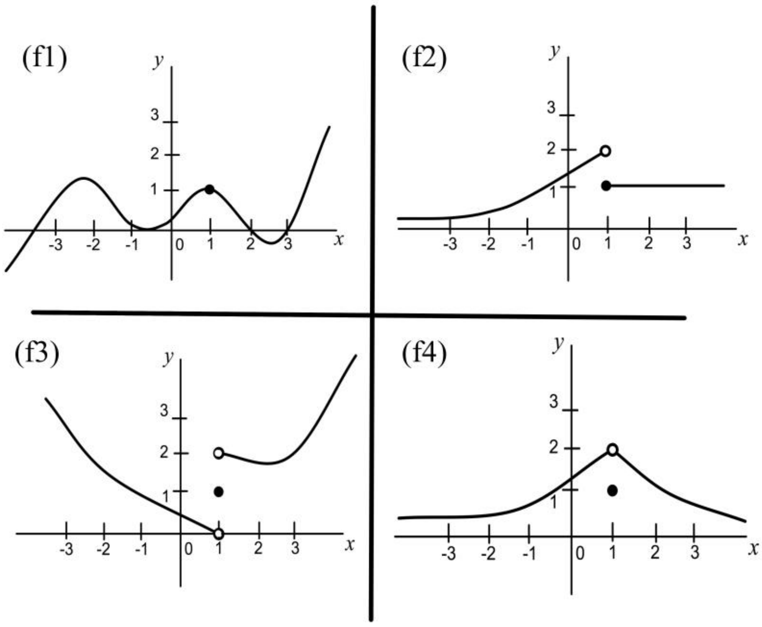
> (GS-S) Después de trabajar con funciones, un grupo de alumnos ha encontrado las siguientes siete características que cumplen algunas de ellas:

(a) $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

(d) $f(1) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ (e) $f(1) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ (f) $f(1) \neq \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

(g) $f(1) \neq \lim\limits_{x \to 1} f(x)$

> Identifica dos propiedades que cumpla cada una de las siguientes funciones :



La codificación de esta tarea significa que al estudiante se le facilita información tanto gráficamente como simbólicamente (GS) y se le demandan dos enunciados simbólicos (S) relacionadas con la interpretación gráfica.

La actividad planteada moviliza en el estudiante la competencia de representar en su nivel más básico, reconocer y relacionar diversas representaciones de una misma función dada.

El siguiente diagrama (Figura 2) muestra las propiedades de cada una de las gráficas y las relaciones de implicación lógica entre ellas señaladas mediante flechas, permitiendo deducir cuáles de las propiedades son:

- *Exclusivas de una gráfica.* Las propiedades (a) y (d) son exclusivas de las gráficas f1 y f2 respectivamente.
- *Comunes a varias gráficas.* Las propiedad (b) es común a las gráficas f1 y f4, mientras que la propiedad (c) es común a las gráficas f2 y f3. Estas propiedades, no determinan la gráfica, pero sí establecen varios agrupamientos de las cuatro gráficas.

- *Mínimas.* Las propiedades que se sitúan en el nivel superior de la cadena de implicaciones se consideran mínimas para caracterizar una determinada gráfica. No se requiere que los sujetos apliquen este tipo de razonamiento.

La recogida de datos se llevó a cabo a mediados del curso académico 2010-2011. El cuestionario se aplicó durante una sesión ordinaria de trabajo en la clase de matemáticas. Se emplearon dos cuestionarios diferentes que pueden consultarse en (Fernández-Plaza, 2011) para lo cual se dividió aleatoriamente al grupo de clase en dos subgrupos de 18 estudiantes, Esta tarea fue realizada por uno de los subgrupos. Por otro lado, ambos grupos tenían la siguiente actividad común en sus cuestionarios.

> Escribe una definición personal, con tus propias palabras, para límite de una función en un punto.

Esta actividad funciona como ítem de control de los subgrupos, de manera que el desempeño de un grupo pueda considerarse representativo del otro.

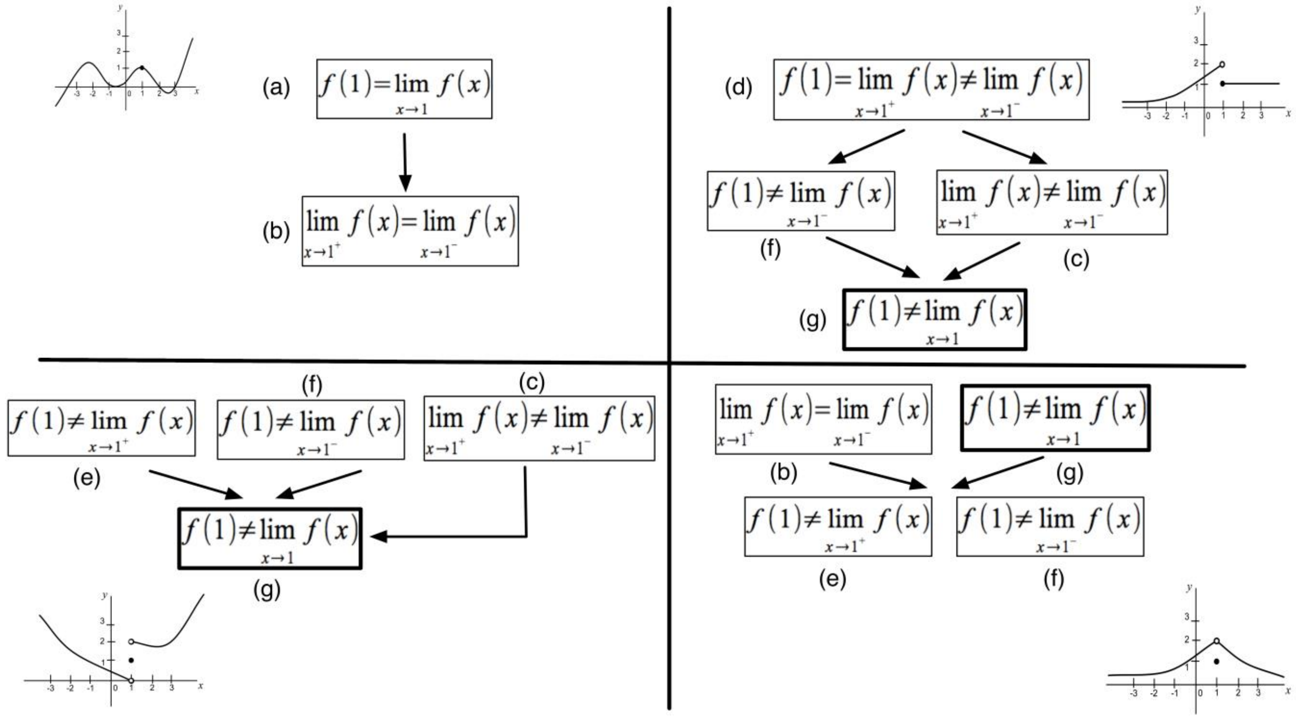


Figura 2. Diagrama de propiedades satisfechas por cada gráfica y relaciones de implicación existentes

Las propiedades que están al mismo nivel son independientes, es decir, no existe una relación de implicación entre ellas, pero su conjunción lógica implica otras propiedades. La propiedad resaltada en la Figura 2 tiene dos interpretaciones diferentes, lo cual pone de manifiesto la ambigüedad del signo de desigualdad antes mencionado.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Análisis general de los resultados derivados de la tarea (GS-S)

La Tabla 1 muestra las frecuencias absolutas de asignación de propiedades a cada gráfica. Dado que cada sujeto proporcionaba como máximo dos propiedades a cada gráfica, el recuento se realiza sobre 144 elementos.

En general, la mayoría de los estudiantes asignan propiedades adecuadas a las gráficas (valores mayores resaltados en la Tabla 1). Estos valores se pueden interpretar como posibles indicadores de qué propiedades resaltan más las gráficas. Es relevante que la sentencia simbólica con ambigüedad (g) se atribuye mayoritariamente a las gráficas f3 y f4, en cada una de las cuales adquiere un sentido diferente que hemos descrito anteriormente. De acuerdo al número de errores totales por cada gráfica, se observa que los modelos de salto (gráficas f2 y f3) y de hueco (gráfica f4) provocan ligeramente más respuestas erróneas que el modelo continuo (gráfica f1).

Tabla 1. Frecuencias de propiedades globales (izquierda) e incorrectas (derecha) asignadas a las gráficas

Propiedades	Gráficas				Total Global
	f1	f2	f3	f4	
(a)	**12**	2	2	1	17
(b)	**9**	3	5	**7**	24
(c)	1	**9**	**10**	4	24
(d)	1	4	2	4	11
(e)	1	3	1	3	8
(f)	1	**6**	3	2	12
(g)	1	3	**5**	**7**	16
Total/Gráfica	26	30	28	28	112
NS/NC	10	6	8	8	N=144

Propiedades	Gráficas				Total errores
	f1	f2	f3	f4	
(a)		2	2	1	5
(b)		3	5		8
(c)	1			4	5
(d)	1		2	4	7
(e)	1	3			4
(f)	1				1
(g)	1				1
Total/Gráfica	5	8	9	9	27

Análisis de pares de propiedades de las gráficas. Caso de la gráfica f3

Vamos a enfocar el análisis hacia el estudio de los pares de propiedades asociados a la gráfica f3, cuyas propiedades correspondientes son (c), (e), (f) y (g). La Tabla 2 muestra la variedad de elecciones de pares de propiedades, excluyendo aquellos casos en los que aparezca una única propiedad o respuestas en blanco.

Tabla 2. Pares de propiedades correspondientes a la gráfica f3

Pares de propiedades		Frecuencia
Adecuadas	{c, g}	5
	{c, f}	1
Erróneas no contradictorias	{d, f}	1
	{b, e}	1
	{a, b}	1
Erróneas contradictorias	{a, c}	1
	{b, d}	1
	{b, c}	1
		N=12

Se observa que de los 12 estudiantes que han proporcionado pares de propiedades, la mayoría han destacado adecuadamente la diferencia entre los límites laterales (c) y la desigualdad “ambigua” entre *f*(1) y el límite inexistente, habiendo un único sujeto que destaca la desigualdad “no ambigua” entre *f*(1) y el límite lateral izquierdo existente (f).

Los errores no contradictorios y contradictorios se distribuyen de la misma forma (3 de 12 en cada caso). Los errores no contradictorios surgen de atribuir a la gráfica f3 las propiedades (d), (b) y (a), que pueden dar lugar a las siguientes conjeturas.

- La propiedad (d) $f(1) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ podría enfatizar una asignación “necesaria” de la imagen del punto a alguno de los límites laterales.
- La propiedad (b) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ podría interpretarse como una descoordinación entre las variables independiente y dependiente con la asignación del límite *x*=1 a ambos límites laterales. Observando que todos los sujetos que han incurrido en este error han asignado (a)

$f(1) = \underset{x \to 1}{lím}\ f(x)$ a la gráfica continua f1, esta descoordinación es patente cuando se carece de “continuidad visual”, o bien, está relacionada con una concepción geométrica (la recta x=1 enlaza los dos trozos laterales), al igual que el punto (1, f(1)) enlaza los dos tramos laterales de f1.

- La propiedad (a) $f(1) = \underset{x \to 1}{lím}\ f(x)$ se interpreta probablemente como una identificación clara del límite con la imagen, pero debida a la “continuidad simbólica”.

Los errores contradictorios, entendidos como combinación de propiedades que nunca pueden ser ciertas simultáneamente se considerarán como indicadores de déficits en el razonamiento lógico o comprensión de los enunciados simbólicos, así como de la complejidad relativa de la gráfica. También pueden ser accidentales, entre los cuales podrían estar {b, c} o {b, d}. Es relevante el error {a, c}, porque en cierta forma desliga la igualdad de los límites laterales como condición necesaria y suficiente para la existencia de límite, atribuyendo su valor a la imagen de la función en el punto.

Conviene observar que la ambigüedad de sentido antes descrita está presente en los usos de la propiedad (g) $f(1) \neq \underset{x \to 1}{lím}\ f(x)$ en condiciones de no existencia de límite (5 de 12). Tal contexto de no existencia de límite viene dado por el uso de la propiedad (c) $\underset{x \to 1^+}{lím}\ f(x) \neq \underset{x \to 1^-}{lím}\ f(x)$.

CONCLUSIONES

En referencia al objetivo planteado, de describir los modos en que los estudiantes identifican propiedades de las gráficas expresadas simbólicamente, se obtienen las siguientes conclusiones:

Globalmente, los estudiantes en general son capaces de proporcionar propiedades adecuadas de las gráficas propuestas, siendo las propiedades más destacadas en las gráficas las más familiares como la igualdad o desigualdad entre la imagen y el límite, la igualdad y desigualdad de los límites laterales según correspondan.

En referencia al caso particular dado por la gráfica f3, los estudiantes enfatizan adecuadamente la desigualdad entre los límites laterales y la imposibilidad de que $f(1)$ sea límite de la función en $x = 1$, conjuntamente y separadamente combinadas con otras propiedades. Hacemos hincapié en el uso de la propiedad (g) sin presuposición de existencia de límite, que provoca la ambigüedad de significado del signo de desigualdad.

Finalmente, de la gráfica f3 en particular, emergen algunas concepciones erróneas, tales como la vinculación de la imagen con alguno de los límites laterales, aún siendo distintos; la atribución de la imagen como valor del límite; y la posible descoordinación entre las variables fijando como límite el valor de la abscisa en la que se lleva a cabo el estudio, siendo esta interpretación posiblemente geométrica como “enlace entre tramos discontinuos”.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado con la ayuda y financiación de la beca FPU (AP2010-0906), (MEC-FEDER), del proyecto “Procesos de Aprendizaje del Profesor de Matemáticas en Formación” (EDU2012-33030) del Plan Nacional de I+D+I (MICINN) y del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (Grupo FQM-193, Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico). El trabajo es parte de la Tesis Doctoral *Desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes de bachillerato según un enfoque funcional. El caso de los conceptos de límite y continuidad de una función,* que realiza su primer autor en el Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, bajo la codirección de los otros tres autores.

Referencias

Blázquez, S. (2000). *Noción de límite en matemáticas aplicadas a las ciencias sociales*. Tesis doctoral. Valladolid: Universidad de Valladolid.

Elia, I., Gagatsis, A., Panaoura, A., Zachariades, T. & Zoulinaki, F. (2009). Geometric and algebraic approaches in the concept of "limit" and the impact of the "didactic contract". *International Journal of Science and Mathematics Education*, *7*(4), 765-790.

Fernández-Plaza, J.A. (2011). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato respecto al concepto de límite finito de una función en un punto. Estudio Exploratorio*. Trabajo de tercer ciclo. Granada: Universidad de Granada.

Fernández-Plaza, J.A., Castro, E., Rico, L., y Ruiz-Hidalgo, J.F. (2012). Concepto de límite finito de una función en un punto: aspectos estructurales y definiciones personales. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 229- 237). Jaén: SEIEM

García, A. (1997). *Modos de significar. Una introducción temática a la filosofía del lenguaje*. Madrid: Tecnos.

Gómez, P. y Carulla, C. (1998). Calculadoras gráficas y precálculo: ¿el imperio de lo gráfico? En UCV, I. (Ed.), *Memorias - III Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 710-715). Caracas: UCV.

Molfino, V. y Buendía, G. (2010). El límite de funciones en la escuela: un análisis de su institucionalización. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, *5*(1) 27-41.

OCDE (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012. Matemáticas, lectura y Ciencias*. Madrid: MEC. Recuperado el 18 de marzo de 2014 desde http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa2012/marcopisa2012.pdf?documentId=0901e72b8177328d

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, *4*(1), 1-14.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *1*(1), 39-63.

Sánchez-Compaña, M.T. (2012). *Límite finito de una función en un punto: Fenómenos que organiza.* Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Vizmanos, J. R., Alcaide, F., Hernández, J., Moreno, M. y Serrano, E. (2008). *Matemáticas.1 Bachillerato (Ciencias y Tecnología)*. Madrid, España: Editorial SM.

Ward, E., Inzunsa, S., Hernández, S. y López, F. (2013). Conceptualización y uso de representaciones sobre el concepto de límite en docentes de Bachillerato. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 523-533). Bilbao: SEIEM.

MODOS DE ACTUACIÓN E INTERACCIÓN Y GENERACIÓN DE OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE MATEMÁTICO

Ways of acting and interacting, and generation of mathematical learning opportunities

Miquel Ferrer, Josep M. Fortuny, Núria Planas, Kaouthar Boukafri

Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

Se estudian modos de actuación docente y de interacción en una clase de secundaria que generan oportunidades de aprendizaje matemático en los estudiantes. Obtenemos datos de la discusión en gran grupo de un problema de semejanza gestionada por una profesora con alumnos de 14 y 15 años. Se caracterizan episodios de la discusión y se presentan efectos de las acciones respecto al aprendizaje promovible. Los resultados revelan un modo de actuación con equilibrio instrumental y completitud discursiva, simultáneo a un modo de interacción participativo-bilateral. Del análisis de estos modos se infiere una oportunidad de aprendizaje conceptual.

Palabras clave: *modos de actuación, modos de interacción, oportunidades de aprendizaje matemático, discusión en gran grupo, problema de semejanza.*

Abstract

We examine ways of acting and interacting in a secondary classroom, which generate mathematical learning opportunities on the part of the students. Our data come from whole group discussion of a similarity problem managed by a teacher with 14 and 15-year-old students. We determine episodes for the discussion, as well as the effect of actions according to the knowledge that can be promoted. Our results reveal an instrumentally-balanced and discursively-complete way of acting, along with a participative-bilateral way of interacting on the part of the teacher. From the analysis of these ways, a conceptual learning opportunity is inferred.

Keywords: *ways of acting, ways of interacting, mathematical learning opportunities, whole group discussion, similarity problem.*

INTRODUCCIÓN

Numerosas investigaciones en educación matemática se centran en el estudio de la interacción como un facilitador en la generación de conocimiento durante el trabajo en parejas (Sfard y Kieran, 2001). Sin embargo, poco se conoce aún sobre la construcción de conocimiento matemático durante las discusiones en gran grupo. En Ferrer, Fortuny y Morera (2013) se evidenció la importancia de preparar de forma eficiente las discusiones en gran grupo para que fuesen matemáticamente productivas para los alumnos; se determinaron tres estilos locales de enseñanza, en función de la gestión realizada por diversos profesores de secundaria y los modos de interacción detectados en la discusión de un problema de semejanza. Además se reflexionó sobre la necesidad de estudiar con más detalle las situaciones de interacción que se habían producido en el trabajo en gran grupo al ser estas susceptibles de favorecer el progreso matemático de los estudiantes.

Los objetivos del presente estudio experimental, centrado en un caso de profesor y con contenidos curriculares de semejanza, son los siguientes: (a) identificar el modo de actuación docente en la gestión de una discusión matemática en gran grupo, (b) identificar el modo de interacción en la gestión de la sesión y (c) determinar oportunidades de aprendizaje derivadas de la actividad matemática. Mientras que los dos primeros objetivos están orientados primordialmente a la

Ferrer, M., Fortuny, J. M., Plana, N., Boukafri, K. (2014). Modos de actuación e interacción y generación de oportunidades de aprendizaje matemático. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 297-305). Salamanca: SEIEM.

construcción de conocimiento sobre la actividad docente del profesor, el tercer objetivo busca la construcción de conocimiento sobre cómo dicha actividad se relaciona con unas determinadas circunstancias para el desarrollo del aprendizaje de los alumnos.

MARCO TEÓRICO

Analizamos los episodios de una discusión en gran grupo a través de dos dimensiones: la instrumental, centrada en los artefactos y su uso en clase, y la discursiva, fundamentada en los modos de interacción que ayudan a entender el desarrollo genérico de los episodios y las características particulares que se producen en ellos.

Dimensiones instrumental y discursiva

En la dimensión instrumental consideramos seis tipos de orquestación: *explorar el artefacto*, *explicar a través del artefacto*, *enlazar artefactos*, *discutir el artefacto*, *descubrir a través del artefacto* y *experimentar el instrumento*. Los tres primeros tipos se centran en las acciones del profesor y los tres últimos en las de los alumnos. Todos ellos están inspirados en los tipos iniciales diseñados por Drijvers y otros (2010), aunque los hemos generalizado para situaciones de enseñanza en las que el diseño e implementación de las discusiones en gran grupo no contiene, necesariamente, un uso intensivo de artefactos tecnológicos. Para una descripción detallada de los seis tipos de orquestación, consultar Morera, Planas y Fortuny (2013).

Estructuramos la dimensión discursiva según los estadios de la discusión de un problema, los cuales se presentan como una secuencia de pautas de actuación que ilustran el proceso de gestionar una discusión en gran grupo hacia la resolución de un problema matemático (Morera, 2013). Los estadios se organizan según un desarrollo sistemático del proceso de resolución y se agrupan en fases: *situación del problema*, *presentación de una solución*, *estudio de estrategias para resolver o argumentar*, *estudio de casos particulares y extremos*, *contraste entre soluciones*, *conexiones con otras situaciones*, *generalización y conceptualización*, y *reflexión sobre progreso matemático*.

De acuerdo con las dimensiones instrumental y discursiva, interpretamos los episodios como sistemas de acciones que han tenido lugar en un estadio específico de la discusión en gran grupo de un problema, con dominio de un tipo específico de orquestación. Nuestro interés recae en los efectos relativos al aprendizaje de dichas acciones, que son susceptibles de fomentar conocimiento matemático procedimental básico y/o conceptual (Niss y Højgaard, 2011). Las acciones se vinculan al participante que las realiza, ya sea un estudiante o el profesor, con atención al papel que ejercen en la organización de la participación matemática durante la discusión.

Como una parte significativa de este informe se centra en la construcción de conocimiento sobre la actividad docente del profesor, adaptamos la clasificación de Schoenfeld (2011) para agrupar las acciones del profesor en tres tipos de acción: gestión, discusión y contenido matemático, según se refieran a la organización de la clase y de sus participantes; al desarrollo y discusión de las tareas matemáticas; o a los contenidos matemáticos de las tareas y a la disposición del profesor para escuchar a los alumnos y darse cuenta de aquellos aspectos que comprenden mejor o peor.

Oportunidades de aprendizaje matemático

Tomamos las oportunidades de aprendizaje matemático como las relaciones entre contenidos de conocimiento matemático, procedimentales y conceptuales, y acciones que potencialmente contribuyen a facilitar el aprendizaje de dichos contenidos en los alumnos (Ferrer, Fortuny y Morera, 2014). Estas oportunidades son identificables mediante el estudio de acciones generadas por diversas situaciones desarrolladas en los procesos de interacción de una clase de matemáticas. La interacción social producida en las discusiones en grupo, en términos de secuencias de acciones agrupadas, constituye un elemento decisivo en el logro del aprendizaje de las matemáticas (Yackel, Cobb y Wood, 1991).

Diversos tipos de acción y diversos tipos de orquestación pueden estar en el origen de la aparición y del aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje matemático. Por ello es razonable plantear el estudio de las oportunidades con base en el análisis de situaciones de enseñanza centradas en la gestión de discusiones en gran grupo; y que este análisis a su vez esté centrado en el análisis de las acciones con mayor peso en la delimitación del proceso de resolución de la tarea matemática.

METODOLOGÍA

Bajo el enfoque de los diseños experimentales, hemos elaborado una secuencia instructiva con problemas de semejanza dirigida a estudiantes de 14 y 15 años. La secuencia pretende que los alumnos establezcan relaciones entre ángulos, longitudes, perímetros y áreas de figuras semejantes de dos dimensiones y creen argumentos orientados a la resolución de problemas de congruencia y semejanza. Para este informe hemos seleccionado una de las tareas matemáticas y el caso de una profesora, Sara, con ocho años de experiencia docente en entornos socioculturales medio-altos.

Descripción de la tarea matemática

La tarea elegida (Fig. 1) inicia una trayectoria hipotética de aprendizaje (Simon, 1995) sobre el tema de semejanza que pretende contribuir a desarrollar en los estudiantes el concepto de proporcionalidad geométrica, relacionado con las nociones de forma y semejanza (Gairín y Oller, 2012). El planteamiento de la tarea induce a construir una transformación geométrica que convierta un triángulo original en otro con el doble de perímetro y lo traslade en el plano. Así se inicia a los estudiantes en el concepto de homotecia de razón positiva, como una transformación geométrica que combina una ampliación y una traslación.

¿Cómo transformarías el polígono 1 de la izquierda para conseguir el 2 de la derecha? ¿Y el polígono 2 para conseguir el 1? Explica ambas respuestas con detalle.

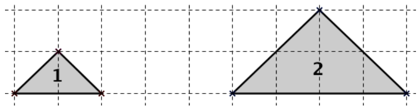


Figura 1: Enunciado de la tarea

Ciclo de trabajo en clase, datos y métodos

La dinámica de trabajo es colaborativa y comprende dos sesiones de clase. En la primera sesión los estudiantes trabajan por parejas, con lápiz y papel, y resuelven, entre otras, la tarea descrita. En la segunda sesión la profesora dirige una discusión en gran grupo, que gestiona según su criterio profesional. Luego se pide a los alumnos que reflexionen individualmente sobre la tarea y que incluyan en su protocolo escrito los elementos tratados en la discusión que no se hayan considerado en la resolución por parejas. Aunque sin dejar de lado las demás fases del ciclo de trabajo, en este informe nos centramos en la discusión en gran grupo.

El primer autor estuvo presente en las sesiones de clase, aunque no intervino directamente en su desarrollo. Por otra parte, la implementación de la discusión se pensó a modo de posibilitar el uso de artefactos, tanto tecnológicos (p.ej., GeoGebra) como tradicionales (p.ej., pizarra ordinaria), y la profesora utilizó ambos tipos de artefacto para gestionar la discusión en gran grupo.

Las intervenciones de todos los participantes en la discusión se registraron con tres videocámaras y se transcribieron para el análisis. Videos y transcripciones se analizaron con el fin de: (a) dividir las discusiones en grupo en episodios que mostraran orquestaciones y acciones significativas; (b) determinar modos de interacción entre participantes susceptibles de generar oportunidades de aprendizaje en los alumnos. Así se identificaron aspectos básicos de los modos de actuación docente y de interacción y se lograron detectar oportunidades de aprendizaje matemático.

EJEMPLIFICACIÓN DEL ANÁLISIS Y RESULTADOS

Entendemos la noción de episodio como el producto de una estrategia para fragmentar interacciones largas en unidades más manejables y con contenido suficiente desde la perspectiva de los objetivos marcados en la investigación. Para ejemplificar el modo de actuación de la profesora y su modo de interacción, en este informe mostramos un fragmento del segundo y tercer episodios de la discusión en grupo, los cuales caracterizamos según un tipo de orquestación (dimensión instrumental) y un estadio de la discusión del problema (dimensión discursiva).

Modo de actuación: equilibrio instrumental y completitud discursiva

En el siguiente fragmento del segundo episodio, la discusión se produce en base al protocolo escrito de resolución del Alumno 1 y a la información que proporcionan dos artefactos: pizarra ordinaria y GeoGebra. Por este motivo, el tipo de orquestación que asignamos es *conectar artefactos*. Como Sara invita a un estudiante a que exponga su solución de la tarea, obtenida colaborativamente con el Alumno 2, el estadio de la discusión es *presentación de una solución*.

Sara: ¿Tú [a Alumno 1] cómo lo has hecho?

Alumno 1: Nosotros lo que hicimos fue que, como la base [del triángulo pequeño] era 2 [cuadrados], la ampliamos el doble y mantuvimos los ángulos. Entonces, si prolongamos el doble todos los lados, en el punto de cruce se forma el nuevo triángulo.

Sara: De acuerdo. Por tanto, tú tenías un triángulo así [representa en la pizarra un triángulo parecido al original] y, luego, lo duplicaste.

Alumno 1: Sí, exacto.

Sara: Claro, pero entonces ¿dónde lo construisteis?

Alumno 2: Lo representamos al lado [del triángulo original].

Sara: Sí, de acuerdo, pero ¿qué órdenes debemos darle al GeoGebra, por ejemplo, para que nos lo transforme en este que está pintado aquí al lado [señala sobre la pantalla del proyector el triángulo grande de la derecha del enunciado]?

Alumno 3: Podemos decirle que duplique los lados.

Sara: De acuerdo, que duplique los lados y mantenga los ángulos. Por tanto, hacemos una ampliación de razón 2.

Alumno 3: Y nos lo situará encima a partir de un vértice, ¿verdad?

Sara: ¿Estás seguro? ¿Cómo puedes saberlo? ¡Pensad un momento! El problema está en que debemos escribir en el GeoGebra toda la información y aún no sabemos cómo decírselo.

En el tercer episodio Sara se apoya en el programa de geometría dinámica para que los alumnos descubran la necesidad de combinar una ampliación y una traslación, tal como se lee en la transcripción que sigue. Así, el tipo de orquestación que asignamos es *descubrir a través del artefacto*. Al examinar la estrategia a seguir con el programa para construir esta transformación, el estadio de la discusión es *estudio de estrategias para resolver o argumentar*.

Sara: El otro día, cuando resolvíais problemas de isometrías, ¿descubristeis alguna herramienta en el GeoGebra que penséis que podría construir un triángulo el doble de grande?

Alumno 3: Homotecia desde un punto por un factor de escala.

Sara: Sí, de acuerdo, la herramienta para representar homotecias. Ahora bien, ¿cuál es el factor de escala si queremos pasar de aquí [triángulo 1] a aquí [triángulo 2]?

Alumno 4: Dos.

Sara: ¿Pero respecto de qué punto le digo [al programa] que haga la construcción?

Alumno 4: Respecto de algún vértice. Por ejemplo, el del extremo de la izquierda.

Sara: ¿Quieres decir este vértice de aquí [señala sobre la pantalla del proyector el vértice situado más a la izquierda del triángulo 1]?

Alumno 4: Sí, exacto, este punto. [Sara realiza la construcción con el programa]

Sara: Ahora fijaos dónde lo ha situado. ¿Qué tendríamos que hacer para que [el nuevo triángulo] quedase sobre del azul [triángulo 2]?

Alumno 1: Un vector desde un vértice [del nuevo triángulo construido] hasta su homólogo.

Sara: De acuerdo. Pues hago un vector, por ejemplo, desde este vértice [el situado más arriba] hasta su homólogo [el correspondiente vértice del triángulo 2]. Ahora bien, fijaros que habéis necesitado dos transformaciones: primero habéis aplicado una ampliación y, después, una traslación.

De forma análoga caracterizamos los demás episodios de la discusión (de e_1 a e_{11} con el subíndice *i* para señalar distribución cronológica) y los representamos en una matriz de dos dimensiones (instrumental y discursiva) que sugiere un sistema coordenado (Fig. 2). La interpretación de la matriz indica un modo de actuación con equilibrio instrumental, ya que cinco de once episodios corresponden a los tres primeros tipos de orquestación (*explorar el artefacto*, *explicar a través del artefacto* y *conectar artefactos*) y los seis restantes a los tres últimos (*discutir el artefacto*, *descubrir a través del artefacto* y *experimentar el instrumento*). Hay, además, completitud discursiva porque la discusión en gran grupo transcurre por la mayoría de estadios y, además, se avanza con bastante orden de los momentos iniciales de la discusión (*situación del problema* y *presentación de una solución*) a los más avanzados (*conexiones con otras situaciones*).

Estadio de la discusión / *Tipo de orquestación*	Situación del problema	Presentación de una solución	Estudio de estrategias para resolver o argumentar	Estudio de casos particulares o extremos	Contraste entre soluciones	Conexiones con otras situaciones	Generalización y conceptualización	Reflexión sobre progreso matemático
Explorar el artefacto								
Explicar a través del artefacto	**e_1**		**e_8**			**e_6, e_{11}**		
Enlazar artefactos		**e_2**						
Discutir el artefacto								
Descubrir a través del artefacto			**e_3, e_4, e_9**		**e_{10}**			
Experimentar el instrumento	**e_7**	**e_5**						

Figura 2: Caracterización de los episodios de la discusión en grupo

Modo de interacción: participativo-bilateral

Al principio del segundo episodio Sara invita a la participación y el Alumno 1 comparte su solución con el grupo. El estudiante realiza una exposición de evidencia empírica y concluye que, de forma colaborativa con el Alumno 2, duplicaron todos los lados del triángulo original, aunque no precisa en qué posición lo situaron. La profesora valida la afirmación y el estudiante asiente. Entonces, Sara realiza una petición de explicación para que el alumno detalle la posición exacta donde representó la nueva figura. El Alumno 2 expone sin argumentar que hicieron la construcción al lado del triángulo original, sin proporcionar detalles. La profesora detecta que ambos estudiantes no han respondido a la pregunta del enunciado con exactitud, ya que solo han cambiado las dimensiones del triángulo original y no han realizado una traslación que lo lleve encima del nuevo polígono. Por este motivo, Sara se apoya en GeoGebra e introduce una petición de explicación, preguntando por las órdenes que deberían dar al software para conseguir la transformación deseada. El Alumno 3 expone sin argumentar que basta con dar la orden de duplicar todos los lados del triángulo y la profesora formaliza la afirmación matizando que se trata de una ampliación de razón 2. Este mismo alumno realiza una petición de aclaración dando a entender que el uso del programa de geometría dinámica lo situaría encima del original, partiendo de un vértice arbitrario. Finalmente, la profesora formula una nueva pregunta que invita a los estudiantes a la reflexión con el propósito de que se planteen con mayor detalle esta última cuestión.

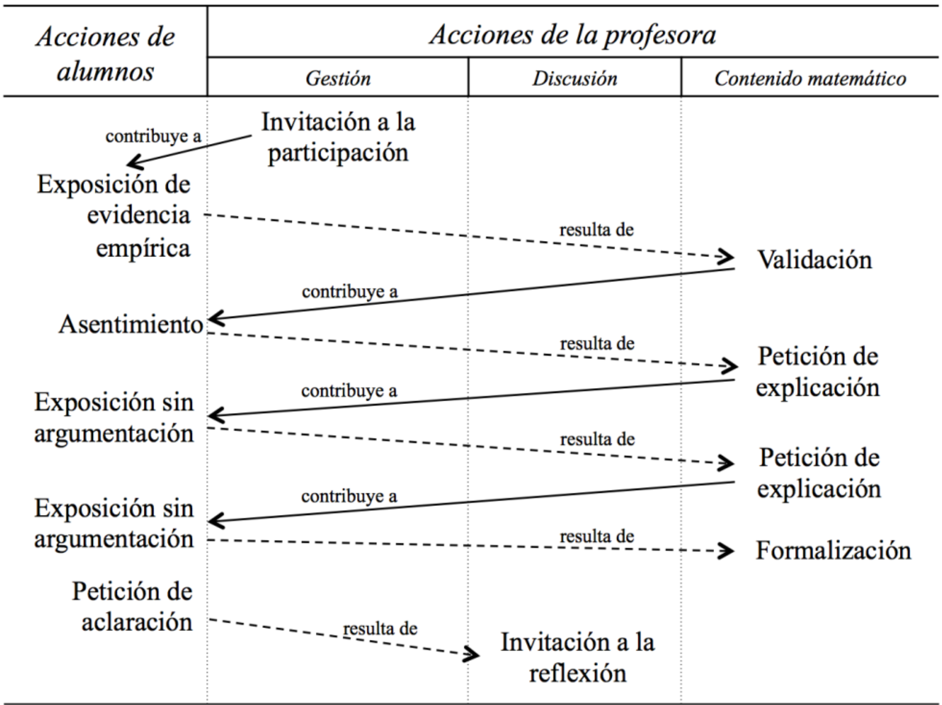


Figura 3: Representación de acciones del segundo episodio

La discusión en grupo sigue con el tercer episodio. Sara invita a la reflexión y pregunta a los alumnos por alguna herramienta del programa con la que construir un triángulo el doble de grande que el original. El Alumno 3 expone sin argumentar que podrían emplear la herramienta 'homotecia desde un punto por un factor de escala' y la profesora valida esta afirmación. Luego realiza una petición de comprobación en la que pregunta al grupo por el valor numérico del factor de escala. El Alumno 4 observa la evidencia empírica de que el factor debe ser 2 y Sara formula una petición de formalización para que indique el punto a partir del cual se debe aplicar la transformación. El alumno formaliza su exposición anterior e indica que es suficiente considerar un vértice cualquiera, por ejemplo el situado más a la izquierda del triángulo original. Sara, que quiere estar segura de la respuesta del alumno antes de recurrir a GeoGebra, introduce una nueva petición de comprobación para que el estudiante compruebe su afirmación. Entonces Sara aplica una homotecia de centro el vértice en cuestión y razón 2 e invita al grupo a la reflexión, preguntando por la posición del nuevo triángulo construido. El Alumno 1 establece una conjetura en la que menciona la necesidad de utilizar un vector para desplazar el nuevo triángulo hasta su posición correcta. Finalmente, la profesora valida la conjetura del estudiante y complementa la explicación.

Las Figuras 3 y 4 sugieren que el modo dominante de interacción promovido por Sara es participativo-bilateral. La secuencia de acciones presenta series encadenadas de intervenciones entre profesora y alumnos sin interacción directa entre estudiantes, tal como se observa no sólo en las transcripciones sino también en la distribución de las flechas utilizadas en ambas figuras. Este modo de interacción se reproduce en los demás episodios de la discusión en gran grupo. También observamos que la profesora procura que los alumnos descubran por sí mismos los hechos matemáticos, evita realizar explicaciones extensas y, en la medida de lo posible, gestiona la discusión a través de preguntas, elaborando su discurso con base en respuestas de alumnos.

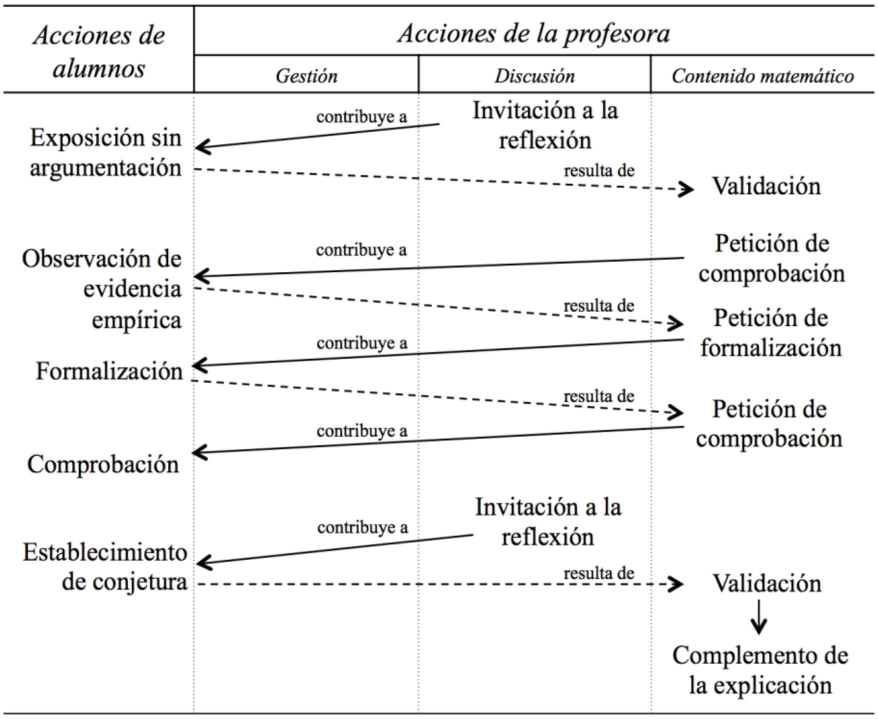


Figura 4: Representación de acciones del tercer episodio

Una oportunidad de aprendizaje conceptual

Del análisis de los episodios ejemplificados en este informe se desprenden diversas acciones de los alumnos relacionadas con la promoción de conocimiento procedimental en torno a procesos matemáticos y afirmaciones sobre hechos percibidos durante la discusión (p.ej., exposiciones sin argumentación). Hay también otras acciones orientadas a la promoción de conocimiento conceptual en torno a observaciones de evidencias empíricas y razonamientos de los alumnos sobre conceptos matemáticos (p.ej., noción de proporcionalidad).

Si atendemos a las acciones de la profesora, vemos que algunas llevan a peticiones de explicación y verificación de métodos matemáticos, por lo que su efecto en el aprendizaje puede fomentar conocimiento procedimental (p.ej., formalizaciones y comprobaciones). Estas acciones también pueden estar relacionadas con el trabajo de contenidos matemáticos específicos (p.ej., nociones de razón, proporción y homotecia). Su efecto en el aprendizaje puede generar conocimiento conceptual mediante la invitación a reflexionar sobre nociones matemáticas, o bien la complementación de explicaciones respecto de una cuestión concreta. En el párrafo siguiente ilustramos una oportunidad de aprendizaje conceptual generada, de acuerdo con nuestro análisis, a raíz de los modos de actuación y de interacción activados por la profesora en su gestión de la tarea.

La discusión en gran grupo origina la oportunidad conceptual que llamamos ‘reconocer la existencia de transformaciones geométricas que combinan una ampliación y una traslación’. Las peticiones de explicación realizadas por Sara en el segundo episodio propician que los alumnos observen la necesidad de introducir una transformación adicional a la ampliación de razón 2 que traslade la nueva figura construida. La cuestión se desarrolla en el tercer episodio, cuando Sara invita a la reflexión y pregunta por el tipo de transformación que se debería aplicar al nuevo triángulo ampliado para desplazarlo. Un alumno menciona la necesidad de emplear un vector, lo cual alude al tema de isometrías. La validación de la profesora y la breve explicación posterior abren la puerta a introducir las homotecias en clase, presentadas como las transformaciones geométricas que combinan una ampliación o reducción y una traslación, simetría o rotación.

CONCLUSIONES

Hemos presentado un análisis instrumental y discursivo de episodios de clase con el fin de identificar los modos dominantes de actuación e interacción de la profesora Sara cuando gestiona la discusión en gran grupo de una tarea de semejanza, que toma en consideración una trayectoria hipotética de aprendizaje en la actividad de enseñanza. Por otra parte, hemos ejemplificado una oportunidad de aprendizaje conceptual que se infiere del análisis de los modos de actuación e interacción. La gestión de la tarea a cargo de la profesora, cuya actuación docente conlleva equilibrio instrumental y completitud discursiva, y cuyo modo de interacción es participativo-bilateral, han permitido detectar la oportunidad de aprendizaje caracterizada en este informe.

Hay oportunidades de aprendizaje que en esta ocasión no han emergido, debido a la gestión específica de la profesora y al contenido curricular tratado. En particular, se ha relacionado la actuación docente y la interacción en clase con la detección de una oportunidad de aprendizaje, sin atender a todos los aspectos analizables derivados de la gestión de la enseñanza. Por ejemplo, el análisis de la actuación de Sara indica que puede no haber explotado todas las posibilidades de la tarea para reflexionar sobre los contenidos matemáticos, ni para profundizar en una práctica de argumentación que vaya más allá de la elaboración de conjeturas propias del tema de semejanza.

En futuros trabajos convendrá explorar si los modos de actuación e interacción ilustrados para el caso de Sara son específicos de la gestión de una tarea concreta, o bien aluden a un modo dominante que se sostiene en otras situaciones de enseñanza y aprendizaje. Además prevemos que se requerirá la elaboración de más casos de profesor para seguir investigando en la dirección de obtener evidencias sobre el aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje matemático. Esto trasciende las posibilidades de un único trabajo y precisa los esfuerzos de todo un equipo.

Agradecimientos

La investigación que se detalla en este informe está financiada por los Proyectos EDU2011-23240 y EDU2012-31464, y por las becas FPI BES-2012-053575 y BES-2013-063859, del Ministerio de Economía y Competitividad. Los autores son miembros del equipo GIPEAM - Grupo de Investigación en Práctica Educativa y Actividad Matemática, con referencia 2014 SGR 972 de la Generalitat de Catalunya.

Referencias

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H. y Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *75*, 213-234.

Ferrer, M., Fortuny, J. M. y Morera, L. (2013). Identificación de estilos de enseñanza comparando discusiones en gran grupo de un problema de semejanza. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 263-274). Bilbao: SEIEM.

Ferrer, M., Fortuny, J. M. y Morera, L. (2014). Efectos de la actuación docente en la generación de oportunidades de aprendizaje matemático. *Enseñanza de las Ciencias* (en prensa).

Gairín, J. M. y Oller, A. M. (2012). Análisis histórico sobre la enseñanza de la razón y la proporción. En A. Estepa y otros (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 249 - 259). Jaén: SEIEM.

Morera, L. (2013). *Contribución al estudio de la enseñanza y del aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología*. Trabajo de Tesis Doctoral. Bellaterra: UAB.

Morera, L., Planas, N. y Fortuny, J. M. (2013). Design and validation of a tool for the analysis of whole group discussions in the mathematics classroom. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research of Mathematics Education* (pp. 1506-1515). Antalya, Turquía: ERME.

Niss, M. A. y Højgaard, T. (Eds.) (2011). *Competencies and mathematical learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. Roskilde: Roskilde Universitet, IMFUFA.

Schoenfeld, A. H. (2011). *How we think. A theory of goal-oriented decision making and its educational applications*. Nueva York: Taylor & Francis.

Sfard, A. y Kieran, C. (2001). Cognition as communication: Rethinking learning-by-talking through multi-faceted analysis of students' mathematical interactions. *Mind, Culture, and Activity, 8*(1), 42-76.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(2), 114-145.

Yackel, E., Cobb, P. y Wood, T. (1991) Small-group interactions as a source of learning opportunities in second-grade mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(5), 390-408.

AVANCES EN LA CALIDAD DE LAS RESPUESTAS A PREGUNTAS DE PROBABILIDAD DESPUÉS DE UNA ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE CON TECNOLOGÍA

Advances in the quality of the answers to questions of probability after a learning activity with technology

Blanca Flores, Jaime I. García, Ernesto Sánchez

Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav – IPN, México

Resumen

En la presente comunicación, se describen y comparan las respuestas de estudiantes de secundaria (13-14 años) a tres preguntas de un cuestionario de probabilidad antes y después de haber tenido actividades de aprendizaje con apoyo de tecnología. Las preguntas analizadas se relacionan con las nociones de variable aleatoria, espacio muestral, frecuencias y distribución en sus formas más elementales. Se asume la hipótesis de que los recursos que proporciona la tecnología permiten que los estudiantes perciban que las unidades de análisis de la probabilidad son clases de experiencias y no experiencias aisladas. Con esta hipótesis se pueden explicar algunos de los avances que los estudiantes alcanzaron en las respuestas al post-test en relación con las dadas en el pre-test. Las actividades realizadas pueden proporcionar a los estudiantes referentes para los conceptos abstractos de probabilidad que estudiarán más adelante.

Palabras clave: Calidad de las repuestas, Enfoque al resultado aislado, Unidad de análisis.

Abstract

In the present communication the answers of middle school students (13-14 year olds) to a three questions of a probability questionnaire before and after have been learning activities with use of technology are described and compared. The analyzed questions are related to the notions of random variable, sample space, frequencies and distribution, in their most elementary forms. The assumption that has guided the research design is that the resources that provide the technology allow students to assume that the units of analysis of the probability are kinds of experiences and not isolated experiences. This hypothesis may explain some of the progress the students reached in the responses to the post-test in relation to that given in the pre-test. We conclude that the activities carried out provide to students referents for the abstract concepts of probability that they will study later.

Keywords: Quality of the answers, Outcome approach, Unit of Analysis.

INTRODUCCIÓN

Promover que las personas aprendan probabilidad es un objetivo curricular que en la mayoría de países se persigue desde la escuela primaria. Gal (2005) menciona que hay dos razones que justifican esa tendencia: la primera es que la probabilidad es parte de las matemáticas y la estadística, y éstas son de importancia en sí mismas en la sociedad moderna. La segunda, es que la probabilidad es esencial para ayudar a prepararse para la vida, pues en nuestro entorno ocurren tanto o más eventos aleatorios y fenómenos de azar que fenómenos deterministas. Infortunadamente en México, la enseñanza de la probabilidad se demora hasta lo que se llama nivel secundaria (11-14 años), lo que lleva a centrar la investigación en el desarrollo de la probabilidad en estas edades, partiendo de que los estudiantes no han tenido experiencias escolares sobre la materia en sus estudios primarios.

Flores, B., García, J. I., Sánchez, E. (2014). Avances en la calidad de las respuestas a preguntas de probabilidad después de una actividad de aprendizaje con tecnología. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 307-316). Salamanca: SEIEM.

Por otro lado, Jones y Thornton (2005) trazan un panorama de la investigación en probabilidad distinguiendo tres periodos 1) piagetiano; 2) post-piagetiano y 3) contemporáneo. En el primero, Piaget e Inhelder llegaron a poderosas conclusiones, en la perspectiva de apoyar su teoría epistemológica, sobre el razonamiento conceptual asociado a temas centrales de la probabilidad, en particular, marcando las características del desarrollo del pensamiento probabilista en las diferentes etapas. El segundo periodo comenzó con los trabajos de Fischbein (1975) y la influencia de los de Kahneman y Tversky (1972), incluyendo gran variedad de investigaciones, como las de Konold y del propio Jones. Finalmente, algunos rasgos del periodo contemporáneo son la vinculación de la investigación con el currículo, el estudio del aprendizaje en el contexto del salón de clase y el uso de recursos computacionales.

La investigación que da origen a la presente comunicación tiene los rasgos mencionados del periodo contemporáneo ya que se propone explorar el avance en la calidad de las respuestas de los estudiantes a preguntas que involucran algunas de las nociones de espacio muestral, variable aleatoria, frecuencias, probabilidad y distribución en su forma más elemental, como resultado de actividades en las que subyace la relación entre la probabilidad clásica y el enfoque frecuencial de la probabilidad. Esto en el contexto del desarrollo de una lección en el salón de clase, en la que los estudiantes realizaron tanto actividades físicas con una moneda, como simuladas con el apoyo de un software diseñado para el aprendizaje de la probabilidad (Probability Explorer, 1999-2005).

CONSIDERACIONES TEÓRICAS

¿Cuál es el objeto al que se refieren los enunciados de probabilidad? Por ejemplo, consideremos la afirmación "la probabilidad de obtener un 4 al lanzar un dado es 1/6". Desde un enfoque subjetivo de la probabilidad, el número 1/6 *es el grado de creencia con el que se espera que el evento ocurra;* esta medida permite tomar decisiones con relación a una sola experiencia, por ejemplo, apostar o no cierta cantidad. Desde un enfoque frecuencial, 1/6 es la razón del *número de veces en las que se espera que ocurra 4 entre el número de veces que se realiza el lanzamiento*; en este enfoque, el 1/6 es un enunciado que se refiere a una clase de experiencias y no sólo a una de ellas. El contraste sugiere distinguir dos maneras en la que los estudiantes pueden entender el objeto de la probabilidad; una en la que la unidad de análisis es una sola experiencia aleatoria, y otra en que es una clase de experiencias, a saber, muchas repeticiones de una experiencia bajo condiciones similares. La forma en que frecuentemente se exponen las situaciones de probabilidad puede inducir la creencia de que la unidad de análisis es una sola experiencia. Esta creencia puede explicar algunas confusiones y dificultades de los estudiantes.

Konold (1991, p. 146) se interesó en estudiar cómo la gente interpreta una pregunta referida a una probabilidad. De sus observaciones elaboró la noción que hemos traducido como "el enfoque al resultado aislado" (outcome approach). Para Konold, el objetivo principal de muchos estudiantes frente a determinados problemas de probabilidad, no es estimar o evaluar una probabilidad sino predecir exitosamente el resultado de un solo experimento. Muchas respuestas que se desvían de la norma se pueden explicar presuponiendo dicho enfoque; pero este enfoque también significa que la unidad de análisis para los estudiantes es una sola experiencia. Por otro lado, ciertas dificultades en concebir el espacio muestral se podrían también explicar de manera análoga. El espacio muestral es un concepto central en probabilidad y su descripción en situaciones simples debería ser una tarea rutinaria para los estudiantes. Sin embargo, cuando para ellos la unidad de análisis es una sola experiencia no le atribuyen el sentido esperado por el profesor a la expresión "conjunto de los posibles resultados", ya que en una sola experiencia sólo hay un resultado. Hablar de todos presupone un pensamiento hipotético que trasciende la consideración de una sola experiencia y fuerza a pensar en una clase de experiencias.

Una hipótesis que subyace en el diseño de la presente investigación, es que los recursos que proporciona la tecnología permiten que los estudiantes asuman que la unidad de análisis de la probabilidad es una clase de experiencias y no sólo una. Esto gracias a que con la tecnología pueden manipular y experimentar con conjuntos de experiencias aleatorias repetidas, lo que propicia que se observe que el objeto son clases de experiencias y pueden aprender a formular proposiciones referidas a tales clases, en particular, que las proposiciones de asignación de una probabilidad a un evento tienen como sujeto una clase. Otra hipótesis importante es que las actividades de aprendizaje significativo son aquellas en las cuales los estudiantes se esfuerzan por darle sentido a situaciones complejas y desconocidas y se enfrentan a problemas partiendo de sus intuiciones y conocimientos actuales, sin que estos lleven fácilmente a la solución del problema o al esclarecimiento de la situación. El papel del maestro consiste en administrar y monitorear tales actividades. En consonancia con las anteriores hipótesis, se ha elaborado una actividad de aprendizaje sobre probabilidad que involucra implícitamente las nociones de espacio muestral, variable aleatoria, frecuencia y distribución.

El objetivo de la presente comunicación es exponer resumidamente algunos resultados de una investigación cuyo objetivo *es describir* y comparar *las respuestas* de los estudiantes antes y después de haber tenido actividades de aprendizaje con uso de tecnología.

ANTECEDENTES

En lo siguiente se han elegido algunos estudios representativos de tres temas, cuyos conceptos subyacen en su forma más elemental en la actividad que realizaron los estudiantes, tales temas son, espacio muestral, enfoque frecuencial de probabilidad y distribución binomial.

La dificultad para determinar el espacio muestral de un experimento aleatorio puede ser debida a una falta de razonamiento combinatorio, como indican Batanero, Navarro-Pelayo y Godino (1997). Por su parte Shaughnessy (2003) destaca que los programas de instrucción deben implicar a los estudiantes en la determinación de los espacios muestrales en los experimentos aleatorios. Según Jones, Langrall y Money (2007), si se quiere mejorar la enseñanza, los profesores deben tener en cuenta las características del pensamiento de los estudiantes sobre este concepto: a) la dificultad de parte de los niños para realizar una lista de los resultados de un experimento aleatorio, aunque sea simple; b) falta de herramientas sistemáticas para generar los resultados en un experimento compuesto, y c) imposibilidad de relacionar el contenido del espacio muestral y la probabilidad de los resultados. En el presente estudio, los datos de pre-test confirman la afirmación del inciso a) de Jones et al. (2007), pero también referido a los valores de una variable aleatoria.

Ortiz, Mohamed y Serrano (2009), evaluaron el razonamiento probabilístico de profesores en formación administrándoles dos problemas que involucran la definición frecuencial de probabilidad. Encontraron que en el contexto de lanzamiento repetido de chinchetas predomina el sesgo de equiprobabilidad, así como la ausencia de la noción de independencia en sucesiones de sorteos de una moneda.

El estudio didáctico sobre los diferentes acercamientos a la probabilidad es un tema central en la investigación, en particular, el enfoque frecuencial ha suscitado nuevo interés en los estudios didácticos debido a la popularidad de los ordenadores. Aunque Jones, Langrall y Mooney (2007) señalan, con relación a los currículos de probabilidad, que es hasta el bachillerato que se estudia la conexión entre la probabilidad clásica y el enfoque frecuencial, varias de las investigaciones alrededor del enfoque frecuencial se realizan con sujetos que pertenecen a niveles más básicos (Stohl y Tarr, 2002, Stohl, Rider y Tarr, 2004, Ireland y Watson, 2009, Konold, et al., 2011). En estos estudios se ha promovido la conexión entre la “probabilidad experimental” y probabilidad teórica utilizando recursos tecnológicos como *Probability Explorer* y *TinkerPlots*. Stohl y Tarr (2002) observan a 23 alumnos del sexto grado (11–12 años), quienes trabajaron en parejas usando la herramienta computacional *Probability Explorer* para formular y evaluar inferencias durante un periodo de instrucción de 12 días. Stohl, Rider y Tarr (2004) realizaron un análisis enfocado en la conexión unidireccional entre la probabilidad experimental y la probabilidad teórica; observan cómo usan los estudiantes los datos empíricos para hacer inferencias sobre probabilidades desconocidas y cómo utilizan estas probabilidades para decidir sobre la equidad de un dado. Ireland y Watson (2009) se preguntan sobre las conexiones que los estudiantes de secundaria logran establecer entre la interpretación clásica y frecuencial de probabilidad después de trabajar con manipulables (moneadas, dados) y con el software *ThinkerPlots*. Con base en un continuo que va de lo experimental (concreto) a lo teórico (abstracto), donde los elementos que se destacan son los manipulables, el simulador y la ley de los grandes números, los autores buscan documentar el entendimiento de los alumnos sobre la probabilidad. Konold et al. (2011) realizaron un estudio del caso de una estudiante del octavo grado (13 años), quien mostró tener conocimiento firme de la definición clásica y de la definición frecuencial de probabilidad, sin lograr conectarlas, pues las considera excluyentes. También a nivel secundaria el estudio de Searrano y Ortiz (2009) ofrece resultados de una propuesta de enseñanza en situaciones de simulación de sucesiones de Bernoulli con el applet *Box Model*. Exploran la percepción de los estudiantes de las diferencias entre secuencias provenientes de modelos equiprobables y no equiporbables; informan de fuertes dificultades de los estudiantes para formular juicios sobre tales situaciones. Utilizan la técnica de pedir que los estudiantes propongan secuencias inventadas y luego las confronten con secuencias aleatorias; idea que es retomada en la investigación que aquí se reporta.

Otro tema relacionado con el presente estudio es el de los problemas binomiales, en este también es escasa la literatura de investigación. Van Dooren et al. (2003) exploran la presencia de la *ilusión de linealidad* y muestran que hay estudiantes de bachillerato que a pesar de haber llevado cursos de probabilidad, caen en este sesgo cuando se les plantea problemas binomiales, cuyo enunciado contiene datos que aparentan ser o son proporcionales. Abrahamson (2009a) realiza tres estudios de caso sobre el razonamiento de estudiantes frente a una situación simple de probabilidad hipergeométrica (la cual es casi-binomial). En Abrahamson (2009b y 2009c) se reporta una entrevista a profundidad con un niño de 11.5 años; éste realiza actividades con dispositivos de mediación cuya comprensión requiere diferente niveles de abstracción. En la entrevista se muestra el proceso de construcción de una distribución (casi) binomial que lleva a cabo el niño con ayuda de la mediación de diferentes artefactos. Abrahamson (2009b) se interesa en el papel de instrumentos de aprendizaje: un dispositivo físico (marbles scooper), tarjetas cuadradas divididas en 4 partes para representar las posiciones de las canicas en el dispositivo y su organización en un histograma. Llama la atención que su diseño que tiene el propósito de que los estudiantes distingan las secuencias THHH, HTHH, HHTH, HHHT en el evento “1T y 3H” no incluya los diagramas de árbol, los cuales son un instrumento de mediación accesible para el mismo fin.

METODOLOGÍA

El tipo de metodología que ha guiado la investigación es de tipo cualitativo y se centra en analizar las respuestas de los estudiantes a tres preguntas de un cuestionario. El análisis se lleva a cabo utilizando la taxonomía SOLO, la cual sugiere una técnica para hacerlo, consistente en observar la calidad de las respuestas definidas de acuerdo a su complejidad estructural.

Participantes. Sesenta y nueve estudiantes que cursaban el segundo grado de secundaria de un colegio particular de la Ciudad de México, cuyas edades se encontraban entre los 13 y 14 años. Estos estudiantes no habían recibido en este curso ningún tipo de enseñanza en los temas de probabilidad. Es probable que hayan estudiado un poco de probabilidad clásica, dado que se prescribe en los programas de cursos anteriores, pero no se recogió evidencia para afirmarlo. El titular del curso de matemáticas en el grupo dirigió el desarrollo de las actividades.

Instrumentos. Se elaboró un cuestionario-actividad con 13 preguntas todas relacionadas al problema de lanzar tres monedas y observar el número de veces que cae ‘águila’ (una expresión popular de una cara de las monedas mexicanas equivalente a ‘sello’ o ‘escudo’); en estas están implícitos uno o dos conceptos básicos de probabilidad, como variable aleatoria, espacio muestral, frecuencias, probabilidad y distribución. En esta comunicación, por falta de espacio, se analizan sólo las respuestas a 3 preguntas del cuestionario. Éstas se eligieron pues se presentan nociones de espacio muestral, variable aleatoria, frecuencias y distribución.

Pregunta 1: De aquí en adelante, llamaremos lanzamiento a la acción de lanzar tres monedas al aire al mismo tiempo (de preferencia de la misma denominación). Se realiza un lanzamiento y se observa "el número de águilas que ocurren" (llamado variable para esta encuesta). Enlista todos los posibles valores que puede tomar esta variable y relaciónalos con los resultados del experimento.

Pregunta 2: Ahora imagínate que se realizan 1000 lanzamientos y en cada uno de ellos se observa la variable "número de águilas que ocurren". En la siguiente tabla anota en la columna de la izquierda, los posibles valores de la variable y en la columna de la derecha, el número de veces (o frecuencia) que crees que ocurra cada valor:

Águilas					Total
Frecuencia					

Pregunta 3: Anota la probabilidad que asignas a la ocurrencia de cada valor de la variable

Águilas	0	1	2	3	Total
Probabilidad					

Intencionalidad de las preguntas. La primera pregunta se propone explorar si los estudiantes enuncian todos los valores de la variable y los asocian con la descripción de los resultados (AAA, AAS, etc.). En la segunda, se explora tanto la consideración los valores de la variable, como su percepción de la distribución y la variabilidad, la cual debe reflejarse en las secuencia de frecuencias absolutas propuestas. En la tercera, si logran abstraer una distribución teórica subyacente. Dado que no se enfatizó en ninguna definición especial de probabilidad, los estudiantes podían responder esta pregunta de manera subjetiva, basados en la noción clásica o en la frecuencial.

Probability Explorer (Stohl, 1999-2002) es un ambiente de aprendizaje en el que se generan datos de resultados de simulaciones de juegos de azar, como lanzamiento de monedas y dados, extracciones al azar de bolas contenidas en urnas y otros juegos populares. Los datos se representan en la pantalla de forma icónica, reproduciendo el aspecto que presentan esos juegos en la realidad. Simultáneamente, o después, los datos pueden ordenarse, apilarse y graficarse automáticamente, obteniéndose diversas representaciones de los conjuntos de resultados: tablas de datos agrupados, pictogramas, gráficas circulares. El software es ideal para jugar y experimentar, y aprender sobre el comportamiento de los resultados del azar, además de que ayuda con el cálculo de las frecuencias absolutas y relativas (Figura 1).

Procedimiento de ejecución. El estudio fue organizado en las siguientes cuatro fases: 1) presentación y solución del cuestionario (pre-test); 2) realización de lanzamientos, registro de resultados y observación de patrones en ellos, 3) exploración y simulación con el software, organización de resultados y observación de patrones en ellos, 4) otra aplicación del cuestionario inicial (post-test). Durante las fases 2 y 3 se hicieron actividades motivadas por las preguntas del cuestionario, y se les pedía que registraran resultados y respondieran preguntas formuladas en hojas de trabajo que el profesor les proporcionaba. El tiempo en que se realizaron todas las fases fue de siete horas de clase con una separación de un día hábil entre cada fase.

Procedimiento de análisis. El análisis consiste en clasificar las respuestas de los estudiantes de acuerdo a su calidad. Se utiliza el término calidad de las respuestas para diferenciar y clasificar las respuestas de acuerdo a las componentes que se indican en ella. Una respuesta puede no ser correcta y tener algo de calidad porque el resolutor intenta utilizar componentes pertinentes al problema; en cambio, algunas otras respuestas pueden acertar a una elección correcta, pero en la argumentación mostrar que no se llega a ella teniendo en cuenta lo aspectos pertinentes al problema.

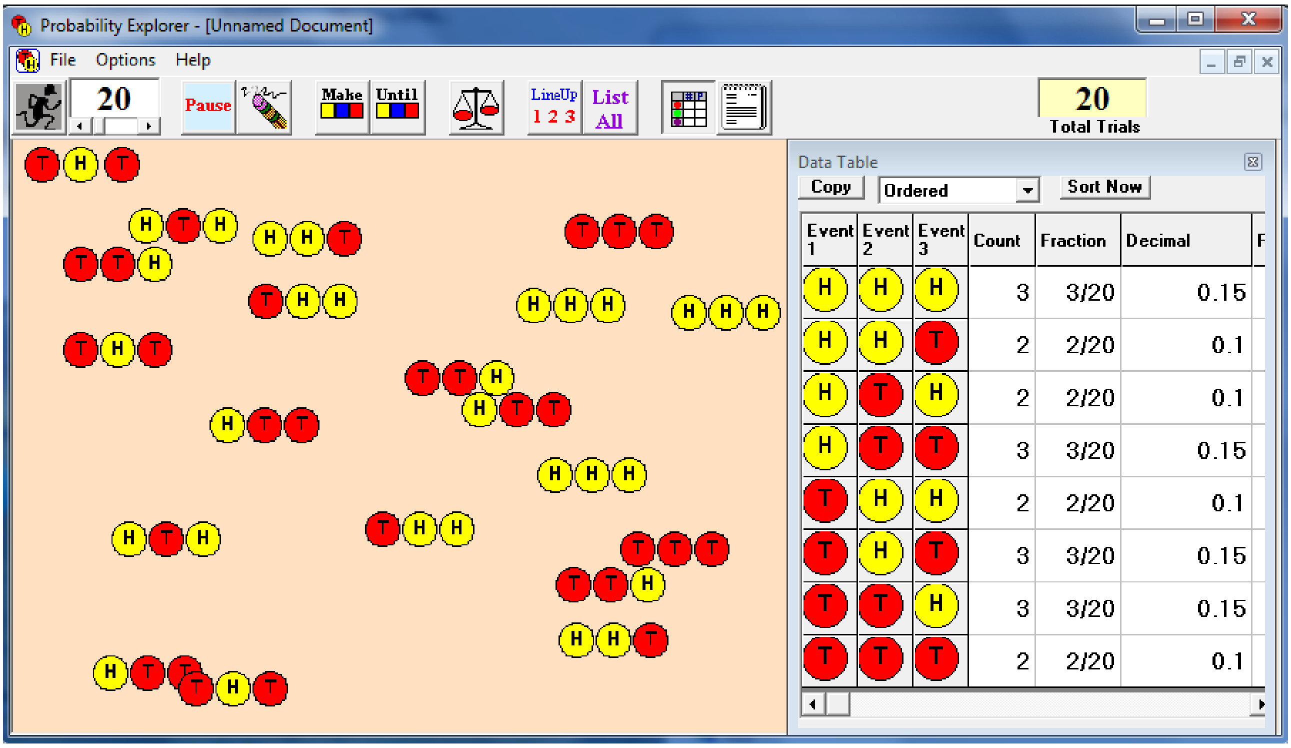


Figura 1. Representación de 20 lanzamientos de tres monedas, con tabla resumen.

La calidad se mide de acuerdo a su complejidad estructural siguiendo, en la medida de lo posible, la taxonomía SOLO (Biggs y Collis, 1991). Dada la tarea, se busca determinar 3 o 4 componentes que caracterizan la solución esperada (normativa). Se definen entonces los niveles de razonamiento: Preestructural, cuando la respuesta no se presenta ninguna componente; Uniestructural, cuando sólo aparece en la respuesta una componente; Multiestructural, cuando se utilizan dos o más componentes pero no se relacionan de manera conveniente; y Relacional, en el que se utilizan todas las componentes y se relacionan de manera adecuada. En seguida se presentan las componentes que se definieron para analizar cada pregunta

Para la pregunta 1 las componentes son: a) Representa al menos 1 valor del recorrido de la variable, b) Representa al menos algún resultado mediante una combinación de A^s y S^s de tamaño 3, y c) Considera el espacio muestral (EM) relacionado con el lanzamiento de tres monedas (8 posibles combinaciones: AAA, AAS, ASA, SAA, ASS, SAS, SSA y SSS.)

Para la pregunta 2, se proponen las siguientes: a) Se identifican los valores de la variable o los elementos del espacio muestral, b) Las frecuencias propuestas suman 1000 o 100%, c) Se propone que los valores de la variable 1 y 2 tienen mayor frecuencia (o 0 y 3 menor probabilidad), d) Las frecuencias varían levemente respecto a los valores teóricos de la distribución.

Para la pregunta 3: a) Da un número fraccionario o un número porcentual para cada valor de la variable, b) En las frecuencias que propone la suma es igual a 1, 100 o alguna potencia de 10, y c) La distribución dada es próxima o igual a la distribución teórica; es decir, que su gráfica tenga forma de campana. Un rasgo que distingue a un grupo reducido de respuestas son las que ofrecen exactamente las probabilidades teóricas.

RESULTADOS

Aunque es natural esperar que después de realizar actividades de aprendizaje haya un mejoramiento general en el desempeño al post-test respecto al pre-test, conviene señalar que se puede atribuir la mayor influencia del avance a la realización de las actividades que a las intervenciones del profesor, pues estas se redujeron a monitorear aquellas. En seguida se indica en qué aspectos hubo avances significativos y, si cabe, una posible explicación. En la tabla 1 se presentan los resultados del pre-test y del post-test, en términos de las frecuencias en que se clasificaron las respuestas en los niveles estructurales. En seguida se ofrecen algunas puntualizaciones sobre los datos que presenta la tabla.

En el caso de la pregunta 1 del pre-test, sobre Variable Aleatoria y Espacio Muestral, las respuestas se acumulan más en los niveles Uniestructural y Multiestructural. Las respuestas que se ubicaron en estos niveles, ofrecen indicios de que más o menos se entendió la pregunta, pero en el primer caso sólo dieron uno o dos valores del recorrido de la variable aleatoria y en el segundo, además describieron algún elemento del espacio muestral mediante una secuencias de caras de la moneda (por ejemplo: ASA). Una observación es que algunos estudiantes ignoraron que la pregunta se refería a los valores de la variable "el número de águilas" y prefirieron describir elementos del espacio mediante ternas de A^s y S^s, o asumieron que en la descripción de una terna ASS se indica también de manera obvia "el número de águilas".

Tabla 1. Frecuencias de respuestas de 3 preguntas del pre-test y post-test por nivel de razonamiento

Nivel	Pregunta 1 VA y EM: Frec. Pre	Pregunta 1 VA y EM: Frec. Post	Pregunta 2: Predicción: Frec. Pre.	Pregunta 2: Predicción: Frec. Post.	Pregunta 3: Distribución: Frec. Pre.	Pregunta 3: Distribución: Frec. Post.
Pre-estructural	9	2	11	0	19	1
Uni-estructural	38	16	48	5	21	16
Multi-estructural	19	21	9	19	24	10
Relacional	2	29	1	44	4	41
No contesta	1	0	0	0	1	0
Total	69	68	69	68	69	68

Respecto a la pregunta 2 del pre-test, la mayoría de respuestas se concentra en los niveles Preestructural y Uniestructural. En las respuestas que fueron clasificadas en el Preestructural, la columna del valor de la variable se llenó con datos equivocados, por ejemplo, en unos casos pusieron en cada fila los elementos que siguen: "A, S, A, S" (uno por fila); otros pusieron valores arbitrarios, por ejemplo, 32, 25, 18, 41". En cualquiera de los casos las frecuencias que sugirieron no tenían sentido desde la perspectiva del problema. Las clasificadas en uni-estructural, presentaron en esta columna ya los valores del recorrido de forma incompleta, por ejemplo "1, 2, 3", ya algunos elementos del espacio muestral, por ejemplo "SSS, SAS, SSA, AAA". Las frecuencias asentadas en las respuestas de este nivel también estuvieron alejadas de las esperadas, unas uniformes "333, 333, 333" o "250, 250, 250, 250" y otras arbitrarias "50, 30, 70" o "11%, 11%, 11%, 11%". La diferencia de estas respuestas con respecto a las pre-estructurales es que se enlistan valores de la variable o elementos del espacio muestral en la primera columna de la tabla del problema. Las respuestas en Multiestructural se distinguen por contener todos los valores de la variable o todos los elementos del espacio muestral y ofrecer frecuencias que suman 1000 o 100%. El caso clasificado en nivel relacional, escribe los elementos de la variable "3, 2, 1, 0" y las frecuencias "100, 400, 400, 100"; aunque estas frecuencias están alejadas de los valores esperados, se indica que se espera que haya mayor frecuencia de los valores 2 y 1, como efectivamente lo indica la distribución teórica. Las respuestas a la pregunta 3 se concentran en los tres primeros niveles de manera casi uniforme; las del nivel pre-estructural se caracterizan por enlistar números enteros y no probabilidades expresadas en fraccionarios, decimales o porcentajes, además los números propuestos no suman la unidad ni 100. Las respuestas en uni-estructural ofrecen números fraccionarios o enteros, pero su suma no es 1 o 100%, tampoco son proporcionales a los de la distribución teórica, ni se corresponden con los valores de más y menos probabilidad de la distribución. En el nivel Multiestructural se clasifican las respuestas cuyas frecuencias que, además de lo anterior, indican que los valores medios son más probables que los extremos, pero alejados de los valores teóricos. Finalmente en relacional se clasifican las respuestas que dan probabilidades aproximadas o iguales a las teóricas.

Los resultados del post-test indican una mejoría en la comprensión de los estudiantes ya que la clasificación de las respuestas indica un desplazamiento general, al menos, hacia un nivel de mayor complejidad estructural. Es lo esperado, pues con las actividades los estudiantes lograron entender mejor lo que se les pregunta, seguramente por haberse familiarizado más con el contexto, disminuyendo con esto el número de respuestas en el nivel pre-estructural. Mirando con más detenimiento se puede afirmar que globalmente el avance fue de más de un nivel. En la pregunta 1, se aprecia que 29 respuestas (43%) están en el nivel relacional, esto significa que los estudiantes correspondientes no tuvieron ninguna dificultad en identificar los elementos del recorrido de la variable y, aunque no en todos los casos, ofrecen indicios de que consideran el espacio muestral completo. En la pregunta 2, se observa que 41 respuestas (60%) se clasifican en relacional, es decir, enumeran bien los elementos de la variable aleatoria y asignan frecuencias razonables a cada valor. Finalmente en la pregunta 3, también 41 respuestas (60%) se ubican en relacional, esto significa que ofrecen una distribución cuyos valores suman la unidad o 100% y que atribuyen mayor probabilidad a los valores 1 y 2 y menor probabilidad a los valores 0 y 3.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En las actividades que realizaron los estudiantes no se les enseñaban los conceptos ni se les decía como responder a las preguntas, sino sólo se les daban indicaciones de cómo llevar a cabo acciones con los dispositivos físico y con el software y, con lo observado, se les pedía que respondieran las preguntas que estaban formuladas en sus hojas de trabajo.

Las frecuencias de respuestas por niveles para la pregunta 1, indican que con la realización de las actividades, los estudiantes fueron capaces de interpretar la pregunta de la manera deseada y buena parte de ellos ofrecieron respuestas en la que desplegaron el recorrido de la variable y el espacio muestral. Con las acciones realizadas con el software, se manejaron en la práctica los elementos del espacio muestral y de los elementos observados, obtuvieron los valores de la variable. En particular, con la experiencia, percibieron naturalmente que la unidad de análisis de la probabilidad no es sólo una experiencia, sino una familia de experiencias. Con esto, ante la pregunta 1, varios de los estudiantes que en el pre-test habían respondido en el sentido del sesgo del resultado aislado, en el post-test modificaron sus respuestas y propusieron varios o todos los elementos de la variable aleatoria.

Con relación a la pregunta 2, también hubo desplazamientos de las frecuencias concentradas en el nivel pre-estructural y uni-estructural en el pre-test, a su concentración en los niveles multi-estructural y relacional en el post-test. El mejoramiento en la descripción de los valores de la variable aleatoria y del espacio muestral, influyó para este aumento, ya que en la pregunta 2 se requería escribir los valores de la variable en la primera columna de la tabla; conviene mencionar que en el pre-test muchos estudiantes fueron incapaces de llenarla de la manera esperada. Hubo también varias respuestas en las que además se ofrecieron frecuencias razonables, pues el nivel relacional en el post-test contiene 60% de las respuestas. Nuevamente es de suponer que la actividad con el software permitió que los estudiantes se dieran cuenta de que hay un patrón que gobierna las frecuencias empíricas (simuladas), a saber, que los valores 0 y 3 suelen tener menos frecuencia que los valores 1 y 2. Conviene destacar que la actividad y la misma pregunta propician que los estudiantes piensen en familias de experimentos y no en experimentos individuales, de esta manera ya no ofrecen respuestas teniendo en mente un solo experimento.

Las frecuencias de respuestas de la pregunta 3 también muestran una mejoría del pre-test al post-test. Al responder la pregunta en el post-test la mayoría propuso distribuciones que cumplen las condiciones de ser números decimales o porcentuales y de sumar 1 o 100%; además, las 41 respuestas que se ubicaron en el nivel relacional se acercan a las probabilidades teóricas, es decir, asignan mayor probabilidad al 1 y 2 y menos al 0 y 3. En muchos casos se puede deducir que la respuesta obtenida fue resultado de una aplicación informal del enfoque frecuencial de probabilidad y en dos casos, del resultado del análisis del espacio muestral y la aplicación de la definición clásica. Estas respuestas informales de los estudiantes, se basan en ideas que ellos generaron durante su actividad y no provienen de la aplicación de las definiciones, pues estas no se introdujeron ni se explicaron durante la intervención. Es de esperar que el significado que atribuyen a la distribución sea la de una estructura subyacente en los experimentos, que representa, de manera aproximada, los patrones que se presentan en la práctica. No es posible afirmar esto con certeza, pero el sólo hecho de proponer una distribución con las características señaladas ya es indicio de que se comienza a entender este objeto asociado a las acciones realizadas y no como una receta dada por una definición.

Concluimos que las actividades realizadas han proporcionado referentes con cierto nivel de concreción para los conceptos abstractos básicos de espacio muestral, variable aleatoria, frecuencia, probabilidad y distribución. El manejo de estas nociones en la actividad y su uso para responder las preguntas del post-test ya no está basado totalmente en su conocimiento intuitivo, sino que reflejan que se asocian a acciones realizadas y abstracciones de los resultados de esas acciones. En particular, la aparentemente sencilla tarea de describir los valores de la variable aleatoria es muy difícil, pues la formulación de la pregunta le sugiere a los estudiantes significados diferentes al pretendido, como el de pensar en el resultado de una sola experiencia. En cambio, en el post-test los estudiantes ya tienen más claro que las preguntas que se le formulan se refieren a familias de experimentos Por ejemplo, cabe destacar que en el post-test, las respuestas relacionales a la pregunta 3, proponen probabilidades que no son la traducción a fracciones o decimales de las frecuencias propuestas en el problema 2, algunos dieron la distribución teórica y otros una aproximación a ésta, probablemente porque con la simulación percibieron la variabilidad de las secuencias. El razonamiento informal que desarrollan durante las actividades y que aplican en la respuesta del post-test los coloca en una mejor posición que los que no realizan tales actividades para el estudio formal de los conceptos probabilistas mencionados.

REFERENCIAS

Abrahamson, D. (2009a). Embodied design: constructing means for constructing meaning. *Educational Studies in Mathematics*, 70(1), pp. 27-47.

Abrahamson, D. (2009b). Orchestrating semiotic leaps from tacit to cultural quantitative reasoning –the case of anticipating experimental outcomes of a cuasi-binomial random generator. *Cognition and Instruction*, 27(3), pp. 175-224.

Abrahamson, D. (2009c). A students synthesis of tacita and mathematical knowledge as a researcher's lens on bridging learning theory. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 4(3), pp.195-226. [En línea: www.iejme.com]

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V. & Godino, J. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*, *32*, 181-199; 1997

Biggs, J.B. y Collis, K.F. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligence behavior. En H.A. Rowe (Ed.), *Intelligence: Reconceptualization and measurement*, pp. 57-76. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* Dordrecht: Reidel

Gal. I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G.A. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School. Challenges for teaching and learning (39-63).* New York: Springer.

Ireland, S. y Watson, J. (2009). Building a connection between experimental and theoretical aspects of probability. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *4*(3), 339–370.

Jones, G.A., Langrall, C.W. y Mooney, E.S. (2007). Research in probability. En F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, pp. 909-955. Charlotte, NC, USA: Information Age-NCTM.

Jones, G.A. y Thornton (2005). An overview of research into the teaching and learning of probability. En G.A. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School. Challenges for Teaching and Learning (65-92).* New York: Springer.

Kahneman, D. y Tversky, A. (1972). Subjetive probability: A judgment of representativeness. *Cognitive Psichology,* 3(3), 430-454.

Konold, C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. En E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education,* 139-156. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Konold, C., Madden, S., Pollatsek, A., Pfannkuch, M., Wild, C., Ziedins, I., Finzer, W., Horton, N. J. y Kazak, S. (2011). Conceptual challenges in coordinating theoretical and data-centered estimates of probability. *Mathematical Thinking and Learning*, 13, 68–86.

Ortiz, J.J., Mohamed, N., Serrano, L. (2009). Probabilidad frecuencial en profesores en formación. En *Memorias del XIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.* Santander.

Serrano, L., Ortiz de Haro, J.J. (2009). Equiprobabilidad versus no equiprobabilidad en la enseñanza de la probabilidad. En *Memorias del XIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.* Santander.

Stohl, H. (1999-2005). *Probability Explorer.* http://www.probexplorer.com/

Stohl, H., Rider, R. y Tarr, J. (2004). *Making connections between empirical and theoretical probability: Students' generation and analysis of data in a technology environment*. Recuperado en Junio 5, 2013, de http://www.probexplorer.com/Articles/LeeRiderTarrConnectE&T.pdf

Sthol, H. y Tarr, J. E. (2002). Developing notions of inference using probability simulation tools. *Journal of Mathematical Behavior*, 21, 319–337.

Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2003). The illusion of linearity: expanding the evidence towards probabilistic reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 53 (2), pp. 113-138.

UNIDADES ELEMENTALES EN PROBLEMAS DE LUGAR GEOMÉTRICO EN LOS CUADROS GEOMÉTRICO Y ALGEBRAICO

Basic unit of meaning in locus problems in geometric and algebraic frameset

Cecilia Gaita, Tomás Ortega

Universidad de Valladolid

Resumen

Este artículo forma parte de una investigación más amplia que pretende brindar medios para justificar la enseñanza de la geometría analítica a partir de las limitaciones que presentan las técnicas de construcción con regla y compás al abordar diversas situaciones en contextos geométricos. Con el objetivo de establecer si existe equivalencia entre procedimientos básicos empleados en tareas sobre lugar geométrico en los marcos geométrico y algebraico, se definen unidades elementales de información. Con los elementos teóricos descritos se identifican aquellos contextos en los que las actividades resultarán más complejas para los estudiantes. Finalmente, se darán recomendaciones para la enseñanza de la geometría analítica.

Palabras clave: *geometría analítica, geometría sintética, lugar geométrico, juego de marcos, unidad elemental*.

Abstract

This article is part of a broader research aims to provide means to justify the teaching of analytic geometry from the limitations of the techniques of construction with ruler and compass to address various situations in geometric contexts. In order to establish whether there is equivalence between basic procedures used in locus tasks on geometric and algebraic in frames, elementary information units are defined. With the theoretical elements described contexts in which activities become more complex for students are identified. We will give suggestions for teaching analytic geometry.

Keywords: *analytic geometry, synthetic geometry, locus problems, frameset, elementary unit.*

INTRODUCCIÓN

La organización actual de la geometría analítica en los textos didácticos empleados en el primer año de universidad de estudiantes de carreras de ingeniería y arquitectura responde básicamente a dos orientaciones. Una asociada al álgebra lineal, cuyo origen se encuentra en la concepción moderna de geometría en función del conjunto de invariantes de grupos que operan sobre diversos conjuntos, idea desarrollada por Klein (Bouvier, 1984, p. 373), presente todavía en los textos (Alsina y Trillas, 1992), y otra caracterizada por abordar la geometría analítica como un requisito para el tema de funciones, concepto fundamental del cálculo diferencial e integral, y que es característica de diversos libros de cálculo (Larson, Hostetler y Edwards, 1995; Purcell y Varberg, 2007; Stewart, Redlin y Watson, 2007) en donde se enfatiza en el estudio de propiedades de curvas a partir de sus expresiones algebraicas .

Por otro lado, en relación a la razón de ser de la geometría analítica, luego de una revisión de textos didácticos sobre este tópico se ha encontrado que su introducción se realiza sin una problematización previa; en particular, se observa que no se establecen conexiones explícitas entre la geometría analítica y la geometría de las construcciones con regla y compás, denominada geometría sintética. Sin embargo, es posible relacionar la geometría sintética y la analítica, tal como se muestra en el trabajo de Descartes cuya motivación original estuvo en resolver problemas de contextos sintéticos, siendo su aporte fundamental el empleo del álgebra como herramienta

Gaita, C., Ortega, T. (2014). Unidades elementales en problemas de lugar geométrico en los cuadros geométrico y algebraico. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 317-326). Salamanca: SEIEM.

alternativa a la que brindan las construcciones exactas con regla y compás, (Descartes 1954). Por ello, como señala Sessa (2005), queda pendiente entender cómo se puede poner en juego en la enseñanza de la geometría, la relación entre una perspectiva sintética y otra cartesiana.

Teniendo en cuenta esos antecedentes, se propone un trabajo de investigación más amplio en el que se muestre que es posible encontrar situaciones que justifiquen el paso de la geometría sintética a la geometría analítica, adaptando algunos problemas sobre construcciones exactas de modo que puedan ser abordados inicialmente desde el marco geométrico y luego, con una transformación adecuada del enunciado, puedan serlo sólo desde el marco algebraico. En particular, en este documento se busca establecer una relación entre procedimientos analíticos y sintéticos a través de unidades elementales de información. Se considera positiva la búsqueda de dichas relaciones ya que el uso de distintos elementos y procedimientos favorecerán los aprendizajes matemáticos.

MARCO TEÓRICO

Para analizar la interacción de los estudiantes con las situaciones propuestas en este trabajo se considerará la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS), Duval (2006a). Dicha teoría se basa en que para comprender lo que ocurre en el aprendizaje de las matemáticas se requiere de investigaciones sobre los procesos cognitivos propios del pensamiento matemático. (p.144).

Según Duval (2006b), el principal problema de la comprensión en matemáticas, radica en el conflicto cognitivo que se genera en todos los niveles curriculares cuando se plantea la pregunta: ¿Cómo podrá distinguir el estudiante el objeto representado de la representación semiótica empleada si no puede acceder al objeto matemático sin la representación semiótica? Ante esta interrogante, la TRRS postula que en la actividad matemática se deben usar necesariamente representaciones semióticas, ya que los objetos de conocimiento matemático no son accesibles físicamente. Se entiende por representación semiótica a una representación constituida por el empleo de signos, ya sea una figura geométrica, un enunciado natural, una fórmula algebraica, una gráfica, etc. Así, una representación semiótica está subordinada a una representación mental.

Por otro lado, la búsqueda de relaciones entre procedimientos de solución de un mismo problema, desde distintos contextos, ha sido valorado positivamente por Douady (1984), quien señala que para que las concepciones de los estudiantes evolucionen, se hace necesario un juego de marcos. Douady, citada en Balacheff (2005, p.187), define lo que entiende por marco de la siguiente manera:

> Un marco se constituye de objetos de una rama de las matemáticas, de las relaciones entre esos objetos, de las formulaciones eventualmente diferentes y de las imágenes mentales asociadas a esos objetos y a esas relaciones. Esas imágenes juegan un rol esencial en el funcionamiento como herramientas de los objetos del marco. Dos marcos pueden contener los mismos objetos y diferir por las imágenes mentales y la problemática desarrollada.

Se presenta como uno de los postulados fundamentales de esta teoría el que todo concepto matemático está asociado a varios marcos y que dichos marcos se pueden relacionar a través de sistemas de representación. Así, se plantea escoger unos problemas para introducir y suscitar el funcionamiento de los conocimientos que deben intervenir en al menos dos marcos.

De otro lado, se afirma que marcos diferentes no coinciden ya que no movilizan ni las mismas propiedades ni los mismos teoremas y, además, porque existen diferencias entre el valor ostensivo de los sistemas de representación que producen, (Balacheff, 2005, p.185).

Se propone también privilegiar aquellos problemas en los cuales el error en la correspondencia genere desequilibrios que deban de ser compensados, (Douady, 1984, p.18). Esta caracterización hace del juego de marcos un método efectivo para la construcción de situaciones pertinentes que favorezcan el aprendizaje.

Así, mientras Douady propone el juego de marcos como medio para hacer evolucionar las concepciones de los estudiantes en matemáticas, Balacheff ubica a los registros como el puente que permite establecer relaciones entre marco y concepción.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Considerando que la evolución histórica de la geometría analítica está muy relacionada con la noción de lugar geométrico, en el presente trabajo de investigación se propone identificar problemas que involucren este tema desde los marcos geométrico y algebraico, siendo las áreas del conocimiento matemático a los que este conocimiento está asociado la geometría sintética y la geometría analítica, respectivamente. Y, dado que la caracterización de un marco pasa necesariamente por la de al menos un sistema de representación semiótico, se debe tener en cuenta que el desarrollo de problemas de geometría sintética requiere del empleo de representaciones figurales realizadas con regla y compás, mientras que en el marco algebraico las representaciones que se emplean para resolver los problemas son fundamentalmente las representaciones algebraicas y las gráficas.

En este trabajo interesa convertir el enunciado de un problema dado en el contexto analítico a un problema equivalente en el contexto sintético, y viceversa, así como comparar los procedimientos de solución seguidos en ambos contextos, con la finalidad de identificar cual es más complejo. A partir de ese análisis, se buscará que los estudiantes establezcan relaciones entre las distintas representaciones empleadas y entre los resultados obtenidos en uno y otro contexto, actividad considerada como no trivial.

PASOS A SEGUIR

Para comprender la complejidad cognitiva de los procedimientos involucrados en las tareas propuestas en geometría sintética y en geometría analítica, se plantea identificar el tipo de transformación que se lleva a cabo en cada paso que se sigue en la solución, según que se trate de un tratamiento o una conversión. Luego, considerando la cantidad de pasos que la solución de un determinado problema requiera, así como la naturaleza de los mismos, se podrán prever los comportamientos de los estudiantes cuando se enfrenten a dichas tareas.

Para describir los procedimientos que se llevan a cabo al abordar los problemas se definen unidades elementales de información, en adelante unidades elementales (UE). Se establecen asociaciones entre unidades elementales en los marcos geométrico y algebraico, de manera similar a como hizo Puerta (2009) al relacionar unidades elementales en el marco algebraico y en el marco gráfico para problemas de interpolación y extrapolación. Las unidades elementales están asociadas a sistemas de representación semiótica distintos, siendo en este caso los principales sistemas de representación el figural y el algebraico.

En la tabla 1 se presentan las unidades elementales consideradas en el cuadro geométrico y sus respectivas unidades elementales en el cuadro algebraico.

Tabla 1. Asociación de unidades elementales del cuadro lugar geométrico correspondiente a los cuadros geométrico y algebraico

Cuadro geométrico	Cuadro algebraico
Construir un punto sobre un objeto construido previamente	Asignar coordenadas a un punto que se encuentra sobre un objeto cuya ecuación se conoce/Resolver una ecuación lineal o cuadrática con una incógnita
Construir una recta conociendo dos puntos de paso/ Construir una recta conociendo un punto de paso y una dirección	Determinar la ecuación de una recta conociendo las coordenadas de dos puntos de paso/ Determinar la ecuación de una recta conociendo las coordenadas de un punto de paso y su pendiente.

Construir una circunferencia o un arco con centro y radio conocido.	Determinar la ecuación de una circunferencia a partir de las coordenadas de su centro y el valor de su radio/ Determinar una expresión cuadrática en dos variables para referirse a una distancia entre puntos.
Construir puntos sobre un objeto dado.	Determinar una ecuación que relacione las coordenadas de un punto con los datos dados/Determinar las coordenadas de un punto en términos del menor número de variables
Construir puntos en la intersección de dos objetos construidos previamente.	Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales, o dos ecuaciones cuadráticas o una ecuación lineal y otra cuadrática, con dos incógnitas.

Además, a algunas unidades elementales se les podrá asociar transformaciones en un mismo registro, como por ejemplo en la actividad *Resolver el siguiente sistema formado por las ecuaciones* $x^2+y^2=16$, y $(x-4)^2+(y-4)^2=0$, donde se deberán realizar transformaciones en el registro algebraico, obteniendo expresiones equivalentes, hasta obtener las soluciones $x=4$, $y=0$; $x=0$, $y=4$. Algunas transformaciones algebraicas resultarán triviales, como por ejemplo la que consisten en transponer términos en la ecuación $3x+4y=8x-2$ para obtener una ecuación de la forma $-5x+4y+2=0$. Sin embargo, habrá otras que no lo serán tanto, como por ejemplo aquella en las que se deba transformar la expresión $(x-5)^2+(y-6-\sqrt{3})^2+(x-3)^2+(y-6+\sqrt{3})^2=16$ en esta otra $(x-4)^2+(y-6)^2=4$ a partir de la cual se obtiene nueva información sobre la curva. Para llevar a cabo estas transformaciones se requieren nociones como ecuación equivalente, productos notables, propiedades de los números reales, entre otras.

A otros procedimientos se les asociará conversiones; tal es el caso de problemas cuyos enunciados haya sido dados en lengua natural y deban transformarse en construcciones con regla y compás o en un sistema de ecuaciones. En esos casos se habrá producido una conversión del registro lengua natural al registro figural o simbólico, respectivamente.

Para simplificar la descripción de las unidades elementales en problemas cuya solución involucra varios pasos, se hará referencia a las unidades elementales que fueron descritas en los procedimientos básicos de modo que éstos ya no se tendrán que describir nuevamente.

EJEMPLOS

A continuación se presentan dos ejemplos correspondientes a problemas que pueden ser enunciados tanto en el marco geométrico como en el algebraico.

Ejemplo 1: Determinación de la recta tangente

Según la solución propuesta en la tabla 2, es posible establecer relaciones entre las unidades elementales en los marcos geométrico y algebraico; como podrá observarse, las técnicas de solución en los contextos sintético y analítico resultarán igualmente eficientes.

Tabla 2. Unidades elementales presentes en la determinación de la recta tangente

Unidades elementales en el marco geométrico	**Unidades elementales en el marco algebraico**
Enunciado: Construya la recta que pasa por el punto A y que es tangente a la circunferencia C dada inicialmente, considerando que A$\notin$C.	Enunciado: Determine la ecuación de la recta que contiene al punto *A* y es tangente a la circunferencia *C* cuya ecuación es dato, considerando que $A\notin C$.

Solución propuesta: Construir el segmento que une el centro *C* y el punto exterior *A*. **[UE: Construir un segmento conociendo sus extremos].** Construir el punto medio de dicho segmento, construyendo primero la mediatriz del segmento y luego la intersección de ésta y el segmento. **[UE: Las que corresponden a la construcción de la mediatriz].** Construir el punto de intersección de la mediatriz y el segmento *AC*. **[UE: Construir puntos en la intersección de dos objetos]** Construir la circunferencia con centro en el punto medio y diámetro la longitud del segmento construido en el paso anterior. **[UE: Construir una circunferencia conociendo su centro y su radio].** Identificar los puntos de tangencia en la intersección de la circunferencia construida y la circunferencia dada inicialmente. **[UE: Construir puntos en la intersección de dos objetos dados].** Para construir las dos rectas tangentes que pasan por *A* bastará con construir rectas que pasen por *A* y por cada punto de tangencia. **[UE: Construir una recta que pasa por dos puntos que son dato].(2 veces)**	**Solución propuesta:** Determinar las coordenadas del punto medio del segmento *CA* que une el centro *C* de la circunferencia dada con el punto exterior *A*. **[UE: Las que corresponden a la determinación del punto medio]** Calcular la distancia entre los puntos *C* y *A*. Determinar la ecuación de la circunferencia ***C***’ cuyo centro es el punto medio de *CA* y cuyo radio es 1/2 d(*C*, *A*). **[UE: Determinar la ecuación de una circunferencia a partir de las coordenadas de su centro y el valor de su radio.]** Resolver el sistema de ecuaciones formado por la ecuación de la circunferencia dada inicialmente y la ecuación de ***C***’. **[UE: Resolver un sistema de dos ecuaciones cuadráticas, con dos incógnitas.]** Cada solución obtenida es uno de los puntos de tangencia de las rectas tangentes trazadas desde *A* a la circunferencia ***C***. Esto implica interpretar las dos soluciones en términos gráficos. Para cada uno de los puntos de tangencia se determina la ecuación de la recta que pasa por ellos y por *A*. **[UE: Determinar la ecuación de una recta conociendo las coordenadas de dos puntos de paso]. (2 veces)**

Como se ha mostrado en la tabla 2, es posible asociar unidades elementales a cada paso del procedimiento sintético en el procedimiento analítico; cuando se presenten estos casos, se dirá que los procedimientos empleados en los cuadros geométrico y algebraico son equivalentes.

Sin embargo, en los textos de geometría analítica suelen presentarse procedimientos distintos al descrito para determinar rectas tangentes a una circunferencia cuando éstas son trazadas desde un punto exterior, ocurriendo que muchas veces esos procedimientos se centran en cálculos algebraicos que carecen de sentido para los estudiantes. Como ejemplo de una solución que no tiene un equivalente sintético y que suele aparecer en contextos de geometría analítica es la siguiente:

Si m denota la pendiente de la recta tangente buscada, considerando que su ecuación tiene la forma $y-y_0=m(x-x_0)$, donde (x_0,y_0) son las coordenadas del punto *A* dado inicialmente, se tendrá que el punto de tangencia será la solución del siguiente sistema de ecuaciones, formado por la ecuación de la recta tangente y de la circunferencia: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ y $y-y_0=m(x-x_0)$.

De este sistema se puede obtener una ecuación cuadrática, por ejemplo, en la variable x; como la recta debe ser tangente a la circunferencia, este sistema debe tener sólo una solución. Notar que este paso requiere establecer una relación entre la condición geométrica *se cortan sólo en un punto* y *la* *solución del sistema es única*. En términos de transformaciones, esta actividad corresponderá a una conversión del registro figural al registro simbólico. Además, esa condición debe convertirse *en el discriminante es cero* por la naturaleza cuadrática de la ecuación. Luego de realizar transformaciones en el contexto simbólico, se deben obtener dos valores para *m*, los que deben interpretarse en términos de las dos rectas tangentes que pueden trazarse desde el punto *A*.

Como puede observarse, para obtener en esta solución ha sido necesario realizar varias transformaciones en el registro simbólico, así como conversiones al registro gráfico. También se ha hecho necesario el manejo de propiedades relacionadas con el valor del discriminante.

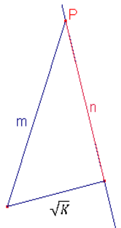
Así, mientras que esta solución se ha centrado en transformaciones simbólicas, que hacen que se pierdan de vista las propiedades geométricas que deben cumplirse en la condición de tangencia, la solución analítica descrita en la tabla 2 ha permitido que cada paso pueda interpretarse en términos de representaciones figurales que permiten comprender el porqué de los procedimientos algebraicos, así como establecer continuamente conexiones entre las transformaciones simbólicas y gráficas. Por esa razón, y aprovechando la equivalencia entre las unidades elementales en los dos cuadros, consideramos que la determinación de la ecuación de la recta tangente en un contexto analítico que reproduce el razonamiento sintético, como el descrito en la tabla 2, puede ser beneficioso para el aprendizaje, y de hecho lo es.

Ejemplo 2: Determinación de un lugar geométrico

Como se verá en la tabla 3, en las soluciones propuestas para el problema sobre lugar geométrico planteado será posible establecer sólo algunas relaciones entre las unidades elementales en los marcos geométrico y algebraico.

Tabla 3. Unidades elementales presentes en la determinación de un lugar geométrico

Unidades elementales en el marco geométrico	Unidades elementales en el marco algebraico
Enunciado: Dados los puntos *A* y *B* y el valor constante $\sqrt{K} \neq d(A,B)$, construya el lugar geométrico de los puntos *P* tales que la diferencia de los cuadrados de las distancias de *P* a *A* y de *P* a *B* es *K*. **Solución propuesta:** Se construye un triángulo con cateto $\sqrt{K}$. Para ello, se traza una perpendicular al segmento de longitud $\sqrt{K}$ por uno de sus extremos. **[UE: Las consideradas al construir una recta perpendicular].** Se selecciona un punto cualquiera Q sobre dicha recta. **[UE: Construir puntos sobre un objeto dado]** Construir un triángulo rectángulo de hipotenusa m y catetos $\sqrt{K}$ y n. **[UE: Construir una recta conociendo dos puntos de paso].**	**Enunciado:** Considere los puntos *A*(3,5) y *B*(0,0). Determine la ecuación del lugar geométrico que satisfacen los puntos *P* del plano de modo que la diferencia de los cuadrados de las distancias de *P* a *A* y de *P* a *B* sea 100. Luego, reconozca la forma que adopta la gráfica de dicha ecuación. **Solución propuesta:** Se denota por *P*(*x*, *y*) a los puntos del plano que cumplen la relación pedida y se plantea una ecuación que represente la condición dada. Las distancias de *P* a *A* y de *P* a *B* se representan con una expresión algebraica. **[UE: Determinar una expresión cuadrática en dos variables para referirse a una distancia entre puntos.] (2 veces)** Luego se debe determinar una ecuación que relacione las coordenadas del punto *P* con los datos dados. Esto requiere de un proceso de conversión que no se ha descrito en términos de UE. $d^2(P,A) - d^2(P,B) = 9$



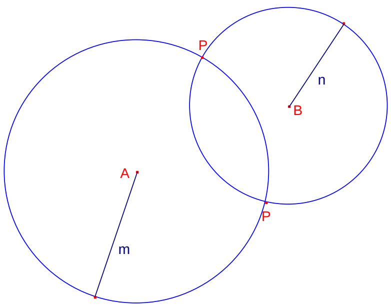
Se verifica entonces que: $m^2=K+n^2$.

Con los segmentos de longitudes m y n se construyen circunferencias con centros en A y B y radios m y n, respectivamente.

[UE: Construir una circunferencia conociendo su centro y su radio] (2 veces)

En la intersección de las dos circunferencias construidas se encuentran puntos del lugar geométrico.

[UE: Construir puntos de intersección de objetos dados].



Esto es cierto pues *P* se ubica en la circunferencia de centro *A* y radio *m*, luego, $d(A,P)=m$. Además, *P* también se encuentra en la circunferencia de centro *B* y radio *n*, luego, $d(B,P)=n$. Y como se verifica que $m^2-n^2=K$, entonces *P* forma parte del lugar geométrico buscado.

Notar que con este método sólo se ha conseguido construir algunos puntos del lugar geométrico. No es trivial justificar que la forma que adopta es la de una recta.

$$(x-3)^2+(y-5)^2-(x-0)^2-(y-0)^2 = 100$$

Desarrollando las expresiones y simplificando, es decir, a través de transformaciones en un mismo registro, se obtiene una ecuación equivalente:

$$-3-5y=66$$

Se debe reconocer que dicha ecuación corresponde a la del lugar geométrico solicitado y que es una recta perpendicular a AB. La justificación de la forma del lugar geométrico se basa en que la expresión algebraica es lineal en *x* e *y*.

El primer paso en cada solución de la tabla 3 consiste en interpretar el enunciado; en el primer caso será en términos de una representación figural y en el segundo caso en términos de una ecuación. Esto corresponde a transformaciones de conversión. Sin embargo, en relación a las unidades elementales descritas en las soluciones en los marcos geométrico y algebraico, se muestra que no se trata de procedimientos equivalentes.

Sobre la eficiencia de la solución, se puede notar que mientras que con la técnica geométrica sólo se determinan algunos puntos del lugar geométrico, con la técnica analítica se puede determinar la forma global del lugar geométrico. Por ello se considerará que la solución en el contexto algebraico será más eficiente.

Notar que para justificar la forma que adopta el lugar geométrico en el cuadro geométrico se hace necesario seguir un razonamiento deductivo basado en considerar la recta que pasa por los dos puntos *P* mostrados en la intersección de las circunferencias y verificar que cualquier punto ubicado sobre dicha recta satisface la condición geométrica del enunciado. Esto hará que la solución sintética sea más compleja.

Esta actividad fue implementada con un grupo de estudiantes de primer año de la Facultad de Arquitectura y Urbanismo de la Pontificia Universidad Católica del Perú; los resultados obtenidos confirman el supuesto en relación a cuál de ellos resultó de mayor complejidad cognitiva.

De las 14 parejas que participaron, sólo 6 dieron como respuesta que el lugar geométrico era una recta en el contexto sintético, y únicamente 2 de ellas indicaron que la recta era perpendicular al segmento *AB*, tal como se muestra en la figura 1. La justificación de la forma adoptada no siguió un razonamiento formal, se basó en que los distintos puntos *P* construidos parecían estar alineados.

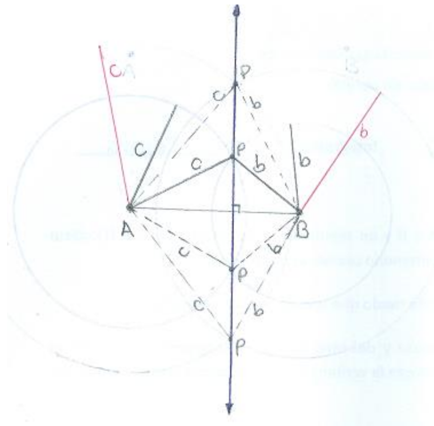


Figura 1. Solución sintética de la pareja 7

De otro lado, algunos de los estudiantes asumieron que el lugar geométrico debía heredar la forma de las construcciones auxiliares y, por tanto, como se empleaban circunferencias, el lugar geométrico descrito por *P* también debía serlo.

En las otras soluciones se identificaron dificultades para reconocer la forma global del lugar geométrico en el contexto sintético. La figura 2 muestra que, a pesar de que esta pareja hizo la construcción auxiliar adecuada y trasladó las distancias *m* y *n* correctamente, insistió en que *APB* formaba un triángulo rectángulo, como se observa en la siguiente figura.

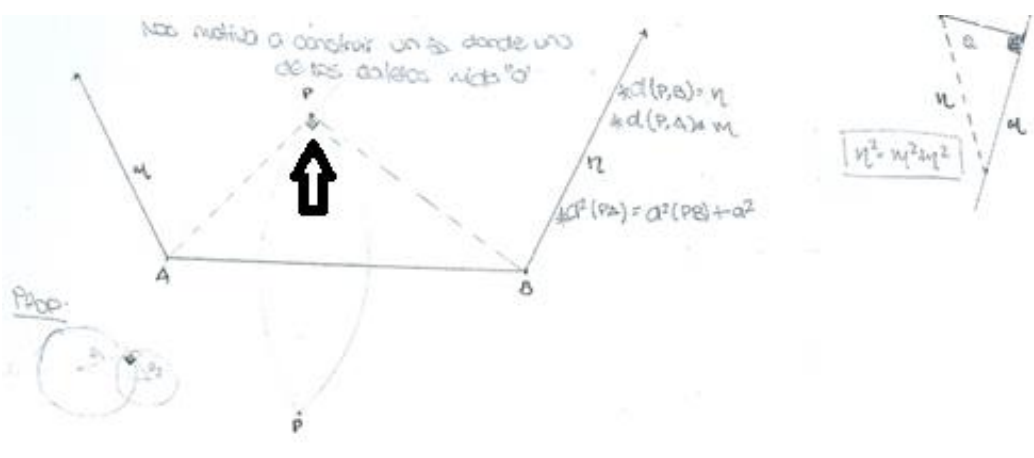


Figura 2. Solución sintética de la pareja 12

En particular, les resultó muy difícil comprender que, sin que se construyera un triángulo rectángulo con vértices en *A*, *B* y *P*, se verificaba una relación pitagórica. Entendemos que esto ocurrió porque la solución sintética requería coordinar figuras, relacionarlas con propiedades y realizar un nuevo dibujo donde se verificaran nuevas relaciones, actividad muy compleja a nivel cognitivo.

En relación a la solución del enunciado en el contexto analítico, el nivel de éxito fue mayor, ya que 10 de las 14 parejas dieron como respuesta la expresión algebraica adecuada y señalaron que se trataba de una recta, tal como se muestra en la figura 2. En algunos pocos casos los estudiantes cometieron errores en las operaciones algebraicas.

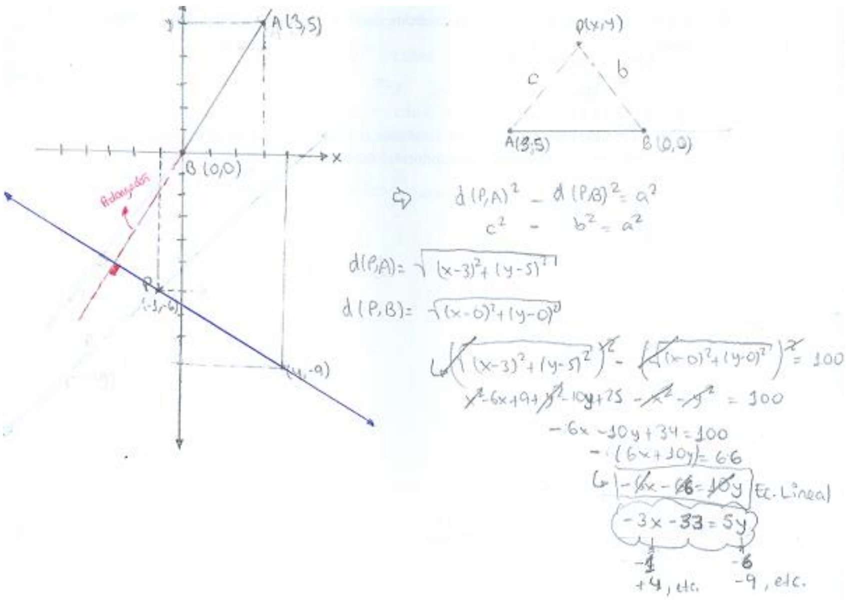


Figura 3. Solución analítica de la pareja 7

Fueron muy pocas las soluciones en las que se notó que los estudiantes establecieron relaciones entre las construcciones geométricas realizadas y las representaciones algebraicas obtenidas. Las figuras 1 y 3 corresponden a una misma pareja de estudiantes y muestran coherencia entre la solución sintética y analítica; sin embargo, fue más común encontrar soluciones sintéticas incompletas o incorrectas y soluciones analíticas completas y correctas. Esto muestra que no reconocieron que se trataba de un mismo problema aunque enunciado en marcos distintos.

CONCLUSIONES

La descomposición de los procedimientos en unidades elementales permitió poner en evidencia que el uso de un marco u otro en la solución de un problema genera distintos procedimientos de solución, los que generalmente no serán comparables. En caso no sean comparables, lo ideal será que el estudiante tenga la capacidad de elegir aquel que le resulte más eficiente para la solución de un determinado problema. De otro lado, en aquellos casos en donde se vea que sí es posible establecer relación entre los procedimientos involucrados en los dos marcos, consideramos que hacer explícita esta relación contribuirá a la comprensión de los elementos involucrados.

En relación a los errores identificados en los procedimientos sintéticos, los estudiantes tuvieron dificultad para coordinar varios registros en simultáneo; esto explica que la mayoría de estudiantes no pudo relacionar las construcciones auxiliares con la construcción principal. De otro lado, hay relaciones entre representaciones que, aunque no son correctas, persisten como por ejemplo la idea de que una relación de igualdad que involucra tres expresiones al cuadrado se asocia necesariamente con un triángulo rectángulo.

Se comprobó también que el tratamiento sintético requiere de razonamientos deductivos que resultan más complejos, en contraste con el tratamiento algebraico en donde los procedimientos son más fáciles de sistematizar. Se hace necesario diseñar secuencias de enseñanza aprendizaje adecuadas para que los estudiantes se familiaricen con los procedimientos de la geometría sintética.

El análisis de procedimientos en términos de transformaciones y UE permite prever que aquellas actividades que involucran un mayor número de transformaciones o conexiones entre distintas representaciones de un mismo objeto matemático resultarán más complejas en términos cognitivos.

Finalmente, la descripción de los procedimientos que se siguen durante la actividad matemática de un mismo problema en los cuadros geométrico y algebraico muestra que no hay una superioridad de uno sobre otro; en todo caso, son complementarios. Se requiere diseñar actividades que puedan ser abordadas desde distintos contextos matemáticos de modo que se favorezcan los aprendizajes matemáticos.

Referencias

Alsina, C. y Trillas, E. (1992). *Lecciones de álgebra y geometría*. Sexta edición. Editorial Gustavo Gili S.A.

Balacheff, N. (2005). Marco, registro y concepción. Notas sobre las relaciones entre tres conceptos claves en didáctica. *Revista EMA, 9*(3), 181-204.

Bouvier, A. y George, M. (1984). *Diccionario de Matemáticas*. Madrid: Akal Editor.

Descartes, R. (1954). *The Geometry of Rene Descartes*; translated from french and latin by David Eugene Smith and Marcia L. Latham. New York: Dover Publications, Inc.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement mathématique. Une réalisation dans tout le cursus primaire*. (tesis doctoral). Paris: Université de Paris VII.

Duval, R. (2006a). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME, 9* (1), 143-168.

Duval, R. (2006b). A cognitive análisis of problems of comprensión in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. 61, 103-161. Springer.

Larson, R., Hostetler, R. y Edwards, B. (1995). *Cálculo y Geometría Analítica*. Volumen I, Quinta edición. México: Mc Graw Hill.

Puerta, M. (2009). *Interpolación y extrapolación gráfica y algebraica. Estudio de contraste*. Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

Purcell, E. y Varberg, D. (2007). *Cálculo diferencial e integral*. Novena edición. México: Pearson Educación.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra: orígenes y perspectivas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2007). *Precálculo. Matemáticas previas al cálculo*. Quinta edición. México: Thomson.

IMPLEMENTACIÓN DE TAREAS DE MODELIZACIÓN ABIERTAS EN EL AULA DE SECUNDARIA, ANÁLISIS PREVIO[1]

Implementation of open modeling tasks in secondary school, exploratory analysis

César Gallart[a], Irene Ferrando[b], Lluís M. García-Raffi[c]

[a]Universidad Cardenal Herrera-CEU, Valencia, [b]Universidad de Valencia, [c]Universidad Politécnica de Valencia

Resumen

En este trabajo se describe una experiencia de implementación de tareas de modelización abiertas en Educación Secundaria Obligatoria. El objetivo de la experiencia es reconstruir, a través del análisis cualitativo de los datos recogidos en la experiencia, el proceso de resolución de una tarea de modelización en base a un ciclo de modelización. Un análisis cuantitativo nos permitirá determinar si la implementación de tareas abiertas de modelización modifica la alfabetización matemática en el sentido planteado por PISA.

Palabras clave: *tareas de modelización, secundaria, ciclo de modelización.*

Abstract

In this paper an experimental implementation of open modeling tasks in Secondary Education is described. The aim is to reconstruct, through the qualitative analysis of the collected data, the solving process of a task based on a modeling cycle. A quantitative analysis will allow us to determine whether the implementation of an open task improves mathematical literacy in the sense suggested in the PISA tests.

Keywords: *modelling tasks, secondary, modelling cycle.*

INTRODUCCIÓN Y MARCO TEÓRICO

El informe PISA publicado por la OCDE (2006) incide en la importancia que debe tener, en los sistemas educativos actuales, el aprender a "matematizar" situaciones reales, ya que "*la evaluación de las matemáticas que hace PISA exige a los alumnos que se enfrenten con problemas matemáticos que están basados en algún contexto del mundo real*" (Puig, 2006, p. 7). Este informe evalúa la alfabetización matemática (*mathematical literacy*, en el original en inglés y que ha venido traduciéndose por competencia matemática en nuestro país) de los alumnos de 15 años y, entre otros aspectos, tiene en cuenta la capacidad de "*entender las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados y utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de los individuos como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos*" (OCDE, 2006, p. 74). Tal y como afirma Puig (2006, p.7), los alumnos que se enfrentan a estas pruebas "*activan las competencias matemáticas pertinentes para resolver el problema*", y se embarcan *"en un proceso de matematización*".

Maaß (2006, p. 115) define los problemas de modelización como "*auténticos, complejos y abiertos, relacionados con la realidad*". El proceso de resolución de este tipo de problemas, desde un punto de vista normativo e idealizado (Borromeo Ferri, 2006), abarca una serie de fases (que pueden variar entre unos autores y otros) que transitan, en un doble proceso de matematización -vertical y horizontal (Treffers, 1987)-, entre el mundo real y el mundo matemático. En la Figura 1 reproducimos un ciclo de modelización basado en el propuesto por Maaß (2006, p. 115). Este ciclo se ilustra a través de una serie de acciones que permiten describir los procesos involucrados en la

Gallart, C., Ferrando, I., García-Raffi, L. M. (2014). Implementación de tareas de modelización abiertas en el aula de secundaria, análisis previo. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 327-336). Salamanca: SEIEM.

transición entre las fases que, para este trabajo, hemos concretado y resumido en cinco. Se parte de una situación real, que se *simplifica y estructura* (1) para obtener un modelo real de la situación original planteada. Mediante suposiciones, generalizaciones y formalizaciones se realiza la *matematización (horizontal)* (2) de forma que, al identificar las matemáticas que subyacen en el modelo real, éste se transforma en un modelo matemático. Una vez establecido el modelo matemático, se *resuelve matemáticamente* (3) –esta transición es también denominada matematización vertical-, obteniendo una solución matemática, que tendrá que *interpretarse* (4) en los términos de la situación inicial, obteniendo así una solución real. Por último se *comprueba y valida* (5) que dicha solución real efectivamente resuelve el problema y que el modelo es el adecuado. Además puede intentarse realizar una posible generalización a otras situaciones similares. Las cinco fases descritas conforman un ciclo por el que se puede transitar varias veces si es necesario redefiniendo o refinando el modelo.

En este trabajo vamos a describir una experiencia llevada a cabo con alumnos de tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria. En primer lugar detallaremos, a partir del análisis cualitativo del trabajo realizado por los estudiantes, la *ruta de modelización* (Borromeo Ferri 2007) seguida por éstos. La reconstrucción de la ruta de modelización nos permite entender un poco mejor los procedimientos cognitivos de los estudiantes al resolver tareas de modelización abiertas. A continuación examinaremos los resultados cuantitativos de un test previo a la realización de la actividad y uno posterior a la misma para tratar de determinar si la implementación de tareas de modelización modifica la alfabetización matemática entendida en el sentido del proyecto PISA

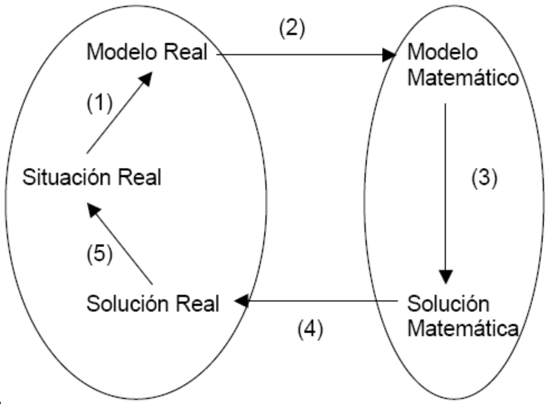


Figura 1. Ciclo de modelización utilizado en este trabajo

DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA Y METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

El trabajo que aquí presentamos se engloba dentro de otro mayor cuyo objetivo es analizar de manera global, las consecuencias de introducir la enseñanza de la modelización a través de la resolución de tareas abiertas en el aula de secundaria y su efecto en el desarrollo de las competencias necesarias para resolver problemas reales. En este artículo nos centraremos en un análisis preliminar de la experiencia realizada durante el curso 2012-13 en un colegio de la localidad de Moncada para responder a la siguiente pregunta: ¿el trabajo en tareas de modelización contribuye a la mejora de la alfabetización matemática en el sentido del proyecto PISA? Se contó con la participación de un grupo experimental formado por 52 alumnos de tercero de educación secundaria (14-15 años) compuesto por tres grupos naturales de clase y un grupo de control de 18 alumnos del mismo nivel y del mismo centro. En ninguno de los dos grupos se había trabajado anteriormente la modelización y los contenidos tratados hasta el momento de la experiencia en ambos grupos (finales de febrero) son los correspondientes al currículo oficial. La actividad, dirigida por uno de los investigadores, que es asimismo el profesor, se desarrolló durante ocho sesiones de una hora. La primera y la última sesión se dedicaron a pasar los pre y post test ya mencionados.

Durante la seis sesiones intermedias, la metodología que siguió el grupo de control corresponde a la de una clase tradicional, en la que se impone una "*enseñanza imitativa*" (Burkhardt, 2006), basada en los problemas descontextualizados y convenientemente simplificados de los libros de texto (Maaß, 2006, Alsina, 2007). Los contenidos trabajados por el grupo de control a lo largo de la experiencia fueron los marcados por la programación del centro.

La segunda sesión de la experiencia consistió en la entrega y presentación a los alumnos de los grupos experimentales, de un dossier con las diez tareas de modelización propuestas, así como los objetivos y criterios de evaluación de la actividad. Durante esta sesión los alumnos forman, libremente, grupos de trabajo de dos o tres miembros, y escogen, una de las tareas del dossier. En lo relativo al diseño de las tareas planteadas, encontramos en la literatura una serie de criterios a tener en cuenta, como los principios de construcción de las "Modeling-Eliciting Activities" (en Lesh y otros, 2000, p. 591-645), los criterios que permiten identificar las tareas de modelización en el proyecto europeo LEMA y otros similares en Blomhøj y Kjeldsen, (2006) y en Maaß (2010). Buscamos que las tareas planteadas reúnan las siguientes características:

- Que sean auténticas, con datos reales, relevantes en alguna situación real, y que hagan posible el uso de la experiencia de los alumnos. Por ello, el contexto se corresponderá con su entorno escolar.
- Que sean abiertas, sin una solución estipulada de antemano.
- Que promuevan la reflexión crítica y el debate entre los alumnos.
- Que abarquen el proceso completo de modelización (todas las fases del ciclo).
- Donde se haga necesario trabajar tanto con información matemática como no matemática, interpretando y validando los resultados en el contexto en que se sitúa el problema.
- Que se trabajen en pequeños grupos de dos o tres alumnos.

Como ya hemos indicado, en el dossier presentado a los alumnos hay diez tareas distintas, algunas están fuertemente relacionadas con la realidad, y es necesario obtener los datos para su resolución (las más abiertas y complejas), mientras que en otras se presentan datos realistas, pero no auténticos (las más concretas y estructuradas). La variedad de estas tareas responde a la necesidad de tratar la diversidad en el aula.

Durante las cuatro sesiones de trabajo en el aula el alumno adopta un papel principal, toma el control del proceso y propone sus propias estrategias de resolución. El profesor asume un papel de observador favoreciendo la autonomía y la interacción del grupo. Para ello fomenta que los alumnos expliquen, justifiquen, discrepen, reflexionen y cuestionen alternativas distintas en un proceso de aprendizaje constructivo y social (Barbosa, 2006, Burkhardt, 2006, Blomhøj y Jensen, 2006).

Una vez finalizadas las sesiones dedicadas a la realización de las tareas, cada uno de los grupos de trabajo de los tres grupos experimentales preparó una presentación de su trabajo para exponerlo al resto de compañeros (generalmente con la ayuda de diapositivas digitales). Finalmente, los alumnos, tanto del grupo experimental como de control, realizaron el post test.

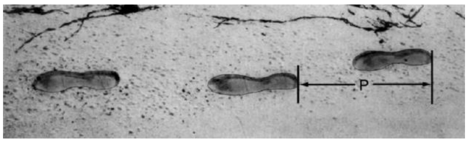
Herramientas de investigación

Las tareas de modelización requieren que los alumnos generen modelos, que deberán ir refinando y mejorando en sucesivos ciclos. Además deben externalizar sus formas de pensamiento y esto se realiza de formas distintas: a través del diálogo dentro del grupo, a través del debate con el resto de compañeros de aula y con el profesor, pero también a través de una serie de documentación que debe ser elaborada durante la realización de la tarea. De esta manera se va generando un "*rastro continuo de documentación*" (Lesh y Doerr, 2003), a partir de cuyo análisis reconstruiremos su ruta de modelización. Con este fin elaboramos una serie de herramientas de investigación:

- El diario del alumno, realizado por cada grupo, describe el proceso de resolución seguido, que se completa con entrevistas conjuntas con el grupo (grabadas en audio).
- El diario del profesor-investigador, en el que se recogen las impresiones obtenidas tras la observación exhaustiva del trabajo realizado por los grupos de alumnos en el aula.
- La producción final de los distintos grupos, recogida en su presentación pública (mediante diapositivas digitales) y grabada en vídeo.
- Los resultados obtenidos en el pre-test y en el pos-test.

En lo que respecta a los test, ambos están formados por ocho tareas: 4 basadas en las pruebas liberadas del informe PISA (OCDE, 2005), 2 pertenecientes al proyecto LEMA[2] y las otras dos basadas en problemas propuestos por Verschaffel, De Corte y Greer (2000). Un test similar, diseñado a partir de las tareas propuestas por PISA, es utilizado por Mousoulides, Christou y Sriraman (2008) para comprobar la eficacia de su programa de intervención en la mejora de las habilidades de los alumnos en la resolución de problemas de modelización. A continuación mostramos un ejemplo de cada uno de los tres tipos de tareas.

CAMINAR (basada en una actividad propuesta en las pruebas PISA de 2005)



La foto muestra las huellas de un hombre caminando. La longitud del paso P es la distancia entre los extremos posteriores de dos huellas consecutivas. Para los hombres, la fórmula $n/p = 140$, da una relación aproximada entre n y P, donde: n = número de pasos por minuto, y P = longitud del paso en metros.
Pregunta 1: Si se aplica la fórmula a la manera de caminar de Enrique y éste da 70 pasos por minuto, ¿cuál es la longitud del paso de Enrique? Muestra tus cálculos.
Pregunta 2: Bernardo sabe que sus pasos son de 0,80 metros. El caminar de Bernardo se ajusta a la fórmula. Calcula la velocidad a la que anda Bernardo en metros por minuto y en kilómetros por hora. Muestra tus cálculos.

VECINOS (basada en una prueba del proyecto LEMA)

Pregunta 8:
¿Cuánta gente crees que vive en el bloque de pisos de la fotografía?
Explica las suposiciones que tomes en consideración y detalla todos los pasos y cálculos que realices para dar tu respuesta**.**

DOS AMIGOS (basada en una tarea descrita en Verschaffel, De Corte y Greer 2000)
Pregunta 10:
Carlos vive a tres kilómetros de su Instituto y Pablo a ocho. ¿A qué distancia viven uno del otro?
Explica las suposiciones que tomes en consideración y detalla todos los pasos y cálculos que realices para dar tu respuesta.

Las tareas de los test adaptadas de PISA pertenecen a diferentes contenidos matemáticos, tienen diferentes niveles de complejidad y se sitúan en contextos diferentes. Las respuestas pueden ser cortas, abiertas o de elección múltiple. También se incluye en cada test una "*prueba de solución de problemas*" (según la terminología PISA), del tipo "*toma de decisiones*", donde el alumno debe dar una respuesta que cumpla con una serie de condiciones a partir de las distintas alternativas que se le presentan. El resto de las tareas de los test son de respuesta abierta y, para resolverlas, es necesario realizar un proceso de matematización de la realidad, argumentar y justificar los supuestos considerados en su resolución, adecuar la solución -que no tiene que ser un único número- a la realidad en la que se sitúan, así como trabajar con información no estrictamente matemática.

RESULTADOS Y ANÁLISIS

Reconstrucción del proceso de modelización

En el presente artículo, como ejemplo del trabajo en modelización desarrollado por los alumnos del grupo experimental, centramos nuestra atención en la reconstrucción del proceso de resolución seguido en la tarea "La sombra en el patio de recreo". El enunciado de la tarea se muestra en la Figura 2.

Figura 2. Enunciado de la tarea de modelización tal y como aparece en el dossier de los alumnos

Hemos escogido esta tarea porque es una de las más abiertas y complejas. A partir de la documentación recogida mediante los distintos instrumentos de investigación expuestos en el apartado anterior y según el ciclo propuesto en la Figura 1 vamos a reconstruir la ruta de modelización seguida por uno de los grupos que resolvió esta tarea. Se incluyen (entrecomillados y en cursiva) fragmentos de los comentarios facilitados por los alumnos en su diario, durante las entrevistas o en la presentación de su trabajo.

Esta tarea presenta una situación bien conocida por los alumnos: una plaga ha obligado a talar numerosas palmeras, por lo que el patio de recreo se ha quedado prácticamente sin zona de sombra (situación real). Un primer acercamiento les lleva a su simplificación (1): *"estudiar la sombra producida por un único árbol"*. A esta primera imagen sobre la situación los alumnos llegan tras un proceso de reflexión, en el que se establecen dos sub-problemas: clasificar los árboles según la forma de su copa y establecer la relación existente entre la superficie de la copa del árbol y la superficie de sombra que proyecta. La observación del área proyectada en el plano por un árbol lleva a los alumnos a la determinación de la sección plana de la copa como variable significativa, utilizando el triángulo, el círculo y el rectángulo como modelos geométricos con los que idealizarla.

A continuación los alumnos realizan con cartulina maquetas en 2D de tres modelos de árboles con copa triangular, circular o rectangular, con las que simulan, experimentalmente en el laboratorio del colegio, la realidad del patio a la hora del recreo. A partir de este modelo geométrico a escala deducirán su modelo matemático (2), e intentarán resolver el problema de establecer la relación existente entre la superficie de la sección de la copa del árbol y la superficie de su sombra. Para llegar a este punto, han tenido que abstraer la realidad mediante su conocimiento matemático y el uso de representaciones idealizadas de la realidad.

Para resolver el problema consistente en establecer la relación entre el área de la sección de la copa y el área de la sombra proyectada los alumnos midieron primero, en el patio, el ángulo de inclinación de los rayos del Sol durante el recreo: "*Uno de nosotros se puso el extremo de una cuerda en la cabeza, otro sujetó el otro extremo justo donde acababa la sombra del primero y el* *tercero midió, con un transportador, el ángulo que formaban la cuerda y la sombra*". A continuación, en el laboratorio de Tecnología del colegio, utilizaron un flexo para emular el Sol como fuente de emisión puntual no extensa: "*Con una cuerda fuimos cuadrando la posición del flexo hasta conseguir que la sombra de nuestros "árboles" y la cuerda formasen un ángulo de 42 grados. Calcamos las 3 sombras, pero no exactamente, sino aproximándolas a una figura regular, por ello los resultados fueron parecidos pero no iguales*". A partir de estas mediciones se obtienen las razones para cada forma geométrica (3). La disparidad de los resultados obtenidos les hizo dudar sobre su validez y recurrir al profesor que les recomendó repetir el experimento en el patio de recreo, fijándose en las sombras proyectadas por sus maquetas, con el fin de obtener nuevos resultados (2): "*Así pues repetimos el proceso pero con luz solar [...]. Y efectivamente nos dio resultados diferentes a la primera vez [...]. Escogimos la forma del círculo puesto que su relación nos aportaba una mayor cantidad de expansión de la sombra"* (3).

A continuación los alumnos interpretan estos resultados en términos de la situación real (4): "*la razón mayor entre el área original y el área de sombra la produce la forma circular"*. Por tanto llegan a la conclusión, de carácter geométrico, de que deben escoger un árbol con una copa con sección circular para maximizar la superficie de sombra. Tras una búsqueda en internet eligen el ombú, ya que tiene una copa casi esférica, y recaban sus dimensiones medias: 10,15 metros altura y 4,5 metros de radio de copa.

Posteriormente los alumnos reflexionan sobre el proceso de resolución. Respecto al alcance de su solución, los alumnos ya saben que el árbol que mayor sombra proyecta es el que tiene una copa circular y que, a partir de la medida de su copa, pueden obtener la superficie de su sombra mediante la razón obtenida (1,83 para la copa circular), teniendo en cuenta que estos resultados solo sirven para la hora y el momento del año en que se tomaron las mediciones. Posteriormente, debaten sobre la necesidad de incorporar nuevos elementos a su modelo respondiendo a las siguientes cuestiones: *"¿Cuántos árboles deberíamos plantar?", "¿Qué porcentaje del patio tendríamos que sombrear?", "¿Cómo se deberían distribuir los árboles en el patio para conseguir este porcentaje de sombra?"*. Esta revisión del proceso corresponde a la fase de validación (5) y lleva a la formulación de nuevos sub-problemas (1). Es decir, en este punto los alumnos empiezan a recorrer, de nuevo, el ciclo de modelización con un nuevo modelo real: determinar el porcentaje de la superficie del patio a sombrear, teniendo en cuenta la sombra que proyecta el edificio del colegio; determinar el número de árboles necesarios para sombrear el porcentaje de la superficie acordada; y establecer la distancia a la que se proyecta la sombra de los árboles para distribuirlos adecuadamente y que sus sombras no se superpongan. "*La sombra del edificio del Colegio cubría 552,5m2 → 10,24 % del patio. Únicamente debíamos sombrear otro 10%, 510m2, para obtener un 20% de sombra, previamente acordado"*. Para determinar el número de árboles (ombúes) necesarios para sombrear esta superficie del patio, deciden que, previamente, deben hallar la sombra que proyecta uno de ellos, "*multiplicamos su área de copa por la relación de los objetos circulares"*, para, por último, dividir el área a sombrear entre la superficie de sombra obtenida para un ombú. Este razonamiento les lleva a plantearse la expresión general (2): $N=S:(r \times C)$, donde N es el número de árboles necesarios para proyectar un área S de sombra, siendo r la relación entre el área de la copa del árbol y la de la sombra proyectada y C el área de la copa del árbol. El desarrollo de esta expresión precisa de la activación del lenguaje formal y simbólico así como del razonamiento proporcional que se deriva de la identificación y relación entre las distintas variables. La manipulación de esta expresión les lleva a la solución matemática (3): $N= 510:(1{,}83 \times (\pi \times 4{,}5^2))=4{,}383$, para un ombú medio de radio 4,5 metros. Esta solución debe interpretarse en la realidad (4): son necesarios cinco ombúes para sombrear el mínimo de superficie propuesto.

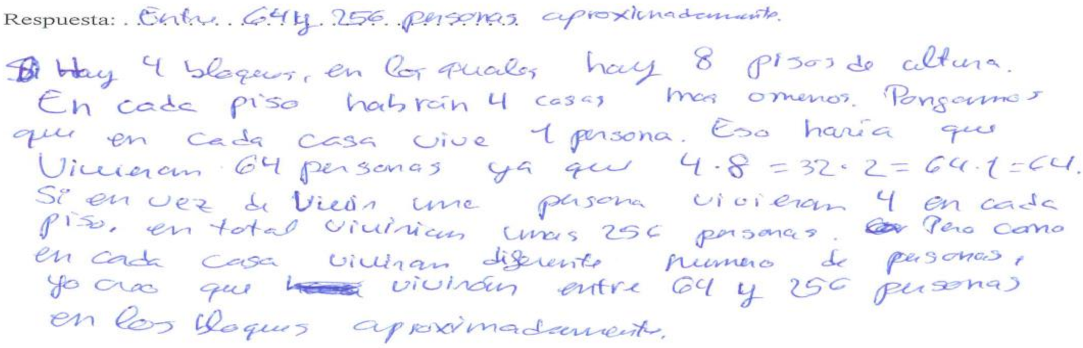
Queda por resolver como distribuirlos: "*Sabiendo ahora la altura del árbol (10,15m) necesitábamos saber a qué distancia del tronco se proyectaría la sombra de la copa [...] Con estos datos podemos realizar una regla de tres para averiguar donde se proyectará la sombra del ombú*

(Objeto de 12cm alto – Sombra de 13cm; Objeto de 1015cm alto – X sombra). Aproximadamente 11m de longitud sombra” (3). La solución se interpreta (4) mediante un esquema en el que se muestra cómo quedaría el patio con los cinco árboles, separados once metros unos de otros que presentan durante la exposición pública, junto con los cálculos, estimaciones y razonamientos que avalan su propuesta (5).

Análisis cuantitativo

Veamos, en primer lugar, cómo se ha realizado la puntuación de los test. Ambos test constan de ocho tareas, algunas de ellas tienen varios apartados que puntúan por separado (las respuestas no están, en ningún caso, encadenadas). Las tareas se puntúan con 0 o 1 punto o bien con 0, 1 o 2 puntos, dependiendo de la complejidad de la respuesta. Por falta de espacio nos limitaremos a describir sólo la puntuación de las tareas que hemos mostradas previamente:

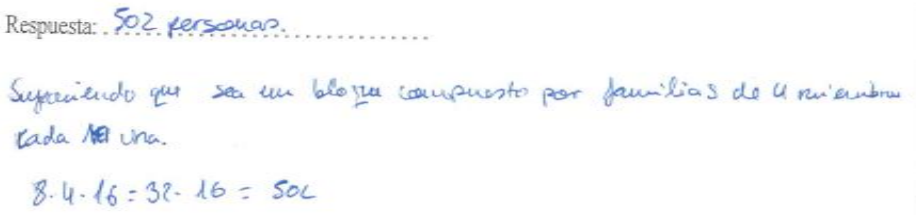
- La tarea “Caminar” consta de dos preguntas, la primera de ellas se puntúa con 1 punto si la respuesta es correcta, es decir 0,5m, 1/2 o 70/140. La segunda pregunta de esa misma tarea es un poco más compleja ya que hay que obtener una velocidad en dos unidades distintas, en este caso se puntúa con 2 puntos si ambas respuestas son correctas, con 1 punto si falla una de las dos o bien si el método de cálculo es correcto pero hay errores menores de cálculo. Se valora con 0 puntos en cualquier otro caso.
- La tarea “Vecinos” consta de una única pregunta con respuesta abierta, para resolverla es necesario realizar estimaciones. Se puntúa con 2 puntos si la respuesta se basa en una estimación realista: se observa que el edificio tiene ocho plantas y se puede suponer que en cada planta hay 4 viviendas. Una estimación realista del número de habitantes de las viviendas debe incluir: personas que vivan solas (1 habitante), parejas jóvenes sin hijos o parejas mayores cuyos hijos ya no vivan con ellos (2 habitantes), familias medias con hijos e incluso con abuelos (entre 4 y 6 habitantes). También se acepta que se estime a partir de una cantidad media de 3 personas por apartamento, lo cual daría una cantidad aproximada de 96 personas. En la Figura 3 mostramos la respuesta de un estudiante puntuado con 2 puntos.


Respuesta: Entre 64 y 256 personas aproximadamente.

Hay 4 bloques, en los cuales hay 8 pisos de altura. En cada piso habrán 4 casas mas o menos. Pongamos que en cada casa vive 1 persona. Eso haría que vivieran 64 personas ya que 4·8 = 32·2 = 64·1 = 64. Si en vez de vivir una persona vivieran 4 en cada piso, en total vivirían unas 256 personas. Pero como en cada casa vivirán diferente numero de personas, yo creo que vivirán entre 64 y 256 personas en los bloques aproximadamente.

Figura 3. Respuesta correcta a la tarea “Vecinos”

Se puntúan con 1 punto aquellas soluciones basadas en estimaciones menos realistas, como que hay, de media, 4 personas por vivienda. Las respuestas no realistas, como la de la Figura 4, no justificadas o en blanco, se valoran con 0 puntos.


Respuesta: 502 personas.

Suponiendo que sea un bloque compuesto por familias de 4 miembros cada una.

8·4·16 = 32·16 = 502

Figura 4. Resolución de la tarea “Vecinos” puntuada con 0 puntos.

- La tarea “Dos amigos” tiene una respuesta abierta ya que la distancia será un valor del intervalo 5-11. En caso de dar como solución el intervalo se otorgan 2 puntos. En la Figura 5 mostramos una respuesta valorada con 2 puntos.

Figura 5. Respuesta correcta a la tarea “Dos amigos”

Si dan los valores máximo y mínimo como si hubiera dos soluciones, se da 1 punto, como en la Figura 6. En cualquier otro caso no se puntúa.

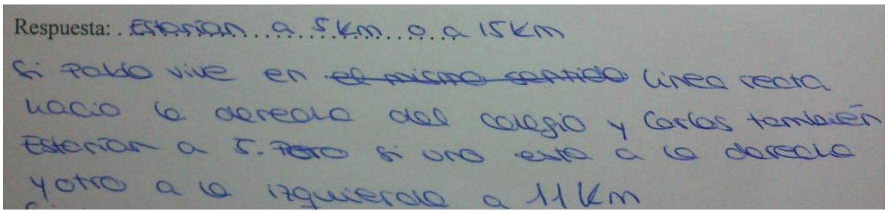


Figura 6. Resolución de la tarea “Amigos” puntuada con 1 punto.

Así, la puntuación global de los test se obtiene de la siguiente manera: la primera tarea se valora sobre 3 puntos, la segunda sobre 4 (ambas tienen varios subapartados) y el resto de tareas se valoran sobre 2 puntos. Esto hace que el total de los test se valore sobre 19 puntos.

Los datos fueron analizados con el programa SPSS. Se calcularon estadísticos descriptivos básicos. Concretamente se obtuvo la media como medida de tendencia central y la desviación estándar como medida de dispersión. Antes de realizar los análisis inferenciales se comprobaron los supuestos de normalidad (K-S test) y homocedasticidad (Levene’s test). Ya que ambos supuestos se cumplieron, se aplicaron pruebas paramétricas para comprobar el efecto del grupo (experimental y control) y el momento de la medición (pre test y post test) sobre las puntuaciones mediante un ANOVA de modelo mixto. El nivel de significación se fijó en $p=0.05$.

Los resultados del ANOVA muestran la existencia de un efecto principal de la medida ($F_{1,69}=57.25$; $p<0.001$). También se encontró un efecto significativo de la interacción grupo por medida ($F_{1,69}=0.06$; $p=0.004$).

Las comparaciones por pares mostraron que tanto el grupo experimental como el grupo control obtuvieron una puntuación más elevada en el post test que en el pre-test ($p<0.05$). Sin embargo la mejora del grupo experimental fue mayor (3.87 puntos) que la del grupo control (1.67 puntos).

CONCLUSIONES

A través del análisis cualitativo de la producción de los distintos grupos y la reconstrucción de sus rutas de modelización, hemos constatado como, al resolver las tareas propuestas, transitan a lo largo de todas las fases que conforman el ciclo de modelización (aunque no de forma secuencial). También hemos observado a través del análisis con las herramientas de investigación diseñadas que, ciertamente, la transición entre alguna de estas fases ha resultado más complicada que otras. Se ha puesto de manifiesto la importancia de la fase de validación, ya que es este momento en que el alumno tiene la oportunidad de revisar la validez de su solución y, si procede, reiniciar un nuevo ciclo para mejorar o generalizar la solución obtenida. Comprobamos, tal y como afirma Cabassut

(2009), que la validación supone que el grupo llega a una solución que carece de contradicciones aparentes, que es razonable, según su experiencia, y que ha sido contrastada con sus pares a través de un proceso de comunicación y aceptada por el profesor en su rol de experto. En efecto, la necesidad de este proceso es propia de la actividad modelizadora, marca una diferencia muy significativa con la resolución de los problemas tradicionales y merece un estudio más detallado en el futuro.

Los resultados obtenidos en los test sugieren que el trabajo en tareas de modelización abiertas revierte en una mejora de la alfabetización matemática en el sentido de PISA, al menos en un período temporal próximo a la tarea. Por ello pensamos que la metodología basada en la resolución de tareas de modelización según los criterios de diseño expuestos puede también mejorar el desarrollo competencial a largo plazo, lo cual nos abre una vía de trabajo futuro. No es menos cierto y, con los datos de que disponemos hasta ahora, difícilmente cuantificable, que, como hemos expuesto anteriormente, la motivación puede jugar un papel importante en la mejora de los resultados del post-test. En efecto, los alumnos del grupo experimental encuentran mayor sentido a los problemas planteados pues perciben más fácilmente, y como algo natural, el uso de conocimiento no matemático y la relación entre la situación real planteada y el modelo matemático utilizado en su resolución. Esto podría explicar que, aunque en los alumnos del grupo experimental también se aprecia una mejora, esta no es significativa comparada con la que se aprecia en el grupo experimental. Es posible que la contextualización del pensamiento matemático sea una -incluso, la principal- razón de dicha mejora y por todo ello concluimos, al igual que apunta Verschaffel (2008, p. 402-404), que la introducción de la modelización en el aula debe formar parte activa de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Referencias

Alsina, C. (2007). Si Enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿Cuántas tuvo enrique IV? El realismo en educación matemática y sus implicaciones docentes. *Revista Iberoamericana en investigación*, 43, 85-101.

Barbosa, J. (2006). Mathematical modelling in classroom: a social-critical and discursive perspective. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 293-301.

Blomhøj, M. y Jensen, T.H. (2007). What's all the fuss about competencies? En Blum, Galbraith, Henn and Niss (Ed.) *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study,* 45-56. Heidelberg: Springer.

Blomhøj, M. y Kjeldsen, T. (2006). Teaching Mathematical Modelling through project work. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 163-177.

Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to other Subjects – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 37-68

Borromeo Ferri, R. (2006). Theorical and empirical differentiations of phases in the modeling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 41, 453-465.

Borromeo Ferri, R. (2007). Personal experiences and extra-mathematical knowledge as an influence factor on modelling routes of pupils. En D. Pitta-Pantzi y Philippou (Ed.) *CERME 5 - Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2080-2089. Larnaca: University of Cyprus.

Burkhardt, H. (2006). Modelling in Mathematics Classrooms: reflections on past developments and the future. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2). 178-195.

Cabassut, R. (2009). The double transposition in mathematisation at primary school. En V. Duran-Guerrier, S. Soury-Lavergne, y F. Arzarello (Ed.) *CERME 6 – Proceedings of Sitxh Conference of European Research in Mathematics Education*, 2156-2165. Lyon.

Lesh, R y Kelly, A. (2000). Multitiered Teaching Experiments. En Kelly, A. y Lesh, R. (Ed.) *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, p. 197-230. New Jersey: Lawrence Erlbaum & Associates.

Lesh, R. y Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem-solving. En Lesh, R. y Doerr, H. M. (Ed.) *Beyond Constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*, p. 3-34. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum & Associates.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A y Post, T. (2000). Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers. En Kelly, A.E. y Lesh, R. (Ed.) *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, 591-645. New Jersey: Lawrence Erlbaum & Associates.

Maa*ß*, K. (2006). What are modeling competencies? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 113-142.

Maa*ß*, K. (2010). Classification scheme for modeling task. *Journal für Didaktik*, 31, 285-311.

Mousoulides, N.G., Christou, C., y Sriraman, B. (2008). A modeling perspective on the teaching and learning of mathematical problem solving. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(3), 293-304.

OCDE (2005). *PISA 2003. Pruebas de Matemáticas y de Solución de Problemas.* Recuperado de http://www.mecd.gob.es/dctm/ievaluacion/internacional/pisa2003liberados.pdf?documentId=0901e72b801106c6

OCDE (2006). *PISA 2006. Marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura.* Recuperado de http://www.oecd.org/pisa/39732471.pdf

Puig, L. (2006). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. En Bolea, P., González, Mª. J. y Moreno, M. (Ed.) *Investigación en Educación Matemática. Actas del Décimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 107-126. Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses / Universidad de Zaragoza.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics instruction – The Wiskobas Project*. Dordrecht: Reidel.

Verschaffel, L., De Corte, E. y Greer, B. (2000). *Making sense of Word problems*. Lisse: Swets & Zeitlinger.

Verschaffel, L., Vicente, S. y Van Dooren, W. (2008). Usar las matemáticas para resolver problemas reales. *Cultura y Educación*, 20(4), 391-406

[1] Este trabajo se ha realizado al amparo del Ministerio de Economía y Competitividad a través del proyecto de investigación EDU2012-35638. Los autores agradecen sinceramente la ayuda de los profesores de la Universitat de València Vicente Sanjosé y Xavier García para realizar el análisis cuantitativo así como la colaboración del profesor del Colegio CEU San Pablo, Rafael Salvador, durante el desarrollo de la experiencia.

[2] Ver su página web: http://www.lema-project.org/web.lemaproject/web/eu/tout.php

CONEXIONES EN EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DEL PROFESOR: PROPUESTA DE UN MODELO DE ANÁLISIS

Connections and teacher's mathematical knowledge: A proposal for an analysis model

Genaro de Gamboa, Lourdes Figueiras

Universidad Autónoma de Barcelona

Resumen

Establecer conexiones es una acción presente en diversos modelos que analizan el conocimiento del profesor de matemáticas desde una perspectiva práctica. En esta contribución proponemos una definición y una clasificación asociada dirigidas a profundizar en la relación entre el establecimiento de conexiones en el aula y el análisis del conocimiento del profesor. Esta propuesta teórica surge de la observación continuada de clases de matemáticas y la ejemplificamos con episodios reales de aula relacionados con la introducción de los números enteros. Caracterizamos cuatro tipologías de conexiones y mostramos cómo cada una se asocia a rasgos diferentes del conocimiento del profesor.

Palabras clave: *Conexiones, conocimiento matemático del profesor, interconcepto y números enteros.*

Abstract

Making connections is part of several models that analyze the knowledge of the teacher of mathematics from a practical perspective. In this paper we propose a definition and also an associate classification with the aim of analyze the relationship between making connections and teacher knowledge. This theoretical proposal arises from the continuous observation of mathematics classroom. Examples are taken from real episodes related to the introduction of integers. We characterize four typologies of connections and show how each category is associated with different features of teacher knowledge.

Keywords: *Connections, mathematical teacher knowledge, interconcept and integers*

Diversos modelos del conocimiento del profesorado propuestos desde la investigación y el análisis de la práctica hacen referencia a la importancia de *establecer conexiones*. Ball, Thames y Phelps (2008) se refieren a ellas en la categoría del Conocimiento del Horizonte Matemático como indicador de la conciencia del profesor sobre cómo se relacionan los contenidos matemáticos a lo largo del currículo matemático escolar. Algunos autores (Martínez, Giné, Fernandez, Figueiras y Deulofeu, 2011) señalan que las conexiones van más allá de esta categoría, y que permiten articular otros subdominios de conocimiento del profesor.

En el modelo del Conocimiento Especializado del profesor de matemáticas (Carrillo, Climent, Contreras, y Muñoz-Catalán, 2013), las conexiones aparecen también en la descripción de algunos de sus subdominios de conocimiento: en el caso del Conocimiento de la Estructura Matemática emergen como un aspecto esencial que hace énfasis en entender las matemáticas como un sistema de conexiones y en el caso del Conocimiento de la Actividad Matemática, las conexiones permiten relacionar implícitamente diferentes formas de definir, argumentar o demostrar en matemáticas.

En el caso del modelo del Knowledge Quartet (Rowland, Turner, Twaites y Huckstep, 2009), el establecimiento de conexiones en el aula representa un elemento clave en la práctica docente, que se relaciona con la capacidad del profesor para conectar diferentes lecciones, conectar ideas

Gamboa, G. de, Figueiras, L. (2014). Conexiones en el conocimiento matemático del profesor: propuesta de un modelo de análisis. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 337-344). Salamanca: SEIEM.

matemáticas o conectar diferentes partes de una lección. Respecto a su relación con la clasificación del conocimiento propuesta por Shulman (1986), la dimensión de conexión constituye una manifestación de diferentes tipos de conocimiento, como pueden ser los conocimientos de los contenidos o los conocimientos pedagógicos relacionados con los contenidos (Rowland et al., 2009).

La amplia aparición de las conexiones en los modelos anteriores evidencia la existencia de una relación entre el conocimiento del profesor y el establecimiento de conexiones en el aula. El análisis de esta relación puede contribuir a identificar tipologías de conocimiento relacionadas con el establecimiento de conexiones, así como a entender mejor la relación entre diferentes categorías del conocimiento matemático del profesor. El objetivo de esta aportación es construir una definición de conexión que permita caracterizar el concepto en la práctica del aula y dar una clasificación inicial de las conexiones para aproximarse a la práctica docente en general, y al análisis del conocimiento en particular. Tanto la construcción de la definición como la propuesta de clasificación que aportamos vienen acompañadas de ejemplos y reflexiones alrededor de episodios de aula.

CONEXIONES MATEMÁTICAS E *INTERCONCEPTOS*

La idea de conexión que subyace en una gran parte de los trabajos que se ocupan de las conexiones en educación matemática es cercana a su utilización en el lenguaje natural: se produce una conexión cuando se establece una relación entre dos elementos de forma que el enlace se basa en un principio de lógica, coherencia y continuidad (Frykholm y Gasson, 2005 ; Rowland et al., 2009; Lockwood, 2011). Esta definición de conexión permite una aproximación a la matemática escolar en la que se enfatiza la importancia de establecer relaciones entre aspectos diferentes de un mismo concepto, entre conceptos diferentes o entre un concepto matemático y una situación extra matemática. Las investigaciones de algunos autores confirman cómo este conocimiento conectado es más sólido y duradero (Bamberger y Odendorf, 2007).

Uno de los problemas que tiene esta definición impersonal y objetiva de conexión es que en la práctica del aula de matemáticas las conexiones no siempre son acertadas, aunque respondan a relaciones lógicas, coherentes o continuas. Por ejemplo, en el contexto del tema de introducción a la aritmética con enteros la profesora propone a los alumnos dos ejercicios, dirigidos a estudiar las técnicas y las notaciones implicadas en la potenciación. Después de estudiar las propiedades de las potencias positivas y negativas, surge la discusión sobre la diferencia entre -2^5 y (-2)^5:

> Profesora: Atención todos a este problema. Pol, [dí el resultado de] (-2^5). Leamos lo que hay en la pizarra. El número que se replica es el 2. El menos no se replica. ¿Y por qué, Lorena, la importancia de los paréntesis? Porque el – no está dentro del paréntesis. ¿Sí lo vemos? Si quisiéramos que fuera el – 2 replicándose tendríamos que haber puesto un paréntesis; pero en estos momentos lo único que se replica es el 2, o siendo purista el +2. ¿De acuerdo? El +2.
>
> Lorena: Pero, ¿no es negativo?
>
> Profesora: Será negativo el resultado final, pero el número que se replica es el 2. Esto que tengo en la pizarra -(2)^5 y esto -(+2)^5 es lo mismo
>
> Lorena: ¿Y por qué pone negativo?
>
> […]
>
> Pol: Lo que no entiendo es por qué da el mismo resultado [en -2^5 y (-2)^5]. O sea -32.

Ante la dificultad de diferenciar las dos expresiones anteriores, Pol fija su atención en el resultado y encuentra que los resultados de ambas operaciones son el mismo. Aquí aparece una conexión basada en el principio de transitividad: si -2^5 = - 32 y - 32 = (-2)^5, por tanto -2^5 = (-2)^5. Sin embargo, aunque la relación establecida por el alumno entre los dos resultados sea lógica y coherente, es errónea. Cuando se pone de manifiesto una relación errónea como la de este ejemplo, entendemos esta relación como un *síntoma* de que existe otra conexión no explícita, que es la que permitiría corregir el error y que es la que nos interesa.

Otro ejemplo de relación errónea en el episodio anterior se encuentra en la intervención de Lorena: en ese momento, debería manifestarse la conexión entre los distintos significados del signo menos –como operador y como indicador de número negativo- y sin embargo no es así. Si nos restringimos a la definición general anterior, el error de Lorena no se consideraría una conexión en tanto que no es una relación coherente. Sin embargo, la explicitación de ese error nos permite detectar que existiría una conexión que permite relacionar los diferentes significados del signo menos. Por tanto, nuestro enfoque pretende incluir en la conceptualización de conexión aquellas que no siendo explícitas conducen a corregir errores –estos sí explícitos en la práctica- que se producen al establecer relaciones coherentes y continuas pero que no están bien construidas matemáticamente.

Por otra parte y desde un punto de vista interno, aunque en esencia una conexión sea una relación entre dos elementos, en su estructura interna presenta una estructura compleja que consiste en la construcción sucesiva de significados. Presmeg (2006), al analizar el establecimiento de conexiones en el aula por parte del profesor desde una perspectiva semiótica revela su complejidad, ya que la forma en que se construye la cadena de significados que permite establecer una conexión implica la construcción parcial de significados, que a su vez se conectan con otros y construyen sucesivamente otros nuevos.

La construcción de cadenas de significado en matemáticas requiere del establecimiento de transformaciones entre representaciones. Según Duval (2006), estas transformaciones son de dos tipos: los tratamientos y las conversiones. Los *tratamientos* son las transformaciones que se producen dentro de un mismo registro, por ejemplo, al cambiar una determinada operación de su representación decimal a su representación fraccionaria. Las *conversiones* son las transformaciones que se producen entre registros diferentes, como por ejemplo transformar gráficos cartesianos en ecuaciones, o representar operaciones con enteros sobre la recta numérica. Cada una de estas tipologías se relaciona con una dificultad fundamental en la construcción de conocimiento matemático, en tanto que representan las tipologías de situaciones a las nos enfrentamos al construir conocimiento matemático.

En los tratamientos, las dificultades se relacionan con la complejidad propia del registro que se utilice. En el caso de los registros multifuncionales -como el lenguaje natural o de problemas presentados en un contexto de visualización geométrica- se producen múltiples posibilidades en la interpretación de la información, lo que dificulta la identificación de la información con relevancia matemática. Los registros multifuncionales permiten una aproximación sencilla a la situación que se pretende trabajar, pero la falta de unas reglas identificables como comunes, generan que las aproximaciones sean también diversas y que por tanto sea más difícil encontrar un punto en común.

Las conversiones presentan problemáticas relacionadas con la posibilidad de establecer relaciones uno a uno entre los dos registros, así como con la organización interna de los elementos relacionados en cada registro (Duval, 2006). Por ejemplo, en el caso de los modelos de desplazamiento, en los cuales los números enteros representan desplazamientos respecto del origen y las operaciones de suma y resta representan las direcciones de dichos desplazamientos. Sin embargo, las estructuras que son válidas en un contexto matemático como - (-a), dejan de tener significado en el modelo correspondiente (posiciones y desplazamientos en una dimensión).

Por tanto, las conexiones están estrechamente relacionadas con el carácter inter relacional de la matemática escolar, donde los conceptos quedan constituidos por una red de definiciones y de propiedades que los relacionan, las representaciones que se les asocian, los procedimientos que permiten operar con ellos y el método que permite avanzar en el conocimiento de la estructura global. Cuando los conceptos de la matemática escolar son entendidos así, como una red coordinada y coherente, los llamaremos *interconceptos* para recoger el conjunto de las definiciones concretas que forman su estructura. Por ejemplo, el área de un cuadrado de lado n y el cuadrado de un número n son, desde esta perspectiva, un mismo interconcepto que en la matemática escolar se presentan a menudo con un significado independiente. La noción de interconcepto es central en lo que sigue para referirnos a la estructura de la matemática escolar, en tanto que a menudo es en la escuela donde se fragmenta esta red conceptual.

DOS NIVELES DE APROXIMACIÓN A LAS CONEXIONES EN EL AULA

Nos interesa generar una herramienta de análisis que permita referirse a las conexiones en un contexto de aula, y por tanto dar cuenta de las que se producen de forma espontánea en la clase de matemáticas y no únicamente en actividades diseñadas ad hoc para promover el establecimiento de conexiones. En este sentido, las conexiones deben ser analizadas teniendo en cuenta tanto el contexto de aula en que se producen como cada una de las intervenciones que añaden significado a la conexión.

Por lo tanto, entendemos las conexiones como una red de enlaces que permiten coordinar nuevos significados, y las describiremos desde dos niveles. Por un lado, nos interesa caracterizar la estructura interna de las conexiones, dando cuenta de cómo se producen los enlaces y en base a qué principios se establecen. Por otro lado, nos interesa la funcionalidad de la conexión, entendida como unidad, en la construcción de conocimiento matemático. Este nivel implica considerar la conexión en el contexto de aula en el que se produce. La clasificación que proponemos en el siguiente apartado responde a estos dos niveles de aproximación.

En el episodio que se describe a continuación se ilustra cómo las conexiones que aparecen en un contexto de aula admiten estos dos niveles de aproximación que, aunque complementarios, permiten extraer conclusiones diferentes. La profesora pide a los alumnos que expliquen cómo han resuelto la operación (-5)^7/(-5)^7. Los alumnos proponen las siguientes tres opciones:

> Marina: Averiguar primero qué da cada uno y después, o sea y el restar los exponentes que para uno, me daría cero y al final daría uno.
>
> Ariadna: Yo iba a hacer (-5)·(-5)·(-5)·(-5)·(-5)·(-5)·(-5), poner los números así (indica con la mano arriba y abajo) y tacharlos
>
> Martí: No, yo. Pues como eran dos números iguales, es como hacer 2 entre 2 y da 1

En este caso, se produce una conexión entre tres procedimientos diferentes para una misma operación. Desde una perspectiva interna analizamos cuáles son los argumentos que permiten justificar la relación entre las tres expresiones anteriores y cuáles son las conclusiones que se persiguen. Sin embargo, desde una perspectiva global nos interesa analizar la función que cumple esta conexión en el contexto matemático en el que se produce. En este caso particular, el hecho de hacer explícita la conexión entre estas tres representaciones permite profundizar en el conocimiento de Z, coordinando este conocimiento con el conocimiento de la aritmética en N. Además, se profundiza en el papel del 1 como elemento neutro de Z, al tiempo que se produce una clara relación entre la estructura multiplicativa de las bases y la estructura aditiva que aparece en los exponentes.

En consecuencia, entenderemos las conexiones como redes de enlaces que coordinan definiciones, propiedades, técnicas y procedimientos para construir interconceptos. Dichos enlaces son vínculos lógicos y coherentes entre representaciones –en el sentido de Duval- y su interpretación errónea o incompleta da lugar a errores comunes en la matemática escolar. Las características de las conexiones, y por tanto la clasificación que ofrecemos, dependen de la relación última que se quiere establecer así como del proceso de construcción parcial de significados que la constituye.

UNA PROPUESTA DE CLASIFICACIÓN PARA LAS CONEXIONES EN EL AULA

El conocimiento matemático tiene una naturaleza dual (Onrubia, Rochera y Barberá, 2001), ya que conviven en él aspectos internos que se refieren a sus propias estructuras abstractas junto con otros aspectos externos vinculados con el mundo real. Las características que determinan esta diferenciación entre aspectos internos y externos en la actividad matemática producen a su vez una diferencia en las tipologías de relaciones que se pueden establecer y por tanto una diferencia en la tipología de las conexiones. La naturaleza de las situaciones que se deben relacionar tiene características diferentes relacionadas con los objetivos, los contextos, los lenguajes y los conocimientos asociados a cada situación (Walkerdine, 1998; Fryckholm y Glasson, 2008).

Así pues, aparece una primera diferenciación entre conexiones que se producen en la vertiente interna de las matemáticas, que llamaremos conexiones intra matemáticas, y conexiones que establecen una relación con una situación de un contexto extra matemático, que llamaremos extra matemáticas. Éstas últimas se caracterizan principalmente por conectar las matemáticas con situaciones que: (a) tienen unos objetivos claramente diferentes a los de la actividad matemática escolar; (b) utilizan una tipología de discurso diferente a la que se utiliza en el aula de matemáticas y; (c) requieren de una simbología y un lenguaje que difieren de forma marcada de la simbología y la terminología utilizada en matemáticas (Walkerdine, 1998). En esta categoría incluimos las conexiones entre contenidos matemáticos y situaciones de la vida diaria, conexiones entre contenidos matemáticos y otras disciplinas curriculares y conexiones entre contenidos matemáticos y modelos que se les asocian construidos a partir de referentes reales, como pueden ser los modelos de desplazamiento asociados a la aritmética con enteros.

Dentro de las conexiones intra matemáticas, nos encontramos a su vez con dos sub tipologías: las conexiones relacionadas con procesos transversales y las conexiones conceptuales. Las conexiones relacionadas con procesos transversales son las relaciones que se establecen entre un concepto matemático y un proceso matemático transversal a todos los contenidos, en concreto consideramos las conexiones que establecen relaciones con el razonamiento y la justificación, y con las heurísticas relacionadas con la resolución de problemas. Por ejemplo, en el siguiente episodio se puede ver cómo en la resolución de un ejercicio de cálculo del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo de un par de números, un alumno observa que existe una regularidad cuando uno de los números es múltiplo del otro e interviene en clase para comentarla:

Asad: El pequeño es el m.c.d y el grande es el m.c.m

Profesora: ¿Siempre?

Asad: Bueno, en estos casos

Martí: Cuando un número es múltiplo de otro también será el mcm

Profesora: Bueno, a ver lo que ha dicho Martí. Tenemos una sospecha. No copiéis que solo es una sospecha. Martí, ¿me dictas? Todavía no lo hemos comprobado.

[…]

Profesora: Si un número a es divisor de otro número b, quien es el m.c.m (a, b)?

Varios alumnos: b

Profesora: ¿Por qué? Porque una cosa es la sospecha, y otra estar seguros. Ahora todo el mundo deja la libreta, porque vamos a hacer nuestra primera demostración matemática.

[La profesora dirige el razonamiento basado en analizar las listas ordenadas de los divisores de a y b.]

Profesora: No puede haber más divisores comunes, o sea que a es el máximo de los divisores comunes. Sospecha comprobada. Ahora, una conclusión que me gusta mucho. Si una cosa se cumple una, dos o cuatro veces, no necesariamente tendrá que pasar siempre.

En este caso, la profesora aprovecha las observaciones hechas por Asad y Martí para analizar en profundidad la hipótesis propuesta por los alumnos y guiarlos en la construcción de un razonamiento matemático riguroso. La relación que se produce en el aula no pretende únicamente enlazar el procedimiento de cálculo del m.c.m y del m.c.d con la propia definición de múltiplo y divisor entre dos números, sino que busca conectar esta relación particular con las ideas de generalización y demostración. Dicha conexión se produce de forma profunda, explicitando los principios que nos permiten avanzar en el razonamiento y por tanto mostrando diferentes niveles de certeza en matemáticas (sospecha-hipótesis y verificación general-demostración)

Finalmente, las conexiones conceptuales son las relaciones que se establecen entre representaciones, procedimientos o técnicas asociadas a un concepto, o a conceptos diferentes. Estas conexiones se diferencian a su vez en dos tipologías, las que implican conversiones en el sentido propuesto por Duval (2006), y las que únicamente implican que aparezca un tratamiento. En el caso de los números enteros un ejemplo de conversión seria la conexión entre una operación combinada de números enteros y su traducción a movimientos entre puntos de la recta numérica. Dentro del segundo están la mayoría de las conexiones que se producen en el aula de matemáticas, ya que al no producirse cambios de registro, muchos tratamientos pueden presentarse de forma algorítmica (Duval, 2006). Un ejemplo de este segundo caso sería la conexión presentada en el episodio en el que se relacionaban procedimientos para la resolución de (-5)^7/(-5)^7. En la figura siguiente presentamos un resumen de las tipologías de conexiones que proponemos.

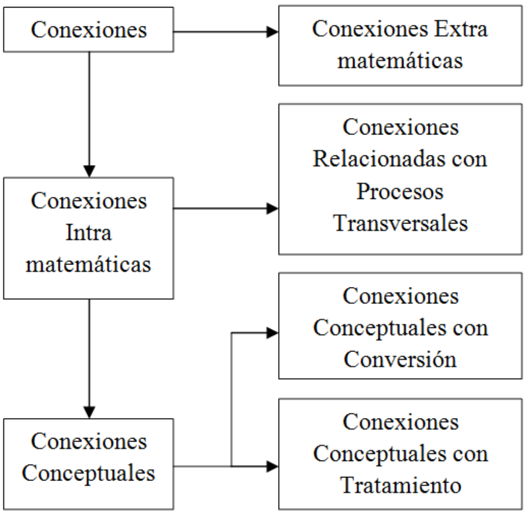


Figura 1. Clasificación de las conexiones

CONSIDERACIONES FINALES

La definición de conexión y la clasificación presentadas en este documento pretenden contribuir a la caracterización explícita de un concepto ampliamente usado en la didáctica de la matemática como es el de conexión. La clasificación que presentamos establece criterios de identificación que enfocan tanto las características de los enlaces parciales que constituyen la conexión como el contexto en que se producen. Esta dualidad de enfoques permite construir un marco coherente de aproximación a la práctica de aula.

Dado que el profesor es quien gestiona la actividad del aula, y quien en muchos casos valida los diferentes razonamientos que aparecen, su capacidad en términos de conocimiento para ayudar a los alumnos a establecer conexiones es determinante. Por tanto, este marco ha de permitirnos identificar rasgos del conocimiento del profesor que se relacionan con la aparición de conexiones, así como relacionarlos con diferentes dimensiones del conocimiento del profesor utilizadas por las propuestas teóricas actuales y a su vez complementarlos. En los episodios discutidos en este documento se puede identificar que los conocimientos requeridos por el profesor para guiar a los alumnos en el establecimiento de conexiones son diferentes en cada tipo de conexión.

En el caso de las conexiones extra matemáticas, los conocimientos requeridos por el profesor se relacionan con el conocimiento de las posibles situaciones que se pretenden conectar con las matemáticas, así como con un conocimiento didáctico que le permita escoger las situaciones más idóneas para ejemplificar un concepto matemático. En el primer caso, se trata de un conocimiento tan variado que no hemos identificado una relación directa con ninguna de las categorías propuestas por los modelos que utilizamos. En el segundo caso, identificamos aspectos relacionados con diferentes categorías propuestas como son el Conocimiento de los Contenidos y los Estudiantes, y el Conocimiento de Contenidos y la Enseñanza en el modelo de Ball et al., (2008) o el Conocimiento de la Enseñanza y de las Matemáticas en el modelo de Carrillo et al., (2009).

En el caso de las conexiones relacionadas con procesos transversales –tercer episodio analizado-, el conocimiento que identificamos es un conocimiento profundo de la actividad matemática que le permita al profesor guiar a los alumnos en la construcción de razonamientos y en la utilización de heurísticas. Estos conocimientos se relacionan con el Conocimiento de la Práctica Matemática (Carrillo et al, 2011) así como con la categoría de Transformación (Rowland et al., 2009).

En el caso de las conexiones conceptuales –primer y segundo episodios analizados- identificamos, por un lado, un conocimiento profundo de los contenidos que se están trabajando. Esta tipología de conocimiento la relacionamos con el Conocimiento de la Estructura Matemática (Carrillo et al., 2011), con el Conocimiento Especializado del Contenido (Ball et al., 2008) así como con la categoría de Fundamentos (Rowland et al., 2009). Por otro lado identificamos un conocimiento didáctico –relacionado con las categorías explicadas más arriba- que le permita identificar errores recurrentes por parte de los alumnos, así como analizar las situaciones más propicias para realizar diferentes transformaciones entre representaciones.

El modelo teórico propuesto permite identificar y clasificar conexiones en un contexto de aula. Además, las diferentes tipologías para las conexiones se relacionan con aspectos diferentes del conocimiento del profesor. El análisis de la relación entre las tipologías de conexión y las tipologías del conocimiento del profesor producirá resultados en dos líneas principales. Por un lado, permitirá identificar los rasgos del conocimiento de profesor que se asocian a la aparición de determinados tipos de conexiones, lo que aportará información relacionada con el desarrollo del conocimiento del profesor dirigido a mejorar su capacidad para establecer y gestionar conexiones en el aula. Por otro lado, permitirá avanzar en el análisis de las relaciones que existen entre las diferentes categorías de conocimiento propuestas en los modelos de conocimiento mencionados en el documento.

Referencias

Ball, D.L., Thames, M.H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for Teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407

Bamberger, H., y Oderdorf, C. (2007) *Introduction to Connections Grades 3–5*. Portsmouth: Heinemann

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. *Procceedings of Eight ERME Congress*. (pp. 2985-2994). Anatalya, Turkey.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. *61*, 103-131.

Frikholm, J. A., y Glasson, G. E. (2005). Connecting Science and Mathematics instruction: Pedagogical content knowledge for teachers. *School Science and Mathematics*, 105(3), 127-141.

Lockwood, E. (2011). Student connections among counting problems: an exploration using actor-oriented transfer. *Educational Studies in Mathematics, 78*(3), 307-322.

Martínez, M., Giné, C., Fernández, S., Figueiras, L., y Deulofeu, J. (2011). El conocimiento del horizonte matemático: más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro. En M, Marín, G. Fernández, L.J. Blanco, M. Palarea (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XV*. (pp. 429-438) Ciudad Real: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Onrubia, J., Rochera, MJ., y Barberà, E. (2001). La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva psicológica. En Coll, C., Palacios, J., Marchesi, A. (Coords). *Desarrollo psicológico y educación 2: Psicología de la educación escolar.* Madrid: Alianza.

Presmeg, N. (2006). Semiotics and the "connections" standard: Significance of semiotics for teachers of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*,163-182.

Rowland, T., Turner F., Thwaites, A. y Huckstep, P. (2009). *Developing primary mathematics teaching*. London: SAGE publications.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15* (2), 4-14.

Walkerdine, V. (1988). The mastery of Reason: Cognitive Developments and the Production of Rationality. New York: Routlege.

RAZONAMIENTO INFERENCIAL INFORMAL: EL CASO DE LA PRUEBA DE SIGNIFICACIÓN CON ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Inferential informal reasoning: the case of significance test

Víctor N. García, Ernesto A. Sánchez

Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México

Resumen

El presente trabajo es un estudio exploratorio sobre el razonamiento inferencial informal (RII) llevado a cabo con estudiantes de bachillerato (15-17 años). Se les aplicó un problema que se refiere formalmente como prueba de hipótesis sobre proporciones. Las respuestas se organizaron y analizaron con base en un marco conceptual formado por tres categorías. Como resultado, se observó que las respuestas de los estudiantes combinan sus conocimientos informales acerca del contexto y los datos del problema. El contexto familiar provocó poca dificultad para hacer inferencias adecuadas; consecuencia de un razonamiento adecuado debido a que la mayoría reconoce el modelo probabilístico debido al azar y se razona apropiadamente con él. Se concluye que el razonamiento en la prueba de significación es más natural para los estudiantes y es una pauta para desarrollar el RII así como el uso de contextos familiares.

Palabras clave: *Inferencia estadística, razonamiento informal, prueba de significación.*

Abstract

The present work is a study on the informal inferential reasoning (IIR) conducted with high school students (15-17 years). A problem formally referred as test hypotheses about proportions was applied. The responses were organized and analyzed based on a conceptual framework consisting of three categories. As a result, it was observed that the responses of students combine their informal knowledge about the context and the problem data. The familiar context caused little difficulty about drawing inferences consequence of adequate reasoning. Most recognize the probabilistic model due to chance and properly reason with it. In conclusion the reasoning within significance test is more natural for students and is a guideline to develop the RII as well as the use of familiar contexts.

Keywords: *Statistical inference, informal reasoning,* test *of significance*.

INTRODUCCIÓN

En las sociedades modernas, cada vez es más frecuente que las personas en sus actividades profesionales y en su vida diaria se vean en la necesidad de saber interpretar y comprender información sobre gran diversidad de temas (economía, política, negocios y finanzas, salud, demografía, deportes, etc.) y deben tomar decisiones involucrando conceptos matemáticos de carácter cuantitativo y probabilístico. Garfield y Ben-Zvi (2008) consideran que el estudio de la estadística proporciona a las personas las herramientas y las ideas para enfrentarse inteligentemente a la información numérica que emerge del mundo cotidiano. Y Dentro de la estadística, la inferencia es fundamental. Ésta se define como la teoría, los métodos y la práctica de hacer juicios acerca de una población usualmente con base en la información que proporciona una muestra aleatoria.

De la literatura sobre el tema (Castro-Sotos, et al., 2007) se concluye que la estadística inferencial formal es un tema difícil de aprender, los resultados de muchos estudios empíricos informan que

García, V. N., Sánchez, E. A. (2014). Razonamiento inferencial informal: el caso de la prueba de significación con estudiantes de bachillerato. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 345-354). Salamanca: SEIEM.

estudiantes e incluso profesores persistentemente cometen errores conceptuales. Una de las razones puede provenir del hecho de que el tratamiento de la inferencia en los cursos de estadística del bachillerato y primer curso universitario, oscila entre el aprendizaje de procedimientos rutinarios (recetas) y reproducción de aspectos formales. En general, el tratamiento en la enseñanza del tema de inferencia no ofrece a los estudiantes la oportunidad de discutir y entender las principales ideas subyacentes en los procedimientos inferenciales, antes de formalizarlas con los conceptos matemáticos correspondientes. Podría incluso parecer extraño a los profesores distinguir entre las principales ideas subyacentes a la inferencia y sus definiciones y procedimientos formales.

Esto ha motivado el interés por estudiar la Inferencia Estadística Informal (IEI) y el Razonamiento Inferencial Informal (RII), con los objetivos de: 1) descubrir y describir formas en que sea posible que los estudiantes desarrollen ideas centrales de la inferencia estadística sin utilizar el aparato matemático que las fundamenta, y 2) crear un repertorio de problemas y actividades que jueguen un papel de antecedente o sustrato en el aprendizaje de los estudiantes sobre el cual puedan construir los conocimientos formales de la inferencia estadística. Concebimos a la presente investigación como una exploración inicial cuyos resultados sirvan de base para elaborar una estrategia de enseñanza de temas enmarcados en la IEI y el RII. Se parte de la hipótesis de que uno de los principios del enfoque constructivista aplicado a la enseñanza, es la recomendación de que el diseño de cualquier aprendizaje nuevo debe utilizar y articularse con los conocimientos que ya posee el aprendiz. En consecuencia, si se pretende desarrollar el razonamiento inferencial de los estudiantes, conviene tener instrumentos para saber cuáles son los conocimientos y razonamientos con los que cuentan y que naturalmente ponen en juego en tareas de inferencia y las falsas concepciones que los limitan u obstruyen.

El presente estudio tiene el propósito de explorar los conocimientos y razonamientos que los estudiantes ponen en juego frente a una tarea de inferencia, sin aún haber estudiado el tema. Las preguntas de investigación son: ¿Qué elementos intervienen en el razonamiento de los estudiantes de bachillerato al hacer inferencias estadísticas sin los métodos y técnicas formales? ¿Cuáles son las dificultades y errores que se presentan para hacer inferencias estadísticas informales de estudiantes de bachillerato?

ANTECEDENTES

Las investigaciones sobre RII se dividen en dos clases diferentes (aunque relacionadas), a saber, una que contiene estudios sobre la naturaleza del RII y otra que incluye estudios que se refieren al desarrollo del RII. Los de la primera clase se centran en caracterizar el RII y en determinar los tipos de razonamiento que emergen al hacer inferencias al resolver problemas con información estadística dada. Los de la segunda, diseñan y evalúan actividades para que los estudiantes adquieran recursos que les permitan resolver problemas de inferencia sin utilizar los métodos formales. En lo siguiente, se refieren sólo algunos estudios de la primera clase, a saber; 1) los que se ubican en el nivel bachillerato y, 2) que tratan la caracterización del RII.

Varios trabajos publicados en los últimos años, aluden a los conceptos de IEI y RII; sin embargo, todavía no hay consenso acerca de lo que significan estos dos términos exactamente. En un intento de combinar las distintas perspectivas, Zieffler, Garfield, delMas, y Reading (2008) definen RII como “la forma en que los estudiantes usan sus conocimientos informales de estadística para crear argumentos basados en muestras observadas que sustenten las inferencias hechas sobre la población desconocida” (p.44). Estos autores, también proponen un marco conceptual para caracterizar el RII y apoyar el desarrollo de tareas que permitan examinar el RII natural de los estudiantes, así como el desarrollo de tal razonamiento.

Existen relativamente pocos trabajos sobre la naturaleza del RII en estudiantes de bachillerato (15-17 años). Hay dos de ellos que conviene considerar. En el primero, Rossman (2008) ofrece una caracterización de la inferencia estadística informal a través de establecer algunos rasgos esenciales de las situaciones y problemas de inferencia estadística y mostrando cómo, para resolverlos, se pueden utilizar métodos informales; dichos rasgos son: a) la información que proporciona la muestra, b) un modelo de probabilidad de la situación y c) el efecto del tamaño de la muestra sobre la fuerza de la conclusión. En el segundo, Zeiffler et al. (2008) proponen la definición de RII citada arriba y exponen tres tipos de actividades que deben ser generadas por las tareas para desarrollarlo: a) hacer juicios, aserciones o predicciones sobre poblaciones con base en una muestra, b) recuperar, utilizar e integrar conocimientos previos disponibles y pertinentes y 3) elaborar argumentos para apoyar los juicios, aserciones o predicciones.

Además de los aspectos mencionados por Rossman (2008) y Zeiffler et al. (2008), se ha señalado que en las inferencias informales, el contexto es crucial, como lo confirma la publicación de un número especial de Mathematical Thinking and Learning (Pfannkuch, 2011). Cobb y Moore (1997) recuerdan que en estadística los datos no sólo son números, sino son números en un contexto. Pfannkuch (2011) pone de relieve la dificultad de manejar el contexto por los estudiantes cuando aprenden a hacer inferencias, pues a veces es necesario incluir información del contexto al hacer la inferencia; pero en otros casos conviene hacer abstracción de ella; y centrarse sólo en los aspectos importantes de la inferencia. Makar et al. (2011) ubican al contexto como un elemento fundamental dentro del RII, ya que el razonamiento debe ser un proceso de generación de sentido impulsado por las dudas y las creencias, dando lugar a inferencias y explicaciones.

En general, las investigaciones en las que el objetivo explícito es desarrollar el RII también son aún escasas, aunque quizá un buen número de trabajos realizados con otros objetivos bien pueden asimilarse a ellas. De cualquier manera, parece importante ampliar, reforzar y profundizar estudios en esta línea; ésta es la intención de la investigación de la cual se deriva la presente comunicación. En García (2013) se ofrece un informe basado en algunos datos de la presente investigación sobre RII.

MARCO CONCEPTUAL

En este trabajo, se entiende por Marco Conceptual a un número reducido de categorías que indican los aspectos principales a tener en cuenta en el trabajo y sus posibles relaciones (Miles & Huberman, 1994).

Razonamiento informal y razonamiento intuitivo

En este estudio se considera -con Voss, Perkins y Segal (1991)- que el razonamiento informal es el que se lleva a cabo en situaciones no deductivas que afectan todas las facetas de la vida; son esencialmente los pensamientos que se dan en las situaciones de la vida cotidiana y del trabajo. El razonamiento informal es una clase de argumentación, en la cual la calidad del argumento no se determina en términos de un conjunto de reglas lógicas que indican si la conclusión es válida o no, sino que se juzga en términos de su solidez; ésta se refiere a: 1) Si las razones que apoyan el argumento son verdaderas o aceptables. 2) En qué medida las razones argumentadas apoyan la conclusión a la que llega el individuo. 3) En qué medida se han tenido en cuenta los contra argumentos, esto es, las razones que apoyan las decisiones o posiciones diferentes que toma el individuo.

El conocimiento informal dentro del campo de educación matemática es visto o bien como un tipo de conocimiento cotidiano del mundo que los estudiantes poseen con base en las experiencias fuera de la escuela, o como un conocimiento menos formal de los temas que resultan de la enseñanza formal previa; en este trabajo es visto como la integración de ambos. Este punto de vista sugiere que es importante estudiar y considerar el papel del conocimiento informal en el estudio formal de un tema en particular, es decir, que el conocimiento informal es un punto de partida para el desarrollo de la comprensión formal (Zieffler et al., 2008).

El razonamiento intuitivo a diferencia del informal no tiene que ver con la argumentación, sino con una respuesta inmediata y con el uso de algún conocimiento inicial (informal o formal) y sin ningún tipo de operación o cálculo (representado en las respuestas). La intuición cambia conforme a la madurez del estudiante pero cumple con la inmediatez y su carácter global y autoevidente (Fischbein, 1987). Es importante hacer la distinción entre razonamiento informal e intuitivo porque son dos razonamientos con diferente complejidad estructural.

Componentes de la IEI y el RII

La inferencia estadística informal (IEI) es una generalización probabilística (no determinista) de los patrones que son revelados por los datos disponibles (Makar & Rubin, 2009), y esta generalización es el producto final de un RII (Makar, Bakker & Ben-Zvi, 2011). Una inferencia estadística informal se representa mediante un enunciado, mientras que el razonamiento inferencial informal es el proceso mediante el cual se descubren y establecen dichos enunciados. El RII es la forma en que los estudiantes usan sus conocimientos para hacer y sustentar inferencias estadísticas sobre una población desconocida basadas en muestras observadas y sin utilizar los métodos o técnicas formales de la estadística inferencial, como el uso de distribución muestral, desviación estándar, puntuación estándar, etc. Zieffler et al. (2008) establece tres componentes características del RII: 1) Hacer juicios o predicciones sobre la población a partir de muestras, pero sin el uso de procedimientos y métodos estadísticos formales. 2) Utilizar e integrar el conocimiento previo (conocimiento formal e informal) al grado en que este conocimiento esté disponible. Cualquier inferencia se hace a partir de un conjunto de datos y de una teoría (científica o personal, explícita o implícita) que permite interpretar tales datos. 3) La articulación de los argumentos basados en la evidencia para los juicios, reclamos, o predicciones sobre la población a partir de muestras.

Pruebas de significación

Dentro de la inferencia frecuencial hay dos concepciones sobre los contrastes estadísticos: (a) las pruebas de significación, que fueron introducidas por Fisher y (b) los contrastes como reglas de decisión entre dos hipótesis, que fue la concepción de Neyman y Pearson (Batanero, 2011). La enseñanza ignora estas diferencias y presenta los contrastes de hipótesis como si se tratase de una única metodología. El razonamiento que apoya un test de significación parte de la suposición de que la hipótesis nula es cierta. Bajo este supuesto, se calcula la distribución del estadístico en todas las posibles muestras de la población. A partir de esta distribución se calcula la probabilidad del valor particular del estadístico obtenido en la muestra y se determina a cuál de las dos clases (resultado significativo y no significativo) pertenece. Si el valor obtenido pertenece a la región de resultado significativo se rechaza la hipótesis y en caso contrario no se rechaza. El valor de la probabilidad por debajo de la cuál rechazamos la hipótesis lo fija el investigador según su juicio subjetivo y su experiencia.

El contexto

El contexto del problema se refiere a la situación del mundo real de la que surgió el problema. El contexto incluye: conocimiento de la situación del mundo real, es decir, el conocimiento del tema y cuando se trata de datos dados, el conocimiento de cómo se generaron los datos, tales como el diseño del estudio y cómo las variables fueron definidas y medidas. El contexto es de suma importancia pues toda persona está impregnada de sus creencias y conocimientos, producto de sus experiencias cotidianas. El contexto es una de las principales características que separan a la estadística de las matemáticas.

METODOLOGÍA

El acopio de datos se llevó a cabo mediante un cuestionario escrito administrado a 16 estudiantes del tercer semestre de bachillerato de una escuela pública, con edades de entre 16 y 17 años; en el periodo en que se realizó el estudio ellos estaban matriculados en materias de tronco común (sin cursos de probabilidad y estadística). El cuestionario aplicado consta de dos problemas (en el presente trabajo se presenta un problema) pertenecientes al tema de contraste de hipótesis de proporciones. Este problema a su vez está dividido en dos partes; A y B. El problema extraído de Triola (2004) dice: "ProCare Industries alguna vez ofreció un producto llamado 'Gender Choice', el cual, según afirmaciones publicitarias, permitía a las parejas incrementar sus posibilidades de tener una niña. Supón que realizamos un experimento con 100 parejas que desean tener una niña, y todas ellas siguen el tratamiento de Gender Choice. Si de las 100 parejas que usaron Gender Choice, 52 (90 en la parte B) tuvieron niñas ¿Qué puedes concluir acerca de Gender Choice? Cada parte (A y B) tiene la siguiente pregunta adicional: "¿Qué crees que sea más probable; que el resultado se deba al azar o a la efectividad del producto?" Esta pregunta se debe responder para los resultados de 52 niñas y 90 niñas de 100 nacimientos.

ANÁLISIS DE LOS DATOS

Las componentes características del RII señaladas por Ziffler et al. (2008) se encontraron de manera incipiente en todas las respuestas de los estudiantes, es decir, formularon juicios, utilizaron sus conocimientos previos y trataron de articular un argumento; en consecuencia se buscaron otras categorías para analizar los datos; éstas fueron tres: 1) la hipótesis, 2) la argumentación para establecer la significación y 3) la inferencia final que corresponden a tres momentos importantes en una prueba de significación. Se observa en las respuestas, en primer lugar, la hipótesis que hacen los estudiantes (explícita o implícitamente) con relación al modelo de población, es decir, la proporción de mujeres que suponen hay; aunque pareciera obvio que el modelo es que hay 50% mujeres, varios creen que es mayor. También se observa qué elementos consideran para establecer la significación, si toman los datos y cómo, o si sólo se basan en sus creencias, o en una combinación de ambos. Finalmente, se observa su conclusión final, si aceptan que un hecho raro a ocurrido (por ejemplo en el caso de 90 niñas de 100) o lo atribuyen a un efecto del tratamiento.

La hipótesis

En las respuestas de los estudiantes se pudieron identificar tres hipótesis; cada estudiante se basó en una de ellas para dar su repuesta. En la Tabla 1 se muestra la clasificación general de las respuestas (que se indican con R1, R2,…R16) dadas por los estudiantes, en función de la hipótesis que subyace explícita o implícitamente en ellas. En diez (63%) se considera que un 50% de la población está formada por mujeres, mientras que una sola respuesta (7%) cree que el 80% son mujeres; no se considera esta respuesta como incorrecta, pues es la interpretación del estudiante y tendrá que razonar a partir de dicho modelo. Cuatro estudiantes (25%) consideran que hay una mayor población de mujeres pero no especifican algún porcentaje. Éstas hipótesis y los estudiantes que las supusieron son las mismas para la parte B, pues en ella sólo cambió la muestra (90 niñas) del problema.

Tabla 1. Clasificación de las respuestas de acuerdo a la hipótesis (nula) supuesta

Hipótesis	Estudiantes	Total (%)
50% es mujer	R1, R2, R4, R6, R8, R9, R13(implícitamente)	7 (44%)
	R7, R10, R11, R16 (explícitamente)	4 (25%)
80% es mujer	R3	1 (6%)
mayor a 50%	R5, R12, R14, R15	4 (25%)

A continuación se ofrecen unos ejemplos de las respuestas de los estudiantes que ejemplifican cada hipótesis.

50% es mujer. En la respuesta de R6 (figura 1), se establece implícitamente la hipótesis de que el 50% es mujer. En efecto, dado que el estudiante indica que 52% es mayoría tiene como referencia al 50.

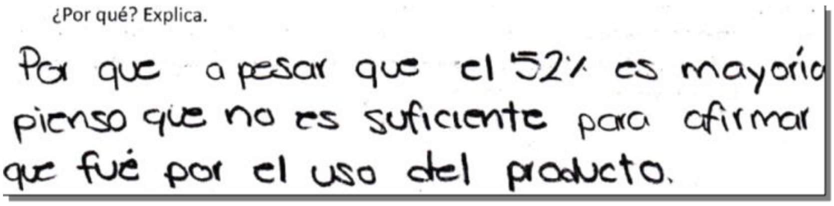


Figura 1. Respuesta de R6

En la respuesta R10 dice "Existe la misma probabilidad que 50 de las 100 parejas tuvieran niño o niña y en este caso así fue, a excepción que 2 más tuvieron niña, pero esto no rompe la regla"; es decir, explícitamente se mencionan que las probabilidades de tener un niño y una niña son iguales a 50%. Un caso curioso es el de un estudiante que cree que el 80% de la población es mujer: "Porque la estadística que conozco es del 80% mujeres y 20% hombres. Por tanto, aumentó el porcentaje de obtener niña". Aunque esta creencia está alejada de la realidad, se podría considerar una premisa a partir de la cual se realiza el razonamiento. Se nota sin embargo, que la conclusión no es inapropiada. Varios estudiantes establecieron que la mayoría de la población es mujer pero no especificaron en qué proporción. La respuesta R12 es un ejemplo: "Las probabilidades siempre han sido mayoritarias a tener niñas. Actualmente simplemente en el país hay más mujeres".

En seguida se muestra la comparación de los datos de la muestra con la hipótesis nula de los estudiantes por medio de la argumentación presentada en sus respuestas.

Argumentación

Para evaluar en qué medida los datos de la muestra apoyan o no la hipótesis establecida es necesario decidir si son significativos o no, es decir, si son muy raros bajo la hipótesis aceptada o si indican un resultado 'natural'. Para tomar la decisión los estudiantes utilizaron los datos o sólo su conocimiento informal. En la tabla 2, se observa la clasificación de las respuestas en función de la significación que atribuyen al dato dado.

Tabla 2. Clasificación de las argumentaciones para la significatividad

Respuestas	Argumentación	Parte A	Total (%)	Parte B	Total (%)
Significativo	Con base en datos	R4	2 (12%)	R3,R4,R5,R6, R8, R11,R13,R16	9 (56%)
	Conocimiento informal	R13		R9	
No Significativo	Con base en datos	R1,R3,R5,R6,R7,R8 R9,R10,R11,R12 R14,R15,R16	14 (88%)	R7, R12, R15	7 (44%)
	Conocimiento informal	R2		R1,R2,R10,R14	

Muestra significativa. Para la parte A éstas respuestas son de mala calidad pues 52% es una variación aceptable bajo la hipótesis de que hay 50% de probabilidad de que nazca una niña, por lo que no es un dato significativo. Dentro de estas respuestas hay dos argumentaciones. Una afirma que como 52% es mayor que 50%, la diferencia se explica por un efecto de "Gender Choice", R4: "Pues tal vez el producto si influyó mucho en algunas parejas para poder tener la niña que querían, porque más del 50% la obtuvieron".

Otra respuesta que supone que el estadístico es significativo no tiene en cuenta los datos y sólo se basa en una creencia: "La sugestión del inconsciente del ser humano provoca el nacimiento de la niña. Es como un embarazo ficticio".

Para la parte B las respuestas dentro de esta categoría se consideran de buena calidad pues el 90% de la muestra está a más de 4 desviaciones estándar de la media, por lo que es un dato significativo. R3 concluye que sí funciona "Gender Choice" (es significativo) y argumenta "porque aumento 10% la probabilidad de tener niña" recordemos que su hipótesis es 80% mujer, claramente su argumentación está basada en los datos. R9 por otro lado basa su argumento en sus creencias: "pues ya que este producto va dirigido a la gestación y por lo tanto influye en el feto"

Muestra no significativa. Las respuestas que consideran el valor de la muestra como no significativo tienen dos argumentaciones. La primera es que el estadístico está dentro de lo que consideran como "normal" o como parte del azar, y las que están basadas en conocimiento informal. Un ejemplo de la primera argumentación es la presentada por R10 ya mencionada anteriormente: "Existe la misma probabilidad que 50 de las 100 parejas tuvieran niño o niña y en este caso así fue, a excepción que 2 más tuvieron niña, pero esto no rompe la regla". Argumenta que 2% arriba de 50% no rompe la regla de la probabilidad de 50.

Otro ejemplo corresponde a la respuesta R5: "Por lo regular la tendencia de nazca mujer es más probable que nazca hombre sin tomar nada", sin embargo, su argumentación es diferente que R10, pues R5 se apoya en la hipótesis de que más del 50% son mujeres y que el resultado de la muestra es consistente con su hipótesis.

Una respuesta que concluye que el valor del estadístico de la muestra no es significativo mediante el uso de su conocimiento informal y no de los datos es la de R15: "Reitero, que no creo que un producto pueda alterar los organismos de una humano para poder elegir su sexo".

En la parte B del problema, en el que se supone que en la muestra ocurren 90% de niñas, algunas respuestas argumentaron que era un resultado raro pero posible, ejemplo de este argumento pertenece a R2: "porque no hay prueba o diagnóstico médico que diga que si es por el producto que se vende y no por el azar". Se ubica esta respuesta como no basada en los datos pues se apoya en una creencia idiosincrática del significado de "pruebas o diagnósticos médicos".

Una respuesta interesante y basada en los datos de la muestra es la presentada por R7 quien afirma que sí hubo un incremento pero está dentro de la variación natural "porque la probabilidad de que hayan nacido por el uso del producto no es del 100%, las 90 niñas que nacieron no necesitaron usar el producto, ya que un hijo tiene la probabilidad del 80% se ser niña". Esta hipótesis inicial falsa provocará una inferencia inadecuada. A continuación se presentan las inferencias hechas a partir de las argumentaciones anteriores.

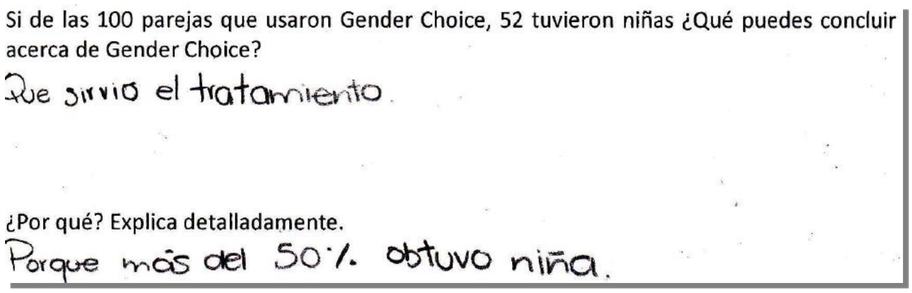
Inferencia estadística informal

Tabla 3. Clasificación de la inferencia

Conclusión	Parte A	Total (%)	Parte B	Total (%)
Rechazar hipótesis (sirve G.C.)	R4, R13, R14	3 (19%)	R3,R4,R5,R6, R8,R9,R11, R13,R16	9 (56%)
No rechazar hipótesis (no sirve G. C.)	R1,R2,R3,R5, R6,R7,R8,R9, R10,R11,R12, R15,R16	13 (81%)	R1,R2,R7, R10,R12,R14 R15	7 (44%)

La tabla 3 muestra la categorización hecha a partir de las respuestas de los estudiantes (inferencias). Para la parte A la conclusión adecuada es no rechazar la hipótesis de 50% mujeres (no sirve "Gender Choice"), mientras que en la parte B es rechazarla (sirve "Gender Choice").

Cabe destacar que algunos estudiantes respondieron con las dos conclusiones (aceptar y rechazar la hipótesis) debido posiblemente al contexto "escolar"; por ejemplo R8 concluyó que sí funcionaba el producto argumentando que la muestra rebaso el porcentaje de su hipótesis nula -se asume que el estudiante pensaba que esa conclusión era la respuesta "correcta"- pero al seguir cuestionándolo cambia su conclusión argumentando con los datos y conocimientos personales (Figura 2 y 3).

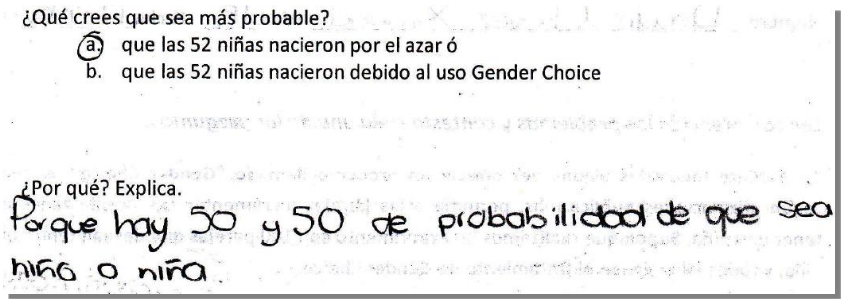

Si de las 100 parejas que usaron Gender Choice, 52 tuvieron niñas ¿Qué puedes concluir acerca de Gender Choice?

Que sirvio el tratamiento.

¿Por qué? Explica detalladamente.

Porque más del 50% obtuvo niña.

Figura 2. Respuesta de R8


¿Qué crees que sea más probable?

a. que las 52 niñas nacieron por el azar ó

b. que las 52 niñas nacieron debido al uso Gender Choice

¿Por qué? Explica.

Porque hay 50 y 50 de probabilidad de que sea niño o niña.

Figura 3. Respuesta de R8

R3 asume una proporción de 80% mujeres en su hipótesis inicial y como 52 es mayoría asume que concuerda con su hipótesis. Pero dicha hipótesis muestra implicaría una hipótesis alternativa: "Gender Choice" disminuye la posibilidad de tener niña, contrario a lo que afirma. Dos estudiantes R1 y R10 argumentaron que la muestra fue coincidencia e infirieron que "Gender Choice" no funcionaba: "Porque sigue siendo coincidencia no porque el producto en verdad funciona".

CONCLUSIONES

Con base en los datos recabados y el análisis hecho en el presente estudio se responderán a las preguntas de investigación.

¿Qué elementos intervienen en el razonamiento del estudiante de bachillerato al hacer inferencias estadísticas sin los métodos y técnicas formales?

Hipótesis nula. La suposición de la hipótesis nula es el primer paso para la prueba de significación, pues establece una pauta para comparar la muestra con dicha hipótesis. Las respuestas de los estudiantes muestran que establecen un modelo inicial de la distribución de la población (hipótesis nula). Para esto utilizan sus conocimientos informales aunque estos puedan ser inadecuados (por ejemplo suponer 80% mujeres). Esas respuestas muestran la importancia de la componente 2) del marco de Zieffler et al. (2008), pues todo estudiante tiene ciertos conocimientos informales los cuales emplean para resolver problemas y es fundamental partir de dichos conocimientos informales para construir nuevo conocimiento.

Argumentación. La estructura del razonamiento de los estudiantes refleja una lógica similar a la de las pruebas de significación de Fisher. Ellos razonan de la siguiente manera: Si la hipótesis de que el producto funciona fuera verdadera, la proporción de mujeres en la muestra debería ser cercana al 100%. Si la muestra no es cercana al 100%, entonces la hipótesis de que producto funciona es falsa. El fallo en este razonamiento es que el límite del 90% para tomar una decisión es demasiado alto, cuando el procedimiento estadístico establece que con 60% sería más o menos adecuado. Cabe señalar que la mayoría de los estudiantes articularon sus argumentos con los datos de la muestra en concordancia con la componente 3) de Zieffler et al. (2008).

Inferencia estadística informal. En la parte A 13(81%) realizaron una conclusión adecuada mientras que en la parte B 9(56%) hicieron una conclusión adecuada. Sin embargo, solamente 7 (R3, R5, R6, R8, R9, R11, R16) estudiantes realizaron conclusiones adecuadas en ambas partes del problema (Tabla 3). El contexto influyó mucho, pues la mayoría no creía que funcionara de verdad "Gender Choice" ello es un factor que explica el mayor índice de acierto en la parte A. El contexto escolar también afecta; en una primera respuesta R8 concluyó que si funcionaba porque la muestra rebasó el 50%, pero en la segunda respuesta rectifica usando sus conocimientos informales y concluyendo que los resultados se debían al azar y no al "Gender Choice". Es posible que su primera respuesta se deba a creer que la respuesta "correcta" del problema era concluir que sí funciona. Todos los estudiantes sacaron una conclusión, esto es parte esencial del RII de acuerdo con la primera componente de Zieffler et al. (2008). Algunas respuestas (R1 y R2) indican que ocurrió un evento raro (ellos lo llaman coincidencia) debido a su creencia de que no funcionaba "Gender Choice". Esta conclusión es una de dos posibles a las que se puede llegar en las pruebas de significación, pero dicha conclusión no se considera por su baja posibilidad, se opta mejor por rechazar la hipótesis nula.

En general se detectaron tres tipos de razonamiento en las respuestas dadas: 1) considerar un modelo o distribución inicial de la población (hipótesis nula) y comparar los datos de la muestra con este modelo, 2) apoyar el razonamiento en el uso de su conocimiento informal y no analizar los datos de la muestra, 3) combinar los dos razonamientos anteriores. No se puede decir que el razonamiento 2) sea incorrecto, a este tipo de razonamiento le llamamos razonamiento intuitivo; los conocimientos sobre el contexto pueden ayudar a hacer una inferencia más profunda (Langrall et al., 2011). Además, no es posible que los estudiantes se basen solamente en los datos, ellos están siempre influenciados por sus experiencias, por ello la importancia de contrastar los conocimientos con los cuales cuenta el estudiante y los datos de la muestra.

¿Cuáles son las dificultades y errores que se presentan en el razonamiento inferencial informal de estudiantes de bachillerato para hacer inferencias estadísticas?

Se encontraron argumentaciones inapropiadas, ya que se utilizaron creencias en el razonamiento en lugar de analizar los datos. Los que utilizaron los datos de la muestra generalmente llegaron a la conclusión adecuada. Las dificultades presentadas fueron: 1) Establecer que 52% es mayoría. No es un argumento fuerte, evidencia una falta de percepción de la variación. 2) No utilizar los datos. Provoca basarse en conocimientos informales, y crear una teoría que confirme dichos conocimientos. 3) Establecer como hipótesis un modelo de 80% mujeres es un argumento falso y forma parte del conocimiento informal, induciendo inferencias de mala calidad. 4) Creer que un evento raro ha ocurrido y seguir aceptando la hipótesis a pesar de la fuerte evidencia en contra debido a conocimientos informales.

El contexto juega un papel importante; los estudiantes utilizaron conocimiento informal en sus argumentaciones, al establecer la hipótesis nula y al explicar las causas de los datos. Este razonamiento muestra que el conocimiento informal puede representar un obstáculo para una inferencia adecuada, por lo que es importante que los estudiantes trabajen con los datos y pasen a segundo plano sus conocimientos informales personales pero sin descartarlas por completo.

El buen desempeño en general; establecer una hipótesis, articular los datos con los conocimientos previos y establecer un juicio (Tabla 1-3) de los estudiantes de bachillerato en ésta tarea en particular pone en evidencia la pertinencia de utilizar problemas en contextos familiares para los estudiantes, con el fin de comenzar a desarrollar RII. Seguir el razonamiento empleado en una prueba de significación parece ser el más idóneo para comenzar a desarrollar el RII, además, resaltar la importancia de contar con un método (informal) para determinar cuándo rechazar o aceptar la hipótesis para pasar de un razonamiento intuitivo a uno informal.

Referencias

Batanero, C. (2011). Del análisis de datos a la inferencia: Reflexiones sobre la formación del razonamiento estadístico. *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*. Recife, Brasil. Online: http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/conferencia_CIAEM_Batanero.pdf.

Batanero, C. (2000). Controversies around significance tests. *Mathematical Thinking and Learning, 2(1-2),* 75-98.

Castro-Sotos, A. E., Vanhoof, S., Van den Noorgate, W., Onghena, P. (2007). Students' misconceptions of statistical inference: A review of the empirical evidence from research on statistics education. *Educational Research Review 2*, 98–113.

Cobb, G. & Moore, D. (1997). Mathematics, statistics and teaching. *The American mathematical montly, 14(9),* 801-823.

Dierdorp, A., Bakker, A., Eijkelhof, H. & Maanen, J. (2011). Authentic practices as contexts for learning to draw inferences beyond correlated data. *Mathematical Thinking and Learning, 13(1-2),* 132-151.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach*. Reidel Dordrecht: The Netherlands.

Garcia-Rios, N. (2013). Inferencias estadísticas informales en estudiantes mexicanos. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 343-357)*. Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students statistical reasoning*. New York: Springer.

Kahneman, D., Slovic, P., & Tversky, A. (1982*). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge: Cambridge University Press.

Langrall, C., Nisbet, S., Mooney, E. & Jansem, S. (2011). The role of context expertise when comparing data. *Mathematical Thinking and Learning*. *13(1-2),* 47-67.

Makar, K., Bakker, A. & Ben-Zvi, D. (2011). The Reasoning behind informal statistical inference. *Mathematical Thinking and Learning*. *13(1-2),* 152-173.

Makar, K. & Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal*. *8(1),* 82-105.

Miles, M. & Huberman, A. (1994). *An expanded sourcebook qualitative data analysis* (2a ed.). London: Sage Publications.

Rossman, A. (2008). Reasoning about informal statistical inference: one statistician's view. *Statistics Education Research Journal, 7(2),* 5-19. Online: http://www.stat.auckland.ac.nz/serj.

Triola, Mario F. (2004). *Estadística*. México: Pearson educación.

Voss, J. F., Perkins, D. N., & Segal, J.W. (1991). *Informal reasoning and education*. New Jersey: Laurence Erlbaum Assoc.

Zieffler, A., Garfield, J., delMas, R. & Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistical Education Research Journal, 7(2),* 40–58. Online: http://www.stat.auckland.ac.nz/serj.

INDAGANDO SOBRE EL PAPEL DE LA TECNOLOGÍA EN EL AULA

Enquiring regarding the role of technology in the classroom

José-María Gavilán-Izquierdo

Universidad de Sevilla

Resumen

En este trabajo abordamos la problemática de investigación sobre el papel de la tecnología en el aula, centrándonos en el profesor. Utilizaremos la complementariedad entre dos ideas socioculturales, orquestación instrumental y modelación de la descomposición genética de un concepto, para aproximarnos a la caracterización del papel de la tecnología en el aula. Reflexionamos sobre la aportación que esta complementariedad hace a la discusión sobre la articulación de marcos teóricos.

Palabras clave: *tecnología, orquestación instrumental, modelación de la descomposición genética de un concepto, complementariedad teórica.*

Abstract

In this paper, we tackle the research problem about the role of technology in the classroom, focusing of the teacher. We use the complementarity between two sociocultural ideas, instrumental orchestration and modeling genetical decomposition of a concept, to approach to the characterization of the role of technology in the classroom. We reflect on the contribution that this complementarity makes to the discussion on the articulation of theoretical frameworks.

Keywords: *technology, instrumental orchestration, modeling genetical decomposition of a concept, theoretical complementarity*.

INTRODUCCIÓN

La tecnología cada vez está más presente en nuestro mundo y la educación no es ajena a los cambios que conlleva incorporar cada vez más tecnología. Desde la educación matemática hay una agenda de investigación centrada en la indagación sobre la tecnología en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

Los trabajos de Kendall y Stacey (2001, 2002) consideran que los profesores juegan un papel relevante en la introducción de tecnología en el aula, y se centran en las preferencias de los profesores sobre el uso de los modos de representación y en la manera en que se apoyan en el software (programas de calculo simbólico) para promover un modo de representación u otro. Nos centraremos en esta comunicación en el profesor.

La amplitud del campo de problemas que pueden plantearse ha llevado a que en las investigaciones se adopten diferentes perspectivas teóricas. Entre ellas, podemos señalar la aproximación instrumental (Trouche, 2004, 2005a, 2005b), que hace planteamientos cognitivos a través de la génesis instrumental que se centra en el estudiante y planteamientos socioculturales (dimensión social, en sus propios términos) mediante la orquestación instrumental que considera la relación estudiantes-profesor mediada por el ordenador (Drijvers, Doorman, Boon, Reed y Gravemeijer, 2010). Algunos investigadores utilizan esta idea para indagar sobre el aprendizaje matemático que se produce a través de las discusiones en gran grupo en entornos tecnológicos (Ferrer, Fortuny y Morera 2013; Morera, Planas y Fortuny, 2013), para caracterizar la practica del profesor (Tabach,

Gavilán-Izquierdo, J. M. (2014). Indagando sobre el papel de la tecnología en el aula. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 355-364). Salamanca: SEIEM.

2011), o la visión de los profesores sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas y el papel de la tecnología en el mismo (Drijvers et al., 2010).

Distintos investigadores señalan el potencial para la investigación de la articulación de distintos marcos teóricos de diferentes maneras (Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2010; Even y Schwarz 2003, Llinares, 2000; Prediger, Bikner-Ahsbahs y Arzarello, 2008). Drijvers et al. (2010) plantean en su artículo la necesidad de ir complementando el marco teórico de la aproximación instrumental con otras aproximaciones teóricas. Planteamos en este trabajo complementar la idea de orquestación instrumental con ideas "socioculturales" provenientes del análisis de la actividad del profesor en el aula (Llinares, 1999, 2000).

Los investigadores han abordado de diferente forma la articulación teórica, así Drijvers, Godino, Font y Trouche (2013) comparan y contrastan el enfoque ontosemiótico y la aproximación instrumental en el sentido del trabajo de Even y Schwarz (2003). Por otro lado, en un intento de dar significado a la idea de objeto matemático, Font, Badillo, Trigueros y Rubio (2012), plantean este problema desde el modelo APOS (Dubinsky, 1991) y desde el enfoque ontosemiótico (Font, 2005) y proponen complementar ambas perspectivas, particularizado a la derivada. Trigueros, Bosh y Gascón (2011) han planteado este problema referido a la Teoría antropológica de lo didactico (Chevallard, 1999) y el modelo APOS (Dubinsky, 1991). Nuestra propuesta va en el sentido de Even y Schwarz (2003), de analizar una misma situación desde dos aproximaciones teóricas con el objetivo de complementarlas. Posibilitará abordar un problema que por separado no resuelven y para plantearnos y reflexionar si es necesario que los marcos teóricos cumplan determinados "requisitos" para que esa complementariedad no sea inconsistente.

A partir de la idea de programa de investigación científica de Lakatos (1993), la idea de articulación teórica podemos sustentarla por la coexistencia y desarrollo de distintos programas de investigación científica. Para este autor, un programa de investigación científica tiene tres componentes básicos, un núcleo firme (que caracteriza el programa), un cinturón protector de hipótesis auxiliares y una heurística (estrategias de solución de problemas científicos, metodología de investigación). El progreso científico se basa en la competitividad de los programas de investigación científica y en la capacidad de los mismos para predecir y descubrir hechos nuevos. Desde este posicionamiento epistemológico, la articulación teórica de complementariedad de marcos teóricos podemos entenderla como una conformación de un programa de investigación científica "emergente", y por tanto en términos de la construcción del núcleo firme (ideas básicas del programa) que precisa, desde nuestro punto de vista, de una compatibilidad de las ideas en las que se apoyan los marcos teóricos originales. Esta complementariedad puede aportar explicaciones a hechos que en los distintos marcos carecían de las mismas.

MARCO CONCEPTUAL

Elaboramos nuestra propuesta a partir de ideas teóricas sobre la actividad del profesor (Llinares, 1999, 2000) y de ideas teóricas provenientes de la aproximación instrumental (Trouche, 2004, 2005a, 2005b).

a) Desde la actividad del profesor utilizamos la idea de *modelación de la descomposición genética*. Para Llinares (1999, 2000) la actividad del profesor de enseñar matemáticas, en el aula, consiste en la constitución de una comunidad de práctica, un grupo de personas que comparte formas de comunicarse y actuar. El profesor facilita a los estudiantes la integración en dicha comunidad para fomentar o promover su aprendizaje matemático. En nuestro trabajo el aprendizaje que se promueve lo caracterizamos utilizando el modelo de desarrollo de la comprensión APOS (Dubinky, 1991) que considera que un concepto se puede comprender de distintas formas (acción, proceso, objeto, esquema) y que hay diferentes mecanismos de construcción de dichas formas de comprender (interiorización, encapsulación…).

Para analizar la actividad del profesor utilizamos la idea de modelación de la descomposición genética de un concepto o noción matemática (García, Gavilán, y Llinares, 2012; Gavilán, García y Llinares, 2007b), entendida como una descripción de la forma en la que el profesor usa los instrumentos de la práctica para generar un discurso en el aula que potencie en los estudiantes la construcción de conocimiento matemático (mecanismos de construcción de conocimiento en términos del modelo APOS). Los elementos matemáticos (Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2007, 2013) y los modos de representación (Rico, 2001) son desde esta perspectiva los instrumentos de la práctica (Llinares, 2000) cuyo uso y propósito caracterizan la modelación. La modelación de la descomposición genética de un concepto o noción matemática permite identificar relaciones entre distintos elementos:

- los diferentes modos de representación (analítico y gráfico),
- las diferentes formas de conocer un concepto matemático, y
- las relaciones entre los distintos conceptos que conforman la noción matemática.

b) Desde la aproximación instrumental utilizamos la idea de *orquestación instrumental*. Trouche (2005a) indica que un artefacto es un objeto físico u objeto abstracto y que cuando se usa este artefacto para resolver una tarea se convierte en un instrumento. Este proceso de conversión es complejo y se denomina génesis instrumental. Este mismo autor (Trouche, 2005b) señala que la idea de orquestación instrumental hace referencia a la dimensión social de la génesis instrumental de los estudiantes.

Para Drijvers et al. (2010) una orquestación instrumental es la forma en la que el profesor organiza un entorno tecnológico para guiar la génesis instrumental de los estudiantes. Distinguen tres elementos en una orquestación instrumental: configuración didáctica, modos de explotación e implementación didáctica (traducciones tomadas de Ferrer et al., 2013). Los dos primeros parcialmente preparados antes de la intervención en el aula.

La configuración didáctica incluye los “artefactos” seleccionados por el profesor para resolver la tarea en un determinado entorno (es decir, las preguntas, la tecnología disponible, los elementos matemáticos y los modos de representación). Los modos de explotación de la configuración didáctica se refieren a como una tarea matemática puede poner en funcionamiento, de diversas maneras, los artefactos en función de cómo los estudiantes aborden su resolución, y cómo el profesor utiliza la configuración didáctica para conseguir su objetivo didáctico, “decisiones sobre el modo de explotación pueden ser vistas como parte del diseño de una trayectoria hipotética de aprendizaje” (Drijvers et al., 2010, p. 215). Para Tabach (2013) el modo de explotación es un elemento central de la orquestación instrumental, de manera que distintas configuraciones didácticas que se explotan del mismo modo dan como resultados variantes de la misma orquestación instrumental. El tercer elemento, la implementación didáctica, ha sido introducido por Drijvers et al. (2010) y se refiere a la puesta en acción en el aula de los otros dos elementos, “las decisiones tomadas mientras enseña sobre cómo llevar a cabo la configuración didáctica y el modo de explotación elegidos (p. 215)”.

Drijvers et al. (2010) identificaron un repertorio de orquestaciones instrumentales que pueden ser clasificadas en dos grandes grupos, las centradas en los estudiantes y las centradas en el profesor, caracterizadas por el grado de participación de los estudiantes.

Consideradas conjuntamente las dos ideas teóricas, modelación de la descomposición genética y orquestación instrumental, permiten identificar una *trayectoria de aprendizaje* (Simon, 1995) de los conceptos matemáticos en términos de formas de conocer potenciadas, vinculada a la orquestación instrumental. Utilizaremos esta complementariedad teórica para apuntar ideas que ayuden a caracterizar el papel de la tecnología en el aula a partir de cómo se orquestan los instrumentos para promover determinados objetivos de aprendizaje.

Las preguntas de investigación que planteamos son las siguientes:

Centrados en el profesor ¿pueden las trayectorias de aprendizaje vinculadas a las orquestaciones instrumentales ser herramientas para caracterizar el papel de la tecnología en el aula?

¿Es "coherente" esta complementariedad teórica?

METODOLOGÍA

El caso que presentamos es el de un profesor de matemáticas, Juan, que imparte clase a un grupo de estudiantes de primer curso de Bachillerato (16-17 años). Juan impartió tres sesiones de clase en el aula de informática en la que los estudiantes trabajaban con un ordenador en pequeños grupos. Juan utilizó en sus clases un programa de geometría dinámica y otro de cálculo simbólico. El contexto matemático fue la noción de derivada que está conformada por tres conceptos: derivada de una función en un punto (f´(a)), función derivada (f´(x)) y operador derivada (D(f)), si bien no están aislados de otros conceptos como límites e integrales (definidas e indefinidas). En esta comunicación consideramos f´(a) como foco.

Datos de la investigación

Los datos de la investigación se recogieron a partir de la entrevista de planificación realizada a Juan y de las grabaciones de las sesiones de clase desarrolladas en el aula de informática. Las grabaciones de aula se realizaron con una cámara de vídeo que recogía imágenes y sonido con un micrófono de ambiente. Además, el profesor llevaba un micrófono inalámbrico que permitió grabar las interacciones con sus estudiantes.

La entrevista de planificación y las sesiones de clase fueron transcritas en su totalidad, así mismo se confeccionó una descripción de lo que sucedía en cada sesión de clase. Esta descripción recogía si el profesor se dirigía a todo el grupo de clase o a un grupo particular de dos o tres estudiantes que resolvían la tarea conjuntamente con un ordenador; recogía la información que se compartía en el grupo a través de la pizarra o el ordenador. Las transcripciones de la entrevista y de las sesiones de clase junto con la descripción constituían los datos que se utilizaron, y permitió disponer de información sobre lo que *se planificó*, *se decía* y *se hacía*.

Análisis de los datos

El análisis de los datos se llevó a cabo en dos fases. En ambas la unidad de análisis considerada era el proceso de resolución, desarrollado en el aula, de una tarea.

En la primera fase, para cada unidad de análisis se identificaban "segmentos de enseñanza", caracterizados por la modelación por parte del profesor de un mecanismo de construcción de conocimiento (Gavilán, García y Llinares, 2007a) que potencia en el estudiante la construcción de un manera de conocer el concepto. Para cada uno de estos segmentos se identificaron los usos de los elementos matemáticos y de los modos de representación y el propósito de su uso (la manera de conocer el concepto). En algunas situaciones se consideraron conjuntamente algunos segmentos ya que se podía inferir la modelación de un nuevo mecanismo de construcción de conocimiento (Gavilán et al., 2007a).

La consideración conjunta de la secuencia de modelaciones de mecanismos constructivos y la organización de las relaciones entre mecanismos se materializa en lo que se denomina modelación de la descomposición genética del concepto matemático (o noción matemática). Esta modelación nos informa de los objetivos de aprendizaje planteados por el profesor. Como resultado de esta primera fase de análisis podemos "trazar" una trayectoria de aprendizaje (Simon, 1995) relativa al concepto matemático. Para este autor, la trayectoria de aprendizaje es una predicción sobre el camino por el que puede discurrir el aprendizaje.

En la segunda fase del análisis, para cada unidad de análisis se identificaron las orquestaciones instrumentales desarrollas, como indican Drijvers et al. (2010) en cada unidad de análisis pueden, a priori, ser varias las orquestaciones. Se consideraron los tres elementos de una orquestación instrumental (Drijvers et al., 2010): la configuración didáctica, los modos de explotación y la implementación didáctica. Todos los elementos no tienen el mismo peso para identificar la orquestación, siguiendo a Tabach (2013) diferenciaremos las orquestaciones instrumentales por la implementación didáctica del modo de explotación y no por la configuración didáctica.

La configuración didáctica y los modos de explotación de la configuración didáctica, como se ha señalado anteriormente, son preparados, en parte en la fase de planificación de la enseñanza, por ello utilizaremos información proveniente de la entrevista de planificación. En la implementación didáctica se incluyen las decisiones del profesor respecto a las interrelaciones con los estudiantes para favorecer el aprendizaje matemático mediante la explotación de la configuración didáctica.

Como resultado de esta segunda fase de análisis podemos disponer del repertorio de orquestaciones instrumentales desarrolladas por el profesor que nos caracterizan las interacciones que se producen mediadas por la tecnología.

Como resultado del análisis se obtuvieron para cada unidad de análisis un conjunto de segmentos de enseñanza, caracterizados por la modelación de mecanismos de construcción de conocimiento (favoreciendo formas de conocer), y distintas orquestaciones instrumentales desarrolladas para favorecer dicha construcción de conocimiento.

RESULTADOS

En este trabajo nos centramos en el análisis de una de las tareas utilizada en una de las sesiones de clase impartida en el aula de informática. La tarea propuesta fue: calcular el valor de la derivada de $f(x)=x^2$ en el punto x=1. El profesor proporcionó a los estudiantes una figura construida con Cabri-géomètre II (ver figura 1) para que los estudiantes mediante arrastre de un punto próximo a x=1 (el punto rojo) obtuvieran el valor de la derivada. Los estudiantes trabajaron en pequeños grupos (dos o tres estudiantes) con un ordenador.

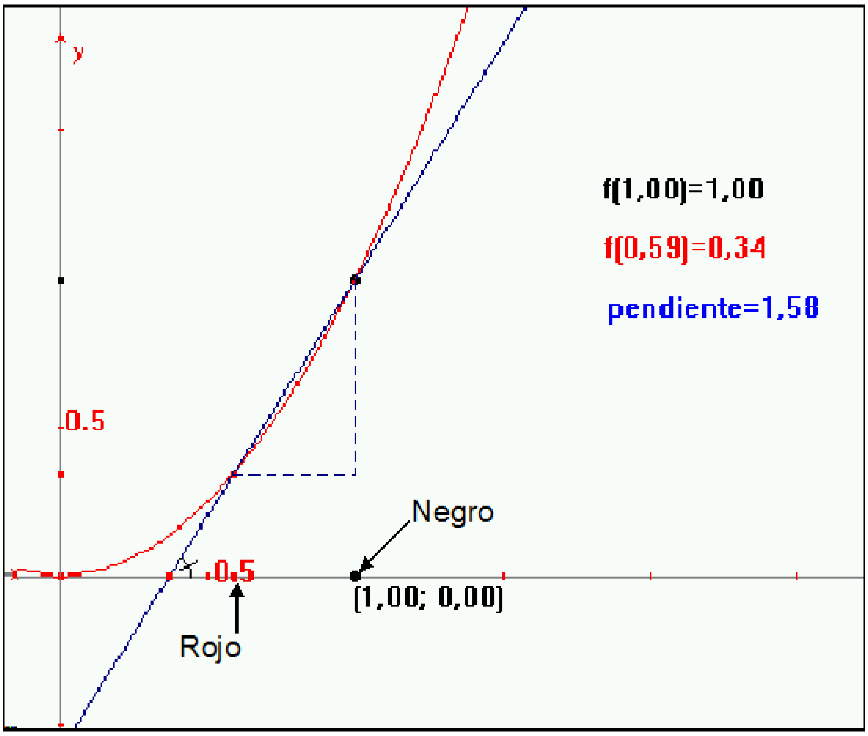


Figura 1: Construcción de Cabri para la tarea

Juan pretendía que los estudiantes elaboraran una tabla de valores de los cocientes incrementales (f(1)-f(x))/(1-x) en valores de x próximos a 1. La figura construida proporcionaba, además de la gráfica de f(x) y la recta secante por (x, f(x)) y (1, f(1)), los valores f(1), f(x), y de la pendiente de la recta secante “dibujada”.

El discurso del aula es el siguiente (J=Juan, E= estudiante):

J: Podemos coger el punto rojo que aparece ahí. El punto negro, aparece un punto negro sobre el 1, y lo que vamos a calcular, lo que vamos a calcular es cómo está variando la función en el punto 1…./…

Si cogemos este punto <punto rojo> nos vamos aproximando ¿cuánto me sale la tasa de variación? ¿qué nos dice el ordenador? Eso es la pendiente de esta recta que aparece aquí <se refiere a la recta secante de la figura>.

J: Cuando yo me vaya acercando, otro punto aquí, 0.63, pues la pendiente que me aparece 1.63, cuando yo me acerque más. En 0.80 ¿qué pendiente me aparece?

E: 1.75

J: Si yo pongo aquí 0.9 ¿qué hay que poner aquí? <Indicando cómo completar la tabla de cocientes incrementales>

E: 1.85

J: Cuando yo ponga aquí un 1 ¿qué voy yo a tener que poner aquí?

E: 1.

J: Cuando este punto x se vaya acercando a éste de aquí <punto negro>, fijaros la recta ésta <recta secante> ¿a qué va tendiendo? ¿a qué se va pareciendo? a la recta tangente a la curva ¿lo veis o no lo veis? se va aproximando, aproximando

E: A la tangente.

J: Hasta que llega a la tangente, pues lo que tengo realmente es la recta tangente.

E: Sí.

J: A eso es a lo que vamos a llamar la derivada. Entonces cuando yo este punto <punto rojo> lo hago tender, se lo hago cada vez más cerca del punto negro, pues, esta recta que yo tenía aquí que era una recta secante ¿a dónde? ¿a dónde se nos va a ir?, mira ¿lo veis? cada vez más cerca, cada vez más cerca, cuando llego al punto ése, realmente ¿qué es lo que tengo aquí? la recta tangente.

Mientras se produce el diálogo anterior, Juan ha ido confeccionado en la pizarra la tabla de valores de los cocientes incrementales (f(1)-f(x))/(1-x), utilizando en el discurso referencias al lenguaje gráfico y a los valores de la tabla y su tendencia en el entorno del punto x=1. Juan pretendía centrar la discusión en el proceso de variación de los valores de f (punto rojo) y de los valores que va tomando el cociente incremental, pretendía hacer visible el proceso de variación, y por tanto el paso al límite. La necesidad de reflexión sobre la tendencia de los valores y de la recta secante hacia el límite (la recta tangente) nos permite considerar que se “modela el mecanismo de interiorización” de la derivada de la función en un punto. Esta modelación se identifica a partir de la repetición de las acciones de calcular secantes a la curva y sus pendientes y de la necesidad de inferir la tendencia de dichas secantes y sus pendientes (mediante reflexión) a la recta tangente y su pendiente. Este mecanismo de interiorización (Dubinsky, 1991) construye una forma de conocer proceso a partir de acciones, es decir, relaciona las formas de conocer acción y proceso para f´(a). Además esto le permitió a Juan mostrar la vinculación entre los significados de la derivada de una función en un punto, analítico y gráfico, produciéndose la integración de las representaciones. Juan hizo visibles los significados mediante el paso al límite independientemente del modo de representación. La *trayectoria de aprendizaje* identificada en este segmento se caracteriza por el establecimiento de relaciones, entre las formas de conocer acción y proceso de f`(a) y entre los modos de representación analítico y gráfico. Esta manera de proceder parece indicar que se pretende favorecer una comprensión basada en el establecimiento de conexiones.

Desde el punto de vista de la orquestación instrumental, la tarea propuesta a los estudiantes requería de éstos que utilizaran la posibilidad del arrastre de un objeto (un punto) de una figura para obtener un conjunto de valores. La configuración didáctica, la tarea planteada y el uso de la tecnología ya estaban presentes en la planificación. Juan indicó en la entrevista de planificación la relevancia de la visualización dinámica del límite de las rectas secantes hacia la recta tangente mediante tecnología "En este sentido se puede hacer una buena visualización de la obtención de la recta tangente como límite de secantes a través del programa MAPLE mediante la rutina with (plots): animate({x^2, (t + 2)*(x – 2) + 4|). Que corresponde a la función x^2 en x = 1". Respecto al modo de explotación, Juan en la misma entrevista señaló "halla la pendiente de la recta secante que corta a la gráfica… pon el resultado anterior en la columna correspondiente y completa los demás (se refiere a la tabla de valores de los cocientes incrementales). Lo que estamos viendo un poco, límite, pero calcular estos valores, f(x), el cociente incremental en puntos muy próximos a 2, y ahora que los vayan poniendo, aquí a qué va tendiendo, realmente calcular el límite, pero calcular el límite con aproximaciones".

Respecto a la implementación didáctica del modo de explotación, Juan les propone en gran grupo, que vayan confeccionando la tabla de valores de los cocientes incrementales en su cuaderno. Los estudiantes trabajaron en pequeños grupos con un ordenador, y cada grupo de estudiantes trabaja "libremente" la tarea haciendo el arrastre de puntos, las aproximaciones, según le parecía oportuno. Juan dispuso de una pizarra para organizar la discusión en gran grupo. Cuando algún grupo plantea una pregunta a Juan, éste la atiende y si lo considera relevante la discute en gran grupo. El protocolo anterior recoge algunas de las interacciones que se producen en gran grupo. Juan va completando la tabla de valores en la pizarra a partir de los resultados que van proporcionando los estudiantes, y discutiendo los significados gráficos y analíticos que proporciona la manipulación por arrastre de la figura de Cabri-géométre II.

Las interacciones entre estudiantes y profesor, generalmente en gran grupo, son un elemento clave para que emerjan los significados que a través de la tecnología están disponibles en diferentes modos de representación. La tecnología con el uso de distintas representaciones y la posibilidad de disponer de manera "automática" de los cálculos facilita que los estudiantes se centren en los aspectos relevantes de la variación. Esta manera de orquestación instrumental ha sido descrita por Drijvers et al. (2010) como *debatiendo la pantalla* (Discuss-the-screen, en el original), lo que es una orquestación instrumental centrada en los estudiantes.

Como resultado del análisis podemos señalar que la orquestación instrumental desarrollada por Juan se centra en los estudiantes a través de la discusión en grupo de los resultados que ofrece la tecnología, en este caso la manipulación mediante arrastre de los objetos de la figura proporcionada. Mediante dicha orquestación instrumental, en la trayectoria de aprendizaje se construye, por los estudiantes, a partir de una forma de conocer acción una forma de conocer proceso el concepto de f´(a), mediante la modelación del mecanismo de interiorización de f`(a) que integra los significados gráficos y analíticos. Estos resultados nos permiten obtener algunos indicios para acercarnos a caracterizar el papel de la tecnología en el aula, centrándonos en el profesor, como favorecedora de una comprensión basada en el establecimiento de conexiones centrada en los estudiantes.

CONCLUSIONES

El papel de la tecnología en la actividad del profesor en el aula se ha abordado desde dos enfoques diferentes que se complementan. El enfoque de la actividad del profesor (Llinares, 1999, 2000) sobre la actividad del profesor y el uso de la modelación de la descomposición genética de un concepto o noción matemática nos permite señalar que el papel de la tecnología en el aula es promover o *favorecer una comprensión matemática basada en conexiones* de las formas de conocer y de los modos de representación de los conceptos matemáticos. Por otro lado, la aproximación instrumental, a partir de la orquestación instrumental desarrollada nos pone de manifiesto que el papel de la tecnología es facilitar una actividad del profesor en el aula *centrada en los estudiantes*.

Estos resultados nos inducen abrir líneas para profundizar en esta problemática, ya que la complementariedad de los marcos teóricos considerados nos permiten plantear la posibilidad de armonizar dos dimensiones para caracterizar el papel de la tecnología en la actividad del profesor: forma de comprensión matemática que se favorece y participante en el que se centra. En este sentido, nuestro trabajo tiene algunas limitaciones, pensamos que se necesitan más investigaciones en contextos matemáticos diferentes.

Si consideramos las ideas propuestas por Schoenfeld (2000) en relación a los criterios que pueden ser útiles para evaluar teorías o investigaciones en educación matemática, y las aplicamos a la articulación de marcos teóricos, nuestra propuesta de complementariedad teórica tiene *poder descriptivo y explicativo*, ya que podemos dar descripciones que explican de manera más precisa aspectos relevantes de la realidad compleja que se da en las situaciones de enseñanza y aprendizaje matemático en entornos tecnológicos. El *alcance* de la articulación está ligado a la generalización de las formas de interpretar distintos escenarios en los que está presente la tecnología. Nuestra propuesta posibilita hacer *predicciones* sobre los posibles resultados de aprendizaje como resultado de la génesis instrumental desarrollada en los estudiantes a través de la trayectoria de aprendizaje identificada. Aunque en esta comunicación nuestro foco de interés ha sido el profesor, se necesitan investigaciones que consideren también a los estudiantes.

La idea de programa de investigación científica de Lakatos (1993) nos permite considerar que la complementariedad teórica puede ser fructífera cuando los “núcleos firmes” de los marcos teóricos son compatibles. En este trabajo, los dos marcos teóricos se apoyan en la idea de instrumento. Que usen el mismo término no quiere decir que en ambos marcos teóricos signifique lo mismo. En ambas aproximaciones se admiten artefactos o instrumentos físicos y conceptuales (software, representaciones…). En la aproximación instrumental, un instrumento es un artefacto que puede usarse de diferentes maneras (esquemas de uso) para convertirse en instrumento, por ejemplo los programas de ordenador. En la teoría de la actividad del profesor los instrumentos, los modos de representación y elementos matemáticos en este caso, se usan de determinada manera y propósito. Profundizar en los resultados puede mostrar que los usos y propósitos de los elementos matemáticos (Sánchez-Matamoros et al., 2007, 2013) y los modos de representación (Rico, 2001) pueden permitir caracterizar los esquemas de uso de los programas de ordenador. La posibilidad de que la complementariedad de ideas permita realizar explicaciones y predicciones sobre la enseñanza y el aprendizaje matemático pone de manifiesto que ésta es “progresiva” en el sentido de los programas de investigación científica. Nos hemos limitado a considerar el “núcleo” de cada programa y no se han considerado ni el cinturón protector ni las metodologías de investigación, que deben ser objeto de futuros análisis.

En este trabajo, “compatibilidad y complementariedad” de ideas teóricas son aspectos que se consideran inseparables, las dos caras de una misma moneda, para abordar la articulación de ideas teóricas provenientes de perspectivas socioculturales distintas. Creemos que estos planteamientos pueden ser aspectos que se consideren en las propuestas de profundizan en las diferentes articulaciones teóricas que se pueden abordar. La complementariedad teórica nos habla del potencial de los resultados que se obtienen, y la compatibilidad hace referencias a los requisitos para plantearse coherentemente dichos resultados. Aquí hemos reflexionado sobre la complementariedad de ideas de naturaleza similar (socioculturales) que provienen de marcos teóricos distintos, queda abierta la reflexión a la articulación entre ideas provenientes de perspectivas cognitivas y socioculturales.

Referencias

Bikner-Ahsbahs, A., y Prediger, S. (2010). Networking of theories – an approach for exploiting the diversity of theoretical approaches. En B. Sriraman y L. English (Eds.), *Theories of Mathematics Education: Seeking New Frontiers* (pp. 483-505). New York: Springer.

Chevallard, Y. (1999). L`analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-266.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., y Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 75, 213–234. doi 10.1007/s10649-010-9254-5

Drijvers, P., Godino, J. D., Font, V., y Trouche, L. (2013). One episode, two lenses: A reflective analysis of student learning with computer algebra from instrumental and onto-semiotic perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 23-49. doi: 10.1007/s10649-012-9416-8

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp 95-123). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Even, R., y Schwarz, B. (2003). Implications of competing interpretations of practice for research and theory in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 283–313.

Ferrer, M., Fortuny, J. M., y Morera, L. (2013). Identificación de estilos de enseñanza comparando discusiones en gran grupo de un problema de semejanza. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 263-274). Bilbao: SEIEM.

Font, V. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada. En A. Max, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática IX* (pp. 111-128). Córdoba: SEIEM.

Font, V., Badillo, E., Trigueros, M., y Rubio, N. (2012). La encapsulación de procesos en objetos analizada desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 239 - 247). Jaén: SEIEM.

García, M., Gavilán, J. M., y Llinares, S. (2012). Perspectiva de la práctica del profesor de matemáticas de secundaria sobre la enseñanza de la derivada. Relaciones entre la práctica y la perspectiva del profesor. *Enseñanza de las Ciencias*, 30(3), 219-235.

Gavilán, J. M., García, M., y Llinares, S. (2007a). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas. *Enseñanza de las Ciencias*, 25(2), 157-170.

Gavilán, J. M., García, M., y Llinares, S. (2007b). La modelación de la descomposición genética de una noción matemática. Explicando la práctica del profesor desde el punto de vista del aprendizaje potencial de los estudiantes. *Educación Matemática*, 19(2), 5-39.

Kendal, M., y Stacey, K. (2001). The impact of teacher privileging on learning differentiation with technology. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, 143-163.

Kendal, M., y Stacey, K. (2002). Teachers in transition: Moving towards CAS-supported classrooms. *ZDM—The Internacional Journal on Mathematics Education*, 34, 196-203.

Lakatos, I. (1993). *La metodología de los programas de investigación científica*. Madrid: Alianza Universidad.

Llinares, S. (1999). Conocimiento y práctica profesional del profesor de matemáticas. Características de una agenda de investigación. *Zetetike-Cempem-Fe/Unicamp*, 7(12), 9-36.

Llinares, S. (2000). Comprendiendo la práctica del profesor de matemáticas. En J. P. Ponte y L. Sarrazina (Eds.), *Educaçao Matemática em Portugal, Espanha e Italia, Actas da Escola de Verao-1999* (pp. 109-132). Lisboa: Sección de Educación Matemática Sociedad Portuguesa de Ciencias de la Educación/ Sociedad de Educación y Matemática.

Morera, L., Planas, N., y Fortuny, J. M. (2013). Design and validation of a tool for the analysis of whole group discussions in the mathematics classroom. En B. Ubuz y otros (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of European Research in Mathematics Education*. Antalya: ERME.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., y Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, 40, 165-178. doi: 10.1007/s11858-008-0086-z

Rico, L. (2001). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. En Contreras, L. C., Carrillo, J., Climent, N. y Sierra, M. (Eds.), *Actas del IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (Adenda, pp. 219- 231). Huelva: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Huelva.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., y Llinares, S. (2007). Un indicador de la comprensión del esquema derivada: el uso de las relaciones lógicas. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 229-238). Tenerife: SEIEM.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., y Llinares, S. (2013). Algunos indicadores del desarrollo del esquema de derivada de una función. *Bolema, Rio Claro (SP)*, 27(45), 281-302.

Schoenfeld, A. (2000). Purposes and methods of research in mathematics education. *Notices of the Amarican Mathematical Society*, 47(6), 2-10.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 114-145.

Tabach, M. (2011). A mathematics teacher's practice in a technological environment: A case study analysis using two complementary theories. *Technology, Knowledge and Learning*, 16, 247-265. doi: 10.1007/s10758-011-9186-x

Tabach, M. (2013). Developing a general framework for instrumental orchestration. En B. Ubuz y otros (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of European Research in Mathematics Education*. Antalya: ERME.

Trigueros, M., Bosh, M., y Gascón J. (2011).Tres modalidades de diálogo entre APOS y TAD. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage, y M. Larguier, (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 77-116). Barcelona: Centre de Recerca Matemàtica.

Trouche, L. (2004). Managing complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9, 281–307. doi: 10.1007/s10758-004-3468-5

Trouche, L. (2005a). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator enviorements. En D. Guin, K. Ruthven y L. Trouche (Eds.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators: Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument* (pp. 137-162). New York: Springer.

Trouche, L. (2005b). Instrumental genesis, individual and social aspects. En D. Guin, K. Ruthven y L. Trouche (Eds.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators: Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument* (pp. 197-230). New York: Springer.

LA REGRESIÓN EN LOS TEXTOS DE BACHILLERATO DE CIENCIAS SOCIALES

Regression in high school social sciences textbooks

M. Magdalena Gea, Carmen Batanero, Gustavo R. Cañadas, J. Miguel Contreras

Universidad de Granada

Resumen

Se analizan los conceptos asociados a la regresión en ocho libros de texto de Bachillerato de la modalidad Humanidades y Ciencias Sociales. Se clasifican los conceptos según su definición se presente de modo formal o mediante ejemplo, y se estudian las propiedades asociadas. Encontramos algunas definiciones incompletas o parcialmente correctas, o que equiparan conceptos no equivalentes.

Palabras clave: *Regresión, libros de texto, Bachillerato, conceptos y propiedades.*

Abstract

We study the concepts linked to regression in eight high school textbooks of the Humanities and Social Sciences modality. We classify these concepts according to the way (formally or using examples) that their definitions are presented and study the associated properties. We found some incomplete or partly correct definitions: other times non equivalent concepts are identified.

Keywords: *Regression, textbooks, high school, concepts and properties.*

INTRODUCCIÓN

La regresión es un concepto fundamental por su utilidad en la predicción en diversos campos científicos. Junto a la correlación, extiende la dependencia funcional a variables aleatorias. Se incluye en el currículo español en el primer curso de Bachillerato en las modalidades de *Ciencias y Tecnología* y *Humanidades y Ciencias Sociales* (MEC, 2007).

La investigación en psicología y didáctica de la matemática se centra preferentemente en la correlación, donde se describen dificultades como no apreciar la correlación inversa, tener un sentido determinista o local de la correlación o identificar correlación con causalidad (Estepa y Batanero 1995; Estepa, 2008; Zieffler y Garfield, 2009).

El objetivo de este trabajo es analizar los conceptos y propiedades asociados a la regresión en los libros de texto del Bachillerato de Ciencias Sociales para sugerir posibles mejoras en esta presentación y completar algunos estudios previos. Forma parte de un proyecto de investigación más amplio (Gea, 2014; pendiente de presentación) en que se realiza un análisis más completo de estos textos, junto a los de la misma editorial y año en el Bachillerato de Ciencias y Tecnología para comparar la presentación del tema en las dos modalidades de Bachillerato.

Debido a la limitación de espacio, en este trabajo presentamos sólo una parte del proyecto global. Resultados complementarios se han publicado en Gea, Batanero, Cañadas y Contreras (2013), Gea, Batanero, Fernandes y Gómez (en prensa), así como en Gea, Batanero, Arteaga, Cañadas y Contreras (en prensa).

Marco Teórico

En este trabajo nos centramos en los conceptos y propiedades que constituirían la parte conceptual de la enseñanza de la regresión. Conocimiento conceptual y procedimental son polos de un

Gea, M. M, Batanero, C., Cañadas, G. R., Contreras, J. M. (2014). La regresión en los textos de bachillerato de ciencias sociales. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 365-373). Salamanca: SEIEM.

continuo, siendo el primero más flexible y generalizable, ya que incluye la comprensión implícita o explícita de los principios de un dominio dado y sus interrelaciones (Rittle-Johnson, Siegler y Alibali, 2001). Sfard (1991) describe un concepto como constructo correspondiente al universo matemático formal y diferencia entre la definición estructural (describiendo sus condiciones o propiedades) y operacional (cuando se describe mediante una operación o fórmula) de un concepto.

Nos basamos en el enfoque Onto-semiótico (EOS) (Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero y Font, 2007) que considera los conceptos y propiedades como objetos matemáticos fundamentales cuyo significado puede variar en distintas instituciones. Más concretamente, Godino (2002) indica que un objeto matemático se caracteriza por su definición y propiedades; pero éstas pueden variar según las distintas instituciones en que se trate, y por tanto, hemos de concederles un carácter relativo. Puesto que estas definiciones y propiedades son evocadas por el estudiante cuando se enfrenta a la resolución de una situación problema, es importante analizar el tratamiento que se realiza de éstas en la enseñanza, ya que, la progresiva construcción de su significado depende directamente de los conceptos que se describan y utilicen.

Antecedentes

Entre las investigaciones relacionadas con la comprensión de la regresión destacamos la de Estepa (1994), quien señala como puntos importantes la comprensión de la diferencia entre variable dependiente e independiente y la de Sánchez Cobo (1999) que indica dificultades en la interpretación de los coeficientes de regresión, y su relación con la pendiente de la recta y tipo de correlación. Agnelli y cols. (2009) indican que algunas de estas dificultades pueden estar ligadas al estudio previo de la función lineal que se generaliza excesivamente.

La investigación sobre libros de texto de matemáticas es amplia, siendo menor en estadística y probabilidad, donde encontramos ejemplos como los de Ortiz (1999), Cobo y Batanero (2004) y Azcárate y Serradó (2006). Respecto a la regresión destacamos las investigaciones de Sánchez Cobo (1999), quien estudia las definiciones relacionadas con la regresión en once libros de texto de Bachillerato, publicados entre 1977 y 1990, clasificándolas según se presenten apoyadas en otros conceptos, con un fin puramente procedimental, o bien una mezcla de las anteriores. En su estudio a veces no diferencia entre conceptos y propiedades por lo que éste será un punto original de nuestro trabajo.

Lavalle, Micheli y Rubio (2006) analizan la enseñanza de la regresión en siete textos, considerando los conceptos y procedimientos asociados, así como sus relaciones. Encuentran distintos niveles de profundidad en el tratamiento del tema. En cuanto a la regresión, solo un texto trata de modo estructural el concepto de recta de regresión; cuatro la ecuación de la recta, siendo únicamente dos los que además aluden a funciones de ajuste distintas a la lineal. En la mayoría se trata también la estimación de la variable dependiente.

Por su parte Gea y cols. (2013) identifican aquellas situaciones que permiten dotar de significado a la regresión al nivel que esta enseñanza se desarrolla en España, en una revisión de textos de Bachillerato de Ciencias Sociales. En Gea, Batanero, Fernandes y Gómez (en prensa) analizamos, en estos mismos libros de texto, la presentación de la distribución bidimensional y sus representaciones gráfica y tabular; tema que el estudiante aprende antes de comenzar el de la regresión propiamente dicha. En Gea, Batanero, Arteaga, Cañadas y Contreras (en prensa) estudiamos el lenguaje simbólico, expresiones algebraicas y verbales sobre la correlación y regresión. Queda pendiente el análisis complementario del modo en que los conceptos y propiedades se describen y utilizan en los textos mencionados, que es el objetivo del presente trabajo.

METODOLOGÍA

Se analizaron ocho libros de textos de primer curso de Bachillerato en la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales, publicados recién implantado el currículo actual (MEC, 2007). Los libros se eligieron por ser los más utilizados en la enseñanza pública en la Comunidad Autónoma de Andalucía, y estar publicados en editoriales de gran tradición y prestigio (Anexo 1). Resaltamos el hecho de que todos han estado vigentes hasta final de 2013. Se realiza un análisis de contenido, con los siguientes pasos:

- En primer lugar se categorizan todos los conceptos implicados en el tratamiento de la regresión, analizando la forma en que se describe o presenta el concepto, que puede ser mediante ejemplos (E), formalmente (F) o bien una mezcla de ambos: proponiendo ejemplos y luego formalmente (EF), o al contrario (FE).
- Seguidamente se consideran las propiedades asociadas a cada uno de los anteriores conceptos, que no fueron consideradas en trabajos previos.

Este análisis difiere de otras técnicas de estudio documental (por ejemplo, del método histórico), porque sustituye en lo posible las interpretaciones y subjetividad del estudio de documentos o de comunicaciones por procedimientos estandarizados, con el fin de convertir en datos los contenidos analizados en los documentos (León y Montero, 2002).

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los conceptos ligados a la regresión en los libros analizados son los siguientes:

C1. Variable dependiente e independiente. Su diferencia ocupa un lugar central en la regresión (Estepa, 1994), con objeto de expresar una variable en función de otra. Una definición explícita se encuentra en [H8], (p.254): “*La variable dependiente es aquella que se quiere estimar, y la variable que se utiliza para ello se denomina variable independiente*.” Implícitamente se describe al resaltar que existen dos rectas de regresión.

C2. Regresión. Este concepto suele tratarse de modo implícito. Una definición explícita es: “*Al análisis que pretende determinar la curva que mejor aproxima un diagrama de dispersión se le llama regresión*” ([H3], p. 226).

C3. Modelos de regresión. El concepto de modelo es fundamental en el tratamiento de la regresión, aunque raramente aparece en los textos, que se limitan a la regresión lineal. En algunos casos, no se define pero queda implícita, por ejemplo:

> Si existe una correlación fuerte entre las variables X e Y, el análisis de la regresión permite encontrar la ecuación de la función matemática que mejor se ajusta a la nube de puntos. Esta puede ser una recta, una parábola, una exponencial, una cúbica, etc. ([H4], p.226).

La situación es parecida a la descrita por Lavalle, Micheli y Rubio (2006), donde sólo dos de los siete textos incluyen a la regresión no lineal. Otros plantean tareas donde el modelo de ajuste más indicado es no lineal sin definirlo. En Sánchez Cobo (1999) sólo cinco libros analizados incluyen ejemplos de regresión distintos al lineal sin definirlo.

C4. Coeficientes de regresión lineal. En el modelo lineal existen dos coeficientes de regresión que corresponden a las pendientes de las rectas de regresión asociadas. Sánchez Cobo no los analiza. En nuestro estudio, algunos libros los definen en forma parcialmente correcta pues sólo definen el coeficiente de regresión de Y sobre X:

La recta que hace mínima la suma $\sum d_i^2$ tiene por ecuación: $y = \bar{y} + \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \bar{x})$. Se llama recta de regresión de Y sobre X. A la pendiente, $\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$, se la llama coeficiente de regresión ([H1], p. 230).

C5. Rectas de regresión. Todos los textos analizados la definen correctamente y precisan el método de mínimos cuadrados. Se encuentran también enunciados imprecisos como el siguiente donde s no se precisa también cuál es la variable dependiente e independiente.

> La tabla adjunta da los alargamientos de una barra metálica por efecto de cambios en la temperatura. Calcular la recta de regresión y hacer algunas estimaciones ([H1], p.231).

Tan sólo [H8] alude al tratamiento de datos atípicos, y a la metodología de Tukey para obtener la recta de regresión respecto a la mediana. En cuanto a la utilidad predictiva de la recta de regresión, sólo la mitad de los textos analizados la resaltan. Estos resultados coinciden con los de Sánchez Cobo (1999), quien señala que se suele aludir al ajuste a los datos (siete de los once textos) más que a su carácter predictivo (tres de los once textos).

C6. Bondad de ajuste. Coeficiente de determinación. Estas nociones ayudan al estudiante a dotar de significado al análisis de regresión. A pesar de ello, los textos analizados no suelen incluirla; tan sólo las encontramos en [H5], [H6] siendo parcialmente correctas en [H6] ya que no menciona el coeficiente de determinación. Además, se pudiera inducir a error al, considerar la fiabilidad del modelo y la fiabilidad de la predicción como nociones equivalentes. Sin embargo no lo son, puesto que la primera se refiere a la fiabilidad global de la predicción y la segunda se reduce a la de un punto particular.

En la Tabla 1 se resume la forma de definición de estos conceptos, observando un predominio de definiciones acompañadas de ejemplos, sobre todo en [H6]. La recta de regresión se define en todos, y se suelen acompañar de ejemplos; en la mitad de los textos antes y en el resto después de su definición. Generalmente se introduce de modo estructural (Sfard, 1991), utilizando diagramas de dispersión que añaden la recta de mínimos cuadrados mediante ejemplos que muestran la distancia de los puntos de la nube a la recta, evidenciando la diferencia entre el valor observado (ordenadas del punto) y el predicho (punto sobre la recta); finalmente se ofrece la definición operacional de la misma. Igual ocurre en la investigación de Sánchez Cobo (1999).

Tabla 1. Conceptos asociados a la regresión y forma de introducción

Conceptos	H1	H2	H3	H4	H5	H6	H7	H8
C1.Variable dependiente e independiente					F			F
C2.Regresión			EF	FE				
C3.Modelos no lineales de regresión					FE	FE		
C4.Coeficientes de regresión lineal	F	F		F				
C5.Rectas de regresión	EF	EF	F	FE	FE	FE	FE	F
C6.Bondad de ajuste. Coef. de determinación					FE	FE		

Destacamos los pocos textos que incluyen otras definiciones, como los coeficientes de regresión, o la bondad del ajuste, induciendo un tratamiento meramente operacional de la regresión, pudiendo así olvidar la importancia de aspectos estructurales de la misma, y con ello, un aprendizaje más significativo.

Propiedades consideradas

Los libros de texto suelen presentar atributos o propiedades de los conceptos definidos, cuya naturaleza es epistémica, y por tanto institucional. Se han encontrado los siguientes:

P1. Modelos de regresión. Puesto que los textos no suelen incluir modelos no lineales, estas propiedades se refieren a aspectos generales del análisis de regresión. Un ejemplo es el siguiente:

> Si en una variable (*X,Y*) existe una correlación fuerte entre las variables *X* e *Y*, el análisis de la regresión permite encontrar la ecuación de la función matemática que mejor se ajusta a la nube de puntos. ([H4], p.226).

P2. La recta de regresión hace mínima la suma de los cuadrados de las distancias de los puntos (abscisas y ordenadas) de la distribución bidimensional a la recta. Todos los textos la incluyen, generalizando la propiedad equivalente de la media (la media es el valor que minimiza la suma de distancias de los datos).

P3. Dos rectas de regresión diferentes. En todos los textos se indica implícitamente que hay dos rectas de regresión diferentes, aunque algunos lo hacen explícito. Como Sánchez Cobo (1999), creemos que si se presenta esta propiedad se podría prevenir que los estudiantes obtuvieran una de las rectas despejando la variable de la otra recta calculada previamente. Un ejemplo es:

> Las rectas de regresión de *Y* sobre *X* y de *X* sobre *Y* son distintas, por eso hay que saber qué variable es la dependiente, pues *X* e *Y* no son intercambiables. (Es posible que tenga sentido deducir la variable *Y* a partir de la *X*, mientras que deducir la *X* a partir de la *Y* carezca de significado) ([H5], p.258).

P4. Propiedades del Coeficiente de determinación. La principal es que el coeficiente de determinación informa de la fiabilidad del ajuste lineal. Otros textos analizan su relación con la proporción de varianza explicada:

> En ocasiones, con el fin de calcular la calidad o bondad del ajuste realizado mediante la recta de regresión y, por tanto, la fiabilidad de las predicciones que con ella se puedan realizar, se utiliza la expresión (r^2•100)% que nos da el porcentaje en el que la variable Y se justifica por el valor de la variable X ([H6], p.185).

P5. La recta de regresión permite estimar valores de la variable dependiente a partir de la independiente. Pocos textos precisan esta propiedad. Un ejemplo es: "*La recta de regresión nos permite predecir valores de una variable a partir de los de la otra*" ([H3], p.227).

P6. Las estimaciones obtenidas con la recta de regresión son aproximaciones, en términos de probabilidad, al valor real. Esta propiedad no se suele incluir, aunque en su mayoría se usa de modo implícito, pues se indica que, al contrario del caso de la dependencia funcional, para cada valor de la variable independiente, corresponden varios valores de la dependiente, siendo el valor proporcionado por la recta de regresión el promedio de todos ellos. Así:

> Las estimaciones siempre se realizan aproximadamente y en términos de probabilidad: es probable que si $x = x_0$ entonces y valga, aproximadamente, $\hat{y}(x_0)$. ([H1], p.230).

P7. La estimación de cada variable se realiza con su correspondiente recta de regresión. Se incluye generalmente, y algunos textos señalan que si el coeficiente es próximo a 1 o -1, se puede utilizar una única recta de regresión para predecir cualquiera de las variables del estudio.

Relaciones entre conceptos

Además de las propiedades que se refieren a un solo concepto se han determinado las siguientes relaciones:

R1. La recta de regresión pasa por el centro de gravedad de la distribución. En el estudio de Sánchez Cobo (1999), siete de los once textos citan esta propiedad, aunque dos lo hacen de modo implícito.

R2. Las estimaciones con la recta de regresión son mejores en valores cercanos a la media de la variable independiente. Un ejemplo es: "*Las predicciones obtenidas para valores próximos al* *punto medio de la distribución son más fiables que las obtenidas para valores muy alejados*” ([H3], p.227). No suele aparecer en muchos textos ya que, por lo general, la fiabilidad de la predicción se juzga por la proximidad del coeficiente de correlación a 1 o -1, aunque esta condición es insuficiente.

R3. La fiabilidad de la predicción con la recta de regresión aumenta con el tamaño de muestra. Se presenta en pocos de los textos analizados a pesar de ser su utilidad. Un ejemplo es: “*La fiabilidad aumenta al aumentar los datos. Una recta obtenida a partir de pocos datos genera grandes riesgos, aunque r sea muy alto*”. ([H5], p.260).

R4. El tipo de dependencia informa de la posición de las rectas de regresión. Así es que, dependiendo de si las variables presentan dependencia funcional o independencia, las rectas de regresión son coincidentes o perpendiculares, respectivamente.

R5. Recta de regresión y signo de la covarianza. Se interpreta la covarianza según la proximidad de los puntos a la recta de regresión, y se relaciona el signo y los coeficientes de regresión, o pendiente de las rectas de regresión. En el estudio de Sánchez Cobo (1999) ninguno de los textos los incluye:

> Según donde esté situado (x_i, y_i) respecto a $(\bar{x}, \bar{y})$, el área $(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$ será positiva o negativa. Si los puntos están próximos a una recta de pendiente positiva, los sumandos son casi todos positivos y la covarianza es grande ([H1], p.228).

R6. Recta de regresión y sentido de la correlación. De la pendiente de la recta de regresión se puede deducir el signo de la correlación:

> Si la pendiente de la recta de regresión es positiva o negativa, la correlación se llama positiva o negativa, respectivamente. ([H1], p.227).

R7. El producto de los dos coeficientes de regresión es r^2. Esta proposición se encuentra en la mayoría de los textos, y también en los de Sánchez Cobo (1999).

R8. Signo de los coeficientes de regresión y correlación. El coeficiente de correlación tiene el mismo signo que los coeficientes de regresión. Si no se definen los coeficientes de regresión, esta propiedad se formula en términos de la pendiente de la recta.

R9. Relación entre las estimaciones con la recta de regresión y el coeficiente de correlación. La mayoría de los textos relacionan ambos conceptos como por ejemplo:

> La fiabilidad de los cálculos obtenidos mediante las rectas de regresión será tanto mayor cuanto mayor sea el valor absoluto del coeficiente de correlación lineal r.
>
> Si r está muy próximo a cero, no tiene sentido realizar ninguna estimación o previsión.
>
> Si r está próximo a 1 o a -1, los valores reales serán, probablemente, próximos a nuestras estimaciones.
>
> Si r = 1 o r = -1, los valores reales coincidirán con las estimaciones efectuadas ([H4], p.226)

R10. Posición relativa de las rectas de regresión y coeficiente de correlación. No es muy habitual encontrar esta propiedad geométrica sobre el ángulo que forman las rectas en función del valor del coeficiente.

En la Tabla 2 presentamos un resumen de las propiedades y relaciones que se incluyen en el tema, que se refieren al análisis de regresión. Observamos diferencia en los textos, desde algunos que apenas incluyen propiedades (como [H2]) hasta otros como [H5] y [H6] que presentan casi todas las analizadas. La propiedad más frecuentemente encontrada es la de mínimos cuadrados y el uso de la recta específica para hacer predicciones, así como que la recta permite hacer estimaciones. En todo caso, que se ha indicado, algunas otras propiedades se utilizan, sin mencionarlas explícitamente en los textos.

Tabla 2. Propiedades de la regresión

	H1	H2	H3	H4	H5	H6	H7	H8
P1.Modelos de regresión				x	x	x		x
P2.La recta de regresión minimiza la suma de los cuadrados de las distancias de los puntos de la distribución a la recta	x	x	x		x	x	x	x
P3.Dos rectas de regresión diferentes			x		x	x		
P4.Propiedades del Coeficiente de determinación					x	x		
P5.La recta de regresión permite realizar estimaciones		x	x	x	x	x	x	
P6.Una predicción es una aproximación al valor real de la variable que se estima	x		x	x			x	
P7.Uso de la recta específica para realizar predicciones	x		x	x	x	x	x	
Relaciones								
R1.Recta de regresión - centro de gravedad	x	x	x		x	x	x	x
R2.Predicción - centro de gravedad	x	x	x		x	x	x	x
R3.Tamaño de la muestra - recta regresión - predicción			x		x			
R4.Tipo de dependencia - recta de regresión			x	x				
R5.Covarianza - recta de regresión	x				x	x		
R6.Correlación - recta de regresión	x		x		x		x	
R7.Producto c. regresión - coef. de correlación lineal	x		x					
R8.Coeficiente de correlación - coeficientes de regresión	x		x	x				x
R9.Coeficiente de correlación - predicción	x	x	x	x	x	x	x	
R10.Posición rectas de regresión - coef. de correlación	x		x				x	x

CONCLUSIONES

El análisis realizado permite cumplir el objetivo de este trabajo, que fue analizar los conceptos y propiedades asociados a la regresión en los libros de texto del Bachillerato de Ciencias Sociales, completando los estudios previos.

Respecto al estudio de Sánchez Cobo (1999), nuestro trabajo lo completa al analizar libros de texto actuales, pues los estudiados por el autor fueron publicados entre 1977 y 1990. Además estudiamos en forma diferenciada los conceptos y propiedades; clasificando también las definiciones de los conceptos siguiendo la propuesta de Sfard (1991). Tampoco Lavalle, Micheli y Rubio (2006) estudian las propiedades en los textos y además su estudio se ha realizado sobre textos argentinos.

Además, al estudiar los conceptos y propiedades de la regresión complementamos nuestros trabajos previos sobre las situaciones problema (Gea, Batanero, Cañadas y Contreras, 2013), la distribución de datos bidimensional (Gea, Batanero, Fernandes y Gómez, en prensa) y el lenguaje de la correlación y regresión (Gea, Batanero, Arteaga, Cañadas y Contreras, en prensa).

Para completar el objetivo, a continuación utilizamos los resultados para sugerir posibles mejoras en la presentación de las definiciones y propiedades de la regresión en los libros de texto.

En primer lugar, los resultados muestran la escasa presencia de definiciones relativas a la regresión, exceptuada la de recta de regresión, posiblemente por la amplitud que se dedica al concepto de correlación, que en algunos casos se confunde con el de regresión. Pensamos que es importante que los textos den la relevancia debida a la regresión, pues una vez aceptada una correlación entre las variables, la verdadera utilidad de este tema está en tratar de ajustar un modelo de regresión a los datos. Recomendamos consecuentemente reforzar las definiciones de regresión, modelo de regresión, modelos no lineales, rectas de regresión y coeficientes de regresión.

En general, los textos cubren todas las propiedades importantes relativas a la regresión; la variedad y cantidad de estas propiedades y relaciones muestra la gran complejidad semiótica del tema, debido a la riqueza conceptual y de propiedades de la configuración epistémica asociada, que el alumno ha de aprender. Sin embargo, podemos apreciar también un escaso tratamiento estructural de estas propiedades y relaciones. La mayoría de los textos enfatizan la presentación operacional, mostrando a un énfasis excesivo en el cálculo, sin poner atención al significado y aspectos interpretativos. Así es que se presentan los cálculos para determinar cada una de las rectas de regresión, pero no se analizan a fondo las propiedades que relacionan la regresión con la correlación. Además, la relación de la recta de regresión con el coeficiente de correlación lineal se suele establecer sólo para determinar la fiabilidad de la predicción, sin analizar e interpretar la conexión entre correlación y regresión lineal, propiamente dicha. Por otra parte, sería importante que los libros resalten esta relación para que los estudiantes lleguen a comprender que es posible un coeficiente de correlación bajo o moderado en un diagrama de dispersión de dependencia alta pero no lineal (por ejemplo, parabólica).

En otros casos, las relaciones que se establecen entre la recta de regresión y el coeficiente de correlación se presentan en forma muy apresurada, por lo que el profesor en la clase debiera organizar un debate y reflexión en torno a las mismas. De otro modo, los estudiantes pudieran realizar interpretaciones incorrectas que les lleven a error; por ejemplo, si al estudiar la relación entre el coeficiente de correlación y la recta de regresión no se diferencia la existencia de dos rectas. Los estudiantes pueden llegar a pensar que con una misma recta se pueden realizar predicciones para cada una de las variables; deducción que es cierta si el valor de $|r|$ es próximo a 1, pero no en caso general.

Finalizamos recomendando interpretar nuestros resultados con precaución pues el impacto del libro de texto sobre el estudiante depende no sólo del mismo libro, sino del alumno y sus conocimientos previos, así como de la forma que el profesor lo usa en el aula (Lowe y Pimm, 1996)

Agradecimientos

Proyecto EDU2010-1494 y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Agnelli, H., Konic, P., Peparelli, N. Z. y Flores, P. (2009). La función lineal obstáculo didáctico para la enseñanza de la regresión lineal. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *17*, 52-61.

Azcárate, P. y Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación*, *340*, 341-378.

Cobo, B. y Batanero, C. (2004). Significados de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, *22* (1), 5-18.

Estepa, A. (1994). *Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Estepa, A. (2008). Interpretación de los diagramas de dispersión por estudiantes de Bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, *26* (2), 257-270.

Estepa, A. y Batanero, C. (1995). Concepciones iniciales sobre la asociación estadística. *Enseñanza de las Ciencias*, *13* (2), 155-170.

Gea, M. M. (2014). *Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad en futuros profesores de educación primaria.* Tesis doctoral, pendiente de lectura.

Gea, M. M., Batanero, C., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2013). Un estudio empírico de las situaciones-problema de correlación y regresión en libros de texto de bachillerato. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 293-300). Bilbao: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Gea, M. M., Batanero, C., Arteaga, P., Cañadas, G. R., Contreras, J. M. (En prensa). Análisis del lenguaje sobre la correlación y regresión en libros de texto de bachillerato. *SUMA*, Gea, M. M., Batanero, C., Fernandes, J. A. y Gómez, E. (en prensa). La distribución de datos bidimensionales en los libros de texto de matemáticas de Bachillerato. *Quadrante*. Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14* (3), 325-355

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22* (2-3), 237-284.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, *39* (1-2), 127-135.

Lavalle, A. L., Micheli, E. B. y Rubio, N. (2006). Análisis didáctico de regresión y correlación para la enseñanza media. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9* (3), 383-406.

León, O. G. y Montero, I. (2002). *Métodos de Investigación*. Madrid: Mc Graw Hill.

Lowe, E. y Pimm, D. (1996). 'This is so': a text on texts. En A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.). *International Handbook of Mathematics Education*, (pp. 371-410). Dordrecht: Kluwer.

M.E.C. (2007). *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura de Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas*. Madrid: Autor.

Ortiz, J. J. (1999). *Significado de los conceptos probabilísticos elementales en los textos de Bachillerato*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., y Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of educational psychology*, *93* (2), 346-362.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22* (1), 1-36.

Sánchez Cobo, F.T. (1999). *Significado de la correlación y regresión para los estudiantes universitarios*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Granada.

Zieffler, A, y Garfield, J. (2009). Modeling the growth of students' covariational reasoning during an introductory statistics course. *Statistics Education Research Journal*, *8* (1), 7-31.

Anexo 1: Textos utilizados en el análisis

[H1]. Colera, J., Oliveira, M.J., García, R. y Santaella, E. (2008). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I*. Madrid: Grupo Anaya.

[H2]. Anguera, J., Biosca, A., Espinet, M. J., Fandos, M.J., Gimeno, M. y Rey, J. (2008). *Matemáticas I aplicadas a las Ciencias Sociales*. Barcelona: Guadiel.

[H3]. Vizmanos, J. R., Hernández, J. y Alcaide, F. Moreno, M. y Serrano, E. (2008). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 1*. Madrid: Grupo SM.

[H4]. Arias, J. M. y Maza, I. (2008). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 1*. Madrid: Grupo Editorial Bruño.

[H5]. Antonio, M., González, L., Lorenzo, J. Molano, A., del Río, J., Santon, D. y de Vicente, M. (2008). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I*. Madrid: Santillana Educación.

[H6]. Martínez, J. M., Cuadra, R., Heras, A. (2008). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales. 1º Bachillerato*. Madrid: McGraw-Hill.

[H7]. Bescós, E. y Pena, Z. (2008). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales. 1 Bachillerato*. Vizcaya: Oxford University Press.

[H8]. Monteagudo, M. F. y Paz, J. (2008). *1º Bachillerato. Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales*. Zaragoza: Luis Vives.

COMPONENTES CRÍTICAS EN TAREAS DE COMPARACIÓN DE RAZONES DESIGUALES[1]

Critical components in comparison of unequal ratios tasks

Bernardo Gómez, Amparo García

Universidad de Valencia

Resumen

En este trabajo se estudian tareas de comparación de razones desiguales en el contexto de las ofertas comerciales. Se identifican las componentes críticas de las tareas y se analizan las respuestas de los estudiantes de distintos niveles al resolverlas. Finalmente se extraen conclusiones acerca de su desempeño.

Palabras clave: *Razón y desproporción, resolución de problemas, normalizar y relativamente.*

Abstract

In this work, comparison of unequal ratios tasks in commercial offers contexts is studied. The critical components are identifying and student responses to each task are analyzed. Finally, concluding remarks are extracted.

Keywords: *Ratio and not proportion, problem solving, norming and relatively.*

INTRODUCCIÓN

"Una pulga puede saltar -relativamente- más alto que un hombre", con este ejemplo Freudenthal (2001) da cuenta de un tipo particular de problemas que involucran una comparación de razones sin que haya proporción, y el objeto mental "relativamente". Este tipo de problemas son frecuentes en la vida diaria, por ejemplo, cuando hay que decidir entre dos ofertas comerciales. Según Freudenthal son problemas que deberían ser considerados en una fenomenología didáctica de la razón, sin embargo, la enseñanza tradicional no parece prestarles atención. En esta investigación se aborda el estudio de este tipo de problemas, por su interés para el diseño de una enseñanza sobre el concepto de razón.

MARCO TEÓRICO

Los estudios sobre razón y proporción han estado influidos por el papel central asignado al razonamiento proporcional desde los trabajos embrionarios de Inhelder y Piaget. Se distinguen dos tipos principales de estudios: los que se centran en el desarrollo cognitivo y los que se orientan a la estructura y caracterización del contenido matemático. Los unos se fijan en lo que el alumno puede o no puede hacer; y los otros han puesto de manifiesto que la enseñanza tradicional escolar tiene un enfoque precario (Streefland, 1985), y que el conocimiento de los futuros profesores es insuficiente (Ilany, Keret y Ben-Chaim, 2004; Valverde y Castro, 2009). Freudenthal, en su propuesta de fenomenología didáctica propone que en vez de empezar por el concepto "y andar buscando materiales que hagan concreto ese concepto se debería buscar primero fenómenos que pudieran compelir al estudiante a constituir el objeto mental que está siendo matematizado por el concepto" (Freudenthal, 2001, p.6).

Diferentes tipos de tareas han sido usadas para evaluar el razonamiento proporcional: Valor perdido, Comparación numérica y Comparación y predicción cualitativa, Proporciones que implican conversión de razones a razones de cambio o fracciones y Problemas de traslación, (Cramer y Post,1993; Lesh, Post y Behr, 1988). Del análisis de las respuestas a estas tareas se ha

Gómez, B., García, A. (2014). Componentes críticas en tareas de comparación de razones desiguales. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 375-384). Salamanca: SEIEM.

obtenido una descripción de estrategias correctas: "razón unitaria", "factor de cambio", "fracción" y "producto cruzado"; e incorrectas: "construcción progresiva", "operaciones aleatorias", y "diferencia constante" (Hart, 1981; Cramer y Post, 1993).

También se han identificado variables que influyen en las decisiones de los estudiantes, unas son estructurales y otras de contexto. Las primeras están asociadas a la naturaleza de las cantidades y las relaciones entre cantidades, y estas pueden ser "internas" o "externas".

Por lo que se refiere a la razón, es un concepto complejo que requiere un proceso de aprendizaje a largo plazo, y emparejado a tantos fenómenos como se pueda. Se trata formalmente de una relación de equivalencia, definida por $a:b = c:d$ si el par (a, b) es equivalente a (c, d). Pero lo que hace valiosa a la razón es hablar sobre igualdad o desigualdad de razones, sin conocer el tamaño de la razón (Freudenthal, 2001, p.67). Otro aspecto importante es que una razón es una relación invariante y que cualquier cambio en el antecedente producirá un cambio en el consecuente. Además, cuando la relación se refiere a cantidades que son parte de un "todo" (e.g.: niños y niñas de una clase), no se necesita conocer el "todo", porque la relación no cambia de valor cuando cambia la cantidad total.

La extensa variedad de fenómenos de que es susceptible la razón se pueden agrupar en *Exposiciones*, *Composiciones* y *Constructos* (Freudenthal, 2001), los últimos para situaciones preferentemente geométricas. Un ejemplo de exposición puede ser el formado por un conjunto de países y sus superficies, y uno de composición puede ser una mezcla o una aleación fundiendo metales y el peso o porcentaje que les corresponde en la aleación.

Parejas de exposiciones y composiciones

A menudo se requiere comparar parejas de exposiciones o composiciones. Cuando se comparan dos exposiciones definidas sobre el mismo conjunto, como por ejemplo, en Ω es un conjunto de países y a cada país se le asigna una población y una medida de su superficie mediante las funciones ω_1 y ω_2. La razón entre ω_1 y ω_2, es la densidad de población. La comparación de pares de densidades permite afirmar si un país tiene "en comparación" a su superficie el mismo número de habitantes o un número menor o mayor que otro.

Cuando se comparan dos composiciones, el conjunto Ω de ambas está formado por componentes, partes o clases, de un mismo universo. Si se trata de mezclas o aleaciones, ambas tienen los mismos componentes y si se trata de dos particiones (grupos de edad de una población), ambas están formadas por las mismas partes o clases. Si por ejemplo fueran dos aleaciones con los mismos componentes, y a cada componente se le asigna una masa diferente en cada aleación, mediante las funciones ω_1 y ω_2. La comparación de los pares de razones internas, una de cada aleación, permite saber qué aleación tiene "en comparación" más, menos o igual cantidad de una de sus componentes.

El objeto mental "relativamente" y las técnicas de "normalizar"

Ligados a estos fenómenos, se señala la importancia de ideas tales como "relativamente" o "comparativamente". Estas ideas permiten comparar cantidades con referentes diferentes transformando el referente. A menudo hay razones que en principio son de difíciles de imaginar o visualizar, en esos casos, se acude a un complejo de técnicas que Freudenthal (2001) denomina "normalizar".

9. Razones normalizadas por reducción o ampliación de los objetos usando una escala familiar, sin que importe cuál sea la escala, como por ejemplo: "si imaginamos la Tierra como la cabeza de un alfiler (1 mm de diámetro), el Sol aparece como una esfera con un diámetro de 10 cm a una distancia de 10 m".

10. Razones normalizadas por reducción a la unidad (simple o múltiple) del antecedente o del consecuente. Se puede distinguir entre las que se pueden representar o visualizar mediante

esquemas parte-todo o parte-parte sin hacer referencia al todo, pues es muy grande o se desconoce, como en: "uno de cada cinco niños que nace es chino", o "por cada dos vasos de agua pones tres de naranja"; y las que no se pueden representar o visualizar mediante esquemas parte-todo o parte-parte, porque se plantean entre elementos de conjuntos distintos, pero en su normalización admiten expresiones verbales como las anteriores, es el caso de "en cada litro de agua hay tal cantidad de sal".

11. Razones normalizadas por el sistema de numeración decimal. Las más usuales son las que utilizan el porcentaje.

Delimitando el objeto de estudio y las preguntas de investigación

Asumiendo la precariedad de la enseñanza tradicional de la razón, que se construye con objetos matemáticos desconectados de la realidad y no dan cuenta de la riqueza fenomenológica de este concepto, en particular, de las *parejas de exposiciones* o *composiciones* que involucran la idea de "relativamente", y sus técnicas de normalizar, resaltamos la importancia de hablar sobre desigualdad de razones. En este trabajo se pretende aportar tareas relevantes para la enseñanza de la razón que pongan en juego estas ideas, y que hayan sido sometidas a la prueba de la investigación. A tal fin, se formulan las siguientes preguntas de investigación: ¿cuáles son las componentes críticas de las tareas diseñadas?, ¿qué estrategias utilizan los estudiantes? y ¿qué dificultades manifiestan?

METODOLOGÍA

La investigación es de tipo cualitativo y se basa en el "análisis de las tareas" a partir de un cuestionario diseñado ex-profeso en base al marco teórico anteriormente descrito.

Las actividades del cuestionario se distribuyeron en hojas de trabajo individuales. Su implementación se llevó a cabo en grupos de alumnos de tres niveles educativos diferentes: 1º de bachillerato de un IES (grupo A, 18 alumnos de CCSS, y grupo B, 25 alumnos de CC), 2º de grado de magisterio (48 alumnos), y Máster de profesor de secundaria de la UV (38 alumnos).

En primer lugar, el cuestionario se pasó a los estudiantes de bachillerato, a modo de pilotaje, con el objetivo de validar las tareas y el tiempo necesario para resolverlas. Posteriormente, se facilitó el cuestionario a los dos niveles siguientes.

Diseño del cuestionario

Las tareas elegidas son realistas (tomadas de la vida diaria), concretamente de los folletos de ofertas comerciales corrientes en los supermercados. Son tareas que se pueden caracterizar por su "fenomenología" como parejas de *exposiciones o composiciones*, involucran el objeto mental *relativament*e y las técnicas de *normalizar*, por su tipología son tareas de *comparación cuantitativa*, en situaciones de *desproporción*, porque hay que juzgar cuál de dos razones es mayor o menor: A/B (<, >) C/D, o tal vez iguales, lo que se puede hacer de modo grosero o preciso.

Además, en estos problemas suele ser corriente que se requiera efectuar una *conversión de normalizaciones* para homogeneizar las razones cuando vienen normalizadas de modo diferente.

ANÁLISIS DE TAREAS

Con el fin de ilustrar el proceso seguido para dar cuenta de las preguntas de investigación, se ofrecen a continuación un par de ejemplos: "pizzas y cervezas" donde se hace el análisis de sus componentes críticas usando los elementos del marco conceptual descrito en el apartado anterior, y después se muestra cómo estas componentes sustentan los procesos de resolución de las tareas. Para la observación de las resoluciones de los estudiantes, sus estrategias y dificultades; se sigue el modelo de interpretación que viene usando nuestro grupo de investigación y que ya ha sido documentado en trabajos precedentes (Monje, Pérez-Tyteca y Gómez, 2013; Gómez et al. 2013).

Componentes críticas de la tarea "pizzas"

Se presenta a los estudiantes una imagen que corresponde a una oferta de pizzas. El texto dice: ¿Qué es mejor, dos pizzas medianas de 30cm de diámetro y 14.95€ cada una, o una pizza familiar de 50cm diámetro y 27.95€?

Figura 1. Tarea Pizzas

El objetivo de esta tarea no es contestar qué pizza es más barata en términos absolutos, sino qué pizza es más barata en relación con la cantidad ofrecida. Esto sitúa la componente crítica de la tarea en los procesos de "relativizar". Para ello se necesita:

1. Calcular: el área de las pizzas y el coste de las dos pizzas medianas.
2. Comparar: áreas (¿dónde hay más cantidad?), precios (¿cuál es más barata?), y luego comparar ambas comparaciones, para ver si "a más área, menos o igual área hay más, menos o igual precio" (relativizar). También precios con áreas o áreas con precios; o lo que es lo mismo, poner el precio en relación con el área o viceversa (relativizar), obteniendo así los costes unitarios (o su relación inversa) de cada oferta. En la comparación de precios con áreas se pone de manifiesto la relación invariante que es característica de las razones. En este caso el coste unitario de una pizza mediana es el mismo que el de dos, el cociente entre el precio de una pizza mediana y su área es el mismo que el cociente del precio de dos pizzas medianas y el área de las dos pizzas. Un distractor para percibir esta invariancia es que la oferta solo es aplicable si se compran dos pizzas medianas.

Dificultades previsibles en esta tarea pueden ser que los alumnos no recuerden la fórmula del área del círculo. También es de esperar que el uso de la palabra "mejor" en la pregunta genere algún tipo de valoración subjetiva, ya que es un término no definido.

Análisis preliminar de las relaciones entre cantidades de la tarea "pizzas"

Fenomenológicamente, la tarea se puede resolver como en las parejas de exposiciones.

Par de Exposiciones. Ω = {Pizza familiar, Pizza mediana}

Ω_i: asigna una cantidad a cada uno de los elementos de Ω

La tabla de doble entrada (tabla 1) ayuda a visualizar las relaciones entre cantidades y el proceso de resolución.

La comparación de las razones externas muestra que la pizza familiar cuesta en relación a su superficie menos que la mediana (comparación cuantitativa grosera), o la mediana cuesta $\frac{0.021}{0.014} = \frac{3}{2} = 1.5$, un tercio más que la familiar (comparación cuantitativa precisa).

Por otro lado, aunque la comparación de razones internas no es lo habitual en las parejas exposiciones, no deja de ser posible en este caso, y lo que muestra es que por casi el mismo precio en la familiar dan más pizza (cuantitativa grosera), o de modo más preciso: $\frac{1.39}{0.94} \approx \frac{3}{2}$ que por el mismo precio con la familiar dan un tercio más de pizza.

Tabla 1

	Pizza familiar	Pizza mediana	Comp. internas →
ω1: Ω1 → Coste	Cf= 27.95	Cm = 2·14,95	$\frac{C_f}{C_m} = \frac{27.95}{2 \times 14.95} = 0.94$
ω2: Ω2 → Área	Sf = π·252	Sm = 2·π·152	$\frac{S_f}{2S_m} = \frac{\pi\left(\frac{50}{2}\right)^2}{2\pi\left(\frac{30}{2}\right)^2} = 1.39$
Comp. Externas ↓	$\frac{C_f}{S_f} = \frac{27,95}{\pi 25^2} = 0,014\frac{€}{cm^2}$	$\frac{C_m}{S_m} = \frac{2 \cdot 14,95}{2 \cdot \pi 15^2} = 0,021\frac{€}{cm^2}$	

Una lectura diferente, que en esta tarea funciona por las diferencias en el tamaño de los datos, ya que los datos lo favorecen, es la comparación por diferencias, más grosera que las anteriores, ésta muestra que en la familiar dan más área por menos precio: C_m-C_f=29.90-27.95; S_m-S_f=625π-450π.

Criterios para el análisis de las respuestas de los estudiantes a esta tarea

De acuerdo con lo anterior, los criterios para el análisis de las respuestas son: perspectiva absoluta versus relativa, razones internas o externas (comparadas de forma grosera o precisa), pareja de exposiciones (fenomenología) y estrategias alternativas.

Ejemplos de resoluciones de los estudiantes a la tarea "pizzas"

A parte de las estrategias de las resoluciones de los estudiantes que se corresponden con el análisis de la tabla 1, se muestran a continuación 3 ejemplos representativos de otras resoluciones especialmente significativas.

Ejemplo 1: Comparación de diferencias

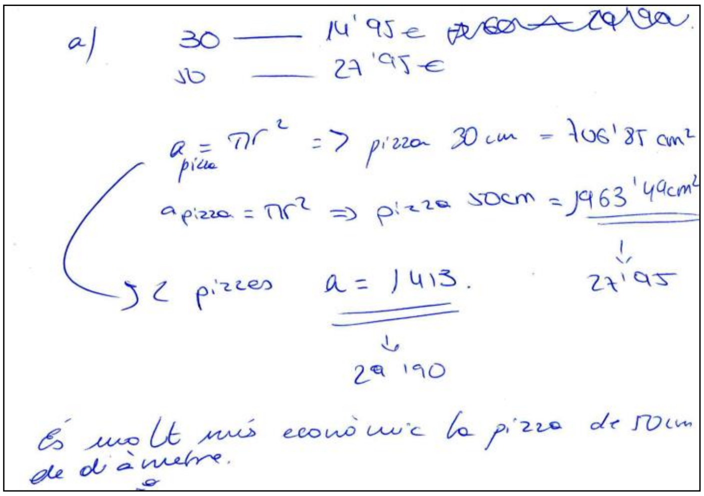


Figura 2. Alumno A1 Bachillerato

Este alumno calcula, por un lado, el área de las pizzas en cada una de las opciones (Familiar: 1963.48cm^2 y Medianas: 1413cm^2) y, por otro lado, los costes (Familiar: 27.95€ y Medianas: 29.90€). Compara los costes entre sí y las área entre sí, en términos absolutos (mayor, menor, más, menos). Concluye que la pizza de 50cm de diámetro es más económica.

El enfoque adoptado es absoluto (no usa razones) y, aunque obtiene una solución correcta, se debe a que los datos lo favorecen en este caso. Se trata de una comparación grosera.

Ejemplo 2: Valor unitario y linealidad

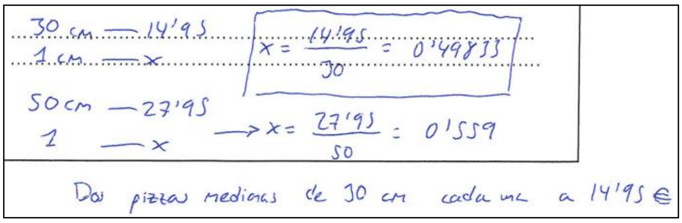


Figura 3. Alumno 7 Máster

Este alumno calcula el coste de 1cm de pizza en cada una de las dos opciones: familiar y mediana, mediante una regla de 3. Compara los resultados y concluye que es mejor la oferta de dos pizzas medianas ya que el coste unitario que obtiene es menor que el de la pizza familiar.

Teniendo en cuenta los criterios de análisis definidos, se observa que el estudiante adopta una perspectiva relativa. Las razones son externas, propias de una pareja de exposiciones. Y las comparaciones realizadas son externas. La estrategia es la del valor unitario lo que sería adecuado si hubiera considerado las áreas en lugar de los diámetros. La dificultad de este estudiante es lo que se conoce como "linealidad" (Van Dooren, De Bock y Verschaffel, 2006).

Ejemplo 3: Proporción en las diferencias y linealidad

Es una estrategia imprevista (figura 4) observada en las respuestas de los estudiantes:

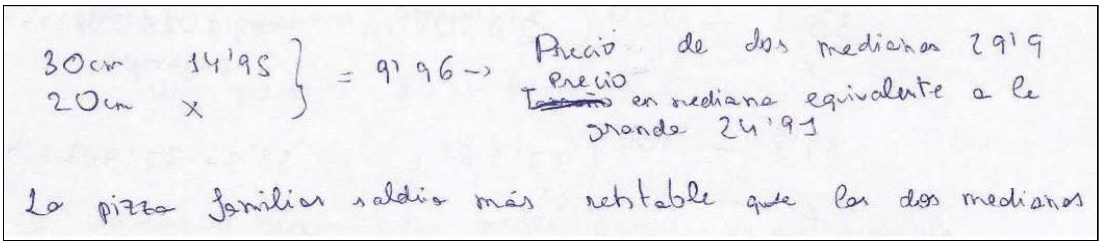


Figura 4. Alumno 4 Magisterio

El estudiante, tras calcular la diferencia de diámetros (50 - 30 = 20), plantea una regla de 3 (30/20 = 14.95/x ó 30/14.95 = 20/x → x = 9.96) para hallar lo que costarían los 20cm de más que tiene la pizza familiar en proporción al coste de una mediana, y de aquí obtiene, por adición, lo que debería costar la pizza familiar. Compara este coste con el de la oferta y concluye que la pizza familiar saldría más rentable que las dos medianas.

El estudiante interpreta mal los datos obtenidos. Con sus datos, la oferta más rentable es la de las pizzas medianas. Esta estrategia sería correcta si el alumno no se hubiese centrado en la "linealidad", usa los diámetros en lugar de las áreas. A esta estrategia se le puede denominar "Proporción en las diferencias" porque consiste en averiguar si la diferencia de tamaño se corresponde con la diferencia de precios.

Componentes críticas de la tarea "cervezas"

Se presenta a los estudiantes una imagen que corresponde a dos ofertas de cerveza. El texto dice: "Normalmente los botes de cerveza son de 1/3 de litro o lo que es lo mismo, 33'3cc. En una oferta me descuentan el 15% del precio y en la otra me regalan un 14% de cerveza. ¿Cuál es más caro?".

Figura 5. Tarea Cervezas

Los datos vienen dados mediante razones normalizadas a porcentajes, formuladas con referentes distintos: en el bote grande el porcentaje del 14% se refiere a un regalo sobre el volumen normal de 33,3cc; mientras que en el bote pequeño el porcentaje del 15% se refiere a un descuento en el precio de un bote normal de 33,3cc.

El objetivo de esta tarea no es comparar las dos razones: 14% y 15%, en términos absolutos, para saber qué porcentaje es mayor o menor, sino comparar esas razones en relación con sus referentes (relativizar). Ésta es una componente crítica de la tarea.

Pero dado que esos referentes son distintos, se requiere efectuar una *conversión de normalizaciones* para poder visualizar la comparación, reformulando una de las dos razones normalizadas en la forma en que está dada la otra, es decir, o el regalo en descuento o el descuento en regalo. Ésta es otra componente crítica de la tarea.

Además de las componentes que se han mencionado, se distinguen las siguientes:

1. Calcular: cómo quedan los volúmenes de las latas después del regalo y del descuento y los costes de cada lata después de aplicar el regalo y el descuento, usando un precio imaginario, aunque esto último no es necesario.
2. Comparar: costes con volúmenes o, lo que es lo mismo, poner el coste en relación con el volumen (relativizar), obteniendo así los costes unitarios (o la relación inversa). También se puede comparar el volumen que se paga en relación con el volumen que se regala o descuenta en cada caso o el volumen que se regala y el que se descuenta en relación con el volumen total de cada lata (o la relación inversa). Al realizar esta última comparación se homogeneízan los descuentos. Notar que en el caso del bote pequeño éste es un dato del problema. Aquí es crucial homogenizar las razones revirtiendo el regalo en descuento o viceversa, para ello la normalización del todo a 100 o a 1 hace los cálculos y las comparaciones más fáciles.

Análisis preliminar de las relaciones entre cantidades de la tarea "cervezas"

La homogeneización de las razones se puede hacer de varias maneras: por un lado, "14% de 33,33cc, es 4.66cc. Un regalo de 4.66 sobre 33.33, equivale a un descuento de 4.66 sobre 38 (33.33+4.66), y esto es un descuento del 12,28%". Por otro, la normalización a 100 hace más fácil los cálculos: un regalo del 14% de 100 equivale a un descuento de 14 sobre 114, y esto es un descuento de 12.28%. Igualmente, un descuento del 15% sobre 100 equivale a un regalo de 15 sobre 85, y esto es un regalo de 17,65%.

Fenomenológicamente, la tarea se puede resolver como parejas de composiciones:

Par de Composiciones. Ω = {parte de pago, parte de regalo}.

ω_1 (pago) = 100cc, ω_1 (regalo) = 14cc; ω_2 (pago) = 85cc, ω_2 (regalo) = 15cc

La tabla de doble entrada (tabla 2) ayuda a visualizar las relaciones entre cantidades y el proceso de resolución.

Tabla 2

	Pago	Regalo	Comp. internas →
ω1: Ω1 → BG	PG = 100	RG = 14	$\frac{R_G}{P_G} = \frac{14}{100} = 0{,}14$
ω 2: Ω2 → Bp	Pp = 85	Rp = 15	$\frac{R_p}{P_p} = \frac{15}{85} = 0{,}176$

La comparación de razones internas: 0.14 y 0.17, muestra que el regalo en relación con lo que se paga es mayor en el bote pequeño.

Par de Exposiciones. $\Omega_1 = \Omega_2$ = {bote grande, bote pequeño}

ω_1: $\Omega_1 \rightarrow$regalo bote grande 14, regalo bote pequeño 15

ω_2: $\Omega_2 \rightarrow$me llevo bote grande 114; me llevo bote pequeño 100

La tabla de doble entrada (tabla 3) ayuda a visualizar las relaciones entre cantidades y el proceso de resolución.

Tabla 3

	Bote grande	Bote pequeño
ω1: Ω1 → regalo	RG = 14	Rp = 15
ω 2: Ω2 → llevo	LlG = 114	Llp = 100
Comp. externas ↓	$\frac{R_G}{Ll_G} = \frac{14}{114} = 0.12$	$\frac{R_p}{Ll_p} = \frac{15}{100} = 0.15$

La comparación de razones externas, 0.12 y 0.15, permite observar que en el bote pequeño el regalo en comparación con lo que se lleva es mayor que en el bote grande.

Criterios para el análisis de las respuestas de los estudiantes a esta tarea

De acuerdo con lo anterior, los criterios para el análisis de las respuestas de los estudiantes se siguen de los siguientes enfoques de resolución: perspectiva absoluta versus relativa, razones internas o externas (comparadas de forma grosera o precisa), parejas de exposiciones o de composiciones (fenomenología), normalización y conversión de normalizaciones, y estrategias alternativas.

Ejemplos de resoluciones de los estudiantes a la tarea "cervezas"

Análogamente a como se ha hecho en la tarea anterior, se muestran a continuación algunos ejemplos representativos de las distintas resoluciones de los estudiantes que se identifican al hacer el análisis con los criterios anteriores diferentes a los de la tabla 1.

Ejemplo 1: Comparación de aumentos

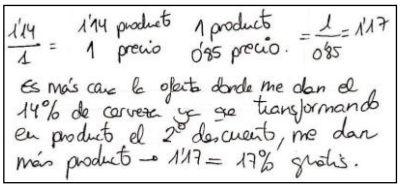


Figura 6.Alumno 35 Máster

El alumno toma como unidad el bote de un tercio de litro de cerveza. Un regalo del 14% equivale a un bote de 1.14 y un descuento del 15% equivale a un bote de 0.85. A continuación compara en cada lata lo que se lleva en relación a lo que paga, obteniendo así los tantos por ciento de aumento (Lata grande: 1.14/1 = 1.14 → 14%; Lata pequeña: 1/0.85 = 1.17 → 17%). Concluye que "es más cara la oferta donde me dan el 14% de cerveza ya que transformando en producto el 2º descuento, me dan más producto → 1.17 = 17% gratis".

Tabla 4

	Bote grande	Bote pequeño
ω1: Ω1 → llevo	LlG = 1.14	Llp = 1
ω2: Ω2 → pago	PG = 1	Pp = 0.85
Comp. externas ↓	1.14/1 = 1.14	1/85 = 1.17

Como se observa en la tabla 4, el alumno normaliza a 1 y calcula razones externas, lo que es propio de la pareja de exposiciones, comparándolas de forma grosera. En lugar de poner lo que le regalan en relación a lo que se lleva, compara lo que se lleva en relación a lo que paga. Su enfoque es relativo. Su estrategia es convertir normalizaciones, en particular, tantos por ciento de aumento.

Ejemplo 2: Uso de proporciones

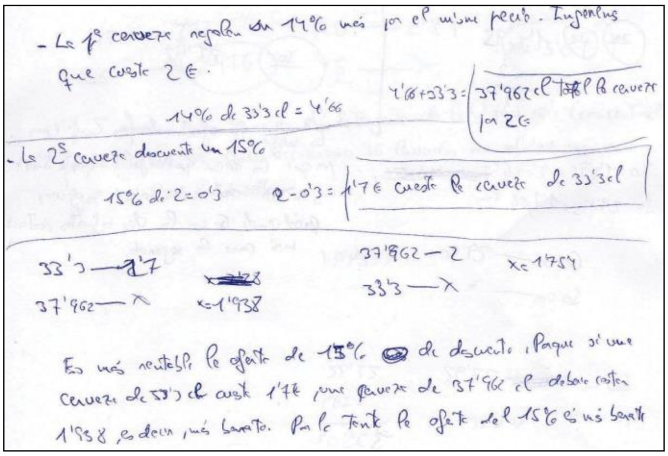


Figura 7. Alumno 27 Magisterio

Este alumno fija un precio arbitrario de 2€ a los 33,3 cc del tercio de cerveza. Halla el volumen del bote aumentado (37, 962 cc), halla el coste del bote descontado el 15% (1.7€) y plantea una regla de tres para hallar lo que costaría el bote grande si guardara proporción con el precio del bote tras el descuento: $\frac{33´3}{1´7} = \frac{37´962}{x}$, como resultado obtiene que el bote grande debería costar 1’938€. Repite el proceso para calcular cuánto costaría el bote reducido normal si su coste guardara proporción con el coste del bote grande, y obtiene que valdría 1’75€. Concluye que "es más rentable la oferta de 15% de descuento, porque si una cerveza de 33.3 cl cuesta 1.7€, una cerveza de 37.962 cl debería costar 1.938€.

Esta estrategia es similar a "proporción en las diferencias" observada en la tarea pizzas. Consiste en averiguar si la diferencia de tamaño se corresponde con la diferencia de precio. El enfoque no es "normalizador" tal y como demanda la tarea, sino que es un efecto de la fijación en la regla de 3.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En la tarea de las pizzas se observa un aumento de las respuestas en que se relativiza a medida que se avanza de nivel (Bach.: 17/43; Mag.: 38/48; Mást.: 29/36). Entre los alumnos de bachillerato, las respuestas más habituales son de tipo aditivo (17/43), sin relativizar. En los alumnos de magisterio se observa una fijación en la "linealidad" (41/48) y en los alumnos del máster en el cálculo del valor unitario (14/36). Es relevante que hay muchos estudiantes que no perciben que el número de ítems de pizzas medianas se cancela al calcular el valor unitario, es decir, que la razón es invariante. Este es un aspecto a considerar en futuras investigaciones.

En la tarea de las cervezas, al igual que ocurre en las pizzas, los alumnos de bachillerato no suelen normalizar ni relativizar (25/43). Los alumnos de magisterio suelen comparar los datos absolutos (13/43) mientras que los del máster suelen usar el valor unitario (8/36), y solo unos pocos del máster (3/38) homogenizan las normalizaciones. La renuencia a usar la conversión de normalizaciones hace pensar en un fallo en la enseñanza que habrá que tener en cuenta en futuras investigaciones. Es relevante destacar que la mayor parte de los participantes necesitaban conocer el coste de cada lata por lo que asignan un precio arbitrario al bote de cerveza.

En cuanto a las conclusiones globales del estudio, se distingue que: no se percibe la invariancia de la razón; además, de la misma manera que hay una predisposición a calcular mediante la regla de 3 en las tareas de proporción, hay una predisposición a usar la estrategia del coste unitario en estas tareas de desproporción, aunque en el caso de las cervezas no sea necesaria; también se observan más dificultades cuando se realizan comparaciones de tipo unidades por euro que a la inversa, es decir, euros por unidad; y, finalmente, se muestran dificultades para aceptar que el tanto por ciento de aumento puede interpretarse como un descuento.

Referencias

Cramer, K. and Post, T. (1993). Proportional Reasoning, *The Mathematics Teachers, vol.86,* pp. 404-407.

Freudenthal, H. (2001). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas.* (Textos seleccionados, Traducción Luis Puig). México, D. F. Dpto de Matemática Educativa. CINVESTAV.

Gómez, B.; Monje, J.; Pérez-Tyteca, P. y Rigo, M. (2013). Performance on ratio in realistic discount task. In B. Ubuz, Ç. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 293-302).

Hart, K. M. (1981). Ratio and Proportion. *Children´s Understandings of Mathematics, 11-16,* John Murray Ltd., London.

Ilany, B., Keret, J. and Ben-Chaim, D. (2004). Implementation of a model using authentic investigative activities for teaching ratio & proportion in pre-service teacher education, *Proceedings of the PME 28, vol. 3*, pp. 81-88.

Lesh, R., Post, T. and Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, pp. 93-118, Reston, VA: NCTM.

Monje, J., Pérez-Tyteca, P. y Gómez, B. (2013). Trabajando la metacognición en una tarea de razón y proporción. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 393-401). Bilbao: SEIEM.

Streefland, L. (1985). Search for the Roots of Ratio: Some Thoughts on the Long Term Learning Process (Towards...a Theory), *Educational Studies in Mathematics, vol. 16*, 1, pp. 75-94.

Valverde, A. F. y Castro, E. (2009). Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 523-531). Santander: SEIEM.

Van Dooren, W., De Bock, D. y Verschaffel, L. (2006). La búsqueda de las raíces de la ilusión de Linealidad. *INDIVISA. Boletín de Estudios e Investigación*, [Monografía IX]. pp. 115-138 (Hay una versión precedente del 2003 en *Educational Studies in Mathematics*, *vol. 53*, pp. 113-118).

[1] Esta aportación se sustenta en un proyecto de investigación financiado por el MEC. Ref.: EDU2009-10599 (subprograma EDUC).

INFLUENCIA DE LOS CONCEPTOS TOPOLÓGICOS EN LA DEFINICIÓN DE LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO EN LIBROS DE TEXTO DE CÁLCULO

Influence of topological concepts in the definition of finite limit of a function at a point in Calculus textbooks

Ignacio González-Ruiz, Juan F. Ruiz-Hidalgo, Marta Molina

Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo se estudia la influencia de los conceptos topológicos elementales en la definición formal de límite finito de una función en un punto en manuales universitarios destinados a la formación inicial en Análisis Matemático o Cálculo. Seleccionamos cuatro de los manuales más populares dentro las guías docentes de diversas titulaciones universitarias. El análisis realizado permite constatar la escasa presencia explícita que se otorga a los conceptos topológicos en el tratamiento y la definición de límite. Los conceptos topológicos suelen tratarse implícitamente por medio de las ideas de aproximación y tendencia y del trabajo con secuencias numéricas finitas, así como recurriendo a distintos sistemas de representación. Contrastamos estos resultados con la naturaleza del concepto límite que se potencia en cada manual.

Palabras clave: *análisis matemático, cálculo, límite finito, manuales universitarios, topología.*

Abstract

In this paper we study the influence that elementary topological concepts have on the formal definition of finite limit of a function at a point, in undergraduate Calculus textbooks. We consider four of the most popular textbooks in syllabi from different university degrees. The analysis reveals the weakness of the explicit presence of topological concepts at the time of addressing the treatment and definition of limit. Topological concepts are usually dealt implicitly by the ideas of ***approximation and tendency, and dealing with finite number sequences as well as considering different*** *representation systems. We contrast these results with the nature of the concept of limit promoted in each textbook.*

Keywords: *calculus, finite limit, mathematical analysis, topology, undergraduate textbooks.*

El Análisis Matemático es una de las ramas de las matemáticas, configurada como tal en el siglo XVII. Su estudio se fundamenta en el cambio o la variación; de ahí sus importantes contribuciones al desarrollo de la ciencia y, en particular, de la Física. Su presencia en el ámbito educativo se remonta a las enseñanzas de los jesuitas que se plasmaron en el Ratio Studiorum y, en particular, en la edición del padre Pachtler (Labrador, Beatrán-Quera, Diez-Escaniano y Martínez, 1986). Si bien, en España, su implantación en los planes de estudio no se hizo efectiva hasta 1934, cuando, por primera vez, se contemplaba al Análisis Matemático en las enseñanzas regladas de Bachillerato; hecho que se prolonga hasta la actualidad, habida cuenta de su importancia (González y Sierra, 2004). En diversidad de planes de estudios de los actuales grados universitarios se incluyen materias propias de este ámbito, por lo que resulta de interés el papel que en los distintos contextos (científico, técnico o económico) se otorga a los conceptos fundamentales del Análisis Matemático y el desarrollo que de ellos se hace. Este es, por ejemplo, el caso del concepto de límite, sobre el

González-Ruiz, I., Ruiz-Hidalgo, J. F., Molina, M. (2014). Influencia de los conceptos topológicos en la definición de límite finito de una función en un punto en libros de texto de cálculo. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 385-394). Salamanca: SEIEM.

que se fundamentan muchos otros como los de derivada o integral, básicos en la formación de distintos profesionales. El límite adquiere una relevancia notable en la formación de científicos (matemáticos y estadísticos, fundamentalmente) y se erige como una de las herramientas matemáticas básicas de la investigación en muchas áreas. Atendiendo a estas consideraciones, surge una cuestión de interés al plantearse si la formación en Análisis Matemático que se propone para algunos profesionales es la adecuada para satisfacer los futuros retos profesionales que estos puedan tener. Este problema cuenta con una escasa presencia en la literatura, concentrándose ésta en la noción de límite como objeto de enseñanza-aprendizaje o en su evolución histórica (ej., Blázquez y Ortega, 1998; Fernández-Plaza, Castro, Rico y Ruiz-Hidalgo, 2012; Sierra, González y López, 1999, 2000, 2002). Si bien, en Blázquez, Gatica y Ortega (2009) se lleva a cabo una revisión crítica de las definiciones de límite funcional en textos universitarios, no se pone el foco de interés en el papel que en las mismas se confiere a los conceptos topológicos elementales. En torno a la definición de límite cobra una especial relevancia la noción de punto de acumulación que ha sido abordada por Thompson y Silverman (2007); si bien, en este trabajo se analiza el papel de la noción de acumulación en cuestiones propias del cálculo integral. Con todo, nuestra propuesta pone el foco de interés en el papel que juegan los conceptos topológicos elementales a la hora de introducir la definición del límite finito de una función en un punto y en vislumbrar de qué modo esto se manifiesta en los libros de texto de Cálculo, propios de la formación inicial en Análisis Matemático de diversos perfiles académico-profesionales.

En esta línea de investigación, nos planteamos los objetivos que se contemplan a continuación.

O.1. Analizar la relación que se establece en los libros Análisis Matemático de los primeros niveles universitarios, entre los contenidos topológicos y los relacionados con el límite.

O.2. Analizar el tratamiento que las distintas obras otorgan al concepto de límite atendiendo a su naturaleza dual, como objeto y proceso.

MARCO TEÓRICO

Este trabajo se sitúa en la línea de los trabajos en Didáctica del Análisis y del Pensamiento Matemático Avanzado. El marco teórico lo articulamos en torno a varias ideas clave: la relevancia del análisis de textos en la investigación en educación matemática, la naturaleza dual de los conceptos matemáticos y el significado de los conceptos matemáticos.

El papel de los libros de texto

Autores como Choppin (1980) y Schubring (1987) han abordado el papel que en la transmisión del conocimiento ha constituido la aparición del libro de texto. Este puede considerarse como un elemento cultural que se caracteriza por la imposición de unos contenidos frente a otros y propone una determinada forma de estructurarlos. La importancia del libro de texto como recurso didáctico es señalada ya en el informe Cockroft (1985), donde se afirma que constituye una ayuda inestimable para el docente y su labor en la práctica del aula. Algunos autores, como Chevallard (1991), sugieren que los libros de texto ofrecen una concepción legitimada del saber a enseñar e institucionalizan una forma de progresión del conocimiento de los estudiantes. Por otro lado, Robert y Robinet (1989) sostienen que el estudio de los libros de texto nos permite conocer, de manera indirecta, la concepción con que los docentes cuentan en relación a un contenido específico, puesto que, al elegir los materiales curriculares que se van a emplear, intervienen muchas variables y al tomar la decisión de utilizar uno u otro texto se está posicionando y compartiendo, al menos parcialmente, lo que éste propone. Trabajos como Bosch, Gascón y Sierra (2009), Gómez (2009) y Monterrubio y Ortega (2009), presentados en previos simposios de la SEIEM, dan muestra de esta relevancia de los libros de texto como fuentes de información para los investigadores en educación matemática, siendo su estudio reconocido como una línea más de la investigación en esta área.

La naturaleza dual de los conceptos

Tall (1991) establece que las nociones abstractas pueden concebirse de dos formas: estructuralmente, como objetos, u operacionalmente, como procesos. En este trabajo adoptamos como definición la propuesta por Sfard (1991) que considera los objetos matemáticos como las nociones u objetos abstractos que no pueden ser explorados por nuestros sentidos; tratándose de entes sólo existentes en un universo teórico y, por tanto, sólo visualizables por medio de la mente humana. Por otro lado, en Tall, Gray, Ali, Crowley, DeMarois, McGowen, Pitta, Pinto, Thomas y Yusof (2001) se asocia la concepción operacional de un objeto matemático a la ejecución de cálculos que dan sentido a su existencia. Estas dos maneras de concebir un objeto matemático no son incompatibles sino más bien complementarias, ya que las dos son necesarias para una correcta comprensión de los conceptos matemáticos.

Significado de los conceptos matemáticos

En relación al significado de un concepto matemático, adoptamos la propuesta recogida en Rico (2012) y Gómez (2007), adaptación de la noción de significado introducida por Frege (1998). Abordamos el significado de un concepto matemático atendiendo a tres dimensiones bien diferenciadas: los sistemas de representación (signos), la estructura conceptual (referencia) y la fenomenología (sentido). La primera de estas dimensiones comprende los conjuntos de signos, gráficos y reglas que hacen presente dicho concepto y permiten su relación con otros. La estructura conceptual la forman los conceptos y las propiedades, así como los argumentos y proposiciones que se derivan del mismo y sus criterios de veracidad. La fenomenología contempla aquellos fenómenos, ya sean contextos, situaciones o problemas, subyacentes en la génesis del concepto y que le confieren sentido.

Entendemos que los conceptos matemáticos se introducen sujetos a un contexto determinado, hecho de capital importancia a la hora del tratamiento y desarrollo de los mismos. Este es, por ejemplo, el caso de los libros de texto, donde la forma en que se introducen los conceptos se encuentra muy condicionada por las pretensiones que persiga la obra y determina el posterior tratamiento que de los mismos, sus relaciones y propiedades se hacen en ella. Partiendo de esta consideración introducimos lo que llamamos Niveles de Completitud Semántica con el objetivo de caracterizar y ahondar en el tratamiento, que de un concepto matemático, se realiza en un contexto determinado. Definimos y ejemplificamos cada uno de ellos a continuación.

Nivel intuitivo: Se caracteriza por realizar un trabajo, previo a la introducción de un concepto matemático, en relación a algunos de sus elementos más característicos, propios de la estructura conceptual, por medio del uso de sistemas de representación y fenómenos que organizan el concepto matemático en cuestión. Su interés reside en rebajar las dificultades cognitivas que pueda entrañar el tratamiento de los conceptos. Un ejemplo del mismo se organiza en torno las nociones “tender a” o “aproximarse a”, usualmente trabajadas con anterioridad a la introducción del concepto de límite por medio de representaciones gráficas, y que contribuyen a generar en el estudiante una idea intuitiva de dicho tales conceptos, que contribuirán a rebajar la dificultad que pueda surgir al abordar la noción de límite.

Nivel formal: Se caracteriza por trabajar los conceptos matemáticos desde su esencia pero sin llegar a conferirles la autonomía necesaria para considerarlos como objetos matemáticos. En él se aprecia un empleo riguroso del lenguaje matemático así como del estudio formal de la estructura conceptual de los conceptos matemáticos. Este nivel suele ir ligado a potenciar la naturaleza de proceso presente en algunos conceptos matemáticos. A modo de ejemplo, cabe decir que este nivel se manifiesta en las numerosas tareas de cálculo de límites que se presentan en los textos, una vez se ha introducido la definición formal de límite. De esta forma, se evidencia el contraste que este tipo de tareas confiere a la noción de límite, minando su perspectiva teórica en favor de potenciar su concepción de operación matemática; hecho que cobra especial relevancia al introducir técnicas de cálculo de límites.

Nivel de abstracción: Se caracteriza por dotar a los conceptos de autonomía y entidad matemática, de forma que puedan considerarse como objetos matemáticos. Cabe decir que es lícito hablar del nivel de abstracción siempre que se establezca una armonía entre la concepción de los conceptos como objeto y proceso. En el caso del límite, puede decirse que se ha alcanzado este nivel si se conjugan sus aspectos estructurales y operacionales en su tratamiento.

En lo que sigue se entiende por definición de un concepto matemático al enunciado verbal que predetermina al concepto de una manera no circular (sus elementos deben ser nociones primitivas de la teoría o nociones definidas previa e independientemente) y consistente (no puede involucrar contradicciones lógicas que derivarían en que ningún objeto verifique sus condiciones). En un contexto de matemática avanzada, la definición es la referencia del concepto dentro del modelo de significado adoptado.

DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO Y DE LA MUESTRA

La muestra de manuales universitarios seleccionados para este estudio consiste en un conjunto de obras, destinado a un fin común, cuya temática versa sobre la disciplina Análisis Matemático. Se trata de las siguientes obras: Apostol (2006), Ayres (1989), Larson y Edwars (2010) y Spivack (1996).

Esta muestra es intencional. La selección de obras obedece a dos criterios básicos. Por un lado, son obras que abordan los contenidos matemáticos de los que trata esta investigación. En sus páginas se presentan, desde ópticas diversas, aspectos relativos a los conceptos topológicos básicos, así como a la noción de límite finito de una función en un punto. Por otro lado, se trata de obras que se incluyen en las bibliografías básicas de guías docentes procedentes de diferentes titulaciones impartidas en universidades españolas[1]. En este sentido, las obras seleccionadas gozan de influencia en la formación de profesionales bien dispares como matemáticos, estadísticos, economistas o ingenieros de diversa especialidad.

Antes de atender al contenido de las obras, las caracterizamos utilizando una serie de descriptores que permiten ilustrar los aspectos más significados que este trabajo pretende contemplar en relación a la descripción externa de cada una de las obras. Se han considerado la editorial, el título de la obra, el autor, la ciudad de publicación, el año de publicación y la pretensión de la obra. Todos ellos se organizan, para cada obra en una tabla semejante a la Tabla 1.

Tabla 1. Descriptores externos Ayres (1989)

Editorial	Título	Autor	Ciudad	Año	Pretensión
McGraw-Hill	Cálculo Diferencial e Integral. Teoría y 1175 problemas resueltos	Frank Ayres	Madrid	1989	Proporcionar una formación inicial teórico-práctica en Cálculo a los estudiantes de Ciencias e Ingeniería

Cabe destacar de entre los descriptores anteriores el relativo a la pretensión de la obra. Frecuentemente las obras incluyen algún tipo de apéndice en el que los autores justifican la génesis de su obra en base a metas formativo-pedagógicas o de adquisición del contenido. En este sentido, para cada una de las obras que se han seleccionado, los autores arguyen metas que, en algunas ocasiones, adoptan una posición más explícita en relación a los profesionales a quienes va dirigida, como es el caso de Ayres (1989). Por el contrario, en Larson y Edwards (2010) y Spivack (1996) se adopta una posición más abierta en este sentido, centrándose únicamente en una justificación de las pretensiones que persigue su obra en base a los contenidos que en ella se recogen: Definir y demostrar o, presentar, los conceptos fundamentales del Cálculo. En la obra de Apostol (2006) no se contempla ningún tipo de pretensión similar a las mencionadas para el resto de obras.

ANALISIS Y RESULTADOS

Abordamos el análisis de los textos en dos etapas a las que nos referimos, respectivamente, como caracterización interna y análisis del contenido de las obras.

Caracterización interna de las obras

Caracterizamos el tratamiento y la presentación que en cada una de las obras se hace de los contenidos matemáticos sobre los que se centra el interés de la investigación por medio de tres descriptores: "Contenidos" (C), "Presentación y Tratamiento" (PT) y "Actividades Relacionadas" (AR). El primero de ellos alude a los contenidos que, en relación a los dos focos de interés señalados, cada obra recoge; el segundo trata de matizar el modo en que se introducen los citados contenidos. El tercero atiende a los objetivos que persiguen las actividades incluidas en las distintas obras. De esta forma, para cada una de las obras, se ha recogido la información como se ilustra en la Tabla 2.

Tabla 2. Descriptores internos Spivack (1989)

Conceptos Topológicos (C PT AR)	**Conceptos del límite**		
	C	PT	AR
No se contemplan	Límites (Parte II, Sección 5)	Aproximación a la definición formal de límite (Págs. 107-118)	Cálculo de límites (Act. 1-4, págs. 132-133)
	Sucesiones infinitas y Series infinitas (Parte IV, Sección 21)	Definición de límite. (Pág. 118-119)	Aplicación de la definición formal de límite (Act. 6-14, págs. 133-134)
		Caracterización de la definición de límite por sucesiones (Pág. 619-620)	Demostración de propiedades (Act. 16-31, págs. 135-137)

La información que se recoge en las tablas elaboradas evidencia el énfasis que en cada una de las obras se confiere al tratamiento de los distintos contenidos. En este sentido, atendiendo a los datos, destaca, por un lado, la restrictiva presencia que las obras otorgan a los conceptos topológicos elementales, ausentándose estos contenidos de forma explícita en tres de ellas: Ayres (1989), Larson y Edwards (2010) y Spivack (1996). Entendemos que este hecho condiciona el tratamiento que en las obras se hace del concepto de límite finito de una función en un punto y, en particular, de su definición. Asimismo, en relación a las actividades, se aprecia un predominio del trabajo de cálculo de límites, en detrimento de otras destinadas a ahondar en sus rasgos definitorios o propiedades.

Análisis del contenido de las obras

Para analizar el contenido matemático, de interés para la investigación, en cada una de las obras seleccionadas, así como del tratamiento que en cada una ellas se hacen del mismo, se utilizan las tres dimensiones del significado de un concepto matemático descritas en el marco teórico: estructura conceptual (EC), los sistemas de representación (SSR) y la fenomenología (F). Asimismo, se hace uso de los niveles de completitud semántica (NCS), introducidos en este trabajo, y se analizan las relaciones que puedan manifestarse entre ellos. Finalmente, tanto para los conceptos topológicos como relacionados con el tratamiento del límite, se contempla una síntesis, a modo de comparativa, de los aspectos más significativos y de interés para la presente investigación, atendiendo a cada una de las obras.

Conceptos topológicos

Sólo la obra de Apostol (2006) incluye un capítulo dedicado al tratamiento de los conceptos topológicos. Si bien, aun careciendo el resto de obras de una sección semejante, conviene tener en cuenta la presencia, explícita o implícita, que en el tratamiento de los contenidos relacionados con la definición de límite, puede apreciarse de los conceptos topológicos. Con el fin de precisar esta labor para cada una de las obras se hace uso de tablas (ver Tabla 3 y Tabla 4). No recogemos aquí las tablas correspondientes a todas las obras por limitaciones de espacio.

Tabla 3. Conceptos topológicos en Apostol (2006)

EC	Se establecen las definiciones de punto de acumulación, punto interior y punto adherente. Destaca de ellos que, si bien otros conceptos en esta obra se definen en espacios métricos generales, el tratamiento de estos se realiza en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{R}^n$, un hecho estrechamente ligado con las escasa tipología de tareas propuestas en relación a estos contenidos, destinadas a determinar los puntos de acumulación, interiores o la clausura de conjuntos de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^2$. Cabe destacar que la terminología que se emplea es ajena a otras nomenclaturas presentes en la literatura especializada. Además, se contempla una proposición en la que se ilustra la caracterización por sucesiones de los puntos de acumulación; si bien, no de una manera explícita, puesto que en la obra las cuestiones relativas a sucesiones se tratan en capítulos posteriores. Aun así, este hecho se subsana en el capítulo dedicado a las sucesiones.
SSR	Se hace uso únicamente del sistema de representación simbólico para represar los conjuntos de puntos de acumulación, interiores o adherentes, adoptando la simbología universalmente establecida.
F	Al plantear actividades se recurre a determinados conjuntos en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^2$ en los que identificar los conjuntos de puntos aislados, interiores o adherentes.
NCS	Predomina el nivel intuitivo en el tratamiento de los conceptos, con el que se consigue rebajar el nivel de complejidad que presentan los conceptos, tal y como se manifiesta al definir los conceptos en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^n$. A la hora de caracterizar por sucesiones el concepto de punto de acumulación, predomina el nivel formal.

Tabla 4. Conceptos topológicos en Larson y Edwards (2010)

EC	No se manifiestan. La obra no dedica ningún capitulo al tratamiento explicito de los conceptos topológicos elementales. Si bien, a la hora de definir la noción de límite finito de una función en un punto x_0, se propone un ejemplo en el que, sin hacer mención alguna a las cuestiones topológicas, se presenta en forma tabular un conjunto finito de valores, distintos a x_0, pero próximos a él. Además se incluye una representación gráfica que permite ilustrar dicha situación. La idea que subyace a estos planteamientos es la de que x_0 es un punto de acumulación
SSR	No se contemplan explícitamente. Únicamente se hace uso del sistema de representación tabular, en el que se representan los distintos valores próximos a x_0 y del sistema de representación gráfico.
F	El tratamiento implícito de los puntos de acumulación está ligado a la idea de aproximación.
NCS	Se trabajan los conceptos desde una perspectiva muy intuitiva evitando cualquier formalización o abstracción de los mismos. El nivel predominante es el intuitivo.

Síntesis comparativa I: conceptos topológicos

A la luz de la información extraída de cada obra, cabe destacar el tratamiento que de los conceptos topológicos se realiza en las mismas. Si bien en Apostol (2006) se abordan estas cuestiones con una mayor profundidad, es destacable, que a la hora de definir conceptos topológicos básicos no lo haga en espacios topológicos, ni siquiera en espacios métricos diferentes de la recta real. Este hecho condiciona la tipología de actividades que en relación a esta temática se proponen en la obra. El resto de las obras, en las que no se contempla explícitamente alusión alguna a los contenidos topológicos básicos que intervienen en la definición de límite finito de una función en un punto, presentan una mayor riqueza de sistemas de representación, de utilidad a la hora de subsanar sus carencias. Esto explica que el nivel de completitud semántica predominante en las obras, a excepción de en Spivack (1996), y en Apostol (2006) donde comparte presencia con el nivel formal, sea el intuitivo.

Concepto de límite

Las carencias en relación a los contenidos topológicos elementales que manifiestan las obras, contrastan con el tratamiento que en ellas se hace de la noción de límite finito de una función en un punto.

Previamente al establecimiento de la definición de límite finito de una función en un punto que se adopta en cada una de las obras, resulta de interés ahondar en los aspectos teóricos que cada una de ellas propone en aras de conseguir una aproximación a la idea de límite. Este hecho contribuye a vislumbrar el significado que cada obra asume de dicho concepto. Para llevar a cabo esta tarea se continúa con la metodología establecida anteriormente, como se muestra en la Tabla 5 y en la Tabla 6. No recogemos aquí las tablas correspondientes a las otras dos obras por limitaciones de espacio.

Tabla 5. Concepto de Límite en Apostol (2006)

EC	Atendiendo a las nociones que se han ido estableciendo sobre espacios métricos y sus propiedades, se propone la dedición formal de límite finito de una función en un punto en un espacio métrico cualquiera. Se acompaña además de una representación gráfica válida para espacios métricos cualesquiera. En la obra se contempla además la caracterización por sucesiones de dicha definición.
SSR	Se hace uso del sistema de representación simbólico a la hora de establecer la definición, además del gráfico que permite ilustrar el sentido que subyace a la misma.
F	Dentro de la sección dedicada al límite finito de una función en un punto no se hace referencia alguna a este respecto. De forma implícita, por medio de la caracterización por sucesiones se hace uso de una lenguaje propio de “aproximación” y “tender a”, lo que alude a situaciones de aproximación.
NCS	Se trabaja con los conceptos desde una perspectiva abstracta. La noción de límite adquiere un papel de objeto matemático en torno al cual se organizan sus propiedades en forma de proposiciones o teorema. Predomina por tanto el nivel de abstracción.

Tabla 6. Concepto de Límite en Spivack (1996)

EC	Antes de abordar la noción de límite, se trabaja con las ideas de aproximación y tendencia, por medio de representaciones gráficas. Se recoge la definición formal de límite. La obra también se encarga de caracterizar dicha definición por medio de sucesiones.
SSR	Se contemplan sistemas de representación simbólicos y gráficos.
F	Se proponen situaciones destinadas a explorar las ideas de aproximación y tendencia.
NCS	Predominan los sistemas formal y abstracto. Se aproxima a trabajar la idea de límite como un concepto dual.

A tenor de la información recogida se pone de manifiesto las diferencias que se establecen a la hora de tratar el concepto de límite finito de una función en un punto, apostándose en la mayoría de las obras por no reconocer la naturaleza dual con la que cuenta el concepto. Por otro lado, como nexo de unión entre las obras, figuran las ideas de tendencia y aproximación, trabajadas en la mayoría de ellas, con mayor o menor, profundidad. Fruto del trabajo con ellas radica la mayor o menor presencia de sistemas de representación distintos al simbólico.

A modo de contraste con el análisis realizado, se recogen las definiciones formales que se proponen, en cada una de las obras, para la definición de límite finito de una función en un punto. Un ejemplo de ello es la que se muestra en la Figura 1.

DEFINICIÓN

La función f **tiende hacia el límite** l **en** a significa: para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Figura 1. Definición de límite finito en un punto. Spivack (1996)

Las definiciones que se proponen en las obras evidencian diferencias sustanciales en relación a los aspectos que unos autores u otros desean potenciar. Cabe destacar, en este sentido, el empleo que del lenguaje matemático se hace en cada una de ellas, la presencia o no, de explicaciones complementarias al simbolismo dominante en las definiciones o la alusión a los conceptos topológicos.

Síntesis comparativa II: concepto de límite

A la vista de los resultados resulta de interés ahondar en las particularidades que cada una de las obras manifiesta en torno al concepto de límite. A excepción de la obra de Apostol (2006), previamente a la introducción del concepto de límite el resto abogan por trabajar ideas en conexión a él como las de tendencia o aproximación, destacando en esos casos la presencia de los sistemas de representación gráfico y tabular, complementando al simbólico. En Ayres (1989) y Larson y Edwars (2010) y, en menor medida en Spivack (1996), no se reconoce la naturaleza dual que subyace en el concepto de límite, apostando por un tratamiento de éste como proceso en detrimento de cómo objeto matemático. Este hecho gana fuerza al analizar las tareas que se recogen en las obras, en su mayoría centradas en el cálculo de límites.

En relación a las definiciones formales de límite finito de una función en un punto, las obras hacen uso del lenguaje matemático que, en ocasiones, complementan con lenguaje verbal, a fin de clarificar las ideas que el primero expresa; hecho que avala el enfoque educativo de las mismas. Destaca la definición propuesta en Apostol (2006) para espacios métricos generales, como la única con una alusión explícita a los conceptos topológicos básicos (noción del punto de acumulación). Si bien, el resto de definiciones, de manera implícita, contempla este hecho al excluirse en todas ellas el punto sobre el que se plantea el límite de una función. Otra cuestión será la relación que de esto haga el estudiante o si se satisfacen las pretensiones formativas a las que aspira el profesor al incluir dichas obras en la bibliográfica básica de una determinada asignatura de Análisis Matemático; pero eso no es objeto de estudio de la presente investigación.

El hecho de evadir la inclusión de nociones topológicas, como la de punto de acumulación, o de rebajar la fuerza del lenguaje simbólico, incluyendo lenguaje verbal en la definición de límite, también refuerza la idea de que en las mayoría de la obras se potencia la noción de límite como proceso.

CONCLUSIONES

A la vista de los resultados obtenidos en la investigación así como de los objetivos planteados al inicio de la misma se concluye lo siguiente.

Aun estando la misma obra presente en bibliografías básicas correspondientes a grados universitarios conducentes a perfiles profesionales bien dispares, se contempla una mayor preferencia hacia aquellas en las que los conceptos topológicos no se manifiestan explícitamente o incluso no se dedica un capítulo a ellos en las obras. La mayoría de ellas apuestan por trabajar con algunas ideas, como las de tendencia o aproximación, que posibilitan, de forma implícita, subsanar este hecho.

En relación al objetivo número uno, cabe destacar la endeble presencia que en las obras se confiere a los conceptos topológicos, hecho coherente con el tratamiento que se hace de las distintas nociones matemáticas que requieren de estos conceptos para su construcción. Destaca la ausencia, en la mayoría de obras, de capítulos dedicados a los conceptos topológicos, de ahí a que en este estudio se haya distinguido entre una presencia o manifestación explícita o implícita de los mismos.

En relación al segundo objetivo, la mayoría de las obras apuestan por potenciar la concepción de límite como proceso, confiriendo una mayor importancia a las propiedades destinadas al cálculo de los mismos en detrimento de las que ahondan en el estudio de su estructura como concepto. Este hecho cobra especial relevancia al analizar la tipología de actividades, que en las obras se proponen, para afianzar los conocimientos.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado en el marco del grupo del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (Grupo FQM-193, Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico) y del proyecto “Procesos de Aprendizaje del Profesor de Matemáticas en Formación” (EDU2012-33030) del Plan Nacional de I+D+I (MICINN).

Referencias

Apostol, T. (2006). *Análisis Matemático*. 2ª Edición. Barcelona, España: Reverté.

Ayres, F. (1989). *Cálculo Diferencial e Integral. Teoría y 1175 problemas resueltos*. Serie Schaum. Madrid, España: Mc Graw-Hill.

Blázquez, S., Gatica, N. y Ortega, T. (2009). Análisis de diversas conceptualizaciones de límite funcional. *La Gaceta de la RSME*, *12*(1), 145-168.

Blázquez, S. y Ortega, T. (1998). Rupturas en la comprensión del concepto de límite en alumnos de bachillerato. *Aula, 10,* 119-13.

Bosch, M., Gascón, J., y Sierra, T. (2009). Análisis de los manuales españoles para la formación de maestros: El caso de los sistemas de numeración. En M. J. González, M. T. González, y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 139-150). Santander, España: SEIEM.

Chevallard (1991). *La transposition didactique. Dusavoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, Francia: La pensé sauvage.

Cockcroft, W.H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft*. Madrid, España: Ministerio de Educación y Ciencia.

Fernández-Plaza, J. A., Castro, E., Rico, L., Ruiz-Hidalgo, J. F. (2012). Concepto de límite finito de una función en un punto: aspectos estructurales y definiciones personales. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 229 - 237). Jaén, España: SEIEM.

Gómez, B. (2009). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. En M. J. González, M. T. González, y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 21-36). Santander, España: SEIEM.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

González, M.T. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de Matemáticas. Los puntos críticos en la Enseñanza Secundaria en España en el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(3), 389-408.

Labrador, C., Beatrán-Quera, M., Diez-Escaniano, A y Martínez, J. (1986) *La Ratio Studiorum de los Jesuitas.* Madrid, España: Universidad Pontificia de Comillas.

Larson, E. y Edwars, B. H. (2010). *Cálculo I, de una variable*. 9ª Edición. México D. F.: Mc Graw-Hill.

Monterrubio, Mª C. y Ortega, T. (2009). Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones. En J. González, M. T. González, y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 37-54). Santander, España: SEIEM.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *AIEM*, 1, 39-63.

Robert, A. y Robinet, J. (1989). *Enoncés d'exercices de manuels de seconde et representations des auteurs de manuels* (IREM). Universidad de París, Francia.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Sierra, M., González, M.T. y López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria (COU): 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias*, 17 (3), 463-476.

Sierra, M., González, M.T. y López, C. (2000). Concepciones de los alumnos de bachillerato y curso de orientación universitaria sobre límite funcional y continuidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 3*(1), 71-75.

Sierra, M., González, M. T. y López, M. C. (2002). Una visión integradora acerca del concepto de límite. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 29,* 77-94.

Spivack, M. (1996). *Cálculo Infinitesimal*. 3ª Edición. Barcelona, España: Editorial Reverté.

Tall, D. (1991). The psychology of Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21). Dordrecht, Los Países Bajos: Kluwer.

Tall, D., Gray, E., Ali, M., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M., Pitta, D., Pinto, M.F., Thomas, M.J. y Yusof, Y.B. (2001). Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 1, 81–104.

Thompson, P.W. y Silverman, J. (2007). The Concept of accumulation in calculus. En M. Carlson y C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection. Research and teaching in undergraduate mathematics education* (pp. 117-131). Washington, DC: The Mathematical Association of America.

[1] Por ejemplo, en el caso de titulaciones de la Universidad de Granada estas obras están incluidas en las guías docentes de las siguientes asignaturas: "Matemáticas I" (Grado en Ingeniería Civil), "Análisis Matemático I" (Grado en Estadística y Grado en Física), "Cálculo" (Grado en Ingeniería informática), "Cálculo I" (Grado en Matemáticas) y "Matemáticas" (Grado en Economía y Grado en Administración y Dirección de Empresas). También cuentan con una presencia relevante, en la formación inicial en Análisis Matemático de diversos perfiles académicos, en un buen número de universidades españolas como las de Jaén (Diplomatura en Estadística y Grado en Estadística y Empresa), Sevilla (Grado en Matemáticas y Grado en Economía), Salamanca (Grado en Estadística) o Cantabria (Licenciatura en Administración y Dirección de Empresas y Grado en Ingeniería Civil).

PROBLEMAS DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN LIBROS DE TEXTO DE 3º ESO

Problems of Linear Equations Systems in textbooks for grade 9

A. Cristina Guerrero, José Carrillo, Luis C. Contreras

Universidad de Huelva

Resumen

La resolución de problemas en matemáticas ha sido uno de los principales focos de investigación y discusión en los últimos 30 años. Las propuestas curriculares para la educación primaria y secundaria la recogen como eje transversal.

El libro de texto es agente fundamental en el proceso de enseñanza aprendizaje, y en el trabajo en el aula. En este estudio se analiza cómo se plasma la resolución de problemas en un libro de texto, centrando la atención en el tema de Sistemas de Ecuaciones lineales del tercer curso de la Educación Secundaria Obligatoria. Se concluye que existen importantes características que son poco coherentes con lo especificado en el currículo oficial.

Palabras clave: *matemáticas, resolución de problemas, educación secundaria obligatoria, libros de texto, sistemas de ecuaciones lineales.*

Abstract

Problem solving has been one of the main focuses of research and discussion in the last 30 years. The proposed curriculum for both primary and secondary education considers problem solving as a central focus in Mathematics.

The textbook plays an essential role in the learning-teaching process as well as being a vital tool in the classroom. In this study, we analyze how problem solving is treated in one textbook, focusing our attention on the unit of Systems of Linear Equations at grade 9. It is concluded that there are important features that are inconsistent with those that appear in the official curriculum.

Keywords: *mathematics, problem solving, compulsory secondary school, textbooks, lineal equations systems.*

La resolución de problemas, especialmente su papel en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, es un importante tema de estudio por parte de investigadores y educadores (Sigarreta, Rodríguez y Ruesga, 2006). Este interés aparece reflejado en currículos y programas educativos de distintos países (Contreras y Carrillo, 2000; Herdeiro, 2010), asumiendo dos funciones distintas en las matemáticas escolares: competencia a adquirir y proceso para la adquisición de habilidades y conocimientos en matemáticas (Herdeiro, 2010). El propio informe PISA (OCDE, 2006) subraya la importancia de la resolución de problemas al definir el concepto general de competencia matemática como la "*capacidad de los alumnos para analizar, razonar y comunicar ideas de manera eficaz al plantear, formular, resolver e interpretar las soluciones a un problema matemático en una variedad de situaciones*" (OCDE, 2006, pp. 14).

Para que estas reflexiones y recomendaciones se vean proyectadas en las aulas, el profesorado debe disponer de materiales escolares adecuados, entre los que destacan los libros de texto, por su uso por encima de otros materiales didácticos (Villela y Contreras, 2006).

Guerrero, A. C., Carrillo, J., Contreras, L. C. (2014). Problemas de sistemas de ecuaciones lineales en libros de texto de 3º ESO. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 395-404). Salamanca: SEIEM.

Nuestro estudio surge de la preocupación por la coherencia entre la propuesta de enseñanza-aprendizaje del libro de texto y las sugerencias que emanan del currículo o de la literatura de investigación. Presentamos el análisis de una de las unidades de un libro de texto de matemáticas. Esta comunicación forma parte de una investigación más amplia en la que se analiza la misma unidad en dos libros de texto y se abordan más dimensiones de análisis.

ELEMENTOS TEÓRICOS

La definición de problema matemático y su (en ocasiones infructuosa) delimitación respecto a la noción de indagación o investigación generan aún cierta controversia (como ha podido constatarse en el *Workshop on Problem Solving* celebrado en Santiago de Chile en diciembre de 2013), pero podría aceptarse, en general, que un problema matemático es aquella situación real o ficticia que involucra cierto grado de incertidumbre y cuya clarificación conlleva la aplicación no mecánica del conocimiento matemático de la persona que se enfrenta a dicha situación (Carrillo, 1998).

Lejos de querer profundizar en las distintas consideraciones de la resolución de problemas, este trabajo se limita a realzar la importancia de la misma, coincidiendo con Carrillo (1998) en que es un marco ideal para fomentar la construcción del aprendizaje significativo y promover el gusto por la matemática, así como el desarrollo de una actitud abierta y crítica, todos ellos objetivos de gran valor educativo.

Considerando el papel que los libros de texto tienen en el aula, en los últimos años estos manuales se han convertido en una importante fuente de investigación (Serrano, 2012). Así, destacamos las investigaciones que afirman que, en ocasiones, los libros de texto condicionan el tipo de enseñanza que se realiza cuando el profesorado los usa de forma cerrada, llegando a determinar el currículo más que la ley en sí (Monterrubio y Ortega, 2012; Ruesga, Valls y Rodríguez, 2006; Schubring, 1987). Otros autores (Parcerisa, 1996; Santos, 1991; Herdeiro, 2010; Pino y Blanco, 2008) coinciden en la necesidad de que el libro de texto debe ser un recurso abierto en el que no es necesario que todo aparezca especificado.

Para nuestro estudio hemos decidido centrarnos en el bloque de Álgebra, ya que el conocimiento Algebraico es esencial para los alumnos por su aporte a la comunicación y expresión de las matemáticas, a la construcción de modelos y a la estructuración de formas de razonamiento (Pérez, 1997). Elegimos el tema de *Sistemas de ecuaciones lineales* (en 3º ESO) por la conveniencia de indagar en el aprendizaje de los conceptos iniciales de temas en los que los estudiantes presentan dificultades (Sierpinska, 2000).

Por otra parte, así como existen numerosas definiciones de problema matemático, no menos amplia es la clasificación en tipos de problemas. En este trabajo se tomará como base la clasificación propuesta por Herdeiro (2010) (ejercicios, problemas de palabras, problemas para demostrar, problemas para descubrir, problemas de la vida real y otros problemas), quien a su vez se apoya en las clasificaciones de Pólya (1985) y Borasi (1986), entre otras[1]. Las categorías que consideramos para el análisis son: tipos de problemas, contexto, formulación, tarea matemática y solución (estas categorías se desarrollan en el siguiente epígrafe). Con esto se pretende obtener una clasificación de los problemas de esta unidad atendiendo a dichas categorías y analizar su conveniencia respecto a las indicaciones del currículo oficial.

DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

Objetivos

Nuestro interés por la adecuación del tratamiento de la resolución de problemas en los libros de texto nos lleva a plantearnos qué lugar ocupa la resolución de problemas en los libros de texto en el tema de *Sistemas de ecuaciones lineales (SEL)* de 3º ESO, pregunta que transformamos en un gran objetivo, *Obtener información sobre la coherencia entre el currículo prescrito y su implementación* *a través de los libros de texto en relación con los problemas de SEL* y en los siguientes objetivos específicos:

- Caracterizar los problemas atendiendo al contexto y la formulación.
- Caracterizar los problemas atendiendo a la solución y el método de resolución.

Elección del libro

Los objetos de estudio de la investigación cualitativa no se escogen al azar, se eligen de acuerdo al grado en que se ajustan a los criterios o atributos establecidos por el investigador (Rodríguez, 1999, citado en Serrano, 2012). La elección se ha basado en la editorial más vendida en España en materia de educación, que según la Panorámica de la Edición Española de Libros 2012 (MEC, 2013), es Anaya (Colera, Gaztelu y Oliveira, 2011).

Caracterización del método

La información que buscamos se encuentra en el libro de texto analizado, que recogeremos de manera organizada, para tratarla adecuadamente al propósito de nuestro estudio y, finalmente, interpretarla para asignarle un significado. Según Piñuel (2002), el proceso de interpretar un producto comunicativo (entendido como mensajes, textos o discursos) mediante técnicas cuantitativas y/o cualitativas con el objetivo de analizar las ideas que aparecen en él y procesar los datos relevantes, se denomina análisis de contenido. Por ello, podemos afirmar que este trabajo emplea la técnica del análisis (cualitativo) de contenido.

Se han analizado todos los problemas propuestos en la unidad del libro de texto siguiendo las categorías descritas en el instrumento de análisis. Con el fin de organizar y registrar los datos recogidos se han elaborado tablas Excel, que han servido para resumir la información obtenida. Dado que el proceso de análisis de datos es un proceso cíclico (Pérez 1994, en Serrano 2012), durante la investigación, a veces, es necesario volver atrás, analizar los datos de nuevo, añadir cuestiones o modificar el instrumento de análisis. En este trabajo se han realizado cíclicamente la recogida de datos y su interpretación y más tarde la redacción del análisis descriptivo. Asimismo, el instrumento de análisis se ha sometido al juicio de expertos, y el propio análisis ha disfrutado de la triangulación de investigadores. No obstante, como se desprende del objetivo planteado, no se pretende garantizar en este tipo de estudio la generalización de sus resultados.

Instrumento de análisis

Exponemos a continuación las categorías con sus correspondientes subcategorías, indicando entre paréntesis el código que le hemos asignado para su identificación en el análisis posterior[2].

A) Tipos de problemas

En esta categoría, sobre la base de los trabajos de Borasi (1986), Abrantes (1989) y Boavida (1993), diferenciaremos entre ejercicios, problemas de palabras, problemas para demostrar, problemas para descubrir, problemas de la vida real y problemas de la práctica matemática. Hemos eliminado los *problemas para ecuacionar* de Abrantes (1989), ya que consideramos que son un caso particular de los *problemas de palabras*, en los que la traducción al lenguaje matemático se hace a través de una ecuación. De la misma manera, las *pruebas de una conjetura* de Borasi (1986) quedan incluidas en problemas de la práctica matemática y las *situaciones problemáticas* y *situaciones* de ambos autores encajan en los problemas de aplicación.

A1. Ejercicios (A1): en los que basta reconocer o recordar un concepto específico o una definición, o aplicar un proceso algorítmico conocido para determinar la solución. Son rutinarios y no requieren de la originalidad del resolutor.

A2. Problemas de palabras (A2): problemas enunciados en un contexto concreto que necesitan traducirse al lenguaje matemático para su resolución. Toda la información necesaria para resolverlos aparece en el enunciado y además, suele indicarse la estrategia a seguir.

A3. Problemas para demostrar (A3): orientados a justificar la validez de cierta proposición. Para la resolución de estos problemas se suele recurrir a teoremas o propiedades relacionadas con la demostración solicitada. En ellos se precisa del razonamiento deductivo.

A4. Problemas para descubrir (A4): suelen aparecer al final de cada unidad o con el nombre de enigma o desafío. Su formulación pretende mostrar una forma atrayente, divertida o entretenida de aprender matemáticas. Para encontrar su solución se requiere lógica e ingenio.

A5. Problemas de la vida real (A5): son situaciones factibles de darse en la vida real y que precisan de la construcción de diagramas, realización de estimaciones, cálculo de medidas o elaboración de análisis y síntesis. Permiten conocer las aplicaciones de las matemáticas en el mundo real. No suelen tener una solución exacta ni única.

A6. Problemas de la práctica matemática (A6): problemas que permiten desarrollar procesos de exploración, formulación de hipótesis y su posterior validación. En ellos se realizan conjeturas, verificaciones y argumentaciones[3].

B) Contexto

Tomando como base principal a Herdeiro (2010) y apoyados por algunas ideas de Serrano (2012) y Monterrubio y Ortega (2012), esta categoría incluye la contextualización en la realidad, contexto de datos proporcionados o contexto de conexión.

B1. Contextualización en la realidad: contexto de la vida real o puramente matemático (CPM). En el primer caso distinguiremos entre contexto de la vida real-personal (problemas relacionados con actividades cotidianas- CVRP), laboral o educativo (situaciones que pueden darse en el centro escolar o algún entorno de trabajo- CVRLE), social (contexto relacionado con el entorno social y/o político en que se vive- CVRS) y científico (problemas enmarcados en las ciencias naturales- CVRC).

B2. Datos proporcionados: contexto de datos realistas (plausibles- CDR) o datos no realistas (CDNR).

B3. Conexión: contexto con conexión con otras ramas de las matemáticas (CCRM), con otras áreas disciplinares (CCAD), con la historia de las matemáticas (CCHM) o sin conexión (CSC).

C) Formulación

De nuevo, sobre la base del trabajo de Herdeiro (2010), esta categoría engloba la ilustración, el número de cuestiones que presenta el problema desde el punto de vista sintáctico o semántico, las representaciones y los recursos empleados.

C1. Ilustración: ilustración decorativa (sin ninguna finalidad relacionada claramente con el problema- FID), motivadora (posible ayuda para el alumno pero que no aporta datos numéricos ni claramente significativos- FIM), representativa (aparecen datos numéricos que se dan en el enunciado- FIR), informativa (aparecen datos numéricos que no se aportan en el enunciado- FII) o sin ilustración (FSI).

C2. Número de cuestiones que presenta el problema desde el punto de vista sintáctico: formulación simple (una sola cuestión- FS), formulación agrupada (más de una cuestión en la misma actividad- FA).

C3. Número de cuestiones que presenta el problema desde el punto de vista semántico: formulación sencilla (una sola estrategia cognitiva- FSen), formulación compleja (más de una estrategia cognitiva- FC).

C4. Información proporcionada: suficiente (FIS), insuficiente (FIIn), excesiva (FIE).

C5. Representaciones empleadas: formulación exclusivamente verbal (FEV), verbal utilizando una ilustración (FVI), utilizando una tabla (FT), una expresión algebraica (FEA), una gráfica (FG) o un diagrama (FD).

C6. Recursos empleados: materiales manipulativos (FMM), nuevas tecnologías (FNT), ningún recurso extra (FNR).

D) Tarea matemática

Esta categoría y la relativa de los tipos de problemas pueden verse como perspectivas complementarias; en una focalizamos la finalidad para la que se elabora el problema (tipos de problemas) y en la otra los requerimientos que le exigen al estudiante para su resolución (tarea matemática). Se puede ver que en la propia definición de los tipos de problemas aparece de manera implícita la tarea matemática. No obstante, se ha decidido hacer explícita la tarea matemática en sí misma, para observar sus aspectos de una manera más clara. Es por esta razón, por la que puede apreciarse un solapamiento entre estas dos categorías. Diferenciamos entre identificación y aplicación, razonamiento elemental o complejo e investigación.

D1. Identificación y aplicación (D1): se trata de problemas familiares, que demandan básicamente la identificación y el empleo de conceptos sencillos y la aplicación de procedimientos rutinarios tales como los algoritmos.

D2. Razonamiento elemental (D2): son problemas con un nivel mayor de exigencia que el anterior, trascendiendo la mera repetición de algoritmos. Su resolución conlleva la necesidad de razonamiento matemático y el establecimiento de relaciones entre distintas representaciones de una misma situación, o bien la conexión entre distintos aspectos.

D3. Razonamiento complejo (D3): se trata de problemas en los que predomina el razonamiento matemático. Pueden considerarse un paso previo a los problemas de investigación, pues aunque requieren establecer relaciones más complejas que las anteriores, suelen tener una respuesta única y exacta y no requieren de generalización, o descubrimiento de regularidades o conjeturas ni justificación de los resultados.

D4. Investigación (D4): se trata de problemas cuya resolución requiere cierta comprensión y reflexión por parte del estudiante, creatividad tanto para identificar conceptos como para enlazar conocimientos y procesos matemáticos. Este tipo de problemas exigen investigación, descubrimiento, generalización, manipulación para descubrir regularidades o verificar conjeturas y explicación o justificación de los resultados. Puede tratarse de problemas abiertos o sin respuesta única.

E) Solución

Se ha formulado esta categoría sobre la base de lo planteado por Herdeiro (2010), distinguiendo entre repuesta cerrada o abierta, representaciones pedidas, unicidad y exactitud y toma de decisión en cuanto las soluciones.

E1. Respuesta cerrada (corta (RRC), de desarrollo (RCDes), de completitud (RCCom), de tipo verdadero/falso (RCVF), de asociación o correspondencia (RCAC) o de elección múltiple (RCEM), o respuesta abierta (corta (RAC), de desarrollo (RADes) o cualquier tipo de respuesta cerrada con respuesta abierta de desarrollo (RCRAD)).

E2. Representaciones pedidas: representación exclusivamente numérica o verbal (RENV), utilizando una ilustración (RI), una tabla (RT), un diagrama (RD), una gráfica (RG) o una expresión algebraica (REA).

E3. Unicidad y exactitud: solución única y exacta (RUE), solución no única ni exacta (RNUE).

E4. Toma de decisión: resolución con (RCTD) o sin toma de decisión en cuanto a las soluciones (RSTD).

ANÁLISIS Y RESULTADOS

El libro consta de 13 unidades y unas páginas finales sobre la calculadora científica. La unidad de SEL está dividida en cinco secciones donde se proponen 89 actividades, 5 en la primera sección, 14 en la segunda, 58 en la tercera, 5 en la cuarta y 7 en la quinta. Antes de empezar, y para no ser reiterativos, destacamos que todos los problemas de esta unidad presentan un *contexto de datos no realistas* y una *formulación con información suficiente* y que *no exige ningún recurso extra*.

Sección 1: Para empezar

Hay 5 problemas, por lo que su análisis, a nivel global, no es demasiado significativo, pero sí interesante a nivel particular. Encontramos sólo dos tipos de problemas: dos *ejercicios* y tres *problemas para descubrir*. Es destacable el *contexto con conexión con la historia de las matemáticas* (40%), aunque es superado por el *contexto sin conexión* (60%). La formulación es *verbal* utilizando en tres de los problemas *ilustración informativa*. Además, todos presentan *formulación simple* y *sencilla*. La tarea matemática es variada, siendo dos de los problemas de *identificación y aplicación*, uno de *razonamiento elemental* y los dos restantes de *razonamiento complejo*. En cuanto a la solución, destacamos que todos son de *respuesta cerrada corta*, *única y exacta* y *sin toma de decisión*.

Sección 2: Al lado del texto

En ésta encontramos 14 problemas propuestos, de los que 13 son *ejercicios* y el restante perteneciente a la categoría *otros problemas*. Los contextos se asocian básicamente (86%) a un *contexto puramente matemático* y *sin conexión*, coexistiendo (escasamente) con otros *de la vida real personal* (14%).

Todos contienen una *formulación sin ilustración*. La mayoría (71%) son de *formulación agrupada*, y la misma cantidad lo son de *formulación sencilla* que de *compleja*. En casi todos (86%), la información se presenta en el enunciado *utilizando una expresión algebraica*, siendo escasos (14%) los de *formulación exclusivamente verbal utilizando una ilustración*. La tarea matemática predominante (86%) es la *identificación y aplicación*, con algunos problemas (14%) de *razonamiento elemental*.

Por último, la mayoría (93%) son de *respuesta cerrada corta*, y se piden distintas representaciones, destacando la *exclusivamente numérica o verbal* (28,5%) con la *gráfica* (28,5%). La solución casi siempre (93%) es *única y exacta* y *sin toma de decisión* (93%).

Sección 3: Ejercicios y problemas

Encontramos 58 problemas propuestos, entre los que predominan los *problemas de palabras* (55%) y los *ejercicios* (38%). Su *contexto* suele ser *puramente matemático* (58%) y *de la vida real personal* (33%). La mayoría (81%) *no tiene conexión* siendo escasa la *conexión con otras ramas de las matemáticas* (19%).

Prevalece una *formulación sin ilustración* (88%), siendo ésta escasamente *informativa* (9%) o *representativa* (3%). Predomina la *formulación simple* (64%) y *sencilla* (64%). Además, el enunciado presenta eminentemente *formulación exclusivamente verbal* (50%) o *con expresión algebraica* (40%). Las tareas matemáticas presentes son *identificación y aplicación* (40%) y *razonamiento elemental* (52%), con escasa presencia de *razonamiento complejo* (8%). Casi todas las respuestas (91%) son de tipo *cerrada corta* y principalmente se pide una *representación exclusivamente numérica o verbal* (62%) o con expresión algebraica (29%). La solución es principalmente *única y exacta* (88%) y *sin toma de decisión* (86%).

Sección 4: Y para terminar

Con 5 problemas, de nuevo no se trata de una sección demasiado significativa a nivel global, pero sí interesante a nivel particular. Encontramos un *problema de palabras*, dos *problemas para descubrir* y un problema perteneciente a la subcategoría *otros problemas.* Tres de ellos presentan *conexión con la vida real personal* y dos un *contexto puramente matemático.* Además, salvo uno que presenta *conexión con otras áreas disciplinares,* todos los demás tienen un *contexto sin conexión*. Por otro lado, todos se asocian a *formulación con ilustración informativa*, *simple*, *sencilla* y *verbal con ilustración*. En cuanto a la *respuesta*, predomina la que usa *expresión algebraica* y la que usa *una tabla*, siendo todas *únicas y exactas* y *sin toma de decisión.*

Sección 5: Autoevaluación

En esta sección hay 7 problemas, cuatro *ejercicios* y tres *problemas de palabras*. Cuatro de ellos presentan un *contexto puramente matemático* y el resto *de la vida real personal*, todos *sin conexión*. El enunciado se presenta de forma *exclusivamente verbal* y *usando expresión algebraica*. La tarea matemática es de *identificación y aplicación* (4 problemas) y *razonamiento elemental* (tres problemas). En cuanto a la solución, no existe ninguna característica que se aleje de lo común.

A continuación mostramos dos ejemplos de los tipos de problemas más comunes en esta unidad, indicando su análisis:

Problema 1:

15 ▼▽▽ Por dos bolígrafos y tres cuadernos he pagado 7,80 €; por cinco bolígrafos y cuatro cuadernos, pagué 13,20 €. ¿Cuál es el precio de un bolígrafo? ¿Y de un cuaderno?

Figura 1. Problema 1

Análisis: A2, CVRP, CDNR, CSC, FSI, FS, FSen, FIS, FEV, FNR, D2, RCC, RENV, RUE, RSTD.

Se trata de un *problema de palabras* (A2) pues presenta un enunciado localizado en un contexto concreto que necesita traducirse al lenguaje matemático para su resolución.

Se enmarca en un *contexto de la vida real personal* (CVRP) de datos *no realistas* (CDNR), pues son datos que el alumno no percibe como cercanos a él sino como datos que aparecen en el libro de texto y que son inventados. Además, dicho contexto *no presenta conexión* ni con otras ramas de las matemáticas ni otras áreas disciplinares ni con la historia de las matemáticas (CSC).

La formulación *no presenta ilustración* de ningún tipo (FSI) y de enunciado *exclusivamente verbal* (FEV). Además es *simple* (FS), pues aparece una única cuestión (desde el punto de vista sintáctico). Asimismo, se trata de una *formulación sencilla* (FSen) pues tan solo una demanda cognitiva está involucrada en la resolución del problema, que es la resolución del sistema resultante de traducir el enunciado. Destacar que el problema presenta *información suficiente* (FIS) para su resolución y *no* requiere del uso de *materiales manipulativos ni recursos tecnológicos* para su resolución (FNR).

En cuanto a la tarea matemática, es un problema de *razonamiento elemental* (D2), por requerir algo más que la mera repetición de algoritmos, conllevando su resolución la necesidad de un razonamiento matemático sencillo.

La respuesta requerida es *cerrada corta* (RCC), pues basta dar el precio de cada objeto pedido. Por ese mismo motivo se trata de una *respuesta exclusivamente verbal o numérica* (RENV) que es *única y exacta* (RUE). Además, si resolvemos el problema se aprecia que se trata de una *respuesta sin toma de decisión* (RSTD), pues la única posible solución es un número racional positivo, que puede ser, sin duda, la respuesta pedida.

Problema 2:

15. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de sustitución:

a) $\begin{cases} x + 2y = 18 \\ y - x = -9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 18 \\ y - x = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 4y = 14 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - y = 8 \\ 2y - x = -11 \end{cases}$

Figura 2. Problema 2

Análisis: A1, CPM, CDF, CSC, FSI, FA, FSen, FIS, FEA, FNR, D1, RCC, REA, RUE, RSTD.

Se trata de un *ejercicio* (A1) pues, para resolverlo, basta reconocer o recordar el método de resolución de sistemas de ecuaciones por sustitución y aplicarlo, sin requerir ninguna originalidad del resolutor.

Claramente, se enmarca en un *contexto puramente matemático* (CPM) de *datos no realistas* (CDNR). Además, dicho contexto *no presenta conexión* ni con otras ramas de las matemáticas, ni otras áreas disciplinares, ni con la historia de las matemáticas (CSC).

La formulación no presenta ilustración de ningún tipo (FSI) y es de expresión algebraica (FEA), pues se basa en el planteamiento de los cuatro sistemas de ecuaciones que podemos ver. Además es agrupada (FA), pues el problema consta de cuatro apartados (diferentes cuestiones desde el punto de vista sintáctico), y sencilla (FSen) pues sólo hay una demanda cognitiva en juego, la resolución de sistemas de ecuaciones por el método de sustitución. Destacar que el problema presenta información suficiente (FIS) para su resolución y no requiere del uso de materiales manipulativos ni recursos tecnológicos para su resolución (FNR).

En cuanto a la tarea matemática, es un problema de *identificación y aplicación* (D1), pues este problema sólo demanda la identificación y el empleo del algoritmo mencionado.

La respuesta requerida es *cerrada corta* (RCC), *única y exacta* (RUE) y *sin toma de decisión* (RSTD), pues basta dar las soluciones de los sistemas. Por ese mismo motivo se trata de una *respuesta exclusivamente algebraica* (REA) (hemos considerado este tipo de respuestas algebraicas, pues se trata de asignar un valor a incógnitas sin ningún significado real).

CONCLUSIONES E IMPLICACIONES

Podemos concluir que en la unidad analizada no se promueve la resolución de problemas como eje central del aprendizaje, pues una mayoría de los problemas propuestos son del tipo *ejercicio*, seguidos por *problemas de palabras*, siendo ambas las categorías de complejidad más baja. Esto supone una diferencia con los resultados del estudio de Herdeiro (2010), donde predominan los problemas de palabra frente a los ejercicios, coincidiendo, sin embargo, con Serrano (2012), que aprecia también una mayoría de ejercicios frente a las demás categorías. Por otro lado, el porcentaje de *problemas de palabras* en uno de los libros de texto es significativamente mayor que en otro, lo que podría ser indicativo, como señala Herdeiro (2010), de que "*los libros de texto no dan la misma* *importancia a la contextualización de situaciones y por lo tanto, no valoran del mismo modo la fase de matematización*" (pp. 13). Además este hecho es contradictorio con lo que especifican los documentos oficiales y los estudios en educación matemática, que abogan por una enseñanza basada en la resolución de problemas que promueva el razonamiento y el ingenio, así como por problemas cercanos a la vida real que hagan entender a los alumnos la utilidad de la matemática. Es notable el hecho de que, promoviendo los currículos oficiales una enseñanza basada en la resolución de problemas y contemplando la investigación en educación dicha enseñanza como parte integral de las matemáticas, el libro de texto, como principal herramienta de trabajo, no coincida con estas ideas. Aunque teóricamente se debería promover el razonamiento matemático y lógico, es sólo en partes específicas de la unidad donde aparecen problemas que lo requieren, dejando la mayor parte de la unidad a problemas mecánicos que abogan por una matemática repetitiva basada en el cálculo y la memorización.

En cuanto al contexto, podemos concluir que predomina el *contexto puramente matemático* seguido por el *de la vida real* (*personal* y, en menor grado, *laboral y educativo*). Es clave señalar la presencia de *datos no realistas* en todos los casos estudiados, así como la casi total asociación a *contextos sin conexión* siendo la más presente, aunque con baja frecuencia, la *conexión con otras ramas de las matemáticas*. Si atendemos a los *problemas de palabras* que se asocian a contextos de la vida real, podríamos pensar que se transmite una visión de una matemática realista porque permite que el alumno perciba y resuelva situaciones aceptadas como posibles en el mundo real, pero este realismo sólo es parcial pues los datos son inventados (Herdeiro 2010). De nuevo encontramos poca coherencia con los currículos oficiales según los que los problemas de matemáticas deben estar vinculados a aspectos cotidianos de la vida de los alumnos y suponer una motivación con datos lo más realista posibles.

En cuanto a la tarea matemática, las más comunes son la *identificación y aplicación* y el *razonamiento elemental*. Esto indica que la mayoría de los problemas propuestos no suponen mayor demanda que la aplicación rutinaria de procesos conocidos y un razonamiento muy elemental, coincidiendo con lo que aprecia Serrano (2012) en su estudio. De nuevo se aprecia poca coherencia con los documentos oficiales, donde se aconseja un aumento gradual de las exigencias de las tareas matemáticas, difícilmente alcanzable si predominan casi únicamente las dos de menor exigencia.

En general, se evidencian varios aspectos deficitarios en lo que se refiere a la coherencia del libro de texto con lo que se plantea en la ley o la investigación, algo de lo que deben ser conscientes los docentes a la hora de su elección y uso en el aula. En términos de prospectiva, sería de interés aumentar el número de casos en el estudio e incluir otras unidades y cursos. El hecho de que el análisis se haga del libro de la editorial más vendida en España puede llegar a tener relevancia, ya que es un ejemplo prototípico de esto. Por otra parte, tal y como afirma Herdeiro (2010), sería interesante investigar sobre la influencia de los libros de texto sobre la visión de la noción de problema que tiene el profesor de matemáticas.

Referencias

Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics, 17*(2), 125-141.

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. En B. Ubuz, C. Haser, & M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: M. E. Technical University, Ankara

Colera, J., Gaztelu, I. y Oliveira, M.J. (2011). Matemáticas 3 Educación Secundaria. Madrid: Anaya.

Contreras, L.C. y Carrillo, J. (2000). El amplio campo de la resolución de problemas. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.). *Resolución de problemas en los albores del siglo XXI: una visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles educativos* (pp. 13-37). Huelva: Hergué.

Herdeiro, C. (2010). *A resoluçao de problemas nos mauais escolares de matemática do 9º ano de escolaridade*. Tesis Doctoral. Universidad de Huelva.

MEC (2013). *Panorámica de la Edición Española de Libros 2012*. Madrid: MEC.

Monterrubio, M.C. y Ortega, T. (2012). Creación y aplicación de un modelo de valoración de textos escolares matemáticos en Educación Secundaria. *Revista de Educación, 358*, 471-496

OCDE (2006). Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy. A framework for PISA 2006.

Parcerisa, A. (1996). Materiales curriculares. Cómo elaborarlos, seleccionarlos y usarlos. Barcelona, España: Grao.

Pérez, M.C. (1997). Álgebra desde una perspectiva geométrica. *Epsilon, 37*, 39-56.

Pino, J. y Blanco, L.J. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad en España y Chile, en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones, 38*, 63-88.

Piñuel, J.L. (2002). Epistemología, metodología y técnicas del análisis de contenido. *Estudios de Sociolingüística 3*(1), 1-42.

Pólya, G. (1985). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas. (Versión original en inglés: *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press, 1945). Santos, M. A. (1991). ¿Cómo evaluar los materiales? Cuadernos de Pedagogía, 194, 29-31.

Ruesga, P., Valls, F., Rodríguez, T. (2006). Un instrumento para seleccionar libros de texto de matemáticas. Aplicación al bloque curricular de Geometría. *REIFOP, 9(1)*, 1-13.

Santos, M. A. (1991). ¿Cómo evaluar los materiales? Cuadernos de Pedagogía, 194, 29-31.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. En J.L. Dorier (ed.), On the Teaching of Linear Algebra. Kluwer Academic Publishers, 209-246.

Serrano, I. (2012) *Análisis de Problemas de libros de texto de Álgebra Lineal*. Trabajo Final de Máster. Universidad de Huelva.

Sigarreta, J.M., Rodríguez, J.M. y Ruesga P. (2006) La resolución de problemas: una visión histórico-didáctica. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 13*(1), 53-66.

Schubring, G. (1987). On the methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author. *For the learning of mathematics*, 7(3), pp. 41-51.

Villela, J.A. y Contreras, L.C. (2006) El conocimiento profesional de los docentes de Matemáticas en relación con la selección y uso de libros de texto. *Revista de Educación, 340*, 973- 992.

---

[1] En sintonía con los autores anteriores, emplearemos el término problema para abarcar la tipología descrita anteriormente, incluyendo, por tanto, actividades o tareas que no se corresponden con la caracterización mencionada al principio de este epígrafe.

[2] Este instrumento de análisis ha sido realizado de forma conjunta con los autores de la comunicación "Análisis de los problemas matemáticos de un libro de texto de 3º ESO en relación con los contenidos de Geometría Plana", también presentada a este simposio.

[3] Usamos la expresión Práctica Matemática en el mismo sentido que lo hacen Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2013), refiriéndose, en ese caso, a un subdominio del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

GÉNESIS INSTRUMENTAL EN UN ENTORNO DE GEOMETRÍA DINÁMICA 3-DIMENSIONAL. EL CASO DE UN ESTUDIANTE DE ALTA CAPACIDAD MATEMÁTICA[1]

Instrumental genesis in a 3-dimensional dynamic geometry environment. The case of a mathematically gifted student

Ángel Gutiérrez, Adela Jaime, Francisco Javier Alba

Universitat de València

Resumen

El uso de las aplicaciones de geometría dinámica 3-dimensional en las clases de matemáticas está planteando diversas cuestiones importantes a los investigadores en didáctica de las matemáticas. En este texto analizamos la actividad de un estudiante de alta capacidad matemática resolviendo una secuencia de tareas para el aprendizaje de conceptos relativos a relaciones entre rectas y planos en el espacio. Las tareas estaban planteadas en un entrono de Cabri 3d. Aportamos una interpretación, desde la óptica de la teoría de la génesis instrumental, de los conflictos surgidos durante la resolución de las tareas como consecuencia de la forma como la aplicación representa los planos en la pantalla del ordenador, que es imitada por el estudiante.

Palabras clave: *software de geometría dinámica, geometría espacial, génesis instrumental, educación secundaria, talento matemático.*

Abstract

The use of 3-dimensional dynamic geometry software in the mathematics classrooms is raising a number of important questions to researchers in mathematics education. In this paper we analyze the activity of a mathematically gifted student solving a sequence of tasks for the learning of concepts relative to relationships between straight lines and planes in space. The tasks were posed in a Cabri 3d environment. We provide an interpretation, from the perspective of the instrumental genesis theory, of the conflicts arisen while solving the tasks as a consequence of the way the software represents the planes on the computer screen, which is imitated by the student.

Keywords: *dynamic geometry software, space geometry, instrumental genesis, Secondary Education, mathematical giftedness.*

INTRODUCCIÓN

Numerosas investigaciones han analizado la utilidad de los entornos de geometría dinámica plana (EGD2d) para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría plana (Laborde y otros, 2006, Battista, 2007). La conclusión mayoritaria es que los EGD2d pueden ser un instrumento muy útil para facilitar el aprendizaje de la geometría, si bien su utilización no es trivial y los estudiantes deben afrontar algunas dificultades inherentes a las características del entorno. Fernández (2013) señala algunas de estas posibles dificultades, como la necesidad de desarrollar habilidades de visualización para analizar los momentos intermedios de la construcción durante el arrastre o la diferencia entre los dibujos de los libros de texto y los de la pantalla del ordenador. Arnal y Planas (2013) describen dificultades originadas por lo poco significativo que era el EGD2d diseñado para los estudiantes.

Más recientemente, la aparición de programas de geometría dinámica 3-dimensional ha hecho crecer el campo de aplicación de los EGD al estudio de la geometría espacial. Los entornos de geometría dinámica 3-dimensional (EDG3d) incorporan características diferenciadas respecto de los

Gutiérrrez, A., Jaime, A., Alba, F. J. (2014). Génesis instrumental en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. El caso de un estudiante de alta capacidad matemática. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 405-414). Salamanca: SEIEM.

EGD2d derivadas de las peculiaridades de la geometría espacial respecto de la geometría plana.

En la década de 1990, didactas franceses introdujeron la teoría de la génesis instrumental, lo cual les permitió analizar y entender ciertas dificultades experimentadas por los estudiantes al aprender álgebra con calculadoras gráficas y simbólicas (Artigue, 2002; Guin, Ruthven y Trouche, 2005). Teniendo en cuenta las diferencias entre una calculadora y un programa de geometría dinámica pero también las similitudes entre ambos entornos de aprendizaje, en los últimos años han empezado a desarrollarse investigaciones que utilizan la teoría de la génesis instrumental para analizar y entender las interacciones entre estudiante y máquina en un EGD2d (Restrepo, 2008; Morera y Fortuny, 2010) y en un EGD3d (Mackrell, 2006; Salazar, 2009; Alba, 2012).

En investigaciones anteriores, hemos identificado y caracterizado varios obstáculos que encuentran los estudiantes cuando empiezan a aprender el uso de Cabri 3d, directamente relacionados con el manejo del ratón y con la interpretación 3-dimensional de la información ofrecida en la pantalla del ordenador, es decir con el inicio de la génesis instrumental de Cabri 3d (Alba, 2012).

Diversos estudios publicados coinciden en señalar algunas características diferenciadoras de las formas de razonar y resolver problemas de los estudiantes con altas capacidades matemáticas (aa.cc.mm.) respecto de los estudiantes medios de sus mismos cursos (Krutetskii, 1976; Greenes, 1981; Miller, 1990; Ramírez, 2012). Ninguno de estos estudios, realizados en contextos muy diversos, tiene como base la observación de estudiantes de aa.cc.mm. resolviendo problemas en EGD2d ni EGD3d. La conjetura más plausible es que los estudiantes de aa.cc.mm. muestran también esas características distintivas cuando interactúan con entornos informáticos. Pero se trata de una conjetura sin base experimental que la valide o rechace, por lo que es una cuestión interesante de investigación.

Estamos desarrollando una línea de investigación centrada en analizar las características del razonamiento matemático de los estudiantes de aa.cc.mm. Uno de los aspectos que nos interesan es crear conjuntos de actividades matemáticas ricas (Jaime y Gutiérrez, 2014) y observar las formas de resolver estas actividades de diferentes tipos de estudiantes. La utilidad de los EGD para diversificar la enseñanza y motivar a los estudiantes hace que parte de nuestro trabajo se oriente a desarrollar actividades para un EGD2d (Benedicto, 2013) y un EGD3d (Alba, 2012) y a analizar la actuación de estudiantes de aa.cc.mm. en dichos entornos. Así, se produce de manera natural la integración de la teoría de la génesis instrumental en nuestra línea de investigación.

Presentamos resultados de un estudio de un caso en el que aportamos información sobre las siguientes **cuestiones de investigación**: ¿qué obstáculos relacionados con la representación de objetos geométricos 3-dimensionales encuentran estudiantes de aa.cc.mm. al utilizar un EGD3d? ¿Cómo superan los estudiantes esos obstáculos? ¿Cómo se desarrollan los procesos de génesis instrumental relativos a la representación de objetos geométricos 3-dimensionales cuando los estudiantes resuelven tareas planteadas en un EGD3d?

En las secciones siguientes hacemos un resumen de los principales elementos de la teoría de la génesis instrumental y presentamos el análisis de la actuación de un estudiante de aa.cc.mm. de 2º de ESO, con el fin de identificar la evolución de su génesis instrumental en este EGD3d mientras resuelve una secuencia de actividades de geometría espacial basadas en Cabri 3d.

MARCO TEÓRICO

La teoría de la *génesis instrumental* describe los cambios en la interacción entre un *sujeto* y un *artefacto* a medida que el sujeto adquiere experiencia y práctica en el uso del artefacto (Rabardel, 2002). Un artefacto puede ser físico (p. ej., una máquina o una herramienta) o simbólico (p. ej., un diagrama o un ábaco). Dicha interacción entre sujeto y artefacto tiene un componente físico (manipulación de la máquina, el diagrama, etc.) y otro psicológico (interpretación de la información recibida por el sujeto y toma de decisiones de actuación sobre el artefacto).

Rabardel (1999) analiza la evolución de la relación sujeto - artefacto e introduce el concepto de *instrumento* para identificar el resultado de la asimilación por el sujeto de algunas características del artefacto cuyo dominio le permite alcanzar el objetivo planteado. Para Rabardel, el instrumento está formado por un artefacto y por *esquemas de uso* resultantes de la interacción del sujeto con el artefacto, esquemas que pueden haber sido elaborados por el propio sujeto o haber sido apropiados.

En el aprendizaje de las matemáticas mediante EGD, el sujeto es el estudiante y el artefacto está formado por el teclado, ratón o pad, pantalla, etc. del ordenador más la parte del programa informático que necesita utilizar el estudiante (por ejemplo, para hacer una construcción geométrica en Geogebra no es necesario utilizar su hoja de cálculo). Las interacciones del estudiante con el ordenador (manejo del teclado, ratón o pad, uso del menú, observación de la pantalla, etc.) tienen como objetivo resolver un problema o aprender unos contenidos mediante la interpretación en clave matemática por el estudiante de la información ofrecida por la pantalla y la transformación de su razonamiento matemático en decisiones de actuación sobre el ordenador (elección de un comando, acción de arrastre, etc.). La génesis instrumental, es decir la formación de un instrumento por un sujeto, tiene dos componentes:

> - La *instrumentalización* concierne al surgimiento y evolución de los componentes del artefacto que forman parte del instrumento: selección, reagrupamiento, producción e institución de funciones, transformación del artefacto (estrutura, funcionamiento,..) que prolongan la concepción inicial de los artefactos.
>
> - La *instrumentación* se refiere al surgimiento y la evolución de los esquemas de uso: su constitución, su funcionamiento, su evolución así como la asimilación de nuevos artefactos a esquemas ya constituidos, etc. (Rabardel, 1999, p. 9)

Así pues, mediante los procesos de instrumentalización el sujeto aprende a utilizar de manera más eficaz la parte del artefacto que necesita, hasta llegar a un nivel de perfección en su uso suficiente para poder resolver los problemas planteados. Y mediante los procesos de instrumentación el sujeto crea esquemas de acción instrumentada (es decir, de acción mediante el uso del instrumento) orientados a permitirle resolver las tareas planteadas. Ambos procesos evolucionan generalmente de manera simultánea. En el contexto de los EGD3d basados en Cabri 3d, los procesos de génesis instrumental incluyen una variedad de elementos, entre los que destacamos:

- Manejo de los comandos: algunos comandos realizan una única acción, pero otros actúan de maneras diferentes dependiendo de los objetos seleccionados o de si se pulsa o no determinada tecla. Por ejemplo, el comando “Perpendicular” permite hacer cuatro construcciones diferentes.

- Manejo de la opción “bola de cristal”, que permite cambiar la ubicación del observador alrededor del espacio para ver los objetos construidos desde cualquier posición.

- Idiosincrasias de Cabri 3d, en especial la referente a la movilidad de los puntos construidos sobre el “plano base” (el plano XY, en adelante pb): un punto construido en la parte visible del pb (el cuadrilátero que lo representa en la pantalla) no puede moverse fuera del plano, mientras que un punto construido en el pb fuera de la parte visible sí puede sacarse del pb.

- Códigos visuales: dada la inevitable pérdida de información que se produce cuando se proyecta del espacio sobre un plano (Parzysz, 1988), como la pantalla del ordenador, Cabri 3d ofrece al usuario diversos códigos para ayudarle a visualizar e interpretar correctamente la imagen presentada en la pantalla. Así, se utiliza el código de la perspectiva que hace aparecer más pequeños los objetos más lejanos: la recta AB (Figura 1) es aproximadamente paralela a la pantalla, y la recta CD forma un ángulo mayor con la pantalla, siendo su parte derecha la que se acerca al observador.

La complejidad de la geometría espacial hace que sólo sea posible adquirir destreza en el uso de los EDG3d si paralelamente se van adquiriendo determinados conocimientos geométricos. Mackrell (2006), al describir un experimento de enseñanza basado en Cabri 3d, indica que los procesos de génesis instrumental deben incluir tanto la adquisición de destreza en el uso del programa como el aumento de la comprensión de la geometría espacial. Salazar (2009) lo confirma al constatar que sus alumnos, desarrollaban estrategias de uso de Cabri 3d al mismo tiempo que establecían conexiones entre el programa y sus conocimientos matemáticos. En la experimentación que presentamos podremos observar también esta situación.

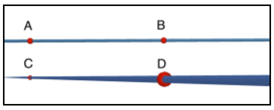


Figura 1. Dos rectas en la pantalla de Cabri 3d.

METODOLOGÍA

El aprendizaje de la geometría espacial empieza en E. Primaria con el estudio descriptivo de poliedros y cuerpos de revolución. En 2º de ESO se inicia el estudio de los puntos, rectas y planos en el espacio, sus posiciones relativas y la medida de ángulos, que continúa en cursos posteriores al estudiar isometrías del espacio y geometría analítica.

Para analizar las ventajas e inconvenientes del uso de los EGD3d en las aulas de E. Secundaria para la enseñanza de la geometría espacial, hemos diseñado un entorno de este tipo para enseñar en las clases ordinarias de 2º de ESO los conceptos de punto, recta y plano en el espacio, las diferentes posiciones relativas de puntos, rectas y/o planos en el espacio (coincidencia, pertenencia, corte, cruce, paralelismo y perpendicularidad) y sus características, así como algunas propiedades relacionadas. El EGD3d se basa en Cabri 3d y todas las actividades se realizan usando el programa.

La secuencia de actividades experimental consta de un cuestionario escrito (sin uso del ordenador) cuyo objetivo es identificar los conocimientos y concepciones de los estudiantes sobre los contenidos matemáticos objeto de estudio (descritos en el párrafo anterior) y de 24 actividades centradas en el estudio de dichos contenidos geométricos mediante la creación y movimiento de puntos, rectas y planos y la medida de ángulos. Las actividades piden a los estudiantes crear puntos, rectas y planos que cumplan determinados requisitos, arrastrarlos y observar las relaciones matemáticas presentes. Para cada actividad, los estudiantes disponen de una ficha con su enunciado y espacio para la respuesta escrita y de un archivo de Cabri 3d para manipular durante la resolución. En las páginas siguientes describimos algunas actividades.

La experimentación que presentamos se realizó con un estudiante de aa.cc.mm. de 2º de ESO. Antes de empezar la experimentación, el estudiante manejaba con confianza los comandos geométricos de Geogebra y había usado en algunas ocasiones Cabri 3d, para realizar construcciones basadas en la manipulación de poliedros. Por lo tanto, el estudiante tenía suficiente experiencia en el uso de programas de geometría dinámica, y en particular de Cabri 3d, para poder interactuar con comodidad con el ordenador, tanto al usar comandos como al seleccionar y arrastrar objetos. En cuanto a sus conocimientos previos de geometría, había estudiado las relaciones entre rectas en el plano y los elementos descriptivos de poliedros y cuerpos redondos de los cursos anteriores, pero no había estudiado nada relacionado con los contenidos de la secuencia de actividades.

Las sesiones de trabajo tuvieron lugar fuera del horario escolar, mediante entrevistas entre el estudiante y uno de los investigadores, que actuó como profesor, y fueron de duración variable, dependiendo del tiempo empleado por el estudiante para resolver las actividades previstas para cada sesión. En total hubo seis sesiones. En la primera sesión el estudiante respondió el cuestionario, en las sesiones 2ª a 5ª resolvió las 24 actividades y en la 6ª sesión respondió de nuevo el cuestionario.

Los datos recogidos consisten en las respuestas escritas en la fichas, los archivos de Cabri 3d usados por el estudiante, la grabación mediante un programa de captura de pantalla de las interacciones del estudiante con el ordenador y la grabación de las conversaciones entre estudiante e investigador. Hacemos un análisis de tipo cualitativo de estos datos, centrado en identificar y analizar elementos que nos permitan dar respuestas, aunque sean iniciales, a las cuestiones de investigación planteadas.

DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE UN CASO

El experimento empieza presentando al estudiante el cuestionario, 18 cuestiones de respuesta libre en las que se recorren los diferentes casos de relaciones entre planos y/o rectas en el espacio: nueve cuestiones piden dibujar planos y/o rectas que estén colocadas en determinada posición relativa (paralelas, perpendiculares, que se corten). Las cuestiones sobre paralelismo o intersección van seguidas por una pregunta de cuántos puntos tienen en común dos rectas / dos planos / una recta y un plano que se cortan / son paralelos. Además, hay dos cuestiones que piden dibujar dos rectas que estén en planos paralelos y preguntan cuántos puntos tienen en común estas dos rectas.

Inicio de la génesis instrumental

La Figura 2 muestra los dibujos realizados por el estudiante en respuesta a las cuestiones 1, 3 y 5, las cuales ponen de relieve de manera consistente un obstáculo epistemológico (Brousseau, 1976) que tiene que ver con el paralelismo entre su forma de representar un plano en el papel y la forma como Cabri 3d representa un plano en la pantalla.

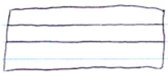
a)  b)  c) 

Figura 2. Dibuja un plano y dos rectas que estén en el plano a) paralelas, b) que se corten, c) perpendiculares.

Cuando el estudiante va a hacer el dibujo de la cuestión 1 (Figura 2-a), se inicia este diálogo:

Estud.: ¿Cómo dibujo un plano en la hoja?

Investig.: A ver, ¿cómo se te ocurre a ti dibujar un plano?

E: Pues un cuadrado ... [empieza a dibujar el plano de Figura 2-a] ... bueno, un intento de cuadrado. Y dos rectas paralelas.

I: Pero dentro del plano. [E termina de dibujar el plano y las dos rectas paralelas] ¿Las rectas se pueden salir del plano [es decir del rectángulo dibujado]?

E: Sí, pero como has dicho dentro del plano, pues no salgo del plano.

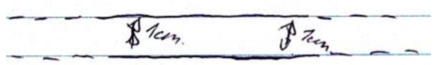
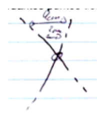
a)  b) 

Figura 3. ¿Cuántos puntos tienen en común dos rectas a) paralelas b) que se cortan?

Las cuestiones 2 y 4 preguntan cuántos puntos tienen en común dos rectas paralelas / que se cortan. El estudiante hace los dibujos de la Figura 3 para justificar que las rectas no tienen ningún punto en común (Figura 3-a) o tienen un único punto en común (Figura 3-b). Al observar los guiones dibujados por el estudiante como representación de las rectas, el investigador le pregunta:

I: ¿Por qué dibujas esos puntitos sueltos a los lados [los guiones]?

E: Porque [las rectas] siguen y siguen.

En la cuestión 8, el estudiante debe dibujar dos planos que se corten. Su dibujo inicial (Figura 4-a) consiste en los dos rectángulos vertical y horizontal, a lo que sigue este diálogo:

I: ¿Puedes marcar el corte? [E remarca la zona de la intersección de los rectángulos en Figura 4-a] ¿Los planos son finitos? ... ¿Dónde se acaban?

E: ¿Cómo que dónde se acaban? No entiendo la pregunta.

I: Que si los planos son esos rectangulitos.

E: ¡Ah! Sí.

I: Entonces, ¿los planos son ese rectángulo y ya? ... ¿Por fuera del rectángulo no sigue el plano?

E: No.

......

I: ¿Y por qué las rectas son indefinidas?

E: Porque lo dice su definición.

I: Entonces, ¿las rectas caben en los planos o no?

E: No. ... Podemos cortar una recta y hacer un segmento de la recta y meterlo en el plano.

I: No, los planos son ilimitados, igual que las rectas.

E: Bueno, eso depende. Yo ahora he dibujado un plano limitado, pero también puede haber planos ilimitados.

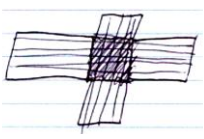
......

I: Igual que las rectas son ilimitadas, los planos también son ilimitados.

E: Bueno, depende. Si no dibujo los puntos suspensivos ...

I: Pero los planos son como son. Aunque los dibujes o no los dibujes con los puntos suspensivos, lo que pasa es que, igual que en las rectas, dibujas un trocito porque no puedes dibujarlas enteras, con los planos tienes que dibujar un trocito porque no puedes dibujarlos enteros.

E: Mira, ¿ves? Ahora puedo hacer así ... [empieza a dibujar los planos de Figura 4-b y sigue hablando mientras dibuja] y ahora puedo hacer así ... significa que los planos siguen hasta el infinito y más allá por ahí. O sea, que serían como una recta gorda. ... Y se cortarían ... [rellena el rectángulo de la intersección en Figura 4-b].

a) 

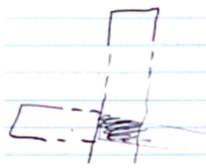
b) 

Figura 4. Dibuja dos planos que se corten.

Esta conversación con el estudiante y otros similares durante la sesión confirman el origen de este obstáculo: al haber utilizado con anterioridad Cabri 3d, el estudiante ha visto cómo se representan los planos en la pantalla, ha interiorizado esta representación y está tratando de que su concepción de plano, que admite que los planos son ilimitados, sea coherente con esa representación finita. Así, ha generado una concepción de plano en el espacio según la cual un plano puede ser ilimitado o limitado a la región dibujada, según le interese. Por lo tanto, el obstáculo experimentado por el estudiante es parte de su proceso de instrumentalización de Cabri 3d, pues es un obstáculo inducido por su interpretación de la forma como el programa representa los planos. Para confirmar esta conclusión podemos fijarnos en que el estudiante dibuja correctamente las rectas (es decir de acuerdo con los convenios habituales) y responde y justifica correctamente las preguntas sobre cantidad de puntos en común en las diferentes posiciones relativas de rectas, pero tiene dificultades con las intersecciones entre rectas y planos. La Figura 5 muestra los dibujos que hizo el estudiante en respuesta a la cuestión 15, que pedía dibujar un plano y una recta perpendiculares. Su respuesta a la cuestión 16, sobre la cantidad de puntos en común entre el plano y la recta es:

I: ¿Cuántos puntos tienen en común un plano y una recta perpendiculares? Por ejemplo, ese plano de la izquierda [Figura 5, izquierda] con la recta vertical.

E: Pues muchos. Tiene este, este, este, ... [marca el segmento de la recta contenido dentro del rectángulo del plano]

I: Bueno, infinitos. No hace falta que los marques más. Y en la figura de la derecha, ¿ese plano con la recta vertical?

E: Ninguno.

I: Entonces, ¿en qué quedamos?

E: En que es infinitos o ninguno. Hay dos opciones.

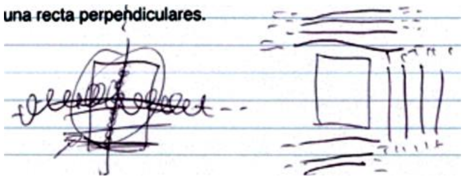


Figura 5. Dibuja un plano y una recta perpendiculares.

Evolución del proceso de instrumentalización

Identificado el obstáculo, en las siguientes sesiones el investigador propicia cuando es posible reflexiones y comentarios sobre el concepto de plano en geometría 3-dimensional, la concepción del estudiante y el convenio sobre la representación de un plano en el papel o en el ordenador. Brevemente, describimos y analizamos algunos de estos momentos clave.

En la actividad 1 el estudiante abre un archivo de Cabri 3d con el pb y ocho puntos que están distribuidos por encima y por debajo del pb, en la zona visible del pb y en la zona no visible del pb. El estudiante debe usar la bola de cristal para ver el conjunto desde diferentes puntos de vista. También debe arrastrar los puntos horizontal y verticalmente. El punto A, por haber sido creado en la zona visible del pb, no puede desplazarse verticalmente. El estudiante lo nota:

E: No me deja [el punto A no se puede desplazar verticalmente].

I: ¿Por qué el A no?

E: ¿Porque estaba en el plano y no se puede salir del plano?

I: El plano base tiene dos zonas. La zona que ves, el cuadrilátero de color oscuro, y la zona exterior. Cuando construyes un punto en la zona roja [la parte visible del pb], ese punto solo se puede mover por el plano, peor no puedes levantarlo verticalmente. Si el punto lo construyes en el pb pero fuera de la zona rojiza, entonces sí lo puedes subir y bajar. ¿Está claro ya?

El estudiante parece haber entendido el procedimiento, pues en la actividad 2 crea diversos puntos en los lugares adecuados. Sin embargo, en la actividad 3, en la que debe crear dos rectas *a* y *b* en el pb para estudiar la coincidencia de rectas, coloca el primer punto de la recta *a* en el pb pero fuera de la zona visible y lo arrastra dentro de la zona visible y después crea el segundo punto de esta recta directamente dentro de la zona visible (recta transversal de Figura 6). El investigador le pregunta:

I: ¿El plano base desde dónde hasta dónde va?

E: Desde aquí, pasando por aquí y por aquí y por aquí [mientras señala en orden las cuatro esquinas de la zona visible del pb].

I: O sea, ¿el cuadrilátero ese de color?

E: Sí.

I: ¿Y la parte de fuera no es plano base?

E: No. Es ... no es nada.

I: ¿No es nada? Sí, es el plano base.

E: Bueno sí, pero en esta figura nos imaginamos como si el plano base fuese sólo eso.

I: No, eso es la parte que se representa, pero el plano base es todo el plano.

E: Sí, pero estamos hablando de lo que se representa.

I: Cuando ahí [en el enunciado de la actividad] dice plano base quiere decir todo el plano, no solamente ese trocito [la zona visible].

E: Entonces creo otra [recta] aquí fuera [crea la recta vertical de Figura 6].

Figura 6. Crea dos rectas *a* y *b* en el plano base.

Al principio, el estudiante sigue pensando que el pb es solamente la parte visible, pero al decirle el investigador que no puede limitarse a considerar esa parte del plano, lo admite aunque trata de justificar el uso exclusivo de la zona visible. Al final del diálogo, parece haber asumido la conceptualización correcta, pues intencionadamente crea la segunda recta en el pb pero con puntos fuera de su zona visible. Por lo tanto, podemos decir que este diálogo incita un avance en el proceso de instrumentalización, ya que el estudiante mejora la comprensión que tiene de la diferencia entre el pb y su zona visible y parece aceptar el convenio de representación usado por el EGD3d.

Durante la resolución de la actividad 9, que pide crear dos rectas en el pb y dos fuera de él y arrastrarlas, observamos que el estudiante está completando su proceso de instrumentalización ya que tiene dificultades para expresarse pero sus ideas parecen ser válidas:

I: ¿Qué has aprendido [en esta actividad]?

E: Que ... los objetos que se encuentran en el plano base no podrán ser desplazados fuera del plano base.

I: No, hay una recta que sí has cambiado.

E: Pero los puntos no se encontraban en el plano base.

I: No. Vamos a ver. Tú te refieres a la zona oscura.

E: Sí.

I: Esa es la zona visible del plano base, pero el plano base sigue por fuera. ¿No habíamos quedado en que ... [E le interrumpe]

E: Que sí, que el plano base es infinito... pero digo la parte dibujada.

I: Eso se llama la zona visible. Entonces, ¿qué es lo que tú querías decir, bien dicho?

E: Los puntos... los objetos que se encuentran en el interior del plano base visible no podrán ser desplazados fuera de éste.

La actividad 21 pide crear un plano y tres rectas, una en el plano, otra que lo corte y otra que no lo toque. El estudiante ha avanzado muchos en el proceso de instrumentalización pues, para verificar que la recta que ha creado fuera del plano realmente no lo toca, se mueve con la bola de cristal hasta que ve la recta fuera de la zona visible del plano (Figura 7). El investigador le pregunta:

E: Si lo ponemos así, podemos ver toda la recta.

I: Pero ... ¿el plano dónde está?

E: Aquí [señalando con el ratón la zona visible del plano azul]

I: ¿Solamente es ese trozo el plano?

E: ¡Ah! Es verdad. No. Mi culpa. ... No es sólo ese trozo. ... Entonces tiene que ser paralela ... porque las paralelas son las que no cortan nunca [borra la recta y crea otra paralela al plano]

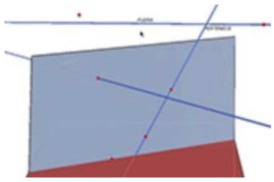


Figura 7. Intentando verificar que la recta superior horizontal está fuera del plano.

La actividad 22 estudia la propiedad de las rectas secantes de ser coplanarias. En la pantalla hay dos planos secantes, la recta de corte de los planos y un punto de esta recta que está fuera de las zonas visibles de los planos. El investigador pregunta si este punto está en uno de los planos y el estudiante le contesta que “sí, porque el plano es infinito”. Esta respuesta nos permite concluir que el estudiante ya está empezando a utilizar de manera natural la infinitud de los planos y el convenio de representarlos mediante una región acotada. Por lo tanto, ya ha completado el proceso de instrumentalización del EGD3d en lo referente a los planos. Esta conclusión se confirma por el hecho de que, en la última sesión, al contestar el cuestionario en la última sesión, realiza correctamente todos los dibujos que en la primera sesión hizo mal (debido a su concepción errónea de plano en el espacio) y responde bien a las preguntas.

CONCLUSIONES

Como mencionábamos en la introducción, son muy pocas, y muy recientes, las investigaciones que muestran la aplicación de la teoría de la génesis instrumental para analizar la actividad de los estudiantes en EGD3d. Nuestro trabajo aporta información en esta línea de investigación, que está empezando a desarrollarse y tiene un interesante potencial de progreso futuro.

En respuesta a las cuestiones de investigación planteadas en la introducción, hemos mostrado el caso de un estudiante que, a pesar de tener aa.cc.mm., interpreta incorrectamente la información gráfica proporcionada por Cabri 3d. Hemos visto cómo, a lo largo de la secuencia de actividades se va desarrollando, con ciertas dificultades, el proceso de instrumentalización ligado a este obstáculo, a medida que va evolucionando la concepción de plano en el espacio del estudiante. Esta instrumentalización debe concluir con la superación del obstáculo. Hemos mostrado también que el planteamiento de actividades adecuadas, junto a conocimientos geométricos proporcionados por el profesor y preguntas o discusiones orientadas son la clave para la evolución de la génesis instrumental y la superación de los obstáculos.

De este experimento no se pueden extraer conclusiones sobre la generalidad o no del comportamiento observado, pues se trata sólo de un caso. Se necesitarán otros estudios en EGD3d similares para recoger más información sobre mayor número de estudiantes antes de poder identificar comportamientos similares.

Referencias

Alba, F. J. (2012). *Dificultades de interpretación y de uso de los arrastres en Cabri 3D por estudiantes de ESO* (Memoria de Trabajo Fin de Máster no publicada). Valencia: U. de Valencia. Disponible en <http://roderic.uv.es/bitstream/handle/10550/25780/Alba,F.J.(2012).pdf>.

Arnal, A. y Planas, N. (2013). Uso de tecnología en el aprendizaje de la Geometría con grupos de riesgo: un enfoque discursivo. En A. Berciano y otros (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 157-164). Bilbao: SEIEM.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS enviroment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 7*(3), 245-274.

Battista, M. T. (2007). The development of geometrical and spatial thinking. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Reston, EE.UU.: NCTM.

Benedicto, C. (2013). *Investigación sobre variables en el diseño de actividades escolares para alumnos con altas capacidades matemáticas* (Memoria de máster no publicada). Valencia: Univ. de Valencia. Disponible en <http://roderic.uv.es/bitstream/handle/10550/32580/Clara 23-01-2014.pdf>.

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. En J. Vanhamme y W. Vanhamme (Eds.), *La problématique et l'enseignement des mathématiques. Comptes rendus de la XXVIIIe Rencontre de la CIEAEM* (pp. 101-117). Lovaina, Bélgica: CIEAEM.

Fernández, T. (2013). La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. En A. Berciano y otros (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 19-42). Bilbao: SEIEM.

Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *Arithmetic Teacher, 28*, 14-18.

Guin, D., Ruthven, K., y Trouche, L. (Eds.). (2005). *The didactical challenge of symbolic calculators*. N. York: Springer.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2014). La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de E. Primaria con altas capacidades matemáticas. En Gómez, B. y Puig, L. (Eds.), *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán*. Valencia: PUV.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago, EE.UU.: The University of Chicago Press.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., y Sträesser, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (pp. 275-304). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Mackrell, K. (2006). Cabri 3D: potential, problems and a web-based approach to instrumental genesis. *Proceedings of the 7th ICMI Study Conference "Technology revisited", 2*, 362-369.

Miller, R. C. (1990). *Discovering Mathematical Talent*. Washington, DC: ERIC.

Morera, L., y Fortuny, J. M. (2010). Momentos clave en el aprendizaje de isometrías. En M. M. Moreno y otros (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 435-450). Lleida: SEIEM.

Parzysz, B. (1988). "Knowing" vs "seeing". Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics, 19*, 79-92.

Rabardel, P. (1999). Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. *Actes de la 10e Université d'Été de Didactique des Mathématiques*, 203-213.

Rabardel, P. (2002). *Les hommes et les technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Univ. Paris 8. [traducción al inglés: Rabardel, P. (2002). *People and technology. A cognitive approach to contemporary instruments*. Paris: Univ. Paris 8]

Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático* (tesis doctoral no publicada). Granada: Universidad de Granada. Disponible en <http://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis/ver_detalles/7461/descargar>

Restrepo, A. M. (2008). *Génèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6ème* (Tesis doctoral no publicada). Grenoble, Francia: Université Joseph Fourier.

Salazar, J. V. F. (2009). *Gênese instrumental na interaçao com Cabri 3D: um estudo de transformaçoes geométricas no espaço* (Tesis doctoral). Sao Paulo, Brasil: Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo.

[1] La investigación presentada es parte de las actividades de los proyectos de I+D+i *Análisis de procesos de aprendizaje de estudiantes de altas capacidades matemáticas de E. Primaria y ESO en contextos de realización de actividades matemáticas ricas* (EDU2012-37259) y *Momentos clave en el aprendizaje de la geometría en un entorno colaborativo y tecnológico* (EDU2011-23240), subvencionados por el Gobierno de España.

PERCEPCIÓN DE LOS FUTUROS MAESTROS Y PROFESORES SOBRE USOS Y ENSEÑANZA DE RECURSOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES DE PROBABILIDAD CONDICIONAL

Future elementary and secondary mathematics teachers' perception of the use and teaching of resources in solving word conditional probability problems

M. Pedro Huerta[a], Joaquín Arnau[b]

[a]Universitat de València, [b]Colegio Pío XII de Valencia

Resumen

En este trabajo exploramos la percepción que tienen los estudiantes para maestros y profesores de matemáticas sobre los recursos para la resolución de problemas de probabilidad condicional en una doble vertiente, como resolutores de problemas y como futuros docentes. Los resultados muestran como los futuros docentes, como resolutores, tienen preferencias por un conjunto de recursos entre los que destacan las listas organizadas de datos, las tablas de contingencia y los diagramas en árbol, proponiendo su enseñanza dependiendo del nivel educativo y las finalidades de los estudios.

Palabras clave: *Formación de profesores, resolución de problemas, probabilidad condicionada, recurso para la resolución de problemas de probabilidad condicional.*

Abstract

In this piece of work we explore the perception that future elementary and secondary mathematics teachers have of the uses of the resources for solving conditional probability problems. Students are considered in a double condition: as problems solvers and as futures teachers of problem solving. Results show us that, as solvers, future teachers have preferences for a determined set of resources that includes data listings, contingency tables (2 x2 table) and tree diagrams, proposing their teaching depending on the educative level and the studies' purposes.

Keywords: *Teachers training, problem solving, conditional probability, resources for solving problems of conditional probability.*

INTRODUCCIÓN

En la resolución de problemas de probabilidad condicional, por la particularidad de estos problemas, la enseñanza suele ofrecer como medios para la organización de la información y el cálculo de cantidades, entre otros, las tablas de contingencia, los diagramas en árbol y el lenguaje simbólico y, en menor medida, las listas organizadas y los diagramas de Venn. Como problemas de matemáticas que son, los resolutores a veces incorporan al catálogo de medios para la organización de la información y el cálculo de nuevas cantidades representaciones espontáneas e idiosincráticas dependiendo del contexto en el que se formula el problema: urnas, o bolsas, por ejemplo, con una determinada distribución de bolas, en el contexto de extracciones aleatorias.

La investigación sobre el uso de estas representaciones o medios de organización, o recursos para la resolución de problemas de probabilidad condicional, como las designaremos a lo largo de este trabajo, es bastante escasa aunque con cierto interés como lo atestiguan trabajos relacionados con éste como, por ejemplo, en Estrada y Díaz (2006); Contreras, Estrada, Díaz y Batanero (2010); Corter y Zahner (2007) o Zahner y Corter (2010), a pesar de la dificultad que entrañan dichos

Huerta, M. P., Arnau, J. (2014). Percepción de los futuros maestros y profesores sobre usos y enseñanza de recursos en la resolución de problemas verbales de probabilidad condicional. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 415-424). Salamanca: SEIEM.

problemas para casi la totalidad de estudiantes que se enfrentan a ellos, incluidos los futuros maestros y profesores (Huerta, Cerdán, Lonjedo y Edo, 2011; Arnau, 2012). Maestros y profesores en formación, con posterioridad, pueden verse en la tesitura de llevar a cabo su enseñanza, en función del currículum que tengan que desarrollar. Esto hace que la reflexión sobre la formación de los futuros maestros y profesores en la resolución de estos problemas y en el uso de dichos recursos como resolutores y formadores sea pertinente abordarla. Una parte de esa reflexión se puede fundamentar en la manera en la que éstos perciben dichas representaciones o recursos en el doble papel en el que los vamos a situar, como resolutores de problemas y como futuros maestros o profesores de dichos problemas.

PROBLEMÁTICA Y MARCO DE REFERENCIA

En este trabajo, por tanto, informaremos sobre los primeros resultados obtenidos al hacernos las siguientes preguntas en un estudio de corte exploratorio:

1. ¿Qué dificultades presentan los problemas de probabilidad condicional a los futuros maestros y profesores?
2. ¿Qué recursos suelen usar los futuros maestros y profesores en la resolución de dichos problemas?
3. ¿Cómo perciben los futuros maestros y profesores los recursos que utilizan como resolutores de problemas como objetos de enseñanza?

De los problemas que hablamos aquí son problemas de probabilidad condicional definidos por dos sucesos básicos A y B y sus complementarios, sus probabilidades y las probabilidades conjuntas y condicionales que se pueden considerar al tomar dos cualesquiera de ellos. Son problemas verbales, formulados en contexto y con un formato de expresión para las cantidades que solamente se refieren explícitamente a probabilidades en la pregunta del problema, es decir, frecuencias y porcentajes. Son problemas que llamamos ternarios (Cerdán y Huerta, 2007), escolares (Lonjedo, Huerta y Carles, 2012) y que han sido usados para investigar su resolución en otros muchos trabajos (Arnau y Huerta, 2013 y Huerta, 2014).

El marco de referencia en el que situamos la formación de profesores es el marco teórico conocido como *Mathematical Proficiency for Teaching* (MPT, Wilson y Heid, 2010), un ejemplo de su uso en la formación de profesores de matemáticas educación secundaria puede verse en Conner, Wilson y Kim (2011), y en particular con una de sus tres dimensiones que tienen que ver con el trabajo matemático que conlleva la enseñanza. Elementos con el que se caracteriza el *proficiency* de dicho trabajo (Wilson y Heid, 2010, p. 3) son tenidos en cuenta aquí, en particular el que es llamado *proficiency in mathematical activity* (p. 10). Nuestro interés ahora no está en describir ni caracterizar dicha *proficiency* en maestros y profesores sino en obtener información sobre cómo debe ser dicha *proficiency* en la resolución de problemas de probabilidad condicional para su posterior caracterización.

METODOLOGIA

Muestra

27 alumnos de 4º Curso del grado de Maestro de Educación Primaria (mención en Educación Musical) y 30 estudiantes del curso de postgrado Máster en Profesado de Educación Secundaria, participaron en un estudio más amplio, longitudinal, en el que investigamos los uso de sistemas de representación en la resolución de problemas de probabilidad condicional. Los estudiantes de Magisterio, en el momento en el que participaron de esta investigación, habían completado el curso sobre Didáctica de la Geometría, la medida, la estadística y la probabilidad, de 6 créditos. En este curso, le dedicamos 4 sesiones de 2 horas cada una al análisis didáctico de la probabilidad como una medida y a la resolución de problemas de probabilidad, entre los cuáles se incluían los

problemas de probabilidad condicionada. En dicho análisis cabe el de los sistemas de representación para la resolución de los problemas. Cabe además, extender el campo de problemas más allá de los propios en el currículum de primaria, con lo que nos situamos en el entorno del marco teórico conocido como *Horizon Content Knowledge* (HCK) descrito en Fernández y Figueiras (2014).

Por su parte, los estudiantes del Máster, con una presencia escasa del 33% de graduados en Matemáticas y una amplia representación de ingenieros en la muestra, habían cursado 3 créditos en didáctica de la probabilidad. Los sistemas de signos o sistemas de representación o recursos, según se considere cada noción, para la resolución de problemas están presentes a lo largo de todo el curso en el análisis didáctico de la probabilidad en la educación secundaria obligatoria y en el bachillerato. En ambos casos, los cursos fueron impartidos por uno de los firmantes de este artículo.

Método

Con el fin de explorar cómo perciben los futuros maestros y profesores los recursos para la resolución de problemas de probabilidad condicional, tanto como resolutores como futuros enseñantes, primero les propusimos que fueran resolutores de problemas y después que describieran su perfil en la doble condición en la que les habíamos situado: como resolutores y como (futuros) enseñantes. Sabemos que los futuros maestros tal vez no tengan ocasión de abordar la resolución de esos problemas pero, no obstante, quisimos pulsar su percepción ante la hipótesis de una posible enseñanza de estos problemas y esos recursos: si los introduciría, cuáles y por qué. En todo caso a los maestros se les sitúa con conocimientos suficiente para evaluar un horizonte más lejano en el que se ubicarán sus estudiantes de primaria en la transición hacia la secundaria (Fernández & Figueiras, 2014, p. 9)

Tabla 1. Variables de la tarea y sus valores en los problemas de los cuestionarios.

P	Estructura de datos	Estructura conceptual	Contexto	Formato de datos	Número de resoluciones
1	$L_0C_2T_1$	PC	Est Social	F, p	28
2	$L_0C_2T_1$	PC	Est Salud	%, p	28
3	$L_0C_2T_1$	PC	Urnas	F, p	29
4	$L_0C_2T_1$	PC	Test Diag	%, p	29
5	$L_1C_1T_2$	PT	Est Social	F, %, p	29
6	$L_1C_1T_2$	PT	Est Salud	% , p	29
7	$L_1C_1T_2$	PT	Urnas	F, %, p	28
8	$L_1C_1T_2$	PT	Test Diag	%, p	28
9	$L_2C_1T_1$	T. Bayes	Est Social	F, %, p	28
10	$L_2C_1T_1$	T. Bayes	Est Salud	%, p	28
11	$L_2C_1T_1$	T. Bayes	Urnas	F, %, p	29
12	$L_2C_1T_1$	T. Bayes	Test Diag	%, p	29
				Total	342

Léase: $L_iC_jT_k$, la familia de problemas (Huerta, 2014). Estructuras conceptuales: PC (definición de probabilidad condicional), PT (Teorema de la probabilidad total), T. Bayes (Teorema de Bayes). Formato de cantidades conocidas: F (frecuencias absolutas), % (porcentajes) y desconocidas (pregunta del problema, p en probabilidad).

En la misma tesitura se sitúa a los futuros profesores, pero en este caso sabiendo que los problemas sí deben ser objetos de enseñanza a lo largo de toda la educación secundaria (12-18 años). Esta vez, quisimos ver, además, si los futuros profesores preveían una introducción escalonada de los recursos a lo largo de la toda la enseñanza secundaria en función de algún tipo de complejidad, ya en los problemas ya en la estructura interna de los recursos.

De una selección de 12 problemas, cuyas características se describen en la Tabla 1, se diseñaron dos cuestionarios de 6 problemas cada uno. El primero (con los problemas 1, 2, 7, 8, 9 y 10) fue resuelto por 28 estudiantes (13 de Magisterio y 15 de Máster); mientras que el segundo (con los problemas 3, 4, 5, 6, 11 y 12) fue resuelto por 29 estudiantes (14 de Magisterio y 15 de Máster). En total, por tanto, disponemos de 162 resoluciones correspondientes a futuros maestros y 180 resoluciones de los futuros profesores.

Consideraremos, para cada problema, tres tipos de dificultades (Huerta y otros, 2011; Huerta, 2014) la dificultad aparente, la dificultad del problema y la dificultad de la solución del problema. La primera se mide a partir del número de estudiantes que no abordan la resolución de un problema dado, la segunda por el número de estudiantes que llegan a dar una respuesta a la pregunta formulada y, finalmente, la tercera por el número de estudiantes que dan como respuesta un número correcto para la probabilidad preguntada.

Por otra parte, para obtener información sobre la percepción que tienen los futuros maestros y profesores sobre su perfil de resolutores y de enseñantes, diseñamos una encuesta *on line* utilizando el editor de formularios de Google. El primer diseño de la encuesta fue probado con profesores de secundaria en activo (un total de 9), a quienes les propusimos que resolvieran algunos de los problemas del cuestionario y les pedimos que contestaran a la encuesta como enseñantes experimentados. Esta prueba piloto nos permitió modificar y perfeccionar las preguntas hasta que tuvimos los formularios que finalmente fueron propuestos. Éstos constan de tres partes: información general sobre el resolutor, información sobre el perfil como resolutor e información sobre el perfil como (futuro) docente. La primera y la tercera presentan diferencias, que resultan obvias, entre el formulario dirigido a los futuros maestros y el dirigido a los futuros profesores. La encuesta contiene tanto preguntas de elección múltiple como preguntas de respuestas abiertas, generalmente éstas últimas justificando o bien una valoración previa o bien una elección o posición previa, ya sea como resolutor o como futuro docente. Brevemente puede verse el contenido de la encuesta a continuación:

- Datos iniciales. Aquí se le pedía una identificación así como la titulación de acceso a los estudios que estaban realizando.
- Como resolutor. Al encuestado se le pedía contestar a las siguientes preguntas:
  - *Indica el número de problemas que has abordado*. Esto nos da una idea de la “dificultad aparente” que puede tener un problema y en consecuencia del cuestionario.
  - *Indica el número de problemas en los que has llegado a una solución.* Esto nos da idea de lo que llamamos “dificultad del problema”, como aquélla que no permite al resolutor dar una respuesta a la pregunta formulada.
  - *Indica en cuál o cuáles de los siguientes recursos sueles confiar más para resolver problemas como los que has abordado*. Para cada uno de los recursos (*Lista organizada de datos, Diagramas de árbol, Tablas de contingencia (Tablas 2x2), Diagramas de Venn (conjuntos), Lenguaje simbólico (fórmulas), Otros (dependiendo del problema*)), el estudiante tenía que asignarle un valor entre 0 y 5 en función del grado de confianza que él o ella depositaba en dicho recurso.
  - *Si has escogido la opción otros, pon algún ejemplo.*
  - *Justifica, por favor, tus preferencias.*
- El perfil de resolutor. *De las siguientes opciones, escoge la que creas que mejor se adapta a tu perfil como resolutor de problemas de probabilidad condicional.*

- *Independientemente del problema, siempre los resuelvo usando...*: El estudiante debe escoger una de las siguientes opciones: *tabla de contingencia (solamente), diagramas de árbol (solamente), tabla de contingencia y diagrama de árbol, tabla de contingencia y fórmulas, diagrama de árbol y fórmulas, lista organizada y fórmulas*
- *No, dependo del problema*.

Indica, por favor, cuál o cuáles de las características te hacen decidirte por un recurso u otro. El estudiante podía escoger más de una de las siguientes opciones:

- *Depende de cómo se expresen los datos (en %, en frecuencias o en probabilidad)*
- *Depende de si conozco el contexto (por ejemplo, uso recursos diferentes según si es de urnas, cartas, test de diagnóstico...)*
- *Depende del tipo de datos conocidos que tenga (Si en los datos hay probabilidades de intersección, o condicionales...)*
- *No dependo de ninguna característica del problema.*
- *Por favor, justifica tus elecciones de las dos preguntas anteriores.*

El perfil como docente. Distinguimos entre las dos versiones: como maestro/a y como profesor/a

- Como maestro/a: *Ahora, piensa como futuro maestro/a.*
  - *¿Cuál o cuáles de los siguientes recursos crees que sería razonable introducir en la enseñanza de la probabilidad en Ed. Primaria?* El estudiante podía escoger más de una de las siguientes opciones: *Lista organizada de datos, Diagramas de árbol, Tablas de contingencia, Diagramas de Venn, Lenguaje simbólico, Otros (dependiendo del problema).*
  - *Trata de dar una breve justificación de tus elecciones.*
- Como profesor/a: *Ahora, piensa como profesor/a de matemáticas. Si tuvieras que enseñar resolución de problemas de probabilidad condicional, en cuál o cuáles de los siguientes recursos pondrías énfasis, dependiendo del nivel*: Para cada nivel educativo (4ºESO, BTO humanidades/ciencias sociales y BTO científico/técnico), el estudiante podía escoger más de una de las siguientes opciones: *Lista organizada de datos, Diagramas de árbol, Tablas de contingencia, Diagramas de Venn, Lenguaje simbólico, Otros (dependiendo del problema).*
  - *Trata de dar una breve justificación de tus elecciones.*

El formulario *online* fue enviado a los estudiantes por correo electrónico después de que realizaran el cuestionario de problemas. Los estudiantes participaron de manera voluntaria y obtuvimos un total de 20 (de 27) respuestas por parte de los futuros maestros y 22 (de 30) de los futuros profesores.

La información obtenida por la encuesta la hemos tratado cualitativamente a partir de un tratamiento descriptivo de los datos numéricos (escalas de valores sobre los recursos) y los datos cualitativos (perfil de usuario y de futuros maestro y profesor). Las variables cualitativas definidas para el grado de confianza en un recurso, el perfil de resolutor y el perfil de enseñante y sus valores son los siguientes:

- Confianza en los recursos seleccionados, justificada basándose en que éste: organiza la información, facilita el cálculo, visualizan los datos del problema, otros y no justifica.
- Perfil de resolutor. Confianza estable en un conjunto de recursos para la resolución de los problemas o no. En este último caso, el recurso elegido depende del problema.

- Justificación de su perfil, basándose en que: Es independiente del problema o es dependiente, en cuyo caso dependiente de la expresión de los datos, del conocimiento del contexto y de la tipología de los datos; dominio y conocimiento de un determinado recurso; en su eficiencia/utilidad; eficacia; otras razones.
- Perfil como enseñante. Conjunto de recursos que, a juicio del (futuro) maestro y profesor, serían objeto de enseñanza.
- Justificación del perfil como enseñante, basándose en que son: medios de organización de la información del problema; visualizan los datos del problema, son eficientes/eficaces, otras razones.

Dado que el cuestionario *online* admite respuestas abiertas, una respuesta puede contener aspectos contenidos en más de un valor de las distintas variables consideradas. Es por esto que en algunos casos la suma de frecuencias sea mayor que el total de la muestra y la de porcentajes mayor que 100.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Aparentemente, los problemas del cuestionario no presentaron ninguna dificultad inicial a los futuros maestros pues todos ellos abordaron la resolución de los problemas de su cuestionario. De las 162 resoluciones, en 144 ocasiones (88,9%) los futuros maestros llegaron a proporcionar una respuesta a la pregunta del problema. De este número de respuestas, en 72 ocasiones (50%) las soluciones del problema fueron números correctos.

Los datos anteriores no nos deben hacer pensar que las dificultades de la solución de los problemas se distribuyen por igual al 50%. Los estudiantes tuvieron más dificultades en unos problemas que en otros, de tal manera que algunos no fueron resueltos correctamente por ningún futuro maestro (caso del problema P6) y en cambio otros por la práctica totalidad de ellos (11 de 13 en el problema P7 y 11 de 11 que respondieron en el P9). Pero esto que solamente es información sobre la actuación de los futuros maestros merece un análisis posterior que no haremos en este trabajo, pues su objetivo es otro. No obstante, lo que nos informa es que si son usuarios competentes de determinados recursos, éstos, por sí mismos, no les evitan dificultades en determinados problemas que, en cambio, en otros problemas no encuentran, aun siendo los problemas en cuestión estructuralmente isomorfos (los problemas P6 y P7 pertenecen a la misma familia de problemas).

Los futuros maestros confían básicamente en tres recursos, que por este orden (de mayor a menor valoración media), son: tablas de contingencia (μ=3.8, σ=1.4); lista organizada (μ=3.3, σ=1.5) y diagramas de árbol (μ=2.75, σ=1.44). El resto de recursos, diagramas de Venn, el recurso simbólicos y otros (como dibujos u otras representaciones gráficas) quedan lejos de aquéllos e incluso no llegan a ser aprobados por los usuarios (μ<1.5). Estos resultados difieren en mucho de aquellos que aportan en sus trabajos Corter y Zahner (2007) y Zahner y Corter (2010) también para una muestra de estudiantes futuros maestros.

Las razones por las cuáles los futuros maestros confían en sus recursos pueden agruparse en tres: porque hace visibles los datos del problema (64.7%) (*La tabla es muy visual y te das cuenta enseguida si tienes todos los datos o te falta alguno*, M27), porque organizan la información del problema (58.8%) (*Creo que en la tabla de contingencia y en el diagrama de árbol se ve la información más organizada y clara, por eso utilizo preferentemente estos recursos*, M110) y, en menor medida porque facilita el cálculo (41.18%) (*Utilizando la tabla de contingencias, puedo ver fácilmente la relación existente entre los datos del problema y la incógnita que me pide y, por tanto, me resulta mucho más fácil resolver el problema*, M19). Los recursos pues les ayudan a hacer lecturas de los problemas de un modo organizado que les facilita la comprensión del mismo y el cálculo.

Muy pocos estudiantes (4 de 20) han modelizado la resolución de estos problemas haciendo uso de los recursos independientemente del problema de que se trate. El resto, dependen en mayor o menor medida de las variables del problema, de las que hemos hablado con anterioridad (Tabla 1). Así, 5 de 20 no declaran tener un perfil claro como resolutor. Eligen un recurso u otro en función del problema de que se trate (*Según los datos del problema utilizo un recurso u otro. Si los datos del problema son dicotómicos, normalmente lo resuelvo mediante una tabla de contingencias. Sin embargo, cuando hay más de dos posibilidades, utilizaría otros recursos. Normalmente el diagrama de árbol o la lista organizada de datos*, M19), mientras que 13 de 20 confían en la tabla de contingencia como recurso básico *(Según el problema, me resulta más cómodo utilizar una forma de resolver el problema u otra. Normalmente me suelo decantar por la tabla, como he dicho anteriormente,* M27), ya sea en exclusividad (3 de 13) o en compañía de otros recursos (8 de 13, asociada con el diagrama de árbol y 2 de 13 asociada al registro simbólico).

Ningún futuro maestro/a declara que no debería hacerse enseñanza de los recursos que han usado para la resolución de los problemas propuestos y, por ende, de problemas en los que se pudieran usar. Al contrario, señalan unos más propicios que otros. Como era de esperar, una mayoría abrumadora (18 de 20) no haría enseñanza del recurso simbólico (*Me parecen* **—**lista, árboles y tablas **—** *los más asequibles para el nivel de primaria, porque el lenguaje simbólico me parece muy complejo para primaria. También añadiría los dibujos*, M11), manteniendo, en cambio, sus preferencias distribuidas entre diagramas de árbol (85%), listas organizadas (75%) y tablas de contingencia (70%), lo que comparado con su valoración como resolutores es justo la posición simétrica. Parece que, aun valorando altamente los recursos mencionados, le otorgan más complejidades o unos que a otros (*Creo que tanto las fórmulas como las tablas de contingencia son algo demasiado abstracto para los alumnos. Considero más apropiados para la educación primaria recursos que ayuden a visualizar el problema: lista de datos, diagrama de Venn o diagrama de árbol*, M16). Valoran mucho las tablas de contingencia como resolutores pero valoran más a los diagramas de árbol y las listas como recursos que podrían enseñarse a los estudiantes de primaria. Claro, en la justificación de porqué enseñarían estos recursos, el 55% menciona aspectos relacionados con la eficiencia y eficacia del recurso (*Pienso que mediante las tablas de contingencia se llega pronto a una solución y son fáciles de hacer (aunque depende de los datos). Las normas que se usan para llegar a la solución son muy elementales,* M14), dándoles el mismo peso por ser medios para organizar la información del problema y visualizar los datos del problema (40%) (*La tabla de contingencia por su claridad y organización. El diagrama de árbol porque también supone muy gráfico y se pueden trabajar más de dos variables. Y la lista porque es una forma de entender el problema y extraer los datos del mismo*, M213). Algunos incluso se sitúan en el horizonte de los estudiantes de primaria (*He elegido tanto el diagrama de árbol y la tabla de contingencias porque de este modo los alumnos ya tendrán algunos conocimientos sobre los mismos antes de llegar a la educación secundaria, ya que actualmente se enseñan en esta etapa educativa*, M113).

Al igual que para los futuros maestros, los problemas no presentan ninguna dificultad inicial para los futuros profesores, pues de 180 resoluciones, llegan a dar respuesta en 158 casos (87,8%). De entre éstas, 92 (el 58,2%) dieron como resultado un número correcto. De aquí observamos como estos problemas son algo menos difíciles para los estudiantes de máster que para los de magisterio (41.8% frente al 50%). Se observa, además, una distribución similar problema a problema. Por ejemplo, el problema 6 sólo fue resuelto correctamente por 4 de 15 estudiantes (27%), mientras que el problema 7 fue resuelto correctamente por la totalidad de los que dieron respuesta (14 de 14).

Los recursos preferidos por los futuros profesores son, por este orden, los diagramas de árbol (μ=3,95; σ=0,79), las tablas de contingencia (μ=3,23; σ=1,62) y la lista organizada de datos (μ=3,10; σ=1,44). En menor medida encontramos el recurso simbólico (μ=2,52; σ=1,59) y por último los diagramas de Venn y otros recursos. Observamos aquí un cambio en el orden de preferencias, el diagrama en árbol pasa a ser el recurso favorito para resolver los problemas frente a la tabla de contingencia de los futuros maestros.

De entre los que han dado argumentos para justificar sus preferencias, el 60% hace referencia a motivos de visualización del problema (*En la tabla de contingencias es la que me permite ver y representar mejor los datos*, P214); el 33,3% a razones de organización de los datos (*Lo veo todo más claro en los diagramas de árbol o las tablas 2x2. Quedan claros los datos, las incógnitas y el orden que necesitas seguir*, P112); el 26,6% a la sencillez/eficiencia del recurso (*El diagrama árbol, me resulta más intuitivo y fácil de analizar y recordar*, P211); y el 20% aluden además a que facilita los cálculos (*Entre mis preferencias se encuentran las tablas de contingencia y los diagramas de árbol porque lo considero una manera de ordenar los datos de una manera visual, donde a partir de los datos conocidos, completamos la tabla o las ramas del árbol obteniendo datos desconocidos a priori, que nos pueden ser útiles para resolver el problema*, P27).

Al igual que ocurría con los maestros, son pocos (7 de 22) los que afirman no depender de las características del problema para utilizar un recurso u otro, sino que han universalizado uno o varios recursos y los usan independientemente del problema de que se trate. Los otros 15 de 22 afirman depender de alguna de las características del problema. Entre estos, 13 dependen del tipo de datos conocidos para decantarse por un recurso u otro (*En los problemas de probabilidad condicionada suelo utilizar tablas, ya que percibo la globalidad del problema y me evita recurrir a la memorización de las fórmulas. Éstas me gusta utilizarlas cuando no tengo que buscarlas en mi memoria. Los diagramas en árbol los utilizo en problemas de intersección y unión (AyB, AoB) ya que me resulta muy cómodo (por lo metódico que es) ir multiplicando probabilidades y sumando cuando cambio de rama,* P210). En cualquier caso, los diagramas de árbol parecen ser el recurso predilecto por los futuros profesores: 13 de 22 afirman utilizarlo, 5 en combinación con fórmulas (registro simbólico), 8 en combinación con tablas de contingencia, pero en ningún caso en solitario. (*Suelo utilizar el diagrama del árbol para organizar la información. Según lo que pida el problema (probabilidades de intersección, condicionales, probabilidades totales, etc.) uso las fórmulas que considero adecuadas*, P12).

En la tabla siguiente (Tabla 2) puede verse la propuesta que los futuros profesores hacen sobre qué recursos enseñar y en qué nivel. En cada casilla se ofrece el porcentaje de aquéllos que harían enseñanza de ese recurso y en ese nivel.

Tabla 2. Porcentaje de futuros profesores (N=22) que proponen la enseñanza de un determinado recurso para un determinado nivel educativo.

Nivel educativo	L	DA	TC	DV	RS	O
4º ESO	45	95	68	32	9	5
BTO CCSS	45	82	86	27	45	9
BTO CIENTÍFICO/TECNO	55	77	91	32	82	14

L= lista organizada, DA= Diagrama de árbol, TC= Tabla de contingencia, DV= Diagrama de Venn, RS= Recurso simbólico (fórmulas), O = otros (dibujos, otras representaciones gráficas que no son las anteriores). La suma de los porcentajes nunca puede ser 100 pues se pueden proponer más de un recurso.

Sin entrar en detalles, de la Tabla 2 puede apreciarse que lo que se propone tiene en cuenta el nivel educativo al que va dirigida, tiene en cuenta, por tanto, a los estudiantes y a la finalidad de los estudios a los que se refiere. Así, mientras que listas organizadas y diagramas de Venn no marcan diferencias, el recurso simbólico sí lo hace (*Me parece que en cursos anteriores hay que intentar explicar la probabilidad de una forma más visual (diagramas, tablas...) y en cursos más avanzados, además de consolidar estos métodos, habría que ampliar las posibilidades de resolución de los problemas con fórmulas....*P21). Más aún, el tipo de bachillerato al que se dirige su propuesta (*He seguido con los que me parecen más claro con la única diferencia que en el bachillerato* *científico/técnico he añadido también el lenguaje simbólico porque creo que tienen que ser capaces de usar las fórmulas correctamente y con mayor naturalidad y frecuencia,* P111).

La finalidad en la introducción de los recursos está claramente expuesta en sus justificaciones, la visualización es el objetivo (*En la ESO proporcionaría una resolución los más visual posible tratando de utilizar el menor número de fórmulas para resolver los problemas. En el Bachillerato, trataría de resolver los problemas utilizando varios métodos, comprobando que las fórmulas pueden deducirse a partir de lo visual,* P23).

CONCLUSIONES

A pesar de que los futuros maestros y profesores han recibido enseñanza regladas en sus diferentes trayectorias escolares y especializada, como futuros docentes, la resolución de problemas de probabilidad condicional presenta un cierto grado de dificultad que no desaparece aún cuando los resolutores llegan a tener un alto grado de conocimientos sobre los recursos que pueden usarse en la resolución de dichos problemas: qué recursos y cuándo y cómo pueden usarse. No obstante los resultados obtenidos en dichas dificultades son mejores, para algunos problemas, que aquellos reportados en Huerta, Cerdán, Lonjedo y Edo (2011), para una muestra de futuros profesores que no habían recibido enseñanza especializada en el momento en el que resolvieron los problemas. Efectivamente, siguen habiendo factores asociados a determinados tipos de problemas que influyen en el éxito de su resolución y que incluso una demostrada competencia en los recursos disponibles para su resolución no llegan a evitar completamente. Lo hemos señalado para los problemas del anexo y tanto para los futuros maestros como para los futuros profesores.

Los resultados muestran que los resolutores (futuros maestros o profesores) tienen preferencias por unos determinados recursos frente a otros. Las listas organizadas, tablas de contingencia y árboles son los preferidos, con distinto grado de confianza dependiendo de si se trata de un futuro maestro (valorando más las tablas de contingencia) o un futuro profesor (quienes valoran más a los diagramas de árboles). Estos resultados son distintos de los obtenidos por Corter y Zahner (2007) quienes reportan que el uso de árboles y tablas es más bien escaso entre sus resolutores, a pesar de la presencia de éstos en todo momento en el curso recibido. Sin duda, en ambos casos, la influencia del modelo de enseñanza "especializada" recibida por los futuros maestros y profesores es clara.

En consonancia con sus preferencias como resolutores, los futuros docentes se definen como futuros enseñantes. Ninguno de los futuros maestros rechaza la posibilidad de que estos recursos puedan ser objeto de enseñanza en la educación primaria, aún siendo conscientes de que no forman parte del currículo escolar, ni los problemas ni los recursos posibles. En primer lugar, se justifican por la capacidad de visualizar y organizar la información contenida en el problema y, en segundo, por su eficiencia y eficacia para obtener la respuesta a la pregunta del problema, una vez que todos los datos del mismo están disponibles y se hacen visibles en el recurso de que se trate. Todos menos el recuso simbólico que en razón se decide considerarlo no apropiado para sus futuros alumnos.

En parecidos términos a los maestros se pronuncian los futuros profesores. A sabiendas de que los problemas y sus recursos sí deberían ser objeto de enseñanza tanto en la educación obligatoria como postobligatoria, los futuros profesores diferencian su perfil de enseñantes en función del nivel educativo y la finalidad de esos estudios. Así, mientras que la presencia de los diagramas en árbol decrece desde la ESO hasta el bachillerato científico y tecnológico, pasando por el bachillerato de ciencias sociales, aumenta la presencia de la tabla de contingencia y el recurso simbólico, de tal manera que éste solamente es razonable en el bachillerato y, su presencia debe ser mayor en el bachillerato científico y tecnológico.

Referencias

Arnau, J. (2012). *Un estudio exploratorio de la resolución de problemas de probabilidad condicional centrado en la fase de cálculo*. Memoria de investigación. Màster de Investigación en Didácticas Específicas. Universitat de València.

Arnau, J. & Huerta, M. P. (2013). Probabilidad vs Porcentaje en la formulación de problemas de probabilidad condicional. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 165-173). Bilbao: SEIEM

Cerdán, F. & Huerta, M. P. (2007). Problemas ternarios de probabilidad condicional y grafos trinomiales. *Educación Matemática*, 19 (1), 27-62.

Corter, J. E. & Zahner, D. (2007). Use of External Visual Representations in Probability Problem Solving. *Statistics Education Research Journal*, 6 (1), 22-50.

Conner, A. N; Wilson P. S. & Kim, H. J. (2011). Building on mathematical events in the classroom. *ZDM Mathematics Education*, 43, 979–992.

Contreras, J. M.; Estrada, A.; Díaz, C. & Batanero, C. (2010). Dificultades de los futuros profesores en la lectura y cálculo de probabilidades en tablas de doble entrada. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 271-280). Lleida: SEIEM

Fernández, S. & Figueiras, L.(2014). Horizon Content Knowledge: Shaping MKT for a Continuous Mathematical Education. *REDIMAT*, *3*(1), 7-29.

Estrada, A. & Díaz, C. (2006). Computing probabilities from two-way tables: an exploratory study with future teachers. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of ICOTS-7*. Salvador (Bahia): International Association for Statistical Education.

Huerta, M. P. (2014). Researching conditional probability problem solving. En E. J. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking: Presenting Plural Perspectives*. Dordrecht: Springer, 613-639.

Huerta, M. P.; Cerdán, F. ; Lonjedo, Mª. A. & Edo, P. (2011). Assessing difficulties of conditional probability problems. In Marta Pytlak; Tim Rowland & Ewa Swoboda (Eds.*) Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 807-817. Rzeszów:University of Rzeszów.

Lonjedo, Mª A.; Huerta, M. P. & Carles, M. (2012). Conditional probability problems in textbooks: An example from Spain. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 15 (3), 319-338.

Zahner, D. & Corter, J. E. (2010). The process of Probability Problem Solving: Use of External Visual Representations. *Mathematical Thinking and Learning*, 12, 177-204.

Wilson, P. S. & Heid, M. K. (Eds.). (2010). *Framework for mathematical proficiency for teaching*. Athens, GA/University Park, PA: Center for Proficiency in Teaching Mathematics/Mid-Atlantic Center for Mathematics Teaching and Learning.

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS MATEMÁTICOS DE UN LIBRO DE TEXTO DE 3º ESO EN RELACIÓN CON LOS CONTENIDOS DE GEOMETRÍA PLANA

Analysis of mathematics problems in a 9th grade textbook with respect to the plane geometry contents

Elena María López, Luis Carlos Contreras

Universidad de Huelva

Resumen

La resolución de problemas ha jugado un papel muy importante en las investigaciones de las últimas décadas, y se ha convertido en un contenido esencial en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en los currículos de primaria y secundaria de diversos países. En este trabajo se analiza cómo se refleja esto en los libros de texto, seleccionando para ello, el libro de texto más vendido en España y centrándonos en el tema de geometría plana en tercero de ESO. Concluiremos que el libro de texto no se adapta a esta evolución teórica ya que la mayoría de los problemas analizados han sido ejercicios de aplicación de conceptos y algoritmos.

Palabras clave: *resolución de problemas en matemáticas, educación secundaria, libros de texto, geometría plana.*

Abstract

Problem solving in mathematics has played an important role in educational research in recent decades and has become an essential content in the teaching and learning of mathematics in different countries. In this work, we analyze how these ideas are reflected in the most sold textbook in Spain. Our focus was the topic of plane geometry in the ninth grade. We conclude that this textbook does not fit in this theoretical evolution, as most of the problems analyzed were exercises of concepts and algorithms applications.

Keywords: *problem solving in mathematics, secondary education, textbooks, plane geometry.*

INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas (RP) ha sido objeto de interés desde los inicios de la humanidad. La RP promueve el aprendizaje significativo, fomenta el gusto por la matemática y desarrolla una actitud abierta y crítica (Carrillo, 1998). Todas estas cualidades le otorgan un papel esencial en la formación matemática e integral del estudiante. Destacamos a Pólya (1962, 1985) como principal impulsor de la preocupación contemporánea por la RP; para los que han trabajado bajo su inercia, las matemáticas son una disciplina de descubrimiento (Contreras y Carrillo, 2000). Cai y Lester (2010) señalan que la enseñanza de las matemáticas a través de la RP ayuda a los estudiantes a ir más allá de la adquisición de ideas aisladas y conseguir el desarrollo de un sistema de conocimiento cada vez más conectado y complejo. El papel prominente que se le da a la RP ha provocado que se haya hecho presente en casi todos los programas educativos y currículos del mundo (Contreras y Carrillo, 2000; Herdeiro, 2010).

Las directrices curriculares se deben traducir en materiales que orienten a los profesores para alcanzar los objetivos de aprendizaje de las matemáticas (Hirsch y Reys, 2009). Normalmente estos materiales son los libros de texto que se utilizan en el aula, convirtiéndose en muchos casos en el único recurso por medio del cual se desarrolla el proceso de enseñanza y aprendizaje. La influencia

López, E. M., Contreras, L. C. (2014). Análisis de los problemas matemáticos de un libro de texto de 3º ESO en relación con los contenidos de geometría plana. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 425-434). Salamanca: SEIEM.

de los libros de texto en el aula ha dado lugar a investigaciones que analizan su uso en un nivel y contenido específicos. En este trabajo nos centraremos en el papel que un libro de texto da a la RP en el tercer curso de la ESO para el ámbito de la geometría plana. Analizaremos la coherencia entre los planteamientos teóricos sobre la RP, su importancia en la Educación Matemática (Pólya, 1962; Schoenfeld, 1985; Borasi, 1986) y su consideración en los libros de texto escolares de tercer curso de la ESO. El trabajo se organiza en cuatro partes. En el siguiente apartado encuadraremos este estudio. Comenzaremos delimitando lo que entenderemos por problema matemático y los tipos de problemas que utilizaremos en nuestro instrumento de análisis y se abordarán los roles de los libros de texto en el aula. A continuación mostraremos el diseño de la investigación y el análisis descriptivo de un libro de texto. Por último, en el apartado de conclusiones, se dará respuesta a las cuestiones planteadas al inicio de la investigación.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Problemas matemáticos: tipologías

Para Pólya (1962), *"tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata"* (p. 117). Para Krulik y Rudnik (1980) es una situación que necesita de una solución para la cual los resolutores no conocen medios o caminos evidentes para obtenerla. La idea de dificultad se manifiesta también en la siguiente definición: *"una situación en la que se pide a un individuo realizar una tarea para la que no tiene un algoritmo fácilmente accesible que determine completamente el método de solución"* (Charles y Lester, 1982, p. 5). Podría decirse entonces que un problema es una situación que produce un cierto grado de incertidumbre y que genera una conducta encaminada hacia la búsqueda de una solución (Pino, 2012). Carrillo (1998) resalta la aplicación no rutinaria de conocimientos matemáticos en el proceso de resolución de un problema. En definitiva, un problema es una situación en la que se hace necesario superar ciertos obstáculos para alcanzar los fines perseguidos y cuya consecución depende en gran medida de los conocimientos previos y el grado de compromiso del individuo que lo afronta.

En la literatura podemos encontrar variadas tipologías y criterios de clasificación. Pólya (1985) establece una de las primeras clasificaciones de problemas, en la que distingue sólo dos tipos: el *problema por resolver*, cuyo propósito es descubrir la incógnita del problema, y el *problema por demostrar*, que consiste en mostrar de modo concluyente la exactitud o falsedad de una afirmación claramente enunciada. A partir de aquí se han formulado diferentes clasificaciones. Este trabajo toma como base las propuestas por Borasi, Abrantes y Boavida, ya que consideramos que son las más completas y explícitas. Borasi (1986), debido a su interés por mejorar la enseñanza a partir de la RP, intenta clarificar la noción de problema basándose en cuatro elementos estructurales: el contexto, o situación en la que se enmarca el problema; la formulación, o la forma en la que se presenta la tarea al alumno; la solución, o conjunto de soluciones del problema y el método de resolución, o el camino tomado para encontrar la solución. Sobre la base de estos cuatro elementos, la autora analiza lo que designa por: *ejercicios, problemas de palabras, pruebas de una conjetura, problemas-enigmas, problemas de la vida real, situaciones problemáticas y situaciones.*

Más tarde, Abrantes (1989) aplica los cuatro elementos estructurales definidos por Borasi para clasificar algunos ejemplos que considera aclaratorios. Este autor establece la siguiente clasificación: *ejercicios, problemas de palabras, problemas para ecuacionar, problemas para demostrar, problemas para descubrir, problemas de la vida real, situaciones problemáticas y situaciones*. Boavida (1993) realiza una síntesis de las clasificaciones de Borasi y Abrantes, para clasificarlos en: *ejercicios, problemas de palabras, problemas para ecuacionar, problemas para demostrar, pruebas de una conjetura, enigmas/problemas para descubrir, problemas de la vida real, situación problemática y situación*.

En esta última clasificación nos basaremos para desarrollar la categoría de los tipos de problemas en nuestro instrumento de análisis.

Estudios sobre libros de texto

González y Sierra (2004) utilizan el término libro de texto para designar *"aquellos libros que utilizan habitualmente profesores y alumnos a lo largo del curso escolar en el proceso de enseñanza-aprendizaje de un área de conocimiento"* (p. 391).

Muchos autores comparten el protagonismo que conceden los profesores a los libros de texto. Así, García y Guillén (2008) sostienen que es el material más utilizado en clase, al que los profesores otorgan mayor importancia, y añaden también que es uno de los materiales fundamentales en los que los docentes se apoyan para desarrollar su actividad. El uso del libro de texto ha adquirido un papel tan importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje que, tal y como señalan Monterrubio y Ortega (2009), *"es el propio manual el que determina el currículo real"* (p. 38), siendo el culpable a veces de la trasmisión de errores e inconsistencias (Jaime, Chapa y Gutiérrez, 1992).

Se han elaborado varios instrumentos para el análisis y la evaluación de los libros de texto, con el fin de facilitar al profesorado la tarea de selección o valoración de los mismos. Entre ellos, destaca el modelo para la valoración de textos escolares de matemáticas creado por Monterrubio y Ortega (2012), que mejora y completa otros modelos precedentes.

Existe una línea de investigación que ha explorado el papel de los problemas o de la RP en los libros de texto de matemáticas. Además, en los últimos años estas investigaciones se han restringido a contenidos y niveles educativos específicos. El presente trabajo se inscribe en esta línea de investigación, por ello reseñaremos algunos de ellos, ya que sus objetivos son muy similares a los nuestros.

Pino y Blanco (2008) estudian cómo reflejan los libros de texto las propuestas curriculares sobre la RP, centrándose en los contenidos de proporcionalidad y analizando ocho libros de texto de amplia difusión en España y Chile. Herdeiro (2010) examina el papel de la RP en los manuales escolares del último año de escolaridad obligatoria de Portugal. Trabaja tres temas distintos: Probabilidad y Estadística, Proporcionalidad inversa y Trigonometría del triángulo rectángulo, y escoge dos libros de texto, uno de ellos es el más usado en las escuelas del Algarve y el otro es el que usa la profesora en sus clases. Por último, Serrano (2012) analiza el papel de la RP en los textos de álgebra lineal para ingenieros, seleccionando seis libros a los que la autora recurre con frecuencia para la elección de actividades de aula.

METODOLOGÍA

Preguntas y objetivos de investigación

Deseamos acercarnos al tratamiento que dan los libros de texto a la RP en el tercer curso de la ESO en relación con los contenidos de geometría plana. Con la intención de guiar el planteamiento y diseño de este trabajo, surgen una serie de interrogantes: ¿Qué lugar ocupa la RP en los libros de texto de tercero de ESO en el ámbito de la geometría plana? ¿Qué tipo de problemas contienen? ¿Qué características presentan los problemas propuestos?

El principal objetivo de este trabajo es analizar el papel de la RP en el libro de texto de matemáticas de 3º ESO, más vendido en España, en el ámbito de la geometría plana. Concretamos este objetivo principal en los siguientes objetivos específicos:

- Caracterizar los problemas del libro atendiendo al contexto, la formulación, el tipo de tarea matemática y la solución.
- Explorar la coherencia entre los planteamientos teóricos sobre RP y la tipología de problemas de geometría plana que aparecen en el texto.

Caracterización de la investigación, elección de la muestra e instrumento de análisis

La investigación se encuadra en el paradigma interpretativo (Bassey, 1999), ya que queremos comprender el papel de la RP en un libro de texto. En coherencia con ello, emplearemos una metodología cualitativa (Bisquerra, 2004) que nos permita dar sentido a la información obtenida, utilizando métodos tanto cualitativos como cuantitativos en determinadas fases de la organización, análisis e interpretación de la misma. Una de las características de la investigación cualitativa es la categorización, usada aquí con la intención de identificar los tipos y características de los problemas del libro de texto. La principal fuente de análisis en este trabajo es un libro de texto, por lo que se trata de un estudio documental ya que este documento es objeto de estudio por sí mismo. En consecuencia, el análisis documental es la investigación central en este proyecto, y no sólo una forma de completar la información obtenida por otros instrumentos.

La técnica empleada es el análisis de contenido, que según López Noguero (2002), puede considerarse como una forma particular del análisis documental. Para este autor, con esta técnica no se pretende analizar el estilo del texto, sino las ideas expresadas en él, de manera que es el significado de las palabras, temas o frases lo que se intenta cuantificar.

Hemos escogido el libro de texto (Colera, Colera, Gaztelu y Oliveira, 2011) de la editorial que más vende en España (MEC, 2012). La geometría plana ha sido elegida por ser el pilar de los demás temas de geometría y por ser la geometría en general una de las ramas de las matemáticas más atrayentes para los alumnos; la elección del tercer curso de la ESO se debe a que en ese curso la geometría se trata con cierto nivel de complejidad pero se incluyen problemas lúdicos y atractivos para los alumnos.

Las categorías que hemos considerado para el análisis son: tipos de problemas, contexto, formulación, tarea matemática y solución. Las exponemos a continuación con sus correspondientes subcategorías.

A) Tipos de problemas

En esta categoría, sobre la base de los trabajos de Borasi (1986), Abrantes (1989) y Boavida (1993), diferenciaremos entre ejercicios, problemas de aplicación, problemas de palabras, problemas para demostrar, problemas para descubrir, problemas de la vida real y problemas de la práctica matemática. Hemos añadido los problemas de aplicación para albergar problemas que no tenían cabida en el sistema de partida que tomamos. Hemos eliminado los *problemas para ecuacionar* de Abrantes (1989), ya que consideramos que son un caso particular de los *problemas de palabras,* en los que la traducción al lenguaje matemático se hace a través de una ecuación. Las *pruebas de una conjetura* de Borasi (1986) quedan incluidas en problemas de la práctica matemática y las *situaciones problemáticas* y *situaciones* de ambos autores encajan en los problemas de aplicación.

A1. Ejercicios: en los que basta reconocer o recordar un concepto específico o una definición, o aplicar un proceso algorítmico conocido para determinar la solución. Son rutinarios y no requieren de la originalidad del resolutor.

A2. Problemas de aplicación: situaciones en la que es preciso identificar un resultado relevante con cuya aplicación se puede alcanzar la solución.

A3. Problemas de palabras: enunciados en un contexto concreto que necesitan traducirse al lenguaje matemático para su resolución. Toda la información necesaria para resolverlos aparece en el enunciado y además, suele indicarse la estrategia a seguir.

A4. Problemas para demostrar: orientados a justificar la validez de cierta proposición. Para resolverlos se suele recurrir a teoremas o propiedades relacionadas con la demostración solicitada. En ellos se precisa del razonamiento deductivo.

A5. Problemas para descubrir: suelen aparecer al final de cada unidad o con el nombre de enigma o desafío. Su formulación pretende mostrar una forma atrayente, divertida o entretenida de aprender matemáticas. Para encontrar su solución se requiere lógica e ingenio.

A6. Problemas de la vida real: situaciones factibles de darse en la vida real y que precisan de la construcción de diagramas, realización de estimaciones, cálculo de medidas o elaboración de análisis y síntesis. Permiten conocer las aplicaciones de las matemáticas en el mundo real. No suelen tener una solución exacta ni única.

A7. Problemas de la práctica matemática: problemas que permiten desarrollar procesos de exploración, formulación de hipótesis y su posterior validación. En ellos se realizan conjeturas, verificaciones y argumentaciones[1].

B) Contexto

Inspirados fundamentalmente en Herdeiro (2010) y tomando algunas ideas de Serrano (2012) y Monterrubio y Ortega (2012), esta categoría incluye la contextualización en la realidad, contexto de datos proporcionados o contexto de conexión.

B1. Contextualización en la realidad: contexto de la vida real o puramente matemático. En el primer caso distinguiremos entre contexto personal (problemas relacionados con actividades cotidianas), laboral o educativo (situaciones que pueden darse en el centro escolar o algún entorno de trabajo), social (contexto relacionado con el entorno social y/o político en que se vive) y científico (problemas enmarcados en las ciencias naturales).

B2. Datos proporcionados: contexto de datos realistas (plausibles) o datos no realistas.

B3. Conexión: contexto con conexión con otras ramas de las matemáticas, con otras áreas disciplinares, con la historia de las matemáticas o sin conexión.

C) Formulación

De nuevo, sobre la base del trabajo de Herdeiro (2010), esta categoría engloba la ilustración, el número de cuestiones que presenta el problema desde el punto de vista sintáctico o semántico, las representaciones y los recursos empleados.

C1. Ilustración: ilustración decorativa (sin ninguna finalidad relacionada claramente con el problema), motivadora (posible ayuda para el alumno pero que no aporta datos numéricos ni claramente significativos), representativa (aparecen datos numéricos que se dan en el enunciado), informativa (aparecen datos numéricos que no se aportan en el enunciado) o sin ilustración.

C2. Número de cuestiones que presenta el problema desde el punto de vista sintáctico: formulación simple (una sola cuestión), formulación agrupada (más de una cuestión en la misma actividad).

C3. Número de cuestiones que presenta el problema desde el punto de vista semántico: formulación sencilla (una sola estrategia cognitiva), formulación compleja (más de una estrategia cognitiva).

C4. Información proporcionada: suficiente, insuficiente, excesiva.

C5. Representaciones empleadas: formulación exclusivamente verbal, verbal utilizando una ilustración, utilizando una tabla, una expresión algebraica, una gráfica o un diagrama.

C6. Recursos empleados: materiales manipulativos, nuevas tecnologías, ningún recurso extra.

D) Tarea matemática

Esta categoría y la relativa de los tipos de problemas pueden verse como perspectivas complementarias; en una focalizamos la finalidad para la que se elabora el problema (tipos de problemas) y en la otra los requerimientos que le exigen al estudiante para su resolución (tarea matemática). Se puede ver que en la propia definición de los tipos de problemas aparece de manera implícita la tarea matemática. No obstante, se ha decidido hacer explícita la tarea matemática en sí misma, para observar sus aspectos de una manera más clara. Es por esta razón, por la que puede apreciarse un solapamiento entre estas dos categorías. Diferenciamos entre identificación y aplicación, razonamiento elemental o complejo e investigación.

D1. Identificación y aplicación: se trata de problemas familiares, que demandan básicamente la identificación y el empleo de conceptos sencillos y la aplicación de procedimientos rutinarios tales como los algoritmos.

D2. Razonamiento elemental: son problemas con un nivel mayor de exigencia que el anterior, trascendiendo la mera repetición de algoritmos. Su resolución conlleva la necesidad de razonamiento matemático y el establecimiento de relaciones entre distintas representaciones de una misma situación, o bien la conexión entre distintos aspectos.

D3. Razonamiento complejo: se trata de problemas en los que predomina el razonamiento matemático. Pueden considerarse un paso previo a los problemas de investigación, pues aunque requieren establecer relaciones más complejas que las anteriores, suelen tener una respuesta única y exacta y no requieren de generalización, o descubrimiento de regularidades o conjeturas ni justificación de los resultados.

D4. Investigación: se trata de problemas cuya resolución requiere cierta comprensión y reflexión por parte del estudiante, creatividad tanto para identificar conceptos como para enlazar conocimientos y procesos matemáticos. Este tipo de problemas exigen investigación, descubrimiento, generalización, manipulación para descubrir regularidades o verificar conjeturas y explicación o justificación de los resultados. Puede tratarse de problemas abiertos o sin respuesta única.

E) Solución

Se ha formulado esta categoría sobre la base de lo planteado por Herdeiro (2010), distinguiendo entre repuesta cerrada o abierta, representaciones pedidas, unicidad y exactitud y toma de decisión en cuanto las soluciones.

E1. Respuesta cerrada (corta, de desarrollo, de completitud, de tipo verdadero/falso, de asociación o correspondencia o de elección múltiple), o respuesta abierta (corta, de desarrollo o cualquier tipo de respuesta cerrada con respuesta abierta de desarrollo).

E2. Representaciones pedidas: representación exclusivamente numérica o verbal, utilizando una ilustración, una tabla, un diagrama, una gráfica o una expresión algebraica.

E3. Unicidad y exactitud: solución única y exacta, solución no única ni exacta.

E4. Toma de decisión: resolución con o sin toma de decisión en cuanto a las soluciones.

Recogida y análisis de la información

Como nuestro objetivo es analizar el papel de la RP en un libro de texto, la información se ha obtenido a partir del libro de texto seleccionado, lo que nos ha permitido su obtención en el momento más adecuado y favorable (Herdeiro, 2010). Para organizar y registrar la información hemos usado Excel. La confección de tablas ha permitido resumir la información acerca de los problemas analizados, considerando la codificación de cada una de las categorías y subcategorías definidas previamente.

A lo largo de la investigación se ha simultaneado la recogida de información, con su categorización, interpretación y análisis descriptivo (Serrano, 2012). Una vez recogida y tratada la información se ha realizado un análisis descriptivo del libro. El análisis descriptivo comienza por un análisis de la estructura de las unidades temáticas en el que se explora la introducción o presentación del tema, los contenidos y las diferentes secciones en las que se insertan los problemas. A continuación, cada uno de los problemas ha sido analizado de acuerdo a las categorías y subcategorías del instrumento de análisis. Se han examinado los problemas propuestos para los alumnos y las actividades de autoevaluación.

RESULTADOS

La unidad de geometría plana se denomina *Problemas métricos en el plano*. Comienza con la sección *Para empezar…*, que contiene *"una serie de actividades motivadoras con el fin de poner en funcionamiento los conocimientos previos"* (p. 6). Después se exponen los contenidos de la unidad: ángulos en la circunferencia, semejanza de triángulos, teorema de Pitágoras y sus aplicaciones, lugares geométricos, cónicas como lugares geométricos, áreas de los polígonos y áreas de las figuras curvas. Junto a ellos se encuentran problemas resueltos y propuestos. Al final de la unidad se encuentra la sección *Ejercicios y problemas,* para que el alumno aplique lo aprendido, donde aparecen también varios ejemplos. Más adelante se encuentra la sección *Y para terminar…*, en la que aparece una lectura sobre Pitágoras, así como actividades de refuerzo de competencias básicas. Finalmente, en la sección *Autoevaluación,* hay actividades para que el alumno pueda comprobar su aprendizaje.

Tabla 1. Número de problemas por secciones

Total	Sección 1	Sección 2	Sección 3	Sección 4	Sección 5
95	2	28	57	2	6

Hay un total de 95 problemas, entre propuestos y actividades de autoevaluación, divididos en cinco secciones (las anteriormente citadas y una quinta compuesta por los problemas unidos a los contenidos; ver tabla 1). Analizaremos por separado cada una de ellas y concluiremos con un resumen conjunto de todas las secciones.

A) Sección 1: Para empezar

Al ser sólo dos problemas, su análisis no es significativo en el conjunto de la unidad. Ambos son *ejercicios* en los que basta aplicar una definición. Su *contexto* es *puramente matemático* con *datos no realistas* y uno de ellos tiene *conexión con la historia de las matemáticas*. La información se presenta en uno de los casos de forma *exclusivamente verbal* y en el otro, *verbal utilizando una ilustración*, que es *informativa*. Además, uno de los problemas requiere del uso de *materiales manipulativos* para su resolución. La tarea matemática es de *identificación y aplicación* en los dos casos. En uno de los problemas se pide una *respuesta abierta de desarrollo* que es *no única ni exacta* y *con toma de decisión*.

B) Sección 2: Al lado del texto

Consta de 28 problemas propuestos, mayoritariamente *ejercicios* (78%) y con *contexto* siempre *puramente matemático* con *datos no realistas* y básicamente *sin conexión* (96%), coexistiendo con otros (escasos), que tienen *conexión con otras ramas de las matemáticas*.

La mayoría contiene una *formulación sin ilustración* (61%) y, el resto, una *ilustración informativa*. De manera casi equilibrada la *formulación* es *simple* y *agrupada* y la mayoría son de *formulación sencilla*, proporcionándose siempre la información de manera *suficiente* (71%). En la mayor parte la información se presenta en el enunciado de forma *exclusivamente verbal* (61%). Ninguno de los problemas utiliza un *recurso extra*. La tarea matemática es mayoritariamente de *identificación y aplicación* (79%), con algunos de *razonamiento elemental* (21%).

Finalmente, la mayoría son de *respuesta cerrada corta* (93%), se pide una *representación exclusivamente numérica o verbal* (86%) y la solución es *siempre única y exacta* y *sin toma de decisión*.

C) Sección 3: Ejercicios y problemas

Consta de 57 problemas propuestos, la mayoría *ejercicios* (46%) y *problemas de aplicación* (35%) y su *contexto* suele ser *puramente matemático* (84%) *con datos no realistas* (98%) y casi todos tienen un *contexto sin conexión* (93%).

Más de la mitad tiene una formulación con *ilustración informativa* (59%), seguidos por la *formulación sin ilustración*. En la mayoría la formulación es *agrupada* (56%) y *compleja* (68%). La información proporcionada es siempre *suficiente* y se suele presentar el enunciado de forma *verbal utilizando una ilustración* (63%). Ninguno de los problemas utiliza un *recurso extra*. Las tareas matemáticas que destacan son las de *razonamiento elemental* (53%), seguidas de las de *identificación y aplicación* y las de *razonamiento complejo*. La mayoría es de *respuesta cerrada corta* (95%) y se pide una *representación exclusivamente numérica o verbal* (96%). La solución es *siempre única y exacta* y *sin toma de decisión.*

D) Sección 4: Y para terminar

Consta sólo de dos problemas, siendo poco significativa. Sin embargo, ambos tienen un contexto con *conexión*, uno de ellos con *otras ramas de las matemáticas* y el otro con *la historia de las matemáticas*. Además, en ambos, el enunciado se presenta de forma *verbal utilizando una ilustración*, que es de tipo *informativa*. La tarea matemática en ambos es de *razonamiento complejo*.

E) Sección 5: Autoevaluación

Contiene 6 problemas, lo que tampoco es significativo. Su característica principal es que todos tienen un *contexto puramente matemático*, con *datos no realistas* y *sin conexión*. El enunciado se presenta básicamente de forma *verbal utilizando una ilustración*, que es de tipo *informativa*. La tarea matemática en todos es de *identificación y aplicación* y *razonamiento elemental*.

En síntesis, en el libro estudiado encontramos una mayoría de *ejercicios* (56%), seguidos por *problemas de aplicación* (25%). En menor medida aparecen los *problemas de palabras* (16%) y prácticamente no se aprecian los *problemas para demostrar*, *para descubrir*, *de la vida real* y *de la práctica matemática*. El *contexto* suele ser *puramente matemático* (91%) y rara vez surge un *contexto de la vida real*. Los *datos proporcionados* son casi siempre *no realistas* (99%) y apenas apreciamos la *conexión con otras ramas de las matemáticas* (5%) o con la *historia de las matemáticas* (3%).

Hay un equilibrio entre la *formulación exclusivamente verbal* (42%) y la *formulación verbal utilizando una ilustración* (58%), que suele ser en este caso de tipo *informativa* (56%). Destaca la formulación *agrupada* (57%) y *compleja* (56%) y la *información proporcionada* es siempre *suficiente*. Además, sólo hay un problema en el que se utilizan *materiales manipulativos*.

La tarea matemática subyacente que prevalece es la de *identificación y aplicación* (46%), seguida de cerca por el *razonamiento elemental* (43%). El *razonamiento complejo* rara vez aparece, mientras que la tarea de *investigación* no se da nunca. En cuanto a la solución, predomina la *respuesta cerrada corta* (92%) y la *representación exclusivamente numérica y verbal* (94%). Sólo encontramos un problema en todo el libro con *respuesta no única ni exacta* y *con toma de decisión*.

CONCLUSIONES

Podemos concluir que no se promueve la RP en este libro de texto como eje central del aprendizaje, ya que en nuestro análisis observamos que la mayoría de los problemas propuestos son *ejercicios*, seguidos por *problemas de aplicación*. Llama la atención que el currículo de matemáticas de Educación Secundaria apueste por una enseñanza basada en la RP, que la investigación la contemple como parte integral de las matemáticas, pero que sin embargo, la principal herramienta de trabajo en el aula, no sea coherente con estas ideas, y que sólo aparezcan problemas en los que se pone en marcha la lógica, el ingenio o problemas cercanos a la vida real en lugares puntuales de la unidad. Así, las matemáticas se convierten en una herramienta de cálculo, basadas en el aprendizaje de fórmulas que se olvidan fácilmente y que sólo ayudan a resolver ejercicios. Pese a ser la RP un contenido transversal en el currículo de matemáticas de Educación Secundaria, los tipos de problemas analizados están más orientados hacia la repetición e invitan a los profesores a la aplicación directa de la teoría.

Los problemas recaen generalmente en un *contexto de datos no realistas*, lo que dificulta la vinculación de los problemas con la realidad de los alumnos. Encontramos también aquí poca coherencia con el currículo citado, ya que éste señala que los problemas de matemáticas deben estar vinculados a aspectos cotidianos y suponer una motivación con datos lo más realistas posible.

La sección 4 (con solo dos problemas) es en la que se localizan problemas en los que se da a los estudiantes la oportunidad de investigar o descubrir. La tarea matemática subyacente en los dos problemas de esta sección es el *razonamiento complejo*, lo que supone que los alumnos sólo trabajan tareas de complejidad cognitiva más elevada en esta sección (aunque la *investigación* ni siquiera llega a aparecer en este libro). En el caso de que esta sección no existiera, no se enfrentarían a casi ningún problema de estas características, por ser las tareas *de identificación y aplicación* y *razonamiento elemental* las que prevalecen. En general, el libro de texto no refleja los planteamientos teóricos que emanan de la investigación o el currículo de matemáticas de Educación Secundaria. Por este motivo, los profesores han de ser conscientes de las limitaciones de los textos escolares y actuar de forma crítica a la hora de usarlo en sus clases.

En términos de prospectiva, sería interesante aumentar el número de casos de estudio y ampliar el estudio a otras unidades, así como a otros años de escolaridad. Por otra parte, tal y como afirma Herdeiro (2010), sería interesante estudiar la visión que tienen los profesores sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a través de la RP usando los libros de texto.

Referencias

Abrantes, P. (1989). Um (bom) Problema (nao) é (só)…*Educaçao e Matemática*, 8, 7-10.

Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Buckingham: Open University Press.

Bisquerra, R. (Coord.) (2004). *Metodología de la investigación educativa*. Madrid: La Muralla.

Boavida, A.M. (1993). *Resoluçao de problemas em educaçao matemática*. Master´s thesis. Universidade Nova de Lisboa.

Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics*, *17*(2), 125-141.

Cai, J. y Lester, F. (2010). *Why is teaching with problem solving important to student learning?* Research Brief. Reston, VA: NCTM.

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de investigación y relaciones*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). *Determining specialised knowledge for mathematics teaching*. ERME 8: Antalya, Turquía.

Charles, R. y Lester, F. (1982). *Teaching Problem Solving: What, why and how*. Palo Alto: Dale Seymour Publications.

Colera, J., Colera, L., Gaztelu, I. y Oliveira, M.J. (2011). *Matemáticas 3 Educación Secundaria*. Madrid: Anaya.

Contreras, L.C. y Carrillo J. (2000). El amplio campo de la resolución de problemas. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), *Resolución de problemas en los albores del siglo XXI: una visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles educativos* (pp. 13-37). Huelva: Hergué.

García, M.A. y Guillén, G. (2008). Diseño de un estudio para el análisis de libros de texto de la Enseñanza Secundaria Obligatoria en la Comunidad Valenciana. El caso de la geometría. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L.J. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de trabajo. XII Simposio de la SEIEM.* Badajoz: SEIEM.

González, M.T. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias, 22*(3), 389-408.

Herdeiro, C. (2010). *A resoluçao de problemas nos manuais escolares de matemática do 9º ano de escolaridade*. Tesis Doctoral. Universidad de Huelva.

Hirsch, C.R. y Reys, B.J. (2009). Mathematics curriculum: a vehicle for school improvement. *ZDM Mathematics Education, 41*, 749-761.

Jaime, A., Chapa, F. y Gutiérrez, A. (1992). Definiciones de triángulos y cuadriláteros: errores e inconsistencias en libros de texto de E.G.B. *Epsilon, 23,*49-62.

Krulik, S. y Rudnik, K. (1980). *Problem solving in school mathematics*. *Year Book*. Reston, VA: NCTM.

López Noguero, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *Revista de Educación*, *4*, 167-179.

MEC (2012). *Panorámica de la Edición Española de Libros 2011*. Madrid: MEC.

Monterrubio, M.C. y Ortega, T. (2009). Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 37-53). Santander: SEIEM.

Monterrubio, M.C. y Ortega, T. (2012). Creación y aplicación de un modelo de valoración de textos escolares matemáticos en Educación Secundaria. *Revista de Educación, 358*, 471-496.

Pino, J.A. (2012). *Concepciones y prácticas de los estudiantes de Pedagogía Media en Matemáticas con respecto a la Resolución de Problemas y, diseño e implementación de un curso para enseñar a resolver problemas*. Tesis Doctoral. Universidad de Extremadura.

Pino, J. y Blanco, L.J. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad en España y Chile, en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones*, 38, 63-88.

Pólya, G. (1962). *Mathematical discovery*. *On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving*. Nueva York: John Wiley & Sons.

Pólya, G. (1985). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Nueva York: Academic Press.

Serrano, I. (2012). *Análisis de los problemas de libros de texto de Álgebra Lineal*. Trabajo Fin de Máster. Universidad de Huelva.

[1] Usamos la expresión Práctica Matemática en el mismo sentido que lo hacen Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2013), refiriéndose, en ese caso, a un subdominio del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

TRATAMIENTO DE LA PROPORCIONALIDAD COMPUESTA EN CUATRO LIBROS DE TEXTO ESPAÑOLES[1]

The treatment of compound proportionality in four Spanish textbooks

Sergio Martínez[a], José María Muñoz[a], Antonio M. Oller[b]

[a]Universidad de Zaragoza, [b]Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza

Resumen

En este trabajo abordamos el estudio del tratamiento recibido por la proporcionalidad compuesta en cuatro libros de texto españoles de 2º curso de E.S.O. En particular pretendemos observar el modo en que se caracteriza la proporcionalidad compuesta entre magnitudes, así como la tipología de problemas propuestos y los métodos presentados y utilizados por los autores para resolverlos. Entre otros resultados señalaremos una relativa despreocupación en cuanto a la caracterización de la proporcionalidad compuesta, la ausencia de problemas de comparación y el escaso número de problemas de tipo Inversa-Inversa. Además, se observa una cierta heterogeneidad en los métodos de resolución presentados.

Palabras clave: *proporcionalidad compuesta, libros de texto, secundaria.*

Abstract

In this work we approach the study of the treatment of compound proportionality in four grade 8 Spanish textbooks. In particular we want to observe how compound proportionality between magnitudes is characterized as well as the typology of the proposed problems and the methods used by the author to solve them. Among other results we point out a relative disregard with respect to the characterization of compound proportionality, the lack of comparison problems and the small number of Inverse-Inverse type problems. Moreover, we observe certain heterogeneity regarding the solving methods.

Keywords: *compound proportionality, textbooks, secondary.*

INTRODUCCIÓN

El manejo y la comprensión de situaciones relacionadas con la proporcionalidad constituye seguramente uno de los tópicos matemáticos más importantes en la formación del alumnado de Secundaria. De hecho, este tema está presente en los currículos oficiales de Educación Primaria y Secundaria de muchos países y tradicionalmente ha supuesto la culminación de la formación aritmética de los estudiantes.

Por ejemplo, el número racional como razón y la proporcionalidad aritmética es uno de los 13 estándares propuestos por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos (NCTM) en 1989 para los cursos correspondientes a 6º de Educación Primaria y 1º y 2º de Secundaria Obligatoria (de 11 a 14 años).

No obstante, estudios recientes, como por ejemplo TIMSS 2011, así como diversos trabajos de investigación (Valverde y Castro, 2009; Fernández y Llinares, 2012; Sánchez, 2013) ilustran las serias dificultades que encuentran estudiantes de distintos niveles educativos (desde la Educación Primaria hasta la Diplomatura de Maestro) al afrontar situaciones de proporcionalidad.

Dentro de las posibles aplicaciones prácticas de la proporcionalidad es común encontrar situaciones en los que intervienen tres o más magnitudes proporcionales dos a dos. Se trata de la llamada proporcionalidad compuesta.

Martínez, S., Muñoz, J. M., Oller, A. (2014). Tratamiento de la proporcionalidad compuesta en cuatro libros de texto españoles. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 435-444). Salamanca: SEIEM.

13 Un ganadero necesita 600 kg de pienso para alimentar a 40 vacas durante 8 días. ¿Cuántos días podrá alimentar a 20 vacas con 1 500 kg de pienso?

Figura 1. Un problema típico de proporcionalidad compuesta (Arias y Maza, 2012, p. 90).

Aunque el currículo oficial español no menciona expresamente la proporcionalidad compuesta, sí aparecen recogidas en él las relaciones de proporcionalidad directa e inversa entre magnitudes y la aplicación de la proporcionalidad en la resolución de problemas. Además de por su importancia en la resolución de problemas, su inclusión en los temarios también se justifica por su aplicación al cálculo del interés simple. Además, una revisión de textos (Oller, 2012, pp. 79-82) muestra que la proporcionalidad compuesta sigue recibiendo tratamiento específico en un buen número de libros de texto. Estos hechos justifican que el principal foco de interés se sitúe sobre el tratamiento recibido por la proporcionalidad compuesta en libros de texto de Secundaria españoles utilizados en la actualidad.

MARCO TEÓRICO

Proporcionalidad compuesta entre magnitudes

González y Gómez (2011, p. 395) caracterizan la proporcionalidad compuesta entre magnitudes dentro del ámbito de la aritmética del siguiente modo: "se establece una proporcionalidad compuesta entre magnitudes cuando dos o más magnitudes están, cada una de ellas, relacionadas mediante una proporcionalidad con otra magnitud".

En el trabajo de Bosch (1994, p. 254) se estudia la proporcionalidad desde un punto de vista funcional y se define un "sistema proporcional y compuesto" como aquel que puede definirse mediante $n+1$ variables X_1, $X_2,\ldots$, X_n, X de forma que las n primeras (que llamaremos variables independientes) determinan completamente el estado del sistema y la última (que llamaremos variable dependiente) puede expresarse a partir de las anteriores mediante la relación

$$f\,(X_1, X_2,\ldots, X_n) = X$$

siendo f una función homogénea del tipo:

$$X = f\,(X_1, X_2,\ldots, X_n) = k\,(X_1{\cdot}X_2{\cdots}X_m) \,/\, (X_{m+1}{\cdot}X_{m+2}{\cdots}X_n).$$

Donde k es la llamada constante de proporcionalidad.

Clasificación de problemas de proporcionalidad compuesta

En Fernández (2009) se recogen diversas tipologías de problemas de proporcionalidad simple directa. En algunos casos (Singer y Resnick, 1992) se atiende a contextos (velocidad, escala, mezcla y densidad) o a estructuras "parte-todo", "parte-parte". En otros, como en Lamon (1993), se atiende a características semánticas. Sin embargo, Cramer y Post (1993) se centran más bien en la tarea que debe afrontar el alumno, proponiendo una clasificación que se puede exportar fácilmente al caso de la proporcionalidad compuesta. En concreto, estos autores diferencian los siguientes tipos de problemas de proporcionalidad simple directa:

- Problemas de valor perdido: Se conocen tres datos de una proporción y se desea calcular el cuarto valor desconocido. Por ejemplo: Abriendo un grifo 4 horas conseguimos echar 560 l de agua en una piscina. ¿Cuánta agua echaremos abriendo ese mismo grifo durante 6 horas?
- Problemas de comparación numérica: Se conocen (o pueden calcularse) dos razones que se pretenden comparar. Por ejemplo: Trabajando 4 horas, Juan pinta 25 metros cuadrados. Por su parte Luis 5 horas, pinta 30 metros cuadrados en 5 horas. ¿Quién trabaja más rápido?
- Problemas de comparación y predicción cualitativas: Requieren comparaciones que no dependen de forma específica de valores numéricos. Por ejemplo: En la clase de 1º B hay

más alumnos que en la de 1º D. Por otro lado, la clase de 1ºD es más pequeña que la de 1ºB. ¿En cuál de las dos clases los alumnos están más apretados?

Usando el enfoque de Bosch (1994) presentamos una forma de definir y clasificar los problemas de valor perdido y de comparación en situaciones de proporcionalidad compuesta.

Los problemas de valor perdido se enunciarían del siguiente modo: Dada una tupla de valores conocidos para todas las variables ($a_1,\ldots, a_n, a$) y otra tupla ($b_1,\ldots, b_n, x$) donde x, valor de la variable dependiente, es desconocido y ($b_1,\ldots, b_n$), valores de las variables independientes, son conocidos; se trata de calcular el valor numérico x. De esta forma, una vez fijado el número de magnitudes, esta caracterización nos permite clasificar los problemas de valor perdido atendiendo a la relación entre cada una de las variables independientes y la variable dependiente. Si nos restringimos a los casos en los que intervienen únicamente tres magnitudes las situaciones posibles que aparecen son de tipo directa-directa ($X=k\cdot X_1\cdot X_2$), de tipo directa-inversa ($X=k\cdot X_1/X_2$) y de tipo inversa-inversa ($X=k / X_1\cdot X_2$).

Por su parte, a diferencia de los problemas de valor perdido, en los problemas de comparación el cociente

$$C(X_1, X_2,\ldots, X_n, X) = X \cdot (X_{m+1}\cdot X_{m+2}\cdots X_n) / (X_1\cdot X_2\cdots X_m)$$

no es constante. Se trata entonces de comparar su valor para dos tuplas diferentes de valores de todas las variables (de forma cuantitativa en los problemas de comparación numérica o de forma cualitativa si no se explicitan los valores de las magnitudes en los problemas de comparación y predicción cualitativa). En otras palabras, dadas dos tuplas completas de valores ($a_1,\ldots, a_n, a$) y ($b_1,\ldots, b_n, b$) para las magnitudes, hay que comparar el valor que toma C en cada caso. Al no tener X una posición privilegiada y ser equivalentes las situaciones para los cocientes C y C^{-1}, la tipología de problemas se reduce. Así, la clasificación de los problemas de comparación en proporcionalidad para tres magnitudes sería tipo directa-directa y directa-inversa cuando $C(X_1,X_2,X_3)=X_1/(X_2\cdot X_3)$ y de tipo inversa-inversa cuando $C(X_1,X_2,X_3)=X_1\cdot X_2\cdot X_3$

Resolución de problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta

Uno de nuestros propósitos es el estudio de las técnicas de resolución de problemas de proporcionalidad compuesta presentes en los libros de texto. Existen numerosos estudios que analizan y clasifican diferentes estrategias y técnicas de resolución empleadas por alumnos para resolver problemas de proporcionalidad simple directa. Así, Cramer y Post (1993) señalan cuatro estrategias empleadas por estudiantes que resuelven correctamente problemas de valor perdido y de comparación numérica: la estrategia del *algoritmo de productos cruzados*, la de la *razón unitaria*, la del *factor de cambio*, la de la *fracción*.

Por otro lado, en algunos de estos trabajos también se describen y analizan posibles estrategias y métodos de resolución de problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple que, posteriormente se extienden o adaptan al caso de la proporcionalidad compuesta.

Bosch (1994, p. 252b), en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico presenta distintos tratamientos de la proporcionalidad simple directa desde el punto de las técnicas. En concreto describe el *método de reducción a la unidad*, la *modelización proporcional clásica*, la *modelización algebroide*, la *modelización funcional* (analítica y sintética) y la *modelización geométrica*. De entre estos tratamientos (Bosch, 1994, pp. 254-340) muestra con ejemplos concretos cómo el de reducción a la unidad y la técnica de la proporcional clásica se extienden al caso de la proporcionalidad compuesta (aunque argumentando su fragilidad tecnológica). Además describe la posibilidad de reducir una situación compuesta a una simple que posteriormente denomina *amalgamación de variables*. Finalmente, mediante un estudio de campo, se ilustran las potencialidades de la modelización funcional aplicada al caso de la proporcionalidad compuesta.

Oller (2012, pp. 76-89), fruto de un análisis de textos, describe técnicas de resolución para problemas de valor perdido en proporcionalidad simple encontradas en los textos estudiados y realiza un estudio similar para la proporcionalidad compuesta. En concreto se encuentran en los textos tres posibles técnicas de resolución de problemas de valor perdido para proporcionalidad compuesta: *regla de tres compuesta tradicional*, *por proporciones* y *paso a paso*.

El análisis de libros de texto

El impacto de los libros de texto sobre la práctica docente efectiva ha sido puesto de manifiesto desde hace tiempo por numerosos investigadores. Así, Schubring (1987, p. 41) considera que "la práctica docente no está tan determinada por los decretos ministeriales como lo está por los libros utilizados para la enseñanza" mientras que, según González y Sierra (2004, p. 389) "la utilización del libro de texto en el aula […] ha determinado una práctica escolar determinada por su uso". En la misma línea Monterrubio y Ortega (2009, p. 38) afirman que "el libro de texto es un recurso habitual en el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje, hasta el punto de que, en muchas ocasiones, es el propio manual el que determina el currículo real". Finalmente, Rodríguez (2006), considera que el texto es la principal herramienta de instrucción y llega a utilizarse como currículo.

Esta necesidad de analizar los textos y manuales escolares se refleja en la existencia de múltiples estudios analizando el tratamiento de diversos tópicos matemáticos en libros de texto de distintas épocas y proponiendo herramientas metodológicas que permitan llevar a cabo dichos análisis (Maz, 2000; González y Sierra, 2004; Picado y Rico, 2009; Ruiz de Gauna et al., 2013).

Para Van Dormolen (1986) el análisis de texto puede hacerse a priori o a posteriori, en función de si el estudio pretende evaluar el texto como herramienta didáctica sin tener en cuenta la instrucción llevada a cabo con él (a priori) o comparar su propuesta curricular con los resultados de aprendizaje obtenidos (a posteriori). Zapico (2006) analiza la disyuntiva entre el análisis de contenido y el análisis del discurso, planteando la conveniencia de uno u otro método según el tipo de estudio que quiera llevarse a cabo. Las principales características del análisis de contenido son, su corte deductivo, la sistematización y la combinación de métodos cualitativos y cuantitativos, frente al corte inductivo y la metodología cualitativa del análisis del discurso. Sus propiedades hacen que el análisis de contenido sea uno de los métodos de investigación en textos escolares más empleados.

El análisis de contenido es un conjunto de instrumentos metodológicos aplicados a discursos (Bardin, 1986). Para Krippendorff (1990, p.28) el análisis de contenido como técnica de investigación debe "formular inferencias reproducibles y válidas que puedan aplicarse a su contexto". Rico y Fernández-Cano (2013, p. 14) estructuran el análisis de contenido en las siguientes etapas:

- Delimitar el corpus de contenido a analizar.
- Concretar la unidad de análisis.
- Localizar en el texto las unidades de análisis.
- Denominar, definir e interpretar las categorías.
- Codificar y cuantificar las unidades de análisis adscritas al sistema de categorías (procedimiento deductivo) o inferir tal sistema de categorías sobre las unidades de análisis (procedimiento inductivo).
- Relacionar e interpretar las categorías.
- Relacionar el proceso de análisis de contenido con la cuestión que se indaga y con los agentes intervinientes.

OBJETIVOS Y MÉTODO

El objetivo principal de este trabajo consiste en estudiar el tratamiento recibido por la proporcionalidad compuesta en cuatro libros de texto españoles de 2º curso de E.S.O. En concreto, los libros seleccionados han sido los siguientes:

- Esfera 2 (Vizmanos, Anzola, Bujanda y Mansilla, 2009) de la editorial S.M.
- Matemáticas 2º de la ESO (García, 2007) de la editorial Editex.
- Matemáticas ESO 2, vol. 1 (Arias y Maza, 2012) de la editorial Bruño.
- Matemáticas 2, vol. 2 (Cólera y Gaztelu, 2012) de la editorial Anaya.

Se trata en todos los casos de textos recientes y pertenecientes a editoriales de prestigio y ampliamente implantadas en el territorio español.

El objetivo principal se puede descomponer en varios objetivos específicos más concretos:

- Objetivo 1: Estudiar el modo en que se caracteriza la proporcionalidad compuesta entre magnitudes en los textos analizados.
- Objetivo 2: Describir los métodos y técnicas presentados por los autores de los textos para resolver problemas de proporcionalidad compuesta.
- Objetivo 3: Analizar la tipología de problemas de proporcionalidad compuesta que aparecen en los textos objeto de estudio.

Para la consecución de dichos objetivos realizamos un análisis a priori (Van Dormolen, 1986) del contenido relativo a la proporcionalidad compuesta de los cuatro libros de texto seleccionados. El método utilizado para el análisis del contenido sigue las etapas de Rico y Fernández-Cano (2013) que hemos esquematizado en la sección anterior. Esta secuenciación favorece la reproducibilidad del estudio, mientras que la validez y fiabilidad internas se mejoran con la presencia de tres investigadores que actúan sobre los mismos registros observacionales (Goetz y Lecompte, 1988).

Para localizar las unidades de análisis en el texto nos basamos en el trabajo de Gairín y Muñoz (2005). En su estudio sobre la práctica educativa propuesta en unos libros de texto, Gairín y Muñoz establecen dos categorías para clasificar las distintas actuaciones propuestas por los textos: *práctica docente* y *práctica discente*. Como práctica docente se clasifican aquellas actuaciones que, según el texto, se corresponderían al trabajo realizado por el profesor y que a su vez se distinguen en *Discursos* (son párrafos y/o dibujos que ofrecen explicaciones del contenido matemático y cuyo propósito es introducir, definir y explicar los conceptos que se pretende que el alumno aprenda) y en *Ejemplos y ejercicios resueltos* (aquellas actividades que aparecen resueltas por los autores del texto en cada tema). Como práctica discente se clasificaran aquellas actuaciones que, según el texto, se corresponderían con el trabajo que debe desempeñar el alumno y en la que se clasificarían todas las actividades, ejercicios y problemas sin resolver que están propuestos en el texto.

Respecto al objetivo 1 anterior, por su concreción y dado el tamaño de la muestra, podremos describir completa y exactamente la caracterización de la proporcionalidad compuesta que aparece en cada uno de los textos.

En cuanto al objetivo 2, hemos diseñado una tipología de los métodos de resolución de problemas de valor perdido presentados por los autores basada en una combinación de los estudios de Bosch (1994), Cramer y Post (1993) y Oller (2012). En particular distinguiremos 4 posibles métodos:

- M1: Aplicación directa de una fórmula. Consiste en la utilización directa, mecánica y descontextualizada de una fórmula.

- M2: Proporciones. Se plantea una proporción (igualdad de razones) a partir de los datos del problema y se obtiene el valor desconocido a partir de propiedades de las proporciones.
- M3: Amalgamación de magnitudes. Consiste en la reformulación, mediante la manipulación adecuada de las magnitudes implicadas, de un problema de proporcionalidad compuesta en uno de proporcionalidad simple.
- M4: Paso a paso. Se reduce el problema a una sucesión de problemas de valor perdido de proporcionalidad simple en los que se fijan todas las cantidades menos dos. Distinguimos dos posibilidades:

  M4.1: Reducción a la unidad. Tras los primeros pasos se obtiene la cantidad de una de las magnitudes que se corresponde con una unidad de todas las demás y, a partir de allí, se continúa hasta obtener el valor buscado.

  M4.2: Paso a paso sin pasar por la unidad. Se procede como en el caso anterior pero sin obtener el valor de una magnitud correspondiente con una unidad de las demás.

Tanto el método M3 como el método M4 implican la resolución de uno (en el caso de M3) o varios (en el caso M4) problemas de valor perdido en proporcionalidad simple. Por tanto tiene sentido observar el método utilizado para resolver dichos “subproblemas”. A este respecto distinguimos cuatro posibilidades: razón unitaria, factor de cambio, proporciones y regla de tres.

Por último, en lo referente al objetivo 3, introducimos dos categorías para nuestro análisis. En concreto:

- Tipo de problema según la clasificación de Cramer y Post (1993).

  VP: Problema de valor perdido.

  CN: Problema de comparación numérica.

  CC: Problema de comparación y predicción cualitativa.

- Tipo de problema según su estructura funcional conforme a la tipología presentada en el apartado anterior. Como veremos en los resultados, no han aparecido en el estudio problemas CC ni CN y dentro de los problemas VP aquellos en los que aparecen más de tres magnitudes son anecdóticos. Por lo que prestamos especial atención a los problemas VP con tres magnitudes. La clasificación según su estructura funcional es:

  Problema tipo Directa-Directa con estructura $X=k\cdot X_1\cdot X_2$.

  Problema tipo Directa-Inversa con estructura $X=k\cdot X_1/X_2$.

  Problema tipo Inversa-Inversa con estructura $X=k / X_1\cdot X_2$.

ANÁLISIS DE LOS TEXTOS

En esta sección presentamos los resultados del análisis que se ha llevado a cabo para cada uno de los textos seleccionados.

Esfera 2 (Vizmanos et al., 2009)

El tema dedicado a las magnitudes proporcionales (el séptimo de un total de catorce) aparece en el bloque titulado “Álgebra, funciones y estadística”. Este tema se presenta después de haber trabajado el lenguaje algebraico y antes de introducir el concepto de función.

Práctica docente

En la práctica docente de este texto no aparece mención alguna a la proporcionalidad compuesta.

Práctica discente

Encontramos que 6 de los 87 ejercicios y problemas propuestos a los alumnos resultan ser problemas VP involucrando proporcionalidad compuesta. En concreto, aparecen 4 problemas de tres magnitudes (3 de tipo Directa-Directa, 1 de tipo Inversa-Inversa) y 2 de 4 magnitudes (ambos de tipo Directa-Directa-Directa).

Matemáticas 2º de la ESO (García, 2007)

En este texto el tema dedicado a la proporcionalidad y problemas aritméticos ocupa el cuarto lugar de un total de doce. Se presenta antes de la introducción del lenguaje algebraico. De los doce epígrafes en los que se estructura el tema, la proporcionalidad compuesta aparece en quinto lugar, ocupando una de las catorce páginas que los autores dedican al discurso.

Práctica docente

La proporcionalidad compuesta entre magnitudes se define en el discurso del siguiente modo: “Decimos que existe proporcionalidad compuesta cuando intervienen más de dos magnitudes” (p. 68).

Tras esta caracterización se desarrolla un ejemplo de tipo Directa-Directa que se resuelve mediante el método M4.1 razonando en cada paso mediante factor de cambio. Sin embargo, en el discurso, se reformula la solución en términos de M1. De hecho, en el margen izquierdo se presenta una fórmula abstracta utilizando lenguaje simbólico.

Finalmente, en un epígrafe titulado “Actividades resueltas”, aparece nuevamente un problema VP con tres magnitudes de tipo Directa-Directa. En este caso los autores se inclinan directamente por una aplicación de M1 sin ningún tipo de razonamiento asociado.

Práctica discente

En el tema se proponen al alumno un total de 111 actividades. De ellas únicamente 10 involucran situaciones de proporcionalidad compuesta. Todas ellas son problemas VP de tres magnitudes. Nueve son de tipo Directa-Directa y uno es de tipo Directa-Inversa. Sólo tres de estos 10 problemas se presentan sin ningún tipo de indicación sobre su tipología. El resto siempre aparecen bajo un título que indica que se trata de problemas de proporcionalidad compuesta.

Matemáticas ESO 2 (Arias y Maza, 2012)

El tema que se dedica a la proporcionalidad es el quinto de un total de catorce. Se presenta dentro del bloque “Números y medidas” previo al dedicado al álgebra. De los cuatro epígrafes del tema, la proporcionalidad compuesta ocupa el último lugar. Aunque se dedican dos páginas al discurso en este epígrafe, de las ocho del tema, solo una de ellas se preocupa de la proporcionalidad compuesta en general ya que la segunda desarrolla situaciones de interés compuesto.

Práctica docente

El texto define la proporcionalidad compuesta del siguiente modo: “Una proporcionalidad es compuesta si intervienen más de dos magnitudes proporcionales” (p. 90).

Se introduce el discurso mediante un problema VP de tres magnitudes de tipo Directa-Inversa, en el que se pide al alumno que identifique la relación entre las magnitudes que aparecen (no que lo resuelva). Tras ello, se resuelve mediante el método M2. Antes de plantear la proporción se indica al alumno que debe identificar las magnitudes, disponerlas en horizontal y colocar los datos correspondientes bajo ellas reservando el último lugar para el dato incógnita. Después, debe reconocer la relación de proporcionalidad que liga cada magnitud con la magnitud incógnita.

En el tema aparecen otros dos problemas resueltos VP con tres magnitudes, también de tipo Directa-Inversa. El primero en un apartado titulado “Ejercicios y problemas resueltos”. El segundo aparece como ejemplo de resolución con el apoyo de una calculadora simbólica en el ordenador.

Práctica discente

De las 112 actividades que se planean al alumno en el tema, 15 corresponden a situaciones de proporcionalidad compuesta. Todas son problemas VP de tres magnitudes. En concreto, aparecen 4 problemas de tipo Directa-Directa, 6 de tipo Directa-Inversa y 5 de tipo Inversa-Inversa. Salvo un problema que aparece en la sección dedicada a resolver problemas con ayuda del ordenador, los demás aparecen bien dentro del epígrafe correspondiente a la proporcionalidad compuesta, bien tras una frase que indica que se trata de problemas de este tipo.

Matemáticas 2 (Cólera y Gaztelu, 2012)

El tratamiento de la proporcionalidad ocupa el cuarto tema del texto de un total de 12. Aparece antes del tema dedicado al álgebra y después de los dedicados a los diferentes tipos de números. El tema se estructura en siete epígrafes de los que la proporcionalidad compuesta ocupa el cuarto lugar. El discurso se desarrolla en dos páginas de las 15 dedicadas al desarrollo teórico del tema.

Práctica docente

Se define la proporcionalidad compuesta del siguiente modo: “Llamamos proporcionalidad compuesta a aquellas situaciones en las que intervienen más de dos magnitudes ligadas por la relación de proporcionalidad” (p. 96).

No hay ninguna actividad inicial para introducir el tema. Después de la definición se desarrollan dos ejercicios resueltos. El primero es de tipo Directa-Directa y el segundo de tipo Directa-Inversa. En ambos ejercicios resueltos se sigue el mismo esquema: Identificar las magnitudes, disponer en forma de columna los datos bajo cada magnitud reservando el último lugar para la incógnita, e identificar la relación de proporcionalidad que une cada una de las magnitudes con la magnitud incógnita. Tras ello, se realiza el método M4.1 manteniendo la estructura tabular en los diferentes pasos y obteniendo las cantidades en cada paso mediante factor de cambio. Al terminar M4.1 y bajo el título “Automatiza el proceso” se vuelve a realizar el problema mediante el método M2.

Práctica discente

De las 133 actividades planteadas en el tema, solo 9 corresponden a situaciones de proporcionalidad compuesta. Todas las actividades relacionadas con la proporcionalidad compuesta son problemas de tipo VP de 3 magnitudes. En dos de las actividades hay varios apartados en donde, a partir de una misma situación, se piden cantidades de diferentes magnitudes, por lo que el total de problemas VP es de 13. En concreto, aparecen 5 problemas de tipo Directa-Directa, 6 de tipo Directa-Inversa y 2 de tipo Inversa-Inversa. Todos aparecen dentro del epígrafe correspondiente a la proporcionalidad compuesta, o tras una frase en la que se indica que los problemas pertenecen a ese ámbito concreto.

CONCLUSIONES

En los textos estudiados se observa un escaso interés por la adecuada caracterización de la proporcionalidad compuesta, reflejado en el escaso espacio dedicado a ello en el discurso. Incluso en un caso (García, 2007) encontramos una caracterización, cuando menos, ambigua (utilizando terminología de Fernández, Caballero y Fernández (2013)).

En cuanto a los métodos de resolución observados en la práctica docente, encontramos gran heterogeneidad. Se aprecia que la práctica docente está claramente orientada a la automatización. Esto se observa especialmente en casos en los que una explicación basada en el método M4, uno de los que supone una mayor comprensión de la situación, termina por desembocar en la presentación esquemática de los métodos M1 o M2, que son más mecánicos. A este respecto es interesante señalar la inexistente justificación de la validez del método M2 (en especial, de los motivos por los que hay que realizar un producto de razones). El método M3 no aparece en ninguno de los textos.

Respecto a la tipología de problemas, no aparece en los textos analizados ningún problema de comparación. Además, se observa una escasa cantidad relativa de problemas de proporcionalidad compuesta y sólo en un texto se han encontrado problemas con cuatro magnitudes.

Tabla 1: Número de problemas VP con 3 magnitudes según su estructura propuestos en la práctica discente.

	Directa-Directa	Directa-Inversa	Inversa-Inversa
(Vizmanos et al., 2009)	3	0	1
(García, 2007)	9	1	0
(Arias y Maza, 2012)	4	6	5
(Cólera y Gaztelu, 2012)	5	6	2
TOTAL	21	13	8

En la tabla 1 se observa el claro predominio de los problemas de tipo Directa-Directa (la mitad del total; mientras que, globalmente, se proponen pocos problemas de tipo Inversa-Inversa (menos de un 20% del total). Además, no se presenta ningún problema de este último tipo en la práctica docente de ninguno de los textos analizados.

Se aprecia una cierta inconsistencia entre la práctica docente y la discente en cuanto a la tipología de problemas. Esta inconsistencia es especialmente clara en dos casos. En el primero, García (2007, p. 68), se indica a los alumnos explícitamente que “este año sólo estudiamos el caso en el que las magnitudes se encuentran ligadas de manera directa” pero posteriormente se les propone un problema de tipo Directa-Inversa. En el segundo, Vizmanos et al. (2009), la proporcionalidad compuesta está totalmente ausente en la práctica docente pero se proponen a los alumnos 6 problemas VP de proporcionalidad compuesta.

Referencias

Arias, J.M y Maza, I. (2012). *Matemáticas ESO 2*. Madrid: Bruño.

Bardin, L. (1986). *El análisis de contenido*. Madrid: Akal.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática: El caso de la proporcionalidad*. Tesis Doctoral, Universitat Autónoma de Barcelona.

Cólera, J y Gaztelu, I. (2012). *Matemáticas 2 Educación Secundaria*. Madrid: Anaya.

Cramer, K. y Post, T. (1993). Connecting Research to Teaching Proportional Reasoning. *Mathematics Teacher, 86*(5), 404-407.

Fernández, A. (2009). *Razón y proporción: Un estudio en la escuela primaria*. Valencia: Publicacions de la Universitat de València.

Fernández, C. y Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(1), 129-142.

Fernández Palop, P., Caballero García, P. y Fernández Bravo, J.A. (2013). ¿Yerra el niño o yerra el libro de matemáticas? *Números, 83*, 131-148.

Gairín, J.M. y Muñoz, J.M. (2005). El número racional en la práctica educativa: estudio de una propuesta editorial. Comunicación al grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico. *Investigación en Educación Matemática IX*. Cordoba: SEIEM.

García, F.J. (2007). *Matemáticas 2º ESO*. Madrid: Editex.

Goetz, J.P. y Lecompte, M.D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata.

González, M.J. y Gómez, P. (2011). Magnitudes y medida. Medidas directas. En I. Segovia y L. Rico (coords.), *Matemáticas para maestros* (pp. 351-374). Madrid: Pirámide.

González, Mª.T. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias, 22*(3), 389-408.

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica*. Barcelona: Paidós.

Lamon, S.J. (1993). Ratio and Proportion: Connecting Content and Children's Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*, 41-61.

Maz, A. (2000). *Tratamiento de los números negativos en textos de matemáticas publicados en España en los siglos XVIII y XIX*. Memoria de Tercer Ciclo, Universidad de Granada

Monterrubio, M.C. y Ortega, T. (2009). Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 37-53). Santander: SEIEM.

Oller, A.M. (2012). *Proporcionalidad aritmética: Una propuesta didáctica para alumnos de secundaria*. Tesis Doctoral, Universidad de Valladolid. Recuperable en http://uvadoc.uva.es/handle/10324/1118

Picado, M. y Rico, L. (2011). Análisis de contenido en textos históricos de matemáticas. *PNA*, *6*(1), pp. 11-27.

Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J.L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.) *Análisis didáctico en Educación Matemática* (pp. 1-22). Granada: Comares.

Rodríguez, J. (2006). *La investigación sobre los libros de texto y materiales curriculares. Primer seminario internacional de textos escolares*. Santiago: Mineduc.

Ruiz de Gauna, J., Dávila, P., Etxeberría, J. y Sarasua, J. (2013).Los libros de texto de Matemáticas del Bachillerato en el periodo 1970 - 2005. *RELIME, 16*(2), 245-276.

Sánchez, E.A. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: Una mirada desde la teoría antropológica de lo didáctico. *RELIME, 16*(1), 65-97.

Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook author. Learn. Math., 7(3), 41-51.

Singer, J.A. y Resnick, L.B. (1992). Representation of Proportional Relationships: Are Children Part-part or Part-whole Reasoners? *Educational Studies in Mathematics, 9*, 55-73.

Valverde, A.G., Castro, E. (2009). Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 523-531). Santander: SEIEM.

Vizmanos, J.R., Anzola, M., Bujanda, M.P. y Mansilla, S. (2009). Esfera 2. Madrid: S.M.

Van Dormolen, J. (1986). Textual analysis. En B. Christiansen, A. G. Howson y M. Otte (Eds.), *Perspectives on Mathematics Education* (pp. 141-171). Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Zapico, M.H. (2006). *Interrogantes acerca de análisis de contenido y del discurso en los textos escolares. Primer seminario internacional de textos escolares*. Santiago: Mineduc.

[1] Este artículo surge del trabajo desarrollado por el grupo de investigación "S119-Investigación en Educación Matemática" financiado por el Plan Autonómico de Investigación del Gobierno de Aragón y el Fondo Social Europeo.

¿LA CERTEZA IMPLICA COMPRENSIÓN?

Does certitude imply understanding?

Benjamín Martínez, Mirela Rigo
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados

Resumen

En el documento se examinan cualitativamente algunos aspectos de las relaciones entre la certeza que experimentan agentes de clase en torno a hechos de las matemáticas, y su comprensión; los sujetos que intervienen en el estudio participan en un diplomado de enseñanza de las matemáticas en línea. Para el análisis se ha tenido que diseñar un marco interpretativo en el que se proponen diversos instrumentos de interpretación, el cual aquí se expone. En la comunicación se argumenta que la certeza no siempre implica la comprensión, lo que resulta imprescindible que el docente tome en cuenta, ya que muchas de sus decisiones de clase las basa en lo que él interpreta como muestras de certeza de sus alumnos.

Palabras clave: *certeza y presunción o duda, comprensión, justificación, foro virtual*

Abstract

This paper examines qualitatively some aspects of the relationship between certainty and understanding of mathematics facts by agents in the classroom. The subjects of the study were participants in an online teaching diploma course. An interpretive framework was designed for the analysis, for which various interpretive tools, described in the paper, are proposed. The paper argues that certainty does not always imply understanding; it is essential that teachers take this into account, since many of their decisions in the classroom are based on displays of what they interpret as the students' certainty.

Keywords: *certitude and presumption or doubt, understanding, justification, online teaching.*

ANTECEDENTES

La investigación cuyos resultados parciales aquí se exponen se centra en el análisis de estados internos como el convencimiento, la convicción, la certeza, la presunción o la duda en torno a hechos de las matemáticas (los que se representan a través de afirmaciones de contenido matemático) que vivencian agentes de clase, específicamente, estudiantes-asesores (i.e., asesores en formación) que participan en un foro virtual. En particular, en la investigación se analizan las relaciones entre la comprensión y esos estados internos, que aquí se les denominan 'estados epistémicos'. En un primer reporte se mostró el caso de una estudiante-asesora que acompañaba y retro-alimentaba su certeza en los hechos de las matemáticas con su comprensión conceptual. Se podría esperar que todos los alumnos presentaran relaciones epistémicas semejantes. En este documento se muestra que no siempre sucede así; se aportan evidencias de que la certeza, o estados altos de presunción, pueden también ir de la mano de la comprensión procedimental, o que incluso pueden ir asociados a la casi total ausencia de comprensión conceptual.

Investigaciones sobre los estados epistémicos se han orientado hacia el ámbito del profesional de las matemáticas como al de su instrucción. Para el matemático, el convencimiento y la certeza son motores que impulsan su actividad en las etapas de desarrollo heurístico, y una guía para certificar sus resultados durante los procesos de prueba (Tymoczko, 1986). La comunidad de educación matemática ha realizado diversos estudios que implícitamente parten del supuesto de que, a semejanza de lo que sucede con los matemáticos, la certeza también importa en la construcción del

Martínez, B., Rigo, M. (2014). ¿La certeza implica comprensión? En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 445-454). Salamanca: SEIEM.

conocimiento matemático en el aula. Algunos de esos trabajos se han recreado en ambientes extra-clase y se han focalizado ya sea en los estudiantes (e.g., el de Balacheff, 2000) o bien en los profesores (e.g., el de Harel & Sowder, 2007); otros, desarrollados en ambientes intervenidos de clase, se han centralizado básicamente en alumnos (e.g., el de Krummheuer, 1995). A diferencia de esos estudios, en el presente se analizan específicamente los estados epistémicos que experimentan los participantes en un foro virtual y se examinan sus relaciones con sus niveles de comprensión.

MARCO INTERPRETATIVO

Los esquemas epistémicos

Los alumnos suelen sustentar sus afirmaciones o procedimientos de contenido matemático de modos diversos. Rigo (2009 & 2013) ha propuesto una taxonomía de estos recursos de sustentación a los que llama "esquemas epistémicos"; ella sugiere que algunos de esos esquemas se organizan y orientan en torno a razones matemáticas, como los que poseen una estructura lógica de tipo deductivo (e. g., ejemplos genéricos o las instanciaciones, v. Balacheff, 2000), o los que surgen a partir de la acumulación de evidencia empírica (e. g., a partir del análisis de casos particulares). En otros casos -continúa Rigo (2013)-, los esquemas que una persona construye para sustentar la verdad de un enunciado matemático responden a consideraciones extra-matemáticas haciéndose a un lado el contenido disciplinar del enunciado, como por ejemplo, cuando un estudiante explica el uso de un algoritmo recurriendo a su facilidad ("es más fácil resolverlo así"), o a la autoridad del profesor ("porque me lo dijo la maestra"), en cuyo caso se está soportando la verdad de las aseveraciones en esquemas epistémicos basados en razones prácticas y en la autoridad, respectivamente. Otro tipo de esquemas basados en consideraciones extra-matemáticas son los que se basan en la familiaridad, mismos que son resultado de la repetición, la memorización y las costumbres. Los esquemas que se basan en la repetición pueden provenir de reiterar sistemáticamente algún enunciado o hecho de las matemáticas, mientras que otros esquemas pueden proceder de costumbres institucionales en torno a lo que deben ser las tareas matemáticas que deben resolver los niños en la clase, como cuando los estudiantes sustentan la validez de un algoritmo por ser habitual o por su facilidad. En lo que sigue se describen algunos esquemas epistémicos basados en consideraciones extra-matemáticas-distintos a los que ha reportado Rigo en sus trabajos- que han sido identificados en el marco de esta investigación; estos esquemas permiten explicar comportamientos de los agentes de clase relacionados con el argumento que aquí se pretende defender, y posibilitan de paso ampliar esa taxonomía.

Definiciones de nuevos esquemas epistémicos

- *Esquema basado en la autoridad entre pares*. Se activa este esquema cuando el sujeto que escucha una afirmación matemática soporta su veracidad en la autoridad que para él tiene la persona que la enuncia, persona que comparte valores similares, pertenece al mismo grupo social o tiene experiencias previas de cooperación con el que oye. Se trata de un esquema activado por la confianza que se suele tener entre pares.
- *Esquema basado en afirmaciones incontestables ajenas al argumento*. Se moviliza este esquema cuando la verdad de un enunciado o justificación matemática se basa en una afirmación cuya veracidad resulta incuestionable pero no es de carácter matemático o aunque lo sea, su contenido no está directamente relacionado con lo que se arguye.
- *Esquema para evitar consecuencias inesperadas*. Este esquema se aplica cuando se sostiene una afirmación porque de otras opciones se desprenden consecuencias o resultados inesperados o incluso temidos (como un número negativo, el cero, un número imaginario, procesos actualmente infinitos, etc.).

- *Esquemas para evitar estados de incertidumbre*. Este esquema se pone en juego cuando los agentes de clase sostienen la verdad de una afirmación matemática con la idea de que así adquirirán certeza.

Instrumento para distinguir estados epistémicos de certeza, presunción o duda.

En la investigación se considera siguiendo a Villoro (2009) que, asociadas a sus aseveraciones de contenido matemático, los sujetos pueden experimentar estados internos de certeza (cuando le asocian el máximo grado de probabilidad a lo creído) o de presunción o duda (cuando le asocian grados menores de probabilidad a lo creído). A estos estados Rigo (2013) les llama "estados epistémicos", como se dijo. Para fijar ideas, en la investigación nos hemos constreñido sólo a los estados epistémicos aludidos (certeza y duda, dejando fuera el convencimiento, la convicción o la persuasión, entre muchos otros).

En el diseño del instrumento teórico-metodológico que se propone a continuación (v. Martínez & Rigo, 2013) convergieron perspectivas provenientes de distintas disciplinas: de la filosofía (Wittgenstein), la psicología (Bloom, Hastings & Madaus), la sociología (Abelson) y la educación matemática (Rigo, 2011). Particularmente relevante para el estudio resultó la aportación de trabajos lingüísticos como los de Hyland (1998), que permitieron recurrir al análisis del meta-discurso de los participantes en el foro virtual, con el fin de desvelar las intenciones comunicativas (muchas de ellas inconscientes) que ellos proyectan a través de su escritura.

En esta investigación se considera que una persona (que participa en un foro virtual) vivencia un grado de certeza, o bien de presunción o duda, en un enunciado matemático, cuando cumple con alguno(s) de los criterios que aparecen en la Tabla 1. Estos criterios son suficientes pero no necesarios.

Tabla 1. Instrumento para distinguir estados epistémicos de certeza y presunción o duda

Elementos del habla	La persona recurre a enfatizadores del lenguaje que pueden revelar un mayor grado de compromiso con la verdad de lo que dice, por ejemplo, cuando la persona usa el modo indicativo de los verbos (e.g., tengo).
Acción	El sujeto realiza acciones consecuentes con su discurso.
Familiaridad	La persona recurre a esquemas epistémicos basados en la familiaridad (resultado de la repetición, la memorización y las costumbres).
Determinación	La persona manifiesta de manera espontánea y determinada su adhesión a la veracidad de un enunciado matemático indicando algún grado de determinación. Este grado puede ser mayor cuando el sujeto sostiene una creencia, a pesar de tener al colectivo en su contra. Incluso puede llegar a esforzarse por convencer a otros de la verdad de su posición.
Interés	Las participaciones de una persona que interviene con interés en torno a un hecho matemático específico en un foro virtual son:
	-*Sistemáticas*. Es decir, el sujeto contesta todas las preguntas dirigidas a él de la manera más detallada posible.
	-*Informativas*. Sus afirmaciones, procedimientos y/o resultados son suficientemente informativos.
	-*Claras y precisas*.
Consistencia	La persona muestra consistencia en sus distintas intervenciones.

Indicadores de comprensión

En este documento y siguiendo a Schoenfeld, se establece una diferencia entre el conocimiento procedimental "basado en cómo hacer las cosas", y el conocimiento conceptual "asentado en los racionales (*rationales*) intelectuales a través de los cuales se explica cómo las cosas funcionan juntas, y porqué así sucede" (2011, p. 26). De lo anterior y de otras consideraciones (provenientes de Rigo, 2013; Petty & Brinol, 2010, y Salcedo, 2007) se desprenden algunos indicadores de lo que en este escrito se entiende por comprensión conceptual, los que se describen en la Tabla 2.

Tabla 2. Indicadores de comprensión

Esquemas epistémicos basados en razones matemáticas	El nivel de comprensión conceptual está relacionado con el tipo de esquema epistémico que se pone en juego: a comprensiones más profundas le corresponden esquemas epistémicos basados en razones matemáticas más generales (e.g. esquemas de tipo deductivo apoyado en axiomáticas abstractas) y a comprensiones de menor penetración le atañen esquemas de menor generalidad (como las instanciaciones o el análisis de casos particulares). Estos esquemas deben de converger o ser consistentes con los esquemas epistémicos de la matemática disciplinar o la matemática escolar.
Refutación de argumentos	La comprensión conceptual está relacionada con la posibilidad de refutar los argumentos o de encontrar contraejemplos.
Conocimiento promedio	La persona tiene más conocimiento que lo que posee el promedio.
Facilidad	A la persona le resulta fácil explicar sus puntos de vista.

Indicadores de comprensión disciplinar (en relación a la variable)

Se utiliza el Modelo 3UV (Ursini, Escareño, Montes & Trigueros, 2005) en el que se caracterizan los tres usos de la variable. En la Tabla 3 se describen.

Tabla 3. Indicadores de comprensión disciplinar. El modelo 3UV

La variable como incógnita	
I1	Reconocer e identificar la presencia de algo desconocido que puede ser determinado.
I5	Simbolizar las cantidades desconocidas y utilizarlas para plantear ecuaciones.
I2	Interpretar la variable que aparece en una ecuación como un valor específico.
I4	Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas.
I3	Sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.
La variable como número general	
G2	Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor.
G4	Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica.

Indicadores de incomprensión conceptual (Rigo, 2013; Petty & Brinol, 2010 y Salcedo, 2007)

Tabla 4. Indicadores de incomprensión conceptual

Activación de esquemas epistémicos basados en consideraciones extra-matemáticas	Un indicador relevante de incomprensión lo da la ausencia de razones y la presencia contundente de esquemas extra-matemáticos.
Bajos niveles de elaboración	La persona examina el primer argumento pero no los siguientes de todos los que conforman un punto de vista del interlocutor. Ese argumento suele ser uno extra-matemático muy llamativo. Es una forma de adherirse a los argumentos de otro.
Sesgo de exploración	La persona fija su atención en un punto de vista personal -seguramente resultado de su historia- dejando de considerar otras opciones y evitando pensamientos críticos o negativos hacia dicho

	punto de vista.
Dificultad para refutar otros puntos de vista	La persona muestra dificultad para refutar otros puntos de vista y elaborar contraejemplos.
Conocimiento menor que el promedio	Se muestra menor conocimiento que el promedio.
Dificultades para explicar un punto de vista	Se muestran dificultades para explicar una postura.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

La investigación cualitativa que aquí se presenta está centrada en un estudio de caso de tipo interpretativo (Denzin & Lincoln, 1994). El estudio empírico se llevó a cabo en el Diplomado de Temas Fundamentales de Álgebra impartido por el Instituto Nacional para la Educación de los Adultos (México); el diplomado tiene el propósito de fortalecer la formación de personas que asesoran en temas de álgebra a adultos que se encuentran en proceso de obtener su certificado de secundaria (estudiantes-asesores). El episodio que aquí se analiza pertenece al Módulo IV y su elección obedece a que ahí los estudiantes-asesores tendían a sustentar sus respuestas y asociados a esos sustentos parecían experimentar distintos estados epistémicos. Los episodios comienzan con la solicitud del tutor para responder a una tarea y finalizan con el acuerdo de los estudiantes en torno a una solución. Para este reporte se eligieron participaciones de dos estudiantes-asesoras, Patricia y Laura, porque parecían vivenciar distintos estados epistémicos a lo largo del episodio. Martínez fungió como tutor del grupo, quien deliberada y sistemáticamente instó a que sus estudiantes explicitaran los sustentos en los que apoyaban sus afirmaciones.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

En el episodio que se analiza el tutor solicitó a los estudiantes que plantearan la ecuación que resolviera el siguiente problema: Un padre tiene 35 años y su hijo 5. ¿Al cabo de cuántos años será la edad del padre tres veces mayor que la edad del hijo?

Primera participación de Patricia: Certeza y comprensión procedimental

La participación que abrió el episodio fue la de Patricia:

1.1 Hola. Les dejo la respuesta al primer problema y la explicación a los educandos.

1.2-1.4 $3(5 +X) = X +35$; $15 + 3X = X+35$; $3X - X = 35 -15$; $2X = 20$; $X = 10$

1.5 -1.6 Colocaremos X a los años que transcurrirán para que el padre cumpla el triple de edad que el hijo. Ya sabemos la edad que tienen actualmente ambos así que podemos realizar una igualdad con los datos que tenemos. $3(5 + X) = X +35$

1.7 Tres veces la edad del niño más X años que deben transcurrir deben ser igual a la edad del padre, a su vez sumar la edad del padre a esa misma cantidad X años debe ser la edad del hijo. Espero no confundir.

Comprensión procedimental. En un primer momento, Patricia expuso lo que para ella era la respuesta del problema: planteó la ecuación (en 1.2) (aspecto I5 de la variable como incógnita, en adelante así aparecen los aspectos de la variable), manipuló la variable (1.3) (G2 y G4) y obtuvo el valor para la incógnita del problema (1.4) (I4). En un segundo momento ella compartió su explicación para los educandos. Ahí, ella identificó la incógnita adecuadamente (1.5) (I1), le asignó la literal (1.5) (I5) y explicó el planteamiento hecho previamente (1.6), explicitando la interpretación que dio a la ‘x’ (I.2). La puesta en juego de casi todos los aspectos de la variable como incógnita (con excepción de I3) es una muestra del conocimiento procedimental que posee Patricia en torno a ese tema.

Certeza. Es probable que en esta primera intervención Patricia experimentara certeza. Se puede decir, en principio, que ella tuvo *determinación* para ser la única en someter a juicio del grupo sus respuestas al problema. Su certeza también se puede inferir del uso de *enfatizadores*, específicamente, del hecho de haber recurrido al modo indicativo de los verbos a lo largo de su intervención (dejo, sabemos, tenemos). Otros aspectos que hablan de la certeza de Patricia son que *actuó en consecuencia* con los procedimientos que anunció, por ejemplo, en 1.6 planteó la ecuación que resolvía el problema de acuerdo a lo que enunció en 1.5; que activó esquemas epistémicos basados en la *familiaridad* en los procesos algebraicos antes descritos, los que muy probablemente eran procedimientos habituales para ella al resolver problemas rutinarios en su labor como asesora y que parecían darle confianza en sus respuestas. Su certeza también la dejó ver al mostrar *interés* por resolver el problema, al contestar correctamente todas las preguntas que le hizo el tutor, al resolver el sistema que planteó sin que el tutor se lo solicitara, al ser la única en dar solución al problema hasta ese momento y al ser *clara* en su exposición. Finalmente, Patricia demostró su certeza al dejar ver *constancia* en la aplicación de las acciones recién descritas a lo largo de su intervención.

El tutor se percató que Patricia había sido la única estudiante en resolver el problema de las edades por lo que puso a consideración del grupo sus procedimientos y su resolución. En lo que sigue se analiza la respuesta de Laura a los cuestionamientos del tutor.

Primera intervención de Laura. Duda e incomprensión

2.2	T: a) ¿Están de acuerdo que [la ecuación que propuso Patricia] solucionaría el problema?
	L: No, porque cuando la intenté resolver no me salió.
2.3	T: b) ¿Qué significa x+5 en la ecuación que propuso?
	L: El número de años que no conocemos más la edad que tiene actualmente el niño.
2.6	T: e) ¿Cómo creen que un educando intentaría resolver el problema si se le dificulta el Álgebra?
	L: Seguramente se confundirá al momento de interpretar los datos, ya que tenemos todos los datos, lo único que no sabemos el número de años que tienen que transcurrir.
2.7	T: ¿Cómo lo orientarían hacia el planteamiento de una ecuación?
	L: Yo lo invitaría a que represente cada dato con una letra para que aprenda el lenguaje abstracto.
2.8-2.9	L: Yo encontré que la ecuación puede ser: 3(x-5)=x-35. Corríjanme por favor.

T: tutor; L: Laura

Incomprensión. De entrada, se puede vislumbrar en la participación de Laura su incomprensión conceptual, y su *conocimiento menor que el promedio*, que manifestó, por una parte, en las dificultades que tuvo para identificar la incógnita del problema (I1) (al interpretarla como "el número de años" sin especificar que era el "número de años que debían transcurrir para que la edad del padre fuese el triple que la edad del hijo") y que se manifestó también al plantear la ecuación de forma incorrecta (I5) (cambiando sólo el signo + por el signo - en la ecuación que propuso Patricia, en 2.8); todo ello muestra la imposibilidad de Laura para comprender el planteamiento de la ecuación en el mensaje de su compañera. Adicionalmente, su incomprensión se desprende de su *sesgo de exploración*, ya que al tratar de refutar el planteamiento de Patricia partió de la solución numérica del problema que ella previamente había encontrado (ver 5.3, 6.1 y 6.2), centrando su atención sólo en su punto de vista y su solución. De esto se desprende su *dificultad para elaborar contraejemplos* y sus *bajos niveles de elaboración* que dejó ver al focalizar su contra-argumento sólo en la ecuación que propuso Patricia, en lugar de considerar otros de los elementos conceptuales que ella ofreció en su exposición (como la traducción del lenguaje común al algebraico o su interpretación de la incógnita). Se observó también que Laura tuvo *dificultades para explicar* su punto de vista porque no justificó su propio planteamiento (en 2.8), el que posiblemente fue resultado de un intento por *evitar estados de incertidumbre* al plantear una ecuación distinta a la de su compañera pero sin soporte matemático y con sustento en *esquemas epistémicos basados en consideraciones extra-matemáticas*. En suma, los argumentos de Patricia no lograron que Laura comprendiera el contenido de sus explicaciones.

Duda. Si bien a lo largo de toda su participación Laura mostró bajos niveles de presunción al *no actuar en consecuencia*, al *no ser suficientemente informativa* (ya que dejó sin resolver la ecuación y no explicitó su procedimiento mediante el cual la planteó) y al utilizar *mitigadores* en sus intervenciones (como el del verbo poder en 2.8), su estado de duda se hizo todavía más evidente cuando al cerrar su participación pidió decididamente ayuda: "corríjanme por favor" (en 2.9).

Ante los hechos, y ante una pequeña participación de Patricia, el tutor la interpeló: a) Por favor, explícanos Patricia qué significa en tu ecuación las expresiones '5+x' y 'x+35'. b) Laura propuso la siguiente ecuación para resolver el problema: 3(x-5) = x-35 ¿Estás de acuerdo con que la ecuación resuelve el problema? ¿Por qué?

Segunda respuesta de Patricia: Certeza e incomprensión conceptual

Patricia respondió así a los cuestionamientos del tutor:

4.1 Pasando al problema, primero se determina la ecuación para poder obtener la incógnita.

4.2 La incógnita es en cuantos años tendrá el padre el triple de la edad del hijo
la incógnita es la cantidad de años que deben transcurrir para que el padre tenga el triple de la edad del hijo.

4.3 [En relación a la pregunta b) del tutor Patricia respondió]: 5+x significa que 5 años son la edad que tiene el hijo y le debemos sumar la cantidad de años que deben transcurrir. x+35 significa que la cantidad de años que deben transcurrir se le sumará a la edad actual del padre.

4.5 Y las personas sólo pueden aumentar de edad es decir sumamos edad jamás restamos años a nuestra vida.

4.6 Por lo tanto si le resto como menciona la ecuación de Laura no me dará buen resultado.

4.7-4.8 Si resto 3(10-5)=10-35. Comenzando porque al restar un número menor a un número mayor mi resultado será negativo, es decir -25.

Comprensión procedimental e incomprensión conceptual. En su intervención, Patricia primeramente dejó ver su comprensión procedimental de la variable como incógnita, en consecuencia con su actuación previa. Pero muy poco después (a partir de 4.4) da muestras de su incomprensión conceptual. En principio porque no puede ahí *contra-argumentar* al razonamiento de Laura. Para hacerlo, es decir, para mostrar que la ecuación de Laura es incorrecta, utiliza implícitamente un argumento por reducción al absurdo: supuso que la ecuación de su compañera es correcta; sustituyó en esa ecuación el resultado (x=10) que se derivó de la ecuación planteada por Patricia (Sic!) y de ahí coligió lo que ella consideró era una contradicción: la aparición de números negativos (en lugar de considerar para ello la desigualdad que de esa sustitución se deriva 15 = -25). Pero esto no fue todo. La incomprensión conceptual de Patricia también se deja ver cuando ella activó diversos esquemas epistémicos basados en *consideraciones extra-matemáticas*: en principio, al movilizar el esquema basado en *afirmaciones incontestables* ajenas al argumento, lo que sucedió cuando afirmó que "las personas sólo puedan aumentar de edad y que jamás podremos restar años a nuestra vida" (4.5), afirmación que aunque es irreprochable en la vida práctica, no es aplicable en el marco del problema, ya que un valor negativo de la literal podría ahí interpretarse como un hecho ocurrido en el pasado; por lo demás, el error en el planteamiento de Laura no parece tener que ver con esa afirmación porque lo que en todo caso lo que Laura habría supuesto como negativo son las edades iniciales y no el valor de la literal. Aunado a lo anterior, Patricia puso en juego el *esquema para evitar consecuencias inesperadas* al evocar temor hacia la obtención de un resultado negativo, cuando previno en 4.6 que si se procediera como lo hizo Laura no se obtendría un ‘buen resultado’, refiriéndose seguramente al temido valor negativo (-25) con el que se topó al fin de su intervención.

Certeza. A lo largo de su participación es posible que Patricia haya experimentado certeza. Esto se puede inferir de su *determinación* para refutar la respuesta de Laura; de que utilizó *enfatizadores* a lo largo de su intervención (específicamente, el modo indicativo de los verbos, como en “significa”, “resto”, “dará” y el enfatizador “jamás” en 4.5); de que actuó en *consecuencia* con lo que anunció (e. g., en 4.7 y 4.8 trató de mostrar que al utilizar la ecuación de Laura no se obtendría un “buen resultado”) y de que activó esquemas epistémicos basados en la *familiaridad* (al explicitar en 4.8 la creencia de la imposibilidad de un resultado negativo producto quizá de la cultura escolar). Su certeza también la dejó ver al mostrar *interés* por resolver el problema; al tratar de contestar todas las preguntas que le hizo el tutor y al dejar ver *constancia* en la aplicación de las acciones recién descritas a lo largo de su intervención.

Segunda intervención de Laura: Altos niveles de presunción e incomprensión

Laura reaccionó así a la respuesta de Patricia:

5.1 Hola Pati! Tienes toda la razón del mundo, no podemos restar años a la vida humana,

5.2 y después cuando el tutor me preguntó cómo resolví la ecuación que yo propuse, ya no supe como la había hecho antes, total que al final terminé echa bolas, hasta que leí tu comentario,

5.3 y con tu aclaración ya encontré mi error, resulta que yo sólo calculé cual podría ser el valor de "x" en ambos lados pero al final encontré que el numero de años que tienen que transcurrir eran 30, son muchos porque el padre tendría 90 y el hijo 30, y aunque cumple con el requisito de ser el triple de la edad del hijo el procedimiento no es correcto,

5.4 y a continuación les comparto lo que yo hice:

3(x-5)=x-35, aquí calculé cuál podría ser el valor de "x", nunca despejé ni lo busqué en los datos que tenía, simplemente calculé y sustituí, ese fue mi gran error,

5.5 además de usar resta en lugar de suma.

5.6 Mil gracias por la aclaración y por tu comentario. Aprendí mucho.

Cuando posteriormente el tutor le preguntó a Laura lo que había aprendido, ella respondió:

6.1 Simplemente asigné un valor a "x", y se me ocurrió que si "x" valía 30, entonces el padre tendría 90 y el hijo 30 y cumple con el supuesto del problema.

6.2 Aprendí que debo poner mucha atención y sobre todo dar seguimiento a los pasos para encontrar la ecuación y no solo tratar de adivinar o suponer el valor, es posible que obtenga el mismo resultado pero no estoy aplicando el conocimiento como se debe.

Incomprensión procedimental y conceptual. El procedimiento de Laura consistió -como ella misma lo reconoció explícitamente en 6.1 y 6.2 e implícitamente en 5.3- en adivinar, suponer o calcular aritméticamente lo que ella consideró que era el valor de la x, que a su vez para ella constituía la solución del problema, solución por cierto, que con un *sesgo de exploración* y a pesar de los esfuerzos de su compañera por hacerla comprender, nunca dejó de pensar que era la correcta (e. g., en 5.3 y en 6.1 cuando afirma que su solución cumple con el supuesto del problema). En su participación Laura también otorgó dos significados a la incógnita: como la edad del hijo pero a la vez como el número de años que deben transcurrir. Pareciera que detrás de su procedimiento estaba la creencia de que la incógnita es equivalente a ‘algo que hay que adivinar’, y que esto se puede conseguir de manera aritmética y sin la necesidad de tomar en cuenta otras condiciones del problema. Con todo lo anterior Laura muestra no sólo *conocimiento bajo del promedio* sino un desconocimiento palmario en el manejo de la variable, especialmente en los criterios I.2, I.5 y G2, cosa que desde el inicio ella misma confesó: “encontrar la ecuación de un problema se me dificulta sobremanera”. La incomprensión de Laura también se deja ver a través de las causas a las que ella, con un *sesgo de exploración*, parece atribuir su error, sustentadas todas ellas en *consideraciones extra-matemáticas* y no en consideraciones disciplinares. Una de las posibles causas fue el no haber 'aplicado el conocimiento como se debe'; otra causa a la que ella probablemente imputó sus errores fue el no haber considerado "que sumamos edad, jamás restamos años a nuestra vida" afirmación que hizo su compañera en 4.5 y que Laura aceptó enfáticamente (en 5.1) siendo fiel a un *esquema basado en afirmaciones incontestables*. Por cierto, Laura se adhirió a la verdad de esa afirmación posiblemente con el afán de evitar *estados de incertidumbre*, y conforme a *bajos niveles de elaboración*, ya que de todo el razonamiento que su compañera expuso de 4.5 a 4.8, Laura sólo consideró la afirmación expuesta en 4.5 (y no los errores en los que posteriormente incurrió su compañera, que ya antes analizamos). Otra causa que posiblemente Laura colocó en el origen de sus errores consistió en no haber "dado seguimiento a los pasos para encontrar la solución", como lo hiciera su compañera Patricia, otorgándole así *autoridad* a ella por ser un *par* que a Laura le parecía confiable, y dejando ver su creencia de que el planteamiento de ecuaciones supone la aplicación de un algoritmo.

Altos niveles de presunción. Asociada a su incomprensión, Laura probablemente experimentó altos grados de presunción. En principio, ella tuvo *determinación* para cambiar su posición inicial y usó *enfatizadores* como la expresión "Tienes toda la razón del mundo" (5.1) y el modo indicativo de los verbos (encontré, cumple, es). No obstante, Laura también mostró cierta duda cuando a pesar de que ella enunció en 5.3 que debía seguirse un "procedimiento correcto" y que en 5.4 explicitó parte de ese procedimiento ("buscarlo en los datos, despejar la incógnita"), ella no actuó en consecuencia. Esta falta de acción permitió diferenciar el estado de certeza que Patricia experimentó en sus intervenciones del nivel de presunción que experimentó Laura.

En síntesis, Laura deja ver una evolución de un estado de duda hacia una relativamente alta presunción, que ciertamente no parece haber sido resultado de una mayor comprensión de los contenidos disciplinares incluidos en el problema sino que más bien podría estar cimentada en un fortalecimiento de sus creencias (e. g., sobre el origen de sus errores). Da la impresión que Laura sólo comprendió que en casos como los del diplomado no es aplicable el 'método por adivinación' que ella siguió, no porque arroje resultados incorrectos sino por su propia naturaleza, ya que ahí 'no se aplica el conocimiento como se debe' (6.2).

CONCLUSIONES

En el documento se muestran aspectos de las complejas relaciones entre la certeza y la comprensión. Se podría pensar que existe una mutua determinación entre la certeza y la comprensión, es decir, que la comprensión implica certeza y recíprocamente, que la certeza supone la comprensión. Parece, sin embargo, que esto no siempre es el caso. Cuando Cantor le envió su famosa y sorprendente demostración a Dedekind sobre la correspondencia biunívoca entre el segmento unitario y el cuadrado unitario, signada con una de sus frases más célebres "¡lo veo pero no lo creo!" (Dauben, 1984, p. 242), él mostró una profunda comprensión del hecho, pero se trataba de una comprensión teñida de incredulidad.

En este escrito, por otra parte, se han aportado evidencias empíricas de que, de modos diversos, la certeza puede estar asociada no sólo a bajos niveles de entendimiento, sino incluso a la incomprensión, es decir, que la certeza no lleva consigo ni incluye necesariamente al conocimiento. En el caso de Patricia se muestra que la certeza estuvo asociada sólo a un entendimiento procedimental pero a un desconocimiento conceptual. En el de Laura, se puede distinguir una transición de un estado de duda hacia un estado de presunción relativamente alto, transición que sin embargo no se vio acompañada ni sustentada en aumento de su comprensión. De hecho es un caso que muestra estados de incomprensión y desconocimiento asociados a estados de alta presunción. Las relaciones entre certeza y comprensión nos remiten a una vieja diatriba epistemológica sobre las relaciones que se dan entre creer y conocer, pero también a una problemática novedosa –en el sentido de que sólo últimamente se ha puesto en la mesa de la discusión- de conseguir, entre otras muchas cosas, que los docentes tomen conciencia de que las muestras de aparente certeza de sus alumnos –que mucho estimulan e incentivan a sus profesores y sobre las cuales toman muchas decisiones didácticas- no son a su vez expresiones de su comprensión.

Referencias

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: Universidad de los Andes.

Dauben, J. W. (1980). El desarrollo de la teoría de conjuntos cantoriana. En I. Grattan-Guines (Ed.), *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica* (pp. 235-282). Madrid: Alianza Editorial.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (1994). Introduction. In N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 1-18). California: Sage.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspective on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Charlotte: NCTM.

Hyland, K. (1998). Persuasion and context: The pragmatics of academic metadiscourse. *Journal of Pragmatics*, *30*, 437-455.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229–270). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Martínez B. & Rigo M. (2013).Criterios de certeza en el contexto de un foro virtual. En A. Ramírez y Y. Morales (Eds.) *I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe* (I CEMACYC) (pp. 548-558). República Dominicana: ICMI.

Petty, R. E. & Briñol, P. (2010). Attitude change. In R. F. Baumeister & E. J. Finkel (Eds.), *Advanced social psychology: The state of the science* (pp. 217-259). Oxford: Oxford University Press.

Rigo, M. y otros (2009). Las prácticas de justificación en el aula de matemáticas.En González, M. J., González, M. T. & Murillo, J. (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XIII*. Pp. 445-452. Santander, España: SEIEM.

Rigo, M. (2011). La convicción, la comprensión y las prácticas de racionalidad en la primaria. Estudio del profesor. En A. B. Alcaraz, G. Gutiérrez, A. Estepa & N. Climent (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 460-466). Bilbao: SEIEM y Universidad del País Vasco.

Rigo, M. (2013). Epistemic schemes and epistemic states. A study of mathematics convincement in elementary school classes. *Educational Studies in Mathematics*, *84*(1), 71-91.

Salcedo , A. (2007). *Anatomía de la persuasión: de los clásicos a la programación neurolingüística*. Madrid: ESIC Editorial.

Schoenfeld, A.H. (2011). *How we think*. New York: Routledge.

Tymoczko, T., (1986). The four-color problem and its philosophical significance. In T. Tymoczko (Ed.), *New directions in the philosophy of mathematics* (pp. 243-266). Boston: Birkhäuser.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., & Trigueros M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental: Una propuesta alternativa*. México: Editorial Trillas.

Villoro, L. (2009). *Creer, saber, conocer*. México: Siglo XXI.

CONCEPCIONES DEL SENO Y COSENO PUESTAS DE MANIFIESTO POR ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Conceptions about sine and cosine as expressed by non-compulsory secondary school students

Enrique Martín-Fernández, Juan Francisco Ruiz-Hidalgo, Luis Rico

Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo identificamos e interpretamos las concepciones sobre las nociones del seno y coseno de un ángulo que expresan un grupo de estudiantes de Bachillerato cuando se les pide una explicación verbal. Las representaciones son fundamentales en la comprensión de la matemática cuyo objeto de estudio son ideas y conceptos. Por ello, para establecer las concepciones de estos estudiantes, les requerimos la verbalización del seno y del coseno de un ángulo, entre otros modos de representación. El análisis realizado ha contemplado la categorización de respuestas y ha hecho emerger relaciones entre las distintas categorías. Además, mediante un estudio comparativo indagamos la complejidad relativa de la noción de seno respecto de la noción de coseno. Consideramos que la escasez de investigaciones relacionadas con el significado de las nociones de seno y coseno aporta un interés añadido al estudio.

Palabras clave: *trigonometría, nociones de seno y de coseno, representaciones verbales, concepciones de los estudiantes de bachillerato.*

Abstract

In this work we identify and interpret the ideas of the notions sine and cosine as expressed by a group of high school students when asked about then in two questionnaires. The representations are basic in the understanding of mathematics, given that their subjects of study are constructions of the mind. Thus, in order to establish the conceptions of these students, we require verbal representations of sine and cosine of an angle among other ways of representations used by non-compulsory secondary school students. The analysis has provided a categorization of responses, and relationships among the outputs of participants have emerged. Besides, by means of a quantitative analysis we study the higher or lower complexity of the notion sine with respect to cosine. We are interested in this idea for the scarcity of research in this field.

Keywords: *trigonometry, notions of sine and cosine, meanings, verbal representations, conceptions of students in non-compulsory secondary school*.

INTRODUCCIÓN

En el centro de las matemáticas en la enseñanza secundaria se encuentra un apasionante tópico, la trigonometría, la cual no ha sido resultado de la labor de un solo hombre, escuela o nación (Boyer, 1986). Maor (1998) indica que tres han sido los principales cambios que se han producido a lo largo de la historia en la trigonometría: la tabla de cuerdas de Ptolomeo, la cual transforma la trigonometría en una ciencia práctica; el teorema del Moivre y la fórmula de Euler, que combina la trigonometría con el álgebra y el análisis; y los teoremas de Fourier, que indicaban que cualquier función arbitraria de una variable real y=f(x) puede ser representada por una serie trigonométrica.

La trigonometría es muy fecunda en conceptos y contiene no sólo diversas conexiones a otras nociones y estructuras matemáticas (Fi, 2003), sino también a otras disciplinas. La trigonometría además, tiene aplicación práctica en la ciencia y la tecnología. Así, la trigonometría se presenta en

Martín-Fernández, E., Ruiz-Hidalgo, J. F., Rico, L. (2014). Concepciones del seno y coseno puestas de manifiesto por estudiantes de bachillerato. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 455-464). Salamanca: SEIEM.

multitud de fenómenos, entre los cuales destacan los siguientes: fenómenos de medida, fenómenos físicos y fenómenos interrelacionados con la propia matemática.

Sobre la base de su desarrollo, su importancia histórica y a sus aplicaciones, la trigonometría ha permanecido en el currículo de matemáticas para la enseñanza secundaria desde hace más de 50 años.

Así, la Mathematics Association of England (1950) ya afirmaba que la trigonometría proveía a los estudiantes con el conocimiento necesario para resolver cuestiones matemáticas relevantes y les suministraba una coherente visión de las matemáticas, necesaria para la resolución de multitud de problemas relacionados con las áreas científica y técnica.

Sin embargo, la trigonometría es una parte de las matemáticas escolares difícil de entender por los estudiantes. Brown (2005) señala varios factores involucrados: su complejidad, la conexión con numerosos tipos de fenómenos, sus interconexiones con otras disciplinas, las diversas vías de expresar, entender y representar sus nociones básicas, los modos de aproximación a la misma, y nociones como la circunferencia goniométrica, los triángulos rectángulos, o las funciones trigonométricas. A pesar de todo esto, el conocimiento basado en investigación que poseemos sobre la complejidad didáctica que subyace en la trigonometría es limitado. Nuestro interés se centra en los significados de las nociones básicas de la trigonometría. Aunque hay diversas investigaciones sobre significados y representaciones en otras áreas como el álgebra, encontramos una escasez de estos estudios sobre trigonometría. Dentro de los que hemos localizado, podemos destacar estudios sobre la historia de la enseñanza de la trigonometría, los cuales subrayan las diferentes aproximaciones a la misma, el “ratio system”, donde las razones trigonométricas para ángulos entre 0 y 90º eran definidas como proporciones de lados de un triángulo y el “line system”, el cual define los conceptos principales de la trigonometría como segmentos en un círculo (Sickle, 2011). Por otro lado, algunos antecedentes de nuestro trabajo se pueden situar en las investigaciones llevadas a cabo por Brown (2005), quien afirmaba que las funciones seno y coseno son preferentemente representadas como coordenadas, distancias y cocientes, y por Weber (2008), quien indicaba dos formas principales en que se representaban las funciones trigonométricas: como cociente y como función.

OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Con objeto de avanzar y profundizar en la investigación didáctica sobre este tópico se sitúa nuestra investigación, que se inició en el curso 2010-2011 durante el Máster para Profesor de Educación Secundaria y Bachillerato, tuvo continuidad en el Máster de Investigación en Didáctica de la Matemática en el curso 2012-2013, y cuyo actual foco es explorar y describir las nociones, representaciones y concepciones que los estudiantes ponen de manifiesto cuando explican por escrito el significado de las razones trigonométricas mediante expresiones verbales, notaciones gráficas y simbólicas y sus relaciones. Este trabajo se centra principalmente en identificar categorías para organizar las respuestas que proporcionaron los alumnos al dar una explicación verbal sobre las razones trigonométricas seno y coseno. Un segundo objetivo de este trabajo es inferir significados que ponen de manifiesto los estudiantes sobre las nociones de seno y de coseno teniendo en cuenta sus respuestas ante las tareas planteadas. Finalmente, el tercer objetivo es indagar sobre la mayor o menor dificultad de la razón trigonométrica seno respecto a la del coseno.

NOCIÓN DE SIGNIFICADO DE UN CONCEPTO MATEMÁTICO

La noción de significado ha sido tema de debate desde tiempos antiguos. Un ejemplo de ello es que a lo largo de la tradición filosófica, lingüística y semiótica, se han considerado “equivalentes a significado todos estos términos: sentido, contenido, significado, significatio, signifié, signified, meaning, bedeutung, denotación, connotación, intención, referencia, sense, sinn, denotatum, significatum” (Eco, 1990, p.75). Considerando está dificultad en la definición de significado, Ullman (1976) afirma que “el significado es uno de los términos más ambiguos y más controvertidos de la teoría del lenguaje” (p.62). En este estudio nos basamos en la propuesta expuesta por Rico (2012) que determina el significado de un concepto matemático escolar considerando tres componentes:

- Estructura conceptual, dada por los conceptos, relaciones, operaciones, propiedades, y proposiciones derivadas. La estructura conceptual establece el criterio de veracidad o falsedad para las proposiciones que se establecen; desempeña el papel de referencia.
- Sistemas de representación, definidos por las expresiones, signos, gráficos y reglas que hacen presente el concepto y lo relacionan con otros. Los sistemas de representación sistematizan conjuntos de signos apropiados para un concepto y, mediante sus reglas de transformación y de traducción, regulan pautas operativas de inferencia.
- Fenomenología, incluye aquellos contextos, situaciones y problemas que están en el origen de un concepto y le dan sentido. Los fenómenos y su análisis establecen la pluralidad de sentidos de un determinado concepto.

Este estudio pertenece a la tradición que considera la noción de representación desarrollada por Kaput (1987), que “da por supuesta la consideración de dos entidades relacionadas, pero funcionalmente separadas” (p.23). Así, las representaciones matemáticas son todas aquellas expresiones (signos o gráficos) que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos (Rico, 2009). Es decir, los sistemas de representación permiten al alumnado comunicar, de forma visual, gestual, oral o escrita, las ideas matemáticas que quieren transmitir. En este trabajo vamos a indagar las representaciones verbales, con las cuales los estudiantes, recurriendo a expresiones escritas, describen y explican el concepto considerado. Ejemplos de esta metodología se encuentra en Castro-Rodriguez, Rico y Gómez (2012) y Fernández-Plaza, Rico y Ruiz-Hidalgo (2012).

CONCEPCIÓN Y DEFINICIÓN

Entendemos como *concepción* cualquier tipo de respuesta (verbal, gestual, etc.) dada por un sujeto frente a un estímulo que le demanda una caracterización, descripción o definición de un determinado concepto (Fernández-Plaza y col. 2013). Las concepciones en general, expresan y reúnen componentes parciales del significado de un concepto.

La referencia de un concepto es expresada, en general, mediante una definición. Las definiciones no sólo tienen un papel importante en la estructura axiomática que caracteriza a la matemática sino también en la educación escolar: en la resolución de problemas, y en la comprensión de las nociones matemáticas (Skemp, 1971; Vinner, 1991). Entendemos por definición matemática de un concepto dado, al conjunto de propiedades lógicamente consistente de un concepto matemático, a partir de las cuales se deducen otras propiedades del mismo, la veracidad o falsedad de afirmaciones acerca de dicho concepto, o se identifican ejemplos y contra-ejemplos del objeto matemático (Harel, Selden y Selden, 2006, p.151). Existen características de un concepto matemático que no son prefijadas por su definición, por ejemplo, la definición formal de razón trigonométrica no prefija aspectos como el de ser una herramienta, que los estudiantes si pueden asociarle. Las concepciones expresan los significados parciales que los estudiantes atribuyen a los conceptos; se basan en la selección de algunas propiedades, incluyen modos locales de uso y tipos de representación.

METODOLOGÍA

El trabajo se considera exploratorio y descriptivo al examinar las concepciones de los estudiantes de bachillerato cuando explican los conceptos de seno y de coseno. También es un estudio interpretativo ya que recoge información para describir estas nociones e interpretar propiedades y características que muestran los distintos significados –cómo lo entienden, utilizan e interpretan-utilizados por los alumnos sobre las razones trigonométricas seno y coseno. Para el análisis en primer lugar se realiza una primera lectura y observación de las producciones de los alumnos identificando y recogiendo todas las representaciones, ideas y conceptos relevantes que se presentan en las mismas. De este modo, surgen de modo natural y sistemática unos primeros temas en las producciones de los estudiantes, que identifican unidades de información con las que se reducen y organizan la diversidad de respuestas obtenidas. A continuación, se organizan los temas en categorías y subcategorías, las cuales se construyen observando y comparando las distintas respuestas en cada uno de los temas y las propiedades relevantes que expresaban. El objetivo es obtener patrones que muestren la estructura de las respuestas e interpreten los temas y categorías previamente establecidas. Finalmente, se realiza un análisis cuantitativo básico evaluando las respuestas correctas en cada uno de los cuestionarios.

Informantes

En total 74 estudiantes que cursaban 1º de bachillerato de la modalidad científico tecnológica fueron escogidos intencionalmente por disponibilidad para participar en el estudio por el nivel educativo que cursaban. Los alumnos ya habían recibido instrucción previa sobre las nociones de trigonometría.

Se dividieron los participantes del estudio en dos subgrupos equivalentes, y se realizó una estratificación de la muestra en función de la nota media del alumno tras una consulta mantenida el día 27 de febrero de 2013 entre el equipo de investigación con un experto investigador en Didáctica de la Matemática, para planificar una distribución uniforme de los dos cuestionarios implementados, que permitiera obtener respuestas lo más representativas posibles en ambos.

Instrumento

La recogida de datos se realizó mediante la implementación de dos cuestionarios, elaborados tras un proceso de revisión de literatura científica y de libros de texto durante el cual se seleccionaron un conjunto de actividades las cuales se sometieron a un análisis, revisión y filtrado posterior. Los cuestionarios eran de respuesta abierta, uno sobre el seno y otro sobre el coseno, que constan de ocho ítems similares, uno de los cuales, el sexto, es el mismo en ambos y cuya inclusión se realizó para realizar una discriminación o diferenciación entre el seno y el coseno, abarcando así los ítems de los cuestionarios las cuatro categorías de Sierpinska (1990). Cada cuestionario, formado por ocho preguntas, y que sólo se diferenciaban en la razón trigonométrica a tratar, seno o coseno, fue aplicado a uno solo de los subgrupos, los cuales poseían características similares. Estos instrumentos fueron validados previamente mediante la realización de un estudio piloto (Martín-Fernández, 2013). Los datos obtenidos en este trabajo han sido extraídos de las respuestas de los estudiantes a dichos cuestionarios mediante la aplicación de un análisis de contenido. En concreto, en este trabajo consideramos una comparación general de las respuestas dadas a los dos cuestionarios y, singularmente, las respuestas relativas a los ítems número dos de ambos cuestionarios, que son los siguientes:

Q1. ”Explica verbalmente qué entiendes por sen(45º)”

Q2. “Explica verbalmente qué entiendes por cos(45º)”

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El análisis realizado es un análisis de contenido que tiene lugar en cuatro etapas: en la primera, surgen de manera natural y sistemática unos primeros temas en las producciones escritas de los estudiantes, que identifican las unidades de información; en la segunda, los temas se desarrollan en categorías; en la tercera, analizamos estas categorías: semejanzas, diferencias, vinculaciones, etc.; y finalmente, en la cuarta, interpretamos los datos mediante las categorías y mostramos los resultados inferidos.

Comparación de los resultados de los dos cuestionarios

Avanzamos la consecución del tercero de los objetivos enunciados. Para ello, se procedió a la evaluación de las respuestas correctas en cada uno de los cuestionarios, motivado por la posibilidad de que una de las dos razones trigonométricas estudiadas tuviese mayor dificultad que la otra, por motivo de su rendimiento. Así, en general, aunque los rendimientos son algo inferiores en el coseno que en el seno, tras un análisis de varianza, se observan que estas diferencias no son significativas entre pares de preguntas homólogas de los cuestionarios, salvo en el caso de dos preguntas, que son la nº 2 de ambos cuestionarios, y que vamos a tratar en este informe.

Tabla 1. Análisis cuantitativo estudio definitivo

	Cuestionario A		Cuestionario B	
	Fr	*%*	*Fr*	*%*
Ítem 2	22	59,46	14	37,84

Explicaciones dadas por los estudiantes a la segunda cuestión

Una vez identificados los términos clave en las respuestas, se localizaron los temas principales: razón, valor, segmento, medida, y herramienta (sólo seno), cada uno de los cuales atribuye distintos sentidos para sen(45º) o cos(45º). Es necesario mencionar que la producción de un mismo alumno puede presentar varios temas, debido a que en algunos casos su respuesta está formada por varias oraciones.

Tabla 2. Frecuencia de temas entre las producciones al ítem 2 en ambos cuestionarios

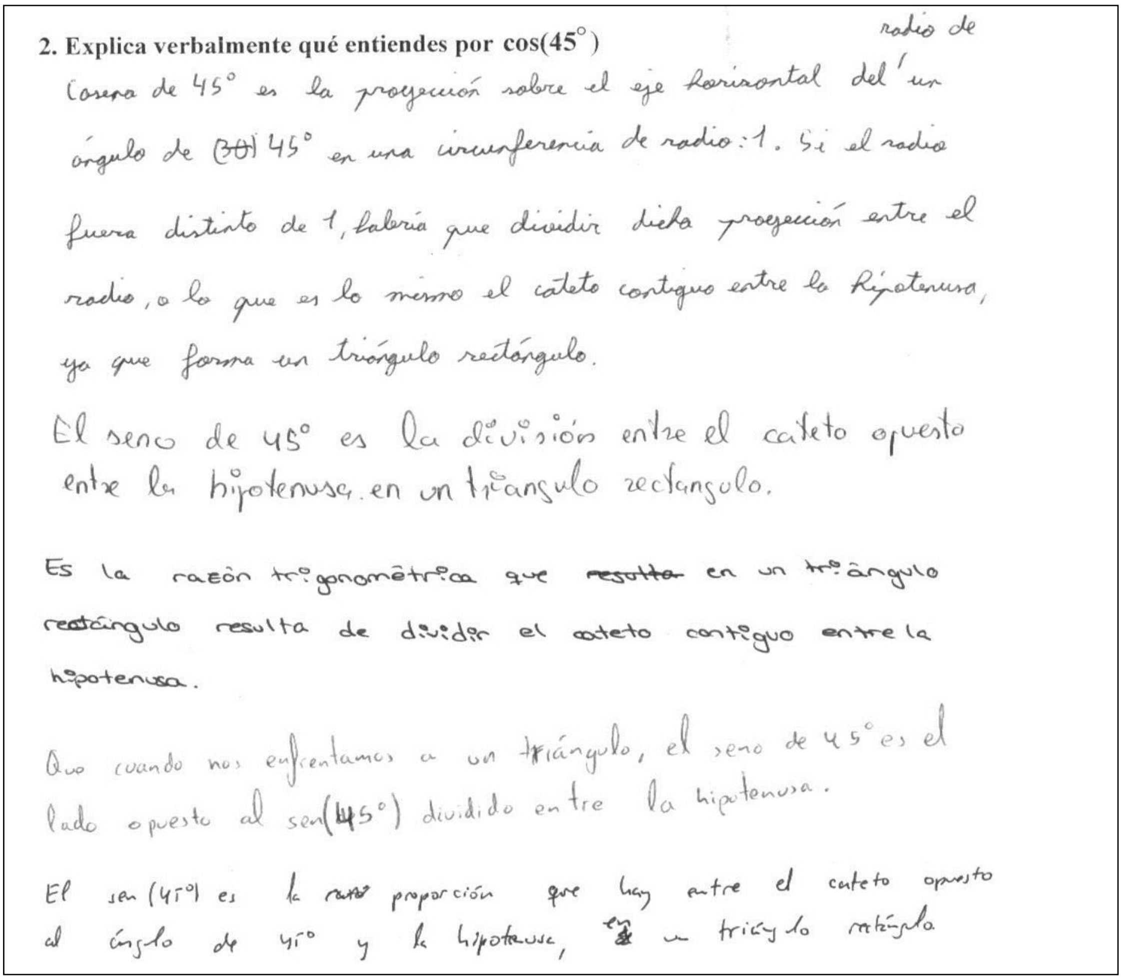
	Frecuencia	Porcentajes
	Fr	*%*
Razón	44	46,32
Valor	16	16,84
Segmento	21	22,11
Medida	6	6,32
Herramienta	2	2,11

De los datos se infiere que los conceptos de seno y coseno se interpretan principalmente como razón. Se han observado diferentes modos de expresar el cociente: mediante una fórmula, mediante formas del verbo dividir: “divide”, “división”, “dividido”, mediante formas del verbo partir, “partido”, y mediante “entre”. El tema de valor se ha considerado cuando se incluye: el valor numérico propiamente dicho, por ejemplo: “$0{,}7$”,”$\sqrt{2}/2$” y cuando se indica que el valor es un número o cuando se indica que es un “valor”. En relación a “segmento”, éste se considera cuando se habla de lados, catetos, “altura” y “base”. Respecto al tema medida, éste surge en expresiones como “la mitad del radio”, en las cuales se indican la unidad (radio) y la medida (mitad). Finalmente existen dos respuestas que muestran el uso de la razón trigonométrica, por lo que se ha considerado un último tema, “herramienta”.

Análisis de contenido de la pregunta número 2

A continuación elaboramos un mapa conceptual (figura 6) que relaciona los temas localizados en las respuestas a estas preguntas de los dos cuestionarios con los contenidos escogidos para explicar la razón trigonométrica, según los casos. Estas relaciones permiten identificar los diferentes sentidos utilizados por los estudiantes. Establecemos así una semántica a partir de las respuestas a la segunda pregunta de los cuestionarios A y B, con indicación de las particularidades de cada uno de ellos, ya que para cada uno de estos temas los alumnos han escogido diferentes contenidos, conceptuales, hechos y conceptos.

Las producciones muestran que en el tema “razón” se manejan tres contenidos para explicarla: la circunferencia, el triángulo rectángulo y el triángulo no rectángulo. Semánticamente distinguimos tres sentidos diferentes del tema “razón”, un sentido de cociente, propiamente dicho, y otros dos que añaden una mayor precisión a la producción que son el de razón trigonométrica y el de proporción. Estos dos últimos se presentan minoritariamente y siempre relacionados con el triángulo rectángulo. A continuación se incluyen cinco respuestas de los alumnos, relacionadas con el tema “razón”.



2. Explica verbalmente qué entiendes por cos(45°)

Coseno de 45° es la proyección sobre el eje horizontal del radio de un ángulo de ~~(30)~~ 45° en una circunferencia de radio: 1. Si el radio fuera distinto de 1, habría que dividir dicha proyección entre el radio, o lo que es lo mismo el cateto contiguo entre la hipotenusa, ya que forma un triángulo rectángulo.

El seno de 45° es la división entre el cateto opuesto entre la hipotenusa en un triangulo rectangulo.

Es la razón trigonométrica que ~~resulta~~ en un triángulo rectángulo resulta de dividir el cateto contiguo entre la hipotenusa.

Que cuando nos enfrentamos a un triángulo, el seno de 45° es el lado opuesto al sen(45°) dividido entre la hipotenusa.

El sen (45°) es la ~~razo~~ proporción que hay entre el cateto opuesto al ángulo de 45° y la hipotenusa, en un triángulo rectángulo

Figura 1. Cinco respuestas asociadas al tema “razón”

En relación al tema “valor” identificamos dos formas de expresarlo: mediante el valor numérico y mediante los términos “valor”, “número” o “resultado”. Además, se manifiestan dos sentidos relacionados con este tema, los cuales especifican, o no, si el valor “es siempre el mismo”. La doble flecha que aparece en el mapa conceptual entre invariante y proporción es debida a que cuando se indica que el valor es invariante y se justifica, se utiliza la proporcionalidad o viceversa. Más abajo se muestran dos ejemplos de respuestas asociadas con el tema “valor”.

En una circunferencia de radio 1, el sen 45º será $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

En un triángulo rectángulo, el coseno de 45º es un número que sale como resultado de dividir la hipotenusa ~~del cateto~~ del triángulo por el cateto contiguo al ángulo. Ese número siempre es el mismo, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, y solo en el caso de 45º el coseno coincide con el seno, ya que los dos catetos son iguales.

Figura 2. Dos producciones relacionadas con el tema "valor"

Respecto al tema "segmento", se indican los diferentes hechos que se utilizan para expresarlo: el ángulo, la circunferencia y el triángulo rectángulo. En la mayoría de las ocasiones que se refieren a la circunferencia y la asocian a algún elemento del triángulo: lado, cateto, altura, base, etc., esto lo expresamos mediante un trazo discontinuo de la flecha que une "circunferencia" y "triángulo". A continuación se muestran tres ejemplos relacionados con este tema.

Es la altura del triángulo rectángulo que se forma en la circunferencia goniométrica con el ángulo 45º o 135º

El sen 45º es el lado opuesto que forma un ángulo de 45.

El cos 45º situandonos en un triangulo el cual este angulo se encuentra en el vertice inferior izquierdo ~~seria la~~ el coseno seria la ~~linea~~ linea que esta situada en la parte inferior del angulo o tambien llamada base.

Figura 3. Tres respuestas asociadas al tema "segmento"

Finalmente, el tema "herramienta" se incluye porque hay alumnos que consideran las razones trigonométricas como una técnica para algo, resaltando que también tienen carácter procedimental, lo cual aporta nuevos sentidos. Se incluye un ejemplo de producción asociada a este tema.

Es un número que utilizamos para facilitarnos la resolución de triángulos. ~~rectángulos~~.

Figura 4. Producción relacionada con el tema "herramienta"

Finalmente, el tema "medida" aparece de incidentalmente. Una de las cuales se muestra a continuación.

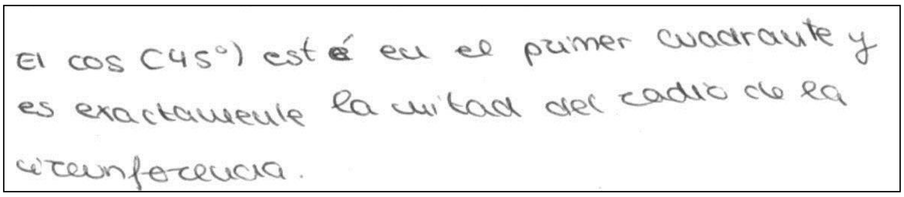


Figura 5. Respuesta asociada al tema "medida"

Como síntesis del análisis realizado elaboramos un mapa conceptual que resume las distintas concepciones manifestadas por los estudiantes en sus explicaciones sobre el seno y el coseno de un ángulo de 45º.

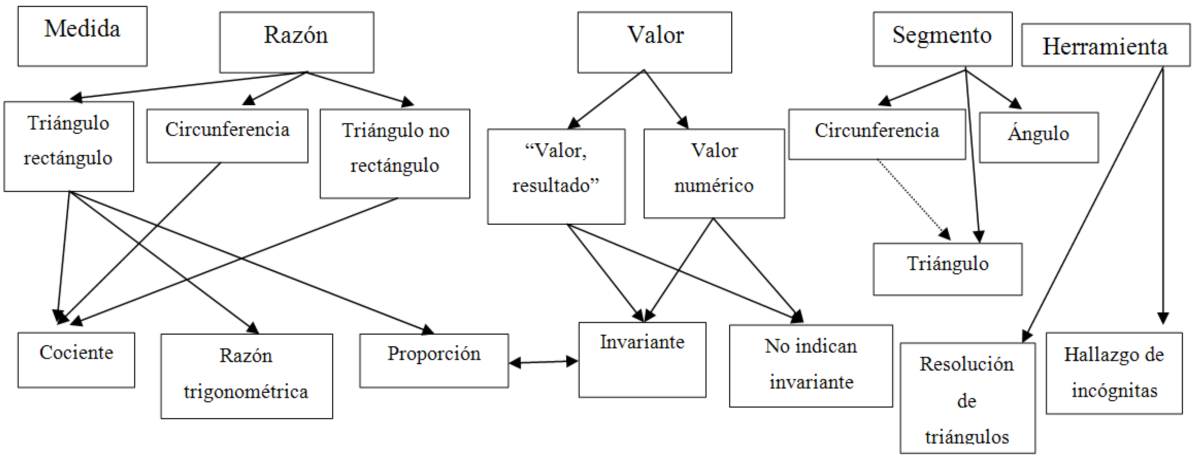


Figura 6. Concepciones a partir de los temas verbales

Algunas diferencias encontradas entre los temas y sentidos de las dos razones trigonométricas, seno y coseno, son las siguientes:

- La interpretación del coseno como razón está asociada a la circunferencia. En el seno no se presenta dicha relación.
- Para el coseno no se relaciona el sentido de invariante con la indicación de "valor, resultado", algo que si ocurre en el seno. La categoría "valor, resultado" en el seno es considerado siempre un valor invariante.
- La flecha bidireccional entre invariante y proporción indica que cuando se expresa que es una proporción inmediatamente se añade que es un invariante y cuando se indica que es un invariante este se justifica mediante una proporción.

CONCLUSIONES

De acuerdo al objetivo planteado, presentamos las siguientes conclusiones.

Los sujetos muestran una diversidad de concepciones cuando interpretan verbalmente el seno y coseno de un ángulo, ya que lo explican mediante las nociones de razón o cociente, valor, segmento, medida y herramienta. La mayoría de los participantes describen las razones trigonométricas seno y coseno como cociente (46,32%). Más de la mitad de las producciones asociadas a esta interpretación se relacionan con términos derivados del verbo dividir.

Este alumnado no identifica las razones trigonométricas con la noción de proporción. La idea de proporción aparece de modo incidental tanto en el seno como en el coseno.

Se ponen de manifiesto conexiones incorrectas entre los sistemas “line system” y “ratio system”. Aunque las nociones trigonométricas de seno y coseno como segmentos están asociadas al “line system” y deberían surgir únicamente del tema circunferencia, también surgen del tema triángulo.

Los datos muestran escasa conexión de la trigonometría con el mundo real. Es mínimo el número de sujetos que reconocen el carácter procedimental de la razón trigonométrica y expresan la idea de que la razón trigonométrica es una técnica con utilidad práctica.

Los sujetos tienen un conocimiento correcto del rango de valores del seno y coseno del ángulo 45º. En ningún caso los valores dados por el alumnado han sido superiores o inferiores a uno.

A partir de los rendimientos de los alumnos en este estudio (tabla 1), podemos aceptar que las nociones trigonométricas de coseno y seno tienen una dificultad similar para el alumnado.

Además, se confirman algunas concepciones documentadas por investigaciones anteriores, tales como su interpretación como cociente (Weber, 2005); distancias horizontales y verticales respecto a unos ejes; y, también, como cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo (Brown, 2006). Sin embargo, detectamos nuevas concepciones como son las de medida, valor numérico y herramienta.

El análisis ha puesto de manifiesto que los alumnos manejan una amplia gama de expresiones verbales y consideran una diversidad de sentidos no triviales para estas dos nociones, los cuales muestran la pluralidad de significados –estructuras, representaciones y fenómenos- con los que estos estudiantes abordan e interpretan las nociones básicas de la trigonometría del plano

Finalmente, se quiere subrayar la conveniencia de indagar, con un número mayor de sujetos, las diferencias entre los significados del seno y del coseno, junto con las diferencias en dificultad de un concepto respecto del otro.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado con la ayuda y financiación del proyecto “Procesos de Aprendizaje del Profesor de Matemáticas en Formación” (EDU2012-33030) del Plan Nacional de I+D+I (MICINN) y del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (Grupo FQM-193, Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico).

Referencias

Boyer, C. B. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Brown, S. A. (2005). *The trigonometric connections: Students´ understanding of sine and cosine.* Unpublished doctoral dissertation, Illinois State University, Illinois.

Castro-Rodriguez, E., Rico, L. y Gómez, P. (2012). La fenomenología de las fracciones. Un estudio con maestros en formación. En M. Marín-Rodríguez, N. Climent-Rodriguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 241-250). Ciudad Real: SEIEM

Eco, U. (1990). *Semiótica y filosofía del lenguaje*. Barcelona: Lumen

Fi, C. (2003). *Preservice secondary school mathematics teachers´ knowledge of trigonometry: subject matter content knowledge, pedagogical content knowledge and envisioned pedagogy.* Unpublished doctoral dissertation, University of Iowa, Iowa, IA.

Fernández-Plaza, J. A., Rico, L. y, Ruiz-Hidalgo, J.F., (2012). The Concept of Finite Limit of a Function at one Point as Explained by Students of Non-compulsory Secondary Education. En T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2), (pp. 235-242). Taipei, Taiwan: PME.*

Fernández-Plaza, J.A., Rico, L., Ruiz-Hidalgo, J.F. y Castro, E. (2013). Variación de las concepciones individuales sobre límite finito de una función en un punto. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 253-261). Bilbao: SEIEM.

Harel, G., Selden, A. y Selden, J. (2006). Advanced Mathematical Thinking: Some PME Perspectives. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 147-172). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Kaput, J.J. (1987). Representational systems and mathematics. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 19-26). Hillsdale, NJ. USA: Lawrence Erlbaum.

Martín-Fernández, E. (2013). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de Bachillerato respecto al concepto de razón trigonométrica. Estudio exploratorio*. Documento no publicado. Universidad de Granada: Granada. Disponible en http://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Enrique_Martin____.pdf

Maor, E. (1998). *Trigonometric delights*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Mathematics Association of England. (1950). *The teaching of trigonometry in schools: A report prepared for the Mathematical Association*. London: G. Bell y Sons, Ltd.

Rico, L. (2007). *Sistemas de significados de un concepto en las Matemáticas Escolares*. Documento no publicado. Universidad de Granada: Granada.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, 4, 1, 1–14.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *1*(1), 39-63.

Sickle, J. V. (2011). *A history of trigonometry Education in the United States 1776-1990*. Unpublished doctoral dissertation, Columbia University, Nueva York, NY.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understandings in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 10, 3, 24-36.

Skemp, R.R. (1971). *The psychology of learning mathematics*. Penguín: Harmondsworth.

Ulmann, S. (1976). *Semiótica. Introducción a la ciencia del significado*. Madrid: Aguilar.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in teaching and learning mathematics. En Tall, D.(Ed.) *Advanced mathematical thinking*. (pp. 65-81) Dordrecht: Kluwer.

Weber, K. (2008). Teaching trigonometric functions: Lessons learned from research. *Mathematics Teacher*, 102, 2, 144–147.

EXPLORANDO INDÍCIOS DE CONHECIMENTO ESPECIALIZADO PARA ENSINAR MATEMÁTICA COM O MODELO MTSK[1]

Exploring indications of specialised knowledge for mathematics teaching through application of the MTSK model

Jeferson G. Moriel-Junior[a], José Carrillo[b]

[a]Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso (Brasil), [b]Universidade de Huelva (Espanha)

Resumen

En este trabajo presentamos una estrategia metodológica que empleamos para gestionar los indicios de conocimiento identificados con el modelo MTSK y discutimos los resultados obtenidos. El análisis finalmente efectuado nos posibilitó identificar más subdominios, y más conocimientos con mayor detalle, que lo obtenido en el análisis previo. Concluimos que investigar los indicios por medio de preguntas elaboradas específicamente para cada uno de ellos, considerando el subdominio MTSK al que está asociado, permite ampliar la comprensión del fenómeno investigado y aporta confianza en los conocimientos identificados. De este modo, no solo se refuerza la importancia de esta etapa (investigar los indicios) cuando se utiliza este modelo para explorar el conocimiento docente, sino que ofrecemos también más elementos sobre cómo puede conducirse dicha etapa.

Palabras clave: *indicios de conocimiento, MTSK, metodología de investigación, futuro profesor de matemáticas.*

Abstract

In this paper we present the methodological approach used to deal with knowledge indications that have been identified through application of the MTSK model, and discuss the results obtained. By applying this approach, we were able to identify both further subdomains, and more knowledge in greater detail than previous analyses had achieved. We conclude that investigating the indications through questions developed specifically for each of them, and considering the subdomain of MTSK with which each is associated, contributes to a wider understanding of the phenomenon under analysis and improves the reliability of the knowledge identified. These results not only reinforce the importance of this step (investigating the indications) when using the model to explore teaching knowledge, but also provide further suggestions as to how it can be conducted.

Keywords: *knowledge indications, MTSK, research methodology, prospective mathematics teacher.*

INTRODUÇÃO

Dentre os diferentes modelos resultantes de investigações sobre o conhecimento de professores de Matemática – como o de Shulman (1986) e de Ball, Thames, & Phelps (2008) – tem sido desenvolvido nos últimos anos o *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* – MTSK (Carrillo, Climent, Contreras, & Muñoz-Catalán, 2013). Diversos estudos, incluindo teses doutorais (em finalização), tem utilizado-o como marco teórico e identificado não somente conhecimentos propriamente ditos, como também indícios de que outro(s) pode(m) ter sido colocado(s) em jogo (Flores, Escudero, & Aguilar, 2013; Moriel Junior, Wielewski, & Montes, 2013). Neste último caso, pesquisadores podem questionar: como lidar com *indícios de conhecimento* que aparecem

Moriel-Junior, J. G., Carrillo, J. (2014). Explorando indícios de conhecimento especializado para ensinar matemática com o modelo MTSK. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 465-474). Salamanca: SEIEM.

quando investigamos o conhecimento docente com o MTSK de modo que se convertam em respostas para as perguntas da pesquisa? O trabalho de Flores, Escudero, & Aguilar (2013) iniciou o debate sobre isso ao identificar *oportunidades para estudar* aspectos do conhecimento do professor em diversos contextos de investigação, entretanto não teve como objetivo efetivamente fazer tal *estudo*. Por ser um marco teórico "novo", nosso trabalho pretende avançar nesta linha ao apresentar a estratégia metodológica que utilizamos para lidar com indícios de conhecimentos identificados em nossa pesquisa de doutorado e comparar os resultados produzidos antes e depois da exploração dos indícios em termos de amplitude, profundidade e confiabilidade agregados à pesquisa.

MARCO TEÓRICO

O MTSK é um modelo teórico sobre o conhecimento profissional que é específico de professores de Matemática, cuja constituição considera os avanços de modelos anteriores (Ball, Thames, & Phelps, 2008; Shulman, 1986) e busca superar as limitações deles (Carrillo, Climent, Contreras, & Muñoz-Catalán, 2013; Escudero, Flores, & Carrillo, 2012; Flores, Escudero, & Carrillo, 2013; Montes, Aguilar, Carrillo, & Muñoz-Catalán, 2013; Montes, Contreras, & Carrillo, 2013). Usamos as siglas originais da língua inglesa para descrever suas partes (Fig. 1). Este modelo possui dois domínios – *Conhecimento matemático* (MK) e *Conhecimento pedagógico do conteúdo* (PCK) – e cada um deles é dividido em três subdomínios. As crenças dos professores sobre a Matemática, seu ensino e aprendizagem são incorporadas a ele e permeiam os subdomínios, pois elas dão sentido às suas ações.

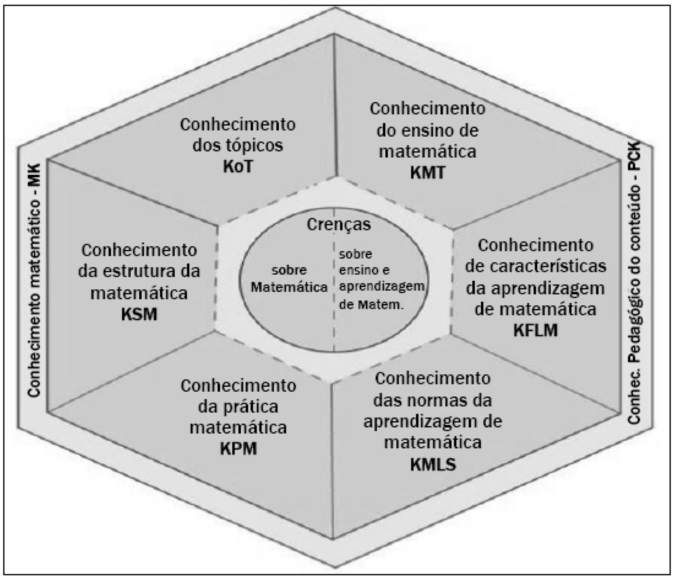


Figura 1. Domínios e subdomínios do MTSK (Carrillo et al., 2013, pp. 5, tradução nossa).

Iniciamos descrevendo os subdomínios do *Conhecimento matemático*. O *conhecimento de tópicos* (KoT) inclui conteúdos matemáticos a serem ensinados (incluindo uma fundamentação conceitual profunda) e seus diferentes aspectos (incluindo definições, interpretações e propriedades de conceitos, uma ou mais demonstrações de um tópico específico, justificativas para procedimentos algorítmicos, exemplos e contraexemplos, modelos realísticos, situações de aplicação e usos extra matemáticos). No *conhecimento da estrutura matemática* (KSM) está conexões entre tópicos (avançados⇔elementares, prévios⇔futuros, de diferentes áreas matemáticas, etc., exceto as de fundamentação previstas em KoT) que permitem reconhecer certas estruturas da Matemática, bem como, vê-la como um sistema de elementos integrados. Um exemplo deste tipo de conexão é saber que se pode utilizar a ideia de limite de funções para justificar que a divisão 0/0 é indeterminada (Lima, 1982). O *conhecimento da prática matemática* (KPM) inclui maneiras de proceder em Matemática, incluindo modos de criar ou produzir na área (conhecimento sintático), aspectos da comunicação matemática, raciocínio e prova, elementos que estruturam uma demonstração, modos de definir e usar definições, de selecionar representações, de argumentar, de generalizar, explorar e, ainda, de como as relações de KSM são estabelecidas.

Passamos à descrição dos subdomínios do *Conhecimento pedagógico do conteúdo*. O *conhecimento do ensino de matemática* (KMT) diz respeito a materiais, recursos, modos de apresentar um conteúdo e suas respectivas características (limitações/potencialidades existentes em si mesmos) que permitam ao professor optar por uma estratégia para ensinar determinado conteúdo (incluindo organizar uma série de exemplos ou criar analogias e metáforas). Por exemplo, conhecer a estratégia de ensinar frações utilizando uma figura geométrica (circular ou retangular, por exemplo) ou um modelo (como pizzas ou chocolates) e saber que isto é (mais) adequado para desenvolver a interpretação parte-todo (Moreira & Ferreira, 2008). Também inclui o conhecimento (formal ou informal) de elementos teóricos sobre o ensino de Matemática, por exemplo, sobre a resolução de problemas. *Conhecimento das características de aprendizagem de Matemática* (KFLM) inclui como os alunos aprendem os conteúdos matemáticos (modelos e teorias formais ou informais), as características desse processo de compreensão, erros comuns e suas fontes prováveis, dificuldades, obstáculos e a linguagem normalmente usada pelos aprendizes ao lidar com cada conceito. Por exemplo, conhecer a teoria APOS para descrever como ocorre o desenvolvimento cognitivo de um estudante em aprendizagem Matemática. O *conhecimento das normas da aprendizagem de Matemática* (KMLS) se refere a especificações curriculares envolvendo o que está previsto em cada etapa da educação escolar em termos de conteúdos e competências (conceituais, procedimentais, atitudinais e de raciocínio matemático nos diversos momentos educativos), normas mínimas e as formas de avaliação que possibilitam a progressão de um ano para outro, materiais convencionais de apoio, objetivos e medidas de desempenho desenvolvidos por organismos externos.

Os seis subdomínios descrevem como entender o conhecimento específico de um professor de Matemática e servem como “categorias” de análise em investigações. Por isso, o MTSK também pode ser considerado uma ferramenta metodológica para exploração analítica deste conhecimento.

METODOLOGIA

Os dados aqui utilizados provem da análise realizada em nossa tese doutoral (em desenvolvimento pelo primeiro autor deste texto, sob coorientação do segundo) que tem como uma de suas etapas investigar conhecimentos de professores e futuros professores de Matemática por meio do modelo MTSK. Trata-se de uma pesquisa qualitativa (Bogdan & Biklen, 1991) desenvolvida em quatro fases, as quais apresentamos a seguir com o respectivo recorte feito para este artigo.

A Fase 1 foi destinada à coleta de dados por meio de gravação audiovisual (e posterior transcrição) de uma Oficina realizada com professores e futuros professores no Projeto “Observatório da Educação” (OBEDUC - Brasil) onde se discute possibilidades de resposta para um *por que matemático* sobre divisão de frações, a saber: Por que na divisão de frações multiplica-se o numerador pelo inverso do denominador? A dinâmica da Oficina envolveu o debate sobre seis possibilidades de resposta encontradas na literatura, baseadas nos seguintes conceitos-chave: PR1 – Regra; PR2 – Inverso multiplicativo e equivalência; PR3 – Analogia à divisão de números inteiros; PR4 – Empacotamento; PR5 – Geometria; PR6 – Indução (Moriel Junior & Wielewski, 2013). Embora esta questão esteja formulada em termos matemáticos e os conceito-chave das PR sejam predominantemente matemáticos, trata-se de uma questão que professores podem enfrentar quando vão preparar aulas ou ensinar. Por isso o fio condutor da Oficina foi a indagação: O que você responderia a um aluno que fizesse esta pergunta? Desta forma, tanto o domínio do conhecimento matemático (MK), quanto o pedagógico do conteúdo (PCK) são contemplados.

A Fase 2 foi destinada à análise, por meio do MTSK, de conhecimentos mobilizados pelos participantes da Oficina, bem como, para identificação de indícios de conhecimento. Utilizamos a técnica de “análise de conteúdo” (Bardin, 1977) dos trechos transcritos para obter elementos que nos permitam realizar a análise por meio de comparações sistemáticas com as definições dos subdomínios do MTSK e, assim, explorar analiticamente os conhecimentos em questão.

A Fase 3 foi destinada à coleta de dados por meio de gravação em áudio (e posterior transcrição) de entrevista semiestruturada (no caso, com um Licenciando em Matemática três meses após a Oficina) para refinar as análises anteriores, dirimido eventuais dúvidas e aprofundando os resultados obtidos na Fase 2. Utilizamos etapas e procedimentos de *entrevista reflexiva* (Szymanski, Almeida, & Pradini, 2011) com questões baseadas nas interações durante a Oficina. Neste tipo de entrevista, perguntas complementares – de esclarecimento, focalizadoras ou de aprofundamento – também podem ser utilizadas, como: *O que isto significa para você?*; *Aqui você mencionou que...*; *Fale mais sobre...*; *Por que você pensa que...* (Isiksal & Cakiroglu, 2011). Desta forma, obtivemos dados para investigar os indícios de conhecimento do sujeito selecionado encontrados na fase anterior.

Na Fase 4 usamos o modelo MTSK para analisar (cf. técnica descrita na Fase 2) os dados obtidos na Fase 3. Com isso buscamos compreender se e como os indícios se converteriam em conhecimentos.

Considerando que o objetivo deste artigo focaliza o desenvolvimento das Fases 3 e 4, apresentamos brevemente na próxima seção os dados obtidos na Fases 1 e 2 e, em seguida, descrevemos em detalhes a análise realizada para investigar os indícios de conhecimentos.

ANÁLISE DE DADOS

No Episódio a seguir (extraído dos dados da Fase 1), o Licenciando em Matemática (L) faz um comentário durante a Oficina sobre a PR2 (baseada no conceito de inverso multiplicativo e de equivalência) quando questionado pelo investigador (I) da seguinte forma:

I: O que você pode dizer sobre as diversas possibilidades de respostas que vimos nesta oficina?

L: Eu já tinha uma noção que ia ter que resolver por esse caminho [expresso na PR 2] só que eu tinha esquecido do inverso multiplicativo. [...] Isso aí eu sei, eu uso isso na faculdade sempre. [...] Quando a gente está falando de criança, a gente fica com a ideia muito fechada. Se eu tivesse lembrado que o conjunto dos racionais é um corpo e todo corpo tem um inverso multiplicativo, [a resposta ao por que] teria que sair de alguma forma desse jeito.

A análise deste Episódio, realizada na Fase 2 com o modelo MTSK, revelou conhecimentos expressos pelo Licenciando (L) e também indicou que outros conhecimentos podem ter sido mobilizados, algo que chamamos de "indícios" no sentido de que configuram oportunidades de formularmos perguntas para indagar a amplitude e profundidade de tal conhecimento. Em relação aos conhecimentos, detectamos que ele conhece (i) os termos matemáticos "inverso multiplicativo", "conjunto dos números racionais" e "corpo" – pertencente ao KoT; (ii) uma propriedade do conjunto de números racionais ("racionais é um corpo") – pertencente ao KoT; (iii) uma propriedade de corpo ("todo corpo tem inverso multiplicativo") – pertencente ao KoT.

Esses conhecimentos, juntamente com o contexto no qual eles foram mencionados fornecem indícios de que outros conhecimentos especializados para ensinar Matemática podem ter sido mobilizados pelo Licenciando. Vejamos isto a seguir.

O primeiro item mostra que o futuro professor conhece certos termos matemáticos e pela forma como foram utilizados (ou seja, o contexto em que são mencionados e aplicados) nos sugere que seu conhecimento sobre os conceitos envolvidos pode ir além de simplesmente "conhecer termos", dizer seus "nomes". É possível que ele conheça particularmente a definição de cada um, podendo também incluir propriedades, aplicações ou modos de utiliza-los, etc. (enquadrados em KoT).

Os dois últimos itens evidenciam que o Licenciando parece conhecer conexões entre conceitos matemáticos (conjunto de números racionais, inverso multiplicativo e corpo algébrico) que lhe permitem não só conhecer as respectivas propriedades, como também saber o papel que elas tem para explicar o *por que matemático* (como feito na PR2 usando inverso multiplicativo). Isto sugere indícios de conhecimento de conexões intraconceituais (KoT) ou interconceituais (KSM).

Por fim, a análise do referido trecho indica que o futuro professor parece ter uma ideia intuitiva de como se realiza esta demonstração, em relação à lógica da mesma, embora não recordasse o uso da propriedade específica envolvida (inverso multiplicativo). Isto nos sugere que ele pode ter conhecimento sobre como proceder para fazer uma demonstração, incluindo elementos que a estruturam e são necessários em seu esquema argumentativo (KPM). Por este indício, ou pelo fato do Licenciando ter mencionado a PR2, acreditamos também que ele conhece ao menos uma demonstração dentre as várias possíveis para justificar o *por quê matemático*, pertencentes ao KoT.

A análise brevemente apresentada até aqui (Fase 2) com os dados obtidos na Oficina (Fase 1) não é suficiente para esclarecer se o sujeito conhece uma demonstração (KoT) ou se (também) sabe como faze-la (KPM). Tampouco, ajuda a elucidar os outros indícios levantados. Diante disso, sentimos a necessidade de continuarmos investigando e ver se tais indícios se converteriam (ou não) nos respectivos conhecimentos ou, ainda, se revelariam outros. Portanto, este Episódio configura um cenário que nos brinda com algumas oportunidades "de indagar acerca do conhecimento que utiliza o [futuro] professor de Matemática neste contexto" (Flores, Escudero, & Aguilar, 2013).

No quadro a seguir, sintetizamos os indícios apresentados e as respectivas perguntas que realizamos para investiga-los na entrevista (Fase 3). Para uma melhor organização, a numeração respeita a ordem cronológica em que apareceram na entrevista.

Quadro 1. Indícios de conhecimentos, subdomínios do MTSK e respectivas perguntas feitas para o Licenciando na entrevista.

INDÍCIOS DE CONHECIMENTO (SUBDOMÍNIO MTSK) ***Indício de que ele conhece...***	**PERGUNTA**
1. uma demonstração de "*por que inverter e multiplicar para dividir frações?*" que utiliza o inverso multiplicativo (KoT). 2. como utilizar o inverso multiplicativo para explicar "*por que inverter e multiplicar para dividir frações?*", ou seja, os elementos argumentativos necessários para demonstrar (KPM).	1. [...] você quer tentar fazer (essa demonstração)? Veja se você consegue fazer.
3. o conceito de inverso multiplicativo (KoT). 4. o conceito de corpo (KoT).	2. Como você explica o "inverso multiplicativo"? 3. Você consegue definir o que é um corpo?
5. alguma conexão intraconceitual entre conjunto de números racionais, inverso multiplicativo e corpo (KoT). 6. alguma conexão interconceitual (envolvendo números racionais, inverso multiplicativo e corpo) que o permite responder ao "por que" (utilizando inverso multiplicativo) (KSM).	(*) 4. Além dessa conexão, você viu mais alguma?

**Observação*: Não foi necessário fazer a pergunta que tínhamos elaborado para investigar o Indício 5 porque na pergunta 3 já foi possível obter as informações necessárias. Caso necessário, pediríamos explicação sobre esta conexão.

Nas próximas subseções apresentamos a pergunta que fizemos na entrevista (I) com a resposta do Licenciando (L) e analisamos os conhecimentos que mobilizados usando o modelo MTSK para, então, tirarmos conclusões sobre os indícios descritos (obtidos na Fase 2).

Investigando os Indícios de conhecimento 1 e 2

Na primeira e na última frase do Episódio, percebemos evidências de que o Licenciando parece ter uma ideia intuitiva de como se realiza "aquela" demonstração, em relação à lógica da mesma, embora não recordasse o uso da propriedade específica envolvida (inverso multiplicativo). Isto sugere que ele não só conhece uma demonstração (Indício 1), mas também conhece os elementos argumentativos necessários para desenvolve-la (Indício 2).

No início da entrevista o Licenciando diz que durante a Oficina nós realizamos uma “demonstração, [...] primeiro com números e depois algebricamente”, por meio da PR2. Entretanto, a parte algébrica não foi feita. Com isso, aproveitamos para investigar os Indícios 1 e 2 como segue:

I: Não fiz, mas você quer tentar fazer [essa demonstração]? Veja se você consegue fazer. [Deixei livre para que ele olhasse a PR2].

L: Não, não preciso nem olhar. [Começa escrever] Se você tem um *a* sobre *b*, divido por um *c* sobre *d* [parte I da Figura 2]. Então para você fazer isso aqui virar *1* [aponta para o denonimador *c/d* da parte I], tem simplesmente que multiplicar esse aqui [aponta para o numerador *a/b* da parte I] por *d/c* e aqui também [aponta para o denominador *c/d* da parte I]. Para não mudar a fração, o valor numérico, então você tem que fazer a mesma conta em cima e embaixo. Continuando... Simplifica [parte II]. Fica *1* [no denominador e], fica *a* sobre *b* vezes *d* sobre *c* [no numerador da parte III]. Então fazendo essa conta, isso vai ficar *a* vezes *d*, sobre *b* vezes *c* [parte IV]. Que é igual a *a/b* vezes *d/c* [parte V].

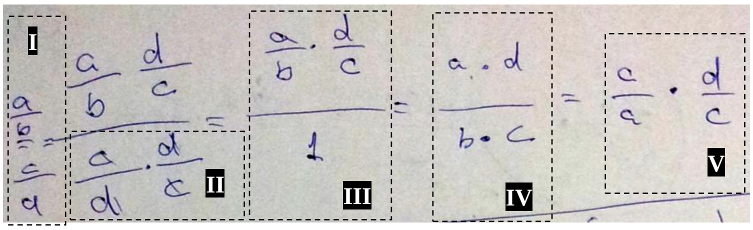


Figura 2. Demonstração da regra de divisão de frações escrita pelo Licenciando*.

Então, saímos daqui [parte I] e chegamos aqui [parte V]. Aí você fez essa conta aqui [se referindo a PR2 abordada na Oficina] e agora substituindo algebricamente a gente percebe a regra. **Observação:* Embora o Licenciando tenha verbalizado todo o processo por meio do qual obteve *a/b* vezes *d/c* [parte V], por um lapso ele não escreveu adequadamente *a/b*.

A demonstração realizada pelo Licenciando tem argumentação similar à da PR2 (feita com um exemplo numérico). Ambas justificam o procedimento de “inverter e multiplicar” se apoiando no princípio da equivalência de frações para multiplicar tanto numerador, quanto denominador pelo inverso multiplicativo do numerador, cuja finalidade é transformar o denominador em 1 e obter a expressão desejada no numerador (parte V da Figura 2). Isto mostra que o futuro professor conhece os elementos constituintes da demonstração e os utiliza para fazer sua generalização (embora fosse possível ter mais rigor), a qual valida o procedimento de divisão para quaisquer duas frações. Trata-se de um conhecimento sintático (pertencente ao KPM) que confirma o Indício 2. Como consequência, o futuro professor mostrou conhecer uma, dentre as diversas demonstrações existentes baseadas no inverso multiplicativo para justificar a regra da divisão de frações (Lopes, 2008; Silva & Almouloud, 2008). Conhece-las pertence ao KoT e isto confirma o Indício 1.

Resumindo, os Indícios 1 e 2 foram confirmados.

Investigando o Indício de conhecimento 3

Na entrevista relembramos o Licenciando de que ele afirmara na Oficina que “tinha uma noção” de que o “por que matemático” podia ser respondido utilizando o caminho apresentado na PR2, mas que tinha “esquecido o inverso multiplicativo”. Em seguida, aproveitamos para questionar:

I: Como você explica o inverso multiplicativo?

L: [...] Nos reais, nos racionais e até mesmo nos números complexos tem o “um” (é o *1+0.i*). Então, inverso multiplicativo é aquele pelo qual a gente multiplica e dá o “um” daquele corpo, daquele anel. Ou seja, é aquele pelo qual a gente consegue multiplicar e dar “um”, chegar no [elemento] neutro.

As duas últimas frases confirmam o Indício 3 de que o Licenciando conhece uma definição de inverso multiplicativo (KoT). Também conhece o inverso multiplicativo do conjunto dos números complexos ($1+0.i$), pertencente ao KoT. Ficou evidente ainda o conhecimento de uma similaridade existente entre três conjuntos numéricos (reais, racionais e complexos), a saber, todos eles possuem inverso multiplicativo (o "um"). Este tipo de relação interconceitual está no KSM.

Resumindo, o Indício 3 foi confirmado e outros conhecimentos foram colocados em jogo: (i) conhece o inverso multiplicativo do conjunto dos números complexos (KoT) e (ii) conhece uma similaridade entre três conjuntos numéricos – todos eles possuem inverso multiplicativo – (KSM).

Investigando o Indício de conhecimento 4

No Episódio o Licenciando mencionou o termo "corpo" algébrico e estabeleceu conexões entre outros conceitos (inverso multiplicativo e conjunto dos números racionais). Isso nos sugeriu, em primeiro lugar, o indício de que ele conhece o conceito de corpo (KoT), por isso investigamos se e como ele o definia.

I: Você consegue definir o que é um corpo?

L: Corpo é uma estrutura algébrica que tem as propriedades... Pra começar a definir um corpo, primeiro eu tenho que ter um anel. Esse anel tem que ser [começa a escrever – figura abaixo]. Definida as operações ele tem que ser um anel pra soma e pra multiplicação. E na soma ele é abeliano, ou seja, valem todas as propriedades (associatividade, comutatividade, tem o zero que é o elemento neutro da adição e tem o inverso aditivo, ou seja, possui inverso aditivo – para todo a, existe um $-a$ tal que $a + (-a)$ é igual a elemento neutro. Pra soma ele é completo e pra multiplicação ele tem que ser... Esse anel tem que ser um domínio de integridade. O que é domínio de integridade? É um anel comutativo, aonde a comutatividade é da multiplicação, possui o 1 que é o elemento neutro da multiplicação e não possui divisor de zero, ou seja, $a.b$ para ser zero, $a=0$ ou $b=0$. Os dois não pode. Pra ser igual a zero um ou outro tem que ser zero. Ou seja, não consigo ter como no Z_p onde 2 vezes 3 é 6 e no Z_6, 2 vezes 3 (os dois são diferentes de zero) e dá zero. Lembra? E pra completar, pra chegar na estrutura do corpo (vou chamar o anel de R), para todo a pertencente a R existe a^{-1} tal que a operado com a^{-1} é igual a 1. Que é o inverso multiplicativo.

O Licenciando mostra conhecer a definição de que corpo é uma estrutura algébrica que possui certas propriedades, as quais ele se recorda de todas, algo pertencente ao KoT. Isto confirma o Indício 4. Durante a explicação ele também mobiliza_outros termos, conceitos, propriedades, exemplos e contraexemplos matemáticos pertencentes ao KoT (anel, anel abeliano, associatividade e comutatividade, elemento neutro, inverso aditivo, domínio de integridade, anel comutativo, "divisor de zero", conjunto Z_p, contraexemplo de "divisor de zero", inverso multiplicativo). Vale destacar que foi apresentada uma definição de inverso multiplicativo mais rigorosa do que a anterior, reforçando nossa conclusão sobre o Indício 3.

A definição de corpo apresentada usa uma rede de distintas estruturas algébricas (como anel, domínio de integridade, propriedades, etc) e isto indica conhecimento da estrutura matemática (KSM).

Resumindo, o Indício 4 foi confirmado e outros conhecimentos foram colocados em jogo, a saber: (i) termos, conceitos, propriedades, exemplos e contraexemplos matemáticos (KoT) e (i) conexões entre estruturas algébricas para construir a definição de corpo (KSM). O conhecimento do conceito de inverso multiplicativo (associado ao Indício 3) foi reforçado.

Investigando o Indício de conhecimento 5

No Episódio o Licenciando afirma que *o conjunto dos racionais é um corpo* e ao definir o que é um corpo (na resposta à pergunta 3) entendemos que ele reconhece que o conjunto dos racionais (focalizado na Oficina) tem a estrutura algébrica necessária para ser corpo. Com isso confirmamos o Indício 5 de que ele conhece uma propriedade deste conjunto que é mais "profunda" do que se vê habitualmente na Educação Básica (trata-se de uma conexão intraconceitual enquadrada no KoT).

A pergunta sobre corpo forneceu informações suficientes para investigarmos o indício em questão e, por isso, nenhuma outra foi necessária. Além disso, se olharmos particularmente a primeira e a última frases de sua resposta, veremos que ele não só conhece que (todo) *corpo tem inverso multiplicativo*, como também sabe que é uma de suas propriedades. Isto reforça a existência do conhecimento que havíamos detectado análise do Episódio da Oficina (item 3 obtido na Fase 2).

Resumindo, o Indício 5 (conexão intraconceitual em KoT) foi confirmado a partir da pergunta anterior (Indício 4). Também foi possível reforçar um conhecimento detectado na Fase 2 ("todo corpo tem inverso multiplicativo").

Investigando o Indício de conhecimento 6

No Episódio o Licenciando afirma que *"Se eu tivesse lembrado que o conjunto dos racionais é um corpo e todo corpo tem um inverso multiplicativo, [então a resposta ao por que] teria que sair de alguma forma desse jeito"*. Com isso ele parece estabelecer alguma conexão entre (i) uma propriedade de um conceito de matemática acadêmica ("todo corpo tem inverso multiplicativo") e (ii) uma propriedade avançada de um conceito da Educação Básica ("conjunto dos racionais é corpo") para, então, justificar o uso do inverso multiplicativo na solução do *por que matemático*. Isto nos deu indícios de que ele conhece conexões interconceituais (pertentences ao KSM). Para investigar isso perguntamos:

I: Além dessa conexão [entre corpo e racionais referente ao Indício 5], você viu mais alguma?

L: Eu lembrei da estrutura de corpo porque a gente faz essas contas lá no universo dos reais, dos racionais (a fração tá lá nos racionais). O conjunto dos racionais é corpo, então pra gente conseguir chegar no 1 [se referindo à parte III da Figura 2] precisa do inverso multiplicativo. Era uma coisa que a gente trabalha tanto aqui (na universidade) que lá na hora, na aula... Parece que é tão difícil de resolver, e não é. Na verdade é fácil. O problema é só encaixar os contextos das coisas e saber que a estrutura exige o inverso.

Nesta resposta há uma manifestação da aplicação de seu conhecimento de estrutura algébrica para resolver um problema de Matemática elementar a respeito da divisão de frações. O Licenciando faz a leitura da situação por meio de um conceito avançado (estrutura de corpo) e isto o permite dizer que se é preciso conseguir o "um" (da PR2 e da sua demonstração), então tem-se que aplicar o inverso multiplicativo (porque todo corpo tem inverso multiplicativo). Neste caso o conjunto dos racionais é o corpo, entretanto, sua estratégia de usar o inverso multiplicativo para obter o "um" seria a mesma usada em todo e qualquer outro *corpo C*. Isto é reforçado por afirmações anteriores:

Indício 3: Nos reais, nos racionais e até mesmo nos números complexos tem o "um" (é o $1+0.i$). [...]

Indício 4: [...] pra chegar na estrutura do corpo (vou chamar o anel de R), para todo a pertencente a R existe a^{-1} tal que a operado com a^{-1} é igual a 1, que é o inverso multiplicativo.

Entendemos que o futuro professor abordou um conteúdo de Matemática elementar a partir de uma perspectiva avançada, algo pertencente ao KSM. Com isso, o Indício 6 foi confirmado indicando o conhecimento de uma conexão entre o conceito de corpo e inverso multiplicativo para justificar o procedimento de divisão de frações (no conjunto dos números racionais).

CONCLUSÕES

Este artigo mostra como realizamos e quais foram os resultados da investigação dos *indícios de conhecimento* de um Licenciando em Matemática, identificados por meio do modelo MTSK no Episódio extraído de uma Oficina de formação sobre um *por que matemático*.

O ponto de partida deste processo foi a primeira análise, *antes da exploração dos indícios*, na qual encontramos o conhecimento de três termos matemáticos e de duas propriedades (ambos KoT). A *exploração dos indícios*, por meio de perguntas específicas em entrevista considerando seus respectivos subdomínios do MTSK (cf. Quadro 1), mostrou que o sujeito de fato possuía os referidos conhecimentos – associados a definição de conceitos (KoT), conexões intra (KoT) e interconceituais (conhecimento da estrutura matemática – KSM), de e sobre uma demonstração/generalização (conhecimento da prática matemática – KPM) – e evidenciou outros, incluindo conhecimento de termos, conceitos, propriedades exemplos e contraexemplos (KoT) e de conexões interconceituais (KSM) (cf. resultados dos Indícios 3 e 4). Com isso, obtivemos tanto um ganho significativo na amplitude dos resultados (aumento na quantidade de conhecimentos detectados), quanto em profundidade, pois inicialmente detectamos conhecimentos superficiais (como conhecer "nome de termos") que se converteram em algo mais rico, consistente e relevante para a prática docente como é o caso do conhecimento dos respectivos conceitos, definições, propriedades, demonstrações e suas conexões.

Identificar mais subdomínios e conhecimentos, assim como obtê-los com mais detalhes possibilita uma maior confiabilidade nos dados. Neste sentido, também vimos que alguns achados foram validados por outros ao longo da análise de indícios, a saber: (i) o conhecimento do Indício 3 é reforçado pela discussão do Indício 4; (ii) o do Indício 6 é reforçado pela discussão do Indício 3 e 4; (iii) o conhecimento de que *todo corpo tem inverso multiplicativo* (Fase 2) é reforçado pela discussão do Indício 5.

Avançamos em relação a outros estudos de episódios envolvendo conhecimentos de professores de Matemática com o MTSK (Flores, Escudero, & Aguilar, 2013; Moriel Junior, Wielewski, & Montes, 2013; Montes, Contreras, & Carrillo, 2013) por analisarmos os resultados de um percurso completo de investigação, incluindo uma primeira análise (Fase 2) e uma segunda análise com foco nos *indícios de conhecimento* (Fase 4). Esta estratégia se configurou numa "triangulação metodológica" (Denzin, 1989), por meio da qual obtivemos elementos que mostram ser possível ampliar a compreensão sobre o fenômeno investigado (extraído de episódio, cenário, trecho, etc.) por meio de perguntas elaboradas especificamente para cada indício, considerando o subdomínio MTSK ao qual está associado. A análise de outras estratégias metodológicas, particularmente as empregadas nas teses que usam o MTSK (em andamento), fornecerão mais elementos para confirmar e fornecer mais detalhes sobre a relevância e necessidade da exploração de indícios de conhecimento especializado de (futuros) professores de Matemática.

Por fim, destacamos dois pontos importantes sobre este processo de investigação de indícios. O primeiro é que nem sempre haverá uma correspondência entre o número de indícios e de perguntas, pois uma mesma pergunta pode gerar informações necessárias ou suficientes para analisar diferentes indícios (cf. visto entre a pergunta 1 e os Indícios 1 e 2 e também entre pergunta 3 e os Indícios 4, 5 e 6). O segundo é que embora os indícios identificados no Episódio estejam todos nos subdomínios de conhecimento matemático (MK), também são encontrados indícios relacionados aos subdomínios de conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK) em teses e artigos (Flores, Escudero, & Aguilar, 2013; Moriel Junior et al., 2013).

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of teacher education, 59*(5), 389-407.

Bardin, L. (1977). *Análise de Conteúdo*. Lisboa: Ediçoes 70.

Bogdan, R, & Biklen, S. (1991). *Investigação qualitativa em educação*: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora.

Carrillo, J, Climent, N, Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialised Knowledge For Mathematics Teaching. In B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (8. ed., pp. 2985-2994). Antalya, Turkey: Middle East Technical University, Ankara.

Denzin, N. (1989). *The Research Act (3rd edn)*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall. [Vol. I: 185]

Escudero, D. I, Flores, E., & Carrillo, J. (2012). El Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas. *Actas de la XV Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (15. ed., pp. 35-42). México.

Flores, E., Escudero, D. I., & Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. In A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (17. ed., pp. 275-282). Bilbao, Espanha: SEIEM.

Flores, E., Escudero, D. I., & Carrillo, J. (2013). A theoretical review of specialised content Knowledge. In B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (8. ed., pp. 3055-3064). Antalya, Turkey: Middle East Technical University, Ankara.

Isiksal, M., & Cakiroglu, E. (2011). The nature of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge: the case of multiplication of fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*(3), 213-230.

Lima, E. L. (1982). Alguns porquês. *Revista do Professor de Matemática*, *1*(1).

Lopes, A. J. (2008). O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 21*(31), 1-22.

Montes, M. A., Aguilar, A, Carrillo, J, & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). MTSK: from common and horizon knowledge to knowledge of topics and structures. In B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (8. ed., pp. 3185-3194). Antalya, Turkey: Middle East Technical University, Ankara.

Montes, M. A., Contreras, L. C., & Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. In A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (17. ed., pp. 403-410). Bilbao, Espanha: SEIEM.

Moreira, P. C., & Ferreira, M. C. C. (2008). A Teoria dos Subconstrutos e o Número Racional como Operador: das estruturas algébricas às cognitivas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 21*(31), 103-127.

Moriel Junior, J. G., & Wielewski, G. D. (2013). *Seis possibilidades de resposta para o por quê matemático sobre divisão de frações.* Paper presented at the Seminario Educação (SEMIEDU 2013), Cuiabá.

Moriel Junior, J. G., Wielewski, G. D., & Montes, M. A. (2013). *Conhecimentos mobilizados durante uma formação docente sobre por quês matemáticos: o caso da divisão de frações.* Paper presented at the VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática (CIEM), Canoas, Brasil.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher, 15*(2), 4-14. doi: http://www.jstor.org/stable/1175860

Silva, M. J. F., & Almouloud, S. A. (2008). As Operações com Números Racionais e seus Significados a partir da Concepção Parte-todo. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 21*(31), 55-78.

Szymanski, H., Almeida, L. R., & Pradini, R. C. A. R. (2011). *A entrevista na pesquisa em educação: a prática reflexiva* (4 ed.). Brasília: Liber Livro.

[1] Este trabalho de Doutorado pela Rede Amazônica de Ensino de Ciências e Educação Matemática (REAMEC) contou com apoio do Programa de Doutorado Sanduíche no Exterior (Bolsista da CAPES – Processo nº 1219-61-3) e da FAPEMAT (Processo nº 121639/2013).

LA VIDA ES SUEÑO: PROYECTOS DE ESTADÍSTICA EN INGENIERÍAS

Life is a dream: project work in statistics with engineering bachelors

Maria M. Nascimento[a], J. Alexandre Martins[b], Assumpta Estrada[c]

[a]Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, [b]Instituto Politécnico da Guarda (UDI/IPG),

[c]Universitat de Lleida,

Resumen

En el primer semestre del curso académico 2012/2013 se introdujo el trabajo con proyectos en la asignatura de Probabilidad y Estadística de diferentes grados de ingeniería (Civil, Energía y Mecánica) de una universidad portuguesa. Los proyectos realizados por los estudiantes de segundo curso del primer ciclo se hicieron con base a una encuesta de un trabajo final de Master de ingeniería civil. El análisis de resultados de los diferentes trabajos se realizó teniendo en cuenta los componentes del razonamiento estadístico contemplados en los estudios de Pimenta (2006), Nascimento y Martins (2008) y relacionándolos con los descriptores de Dublín para el Espacio Europeo de Educación Superior del Plan Bolonia. Dicho análisis revela que los estudiantes reconocen la necesidad de los datos, y se sienten motivados con el tema del proyecto siendo el razonamiento con modelos estadísticos el mayor problema que encontramos.

Palabras clave*: didáctica, educación estadística, proyectos.*

Abstract

In the first semester of 2012/2013 academic year, we have approached teaching and learning statistics using the project work. Here we will present and discuss the proposal made to the students in the Probability and Statistics course of different engineering degrees – Civil, Energy, and Mechanics Engineering from a Portuguese university. In the first cycle, a survey from a MSc. thesis in civil engineering was the basis of a hands-on project work developed by second year students in their courses. We examined the results of the project work written reports based on the approach of Pimenta (2006), Nascimento and Martins (2008) and relating it with the Dublin Descriptors of the Bologna Process for the Higher Education in Europe. In an analysis summary, students recognized the need of data and the project work theme motivated them, and their main difficulty was reasoning with statistical models.

Keywords: *didactics, statistic education, project work*

INTRODUCCIÓN

La importancia de la enseñanza y el aprendizaje de la estadística a nivel universitario quedan ampliamente justificados por la presencia de esta materia en la mayoría de los planes de estudio.

Además, desde la década de los noventa, se ha puesto de manifiesto la importancia de las denominadas competencias transversales o genéricas en el desempeño académico y profesional de los titulados universitarios y los nuevos títulos de grado, postgrado y doctorado adaptados al Espacio Europeo de Educación Superior (EEES) incorporan la exigencia de que los estudiantes sean formados en dichas competencias, formación cuyo logro debe ser evaluado dando respuesta a los niveles requeridos por los Descriptores de Dublín para cada nivel formativo.

Al mismo tiempo, el proceso de Bolonia plantea un cambio de paradigma relativo a los procesos de enseñanza y aprendizaje: de la metodología tradicional centrada en el profesor a una metodología

Nascimento, M. M., Martins, J. A., Estrada, A. (2014). La vida es sueño: proyectos de estadística en ingenierías. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 475-483). Salamanca: SEIEM.

centrada en el estudiante y los estudiantes deben cumplir con los descriptores de Dublín antes citados para cada grado del ciclo.

Sin embargo, este es un proceso en curso cuya implementación no es fácil, así en Eurydice Network (2012) se argumenta que “el aprendizaje centrado en el estudiante es un asunto complejo que es difícil de integrar en la realidad cotidiana de educación superior. Debe comprender las acciones que aseguren que los estudiantes aprenden a pensar críticamente”.

Este paradigma de enseñanza está estrechamente relacionado con nuestra perspectiva sobre la enseñanza y el aprendizaje de la estadística a través de los proyectos pues el trabajo con proyectos permite situar a los estudiantes en el centro del proceso al poder contextualizar los contenidos en situaciones interesantes para ellos e integrar la enseñanza de la estadística dentro de un proceso más general de investigación. Además para Rivas et al. (2013) esta metodología de enseñanza basada en proyectos sirve para dar sentido a las técnicas de análisis de datos.

En esta misma línea Ali et al. (2011) afirman “que el enfoque de la enseñanza en un curso básico de estadística mediante el uso de datos reales, la participación activa de los estudiantes, el uso de ordenador, así como el uso de los proyectos y el trabajo en equipo, ha sido aceptado como método alternativo a la enseñanza tradicional”, Además dicha enseñanza tradicional, según Batnero et al. (2013) transmite una estadística sin sentido para los estudiantes.

También Spence et al. (2011) sugieren “como una buena práctica que los estudiantes reciban un poco de experiencia ‘manual’ con un proyecto de investigación.”

Finalmente nuestra experiencia con estudiantes en diferentes grados de ingeniería (Nascimento y Martins, 2008), nos indica que a diferencia de la metodología tradicional el trabajo con proyectos parece tener los componentes necesarios para motivar a los estudiantes a aplicar no sólo los conocimientos técnicos sino también conocimientos estratégicos lo que implica, plantearse preguntas que conducen a desarrollar las diferentes fases del ciclo PPDAC (Problema, Plan, Datos, Análisis y Conclusión) de Wild y Pfannkuch (1999) sobre cómo trabajar con un proyecto (Figura 1).

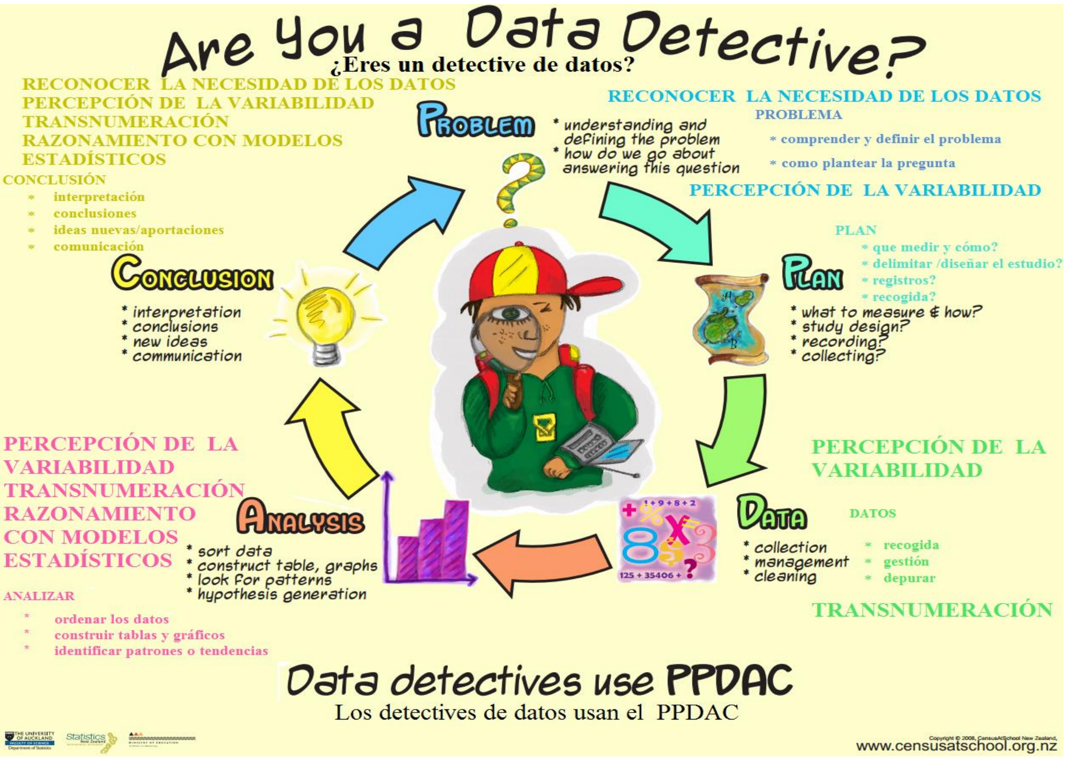


Figura 1. Ciclo PPDAC y tipo de razonamiento (Wild y Pfannkuch, 1999)

El objetivo de esta comunicación es proponer el trabajo con proyectos, como metodología centrada en el estudiante, y evaluar si los resultados de este cambio metodológico contemplan los descriptores de Dublín y desarrolla las distintas fases del ciclo PPDAC.

Nuestra propuesta curricular es ofrecer a los estudiantes un cambio de enfoque donde no sólo se hace referencia a los conceptos y procedimientos, sino que se enfatiza todo el proceso de razonamiento estadístico y el sentido de los datos. (Batanero y Díaz, 2004, 2011)

Nuestro objetivo final es que sean conscientes de sus propias dificultades, animarles a trabajar en grupos pequeños y a detectar sus necesidades como futuros profesionales.

A la vista de lo expuesto hasta ahora y aceptando el paradigma del aprendizaje centrado en el estudiante, en el primer semestre del curso académico 2012/2013 (Septiembre a Diciembre de 2012) se introdujo el trabajo con proyectos en la asignatura de Probabilidad y Estadística de diferentes grados de ingeniería (Civil, Energía y Mecánica) de una universidad portuguesa. Este proyecto se desarrolló como trabajo de grupos extra aula.

En los tres grados del 1er ciclo, utilizamos una encuesta adaptada de un trabajo de Master de Ingeniería Civil acerca de los consumos de energía en el sector residencial. Todos los alumnos que eligieran la evaluación continuada tenían que ejecutar el proyecto y el resto del grupo de alumnos optó por el examen final y no avaluación continuada. Ejecutar el proyecto comportaba: adaptar la encuesta incluyendo cuestiones de caracterización de los hogares (número de personas que ahí habitan, edades, escolaridades, etc.), testar la encuesta, pasar la encuesta, codificar los datos y, por fin, ejecutar el análisis de datos teniendo como objetivo conocer los perfiles de sus hogares o bien de hogares de sus amigos, así como los respetivos consumos de energía. Por otro lado, utilizamos el ciclo PPDAC de Wild y Pfannkuch (1999) citado con el fin de desarrollar un proyecto estadístico en fases utilizando los cinco componentes básicos del razonamiento estadístico. Para analizar los informes escritos de los grupos de alumnos que hicieron el proyecto, nos basamos en las categorías presentadas por Pimenta (2006) en su estudio sobre el razonamiento estadístico en proyectos del área de salud.

Este tipo de razonamiento, incluye según (Wild & Pfannkuch, 1999) cinco componentes fundamentales:

- Reconocer la necesidad de los datos: La base de la investigación estadística es la hipótesis de que muchas situaciones de la vida real sólo pueden ser comprendidas a partir del análisis de datos que han sido recogidos en forma adecuada. La experiencia personal o la evidencia de tipo anecdótico no es fiable y puede llevar a confusión en los juicios o toma de decisiones.

- Transnumeración: Los autores usan esta palabra para indicar la comprensión que puede surgir al cambiar la representación de los datos. Al contemplar un sistema real desde la perspectiva de modelización, puede haber tres tipos de transnumeración: (1) a partir de la medida que “captura” las cualidades o características del mundo real, (2) al pasar de los datos brutos a una representación tabular o gráfica que permita extraer sentido de los mismos; (3) al comunicar este significado que surge de los datos, en forma que sea comprensible a otros.

- Percepción de la variabilidad: La recogida adecuada de datos y los juicios correctos a partir de los mismos requieren la comprensión de la variabilidad que hay y se transmite en los datos, así como de la incertidumbre originada por la variabilidad no explicada. El razonamiento estadístico comienza al percibir la variabilidad de la situación y permite adoptar estrategias en cada paso de la investigación. La estadística permite hacer predicciones, buscar explicaciones, hallar causas y aprender del contexto. Se buscan y caracterizan los patrones en los datos para comprenderlos.

- Razonamiento con modelos estadísticos: Cualquier útil estadístico, incluso un gráfico simple, una línea de regresión o un resumen puede contemplarse como modelo, puesto que es una forma de representar la realidad. Lo importante es diferenciar el modelo de los datos y al mismo tiempo relacionar el modelo con los datos.

Integración de la estadística y el contexto: Es también un componente esencial del razonamiento estadístico. Este tipo de razonamiento aparece especialmente en las fases iniciales (planteamiento de modelo) y finales (interpretación del modelo en la realidad) del ciclo de modelización. (Batanero y Díaz, 2013).

Por último, los descriptores de Dublín señalan cinco elementos básicos para los estudios de grado (1er ciclo) (JQI, 2004): 1) conocimiento y comprensión; 2) su aplicación; 3) hacer juicios; 4) la comunicación de información, ideas, problemas y soluciones; y 5) competencias/objetivos de aprendizaje.

A la luz del proceso de Bolonia en 2010 nos involucramos en el cambio metodológico y los cursos de estadística se planificaron teniendo en cuenta el nivel de los descriptores de Dublín y el aprendizaje de la estadística centrado en el estudiante. Por ello al hacer el análisis del contenido de los proyectos – de los informes escritos (IE) – creímos necesario conectar los componentes del razonamiento estadístico, los descriptores de Dublín y las fases del ciclo de investigación, PPDAC.

En la Figura 2 se presenta el paralelismo que se establece entre los componentes PPDAC del ciclo de investigación los componentes del razonamiento estadístico (presentados en la Figura 1) y los cinco elementos de los descriptores de Dublín (Raposo et al., 2013).

Ciclo – PPDAC (Wild y Pfannkuch, 1999; Raposo et al. 2013)	**Componentes del razonamiento estadístico** (ítems de Pimenta, 2006)	**Descriptores de Dublin** (JQI, 2004)
Problema (comprende y define el problema; establece una estrategia de resolución) Conclusión (interpretación; conclusiones; aportaciones ; comunicación)	Reconoce la necesidad de los datos 1) Reconoce la necesidad de los datos 2) Caracteriza adecuadamente la muestra. 3) Conjunto de datos apropiados 4) Desarrollo del cuestionario	1) Conocimiento y comprensión 2) Aplicación de los conocimientos
Datos (Recogida; gestión; depuración) Análisis (clasifica los datos; construcción de tablas, gráficos; busca patrones; establece hipótesis) Conclusiones	Transnumeración 1) Construcción adecuada de tablas 2) Interpretación correcta de la tabla 3) Construcción adecuada de gráficos 4) Interpretación correcta de gráfico 5) Interpretación correcta de las medidas de tendencia central. 6) Interpretación correcta de la dispersión de los datos 7) Resume las características estadísticas de los datos	1) Conocimiento y comprensión 2) Aplicación de los conocimientos 3) Toma de decisiones
Plan (que medimos y como? Diseño del estudio? que tratamiento) Datos Análisis Conclusión	Percepción de la variabilidad 1) Comprensión de la variabilidad 2) Percepción de la incertidumbre 3) Percepción numérica	1) Conocimiento y comprensión 2) Aplicación de los conocimientos 3) Toma de decisiones
Análisis Conclusión	Razonamiento con modelos estadísticos 1) Razonamiento con modelos estadísticos 2) Condiciones de aplicación de los métodos 3) Uso adecuado de los test de hipótesis 4) Establecimiento correcto de hipótesis	1) Conocimiento y comprensión 2) Aplicación de los conocimientos 3) Toma de decisiones
Problema Plan Datos Análisis Conclusión	Integración de la estadística y el contexto 1) Adecuar la estadística al contexto 2) Integración de la estadística al contexto: presentación oral 3) Integración de la estadística al contexto: trabajo escrito (texto correcto/razonado)	1) Conocimiento y comprensión 2) Aplicación de los conocimientos 3) Toma de decisiones 4) Comunicación 5) Competencias del aprendizaje

Figura 2. Componentes PPDAC del ciclo de investigación, los componentes del razonamiento estadístico y los elementos de los descriptores de Dublín (Raposo et al., 2013)

MÉTODO, RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La Figura 3 resume las fases del proyecto de trabajo de grados de ingeniería Civil, Energía y Mecánica en el curso de Probabilidad y Estadística, durante el primer semestre del segundo curso de su grado. En ella también se indican las diferentes actividades desarrolladas por el profesor y los estudiantes, así como una descripción general.

El trabajo del proyecto (informes escritos y su presentación oral y discusión) pondera el 20% de la nota final de la evaluación continua (que también incluía un 10% para tareas y 2 pruebas, con 35% cada una). Los equipos de estudiantes eran de 2 o 3 elementos. De los 61 estudiantes participantes de todos los cursos de Probabilidad y Estadística de los grados de ingeniería referidos (36 % del total de 169 estudiantes), 42 (69 %) eran hombres.

Se presentaron 25 informes escritos del proyecto (IE): 10 IE involucrando 23 de 75 estudiantes de ingeniería Civil, 7 IE involucrando 18 de 45 estudiantes de Energía y 8 IE involucrando 20 de 49 estudiantes de ingeniería Mecánica.

A continuación, resumimos el análisis de los IE. Examinamos los resultados basándonos en los elementos de Pimenta (2006, Figura 1), y los relacionamos con los descriptores de Dublín (Nascimento y Martins, 2008).

Descripción General	Ciclo PPACD	Participantes	Tareas
Utilizamos una encuesta adaptada de un (TFG) Trabajo Final de Master de Ingeniería Civil acerca de los consumos de energía en el sector residencial por resultar un tema interesante para las tres titulaciones de ingeniería. [1] El proyecto de trabajo se inicia en clase, pero la parte principal se hizo en las horas de tutoría o por e-mail [2] Los estudiantes hicieron su trabajo fuera de clase y podían ponerse en contacto con el profesor por correo electrónico o en las horas de tutoría (como se contempla en el he European Credit Transfer System)	Problema	a. Profesor b. Estudiantes	a. Supervisión y compilación de trabajos realizados por los grupos sobre la construcción de la encuesta y de las tablas de códigos en el procesador de textos b. Estudio los objetivos principales de la encuesta del TFG para comprender el marco teorico y para ser capaz de entender si se necesitan cambios en las preguntas. Los grupos de 2 o 3 estudiantes, definidos por ellos mismos. Cada grupo contribuyo con una cuestión sobre las características de los respondientes Escribir la parte modificada de la encuesta y construir la tabla de códigos para cada variable asignada a las distintas preguntas de la encuesta e introducirlas al procesador de textos.
[1,2] La muestra elegida era de conveniencia por más fácil para los estudiantes la recolección de datos	Plan	a. Profesor b. Estudiantes	a. Elije el tipo de muestra, a pesar de sus limitaciones b. Cada estudiante tenía que entrevistar a dos propietarios de casas para conseguir 2 encuestas. Discusión en grupo de las ventajas y desventajas del tipo de muestra.
[1,2] Crean un fichero con la hoja de cálculo después de la codificación de cada encuesta	Datos	a. Profesor b. Estudiantes	a. llenar la encuesta y construir un ejemplo de hoja de calculo con los códigos de la encuesta b. Cada grupo hizo una hoja de cálculo con los códigos de cada encuesta
[1,2] Escriben el informe de trabajo del proyecto y preparan la presentación (10 minutos fuera del horario de clase)	Análisis y Conclusiones	a. Profesor b. Estudiantes	a. Compilar toda la hoja de trabajo de los grupos en uno y tutoría para ayudar con el análisis estadístico b. Utilizando la hoja de cálculo del proyecto el grupo tuvo que realizar el análisis de los datos (principalmente estadísticas descriptivas) y presentar sus conclusiones

Figura 3. Síntesis de las fases del proyecto de trabajo desarrollado por el profesor y los estudiantes (acrónimo inglés, PPACD, de PPDAC)

Fue usada una puntuación en que el si era clasificado con un punto y el no con cero puntos. Así se evaluaran (rever Figura 2): a) reconociendo la necesidad de datos: reconocer la necesidad de datos, caracterizar correctamente la muestra, usar adecuadamente de datos y desarrollo de un cuestionario; b) transnumeracíon: la interpretación correcta de una tabla, resumo los aspectos claves de las estadísticas, los gráficos producidos correctamente, los gráficos interpretados correctamente, las medidas de tendencia central bien interpretadas, las medidas de dispersión bien interpretadas; c) Percepción de variación: la percepción de variación, la percepción de incertidumbre y la percepción numérica; d) Razonamiento con modelos estadísticos: el razonamiento con modelos estadísticos, respetar los supuestos del método, el uso correcto de las pruebas de hipótesis; la creación correcta de hipótesis; e) La integración de las estadísticas en el contexto: la integración de las estadísticas en el contexto, los gráficos apropiados para el tipo de variable, los gráficos asignados al problema, las medidas de tendencia central asignadas al problema; las medidas de tendencia central asignadas a las variables; las medidas de difusión apropiadas al problema; las medidas de difusión apropiadas a las variables. En el análisis serán enfatizados los aspectos más pertinentes.

Reconociendo la necesidad de datos

Los 25 grupos que participaron en el proyecto reconocieron la necesidad de utilizar datos en su IE. En la caracterización de la muestra consideramos un error cuando los estudiantes confundían los términos “población” y “muestra”. También decidimos considerar como erróneo si no explicaron que era una muestra de conveniencia (56% de los 25 IE, la Figura 2, el Plan).

Todos los 25 grupos que participaron en el proyecto contribuyeron con una pregunta al desarrollo y mejora de la encuesta utilizada (IE) y los registros para el maestro del (IE). Los principales elementos de los descriptores de Bolonia (Figura 2) se calificaron positivamente en el 56% de los IE, aunque detectamos algunos errores importantes.

Transnumeración

En lo que respecta a la transnumeración, la producción de tablas en los IE se llevó a cabo positivamente (76 %), así como su interpretación (64 %). Los principales errores detectados en las tablas presentadas en los IE fueron el uso de los códigos de las variables por lo que las tablas quedaron ilegibles, así como algunas dudas en los cálculos de porcentajes.

En lo que concierne a los gráficos de los IE, el 52 % estaban bien pero su interpretación correcta se redujo a 44 % debido a texto inexistente o confuso.

Los principales errores en los IE estaban en la elección del tipo de gráfico (por ejemplo, gráfico de sectores con adición total de 100 % para cuestiones de respuesta múltiple, gráfico de barras con la moda, la media y la mediana), histogramas incorrectos así como su interpretación ya que se utilizaron diferentes amplitudes de intervalo (por ejemplo, para edades y para tiempo en que estaba la casa ocupada durante el día).

En cuanto a la interpretación de las medidas de tendencia central, el 60 % de los IE no tenían errores y un 40% de ellos también interpretan correctamente las medidas de dispersión Destacamos como errores importantes los que no calculan alguna de las medidas de dispersión o informes que incluyeron en los cálculos los códigos de las no respuestas.

La percepción de variación

El 52% de los IE mostraron que perciben correctamente la variación – las medidas de dispersión presentadas, sus interpretaciones y el contexto. El peor resultado obtenido es el de la percepción de incertidumbre ya que el 80% de los IE fueron calificados negativamente (por ejemplo, uno de los grupos escribió como conclusión a partir de esta muestra de conveniencia “que la sociedad portuguesa es una sociedad que cada día piensa más y más sobre el medio ambiente”). La percepción numérica era la mejor ya que el 80 % de los IE tenía calificaciones positivas (ejemplo de uno de los errores es el uso de decimales innecesarios). Cada uno de los descriptores de Bolonia en la percepción de la variación tenían el 60% de IE sin errores, excepto el de hacer juicios que reveló peores resultados con solo un 20% sin errores.

Razonamiento con modelos estadísticos

En este componente del razonamiento estadístico sólo en 3 de los 25 (12 %) IE se utilizaron bien los modelos estadísticos. Este fue el peor desempeño detectado, tal vez porque los estudiantes estaban muy ocupados al final del semestre e hicieron sólo un breve análisis descriptivo en los IE. En nuestra revisión de los principales elementos de los descriptores de Bolonia el 12% de los IE se calificaron positivamente en relación al conocimiento y la comprensión, así como su aplicación. De los IE analizados, las conexiones entre los elementos del indicador para hacer juicios sólo el 12% de los IE los realizaron plenamente.

La integración de las estadísticas en el contexto

Dado que los estudiantes utilizaron poco los modelos estadísticos su análisis de la encuesta se quedó incompleto. A pesar de esto, el 52% de los IE tenía valoraciones positivas en la integración de la estadística (descriptivos) en el contexto. Las presentaciones orales y debate se clasificaron positivamente en el 72% de los IE.

La corrección del texto de los IE se clasificó positivamente en el 52% de ellos y además se dio una segunda oportunidad para mejorarlos después de su presentación.

Los descriptores de Bolonia revelaron que el 60% de los IE eran positivos para el conocimiento y comprensión, así como para su aplicación. Como se mencionó antes las conexiones entre los elementos del indicador para hacer juicios tenían potencial para desarrollar la capacidad de hacerlos, pero sólo en 52% de los IE lo han alcanzado.

CONCLUSIONES

Como ya se presentó en Nascimento y Martins (2008) y ahora ven reforzado, para estos cursos el enfoque propuesto con los descriptores de Dublín sigue teniendo potencial para ser mejorado con esta práctica de trabajo con proyectos. A pesar del hecho de que los IE se centraron principalmente en la estadística descriptiva, los estudiantes reconocen la necesidad de los datos, y también se sintieron motivados con el tema del proyecto (su área profesional). Estos resultados coinciden con los de Godino et al. (2013) quienes consideran el uso de los proyectos como una estrategia para dar sentido a las técnicas y teorías matemáticas. En esta práctica de trabajo con proyectos quedan otras cuestiones sin resolver... En primer lugar el trabajo con proyectos debe tener una programación más limitada y concreta con el fin de permitir más tiempo para comentarios y dialogo entre profesor y estudiantes. En el año académico 2012/13 el mayor problema que encontramos fue el razonamiento con modelos estadísticos ya que el 88% de los 25 grupos lo "evitó" y esto sin duda permitiría completar mejor el análisis estadístico. Otros problemas más inesperados fueron la elección de gráficas y sus interpretaciones, así como las medidas de dispersión y sus interpretaciones. Eso nos hará tener más cuidado para las próximas implementaciones del trabajo con proyectos, concretamente nos hará insistir en las etapas de análisis y conclusiones del ciclo PPDAC. A la vista de los resultados obtenidos también sugerimos para futuros trabajos que sería conveniente el que los alumnos conocieran con anterioridad los ítems de Pimenta (2006).

Para terminar, sólo añadir que nos queda aún la esperanza de poder seguir mejorando nuestro trabajo con y por los estudiantes de ingeniaría: "(…) que toda la vida es sueño, y los sueños, sueños son…" [Segismundo, Calderón de la Barca, 1635]. Es lo que hacemos con ellos y ¡nos atrevemos a continuar soñando!

Agradecimientos: Este trabajo se ha realizado al amparo del Projecto EDU2010-14947 (MICIIN, España) y del Projecto PEst-OE/EGE/UI4056/2011 del UDI/IPG financiado por Fundação da

Ciência e Tecnologia (FCT, Portugal). Este trabajo también se ha realizado al amparo de FCT/MEC via hondos nacionales (PIDDAC) y cofinanciado por FEDER a través del COMPETE – Competitiveness Factors Operational Programme como marco del Projecto PEst-C/CED/UI0194/2013 vía Centro de Investigação Didática e Tecnologia na Formação de Formadores (CIDTFF, LabDCT-UTAD-UA, Portugal).

Referencias

Ali, Z., Shahabuddin, F., Abidin, N., Suradi, N. & Mustafa, Z. (2011). Teamwork Culture in Improving the Quality of Learning Basic Statistics Course. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 18, 326–334.

Batanero, C. y Diaz, M. C. (2005) El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la Estadística En I Congresso de Estatística e Investigação Operacional da Galiza e Norte de Portugal/VII Congreso Galego de Estatística e Investigación de Operacións. Guimarães 26, 27 e 28 de Outubro de 2005.

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J.M. y Arteaga P. (2011). Enseñanza de la estadística a través de proyectos. En Batanero, C. y Díaz, C. (Eds.) Estadística con proyectos. Granada: Universidad de Granada.

Batanero, C.; Díaz, C.; Contreras, J. M. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. Números, Volumen 83, julio de 2013, páginas 7-18

Godino, J. D.; Arteaga, P.; Estepa, A.; Rivas, H. (2013): Desafíos de la enseñanza de la estadística basada en proyectos. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 173-180). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

Eurydice Network (2012). *The European Higher Education Area in 2012: Bologna Process Implementation Report*. (Education, Audiovisual and Culture Executive Agency P9 Eurydice). Brussels, Belgium. doi:10.2797/81203

JQI, Joint Quality Initiative, (2004). Shared 'Dublin' descriptors for the Bachelor's, Master's and Doctoral awards. *A report from a JQI Informal Group.* Dublin: Ireland. On line: http://www.jointquality.nl/content/descriptors/CompletesetDublinDescriptors.doc

Nascimento, M. & Martins, J. A., (2008). Teaching and Learning of Statistics: The Project Approach. In 11th ICME – *International Congress on Mathematical Education*, *Monterrey*, Mexico, 6-13 July 2008. TSG14: Research and development in the teaching and learning of statistics. On-line: http://tsg.icme11.org/ document/get /483

Pimenta, R. (2006). Assessing Statistical Reasoning through Project Work. In A. Rossman, B. Chance (Eds.) *ICOTS 7*, [CD-ROM]. Brazil: IASE and ISI.

Raposo, S., Nascimento, M. M. da S., Estrada, A., & Martins, J. A., (2013). Pegada ecológica: tarefas estatísticas. *Primeras Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria.* On line: http://www.jvdiesproyco.es/documentos/ACTAS/ 2%20Comunicacion% 2055.pdf

Rivas, H., Godino, J. D., Arteaga, P. y Estepa, A. (2013). Desarrollo del conocimiento estadístico comúny avanzado en estudiantes de magisterio. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent(Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 467-474). Bilbao: SEIEM.

Spence, D., Sharp, J. & Sinn, R. (2011). Investigation of factors mediating the effectiveness of authentic projects in the teaching of elementary statistics. *Journal of Mathematical Behavior*, 30, 319– 332. On-line: www.elsevier.com/locate/jmathb

Wild, C.J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (with discussion). *International Statistical Review*, 67(3), 223-265.

Webgrafia

de la Barca, Calderón. (1635) La Vida es Sueño. On-line: http://books.google.es/books?id=0p1FAAAAcAAJ&pg=PT4&dq=%22la+vida+es+sue%C3%B1o%22&hl=es&sa=X&ei=fYw4U7H0N4mhQfmz4DwBw&ved=0CEIQ6AEwAQ#v=onepage&q=%22la%20vida%20es%20sue%C3%B1o%22&f=false

ANSIEDAD HACIA LAS MATEMÁTICAS, AGRADO Y UTILIDAD EN FUTUROS MAESTROS

Anxiety towards Mathematics, Enjoyment and Utility for Future Primary Teachers

Rosa Nortes, Andrés Nortes

Universidad de Murcia

Resumen

Para conocer si los futuros maestros de Primaria tienen ansiedad hacia las Matemáticas se han elegido dos muestras de alumnos de la Universidad de Murcia en dos cursos consecutivos que estudian actualmente el Grado y se les han aplicado dos escalas de ansiedad, una de agrado y una de utilidad. Los resultados obtenidos indican que el nivel de ansiedad se mantiene estable, que al alumnado le agradan poco las Matemáticas aunque le encuentran utilidad, que la ansiedad ante un examen es alta y que las chicas, aunque sienten mayor agrado por las Matemáticas, sin embargo tienen mayor ansiedad que los chicos. Se obtiene en las dos muestras que a mayor utilidad y agrado tienen los alumnos por las Matemáticas es menor su ansiedad hacia las mismas.

Palabras clave: *ansiedad, agrado, utilidad, enseñanza-aprendizaje, matemáticas.*

Abstract

In order to determine whether or not future primary school teachers suffer from anxiety towards mathematics, a sample of students from the University of Murcia was chosen from two consecutive years currently studying for the Degree in Primary Education. Two scales for measuring anxiety – one of enjoyment and one of utility – were applied. The results obtained indicate that the level of anxiety remains stable; students do not often find enjoyment in mathematics although they do find utility; anxiety when faced with an exam is high, and female students, although they derive more pleasure from mathematics, feel more anxiety than male students. Finally, the study finds that in the two samples, the more enjoyment and utility they find in mathematics, the less anxiety they feel.

Keywords: anxiety, enjoyment, utility, mathematics, teaching and learning

ÍNTRODUCCIÓN

Hasta ahora los trabajos empíricos de ansiedad hacia las Matemáticas, agrado o utilidad se han realizado sobre una muestra analizando y contrastando con investigaciones anteriores. Aquí se parte de dos muestras de alumnos de la titulación Grado Maestro de Primaria en dos cursos académicos consecutivos 2012/13 y 2013/14 para medir su nivel de ansiedad, agrado y utilidad contrastando los resultados, viendo si se mantienen o cambian. Para ello, se utilizan dos cuestionarios distintos de ansiedad, un cuestionario de agrado y uno de utilidad, todos ellos con el mismo intervalo de puntuación, validados y fiables a lo largo de muchos trabajos sobre actitudes hacia las matemáticas.

MARCO TEÓRICO

Caballero y Blanco (2007) –siguiendo a McLeod (1989) y a Gómez-Chacón (2000)- consideran la dimensión afectiva como un amplio rango de sentimientos y estados de ánimo que incluyen sentimientos, emociones, creencias, actitudes, valores y apreciaciones. E Hidalgo et al. (2013) denomina perfil emocional matemático a un conjunto de factores como capacidad de conocernos a nosotros mismos, atribuciones de causalidad, perseverancia, autoconcepto, regulación emocional, aburrimiento… y analizan una muestra de sujetos para comprender como esos factores afectivos

Nortes, R., Nortes, A. (2014). Ansiedad hacia las matemáticas, agrado y utilidad en futuros maestros. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 485-492). Salamanca: SEIEM.

determinan el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Y en Palacios et al. (2013) contrastan mediante un modelo de ecuaciones estructurales las posibles causas y las consecuencias de la ansiedad a partir de cuatro escalas.

Dentro del perfil emocional matemático se encuentran la ansiedad, el agrado y la utilidad. Y en PISA 2012 (OCDE, 2013) se menciona que la ansiedad está íntimamente relacionada con el rendimiento en Matemáticas, influyendo de forma desfavorable un concepto negativo sobre sí mismo, baja confianza en las propias posibilidades y un alto grado de ansiedad, presentando los estudiantes españoles respecto a los de la OCDE una mayor ansiedad y por género más ansiedad las chicas que los chicos.

Son numerosos los estudios experimentales realizados sobre la dimensión afectiva de los estudiantes, analizando principalmente la ansiedad, siendo especialmente importantes los resultados de aquellos que en un futuro van a ser profesores de matemáticas. Debido a que en los futuros maestros hay un porcentaje superior al 70 % de chicas, se analizan los resultados por género.

Gil, Blanco y Guerrero (2006) obtienen en una muestra de 346 alumnos, 166 hombres y 180 mujeres de la ESO que el nivel de ansiedad cuando el profesor propone por sorpresa la resolución de un problema es superior en las chicas que en los chicos.

Muñoz y Mato (2007) aplicaron a una muestra de 1220 alumnos (586 chicos y 634 chicas) un cuestionario elaborado por ellos para determinar la ansiedad hacia las matemáticas en alumnos de ESO. Obtuvieron como puntuación más alta la ansiedad ante los exámenes (3,61) y como más baja ante situaciones de la vida real (1,62), siendo la ansiedad media 3,12 en una escala de 1 a 5.

Rosario et al. (2008) en un estudio con una muestra de 553 sujetos de ESO (48,4 % hombres y 51,6 % mujeres) encontraron que la ansiedad matemática está relacionada con la ansiedad hacia los exámenes, que las chicas son más ansiosas que los chicos y que la ansiedad ante los exámenes disminuye en la medida en que aumenta el rendimiento en Matemáticas. Y Sánchez et al. (2011) recogen diversos estudios en los que se indica que la ansiedad hacia las Matemáticas es una actitud presente en el profesorado en formación, entendiendo que este rechazo hacia las Matemáticas de los maestros en formación persistirá cuando ejerzan la profesión, convirtiéndose en una de las posibles causas del fracaso escolar.

Pérez-Tyteca y Castro (2012) trabajan con una muestra de 1242 alumnos llegando a las conclusiones de que la ansiedad matemática está negativamente correlacionada con la utilidad, que la ansiedad es superior en mujeres que en hombres y cuanto mayor es el grado de ansiedad matemática, menor es su rendimiento en la materia. De los 1242 alumnos, 177 son alumnos de Maestro de Primaria teniendo una media de ansiedad de 2,917, siendo de 2,766 en hombres y 2,954 en mujeres, en una escala de 1 a 5.

Rodríguez del Tío et al. (2012) utilizando una muestra de 295 alumnos de primer curso del Grado en Estadística midieron la ansiedad hacia las Matemáticas confirmando que la ansiedad hacia las Matemáticas en mujeres es superior a la de hombres.

Los estudiantes para Maestros parecen considerar las matemáticas como útiles y necesarias, manifestando una enorme satisfacción ante el éxito en la actividad matemática (Caballero y Blanco, 2007) y Gil, Blanco y Guerrero (2005) proponen desarrollar "Programas de alfabetización emocional en educación matemática" para promover el cambio de actitudes, creencias y emociones de los estudiantes hacia las Matemáticas y su aprendizaje. Un estudio previo a un programa de intervención es el que se presenta.

OBJETIVO E HIPÓTESIS DE TRABAJO

Nuestra investigación tiene como objetivo analizar la ansiedad de los alumnos del Grado de Maestro de Primaria hacia las Matemáticas, el agrado y la utilidad que les reporta, al aplicarles dos escalas distintas de Ansiedad, para confirmar la sinceridad de los alumnos al contestar, una escala de Agrado y otra de Utilidad a dos muestras de alumnos correspondientes a dos cursos académicos consecutivos, con la finalidad de conocer si estas actitudes se mantienen y contrastarlas con otros estudios anteriores. Para ello, se establecen las siguientes hipótesis a verificar:

H1. Cuando se aplican dos escalas distintas de ansiedad, las de Fennema-Sherman y la de Auzmedi, en el mismo momento a una muestra, los resultados deben ser parecidos.

H2. Las Matemáticas son útiles en la vida cotidiana. Las consideran útiles los futuros maestros y se mantiene los resultados en las dos muestras.

H3. Las Matemáticas no son vistas con agrado por los estudiantes, no debiendo existir diferencias entre las dos muestras.

H4. Las mujeres tienen mayor ansiedad que los hombres hacia las Matemáticas y las ven con menor agrado y utilidad.

MÉTODO

Participantes

Muestra A. Son alumnos, elegidos no aleatoriamente pero representativos del Grado de Maestro de Primaria de la Universidad de Murcia, en número de 309, de 2.º, de 3.º y de 4.º, matriculados el curso 2012/13, que cursan la materia Enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas (2.º y 3.º) y Taller de Matemáticas (4.º), 19,42 % hombres y 80,58 % mujeres, de edad media 21,6 años.

Muestra B. Son 197 alumnos, como en el caso anterior, del Grado de Maestro de Primaria, matriculados el curso 2013/14, de 2.º, 3.º y 4.º, en donde el 26,40 % son hombres y el 73,60 % mujeres, de edad media 21,5 años.

Instrumentos

Se aplica a cada muestra la “Escala de Ansiedad hacia las Matemáticas” de Fennema-Sherman (1976), que consta de 12 ítems y según Tapia y Marsh (2004) –recogida en Palacios, Arias y Arias (2014)- es la escala más popular de las medidas de actitudes hacia las Matemáticas de las últimas tres décadas y la “escala de Ansiedad”, la “escala de Agrado” y la “escala de Utilidad” del Cuestionario de Actitud hacia las Matemáticas de Auzmendi (1992), que constan de 9, 4 y 6 ítems, respectivamente, y que según Palacios, Arias y Arias (2014) es el cuestionario de actitudes más citado de los realizados en lengua castellana. La interpretación de Auzmendi (1992) al cuestionario de ansiedad es que “mide el temor que el alumno manifiesta ante la materia de matemáticas” (p. 82); utilidad es “el valor que el estudiante otorga a las matemáticas” (p. 82) y agrado es “el disfrute que provoca el trabajo matemático” (p. 83).

La Escala de Fennema-Sherman se subdivide en tres subescalas, siguiendo a Pérez-Tyteca (2012), que establece: Ansiedad Global hacia las Matemáticas (6 ítems), Ansiedad hacia la Resolución de Problemas (3 ítems), y Ansiedad hacia los Exámenes (3 ítems). La interpretación que da Fennema-Sherman (1976) a su cuestionario de ansiedad es que “tiene la intención de medir sentimientos de ansiedad, terror, nerviosismo y síntomas físicos relacionados con hacer matemáticas” (p. 4). Se han elegido estos dos cuestionarios por ser mayoritariamente utilizados, estar validados y tener un intervalo de puntuación análogo.

Procedimiento

Las dos escalas se pasaron a los alumnos a principio de los cursos 2012/13 y 2013/14. Para el tratamiento informático de datos se ha utilizado el paquete estadístico Systat 13.

RESULTADOS

Resultados Globales

Las variables totales y medias en Fennema-Sherman, se denominan así: ANT (Ansiedad Total), ANME (Ansiedad Media), ANG (Ansiedad Global), ANGME (Ansiedad Global Media), ANP (Ansiedad hacia la resolución de Problemas), ANPME (Ansiedad hacia la resolución de Problemas Media), ANE (Ansiedad hacia los Exámenes) y ANEM (Ansiedad hacia los Exámenes Media).

Las variables en Auzmendi son: ACT (Ansiedad Total), ACME (Ansiedad Media), AGTO (Agrado Total), AGME (Agrado Media), UTTO (Utilidad Total) y UTME (Utilidad Media). Todas las variables medias puntúan entre 1 y 5.

Para analizar la consistencia interna de cada escala, ver tabla 1, se calcula el índice alfa de Cronbach (1 puntuación máxima). El número de casos es 309 (muestra A) y 197 (muestra B).

Tabla 1. Consistencia interna de Escalas

Cronbach	Ans. F-S	Global	Probl.	Exám.	Ans. Au.	Agrado	Utilidad
Grupo A	0,891	0,846	0,587	0,730	0,897	0,829	0,701
Grupo B	0,898	0,842	0,611	0,774	0,892	0,892	0,694

Los estadísticos de las variables (totales y medias) se recogen en las tablas 2 y 3.

Tabla 2. Totales muestras

Muestra A	ANT	ANG	ANP	ANE	ACT	AGTO	UTTO
Media	36,307	17,262	8,702	10,395	27,482	10,845	19,586
Desv. típica	9,223	5,227	2,479	2,723	7,364	2,982	3,976
Muestra B							
Media	36,056	16,711	8,883	10,594	27,365	10,041	20,452
Desv. típica	9,249	5,147	2,391	2,801	7,261	3,509	3,684

Tabla 3. Medias muestras (de 1 a 5)

Muestra A	ANME	ANGME	ANPME	ANEM	ACME	AGME	UTME
Media	3,022	2,880	2,901	3,468	3,054	2,714	3,260
Desv. típica	0,768	0,870	0,826	0,907	0,819	0,751	0,668
Muestra B							
Media	3,000	2,779	2,969	3,536	3,040	2,525	3,049
Desv. típica	0,768	0,854	0,800	0,930	0,807	0,893	0,614

Podemos destacar:

- La consistencia interna de las dos escalas y en las dos muestras es muy elevada, 0,897 y 0,892 en Auzmendi y 0,891 y 0,898 en Fennema-Sherman.
- En la muestra A, la Ansiedad hacia las Matemáticas es de 3,054 (ACME) en la escala de Auzmendi y de 3,022 (ANME) en la escala de Fennema-Sherman, muy próximos. En la muestra B, la diferencia es de cuatro centésimas.
- En las tres subescalas de la muestra A, el más alto es de 3,468, ansiedad ante los exámenes (ANEM), y lo sigue siendo en la muestra B con 3,536.
- En Agrado la media se sitúa por debajo de 3 y en Utilidad por encima de 3.

Resultados por Género

Para conocer cómo responden los futuros maestros por género se calcula la t-Student, señalando medias y probabilidad en tabla 4.

Tabla 4. Medias muestras por género (de 1 a 5)

Muestra A	ANME	ANGME	ANPME	ANEM	ACME	AGME	UTME
Hombres	2,736	2,608	2,683	3,117	2,804	2,946	3,186
Mujeres	3,091	2,946	2,953	3,553	3,115	2,683	3,277
Probabilidad	0,001	0,007	0,230	0,001	0,008	0,131	0,342
Muestra B							
Hombres	2,566	2,365	2,647	2,955	2,671	2,899	3,526
Mujeres	3,155	2,928	3,085	3,745	3,173	2,391	3,367
Probabilidad	0,000	0,000	0,001	0,000	0,000	0,000	0,109

Vemos que:

- Tienen mayor ansiedad hacia las Matemáticas las mujeres que los hombres. En las dos muestras las diferencias son significativas.
- Los alumnos sienten mayor agrado por las Matemáticas que las alumnas, siendo significativa la diferencia en el caso de la muestra B.
- En utilidad la diferencia por género es muy pequeña, resultando que en la muestra B las chicas ven más útiles las Matemáticas que los chicos, pero en ningún caso son significativas las diferencias.

Correlaciones

Con las medias de las escalas y las subescalas se calculan correlaciones de Pearson, presentando los resultados en tabla 5:

Tabla 5. Correlaciones

Muestra A	ANME	ANGME	ANPME	ANEM	ACME	AGME
ACME	0,875	0,830	0,710	0,730		
AGME	-0,544	-0,579	-0,320	-0,417	-0,574	
UTME	-0,437	-0,509	-0,280	-0,241	-0,502	0,683
Muestra B						
ACME	0,816	0,809	0,700	0,667		
AGME	-0,541	-0.603	-0,345	-0,492	-0,615	
UTME	-0,304	-0,309	-0,216	-0,224	-0,325	0,561

- La correlación entre las medias en las variables de ansiedad, ANME y ACME, son positivas, muy altas y significativas ($p = 0,000$) en las dos muestras.
- Las variables agrado (AGME) y utilidad (UTME) correlacionan alto, negativamente y de forma significativa con las variables de ansiedad, en las dos muestras.
- Agrado y utilidad se correlacionan positivamente y de forma significativa en las dos muestras.

Intervalos de Ansiedad

En la Escala de Ansiedad hacia las Matemáticas de Fennema-Sherman (1976) la puntuación total (ANT) está entre 12 y 60, y en la de Auzmendi (1992) la puntuación total (ACT) está entre 9 y 45. Sánchez et al. (2011) establecen el intervalo (Media-DT, Media+DT) como intervalo de “Ansiedad media”, los valores por debajo los incluyen en el intervalo de “Ansiedad baja” y los que están por encima en el de “Ansiedad alta”. De esta forma quedan agrupados los alumnos en tres categorías. Partiendo de media y desviación típica, se obtienen tablas 6 y 7.

<u>Muestra A</u>: ANT (36,307; 9,223) y ACT (27,482; 7,364).

Muestra B: ANT (27,482; 7,364) y ACT (27,365; 7,261).

Tabla 6. Intervalos de Ansiedad

Muestra A	Fennema-Sherman (ANT)			Auzmendi (ACT)		
	Intervalo	Frec.	%	Intervalo	Frec.	%
Ansiedad baja	12 – 27	55	17,80	9 – 12	55	17,80
Ansiedad media	28 – 45	206	66,67	21 – 34	202	65,37
Ansiedad alta	46 – 60	48	15,53	35 – 45	52	16,82
Muestra B						
Ansiedad baja	12 – 26	36	18,27	9 – 20	32	16,25
Ansiedad media	27 – 45	132	67,01	21 – 34	124	62,94
Ansiedad alta	46 – 60	29	14,72	35 – 45	41	20,81

- El 82,20 % de los alumnos tienen ansiedad media-alta según la escala de Fennema-Sherman y la escala de Auzmendi en la muestra A, mientras que en la B, en el primer caso disminuye medio punto y en el segundo aumenta un punto y medio respecto la muestra A.
- El porcentaje de alumnos con ansiedad alta, varía del 14,72 % al 20,81 %.
- El porcentaje de alumnos con ansiedad baja, varía del 16,25 % al 18,27 %.

Análogamente:

Tabla 7. Intervalos subescalas en porcentaje

Muestra A	ANG	ANP	ANE
Ansiedad baja	19,40	19,030	17,16
Ansiedad media	65,30	67,16	69,03
Ansiedad alta	15,30	13,81	13,81
Muestra B			
Ansiedad baja	21,83	14,72	17,76
Ansiedad media	65,99	71,57	66,50
Ansiedad alta	12,18	13,71	15,74

- Ante la resolución de problemas y ante un examen es donde el porcentaje de alumnos con ansiedad media-alta es superior.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Podemos contestar a las hipótesis planteadas en nuestro estudio:

- No hay diferencias significativas en las respuestas dadas por los alumnos, ni al comparar las dos escalas en cada curso, que asegura la sinceridad de las respuestas, ni al comparar la misma escala en dos cursos sucesivos, ya que no hay intervención en los sujetos, por lo que podemos afirmar que la ansiedad hacia las Matemáticas se mantiene. (H1)
- A los alumnos les agradan poco las Matemáticas ya que su puntuación no llega a 3. Sin embargo le encuentran utilidad, opinión que se mantiene en los dos cursos académicos. En las dos variables los resultados son inferiores en la segunda muestra. (H2 y H3)
- Las chicas sienten más ansiedad hacia las Matemáticas que los chicos en las escalas y cursos aplicados. Sería necesario hacer un estudio a niveles educativos más bajos para conocer en qué momento comienza esta situación. Pero los datos aportados por OCDE (2013) ya nos indican que el 78 % de alumnos de 15 años se preocupan cuando piensan que sacarán malas notas en Matemáticas y las chicas un 11 % más que los chicos. (H4)

- Mayor agrado sienten por las Matemáticas los alumnos que las alumnas. Todos los estudiantes reconocen la utilidad de las Matemáticas, llegando a ser las chicas las que las vieron más útiles en la primera muestra. (H4)

Comparando algunos de los resultados obtenidos con investigaciones citadas al inicio de esta comunicación se confecciona la tabla 8.

Tabla 8. Comparación entre investigaciones

	M1	M2	M3	M4	M5
Ansiedad	2,741	2,731	2,917	3,022	3,000
Hombres		2,518	2,766	2,736	2,566
Mujeres		2,868	2,954	3,091	3,155

M1 = Futuros maestros, n = 71, (Sánchez et al., 2011).
M2 = Alumnos 1.^{er} curso, n = 1242, (Pérez-Tyteca, 2012).
M3 = Submuestra de la anterior, futuros maestros, n = 177.
M4 = Muestra A de 309 alumnos Grado Maestro Primaria.
M5 = Muestra B de 197 alumnos Grado Maestro Primaria.

La ansiedad hacia las matemáticas en futuros maestros es superior en nuestro estudio que en investigaciones precedentes, y por género en las chicas la puntuación va en ascenso. Se corrobora lo obtenido por otras investigaciones (Gil, Blanco y Guerrero, 2006; Rosario et al., 2008; Rodríguez del Tio et al., 2012) que obtuvieron que las chicas son más ansiosas que los chicos. Aquí se han encontrado diferencias muy significativas en las dos escalas y subescalas, superior siempre en mujeres. Donde mayor ansiedad presentan los alumnos es ante los exámenes, más las chicas que los chicos, corroborando lo obtenido (Muñoz y Mato, 2007; Rosario et al., 2008).

El que más del 80 % de los alumnos tenga ansiedad media/alta y que el 15 % tenga ansiedad muy alta puede interpretarse como alumnos que tendrán dificultad o mucha dificultad a la hora de enseñar matemáticas, apoyando lo obtenido por Sánchez et al. (2011), mientras que alumnos con ansiedad baja solo se da en uno de cada seis.

Se ha obtenido en las dos muestras y con las dos escalas que ansiedad y utilidad tienen una correlación negativa, confirmando lo obtenido por Pérez-Tyteca y Castro (2012). También se ha obtenido que Agrado y Ansiedad tienen una correlación negativa, mientras que Agrado y Utilidad correlaciona positivamente. Al alumno al que le agradan las Matemáticas, ve en ellas una utilidad mientras que el alumno que no ve utilidad o agrado hacia las Matemáticas posiblemente tendrá ansiedad.

Si más del 70 % de los futuros maestros son chicas y éstas tiene mayor ansiedad que los chicos y menor agrado por las Matemáticas, deberemos de apoyarnos en el reconocimiento que hacen de su utilidad para poder, desde esta actitud, conseguir el agrado por la materia y disminuir la ansiedad ante la misma, porque los docentes con ansiedad suelen generar ansiedad en sus alumnos y en nuestro caso, vistos los valores alcanzados, es motivo de reflexión.

Queda para posteriores estudios diseñar una intervención práctica para tratar de disminuir la ansiedad hacia las matemáticas, aumentar su agrado y utilidad entre los futuros maestros con la finalidad de mejorar la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Referencias

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas medias y universitaria*. Bilbao: Mensajero.

Caballero, A. y Blanco, L. J. (2007). Las actitudes y emociones ante las Matemáticas de los estudiantes para Maestros de la Facultad de Educación de la Universidad de Extremadura. Comunicación presentada en el Grupo de Trabajo "Conocimiento y desarrollo profesional del profesor" en el XI SEIEM. La Laguna 4 al 7 de septiembre de 2007.

Fennema, E. y Sherman, J. A. (1976). Fennema-Sherman mathematics attitude scales. Instruments designed to measure attitudes toward the learning of mathematics by males and females. *JSAS Catalog of Selected Documents of Psychology, 6*(31). (Ms. No. 1225).

Gil, N., Blanco, L. J. y Guerrero, E. (2005). El dominio afectivo en el aprendizaje de las Matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. *Unión, 2*, 15-32.

Gil, N., Blanco, L. J. y Guerrero, E. (2006). El papel de la afectividad en la resolución de problemas. *Revista de Educación, 340,* 551-569.

Hidalgo, S., Maroto, A., Ortega, T. y Palacios, A. (2013). Influencia del dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. En V. Mellado, L. J. Blanco, A. B. Borrachero y J. A. Cárdenas (Eds.), *Las Emociones en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Ciencias Experimentales y las Matemáticas* (pp 217-242). Badajoz: DEPROFE.

Muñoz, J. M. y Mato, M. D. (2007). Elaboración y estructura factorial de un cuestionario para medir la "ansiedad hacia las matemáticas" en alumnos de Educación Secundaria Obligatoria. *Revista Galego-portuguesa de Psicoloxia e Educación, 14*(1), 221-231.

OCDE (2013). PISA 2012. *Programa para la evaluación internacional de los alumnos. Informe español*. Madrid: MECD.

Palacios, A., Hidalgo, S. Maroto, A. y Ortega, T. (2013). Causas y consecuencias de la ansiedad matemática mediante un modelo de ecuaciones estructurales. *Enseñanza de las Ciencias, 31*(2), 93-111.

Palacios, A., Arias, V y Arias, B. (2014). Las actitudes hacia las matemáticas: construcción y validación de un instrumento para su medida. *Revista de Psicodidáctica, 19*(1), 67-91.

Pérez-Tyteca, P (2012). *La ansiedad Matemática como centro de un modelo causal predictivo de la elección de carreras.* [Tesis doctoral no publicada]. Universidad de Granada, Granada.

Pérez-Tyteca, P. y Castro, E. (2012). La ansiedad matemática y su red de influencias en la elección de carrera universitaria. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. Palarea (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 471-480). Ciudad Real: SEIEM.

Rodríguez del Tío, P., Hidalgo, S. y Palacios, A. (2012). La ansiedad matemática en alumnos de Grado en estadística. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordoñez (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 469-478). Jaén: SEIEM.

Rosario, P., Núñez, J. C., Salgado, A., Gonzalez-Pienda, J. A., Valle, A., Joly, C. y Bernardo, A. (2008). Ansiedad ante los exámenes: relaciones con variables personales y familiares. *Psicothema, 20*(4), 563-570.

Sánchez, J., Segovia, I. y Miñán, A. (2011). Exploración de la ansiedad hacia las matemáticas en los futuros maestros de educación primaria. *Profesorado. Revista de currículo y formación del profesorado, 15*(3), 207-312. Recuperado de http://www.ugr.es/~recfpro/rev153COL6.pdf.

LAS HIPÓTESIS EN ÁLGEBRA, CUESTIONES DIDÁCTICAS A CONSIDERAR EN UN ENTORNO DE ENSEÑANZA CON MATHEMATICA

Hypotheses in Algebra, Didactics issues to consider on a learning environment with Mathematica

Carmen Ordóñez, Lourdes Ordóñez, Ángel Contreras

Universidad de Jaén

Resumen

En este trabajo se realiza una investigación didáctica para determinar el uso que hacen los estudiantes de las hipótesis de un teorema sobre Aritmética modular, en una demostración de Álgebra, utilizando como marco teórico el enfoque ontosemiótico de la instrucción matemática. Se han diseñado unas prácticas que realizaron en el laboratorio, empleando el programa Mathematica, 132 alumnos del primer curso del Grado en Ingeniería Informática, de la Universidad de Jaén. Las respuestas de los estudiantes han sido clasificadas y cuantificadas atendiendo tanto a los conflictos semióticos manifestados, como a la influencia que tiene dicho software científico en la enseñanza y aprendizaje de estos alumnos.

Palabras clave: *hipótesis, didáctica, Álgebra, Enfoque Ontosemiótico, Mathematica*

Abstract

In this paper, it is carried out a didactic research for determine the use of students in hypotheses of theorem about Modular Arithmetic, in an Algebra proof, using the theoretical framework of the onto-semiotic approach to Mathematics Education. It has been designed practices with the Mathematica computer program that 132 students on the first year in Computer Engineering Degree from University of Jaén did in laboratory. The students answers have been classified and quantified according to semiotic conflicts showed and the influence in teaching and learning that such scientific software has in these students

Keywords: *hypotheses, didactic, Algebra, onto-semiotic approach, Mathematica.*

INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

La demostración es un tema transversal en todas las etapas de la enseñanza de las matemáticas y adquiere diferentes características dependiendo del nivel educativo donde se desarrolle. Este trabajo está centrado en alumnos de primer curso del Grado en Ingeniería Informática de la Universidad de Jaén, etapa en la que el desarrollo del razonamiento lógico deductivo adquiere una especial importancia.

Numerosos trabajos muestran el interés en Didáctica por el tema de la demostración. En los últimos años algunos de ellos se han centrado en la enseñanza y aprendizaje de la demostración en el nivel universitario. Recio y Godino (2001), utilizando el Enfoque Ontosemiótico de la cognición matemática (EOS), indican que el rendimiento en actividades de demostración de gran parte de los alumnos universitarios de primer curso es decepcionantemente bajo.

En el caso de la demostración en Algebra, Dubinsky y Yiparaki (2000) han detectado que los alumnos universitarios de varios niveles, incluyendo algunos alumnos avanzados matriculados en asignaturas de Álgebra abstracta, tienen también importantes dificultades en temas relativos a la demostración matemática. Más recientemente, Alvarado y González (2010 y 2013) realizan

Ordoñez, C., Ordoñez, L., Contreras, A. (2014). Las hipótesis en álgebra, cuestiones didácticas a considerar en un entorno de enseñanza con Mathematica. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 493-502). Salamanca: SEIEM.

exploraciones con objeto de estudiar las dificultades que tienen los estudiantes universitarios en torno a la demostración matemática y comprueban “la ausencia del dominio del lenguaje científico de los alumnos relacionado con el binomio teorema-demostración”, así como, “el mal uso de las implicaciones matemáticas por la confusión entre hipótesis y demostración”.

Camacho, Sánchez y Zubieta (2014) en su investigación con estudiantes de nivel avanzado de Matemáticas y Computación, sobre la lectura de la prueba matemática, analizan las justificaciones de estos alumnos al leer demostraciones y obtienen que sus habilidades para realizar esta tarea resultan muy pobres. La mayoría de las respuestas apelan sólo al contenido y no al esqueleto lógico, lo cual consideran insuficiente.

Por otra parte, el uso de los recursos informáticos, en gran auge e imprescindibles en esta titulación, provoca que la enseñanza y aprendizaje de la demostración adquiera unas características concretas debido a la influencia de las nuevas tecnologías y del lenguaje algorítmico propio de la Informática. Diferentes cuestiones didácticas surgen en la enseñanza y aprendizaje de la demostración cuando esta se desarrolla en el entorno de un software científico como Mathematica.

Respecto de las "nuevas" tecnologías, Balacheff (1994) define el término de trasposición informática y subraya que ésta “supone una contextualización del conocimiento que puede tener consecuencias importantes en los resultados de aprendizaje”. Harel y Sowder (2007) aportan que

> el papel del álgebra simbólica en la reconceptualización de las matemáticas en general y de la demostración en particular suscita una pregunta crucial sobre el papel de las habilidades de manipulación simbólica en el desarrollo conceptual (…) en vista del auge del uso de las tecnologías electrónicas en educación, especialmente en sistemas informáticos de álgebra, nos podemos preguntar igualmente: ¿Podrían estas herramientas privar a los alumnos de la oportunidad de desarrollar las habilidades de manipulación algebraica necesarias para el desarrollo de una noción avanzada de la demostración, o, por el contrario, proporcionarles las mismas? (pp. 817-818).

Nuestro estudio está en la línea de estos interrogantes y forma parte de un trabajo de tesis doctoral cuyo objetivo general es describir y analizar la influencia del software Mathematica en la enseñanza y aprendizaje de la demostración en Teoría de Números, dentro de la asignatura de Matemática Discreta para los estudiantes del Grado de Ingeniería Informática, identificando fenómenos didácticos y utilizando las herramientas del Enfoque Ontosemiótico de la instrucción matemática (EOS). Uno de los objetivos específicos propuesto en el proyecto fue “Estudiar la influencia del uso del software científico Mathematica en la comprensión de hipótesis de teoremas y de esquemas de demostraciones, determinando conflictos semióticos presentes en las prácticas informáticas”. Así, en esta comunicación, estudiamos las consideraciones de los alumnos acerca del papel de las hipótesis en una demostración de Aritmética modular. En Ordóñez, Ordóñez y Contreras (2013), se realiza una investigación didáctica acerca de una demostración en Teoría de Números utilizando el programa Mathematica. Se obtiene que este alumnado tiene dificultades en la comprensión de este esquema de demostración y que el uso de un software científico no está exento de dificultades.

Otros trabajos respecto la enseñanza y aprendizaje con el recurso tecnológico Mathematica para estudiantes universitarios, también publicados por medio de la SEIEM, son Contreras, A. et al. (2005) o Contreras, A. y Ortega, M. (2009).

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y METODOLOGÍA

Existen múltiples investigaciones didácticas acerca de la demostración, sin embargo no hemos encontrado estudios didácticos, a nivel universitario, acerca del papel que los alumnos dan a las hipótesis cuando realizan una demostración en Aritmética Modular utilizando el software Mathematica.

Como señalaban Harel y Sowder (2007) respecto de la demostración, “queda patente la necesidad del uso de las nuevas tecnologías, especialmente en educación”, aunque dejan abierta la pregunta acerca de “la influencia de las nuevas tecnologías en el aprendizaje o desarrollo de una noción avanzada de demostración matemática”. Por tanto, si utilizamos recursos informáticos como Mathematica para la enseñanza y aprendizaje de la demostración en Álgebra, esta pregunta adquiere una gran importancia y más aún, si queremos poner de relieve la consideración que hacen los alumnos acerca de las hipótesis en el desarrollo de la demostración. A este respecto Alvarado y González, (2010) exponen que los estudiantes “se suelen centrar más en el significado de la proposición, mientras que les resulta más difícil fijarse en los aspectos relativos al estado (hipótesis, conclusión, etc)” (p.74)

Por otra parte, la experiencia docente de uno de los investigadores en esta materia de Matemática Discreta con alumnos del Grado de Informática, le ha llevado a diseñar junto con otros profesores del área de Álgebra, unas prácticas informáticas para el laboratorio, de forma que el ordenador sea un facilitador (García, Ordóñez y Ruíz, 2006) y que se llevan utilizando en los últimos diez años.

Así, nos planteamos ¿Cuál es el papel que el alumno otorga a las hipótesis en el aprendizaje de la demostración matemática para alumnos del Grado en Ingeniería Informática en Teoría de Números? ¿qué impacto tiene el uso de las tecnologías en este tema? ¿qué tipos de conflictos semióticos muestran y cuales permite superar el uso del programa Mathematica? Estas cuestiones requieren de un trabajo más amplio y serán abordadas en un trabajo de tesis doctoral. El objetivo de esta investigación (una de las concreciones del proyecto general) es poner de manifiesto el uso que hacen los estudiantes de las hipótesis de un teorema en el que se estudia un esquema de demostración[1] relativo al cálculo de inversos de clases de restos, en una práctica con Mathematica, utilizando las herramientas del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática.

En primer lugar, en el laboratorio de prácticas informáticas, se explica una proposición que caracteriza la existencia de inversos en los anillos de enteros módulo n. La demostración de este teorema es constructiva y deduce quien es el inverso en Z_n. Se utiliza el software Mathematica para implementar un programa que permita realizar los cálculos numéricos relativos al cálculo de la Identidad de Bézout, pues son bastante tediosos. Los inversos existen cuando se cumplen dos hipótesis: la primera, que el elemento sea no nulo; la segunda, que sea primo relativo con n.

Para abordar desde el punto de vista didáctico las cuestiones planteadas, proponemos al alumnado dos ejercicios a realizar en el laboratorio en los que no se verifican, respectivamente, cada una de las dos hipótesis anteriores y por tanto en ambos ejercicios el inverso no existe.

Las cuestiones que se proponen a los alumnos han sido elaboradas por los investigadores y fueron sometidas a juicio de expertos, profesores que componen el área de Álgebra de la Universidad de Jaén y que imparten docencia en esta materia o la han impartido en otros cursos, y son autores de distintas prácticas informáticas y manuales que se utilizan en asignaturas del Grado en Ingeniería Informática.

Analizaremos las respuestas de los estudiantes y nos centramos en caracterizar los conflictos semióticos que muestran los alumnos en esta práctica. El enfoque ontosemiótico de la instrucción matemática presenta unas características metodológicas propias que marcarán esta investigación (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Batanero y Font, 2007 y Font, Planas y Godino, 2010). Este trabajo caracteriza los significados personales de los alumnos, observando las dificultades y errores en términos de conflictos semióticos[2].

Para la evaluación de los significados personales, se analizarán las respuestas de los estudiantes a los dos últimos ejercicios de una práctica informática. La corrección y codificación de las respuestas de los estudiantes se ha hecho siguiendo el método de otras investigaciones (Ordóñez, 2011), utilizando el programa estadístico SPSS, lo que ha hecho posible clasificar y cuantificar variables y así como poner de manifiesto si las hipótesis han sido consideradas por los alumnos en el estudio del teorema. También hemos podido obtener cuales han sido los conflictos semióticos que han emergido en la enseñanza-aprendizaje de los alumnos.

La población escogida corresponde a todo el alumnado que asistió ese día a prácticas de la asignatura de Matemática Discreta del Grado en Ingeniería Informática. La muestra consta de 132 estudiantes pertenecientes a los cinco grupos de prácticas de la asignatura, lo que supone un 70% del total de matriculados (191 alumnos). Son alumnos de primer curso y la exploración se realizó en el mes de diciembre, al final del primer cuatrimestre del curso 2012-13.

Como material, disponen de un manual (García, Ordóñez y Ruíz, 2006) en el que aparecen tanto las explicaciones teóricas como la forma de resolver los problemas con este software científico.

ANÁLISIS DIDÁCTICO

Nuestra investigación didáctica está orientada a determinar el uso que hacen los estudiantes de las hipótesis de un teorema, en una demostración (Rosen, 2004, p. 170 y García, Ordóñez y Ruíz, 2006, p. 192) que forma parte del temario de la asignatura Matemática Discreta, del Grado en Ingeniería Informática. Concretamente, el teorema a analizar es el siguiente:

> Si $\bar{a}$ es un elemento no nulo de Z_n , entonces
>
> $\bar{a}$ admite inverso en Z_n si y sólo si mcd$\{a , n\}= 1$

Este resultado de la Aritmética Modular, permite caracterizar las unidades del anillo Z_n. La demostración en sentido hacia la izquierda es constructiva y así, el cálculo del inverso de $\bar{a}$ se realiza bajo dos hipótesis:

- ✓ La primera, $\bar{a}$ es un elemento no nulo.
- ✓ La segunda, el máximo común divisor de a y n es 1.

Para trabajar esta demostración, utilizando el programa Mathematica, disponemos de dos horas de laboratorio que distribuimos, explicando, en primer lugar, la parte teórica matemática y cómo se implementa todo el procedimiento en el ordenador. En este momento se realizan también algunos ejercicios que ejemplifican el esquema de demostración trabajado y se incide en la importancia de las hipótesis pues son las condiciones bajo las cuales se verifica la existencia del inverso. Una segunda parte de la práctica, consiste en el trabajo personal del alumno, que debe resolver una serie de ejercicios propuestos, los cuales se incluyen en el cuaderno de prácticas que entregarán al final del cuatrimestre, para ser evaluado.

En este caso, proponemos cuatro ejercicios, todos ellos personalizados, para que no haya interacción entre los distintos alumnos, aunque con las mismas características didácticas. Cada estudiante debe realizarlos y entregarlos de forma telemática para nuestro análisis.

Los dos primeros ejercicios se sitúan dentro de las hipótesis del teorema y en ellos se trabaja, con Mathematica, la demostración propuesta. Estos han sido objeto de estudio con anterioridad (Ordónez, Ordóñez y Contreras, 2013).

Los dos últimos se han diseñado para poner de manifiesto el grado de consideración de los estudiantes por cada una de las hipótesis de este teorema. Así se proponen dos situaciones que corresponden, respectivamente, a un ejemplo que no verifica cada una de dichas hipótesis. Estas son:

- Situación 1. Calcular, si es posible, el inverso de la clase de tu DNI en Z_{DNI}
- Situación 2. Calcular, si es posible, el inverso de $\overline{2x}$ en Z_{506}, siendo *x* el número del puesto de ordenador que ocupa.

Análisis a priori

Para poder analizar resultados se ha elaborado un análisis didáctico a priori de ambas situaciones haciendo explícitos conflictos de significado potenciales. El EOS identifica en la actividad matemática cinco tipos de entidades u objetos primarios: situaciones-problema, elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos (Godino, Batanero y Font, 2007). Por razones de extensión, no nos ocuparemos en esta comunicación de los conflictos semióticos del lenguaje (CSL) y de los procedimientos (CSP), aunque mostramos los resultados en la tabla 1.

- Situación-problema:

Comenzaremos exponiendo la resolución del experto de la situación 1. Esto es, calcular, si es posible, el inverso de la clase de tu DNI en Z_{DNI}.

Es obvio que, como las clases en Z_{DNI} se calculan a través del resto de dividir entre el DNI, entonces $\overline{DNI}=\overline{0}$, que no tiene inverso por definición, y simplemente con hacer esta observación se acabaría el ejercicio sin tener que realizar nada en el ordenador.

En esta situación, la clase a la que hay que calcularle el inverso corresponde, para todos los alumnos, con la del 0 y no verifica la primera hipótesis del teorema. Optamos por no poner directamente que calcularan la clase del 0 porque si utilizaran como datos n1=0 y n2=25000000, el programa daría un mensaje de error y el alumno no se plantearía qué estaba pasando. Así decidimos buscar un múltiplo del DNI que no fuera el cero.

Si el alumno no tiene en cuenta la hipótesis primera y hubiera aplicado el esquema de demostración basado en calcular el máximo común divisor y la Identidad de Bézout a través del programa que tienen en el manual, obtendría lo siguiente (tomando como DNI 25000000):

1. Modificaría las entradas del programa con los datos n1 y n2 siguientes
   In[]:= n1=25000000;
   n2=25000000;
2. Ejecutaría el programa dando al INTRO del ordenador.
3. Obtendría los siguientes resultados:
   Out[]= m.c.d.{25000000 , 25000000}= 25000000
   m.c.m.{25000000 , 25000000}=25000000
   Identidad de Bézout:
   25000000= 25000000·(0) +25000000·(1). (*)
4. Se debería observar que el máximo común divisor no es 1 y, por la segunda hipótesis, deducir que no existe el inverso de 25000000.

Si esta segunda hipótesis pasara también inadvertida para el estudiante y continuara la demostración, debería seleccionar como inverso el número que en la Identidad de Bézout, acompaña a 25000000. En este caso vemos que aparecen en la combinación lineal (*) el 0 y el 1. Ante esto caben tres posibilidades:

- Si elige como inverso el 0, es una enorme contradicción pues el 0 no tienen inverso.
- Si se eligiera el 1, también es contradicción pues el 1 es el inverso del 1.
- Si elige ambos 0 y 1, contradice el hecho de que el inverso es único.

Todas estas contradicciones deberían llamar la atención de que algo no va bien en la demostración y esto es, precisamente, que no verifica las hipótesis.

En el caso de la Situación 2, para el estudio de la segunda hipótesis, se propone: calcular, si es posible, el inverso de $\overline{2x}$ en Z_{506}, siendo *x* el número del puesto de ordenador del aula que ocupa (x=2,..,40).

Para esta práctica, el dato n1=2x es personalizado y no es la clase del 0 en Z_{506} pues $4 \leq n1 \leq 80$. Además 2x es el representante de clase canónico por lo que no hay que simplificarlo con operaciones previas.

El segundo dato se eligió por ser un múltiplo de 2, alto, y que no terminara en 2 para que el alumno no viera a simple vista que no es primo relativo con 2x.

La resolución del ejercicio pasa por aplicar el programa de Identidad de Bézout y comprobar que el máximo común divisor es múltiplo de 2, no es 1, por tanto no tiene inverso y no hay que continuar, a pesar de que el ordenador pueda calcular la Identidad de Bézout.

No se ha implementado en el ordenador toda la demostración objeto de nuestro estudio, sino que se ha preferido recurrir a él, sólo para la parte de cálculo más tediosa. Tampoco se han incluido las hipótesis en todo lo que hemos trasladado a Mathematica. El motivo ha sido que se pretende que el estudiante trabaje todos los aspectos de dicho esquema de demostración y aprenda la importancia de estas dos hipótesis en el teorema.

- Argumentaciones

Existen dos tipos: Por un lado, las que corresponden a las Matemáticas. Son argumentaciones deductivas y podríamos decir que también son argumentos constructivos, pues la demostración no sólo da la existencia del inverso sino que nos permite construirlo. Por otro lado, respecto del programa Mathematica, obtenemos argumentaciones de tipo algorítmico, que son las que nos permiten distinguir los distintos pasos para conseguir la resolución del ejercicio. Los conflictos semióticos son: $CSAM_1$: Si el mcd es 1, se deduce que el inverso no existe. $CSAM_2$: Deduce que no tiene inverso y sin embargo elige uno. $CSAM_3$: A pesar de que el mcd es distinto de 1, deduce que existe el inverso. $CSAM_4$: Razona que no existe el inverso porque el DNI es primo o porque existen divisores de cero. $CSAM_5$: Razona que no existe el inverso porque el mcd es distinto de cero. $CSAM_6$: Comprueba si el resultado es inverso del 0. $CSAMth_1$: Argumenta que el segundo número es el inverso, basándose en la posición y no se fija si acompaña al DNI. $CSAMth_2$: Se inventa el inverso a partir de datos de la Identidad de Bézout que no corresponde con la construcción dada.

- Conceptos y proposiciones
    - Propios de las Matemáticas son:

Definición 1. Llamaremos Z_n={0, 1,…, n-1} al conjunto de las clases de restos módulo n.
Proposición 1. Z_n es un anillo conmutativo
Definición 2. Las unidades del anillo Z_n son aquellos elementos a, no nulos, para los que existe inverso, esto es, un elemento b de Z_n tal que a b =1
Proposición 2. El inverso de cada elemento de Z_n es único.
Proposición 3. (Identidad de Bézout)
Si a, b $\in$Z-{0} y mcd{a,b}=1, entonces existen u, v$\in$Z tales que 1 = a u + b v
Proposición 4.
Si $\bar{a}$ es un elemento no nulo de Z_n, entonces $\bar{a}$ admite inverso en Z_n si y sólo si mcd{a,n}= 1

- Propios del programa Mathematica son:

La función Mod[a,n] calcula el resto de dividir a entre n y por tanto la utilizamos para calcular la clase de a en Z_n y el programa que calcula la Identidad de Bézout (García, Ordóñez y Ruíz, 2006).
Así los conflictos semióticos potenciales asociados a conceptos y proposiciones los notaremos $CSCM_i$ y $CSCMth_i$ para los que corresponden a conceptos y proposiciones de las Matemáticas o de Mathematica respectivamente y son: $CSCM_1$: Se calcula el inverso del elemento cero. $CSCM_2$: Para un elemento no nulo, se toma el cero como inverso. $CSCM_3$: Se considera que no existe la clase de un número negativo o un número mayor que n. $CSCM_4$: Se calculan dos inversos. $CSCM_5$: No

identifica la Identidad de Bézout. $CSCM_6$: Confunde inversos en Zn con divisores de cero. $CSCMth_1$: No se calcula la clase de restos del inverso utilizando la función Mod[].

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Si analizamos la situación 1, respecto de los datos propuestos, podemos observar que la elección de los datos n1 y n2 como el DNI de cada alumno, ha dado lugar a muy pocos errores (el 3,8% de la muestra) pues es un número muy conocido por el alumno.

Recordemos que esta situación es el tercer ejercicio de la práctica realizada en el laboratorio. En blanco aparecen 9 alumnos de los 132 de la muestra. Podemos deducir que contestan un alto porcentaje de estudiantes. Esto nos indica que es un ejercicio asequible.

El siguiente diagrama de sectores nos muestra de forma muy clara, los resultados respecto de la realización correcta del ejercicio.

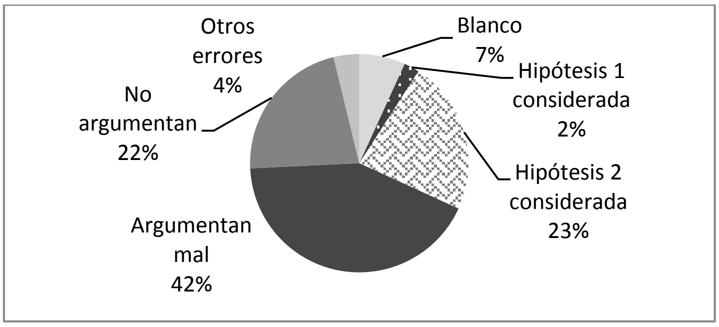


Figura 1

Tras el análisis estadístico, podemos deducir, según la figura 1, que sólo un 25% de los alumnos realizaron la situación 1 correctamente (Hipótesis 1 o Hipótesis 2 consideradas); es decir, tan sólo 33 estudiantes. De ellos: Sólo 3 (el 2%), los que no tuvieron el conflicto semiótico $CSCM_1$ (calculan el inverso del 0), fueron los que consideraron la primera hipótesis del teorema. Dos de ellos concluyeron que no existe el inverso del 0 y explican que al no verificarse la hipótesis 1, el elemento no tiene inverso. No hicieron uso del ordenador para su deducción. Son los únicos que muestran una verdadera comprensión del papel de esta hipótesis en el teorema. Otro, el alumno 32, llega a la misma conclusión pero necesita el ordenador para deducir que el inverso no existe. Como vemos en la figura 2[3], comprueba que no existe el inverso basándose primero en la segunda hipótesis, que el máximo común divisor no es 1, y luego aporta que es el 0. Así comprueba que no se verifica la hipótesis 2 y después observa que tampoco se cumple la hipótesis 1. Probablemente, este estudiante esté considerando la regla implícita que le dice que debe de usar el ordenador al estar en un laboratorio de informática.

```
m.c.d.{25000000 , 25000000}= 25000000
m.c.m.{25000000 , 25000000}=43
Identidad de Bézout: 25000000= 25000000·(0) + 25000000·(1).
```

Al ser distinto el m.c.d. de 1 el número correspondiente a mi DNI (25000000) no tiene inverso, también decir que en $Z_{25000000}$ el número 25000000 es igual a 0

Figura 2. Respuesta alumno 32

Sólo 30 personas (el 23%) deducen que no existe el inverso al considerar la hipótesis 2 pero no la hipótesis 1. Son alumnos que directamente realizan el ejercicio usando el ordenador, comprueban que el máximo común divisor no es 1 y no se paran a analizar o verificar la hipótesis 1, es decir si el elemento es cero. Aunque han realizado correctamente el ejercicio basan sus razonamientos en los cálculos proporcionados por el ordenador, no observando previamente el conjunto de hipótesis.

Observando la incidencia de los conflictos semióticos hemos obtenido los resultados que se muestran en la tabla 1. También recogemos los resultados de la situación 2 que analizaremos más adelante.

Tabla 1. Cuantificación de conflictos semióticos

Entidades primarias		Situación 1		Situación 2	
		Frecuencia absoluta	Porcentaje absoluto	Frecuencia absoluta	Porcentaje absoluto
Lenguaje	Matemáticas	7	5,3%	9	6,8%
	Mathematica	119	90,2%	13	19,8%
	Entorno	8	6,1%	7	5,3%
Argumentación	Matemáticas	57	43,2%	58	43,9%
	Mathematica	0	0%	0	0%
Conceptos y proposiciones	Matemáticas	120	90,9%	1	0,8%
	Mathematica	1	0,8%	0	0%
Procedimientos	Matemáticas	29	22,2%	21	15,9%
	Mathematica	0	0%	0	0%

En la situación 1, los conflictos semióticos más numerosos son los correspondientes a los conceptos de las Matemáticas, esto es, CSCM: lo manifiestan 120 de los 123 que respondieron. En particular, $CSCM_1$ (calcular el inverso sin considerar que es el 0) es el más frecuente, lo presentaron los 120 estudiantes. Todos ellos estiman que el cero puede tener inverso, o no observan que el cero es una clase que nunca tiene inverso y realizan el esquema de demostración que presenta el teorema. De estos 120 estudiantes, 15 mostraron también $CSCM_2$, consideran que el cero es el inverso del cero. Aunque no ha tenido un alto índice de incidencia, hay 2 casos que manifiestan que el DNI tiene dos inversos ($CSCM_4$), el 0 y el 1, lo que nos parece, en este nivel educativo, un conflicto muy significativo.

Aunque, por razones de espacio no se han incluido en este trabajo, queremos hacer notar que los conflictos del lenguaje del programa Mathematica (CSLMth [4]) también han sido muy numerosos, concretamente 119. De ellos el más representativo ha sido $CLMth_6$, con 114 estudiantes que lo manifiestan. Se puede ver en la figura 2, del alumno 32: el mcm(DNI,DNI)=43, en lugar del DNI. Este dato corresponde a un ejercicio anterior y se ha acumulado en las variables del programa. El alumno debe saber, si es estudiante de informática, con más razón, que tienen que limpiarse las variables al realizar un nuevo ejercicio. Eso se realizará saliendo del Kernel o utilizando las funciones adecuadas de Mathematica.

Respecto de las argumentaciones, 57 alumnos mostraron CSAM. Se han presentado 6 tipos de conflictos semióticos ligados a las argumentaciones aunque el más frecuente ha sido $CSAM_3$ con 55 alumnos.

Es muy importante hacer notar que 85 personas, un 64% (los que argumentan mal o no argumentan) se quedaron en el paso 3 de la resolución del experto; de ellos, 29 obtuvieron los cálculos de la Identidad de Bézout con el ordenador y no son capaces de realizar ninguna argumentación.

En el análisis de la situación 2, podemos observar que la elección de los datos n1= 2x, siendo x el número de puesto de ordenador que ocupa en el laboratorio, y n2= DNI de cada alumno, ha sido acertada pues ha dado lugar a pocos errores (solamente 9 alumnos tomaron mal los datos del ejercicio).

Se incrementaron a 15 los alumnos que presentaron el ejercicio en blanco, 6 más que en la situación anterior, que puede ser debido a que es la última situación de la práctica. Aun así, el porcentaje de estudiantes que contestan sigue siendo alto, un 88,6% de la muestra, lo que nuevamente nos indica que es un ejercicio asequible.

Recordemos que esta situación analiza los alumnos que consideran la hipótesis 2 del teorema que estudiamos. Los resultados obtenidos son similares a los anteriores, aparecen 29 estudiantes (el 22% de la muestra) que consideraron la hipótesis 2, y por tanto hicieron el ejercicio bien. Como vemos según la hipótesis 2, los datos son estables respecto de los dos ejercicios y sigue siendo muy alto el número de alumnos que resolvían el ejercicio mal (66,7% frente al 68% que lo tenían mal en el problema anterior).

Observando la tabla 1, los conflictos semióticos más significativos han sido los relativos a las argumentaciones de las matemáticas, alrededor de un 44%, muy similar a la situación 1. El más frecuente es también $CSAM_3$ con 58 alumnos.

CONCLUSIONES

En el estudio del papel que dan los alumnos a las dos hipótesis estudiadas, hemos obtenido que la hipótesis 1 ha sido considerada tan sólo por un 2% de la muestra y la hipótesis 2, ha sido tenida en cuenta por un 22% de la misma. En ambos casos, el resultado ha sido muy bajo.

En la resolución de la situación 1 no era necesario el uso del ordenador pues el 0 no admite inverso. Solo un 2% toma en consideración esta hipótesis lo que nos lleva a pensar que la hipótesis 1 resulta una *hipótesis invisible* para los estudiantes, quienes se centran sólo en la parte central del esquema de demostración e ignoran las condiciones bajo las cuales es posible realizar dicha demostración, lo que consideramos puede venir potenciado por el hecho de que esta hipótesis se sitúe al inicio del enunciado y no en la parte central del teorema, donde se encuentra el bicondicional.

Es importante tener en cuenta que estos alumnos se encuentran en el laboratorio de informática por lo que han podido aplicar la regla implícita de que es necesario usar el ordenador para resolver la cuestión planteada. En este sentido, la respuesta del alumno que se expone en la figura 2, viene a corroborar la autoridad del ordenador sobre sus propias consideraciones pues no es capaz de deducir que no existe el inverso hasta que no lo comprueba a través de los resultados que le proporciona el ordenador.

La no consideración de la hipótesis 1, les lleva a realizar argumentaciones evidentemente falsas como que el inverso es el 0, el inverso es el 1 o incluso que tiene dos inversos, sin plantearse qué está ocurriendo. El alumno, cuando el ordenador realiza los cálculos se ve enfrentado a un dilema ante el cual: o abandona el ejercicio sin argumentar (un 22%), o manifiesta graves conflictos semióticos relativos al concepto de inverso, su unicidad, divisores de cero,… que no son capaces de superar. Esto nos confirma nuevamente la prácticamente nula consideración de esta hipótesis.

El análisis de la situación 2 nos ha mostrado nuevamente que la hipótesis 2 ha sido muy poco considerada, tan sólo por un 22% del alumnado, que fueron los que realizaron bien el ejercicio. De los restantes, alrededor del 16% realizan los cálculos con el ordenador pero no continúan con la demostración ni argumentan nada. El conflicto semiótico de argumentación $CSAM_3$, pone de manifiesto que un 43,9% argumenta la existencia de inverso a pesar de que no son primos relativos, es decir obtienen un inverso.

A la hora de trabajar en un entorno de enseñanza con Mathematica hemos de tener en cuenta también todo lo relativo al lenguaje pues es notable el número de conflictos semióticos CLMth que muestran los alumnos en este objeto primario, aunque como hemos dicho por razones de espacio, no incluimos su estudio.

Este trabajo se enmarca dentro del proyecto de investigación I+D+i EDU2012-32644.

Referencias

Alvarado, A y González, M.T. (2010). La implicación lógica en el proceso de demostración matemática. Estudio de un caso. *Enseñanza de las Ciencias,* 28 (1), 73-84

Alvarado, A y González, M.T. (2013). Generación interactiva del conocimiento para iniciarse en el manejo de implicaciones lógicas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 16 (1), 37-63.

Balacheff, N. (1994). La transposition informatique, un nouveau problème pour la didactique des mathématiques, In Artigue et al. (eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, La pensée sauvage éditions, Grenoble, 364-370.

Camacho,V., Sánchez J.J. y Zubieta, G. (2014) Los estudiantes de ciencias, ¿pueden reconocer los argumentos lógicos involucrados en una demostración? *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 117-138.

Contreras, A. et al. (2005). Aplicación del programa Mathematica a las prácticas de cálculo en el primer año universitario. *IX Simposio de la SEIEM*, 271-282.

Contreras, A. y Ortega, M. (2009). Fenómenos didácticos emergentes de las prácticas realizadas con el programa Mathematica. *Comunicación en el Grupo de Investigación de Didáctica del Análisis. XIII Simposio de la SEIEM.*

Dubinsky, E. y Yiparaki, O. (2000). On student understanding of AE and EA quantification. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, y J Kapput (Eds), *Research in collegiate mathematics education IV,* 239-286. Providence, RI: American Mathematical Society

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33 (2), 89-105.

García-Muñoz, M.A., Ordóñez, C. y Ruiz, J.F. (2006). Métodos Computacionales en Álgebra para Informáticos. Matemática Discreta y Lógica. *Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.*

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque onto-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26 (1), 39-88.

Harel, G. y Sowder, L. (2007). Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and Teaching of Proof. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: a Project of National Council of Teachers of Mathematics*, 805-842.

Ordóñez, C, Ordóñez, L. y Contreras, A. (2013). Significados personales acerca de una demostración en Teoría de Números con Mathematica. *Investigación en Educación Matemática XVII*, 411-420. Bilbao: SEIEM.

Ordóñez, L. (2011). Restricciones institucionales en las Matemáticas de 2º de Bachillerato en cuanto al significado del objeto integral definida. *Tesis doctoral. Universidad de Jaén.*

Recio, A.M., y Godino J.D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematics proof. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 83-99.

Rosen, K.H. (2004). Matemática Discreta y sus aplicaciones. *Ed McGraw-Hill. 5ª Edición.*

---

[1] En el sentido de Harel y Sowder (2007, p. 809)

[2] (Godino, Batanero y Font, 2007, p. 133)

[3] Por motivos de protección de datos, en la respuesta del alumno ha sido modificado exclusivamente su DNI siendo sustituido por 25000000 y manteniéndonos fieles a su respuesta.

[4] En Ordóñez, Ordóñez y Contreras, (2013) se establece una clasificación de los conflictos semióticos para el lenguaje expuesta en la tabla 1. En este trabajo, añadimos $CSLMth_6$ (el alumno no limpia las variables) que corresponde al núcleo.

ESTUDIO DE LAS SITUACIONES PROBLEMAS DE PROBABILIDAD EN LIBROS DE TEXTO DE BACHILLERATO

An study of the problem-situations of probability in high school textbooks

Juan J. Ortiz

Universidad de Granada

Resumen

El objetivo de este trabajo es analizar las situaciones problemas de probabilidad que se presentan en una muestra de libros de texto de Bachillerato. Se analizan los conceptos necesarios para resolver dichas situaciones, la asignación de probabilidad, los contextos empleados y el uso de recursos tecnológicos en las situaciones propuestas. Se detectan diferencias entre los diferentes textos y un tratamiento desigual de las variables analizadas.

Palabras clave: *probabilidad, libros de texto, problema, Bachillerato.*

Abstract

The aim of this paper is to analyze the problem-situations presented in a simple of high school mathematics books. We analyze the concepts meeded to solve the problem, the asignmnent of probability, the contexts and use of technology. We describe differences in the texbooks and in the variables analyzed.

Keywords: *probability, textbooks, problem, high scholl.*

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la estadística y la probabilidad ha adquirido una gran importancia en muchos países, donde se introduce desde los niveles básicos hasta los universitarios. Por ejemplo, en España, en el decreto de enseñanzas mínimas del Bachillerato (MEC, 2007), en la modalidad de *Ciencias Sociales* donde tiene un tratamiento más extenso, se sugiere que los estudiantes han de ser competentes para estimar y calcular probabilidades asociadas a diferentes tipos de sucesos, utilizando una variedad de procedimientos y tener la capacidad de tomar decisiones de tipo probabilístico. Estas recomendaciones también se recogen en las orientaciones curriculares de otros países (por ejemplo, NCTM, 2000).

Al considerar la enseñanza de la probabilidad hemos de tener en cuenta la forma en que se presentan las situaciones-problemas en los libros de texto que utilizan los estudiantes. En muchas ocasiones, las decisiones de los profesores, sobre las tareas a realizar con los alumnos, están mediadas por ellos (Stylianides, 2009). También es importante analizar si los libros de texto tienen en cuenta los diferentes significados de la probabilidad (Batanero y Díaz, 2007) de una forma equilibrada y adecuada a la edad de los estudiantes. García Alonso (2011) considera el libro de texto un elemento fundamental en la enseñanza de la estadística y probabilidad, que además contribuye a la formación del propio docente. Por todo ello, se considera de interés de este tipo de estudios ya que el análisis de los libros de texto nos puede aportar información, no sólo sobre el significado que se da al concepto de probabilidad, sino también sobre el que se le ha atribuido en la mayor parte de los centros de enseñanza donde han sido utilizados.

En este trabajo, que continúa otros anteriores, se pretende analizar las situaciones-problemas de probabilidad que se presentan en una muestra de libros de texto de Bachillerato. A continuación se presentan los fundamentos, la metodología y los resultados del estudio.

Ortiz, J. J. (2014). Estudio de las situaciones problemas de probabilidad en libros de texto de bachillerato. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 503-511). Salamanca: SEIEM.

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

Se presentan algunos resultados de la transposición didáctica (Chevallard, 1991) de la probabilidad, entendida como los cambios que experimenta este concepto al adaptarlo para ser incluido en el Bachillerato. Nos apoyamos en el Enfoque Onto-semiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), que parte de la noción básica de situación-problema, entendida como cualquier tarea, ejercicio o actividad planteada al estudiante que promueva actividades de matematización, pudiendo ser agrupadas en clases. A partir de ella, define la práctica matemática como cualquier acción o manifestación (lingüística o de otro tipo) llevada a cabo en la resolución de problemas matemáticos y en la comunicación de soluciones a otras personas a fin de validarlas y generalizarlas a otros contextos y problemas.

En este marco, el significado institucional (personal) de un objeto matemático es el sistema de prácticas significativas realizadas por una institución (persona) para resolver un determinado campo de problemas, de donde emerge el objeto. Por ello, el análisis que se realiza de las situaciones problemas de probabilidad propuestas en los textos desde este marco teórico, es esencial para caracterizar el significado de los objetos probabilísticos en los libros estudiados. Como consecuencia del análisis, se describirán y clasificarán dichas situaciones problemas, en clases que sean representativas de las contenidas en el significado institucional del concepto y que permitan contextualizar los conocimientos pretendidos (Godino, Font, Contreras y Wilhelmi, 2006). Dicho significado institucional se estableció en Ortiz (2002), mediante un análisis epistemológico de las ideas estocásticas consideradas fundamentales por Heitele (1975).

Investigaciones sobre libros de texto

Aunque existen numerosas investigaciones sobre los libros de texto de matemáticas, no ocurre lo mismo en el caso de la estadística y la probabilidad, donde podemos citar ejemplos como Sánchez Cobo (1998), Cobo y Batanero (2004), Lavalle, Micheli y Rubio (2006), Gea, Batanero, Cañadas y Contreras (2013).

Respecto a la probabilidad, Ortiz (2002) realizó un estudio de las actividades (ejemplos y ejercicios) propuestas en una muestra en una muestra de 11 libros de texto españoles para alumnos de 14-15 años, abarcando el período 1975-1991. Los resultados muestran que los conceptos más frecuentes en los ejercicios analizados son el experimento compuesto, la probabilidad y las frecuencias relativas, aunque también aparecen las operaciones con sucesos. Hay pocos ejercicios sobre espacio muestral, experimento aleatorio, probabilidad condicional, dependencia e independencia, conceptos todos ellos básicos y que merecerían mayor atención dentro de los libros. Solo un texto presenta actividades y ejemplos de todos los significados de la probabilidad, aunque también son escasas. La asignación de probabilidades a sucesos simples y compuestos se hace exclusivamente aplicando la regla de Laplace. El contexto predominante en las actividades es el juego.

Azcárate y Serradó (2006) analizaron el contenido de probabilidad en cuatro series de libros de texto de educación secundaria obligatoria. Encuentran diferencias en el desarrollo de las unidades didácticas, pues mientras dos editoriales organizan los contenidos de forma lineal, comenzando con las nociones teóricas y con actividades fundamentalmente de aplicación, la organización en las otras dos es helicoidal, alternando nociones teóricas y actividades basadas en recursos manipulativos y trabajo cooperativo. Este estudio se completa en Serradó, Azcárate, y Cardeñoso (2006), concluyendo que no se formalizan las relaciones entre resultados experimentales y valores teóricos, y que hay presencia mayoritaria del significado clásico en unas editoriales y del frecuencial en otras.

Carranza y Kuzniak (2009) realizaron un estudio sobre la presencia de los enfoques frecuentista y bayesiano en los ejercicios de probabilidad propuestos en dos libros de texto franceses, dirigidos a estudiantes de 16-17 años, el primero, con una orientación científica y el segundo, con una orientación en ciencias sociales. Los autores sugieren que en ambos textos los ejercicios se centran más en los aspectos del cálculo que en las interpretaciones de la probabilidad, que además no se corresponderían con las interpretaciones fundamentales de los dos enfoques analizados. Una diferencia detectada es que en los ejercicios del texto de orientación en ciencias sociales se presenta una mayor variedad de significados y tiene una menor influencia la visión conjuntista de la probabilidad.

MÉTODO

Se analizaron cuatro libros de texto de segundo curso de Bachillerato en la Modalidad de *Humanidades y Ciencias Sociales* (MEC, 2007), dirigidos a estudiantes de 17-18 años, publicados en el período 2009-2011, posterior a la publicación del currículo actual (MEC, 2007). Se han seleccionado por ser de cuatro editoriales muy prestigiosas y ser de los más utilizados en la enseñanza pública en España (Anexo I). En ellos se analizaron todas las situaciones problemas incluidas, sin distinguir entre ejemplo, ejercicio o problema. Se han utilizado las variables y categorías establecidas en el estudio sobre el tratamiento de la probabilidad en libros de texto de secundaria (Ortiz, 2002), que permiten lograr el objetivo de este estudio, revisando las categorías de forma inductiva cuando ha sido necesario, al ser en este caso textos de bachillerato. Las variables son:

V1. Concepto al que la situación problema se refiere explícitamente o implícitamente, es decir, estudiar cuál, de entre los conceptos establecidos en el estudio teórico sobre la probabilidad de Ortiz (2002), debe movilizar el alumno para resolverla.

V2. Posible asignación de probabilidades a los sucesos dentro de los experimentos que intervienen en la situación, utilizando las categorías utilizadas en el estudio de Ortiz (2002).

V3. Contexto de la situación problema, utilizando las categorías establecidas en Ortiz (2002).

V4. Uso o no de la tecnología para el planteamiento o resolución del problema.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Conceptos necesarios para resolver la situación problema

Un punto importante en nuestro análisis es estudiar cuál, de entre los conceptos establecidos en el estudio teórico sobre la probabilidad de Ortiz (2002), debe movilizar el alumno para resolver la situación problema o a cuál de estos conceptos se refiere el ejemplo. En el caso de que una situación problema se refiera a varios conceptos, se ha subdividido en tantos apartados como fuese necesario. En la Tabla 1 se presentan los resultados obtenidos, donde aparecen los textos analizados y las situaciones problemas relacionados con los conceptos siguientes: Experimento aleatorio; espacio muestral; sucesos y operaciones; frecuencia relativa; probabilidad; probabilidad condicional; dependencia e independencia; experimentos compuestos, probabilidad total y teorema de Bayes.

En ella se observa que el texto [T2] es el que tiene un mayor número de actividades y que estos conceptos se presentan en todos los textos analizados, excepto el de frecuencia relativa que no aparece en los textos [T2] y [T4], siendo además muy escasa su presencia en los otros dos.

Los conceptos más frecuentes son los de probabilidad y experimento compuesto lo que supone el 45,4 % del total. El texto [T3] es el que más ejercicios de probabilidad presenta y el [T2] el que más sobre experimento compuesto. Un ejemplo sobre este último concepto es: "*¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados correctos la diferencia de sus puntuaciones sea 2?*". ([T1], p. 244). Le sigue el concepto de probabilidad condicional que es el 16,7% del total, siendo el texto [T2] el que más ejercicios presenta. Un ejemplo es: "*En una clase de 22 alumnos, 7 alumnos son aficionados al baloncesto, 12 son aficionados al fútbol y 6 a ambos deportes. Si elegimos a un alumno al azar, calcula la probabilidad de que: a) Sea aficionado al fútbol, sabiendo que es* *aficionado al baloncesto; b) Sea aficionado al fútbol, sabiendo que no es aficionado al baloncesto*". ([T2], p. 265). Con porcentajes menores aparecen los conceptos de sucesos y operaciones, teoremas de Bayes y probabilidad total, todos ellos con porcentajes similares en los diferentes textos.

Tabla 1. Frecuencias (porcentajes) de conceptos utilizados en los problemas

Conceptos	T1	T2	T3	T4	Total
Experimento aleatorio	2 (0.9)	3 (1.1)	15 (6)	1 (0.5)	21 (2.2)
Espacio muestral	9 (4)	12 (4.4)	10 (4)	6 (3.2)	37 (4)
Sucesos y operaciones	24 (10.6)	34 (12.4)	30 (12.1)	28 (15.1)	116 (12.4)
Frecuencia relativa	2 (0.9)	0	2 (0.8)	0	4 (0.4)
Probabilidad	58 (25.7)	38 (13.9)	71 (28.5)	45 (24.3)	212 (22.7)
Probabilidad condicional	27 (12)	64 (23.4)	36 (14.5)	29 (15.7)	156 (16.7)
Dependencia e independencia	12 (5.3)	5 (1.8)	17 (6.8)	8 (4.3)	42 (4.5)
Experimento compuesto	58 (25.7)	77 (28.1)	41 (16.5)	36 (19.5)	212 (22.7)
Probabilidad total	14 (6.2)	22 (8)	12 (4.8)	16 (8.7)	64 (6.9)
Teorema Bayes	20 (8.9)	19 (6.9)	15 (6)	16 (8.7)	70 (7.5)
Total	226 (24.2)	274 (29.3)	249 (26.7)	185 (19.8)	934 (100)

Hay pocos ejercicios sobre dependencia e independencia, experimento aleatorio, espacio muestral y frecuencia relativa, todos ellos básicos. Por ello, debería dedicarse mayor atención a ellos dentro de los libros de texto. Observamos que los textos incluyen los conceptos identificados en Ortiz (2002), aunque en este estudio la probabilidad condicional tiene mayor presencia y aparecen los conceptos de probabilidad total y teorema de Bayes que no se presentaban en el otro, lo que es lógico ya que son textos dirigidos a estudiantes de diferentes niveles educativos.

Asignación de probabilidades

La segunda variable analizada es la asignación de probabilidades a los sucesos dentro de los experimentos que intervienen en la situación problema, que se han tomado de la clasificación establecida por Ortiz (2002), revisada inductivamente cuando ha sido necesario. Este análisis es muy importante porque dicha asignación de probabilidades está directamente relacionada con los distintos significados del término probabilidad descritos en el estudio teórico de Ortiz (2002). En la Tabla 2 se observa que en todos los textos se incluyen situaciones problemas de los diferentes significados de la probabilidad, excepto el enfoque frecuencial que no aparece en el texto T4, aunque en algunas categorías son escasas.

La asignación de probabilidades más utilizada se hace mediante la probabilidad condicional, lo que supone un 43,4 % del total. Los textos [T2] y [T1] son los que mas la utilizan, con un porcentaje similar. Un ejemplo es: "*Una encuesta revela que: el 35 % de los habitantes de una ciudad oye la emisora A, el 28 % oye la B, y el 10% oye ambas emisoras. Se elige al azar uno de estos ciudadanos. Calcula la probabilidad de que escuche la emisora A sabiendo que escucha B".* ([T1], p. 255). Le sigue la asignación de probabilidades mediante la aplicación de sus propiedades, que es el 25,4% del total, siendo el texto T4 el que presenta una mayor proporción de este tipo. Un ejemplo es: "*Calcula la probabilidad del suceso $A^C \cap B$, sabiendo que la probabilidad de que ocurra al menos uno de los dos sucesos A o B es 0,8 y que P(A)=0,3".* ([T4], p. 224)

Con porcentajes menores aparecen las asignaciones de probabilidad que se hacen mediante la utilización de los teoremas de la probabilidad total y de Bayes (17,7%) y mediante la aplicación de la regla de Laplace (11,1%). En el primer caso son los textos [T4] y [T2] los que más actividades presentan de este tipo. Un ejemplo es: "*Las piezas de automóviles de una marca multinacional son* *producidas en fábricas de tres países diferentes. Las producciones son del 30%, 40% y 30% respectivamente. El número de piezas defectuosas que llegan a los diferentes talleres son del 1%, 1,5% y 1,5%. Si elegimos una pieza al azar, calcula la probabilidad de tener una pieza defectuosa. ¿Qué probabilidad hay de que provenga de la fábrica 1*?". ([T4], p. 228).

Tabla 2. Frecuencias (porcentajes) de asignación de probabilidades en los problemas

Asignación probabilidades	T1	T2	T3	T4	Total
Regla de Laplace	18 (9.4)	32 (14.2)	26 (13.4)	8 (5.3)	84 (11.1)
Frecuencial	4 (2.1)	4 (1.8)	2 10.3)	0	10 (1.3)
Realización/simulación experimentos	1 (0.5)	0	2 (1)	0	3 (0.4)
Aplicación propiedades	39 (20.4)	41 (18.2)	62 (32)	51 (34)	193 (25.4)
Geométrica	5 (2.6)	0	0	0	5 (0.7)
Probabilidad condicional	91 (47.6)	106 (47.1)	76 (39.2)	57 (38)	330 (43.4)
Probabilidad total	14 (7.3)	22 (9.8)	12 (6.19)	17 (11.3)	65 (8.5)
Teorema de Bayes	19 (9.9)	20 (8.9)	14 (7.2)	17 (11.3)	70 (9.2)
Total	191 (25.2)	225 (29.6)	194 (25.5)	150 (19.7)	760 (100)

Hay pocos ejercicios sobre asignación frecuencial de la probabilidad o mediante realización/simulación de experimentos, por lo que se considera que no hay un tratamiento adecuado del enfoque frecuencial de la probabilidad en ningún texto. La asignación de probabilidad mediante consideraciones geométricas solo aparece en el texto [T1]. Se observa que los textos incluyen los tipos de asignación de probabilidad identificados en Ortiz (2002), aunque con una proporción menor de ejercicios de aplicación de la regla de Laplace y una mayor proporción de ejercicios de probabilidad condicional, probabilidad total y Bayes, lo que es razonable pues se trata de textos dirigidos a estudiantes de niveles educativos diferentes. También es alto el porcentaje de ejercicios sin contexto, donde la asignación de probabilidades se realiza mediante la aplicación de las propiedades del cálculo de probabilidades, lo que coincide con Carranza y Kuzniak (2009).

Contextos

La tercera variable analizada ha sido la del contexto de las situaciones problemas, que se toma de la efectuada por Ortiz (2002) y que ha sido revisada de forma inductiva cuando ha sido necesario. Se han encontrado una gran variedad de contextos utilizados que han sido clasificados según el procedimiento descrito en cinco categorías: a) *Juegos de azar* (lanzamiento de dados y monedas, extracción de bolas de urnas, extracción de cartas de una baraja); b) *Biología* (características biológicas de las personas, nacimientos); c) *Sociedad* (producción empresas, preferencias ciudadanos, medicina); d) *Educación* (aprueban o suspenden un examen, alumnos y alumnas que practican deporte o no) y e) *Sin contexto*.

En la Figura 1 se observa que en todos los textos analizados, excepto en el texto [T4], el contexto más utilizado esta relacionado con juegos de azar, con porcentajes comprendidos entre el 49,6% del texto [T1] y el 35,8% en el texto [T3], bastante menores que los obtenidos en Ortiz (2002) del 75%. Esta diferencia puede ser normal ya que las edades de los estudiantes a los que van dirigidos los textos son diferentes: 17-18 años en este estudio y 13-14 años en el de Ortiz (2002). No obstante, en ambos casos se considera una restricción importante en el dominio de las aplicaciones de la probabilidad mostradas al alumnado.

Destaca el alto número de ejercicios descontextualizados, con porcentajes muy elevados (entre el 42,7% y el 27,4%), donde se incluyen ejercicios relacionados con los sucesos y operaciones y comprobación de sus propiedades y ejercicios donde se han de probar determinadas propiedades de la probabilidad utilizando los axiomas y teoremas del enfoque axiomático. Estos porcentajes son muy superiores a los obtenidos en Ortiz (2002) con solo un 1,3%, y son preocupantes, ya que, según Suydan y Weaver (1977), los estudiantes se sienten más motivados y obtienen mejores resultados cuando el contexto del problema les resulta familiar que si se trata de situaciones abstractas o descontextualizadas.

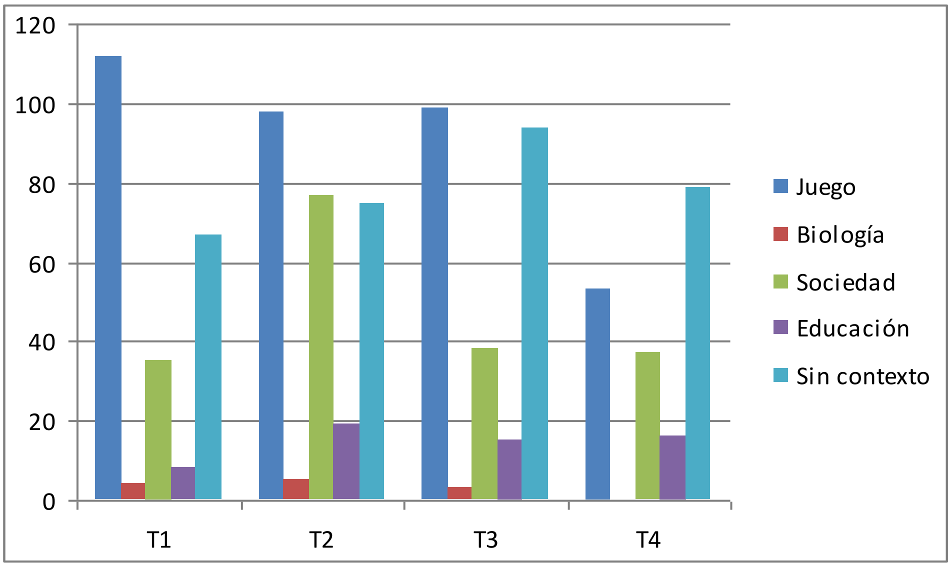


Figura 1. Frecuencias de contextos utilizados en las tareas de los textos analizados

Con porcentajes menores aparecen los contextos Sociedad (con porcentajes comprendidos entre el 28,1% y el 15,3%) y Educación (entre 8,6% y 3,5%), que están cambiados con respecto a Ortiz (2002), ya que el primer caso son mayores y en el segundo menores, lo que también puede ser debido a la diferencia de edad de los estudiantes a los que van dirigidos los textos. El libro [T2] es el que presenta un mayor equilibrio entre los diferentes contextos encontrados, lo que supone una mayor variedad de actividades de aplicación propuestas relacionadas con problemas reales.

V4. Uso de tecnología

La última variable analizada ha sido la utilización o propuesta de uso de algún recurso tecnológico en las situaciones problemas presentes en los libros de texto. En la Tabla 3 se observa el elevado porcentaje de situaciones problemas donde ni se utiliza ni se propone el uso de recursos tecnológicos. Todos los textos incluyen un CD ROM donde se sugiere la utilización de diversos recursos tecnológicos para realizar las actividades propuestas. En el texto [T1] se formulan dos actividades, una para comprobar experimentalmente la ley de los grandes números y otra para trabajar con tablas de contingencia utilizando la hoja de cálculo Excell. Así mismo incluye actividades donde para resolverlas se recomienda el uso de la calculadora gráfica (5), de Derive (4) y del software Wiris (6). Por último, incluye la demostración de los teoremas de la probabilidad que aparecen en el texto y la solución de 43 ejercicios del texto. En el texto [T2] hay tres presentaciones donde se resuelven en una pizarra siete problemas de probabilidad.

El texto T3, al final del bloque de estadística y probabilidad incluye un apartado denominado “problemáTICa” donde formula dos actividades de simulación con Excell. Además incluye 68 ejercicios resueltos de las pruebas de acceso a la universidad de convocatorias recientes, similares a los de la unidad didáctica. En el texto [T4] se propone la resolución de 23 actividades similares a las realizadas en la unidad didáctica para que sean resueltas utilizando Derive o Wiris. Aunque en general en estos libros analizados aparecen más actividades relacionadas con las nuevas tecnologías que en el estudio de Gea et al. (2013), se considera que es aún escaso su uso.

Tabla 3. Frecuencias (porcentajes) de tareas con el uso de tecnología en los textos analizados

Recurso	T1	T2	T3	T4	
Calculadora gráfica	5 (2.2)				5 (0.5)
CDROM	43 (19)	7 (2.5)	68 (27.3)		118 (12.6)
Derive	4 (1.8)			23 (12,4)	27 (2.9)
Excell	2 (0.9)		2 (0.8)		4 (0.4)
Wiris	6(2.7)			23 (12,4)	29 (3.1)
No usa	166 (73.4)	267 (97.5)	179 (71.9)	139 (75,2)	751 (80.5)
Total	226 (24.2)	274 (29.3)	249 (26.7)	185 (19.8)	934 (100)

CONCLUSIONES E IMPLICACIONES EDUCATIVAS

La noción de significado de un objeto matemático propuesta en el EOS y la noción de transposición didáctica han permitido mostrar que existen diferencias en el tratamiento de la probabilidad en los diferentes textos analizados. En relación con la variable concepto, las categorías establecidas se presentan en los cuatro textos, excepto el de frecuencia relativa que no aparece en dos de ellos. Los conceptos más utilizados han sido los de probabilidad, experimentos compuestos y probabilidad condicional. También aparecen los teoremas de probabilidad total y el teorema de Bayes que no estaban presentes en el estudio de Ortiz (2002).

Con respecto a la variable asignación de probabilidades, en todos los textos se incluyen situaciones problemas de los diferentes significados de la probabilidad, excepto el enfoque frecuencial que no se incluye en el texto [T4]. Las asignaciones de probabilidad más utilizadas se hacen mediante la probabilidad condicional y mediante la aplicación de sus propiedades. Con porcentajes menores se presentan las que utilizan los teoremas de la probabilidad total y la regla de Laplace. Hay pocos ejercicios sobre asignación frecuencial de la probabilidad, observándose en este estudio una mayor proporción de ejercicios de probabilidad condicional, de probabilidad total y de Bayes que en Ortiz (2002). Estos resultados también pueden estar influenciados por los tipos de problemas que se proponen a los estudiantes en las pruebas de acceso a la universidad.

En relación a la variable contexto, el más utilizado está relacionado con juegos de azar en todos los textos analizados, excepto en el [T4], lo que se considera una restricción importante en el dominio de las aplicaciones de la probabilidad mostradas al alumnado. Destaca el alto número de situaciones descontextualizadas, con porcentajes muy superiores a los obtenidos en Ortiz (2002), lo que se opone a estudios internacionales que conceden una gran importancia al contexto en el estudio de la probabilidad. Se revela el escaso uso que se hace de las nuevas tecnologías a pesar de las recomendaciones del decreto del MEC (2007) en sentido contrario.

En resumen, aunque la mayoría de los textos analizados presentan situaciones problemas relacionadas con los diferentes significados de la probabilidad, son escasas las que tratan sobre el enfoque frecuencial. Como consecuencia de este estudio, se considera que en los libros de texto se deberían proponer una muestra de situaciones problemas contextualizadas que sean representativas de los diferentes significados de la probabilidad, incidiendo más en la interpretación de los mismos que en los aspectos relacionados con el cálculo. Finalmente, indicar que estos resultados no suponen una valoración general de los textos analizados, sino que solamente se refieren a las situaciones problemas presentes en los cuatro textos analizados y las variables estudiadas.

Agradecimientos: Plan Propio Investigación Universidad de Granada: Programa 20; Proyecto EDU2010-14947 y Grupo FQMN-126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Azcárate, P., & Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación, 340*, 341-378.

Batanero, C., & Díaz, C. (2007). Meaning and understanding of mathematics. The case of probability. En J.P Van Bendegen & K. François (Eds.), *Philosophical dimmensions in mathematics education* (pp. 107-127). Nueva York: Springer.

Carranza, P. y Kuzniak, A. (2009). Enfoque bayesiano “oculto” y enfoque frecuentista “ambiguo” en los manuales franceses de Première S y ES. En P. Orús, L. Zamora, & P. Gregori (Eds.), *Teoría y aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo. Primera aproximación en lengua hispana* (pp.447-460). Universitat Jaume I de Castellón.

Cobo, B., & Batanero, C. (2004). Significados de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 22* (1), 5-18.

Chevallard (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grénoble: La Pensée sauvage

García Alonso, I. (2011). Análisis de los términos de Inferencia Estadística en Bachillerato. *Números, 77*, 51-73.

Gea, M. M., Batanero, C., Cañadas, G., & Contreras, J. M. (2013). Un estudio empírico de las situaciones problemas de correlación y regresión en libros de texto de Bachillerato. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 293-300). Bilbao: SEIEM.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Font, V., Contreras, A., & Wilhelmi, M. R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9* (1), 117-150.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, *6*, 187-205.

Lavalle, A. L., Micheli, E. B., & Rubio, N. (2006). Análisis didáctico de regresión y correlación para la enseñanza media. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9* (3), 383-406.

MEC (2007). REAL DECRETO 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. Madrid: *Boletín Oficial del Estado*, nº 266.

N. C. T. M. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: VA, NCTM.

Ortiz, J. J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto*. Universidad de Granada.

Sánchez Cobo, F. T. (1999). *Significado de la correlación y regresión para los estudiantes universitarios*. Tesis Doctoral inédita. Universidad de Granada.

Serradó, A., Azcárate, P., & Cardeñoso, J. M. (2006). La caracterización escolar de la noción de probabilidad en libros de texto de la ESO. *Tarbiya, 38*, 91-112.

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks. *Mathematical thinking and learning, 11* (4), 258-288.

Suydam, M., & Weaver, J. F. (1977). Research on problem solving: Implications for elementary school classroom. *Journal of Experimental Psychology General, 112*, 634-656.

Anexo 1: Textos utilizados en el análisis

[T1]. Colera, J. y Oliveira, M.J. (2009). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II*. Madrid: Grupo Anaya.

[T2]. Escoredo, A., Gómez, M., Lorenzo, J., Machín, P., Pérez, C., Rey, M., Río, J, y Sánchez, D. (2011). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II*. Madrid: Santillana Educación.

[T3]. Vizmanos, J., Hernández, J. y Alcalde, F. (2009). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II*. Madrid: Grupo SM.

[T4]. Ortega, P., Serra, J., Díez, S., Prieto, J. y Bautista, A. (2010). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II*. Madrid: Pearson.

EXPLORANDO ASPECTOS RELEVANTES DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO SOBRE LA DERIVADA DE PROFESORES EN FORMACIÓN INICIAL

Exploring Relevant Aspects of Prospective Teachers' Didactic-Mathematical Knowledge on the Derivative

Luis R. Pino-Fan[a], Juan D. Godino[b], Vicenç Font[c]

[a]Universidad de Los Lagos, [b]Universidad de Granada, [c]Universitat de Barcelona

Resumen

En el presente trabajo se informa de los resultados obtenidos mediante la aplicación de un cuestionario que se ha diseñado para explorar algunos aspectos relevantes del conocimiento de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada. El diseño del cuestionario se presenta en la primera parte de este trabajo. Los resultados del análisis de las respuestas de los estudiantes evidencian tanto una desconexión entre los distintos significados parciales de la derivada como la necesidad de potenciar el conocimiento especializado del contenido. Este aprendizaje puede hacerse mediante actividades que favorezcan el uso e identificación de objetos matemáticos, sus significados y los procesos involucrados en la solución de tareas matemáticas.

Palabras clave: *formación de profesores, conocimiento del profesor, enfoque ontosemiótico, prácticas matemáticas, derivada.*

Abstract

In this paper we present results obtained from the application of a questionnaire that we have designed to explore the content knowledge on derivative of prospective high school teachers. The questionnaire design is presented in the first part of the article. The analysis of the students' responses show both a disconnection between the different partial meanings of the derivative as well as the need to enhance the specialized content knowledge through activities that encourage the use and identification of the mathematical objects, their meanings and the processes involved in the solution of mathematical tasks.

Keywords: *teacher's education, teacher's knowledge, onto-semiotic approach, mathematical practices, derivative.*

PROBLEMA Y ANTECEDENTES

Las características de la comprensión de los estudiantes de Bachillerato y primeros cursos de universidad del concepto de derivada es un tema que ha sido ampliamente investigado por diversos autores (Asiala, Cottrill, Dubinsky y Schwingendorf, 1997; Baker, Cooley y Trigueros, 2000; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2006; García, Llinares y Sánchez-Matamoros, 2011). No obstante, aunque también ha sido de interés caracterizar los conocimientos de los profesores para una enseñanza efectiva de la derivada (Gavilán, García y Llinares, 2007; Badillo, Azcárate y Font, 2011; Sánchez-Matamoros, Fernández, Valls, García y Llinares, 2012), pocos han sido los estudios centrados en los profesores en relación a la derivada. Algunos de estos trabajos han centrado la atención en profesores en ejercicio y otros en estudiantes para profesor de matemáticas, usando diferentes marcos teóricos para interpretar la naturaleza del concepto de derivada, así como del conocimiento y comprensión del mismo.

Pino-Fan, L. R., Godino, J. D., Font, V. (2014). Explorando aspectos relevantes del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada de profesores en formación inicial. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 513-522). Salamanca: SEIEM.

En este artículo presentamos resultados parciales de una investigación más amplia (Pino-Fan, 2013) centrada en la caracterización de algunos aspectos relevantes de los conocimientos didáctico-matemáticos (CDM) de futuros profesores de matemáticas de bachillerato. Se interpreta el CDM en el sentido propuesto en Godino (2009) quien, aplicando el "Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática" (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), interpreta y amplía las categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas propuestas por otros autores (Shulman, 1986; Ball, 2000; Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Ball y Schilling, 2008), proponiendo además, niveles y herramientas para el análisis de cada una de esas categorías.

Así, en este artículo nos proponemos, por un lado, ejemplificar el uso de las "herramientas teórico-metodológicas" (sistemas de prácticas y configuración de objetos y procesos) que se contemplan dentro del modelo CDM, para el análisis y caracterización del conocimiento de los profesores, referente a la faceta epistémica del Conocimiento Didáctico-Matemático. Por otro lado, y para realizar dicha ejemplificación, caracterizamos el conocimiento –referente a la faceta epistémica del CDM– de una muestra de 53 futuros profesores de bachillerato, sobre la derivada. Con este fin se diseñó y aplico a dicha muestra un cuestionario que incluye tres tipos de tareas sobre derivadas. De este cuestionario se ha elegido una tarea, la cual discutimos en esta comunicación.

En la siguiente sección describimos las nociones del marco teórico que se usan en el artículo y la metodología. En la sección 3 describimos las configuraciones de objetos y procesos manifestadas por la muestra de estudiantes, a propósito de la resolución de una de las tareas del cuestionario construido. Contemplamos el análisis relativo a una tarea por motivos de espacio. En la sección 4 presentamos resultados globales, para dicha tarea, referidos a la incidencia de los tipos de configuraciones cognitivas identificadas y sobre el grado de corrección de las respuestas. Finalmente interpretamos los resultados en términos de las necesarias relaciones entre los tipos de conocimientos del profesor de matemáticas, restringido a la faceta epistémica.

MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

El análisis didáctico de los procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos se realiza en el EOS distinguiendo en los mismos seis facetas o dimensiones: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica (Godino, Batanero y Font, 2007). Para cada faceta se distinguen distintas componentes y se han desarrollado diversas herramientas que permiten su análisis. Por ejemplo, la faceta epistémica de un proceso de estudio matemático refiere a los significados institucionales puestos en juego en cada una de las fases de dicho proceso (preliminar, diseño, implementación y evaluación). Tales significados son interpretados en términos de sistemas de prácticas y configuraciones de objetos y procesos. Mientras que la faceta cognitiva refiere a los significados personales de los estudiantes descritos en los distintos momentos de su desarrollo en términos de sistemas de prácticas personales y configuraciones cognitivas de objetos y procesos.

Estas herramientas de análisis didáctico han sido utilizadas para elaborar un sistema de categorías de los conocimientos del profesor de matemáticas que designa como modelo de Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) de los profesores. Para nuestra investigación hemos adoptado este modelo (CDM) el cual ha sido planteado por Godino (2009) y refinado en diversas publicaciones (Godino y Pino-Fan, 2013; Pino-Fan, Font y Godino, 2013; Pino-Fan, Godino y Font, 2013), al seno del EOS.

Cuando el foco de atención son los conocimientos que el profesor de matemáticas debe poner en juego como organizador y gestor de un proceso de enseñanza y aprendizaje, tales conocimientos incluyen los relativos a cada una de las seis facetas implicadas en tales procesos. Así, cuando se habla de la faceta epistémica del CDM se refiere al conocimiento que tiene o debe tener el profesor sobre el contenido matemático como objeto institucional cuya enseñanza se planifica, implementa o evalúa (Pino-Fan, Godino y Font, 2013). En este documento nos centramos en la faceta epistémica del CDM de futuros profesores sobre la derivada. Para caracterizar los conocimientos referentes a la faceta epistémica utilizamos las herramientas *prácticas matemáticas* (descripción en líneas generales de la actividad matemática realizada por los futuros profesores) y *configuración de objetos y procesos* (identificación y descripción de elementos lingüísticos, definiciones, proposiciones, procedimientos, argumentos, sus significados de uso, y los procesos involucrados en dichas prácticas), nociones que nos proporciona el marco teórico (EOS) al cual nos apegamos.

Dado que nuestra metodología es de tipo mixta, además de la variable *tipo de configuración cognitiva* (variable cualitativa), para el análisis cuantitativo de las respuestas, consideramos la variable *grado de corrección*, para la cual tomamos en cuenta los siguientes casos: respuesta correcta, respuesta parcialmente correcta, respuesta incorrecta y no responden.

Sujetos y contexto

La prueba se aplicó a una muestra de 53 estudiantes de los últimos cursos (sexto y octavo semestre) de la Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas que se imparte en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán en México. Dicha licenciatura tiene una duración de cuatro años (8 semestres). Cabe señalar que los estudiantes en nuestro estudio, futuros egresados de la licenciatura en enseñanza de las matemáticas, suelen trabajar como profesores en los niveles de bachillerato o universitario en el estado de Yucatán en México. Los 53 estudiantes a los que se les aplicó el cuestionario habían cursado cálculo diferencial en el primer semestre de la licenciatura y, a lo largo de ella, tomaron otros cursos relacionados con el análisis matemático (cálculo integral, cálculo vectorial, ecuaciones diferenciales, etc.). También habían cursado materias relacionadas con las matemáticas y su didáctica.

El cuestionario

El cuestionario que hemos diseñado consta de nueve tareas y lo hemos denominado *Cuestionario sobre la Faceta Epistémica del Conocimiento Didáctico-Matemático de la Derivada (Cuestionario FE-CDM-Derivada)*. Se centra, fundamentalmente, en la evaluación de aspectos parciales de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático (CDM) de futuros profesores de bachillerato sobre el objeto derivada. Dichos aspectos parciales, según lo planteado en Pino-Fan, Godino y Font (2013), están relacionados con los conocimientos del contenido matemático.

De esta forma, las tareas incluidas en el cuestionario responden básicamente a dos características. Primeramente, consideramos que las tareas deben proporcionar información sobre el grado de ajuste del significado personal de los futuros profesores respecto del significado global u holístico del objeto derivada (Pino-Fan, Godino y Font, 2011). Para lograrlo, se incluyeron ítems que activan distintos sentidos para el objeto derivada (pendiente de la recta tangente, razón instantánea de cambio y tasa instantánea de variación). La segunda característica de los ítems seleccionados es que responden a los diferentes tipos de representaciones activados en los tres subprocesos, que según Font (2000), intervienen en el cálculo de la función derivada: a) traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f(x)$; b) el paso de una forma de representación de $f(x)$ a una forma de representación de $f'(x)$; y c) traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f'(x)$. Así, podemos decir que el cuestionario contempló tres tipos de tareas, todas relacionadas con el contenido matemático (Pino-Fan, Godino y Font, 2013): (1) aquellas que piden poner en juego el *conocimiento común del contenido* (este conocimiento hace referencia a la resolución de tareas matemáticas que se proponen usualmente en el currículo del bachillerato); (2) aquellas que requieren de aspectos parciales *conocimiento del contenido especializado* (usar distintas representaciones, distintos significados parciales de un objeto matemático, resolver el problema mediante diversos procedimientos, dar diversas argumentaciones válidas, identificar los conocimientos puestos en juego durante la resolución de una tarea matemática, etc.); y (3) aquellas que requieren del *conocimiento ampliado* (generalizar tareas sobre conocimiento común y/o realizar conexiones con objetos matemáticos más avanzados en el currículo de bachillerato). La tarea que es objeto de estudio en este trabajo, pertenece a este tercer grupo.

La tarea

A continuación, por motivos de espacio, se presenta una de las tareas incluidas en el cuestionario FE-CDM-derivada, la cual hemos seleccionado para su discusión en este trabajo, puesto que consideramos que con dicha tarea se ilustran tanto los criterios usados para su diseño como los usados en el proceso de análisis de los datos derivados de su aplicación.

La Tarea 8 (Figura 1), tomada de Çetin (2009), proporciona información sobre el conocimiento ampliado de los profesores, ya que se trata de una aproximación a la derivada de una función (descrita por los valores de la tabla) en el punto t = 0,4 a través de valores numéricos de dicha función. Además, la tarea 8 no es un problema escolar típico del nivel bachillerato, al menos no en México, y requiere para su solución de la comprensión del objeto derivada por parte de los futuros profesores, al menos en su acepción como razón instantánea de cambio, y concretamente, la derivada en un punto como velocidad instantánea. La solución de esta tarea se puede realizar mediante diferentes métodos, por ejemplo, la interpolación polinómica de Lagrange, lo cual sustenta la categorización de esta tarea como evaluadora del conocimiento ampliado. Hay que considerar que los futuros profesores no contaban con el apoyo de ningún tipo de recursos tecnológicos al momento de resolver el cuestionario.

Tarea 8

Una pelota se lanza al aire desde un puente de 11 metros de altura. $f(t)$ denota la distancia a la que se encuentra la pelota del suelo en un tiempo t. Algunos valores de $f(t)$ se recogen en la siguiente tabla:

t (sec.)	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$f(t)$(m.)	11	12.4	13.8	15.1	16.3	17.4	18.4

De acuerdo con la tabla, ¿cuál es la velocidad de la pelota cuando alcanza una altura en t = 0.4 segundos? Justifica la elección de tu respuesta.

a) 11.5 m/s b) 1.23 m/s c) 14.91 m/s d) 16.3 m/s e) Otro

Figura 1. Tarea 8 del cuestionario FE-CDM-Derivada

CONFIGURACIONES COGNITIVAS ASOCIADAS A LA SOLUCIÓN DE LA TAREA 8

Mediante las soluciones que los futuros profesores de bachillerato dieron a la tarea 8, se pudieron identificar 4 tipos distintos de configuraciones que hemos denominado: 1) patrón numérico; 2) uso de la relación física v = d/t; 3) aproximación por la izquierda o derecha, y 4) aproximación bilateral. Es importante señalar que, inicialmente, esperábamos (a excepción de la opción a, Figura 1), respuestas parecidas a las reportadas en el trabajo de Çetin (2009), en donde los estudiantes resolvieron la tarea mediante los siguientes procedimientos:

a) Sumando las distancias entre un tiempo y otro y dividiendo el resultado por seis, es decir $\frac{1}{6}\left[\left(f(0.1)-f(0)\right)+\left(f(0.2)-f(0.1)\right)+\left(f(0.6)-f(0.5)\right)\right]$, lo que da como resultado la opción b.

b) Sumando las imágenes de cada uno de los tiempos dados y dividiendo el resultado por siete, es decir, $\frac{1}{7}\left[f(0)+f(0.1)+\cdots+f(0.6)\right]$, lo que da como resultado la opción c.

c) Eligiendo la imagen de t = 0.4, f (0.4), como la velocidad puntual de la pelota, lo que resulta en la opción d.

Sin embargo, los cuatro tipos de configuraciones que identificamos, tienen características distintas. A continuación analizamos cada uno de dichos tipos de configuraciones mediante un ejemplo prototípico para cada una de ellas.

Configuración cognitiva 1: patrón numérico

La característica de este tipo de solución, aunque los estudiantes que la propusieron no llegaron a concretarla, es que a partir de los datos numéricos presentados en la tabla (puntos pertenecientes a una función), se intenta determinar el patrón o regla de correspondencia que define la función. La Figura 2 presenta una de las respuestas que ilustra este tipo de solución.

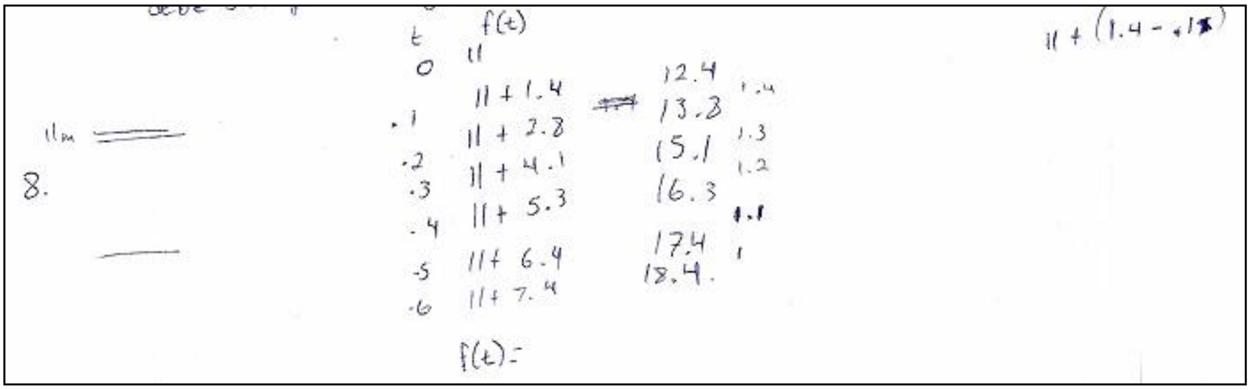


Figura 2. Solución dada a la tarea 8 por el estudiante A

Puede observarse que el estudiante F utiliza elementos lingüísticos que hacen referencia a números o cantidades que representan tanto al tiempo transcurrido “*t* = 0, 0.1, ..., 0.6” como a la altura de la pelota para un tiempo *t* determinado “*f* (*t*) = 11, 11+1.4, ..., 11+7.4”. Luego haciendo uso de la proposición “una pelota se lanza al aire desde un puente de 11 metros de altura [*f* (*t*) =11] para *t*=0”, realiza una descomposición de las alturas *f* (*t*) “12.4 = 11+1.4, 13.8 = 11+2.8,..., 18.4 = 11+7.4”. Luego procede por ensayo y error para encontrar un patrón que le ayude a determinar la expresión para *f* (*t*), lo cual se evidencia con la expresión “11+(1.4 – .1)”. El estudiante A no logra concretar su solución. Al parecer este estudiante no se percata de que el procedimiento que ha usado para resolver la tarea es quizá el más complicado de todos los posibles. Tratar de encontrar una expresión simbólica para *f* (*t*) a partir de los siete puntos dados, es una tarea complicada. Es posible encontrar una función que se comporte aproximadamente igual a lo largo de esos siete puntos; no obstante, esta tarea es difícil puesto que se refiere a una función polinómica de, al menos, grado seis.

Configuración cognitiva 2: uso de la relación física *v = d/t*

La Figura 3 muestra la solución que da el estudiante B a la tarea 8 y que es característica de este tipo de configuración.

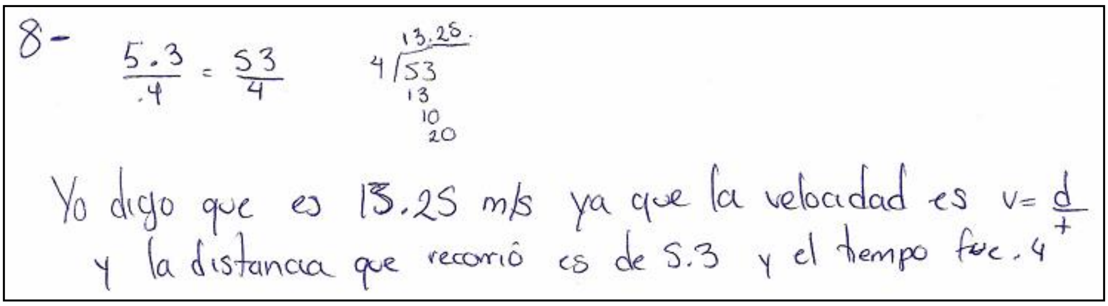


Figura 3. Solución de la tarea 8 por el estudiante B

Como se puede observar en la Figura 3, la característica central de este tipo de solución es el empleo tanto de la proposición “velocidad es igual a distancia entre tiempo (*v* = d/t)” como de la desconsideración que se realiza del objeto derivada como velocidad instantánea. Así, el estudiante evidencia elementos lingüísticos simbólicos y verbales que evocan a la consideración de conceptos tales como velocidad (promedio), distancia, tiempo; y proposiciones tales como “v = d/t” y “Yo digo que es 13.25 m/s...”.

El procedimiento usado fue el cálculo de la velocidad promedio de la pelota entre $t = 0$ y $t = 0.4$, mediante la relación v = d/t. Así, el estudiante B halla el tiempo transcurrido entre $t = 0$ y $t = 0.4$ “el tiempo fue de 0.4 [0.4 s – 0 s]” y la distancia que recorre la pelota en ese lapso “la distancia que recorrió es de 5.3 [16.3 m – 11 m]”. Luego calcula la velocidad promedio “5.3/0.4 = 53/4” y da su respuesta mediante la expresión “13.25 m/s” la cual justifica “ya que la velocidad es v = d/t y la distancia que recorrió [la pelota] es de 5.3 y el tiempo fue de 0.4”.

El estudiante B parece no percatarse de que la tarea requiere la interpretación de la derivada en un punto como velocidad instantánea. Tampoco tiene en cuenta la relación entre velocidad promedio (v=d/t) y la pendiente de una recta secante que corta a la función en $t = 0$ y $t = 0.4$, relación que le habría ayudado a reconocer que su respuesta era incorrecta. Con lo anterior, parece argumentado que el estudiante B no muestra evidencia del conocimiento matemático ampliado requerido para resolver la tarea.

Configuración cognitiva 3: aproximación por la izquierda o por la derecha

Este tipo de configuración tiene muchas similitudes con el tipo anterior. Entre las distinciones más notables se encuentra el hecho de que los estudiantes no consideran (al menos explícitamente) la relación v = d/t, y la otra es que para calcular la velocidad promedio se tomaron valores más próximos a $t = 0.4$ s (por ejemplo t = 0.3 s). La Figura 4 muestra la solución que da un estudiante (C) y que es prototípica de este tipo de configuración.

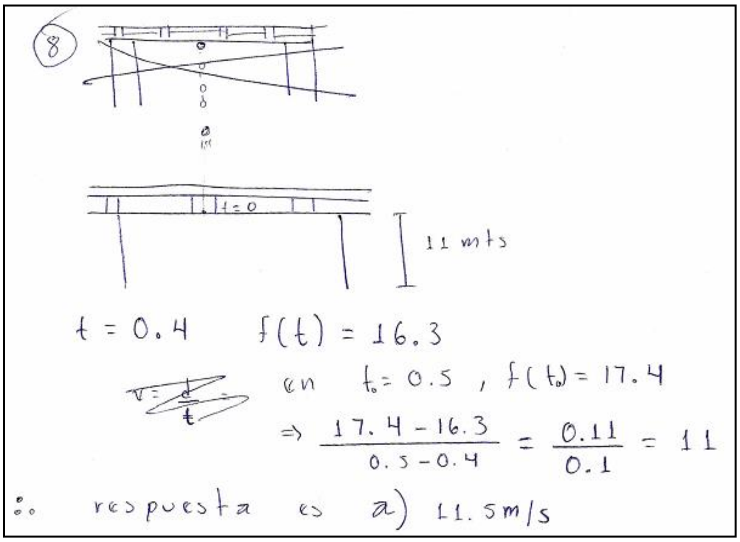


Figura 4. Solución de la tarea 8 dada por el estudiante C

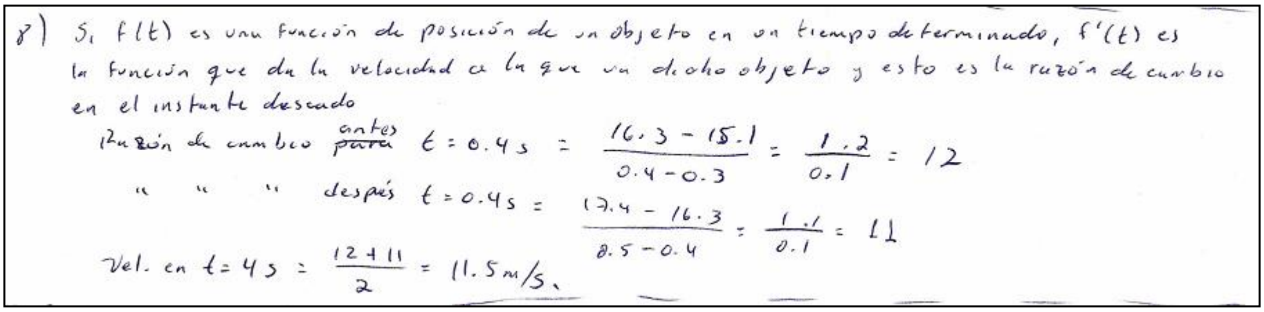
En la solución que se presenta en la Figura 4, se observan elementos lingüísticos icónicos (dibujo del puente) y simbólicos que dan evidencia tanto de conceptos tales como distancia, tiempo y velocidad promedio; como de proposiciones tales como “la pelota se lanza al aire desde un puente de 11 metros de altura [$f(t) = 11$ para $t = 0$]” y “velocidad es igual a distancia entre tiempo v = d/t”. A partir de estos objetos matemáticos, el estudiante C desarrolla un procedimiento centrado en el cálculo de la velocidad promedio de la pelota entre los tiempos t = 0.4 y t = 0.5 y considerando un incremento h = 0.1 (más pequeño que en el tipo de solución anterior), obtiene su respuesta “11”.

A pesar del error en el que incurre el estudiante al establecer que el resultado de la resta 17.4–16.3 = 0.11, afirmamos que su solución es una aproximación por la derecha a la velocidad de la pelota en el instante $t = 0.4$, ya que considera un tiempo posterior ($t = 0.5$) para el cálculo de la velocidad promedio; y dicho error no afecta a la globalidad de su razonamiento ni de los objetos matemáticos primarios que moviliza en su solución. En este caso, el procedimiento sí que es usado por el estudiante como argumentación para su respuesta. La afirmación, “por tanto la respuesta es a) 11.5 m/s”, la propone debido a que es la opción más parecida y cercana al resultado que ha obtenido con sus cálculos.

Al igual que en el caso anterior, no se tiene evidencia suficiente de que el estudiante C se haya percatado de que en realidad ha calculado la velocidad promedio de la pelota (entre $t = 0.4$ y $t = 0.5$) y no su velocidad instantánea en el instante $t = 0.4$.

Configuración cognitiva 4: aproximación bilateral

La característica más importante en esta configuración es la aproximación bilateral que se realiza a la derivada de la función en el punto t = 0.4, a través de valores numéricos de la función. Lo anterior también se conoce como derivada numérica. La Figura 5 muestra la solución dada por el estudiante D, la cual ilustra este tipo de configuración cognitiva.


8) Si f(t) es una función de posición de un objeto en un tiempo determinado, f'(t) es la función que da la velocidad a la que va dicho objeto y esto es la razón de cambio en el instante deseado

Razón de cambio antes ~~para~~ $t = 0.4 s = \frac{16.3 - 15.1}{0.4 - 0.3} = \frac{1.2}{0.1} = 12$

" " " después $t = 0.4 s = \frac{17.4 - 16.3}{0.5 - 0.4} = \frac{1.1}{0.1} = 11$

Vel. en $t = 4 s = \frac{12+11}{2} = 11.5 m/s$.

Figura 5. Solución dada a la tarea 8 por el estudiante D

El estudiante D comienza la solución de la tarea indicando “Si $f(t)$ es una función de posición de un objeto en un tiempo determinado, $f'(t)$ es la función que da la velocidad a la que va dicho objeto y esto es la razón de cambio en el instante deseado”. De esta primera expresión dada por el estudiante, se puede inferir el dominio de conceptos centrales tales como función (posición de un objeto respecto del tiempo), derivada (como función velocidad), y la derivada en un punto interpretada como razón de cambio instantánea. También aparecen proposiciones tales como “$f(t)$ es una función de posición de un objeto en un tiempo determinado” y “$f'(t)$ es la función que da la velocidad a la que va dicho objeto” y una última que da cuenta de la comprensión que tiene el estudiante de la tarea “…y esto es la razón de cambio en el instante deseado”. Esta última proposición sugiere que pretende hallar la razón de cambio en el instante t = 0.4. Esto último se hace más evidente a partir del elemento lingüístico que revela el procedimiento que sigue.

Primero considera una “razón de cambio antes de t = 0.4 s” que se refiere al cálculo de la razón de cambio o velocidad promedio de la pelota entre los tiempos t = 0.3 y t = 0.4 “$\frac{16.3-15.1}{0.4-0.3}=\frac{1.2}{0.1}=12$” (aproximación a la razón de cambio en el instante t = 0.4 por valores de la izquierda y con incremento h = 0.1). Luego considera una aproximación “después de t = 0.4 s”, que hace referencia al cálculo de la razón de cambio o velocidad promedio de la pelota entre los tiempos t = 0.4 y t = 0.5 “$\frac{17.4-16.3}{0.5-0.4}=\frac{1.1}{0.1}=11$” (aproximación a la razón de cambio en el instante t = 0.4 por valores de la derecha y con incremento h = 0.1). A partir de estas velocidades promedio el estudiante D calcula la razón de cambio instantánea para t = 0.4 “velocidad en $t = 0.4s = \frac{12+11}{2} = 11.5 m/s$” (aproximación bilateral a la velocidad de la pelota en el instante t = 0.4 s, mediante el “promedio” de las velocidades promedio, con t = 0.4 en el centro del intervalo considerado).

RESULTADOS Y DISCUSIONES

En el caso concreto de la Tarea 8, se consideraron correctas aquellas respuestas en las que se obtuvo la velocidad pedida de la pelota a partir de procedimientos y justificaciones válidas. Las respuestas correctas están relacionadas con el tipo de configuración por *aproximación bilateral*. Las respuestas parcialmente correctas, relacionadas con la configuración por *aproximación por la izquierda o derecha*, fueron aquellas en las que se utilizaron procedimientos y justificaciones que no son del todo erróneos pero tampoco son válidos para encontrar la velocidad pedida. Como incorrectas se consideraron aquellas respuestas en las que no se halla la velocidad de la pelota para t = 0.4, debido a que los procedimientos seguidos y las justificaciones dadas no eran válidos. Las respuestas incorrectas están relacionadas con los tipos de configuraciones *patrón numérico* y *uso de la relación física* $v = d/t$. La Tabla 1 muestra los resultados obtenidos para el grado de corrección de la tarea 8.

Tabla 1. Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de la tarea 8

Grado de Corrección	**Tarea 8**	
	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	1	1,9
Parcialmente correcta	5	9,4
Incorrecta	23	43,4
No responden	24	45,3
Total	53	100

Es posible observar a partir de los datos que se presentan en la Tabla 1 que tan sólo un estudiante para profesor (1,9%) logra resolver correctamente la tarea, y cinco (9,4%) dan una respuesta parcialmente correcta. Esto sugiere que, al menos, el 88,7% de los futuros profesores exhiben carencias respecto del conocimiento matemático ampliado requerido para resolver la tarea 8.

Por su parte, la Tabla 2 presenta los resultados obtenidos respecto a la variable tipo de configuración cognitiva para la tarea 8.

Tabla 2. Frecuencias y porcentajes para el tipo de configuración cognitiva de la tarea 8

Tipo de configuración cognitiva	**Tarea 8**	
	Frecuencia	Porcentaje
Patrón numérico	3	5,7
Uso de la relación física $v = d/t$	13	24,5
Aproximación por la izquierda o derecha	4	7,5
Aproximación bilateral	2	3,8
No dan evidencia de su solución	31	58,5
Total	53	100

A partir de los datos obtenidos en el análisis realizado para cada tipo de configuración cognitiva se puede observar, en la Tabla 2, que 17 (32%) de los futuros profesores parecen no distinguir la diferencia entre función derivada y derivada en un punto. Las configuraciones cognitivas asociadas a la actividad matemática desarrollada por estos 17 profesores están contempladas en: "uso de la relación física $v = d/t$" y "aproximación por la izquierda o derecha". Este resultado, referente a la problemática para distinguir la diferencia entre la función derivada y la derivada en un punto ha sido reportado en otras investigaciones (Inglada y Font, 2003; Badillo, Azcárate y Font, 2011). Esta desconexión aparente entre la interpretación de la derivada en un punto y la función derivada induce al error de responder la pregunta, ¿cuál es la velocidad de la pelota en el instante t = 0.4 s?, mediante el cálculo de la velocidad promedio. Parece probado que los futuros profesores no relacionan los distintos significados para la derivada. Los estudiantes parecen ignorar que la relación $v = d/t$ representa la velocidad promedio de la pelota correspondiente a dos tiempos distintos. Esta velocidad promedio se relaciona a su vez con la pendiente de alguna recta secante a la función desplazamiento, lo cual no se corresponde con una interpretación para la derivada.

REFLEXIONES FINALES

En el presente trabajo hemos caracterizado el conocimiento, referente a la faceta epistémica del CDM, de una muestra de futuros profesores de secundaria/bachillerato en México. Para dicha caracterización hemos utilizado dos herramientas "teórico-metodológicas" provistas por el marco teórico al que nos apegamos: prácticas matemáticas y configuración de objetos y procesos. El análisis de las prácticas matemáticas, objetos y procesos, se muestra como una herramienta potente para la identificación y caracterización de los conocimientos común, especializado y ampliado, en tanto que proporciona pautas y criterios para analizar dichos tipos de conocimientos manifestados por los futuros profesores. Las configuraciones cognitivas caracterizadas para la tarea 8, permiten identificar los significados que los futuros profesores atribuyen a los objetos puestos en juego en las soluciones dadas a las tareas. Las categorías, o tipos de configuraciones cognitivas, en las cuales se han agrupado las soluciones que éstos dan a cada una de las tareas, se obtienen y describen a partir de las configuraciones de objetos y procesos evidenciadas en sus soluciones de las tareas.

Los resultados obtenidos a partir del análisis, cuantitativo y cualitativo, de las resoluciones que los estudiantes dieron a las tareas incluidas en el *Cuestionario FE-CDM-Derivada*, señalan que los futuros profesores exhiben ciertas dificultades para resolver tareas relacionadas con el conocimiento común y ampliado sobre la derivada. Resultados como los obtenidos en la Tarea 8, objeto de discusión para esta comunicación, muestran las dificultades de los futuros profesores cuando tienen que usar la derivada como razón instantánea de cambio en el caso de una situación de cierta complejidad.

En general, se ha evidenciado cómo el conocimiento común del contenido, no es suficiente para abordar tareas propias de la enseñanza, para las que se requiere no sólo cierto nivel de conocimiento especializado sino también de conocimiento ampliado. Así mismo, los resultados de la globalidad del cuestionario, muestran una aparente desconexión entre los distintos significados de la derivada en las respuestas de los futuros profesores. Tanto el diseño del cuestionario como las respuestas de los futuros profesores muestran el complejo entramado de prácticas, objetos y procesos matemáticos puestos en juego en la resolución de las tareas relacionadas con la derivada. La toma de conciencia de esta complejidad es necesaria tanto para los formadores, para que den oportunidades a los maestros de desarrollar el conocimiento requerido para la enseñanza de la derivada, como para los propios futuros profesores, para que puedan desarrollar y evaluar la competencia matemática en sus futuros alumnos.

Reconocimiento

Esta investigación ha sido desarrollada en el marco de los proyectos de investigación sobre formación de profesores: EDU2012-32644 (Universidad de Barcelona) y EDU2012-31869 (Universidad de Granada).

Referencias

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. (1997). The development of student's graphical understanding of the derivate. *Journal of Mathematical Behavior, 16*(4), pp. 399–431.

Badillo, E., Azcárate, C., & Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos $f'(a)$ y $f'(x)$ en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(2), pp. 191-206.

Baker, B., Cooley, L., & Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. Journal for Research in Mathematics Education, *31*(5), pp. 557–578.

Ball, D.L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education, 51*(3), pp. 241-247.

Ball, D.L., Lubienski, S.T., & Mewborn, D.S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In Richardson, v. (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Çetin, N. (2009). The ability of students to comprehend the function-derivative relationship with regard to problems from their real life. *PRIMUS, 19*(3), pp. 232-244.

Font, V. (2000) Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a la derivada. Tesis doctoral, Universitat de Barcelona.

García, M., Llinares, S., & Sánchez-Matamoros, G. (2011). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9(5), pp. 1023-1045.

Gavilán, J., García, M., & Llinares, S. (2007). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas. *Enseñanza de las ciencias, 25*(2), pp. 157-170.

Godino, J.D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, pp. 13-31.

Godino, J.D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1), pp. 127-135.

Godino, J. D. & Pino-Fan, L. (2013). The mathematical knowledge for teaching. A view from onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction. In B. Ubuz, Ç. Haser & M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3325–3326). Antalya, Turkey: CERME.

Hill, H.C., Ball, D.L., & Schlling, S.G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*, pp. 372-400.

Inglada, N., y Font, V. (2003). Significados institucionales y personales de la derivada. Conflictos semióticos relacionados con la notación incremental. *XIX Jornadas del SI-IDM de Córdoba*, pp. 1-18.

Pino-Fan, L. (2013). Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada. Tesis Doctoral, Universidad de Granada, España.

Pino-Fan, L., Font, V. & Godino, J. D. (2013). El conocimiento didáctico-matemático de los profesores: pautas y criterios para su evaluación y desarrollo. En C. Dolores, M. García, J. Hernández y L. Sosa (Eds.), *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 137 – 151). México, D. F.: Ediciones D. D. S. & Universidad Autónoma de Guerrero.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. & Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (1ª Parte). *REVEMAT*, *8*(2), 1 – 49.

Pino-Fan, L., Godino, J.D., & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matematica Pesquisa, 13*(1), pp. 141-178.

Sánchez–Matamoros, G., García, G., García, M., & Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias, 24*(1), pp. 85–98.

Sánchez–Matamoros, G., Fernández, C., Valls, J., García, M., & Llinares, S. (2012). Cómo estudiantes para profesor interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato. La derivada de una función en un punto. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García y L. Ordoñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 497-508). Jaén: SEIEM.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), pp. 4-14.

APROXIMACIÓN AL CONOCIMIENTO PARA LA ENSEÑANZA DE LA ESTIMACIÓN DE MEDIDA DE LOS MAESTROS DE PRIMARIA

Approaching knowledge for teaching measure estimation in Primary school

Noemí Pizarro, Núria Gorgorió, Lluís Albarracín

Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

En esta aportación presentamos un estudio sobre algunos aspectos del conocimiento matemático para la enseñanza que poseen los maestros del concepto de estimación de medida. Queremos saber cómo los maestros definen y ejemplifican el concepto, dado que en la literatura de educación matemática no está claramente definido ni diferenciado del concepto general de estimación que incluye tareas de corte aritmético. Encuestamos a 112 maestros en ejercicio durante su formación continua del año 2013 en Santiago de Chile. Mediante un análisis cualitativo-descriptivo observamos que el conocimiento disciplinar del concepto de estimación de medida está poco desarrollado, por lo que es probable que el conocimiento para la enseñanza que los maestros tienen no sea correcto ni completo.

Palabras clave: *estimación de medida, conocimiento del profesorado*.

Abstract

In this contribution we present a study of certain aspects of mathematical knowledge for teaching that teachers possess about the concept of measure estimation. We seek to understand how teachers define and exemplify this concept, given that it is not clearly defined in the literature of mathematical education, neither is it clearly differentiated from that of general estimation, which includes arithmetic tasks. We survey 112 practising school teachers during a continuing teacher training course that took place in Santiago de Chile in 2003. By means of a qualitative-descriptive analysis, we note that the disciplinary knowledge on the concept of measure estimation is poorly developed, implying that teachers' knowledge for education may not be correct nor complete.

Keywords: *measure estimation, knowledge of teachers*.

INTRODUCCIÓN

A principios de los años ochenta la enseñanza de la medida tomó énfasis en algunos currículums escolares que respondían a las recomendaciones de organismos internacionales vinculados a la enseñanza de la matemática (NCTM, 1980; Informe Cockcroft, 1982; ICMI, 1986). Estas recomendaciones se han recogido por parte del Ministerio de Educación de Chile en las nuevas Bases Curriculares del año 2012, en las que la medida ha pasado a ser un nuevo eje curricular en la enseñanza primaria.

Una parte importante de la enseñanza de la medida es el desarrollo de su estimación. Por ello el nuevo currículum chileno la considera en más de doce objetivos de aprendizaje que se distribuyen en los ejes de números (medida discreta), medida y geometría. Sin embargo, con anterioridad la estimación de medida no había tenido espacio en los programas de estudio del profesorado. Por ello los actuales maestros nunca han recibido formación al respecto, ni en su etapa escolar ni en su formación profesional posterior. Por lo tanto, nos encontramos en el caso de que un concepto disciplinario irrumpe en las aulas sin proveer a los docentes de una formación concreta al respecto.

Pizarro, N., Gorgorió, N., Albarracín, L. (2014). Aproximación al conocimiento para la enseñanza de la estimación de medida de los maestros de primaria. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 523-532). Salamanca: SEIEM.

A raíz de esto nos preguntamos ¿Qué conocimiento para enseñar la estimación de medida poseen los maestros de primaria? Para responder a esta pregunta, en una primera etapa, indagamos en la definición del concepto de estimación de medida en la literatura de educación matemática. Posteriormente consideramos el marco del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (*Mathematical Knowledge for Teaching)* propuesto por Ball, Thames y Phelps (2008) y realizamos una investigación cualitativa-descriptiva en Santiago de Chile con 112 maestros de primaria en ejercicio docente que han enseñado o deben enseñar estimación de medida discreta o continua a sus estudiantes con el objetivo de indagar en el Conocimiento para la Enseñanza que poseen los maestros de primaria. Con este estudio pretendemos analizar las necesidades de Conocimiento para la Enseñanza que se generan en el profesorado al introducir nuevos contenidos en el currículum de matemáticas y establecer orientaciones para diseñar acciones de formación inicial y continua de los maestros.

EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA

Shulman (1986) replanteó el conocimiento de los maestros centrándose en el rol del contenido en la enseñanza. Shulman sugirió distinguir tres tipos de conocimiento del contenido de los maestros:

- Conocimiento del Contenido Específico *(Subject matter content knowledge):* El maestro no sólo debe definir los conceptos de la materia que enseña, sino también justificarlos, relacionarlos, secuenciarlos y enfatizarlos, tanto en la teoría como en la práctica.
- Conocimiento Didáctico del Contenido *(Pedagogical content knowledge)*: el maestro debe tratar las distintas materias con las formas de representación más útiles, con los ejemplos, representaciones, analogías, explicaciones y demostraciones más eficaces, con el fin de hacer el conocimiento comprensible para otros.
- Conocimiento Curricular *(Curricular Knowledge):* Se espera que el maestro esté no sólo familiarizado con los temas y los materiales para enseñar del nivel que imparte, sino que también debe estarlo con lo que Shulman llamó “Conocimiento Vertical”–el conocimiento de la diacronía de las diversas materias– y el “Conocimiento Horizontal” –el conocimiento de los contenidos paralelos tratados en otras asignaturas, distintas a las que el docente imparte. Ambos conocimientos deben relacionarse con la materia tratada.

En educación matemática, la línea del Conocimiento del Contenido (*Content Knowledge*) (Shulman, 1986) ha sido continuada por distintos investigadores a nivel mundial, como Rowland, Huckstep y Thwaites (2003), Ball, Thames, Phelps (2008) y Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2013), entre otros.

A partir de las ideas del Conocimiento del Contenido Específico y el Conocimiento Pedagógico del Contenido, y continuando la línea de investigación en el ámbito de las matemáticas, Ball et al. (2008) se hicieron las siguientes preguntas: ¿Qué tienen que saber los maestros y qué tienen que ser capaces de hacer para enseñar con eficacia? ¿Qué enseñanza se requiere en términos de comprensión del contenido?

Consideraron que el énfasis está en el uso del conocimiento en la enseñanza y para la enseñanza y no en los propios docentes. Se centraron en el análisis del conocimiento para la enseñanza mediante la observación del trabajo docente en el aula y fuera de ella, introduciendo así la línea de investigación del Conocimiento Matemático para la Enseñanza *(Mathematical Knowledge for Teaching)* dividiéndolo en seis categorías, que aún se están desarrollando. Las primeras tres relacionadas con el Conocimiento del Contenido Específico y las tres siguientes relacionadas con el Conocimiento Pedagógico del Contenido.

- Conocimiento Común del Contenido: la habilidad y el conocimiento matemático utilizados en entornos distintos de la enseñanza; por ejemplo, el conocimiento que el maestro posee para dar solución a un problema, resolver un ejercicio o reconocer una definición o respuesta incorrecta. Indica que el maestro debe saber qué enseña; en nuestro caso debe comprender el concepto de estimación y debe saber estimar medidas.

- Conocimiento del Horizonte: conocimiento de la diacronía de los temas curriculares; por ejemplo, el maestro de cuarto grado debe conocer qué se enseña en cuarto grado, qué debió aprender el estudiante en cursos anteriores y que deberá aprender de quinto grado en adelante.
- Conocimiento Especializado del Contenido: la habilidad y el conocimiento y exclusivos de la enseñanza matemática. Cuando tienen este conocimiento, los maestros son capaces de presentar ideas matemáticas y encontrar ejemplos para representarlas, evaluar la plausibilidad de las respuestas y evaluar y seleccionar definiciones utilizables, entre otros. En nuestro caso, el maestro podría ejemplificar con una pregunta la idea de estimación de medida, considerando la plausibilidad de las respuestas a partir de la definición.
- Conocimiento del Contenido y los Estudiantes: combina el conocimiento sobre los estudiantes y la matemática. El maestro debe poder anticiparse al pensamiento de los estudiantes; debe saber si podrán resolver un ejercicio que les propone, al elegir un ejemplo, debe predecir si motivará al estudiante, le traerá problemas o si podrá resolverlo o no.
- Conocimiento del Contenido y la Enseñanza: combina el conocimiento sobre la enseñanza y el conocimiento sobre las matemáticas. Son ejemplos de este tipo de conocimiento la capacidad para secuenciar contenidos, proponer ejemplos de inicio, profundización y cierre y conocer las ventajas y desventajas de las representaciones utilizadas para enseñar una idea específica.
- Conocimiento del Contenido y el Currículo: Los autores lo refieren equivalente, desde la perspectiva de los autores, al Conocimiento Curricular de Shulman (1986).

En este estudio nos aproximaremos al Conocimiento Común y al Conocimiento Especializado, siempre en relación con la estimación de medida.

ESTIMACIÓN DE MEDIDA

Al revisar la literatura sobre estimación de medida observamos que, a menudo, las distintas definiciones de estimación incluyen una amplia gama de tareas a realizar, como por ejemplo valorar mentalmente la medida de una magnitud, calcular mentalmente y de forma ágil una operación aritmética, calcular el valor probable de una medida estadística, etc. Las definiciones siguientes recogen este hecho:

- “Un proceso de llegar a una medición o a una medida sin la ayuda de herramientas de medida. Se trata de un proceso mental que tiene aspectos visuales o manipulativos” (Bright, 1976, p.89).
- “Juicio para corroborar si el cálculo de una operación o medición es razonable o para valorar una variedad de medidas, en situaciones en que sea difícil o incómodo medir” (Informe Cockcroft, 1982, pp 22-23).
- “Habilidad para hacer una conjetura en cuanto al valor de la distancia, el costo, el tamaño, etc. o cálculo aritmético” (Clayton, 1996, p. 87).

Segovia, Castro, Castro y Rico (1989) definen estimación como: “Juicio de valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de las circunstancias individuales de quien lo emite” (p.18). Consideran además que estimación en medida es un juicio que puede establecerse para determinar una cantidad o una medida, que se distingue de otras estimaciones por razones metodológicas y que es de carácter individual, donde las intuiciones y las experiencias del sujeto les agregan una importancia destacada.

Hogan y Brezinski (2003) distinguen tres tipos de estimación: *numerosity*, estimación de medida y estimación computacional. *Numerosity* se refiere a la habilidad de estimar visualmente el número de objetos dispuestos en un plano en un tiempo limitado; la estimación de medida se basa en la habilidad perceptiva de estimar diferentes magnitudes en objetos comunes, y la estimación computacional se refiere al proceso por el que se determina rápidamente un valor aproximado para el resultado de una operación aritmética. Concluyen que *numerosity* y la estimación de medida tienen habilidades cognitivas similares, entre las cuales está poseer imágenes mentales de las unidades de referencia. Al respecto, Castillo, Segovia, Castro y Molina (2011) indican que la estimación de medida está compuesta por ocho componentes: comprender la cualidad que se va a estimar, percibir qué será estimado, comprender el concepto de unidad de medida, poseer una imagen mental de la unidad de medida a utilizar, poseer una imagen mental de referentes utilizados en la tarea, adecuar la unidad de medida a utilizar con lo que se va a estimar, conocer y utilizar términos apropiados de la estimación en medida, seleccionar y usar estrategias apropiadas para realizar estimaciones y verificar la adecuación de la estimación.

LA ESTIMACIÓN EN LA EDUCACIÓN

¿Por qué es necesario que se desarrolle la estimación de medida en la escuela? En primera instancia porque desarrolla habilidades perceptivas (Inskeep, 1976; Informe Cockcroft, 1982; Hogan y Brezinski, 2003) y además porque conlleva reconocer las unidades de medida y comprender las herramientas necesarias para realizar mediciones. Es probable que al adquirir la habilidad, que comienza en los primeros años de enseñanza elemental, se desarrollen también componentes de enumeración, cantidad y pensamiento tridimensional (Boulton-Lewis, Wils, & Mutch, 1996). Por su parte, Callís y Fiol (2003) atribuyen una gran importancia a la intuición métrica como estadio del máximo nivel de evolución y de dominio matemático.

Sin embargo, Forrester y Piké (1998) observaron que en el discurso de los docentes en el aula, se apreciaba una notoria separación entre medida y estimación. Notaron que la estimación se trataba como hipótesis predictiva, en forma vaga y superflua, carente de respuestas satisfactorias para resolver situaciones a las que sólo podía dar respuesta un instrumento de medida. Estos autores observaron que la estimación se trataba por medio "del pensamiento sensato" que conllevaba a adivinanzas más que juicios de valor a partir de referentes, dejando poca evidencia de la comprensión del concepto y dando cuenta que matemática es sinónimo de rigor y exactitud.

Segovia y Castro (2009) complementan estas conclusiones, explicando que si buscamos en un diccionario cualquiera el significado de matemática encontraremos que es un concepto caracterizado por la exactitud y el rigor; a raíz de esto, se podría pensar que la estimación no tiene que ver con "matemática de verdad" dado que los resultados no son exactos.

En nuestra revisión de la literatura hemos encontrado escasos estudios que traten la formación docente sobre estimación de medida. Sin embargo, Joram (2003) y Joram et al. (2005) sugieren que el uso de la estrategia de estimación por punto de referencia parece una estrategia didáctica aceptable.

OBJETIVOS DEL ESTUDIO

A partir de lo expuesto, nos proponemos indagar en el Conocimiento para la Enseñanza de la estimación de medida de los maestros de primaria. Dado que este estudio muestra el inicio de una investigación en el marco de una tesis doctoral, consideramos necesario partir comprendiendo qué entienden los maestros por estimación de medida y cómo aplicarían este concepto en actividades de aula con sus estudiantes. Para ello nos marcamos los siguientes objetivos concretos:

- Caracterizar el concepto de estimación de medida que utilizan los maestros de primaria, como parte de su Conocimiento Común del Contenido.
- Describir la aplicación del concepto de estimación de medida en una actividad propuesta por los maestros de primaria como parte de su Conocimiento Especializado del Contenido.

EL ESTUDIO

Este estudio es parte de una investigación que pretende analizar el conocimiento de los maestros de primaria para la enseñanza de la estimación de medida. Por medio de un cuestionario de diez preguntas abiertas vinculadas al Marco Teórico de Ball et al. (2008), encuestamos a 112 maestros de primaria en ejercicio docente de Santiago de Chile. La toma de datos se llevo a cabo durante la formación continua de estos maestros como especialistas en educación matemática para primaria, con lo que conforman una muestra representativa del profesorado interesado en la mejora de su práctica docente como maestros de matemáticas.

En este texto presentamos el análisis de dos de las 10 preguntas que posee el cuestionario. La pregunta vinculada al Conocimiento Común del Contenido, pregunta 6, pretende recoger las distintas nociones del concepto de estimación que poseen los maestros de primaria, viendo si hay distinciones o semejanzas con la medición y la aproximación.

- ¿Qué entiende por estimación de medida? (Pregunta 6)

Por otro lado, la pregunta 3, vinculada al Conocimiento Especializado del Contenido, esperamos que nos proporcione información acerca de cómo utiliza el maestro una representación dada, qué ejemplos presenta en relación con la definición de estimación de medida, y si puede establecer respuestas plausibles por parte de los estudiantes.

- ¿Qué pregunta de estimación de medida podría hacer usted con esta imagen? (Pregunta 3)

Figura 1. Imagen de referencia para elaboración de la Pregunta 3

A continuación mostramos las respuestas de un docente para cada una de las preguntas estudiadas como muestra de los datos recogidos:

- Concepto de estimación (pregunta 6):

  "Un cálculo aproximado que se hace de algún objeto".

- Elaboración de una pregunta (pregunta 3):

  ¿Cuántos litros de pintura necesitas para pintar este muro sabiendo que con cada litro rinde "x"m^2?

ANÁLISIS DE LOS DATOS

Las respuestas de los maestros se digitalizaron y se trataron con el programa de análisis de datos cualitativos NVivo 10. Una primera aproximación al análisis nos mostró la necesidad de concretar una definición de estimación de medida, ya que en la literatura se ofrecen diferentes definiciones que contemplan distintos elementos. Por ello, hemos reelaborado la definición de estimación de medida para incluir los aspectos que se muestran como elementales en la revisión de la literatura. La definición que proponemos y usamos para nuestro análisis es la siguiente:

Estimar (una medida): *Asignar perceptivamente un valor o un intervalo de valores y la unidad correspondiente a una magnitud discreta o continua, por medio de los conocimientos previos o por comparación no directa a algún objeto auxiliar*.

Esta definición se sustenta sobre tres elementos esenciales:

- Asignar un valor numérico (V): Para que la tarea pueda considerarse estimación, debe requerir la asignación de un valor numérico. En caso de no ser así, la tarea sólo sería un trabajo perceptivo. Por ejemplo, si al tocar el agua de una piscina afirmamos que es agradable para nadar, la tarea es únicamente una tarea perceptiva, porque no hemos asignado un valor a la temperatura, las unidades de medida no entran en juego.
- Realizar la tarea perceptivamente (P): para estimar es necesario utilizar los sentidos, evitando el uso directo de cualquier instrumento de medida, sea estandarizado o no. En cuanto se usa un instrumento de medida, haciendo una comparación directa, se está midiendo, no estimando, aunque se exprese el resultado de la medición de forma aproximada.
- Relacionar la percepción con los conocimientos previos o con la imagen mental del objeto auxiliar (R): Para estimar hay que tener referentes o idealmente poseer una noción mental de alguna unidad de medida; en caso contrario realizándose trataría de adivinar o dar un resultado inventado aleatoriamente.

Por lo tanto al estimar la medida de una magnitud se debe entregar un valor o intervalo de valores, resultado de un juicio que se apoya en un acto perceptivo que tiene sentido dado que tiene referentes. El análisis se basa en la caracterización de las respuestas recogidas a partir de identificar estos tres elementos.

RESULTADOS

Sobre la definición

Analizamos las respuestas de los maestros de acuerdo a los tres elementos anteriores: valorar (V), percibir (P) y usar referentes (R). Cuando cumple las tres condiciones se clasificó como estimación de medida. Un amplio grupo indicó que estimar es entregar un valor, algunos de ellos explicitaron la percepción, otros el uso de referencias y en la mayoría de los casos no mencionaron el uso de ninguna de las dos, sólo consideraron que estimar es asignar un valor numérico a una magnitud, utilizando palabras como “calcular una medida”, “decir cuánto mide un objeto”, etc. Otros pocos indicaron que estimar es medir, o aproximar numéricamente o bien no dieron respuesta vinculada a la estimación.

La siguiente tabla resume los códigos, sus categorías y las frecuencias correspondientes a las respuestas de los 112 maestros. Además, muestra un ejemplo de cada una de ellas.

Tabla 1. Códigos, categorías, frecuencias y ejemplos de las definiciones de estimación

Códigos	Categorías	Frecuencias	Ejemplo de respuesta
Estimar	Estimación de medida (V-P-R)	5	*“Es al observar o al "ojímetro" decir cuánto mide un objeto, pero teniendo un patrón antes”*
Valorar	Valoración con referentes (V-R)	14	*“Calcular un valor aproximado, de lo que se nos está solicitando, a partir de alguna referencia que se tenga al respecto”*
	Valoración con	14	*“Acercarse, con solo mirar lo más posible a*

	percepción (V-P)		*la medida de un objeto”*
	Valoración sin justificación (V)	51	*“Estimación: sería la medida que cree el alumno que tiene determinado objeto”*
Medir	Medición	8	*“Utilizar elementos naturales, como partes del cuerpo u objetos para medir algo. Por ejemplo: pasos”*
Aproximar	Aproximación numérica.	14	*“Aproximar alguna medida para que sea exacto 3,9 cm= 4cm”*
Otras respuestas		6	*“Es la habilidad de poder resolver problemas rutinarios y no rutinarios en la base de sistemas de medición (tiempo, longitud y masa)”*

En la Tabla 1, vemos que existen diferentes categorías que agrupan datos que se aproximan a la definición de estimación que hemos construido sin llegar a ser estimación. Así mismo vemos que hay docentes que dan definiciones que si bien no se corresponden con una idea de estimación completa desde el punto de vista de Conocimiento Matemático para la Enseñanza, sí serían aceptables desde del punto de vista del conocimiento común del concepto de estimación de medida dado que interpretan la estimación como una valoración basada en referentes y/o percepciones. Esta consideración nos permite resaltar que la definición que hemos propuesto para estimación de medida recoge elementos relevantes que se encuentran en otras definiciones pero que no habían sido explicitados de esta forma anteriormente.

De esta forma, hay 5 maestros que consideran la estimación de medidas como valoración, percepción y referentes, 14 maestros que valoran medidas utilizando referencias y 14 que valoran medidas utilizando la percepción, en total 33 de los 112 maestros. El resto de las definiciones de los maestros no se aproximan ni a las definiciones mencionadas en la literatura ni a nuestra re-construcción de la definición de estimación de medida, sino que la consideran como un sinónimo de la medición con instrumentos no estandarizados o de la aproximación de cifras decimales. Por lo tanto, poco más de un 29% de los maestros encuestados se acercaron a la definición de estimación.

Sobre la ejemplificación

Al igual que en el caso de la pregunta 6, analizamos la respuesta de los docentes a la pregunta 3 a partir de las tres condiciones establecidas en nuestra definición: valorar (V), percibir (P) y usar referentes (R). Más de la mitad de los maestros elaboraron preguntas que respondían a los aspectos del concepto de estimación. En este grupo, el 60% de los maestros –un 35% del total– no explicitó la referencia, dado que la imagen rescataba supuestas referencias, por ejemplo, la altura de la mujer. Además, en nuestra definición de estimación, consideramos que el referente puede ser propio del estimador o bien un objeto auxiliar, siempre y cuando sea utilizado indirectamente.

Un 25% de los maestros elaboró preguntas que respondían a la estimación con el uso de medidas proporcionales y el 15% restante construyó preguntas que respondían a estimaciones de longitud, superficie o tiempo. Otros maestros elaboraron preguntas que respondían a cálculos de áreas o de proporción.

La siguiente tabla resume los códigos, sus categorías y las frecuencias correspondientes a las respuestas de los 112 maestros a la pregunta 3. Además, muestra un ejemplo de cada una de ellas.

Tabla 2. Códigos, categorías, frecuencias y ejemplos de las preguntas de estimación

Códigos	Categorías	Frecuencia	Ejemplo de respuesta
Estimar	Estimación de medida con referente explícito	9	*“Este pintor se ha demorado 12 minutos en pintar lo que muestra la imagen. ¿En cuánto tiempo estimas que terminará de pintar todo?”*

	(V-P-R)		
	Estimación con referente implícito (V-P-R)	40	*"Observa atentamente la imagen y estima: el área del muro pintada. El área restante por pintar"*
	Estimación de una proporción (V-P-R)	17	*"A partir de la imagen, determine que porcentaje del muro está sin pintar"*
Calcular	Cálculo de área	9	*"¿Cuántos metros cuadrados se pintará? Sabiendo que el muro es de 2m de alto por 2m de largo"*
	Cálculo de proporciones	10	*"Si un bote de 5lt de pintura cubre 10m^2 de superficie. ¿Cuántos galones necesitaría pintar una habitación que tiene 3 paredes que miden 9m^2 cada una?"*
No explicita estimación o medida		14	*"¿Con cuántos rodillos de pintura se logra cubrir el muro o cuántas veces cabe el rodillo en un muro?"*
Información sin pregunta		13	*"Una persona decide pintar su habitación"*

En la Tabla 2 observamos que hay 68 docentes que elaboran preguntas para estimar una cantidad de medida. La mayoría de las preguntas elaboradas se centran en la utilización de referentes implícitos y en la estimación de cantidades proporcionales. Existe un grupo importante de 14 maestros para los cuales no podemos distinguir entre medición o estimación porque la respuesta deja abierta el uso de la comparación directa e indirecta de la unidad de medida (el ancho del rodillo) y otro grupo de 19 profesores que construyó preguntas en las que debe trabajar con distintos tipos de cálculo.

Realizamos un cruce entre las definiciones de estimación de medida que incluyen al menos dos de los aspectos relevantes de nuestra definición reconstruida y las categorías de las actividades de estimación de medida propuestas por los maestros con el fin de observar si quienes definían el concepto además elaboraban una respuesta convergente a la definición.

Tabla 3. Cruce entre las categorías de estimación de medida y las categorías de elaboración de preguntas de estimación

		Definiciones		
		Estimación de medida (V-P-R)	Estimación de medida con referentes (V-R)	Estimación de medida con percepción (V-P)
Actividades	Estimación de medida con referente explícito	1	4	6
	Estimación de medida con referente implícito	1	0	3
	Estimación de una proporción	0	4	0
	Total	2	8	9

En el análisis de los datos de las dos preguntas hemos observado que 33 de los 112 maestros daban una definición adecuada de estimación de medida y que 68 de los 112 maestros elaboraban una actividad utilizando el concepto de estimación de medida que consideramos. En la tabla 3 observamos que únicamente 19 de los 112 maestros encuestados tienen ideas convergentes del concepto en las dos preguntas analizadas, también podemos observar que dos de los 112 maestros además de construir una pregunta, definieron utilizando la valoración, la percepción y los referentes de forma explícita, los 17 restantes valoraban con percepción o con referentes.

CONCLUSIONES

Casi la mitad (un 45%) de los docentes dieron respuestas en que estimar una medida es un sinónimo de valorar una magnitud sin justificar cómo se realiza la tarea, separándose así de nuestra definición de estimación que requiere percepción y la existencia de referentes. Casi un 19% de los maestros consideran que estimar una medida es sinónimo de medir o aproximar numéricamente. Frente a estos resultados, podemos decir que incluso el Conocimiento Común de la estimación de medida es débil y confuso en el profesorado. Estas confusiones posiblemente se derivan del significado común del término estimar. De alguna forma u otra, todos tenemos una definición de estimación, y al tener una idea preconcebida externa a la educación matemática se le resta importancia a la definición formal del concepto establecida desde la disciplina que no ha sido trabajada con los maestros. Por ello consideramos que no se dan las instancias de fundamentación del concepto y mejora correspondiente para el cuerpo docente.

A raíz de lo anterior, consideramos que la construcción del Conocimiento Común de la estimación de medida, al ingresar a un programa de estudios, debería partir desde el currículo, dado que es un concepto confuso, incluso dentro de la literatura de investigación en educación matemática. Debemos tener en cuenta que las definiciones de estimación existentes corresponden a diferentes tipos de actividades matemáticas. Por ello para nosotros es necesario e indispensable que al ser parte de un currículum, éste la defina, ejemplifique y contraejemplifique. Con estas intervenciones curriculares, posiblemente se podría mermar la cantidad de maestros que a pesar de que definen o se acercan a la definición del concepto de estimación, no logran construir una pregunta convergente a tal definición. Hemos podido observar que el Conocimiento Común sobre estimación de medida es parcial ya que sólo 19 de los 33 maestros que se acercaron a la definición construyeron una pregunta de estimación de medida.

A pesar de que los maestros tienen un débil Conocimiento Común del Contenido del concepto de estimación de medida, algunos indicios del Conocimiento Especializado del Contenido han sido detectados en el 60% de los 112 maestros, dado que pudieron ejemplificar la idea de estimación de medida, puesto que consideran que el estudiante debe trabajar perceptivamente y utilizando referentes para dar un valor. Por otro lado, 14 de los 112 maestros no evaluaron la plausibilidad de las respuestas, porque no consideraron que su pregunta podría responderse utilizando la percepción o la medida.

A partir de los resultados, hemos podido constatar que es posible demostrar indicios positivos sobre el Conocimiento Especializado del Contenido sin tener apropiado el Conocimiento Común del concepto de estimación de medida, dado que podemos encontrar o conocer ejemplos puntuales sobre algún conocimiento práctico sin necesariamente demostrar un conocimiento concreto sobre la definición disciplinar.

Frente a la contradicción de los resultados entre el Conocimiento Común del Contenido y el Conocimiento Especializado del Contenido, consideramos que es necesario e indispensable que se definan y ejemplifiquen los nuevos conceptos introducidos en los currículums, en especial en situaciones como la estudiada, en la que el concepto formal de estimación puede confundirse con el concepto asociado al conocimiento común de los maestros. En caso contrario, los cambios en los currículos podrían no trasladarse a las aulas de forma efectiva. En particular, el currículo chileno utiliza la palabra estimar, pero sin definirla ni ejemplificarla con lo que podrían aparecer problemas en la práctica y de esta manera, los cambios curriculares podrían no trasladarse a las aulas de forma efectiva.

Por todo lo anterior, consideramos que la formación inicial y continua del maestro debe entregar herramientas adecuadas para la reflexión pedagógica y disciplinar de los futuros docentes teniendo en cuenta situaciones como la descrita en este documento.

Referencias

Ball, D., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407.

Bright, G.W. (1976). Estimation as Part of Learning to Measure. *National Council of Teachers of Mathematics Yearbook*, *38*, (pp. 87-104). Reston, VA: NCTM.

Boulton-Lewis, G., Wils, L., y Mutch, S. (1996). An analysis of young children’s strategies and use of devices for length measurement. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*, 329–347.

Callís, J. y Fiol, M.L. (2003). Características y factores incidentes en la estimación métrica longitudinal. En E. Castro (Ed.), *Investigación en Educación Matemática: Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 161-169). Granada: SEIEM.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Mathematics teacher specialized knowledge. En B. Ubuz, Ç. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of 8th CERME*. Antalya, Turkey.

Castillo, J. J., Segovia, I., Castro, E. y Molina, M. (2011). Estudio sobre la Estimación de Cantidades Continuas: Longitud y Superficie. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 165-172). Granada: Universidad de Granada.

Clayton, J. G. (1996). A criterion for estimation tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *27*(1), 87-102.

Cockcroft, W. H. (1982). *Mathematics counts*. London: Her Majesty’s Stationery Office.

Forrester, M. A., y Pike, C. D. (1998). Learning to estimate in the mathematics classroom: A conversation-analytic approach. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*, 334-356.

ICMI (1986). *School Mathematics in the 1990s*. Cambridge: Cambridge University Press.

Inskeep, J. E. (1976). “Teaching measurement to elementary school children”. En: N.C.T.M. *Measurement in School Mathematics*, *1976 Yearbook*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics [Enseñanza de la medición en la escuela elemental. Traducción de J. Díaz Godino y L. Ruíz Higueras]

Joram, E. (2003). Benchmarks as tools for developing measurement sense. In D. H. Clemens & G. Bright (Eds.) *Learning and teaching measurement 2003 yearbook* (pp. 57-67). Reston, VA: NCTM.

Joram, E., Gabriele, A. J., Bertheau, M., Gelman, R., & Subrahmanyam, K. (2005). Children's use of the reference point strategy for measurement estimation. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(1), 4-23

Hogan, T. P., y Brezinski, K. L. (2003). Quantitative estimation: One, two, or three abilities? *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(4), 259-280.

Ministerio de Educación (2011). *Bases Curriculares de primero a sexto año básico*. Santiago de Chile: MINEDUC.

NCTM (1980). *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s*. Reston, Virginia: NCTM.

Rowland, T., Huckstep, P., y Thwaites, A. (2003). The Knowledge Quartet. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *23*(3), 97-102.

Segovia, I., Castro, E., Castro, E., y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Madrid: Síntesis.

Segovia, I. y Castro, E. (2009). La estimación en el cálculo y en la medida. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *17*(1), 449-536.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

COMPRENSIÓN DE LAS DECENAS Y APLICABILIDAD DE LAS OPERACIONES EN PROBLEMAS ARITMÉTICOS VERBALES

Understanding tens and applicability of operations in verbal arithmetic problems

Mónica Ramírez[a], Carlos de Castro[b]

[a]Universidad Complutense de Madrid, [b]Universidad Autónoma de Madrid

Resumen

Estudiamos la comprensión de la decena y el conocimiento sobre la aplicabilidad de las operaciones aritméticas en un contexto de resolución de problemas, con alumnos de primer curso de educación primaria. Para ello, planteamos problemas de estructura aditiva que pueden resolverse aplicando los algoritmos de suma y resta, alternándolos con otros de estructura multiplicativa, con grupos de diez, cuya estrategia óptima de resolución implica el conocimiento del valor posicional de números de dos cifras. Los problemas se realizan en un taller semanal a lo largo de todo el curso. Recogemos datos mediante vídeo, entrevistas, hojas de registro y fotografías. En los resultados, destaca la preferencia de los alumnos por el uso de estrategias informales de modelización directa. En menor medida, los niños van incorporando los algoritmos, las estrategias inventadas y el conocimiento del valor posicional para resolver los problemas.

Palabras clave: *aritmética, comprensión, decena, educación primaria, resolución de problemas.*

Abstract

We study the understanding of tens and the knowledge about the applicability of arithmetic operations in a context of problem solving, with first grade students. To this end, we propose problems of additive structure that can be solved by applying the algorithms for addition and subtraction, alternating them with other problems of multiplicative structure with groups of ten, which optimum resolution strategy requires the knowledge of place value of two digit numbers. The problems are made in a weekly problem solving workshop throughout the whole course. We collect data through video, interviews, record sheets and photographs. In the results, we highlight the preference of students for the use of informal strategies of direct modeling. To a lesser extent, children use algorithms, invented strategies and knowledge of place value to solve the problems.

Keywords: *arithmetic, understanding, ten, primary education, problem solving.*

INTRODUCCIÓN

Durante la década de los años 80 del pasado siglo, se produjo un gran auge en las investigaciones sobre resolución de problemas aritméticos verbales. Uno de los mayores avances en este campo fue el consenso alcanzado al establecer categorías semánticas en los problemas de estructura aditiva, acuerdo que tuvo un alcance menor en los problemas de estructura multiplicativa (Castro, 2008). Castro y Frías (2013) sostienen que, a pesar de que esta área de investigación fue perdiendo interés a partir de los años 90, los problemas aritméticos verbales siguen ocupando un lugar fundamental en la escuela. Por otra parte, la resolución de problemas, bajo diferentes aproximaciones, sigue proponiéndose en el ámbito internacional como eje vertebrador de la organización de los contenidos matemáticos (Santos, 2008). El NCTM (2003) introduce los estándares de procesos, con la resolución de problemas, junto con el razonamiento y demostración, conexiones, comunicación y representación. Estos procesos tienen un gran paralelismo con las competencias matemáticas de PISA (OCDE, 2005). Recientemente, el nuevo currículo de primaria (MEC, 2014) profundiza en la

Ramírez, M., Castro, C. de (2014). Comprensión de las decenas y aplicabilidad de las operaciones en problemas aritméticos verbales. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 533-542). Salamanca: SEIEM.

relevancia dada a los procesos de resolución de problemas al indicar que “constituyen la piedra angular de la educación matemática” (p. 19386) y al introducir, como nuevo bloque de contenidos en el currículo de matemáticas, los “procesos, métodos y actitudes en matemáticas” (p. 19386).

La relación entre el aprendizaje de la aritmética y la resolución de problemas aritméticos verbales tiene un doble sentido. Verschaffel, Greer y De Corte (2007) señalan que históricamente ha predominado el enfoque consistente en enseñar formalmente las destrezas aritméticas, para después aplicarlas a la resolución de problemas aritméticos verbales. Para Puig (1996), los problemas suelen confundirse con ejercicios rutinarios de práctica de procedimientos, introduciendo primero el algoritmo de la operación aritmética y, a continuación, el planteamiento de problemas aritméticos verbales. Así, la resolución del problema se reduce a la aplicación del algoritmo recién aprendido y, cuando se ha enseñado el algoritmo de varias operaciones aritméticas, a “descubrir” el algoritmo que hay que aplicar. Puig y Cerdán (1988) apuntan que los niños buscan palabras clave para decidir el algoritmo a realizar, lo que implica una lectura local del problema, sin profundizar en la comprensión del enunciado. En nuestros anteriores currículos de educación primaria, este enfoque aplicacionista aparece explícitamente. Por ejemplo, en la LOGSE se proponía “Resolver problemas… para comprobar que el alumnado sabe identificar cuál de las operaciones indicadas (suma o resta) es la adecuada para solucionar el problema y que sabe resolverla mediante el algoritmo aplicando correctamente todos sus pasos” (MEC, 1992, p. 9615) y en la LOE aparece, como criterio de evaluación, “Resolver problemas sencillos […] seleccionando las operaciones de suma y resta […] y utilizando los algoritmos básicos correspondientes (MEC, 2007, p. 31559).

En otro sentido, Verschaffel y otros (2007) indican que los problemas verbales se han empezado a utilizar “como vehículo para desarrollar destrezas resolviendo los problemas (p. 582)”. En esta misma línea, Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson (1999) proponen el planteamiento de problemas aritméticos verbales a niños que no han recibido instrucción formal sobre las operaciones aritméticas, para que inventen y utilicen estrategias informales e intuitivas. En su revisión sobre pensamiento numérico en edades tempranas, Castro, Cañadas y Castro-Rodríguez (2013) señalan que los niños pueden resolver situaciones aritméticas sencillas desde los 3 años, y la resistencia a incluirlos estas situaciones a esta edad, puede provocar no dotar de significado al algoritmo que aprenden en primaria (p. 9). Así, la inversión del orden tradicional, introduciendo la resolución de problemas antes de la enseñanza formal de destrezas, puede ayudar a que los niños doten de sentido las operaciones aritméticas. Esto facilitaría un aprendizaje con comprensión de estos contenidos matemáticos (Carpenter y Lehrer, 1999). Este tipo de trabajo de resolución está orientado a la comprensión global del enunciado del problema, sin búsqueda de palabras claves, sino a través de estrategias intuitivas de modelización directa (Carpenter y otros, 1999).

Este trabajo es la continuación de estudios previos realizados en educación infantil, con los mismos niños, desde los 4 años (Núñez, De Castro, Del Pozo, Mendoza y Pastor, 2010). Al llegar a primaria, estos niños cuentan con una experiencia previa de dos años en talleres de resolución de problemas, y tienen interiorizadas las normas del taller. Los niños participantes en este estudio tienen un gran bagaje de conocimientos informales. Comienzan un curso en que será fundamental la conexión entre esta matemática informal y la matemática formal, propia del inicio de la educación primaria, con la presencia de los algoritmos y la simbolización propia del sistema de numeración. En este contexto, queremos indagar sobre la integración de estos dos tipos de conocimiento, a través del estudio de las estrategias infantiles y su evolución a lo largo de un curso completo.

MARCO TEÓRICO

En este trabajo seguimos el modelo de la Instrucción Cognitivamente Guiada (CGI) (Carpenter y otros, 1999). Adoptamos una visión cognitiva de la comprensión según la cual esta emerge y se desarrolla a través de distintas actividades mentales como la construcción de relaciones, la extensión y aplicación del conocimiento matemático, la reflexión sobre las experiencias, la articulación del conocimiento propio y la apropiación del conocimiento matemático (Carpenter y Lehrer, 1999). Desde la CGI se propone que las estrategias que construyen los niños al resolver problemas sin instrucción previa, puede vincularse con los procedimientos formales que aprenderán según avance su escolaridad, dando sentido a los algoritmos. Para favorecer el aprendizaje con comprensión, debemos incidir sobre tres elementos clave: Las tareas, los instrumentos, y las normas (Carpenter y Lehrer, 1999). En este trabajo presentamos a los niños de primer curso tareas que no pueden abordar con conocimientos formales previamente estudiados, como problemas de estructura multiplicativa. Dejamos libertad en el uso de diversidad de instrumentos que puedan ayudar a los niños a representar y a resolver problemas y damos una especial importancia a las normas que rigen el taller de resolución de problemas, que son bastante diferentes de las de la clase diaria de matemáticas de los niños. En este enfoque, la resolución de problemas puede plantearse como una forma de pensar, que implica reflexión de ideas, hacer conjeturas, búsqueda de soluciones distintas y debatir sobre ellas en una comunidad de aprendizaje (Santos, 2008).

Dentro de la CGI se han realizado varias investigaciones en las que a través de planteamiento de problemas aritméticos verbales, los niños han desarrollado sus propias estrategias sin necesidad de tener conocimiento formal de las operaciones aritméticas (Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema y Empson, 1997; Carpenter y otros, 1999). Estos autores describen las estrategias que inicialmente utilizan los niños con problemas aritméticos verbales con números de una cifra, primero ayudándose de materiales concretos (modelización directa), después utilizando la secuencia de numerales (estrategias de conteo) y, por último, recuperando hechos numéricos.

Carpenter y otros (1997) utilizaron problemas multiplicativos de grupos iguales con grupos de 10 (siendo el número de elementos por grupo, 10) para evaluar la comprensión de aspectos del sistema de numeración como es el agrupamiento de base 10. Los autores observaron las siguientes estrategias, proporcionando a los niños bloques de base 10:

- Agrupamiento (con recuento de uno en uno): modelizan con bloques de base 10 los grupos de 10, pero siguen contando de uno en uno las unidades que componen las decenas para el resultado final.
- Agrupamiento (con recuento de 10 en 10): modelizan con bloques de base 10, y cuentan los grupos de 10, de 10 en 10.
- Uso del valor posicional: identifican los grupos de 10 como decenas y las unidades sueltas como unidades.

Carpenter y otros (1999) describieron las estrategias de los niños al plantear problemas aritméticos verbales aditivos con números de varias cifras y observaron una serie de estrategias inventadas, en las que se desprenden del material:

- Secuencial, en la que parte de uno de los números y lo combinan con las distintas cifras del otro número respetando su valor posicional.
- Combinación de decenas y unidades, por separado, y los dos resultados los vuelven a combinar.
- Otras estrategias, como la compensación al acercarse con uno de los números a una decena, o potencia de 10, y compensar el otro número.

Estos autores encontraron que el uso de estrategias inventadas, antes o incluso durante la instrucción de los algoritmos estándar, favorecía la comprensión de conceptos del sistema de numeración de base diez (Carpenter y otros, 1997).

Al comenzar el primer ciclo de educación primaria se repasan los números de una cifra y se introduce la decena, cobrando importancia el valor posicional propio de la escritura decimal.

Aparecen los números de varias cifras (MEC, 2007, p. 31557) y las situaciones aritméticas se complican. Las estrategias informales, propias de la educación infantil, se vuelven poco eficientes para resolver problemas aritméticos en los que aparecen cantidades con números de dos cifras.

Nuestro trabajo se sitúa en el primer curso de primaria en el que no se ha iniciado el estudio de las estructuras multiplicativas. En el currículo (MEC, 2007) se propone "Resolver situaciones familiares… de la multiplicación para calcular un número de veces (p. 31557)" en las operaciones del primer ciclo, así como trabajar la construcción de las tablas de multiplicar del 2, 5 y 10 como número de veces, suma reiterada o disposición de cuadrículas, que se realizan en el segundo curso de Primaria (Castro y Ruiz, 2011).

OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

El objetivo del estudio es valorar la comprensión de los alumnos de primer curso de primaria de dos aspectos observables en la resolución de problemas (el conocimiento de las decenas y la aplicabilidad de las operaciones de suma y resta) en un momento de transición de un conocimiento matemático informal (en el que predomina el uso de estrategias de modelización) a otro formal (caracterizado por la simbolización de la aritmética y el uso de algoritmos). Este objetivo general lo desglosamos en dos objetivos específicos.

- Estudiar las estrategias de los niños, y su evolución, al resolver problemas de estructura multiplicativa (de multiplicación y división agrupamiento) con grupos de 10. Se pondrá especial atención en el uso del conocimiento del valor posicional en números de dos cifras.
- Estudiar si los niños incorporan espontáneamente el uso de los algoritmos de suma y resta, detectando adecuadamente los problemas en que dichos algoritmos pueden aplicarse (los problemas de estructura aditiva con números de dos cifras).

MÉTODO

Participantes

La investigación se ha desarrollado en dos aulas de primer curso de educación primaria, en el CEIP de Manzanares el Real (Madrid). Han participado 28 alumnos de 1ºA (16 niños y 12 niñas) y 26 alumnos de 1ºB (14 niños y 12 niñas). La edad media al iniciar el curso es de 6 años y 2 meses.

Los problemas se han realizado dentro de un taller dirigido por las tutoras de los grupos, que habían recibido un curso de formación sobre resolución de problemas en la CGI. Una maestra, con varios años de experiencia en este enfoque (De Castro y Escorial, 2007), supervisó y dio apoyo en las primeras sesiones. Además, varias estudiantes en prácticas, que habían participado en un proyecto de 3 meses con el enfoque CGI, colaboraron en la grabación de vídeos y en la recogida de documentación (Núñez, De Castro, Del Pozo, Mendoza y Pastor, 2010).

Diseño del taller

Este estudio abarca todo el curso escolar con un total de 24 sesiones, con una sesión semanal de 45 minutos. El resto de las clases de la semana, las tutoras trabajan siguiendo el libro de texto seleccionado por el profesorado del centro.

El taller de problemas está pensado para que los niños desarrollen aprendizaje con comprensión de la aritmética y la numeración en primero de Educación Primaria. Según el marco teórico los niños deben tener la oportunidad de crear sus propias estrategias y articularlas para compartirlas con sus compañeros y poder debatir sobre ellas. En los talleres realizados se intentó que los niños fuesen conscientes de que debían inventar y utilizar estrategias propias con los instrumentos que se les proporcionaba y podían elegir y que tendrán que explicarla a los compañeros. Además debían comunicar y explicar bien la estrategia decidida como la mejor por escrito a una persona externa del aula. Esto se realizaba en varias fases: una primera de lectura de un cuento para dar un contexto cercano al niño del enunciado del problema, el planteamiento de problemas, la resolución individual del problema en el que podían elegir los materiales, la puesta en común en el que el tutor elegía algunos alumnos para exponer las estrategias de la forma más variada posible, y la escritura de la carta con la estrategia que ellos decidían (Ramírez y De Castro, 2012).

Al diseñar las tareas, alternamos los tipos para que los niños no utilicen estrategias de manera rutinaria. En la Figura 1 mostramos la evolución esperada de las estrategias al plantear problemas aritméticos verbales con cantidades inicialmente de una cifra o hasta 20 (tareas T1) y las esperadas en los problemas aritméticos verbales con números de dos cifras (tareas T2) y en los problemas aritméticos de estructura multiplicativa con grupos de 10 (Tareas T3).

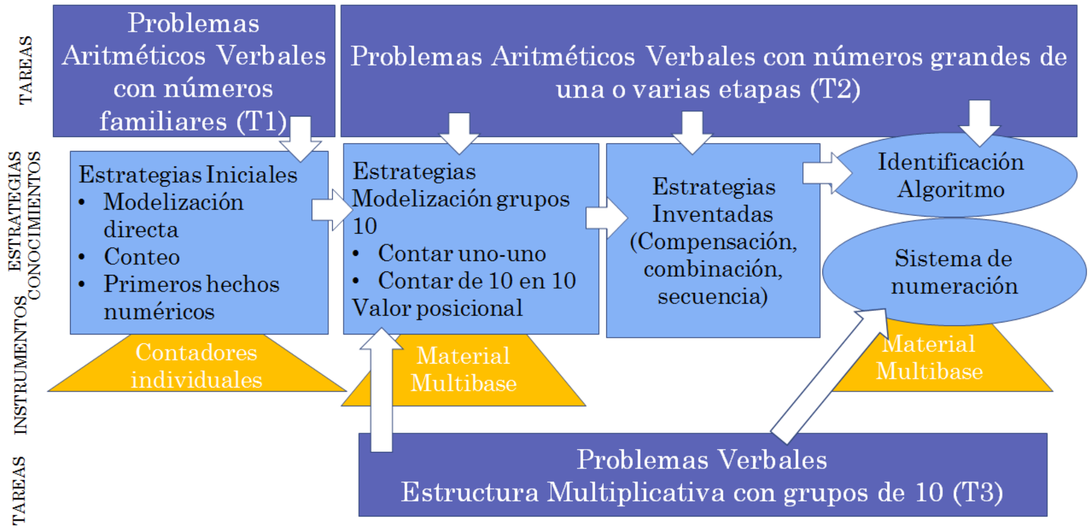


Figura 1. Evolución de las estrategias según CGI

En las seis primeras sesiones (ver Tabla 3, apéndice) se plantearon problemas aritméticos de estructura aditiva o multiplicativa con números menores que 20. Los alumnos disponían de materiales como contadores individuales, tabla 100 y rekenrek (ábaco holandés que se utiliza como modelo para la iniciación al cálculo).

En las sesiones 7, 8, 8 b, 11, 12 y 15 (ver Tabla 3) se plantearon problemas de estructura multiplicativa con grupos de 10, de división agrupamiento con resto, o de multiplicación. En estas sesiones, los niños ya disponían de barras y unidades de los bloques de base 10 y otros materiales como cartones de decenas de huevos, que los niños trajeron de casa.

En las demás sesiones se plantearon sobre todo problemas de estructura aditiva que se podían resolver con algoritmos de las operaciones y en los que el tamaño de los números desaconsejaba la modelización directa. En las sesiones 9, 10, 13, 17, 18 y 20 se plantearon problemas de estructura aditiva que implican suma y en las sesiones 16, 19, 22 y 23 de resta (ver Tabla 3).

Recogida de información

La recogida de información se realizó por varios medios: (a) Hojas de registro, en las que se apuntaban los materiales utilizados y se describen los procedimientos que siguen los alumnos; (b) Entrevistas individuales (Ginsburg, Jacobs y López, 1996) grabadas en video por la investigadora; (c) Grabaciones en video, que captaban momentos de trabajo individual, de la puesta en común, o de escritura de la carta final; (d) Fotografías de distintos momentos del taller; (e) Hojas de trabajo de los alumnos; (f) Cartas de los alumnos con la contestación al problema; y (g) Narraciones de la investigadora tras la sesión.

RESULTADOS

Hemos analizado la información recogida siguiendo un proceso de categorización mixto de las estrategias (deductivo-inductivo). Basándonos en el esquema de categorías procedente de anteriores trabajos (Carpenter y otros, 1997; Carpenter y otros, 1999) descrito en el marco teórico, elaboramos la categorización expuesta en esta sección, que incluye un análisis más fino de las estrategias tomando en cuenta el material empleado (estructurado o no) y el modo de realizar el conteo (por unidades o a saltos de diez). Así, en problemas multiplicativos con grupos de 10, hemos observado las siguientes estrategias:

- *Agrupamiento con contadores individuales (contando de uno en uno)*: estrategia de modelización directa en que se representan el número de grupos indicado en el enunciado con 10 contadores individuales por cada grupo, y luego se representan las unidades sueltas. Para calcular la solución, se cuentan de uno en uno todos los contadores individuales.
- *Agrupamiento con contadores individuales (contando de 10 en 10*): Estrategia de modelización directa en la que se representan el número de grupos que se indican con tantos contadores individuales como indica el enunciado que tiene cada grupo, en este caso 10, y además se representan las unidades sueltas. El recuento final se hace contando de 10 en 10.
- *Agrupamiento con bloques de base 10 (contando de uno en uno*). Representan los grupos de 10 con materiales que representan decenas y las unidades sueltas. El recuento final se hace contando de uno en uno, incluso cada una de las unidades de la barra, y a continuación las unidades sueltas.
- *Agrupamiento con bloques de base 10 (contando de 10 en 10).* Representan los grupos de 10 con materiales que representan decenas y las unidades sueltas. El recuento final se hace contando de 10 en 10 las decenas y de uno en uno las unidades.
- *Conteo a saltos de 10 en 10.* No se representa las cantidades con material y cuentan de 10 en 10 el número de grupos que indica el problema. Después cuentan las unidades sueltas.
- *Uso del valor posicional*. Se identifica que los grupos de problemas son las decenas del número y las unidades sueltas pertenecen a la posición de las unidades, y enuncian el número con la decena y unidades dadas.

Para los problemas de estructura multiplicativa de división agrupamiento con resto y grupos de 10 (véase problema de la sesión 11) se observaron las siguientes estrategias:

- *Agrupamiento con contadores individuales.* Es una estrategia de modelización directa. Se cogen tantos contadores individuales como indica la cantidad total del problema y se hacen grupos de 10. Se cuentan los grupos de 10 por un lado, y por otro, los contadores sueltos.
- *Agrupamiento con bloques de base 10*. Se representa la cantidad total de elementos con barras para las decenas y unidades sueltas. Después se cuenta el número de barras para saber el número de grupos y las unidades sueltas para saber el resto.
- *Conteo a saltos*: Se cuenta de 10 en 10 hasta alcanzar el número total de elementos sin pasarse. El número de dieces contados es el número de grupos, y después se realiza un conteo o recuperación de un hecho numérico hasta las unidades. Algunos niños que utilizaron esta estrategia se apoyaban en la Tabla 100 para llevar bien el recuento de 10-10.
- *Uso el valor posicional*. Fijándose en la cantidad total de elementos, extraen las decenas como grupos y unidades como resto.

Como se aprecia en la Tabla 1, hay un aumento considerable del uso del valor posicional en los problemas de multiplicación (sesión 7 y 12), disminuyendo las estrategias de modelización directa.

En los problemas de división agrupamiento con resto, el uso de la estrategia de valor posicional aumenta significativamente de la sesión 8 a la 11, y se mantiene estable después en la sesión 15.

Tabla 1. Porcentaje de estrategias en sesiones con problemas multiplicativos de grupos de 10

	Sesión 7 Multiplicación	*Sesión 8 División*	*Sesión 11 División*	*Sesión 12 Multiplicación*	*Sesión 15 División*
Agrupamiento indiv. (1-1)	38,9	62,3	45,0	14,8	46,0
Agrupamiento indiv. (10-10)	20,3			7,4	
Agrupamiento B10 (1-1)	1,9	0,0	11,0	3,7	7,4
Agrupamiento B10 (10-10)	5,5			1,9	
Conteo a saltos (10 en 10)	11,0	1,9	2,0	3,7	1,4
Valor posicional	0,0	3,8	7,0	25,8	7,4

Porcentajes sobre el total de alumnos. No aparecen la no asistencia y no resolución.

Pocos niños han empleado el conocimiento del valor posicional de las cifras de un número para resolver los problemas, con excepción del problema 12 en el que aparece la expresión “4 decenas”, en lugar de “4 grupos de diez”. En este caso, la palabra “decena” parece desencadenar el uso del valor posicional del 4 (así lo hicieron un 25,8% de los participantes). El uso del conocimiento del valor posicional se ha dado en mayor medida en problemas de multiplicación que en problemas de división agrupamiento (ambos con grupos de diez).

En los problemas de estructura aditiva se observaron los siguientes tipos de estrategias:

- Modelización directa con contadores individuales. Estrategias en las que se representa cada cantidad del enunciado con contadores separados.
- Modelización directa con bloques de base 10. Se representan las cantidades con barras y unidades. En este caso se puede distinguir según si el recuento final se hace contando de uno en uno, incluso de las unidades de las barras, o contando de 10 en 10 las barras.
- Estrategias de conteo. Se realizan con un conteo sin objetos, apoyándose en la secuencia de numerales. Dentro de las estrategias de conteo se puede distinguir los conteos por unidades, los conteos a saltos de 10 en 10 y por unidades y, en algunas ocasiones, acercándose contando de uno en uno hasta una decena y a partir de ahí contaban de 10 en 10. La Tabla 100 se utilizó en varias ocasiones para llevar ese conteo de numerales.
- Estrategias inventadas. Estas estrategias suponen el uso del valor posicional de los números. En el taller observamos *estrategia secuencial*, en la que se parte de uno de los números del enunciado y se va sumando o restando las decenas del otro, y después las unidades; *estrategia combinación de decenas y unidades por separado*, y después su combinación final; y *estrategia compensación* a la decena más próxima, y luego se cuentan las decenas enteras. Por ejemplo, para hacer 40 - 26, se cuentan 4 unidades, hasta el 30, y una decena.
- Algoritmo. Los niños utilizan los algoritmos de suma o resta para resolver el problema.

En la Tabla 2 se observan los resultados del análisis de estrategias. En la sesión 10 aparece por primera vez el algoritmo de la suma, convertido en la segunda estrategia más frecuente a partir de la sesión 19, y empleado por un 48% de los participantes en la sesión 20. En la sesión 13 aumentan las estrategias inventadas, el uso del algoritmo y la frecuencia de uso de bloques de base 10. En las sesiones 22 y 23, en problemas de resta con llevada, muchos niños eligen inicialmente aplicar el algoritmo de la resta pero, al implicar una “llevada” aún no estudiada, vuelven a la modelización directa. En problemas de estructura multiplicativa sin grupos de 10 (sesión 14, con reparto de 60 entre 4), todos los niños utilizan estrategias de modelización directa de agrupamiento y reparto.

Tabla 2. Porcentaje estrategias recogidas en sesiones con problemas aditivos con números dos cifras

	Sesión 9	*Sesión 10*	*Sesión 13*	*Sesión 16 R*	*Sesión 17*	*Sesión 18*	*Sesión 19 R*	*Sesión 20*	*Sesión 22 R*	*Sesión 23 R*
Modelización Directa	62,8	66,0	55,1	38,8	69,2	46,0	32,0	20,0	39,6	40,8
Modelización con B10	0,0	6,0	8,2	20,4	1,9	8,0	12,0	0,0	0,0	2,0
Estrategia de conteo	5,9	4,0	2,1	8,2	7,7	2,0	18,0	2,0	4,2	6,1
Estrategias inventadas	11,8	6,0	8,2	6,1	11,5	12,0	4,0	4,0	0,0	0,0
Algoritmo	0,0	2,0	6,1	0,0	0,0	8,0	14,0	48,0	31,3	18,4

Porcentajes sobre el total de alumnos. La "R" indica que en la sesión se presenta un problema de resta con llevada.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Las estrategias empleadas por los niños son similares a las encontradas en trabajos anteriores (Carpenter y otros, 1997; Carpenter y otros, 1999). Las diferentes estrategias de modelización directa son las más frecuentes en todos los problemas. Esto tiene a nuestro juicio una interesante lectura: Mientras que en primer curso de educación primaria se presta mucha atención al simbolismo aritmético y a la iniciación en los algoritmos de las operaciones con números de dos cifras, los niños siguen mostrando una preferencia clara por el uso de estrategias informales, dentro de un ambiente regido por normas que permitan la libre elección de instrumentos y estrategias.

Las estrategias más avanzadas, como las *estrategias inventadas* y el uso de algoritmos aumentaron progresivamente a lo largo del taller, aunque dependiendo de la operación y las cantidades implicadas. En bastantes ocasiones, los niños que usaban estas estrategias más eficientes volvieron a la modelización directa al experimentar dificultades. Para nosotros, esto indica una construcción de buenas conexiones entre las estrategias informales y procedimientos más eficientes (como las estrategias inventadas) y más formales (como los algoritmos), lo cual es un buen indicador de un aprendizaje con comprensión (Carpenter y Lehrer, 1999).

En los problemas de estructura multiplicativa con grupos de 10, los niños utilizaron la estrategia de agrupamiento con contadores individuales, pero luego contaban de 10 en 10, sin necesidad de utilizar los bloques de base diez, a diferencia de lo indicado por Carpenter y otros (1999). Además, en los problemas de estructura aditiva también los niños construían las cantidades de los problemas con números de dos cifras, representado con contadores individuales grupos o barras de 10, y después aplicaban el recuento de uno en uno o de 10 en 10. Otros, se apoyaron en las cajas de huevos de diez, para formar grupos de 10 sin contarlos. Las estrategias de conteo que observamos inicialmente se realizaban de uno en uno pero, con cantidades de dos cifras, los niños empezaron a apoyarse en la Tabla 100 y llegaron a utilizarla de apoyo para llevar conteo de 10 en 10.

La introducción de instrumentos como las cajas de decena de huevos, o la tabla 100, que no habían sido empleados en la literatura citada, ha permitido detectar nuevas modalidades de aplicación de estrategias descritas en el marco teórico. Interpretamos que estos instrumentos pueden jugar un papel de catalizadores en la transición de estrategias de modelización directa al conteo, o del conteo por unidades al conteo de diez en diez, lo cual tiene importantes implicaciones para el diseño de instrucción en estas edades.

Desde un punto de vista curricular, observamos que los niños aprenden conceptos matemáticos informales antes de su incorporación formal al currículo. En este sentido, proponemos incluir este aprendizaje informal en la planificación de tareas. Resolver problemas de estructura multiplicativa en primer curso de primaria, para mejorar la comprensión sobre la decena, es un ejemplo de ello.

Referencias

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V., Fennema, E. y Empson, S. B. (1997). A Longitudinal Study of Intervention and Understanding in Children's Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 29,* 3-30.

Carpenter, T. P. y Lehrer, R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. In E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 19-32). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L. y Empson, S. B. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction*. Portsmouth: Heinemann.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 113-140). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Castro-Rodríguez, E. (2013). Pensamiento numérico en edades tempranas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(2), 1-11.

Castro, E. y Frías, A. (2013). Two-step arithmetic word problems. *The Mathematics Enthusiast, 10*(1-2), 379-406.

Castro, E. y Ruiz, J. F. (2011). Aritmética de los números naturales. Estructura multiplicativa. En I. Segovia y L. Rico (Coords.), *Matemáticas para maestros de Educación Primaria* (pp. 99-121). Madrid: Pirámide.

De Castro, C. y Escorial, B. (2007). Resolución de problemas aritméticos verbales en la Educación Infantil: una experiencia de enfoque investigativo. *Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación (Mon. IX),* 23-48.

Ministerio de Educación y Ciencia (1992, 24 de marzo). Resolución de 5 de marzo de 1992, de la Secretaría de Estado de Educación, por la que se regula la elaboración de proyectos curriculares para la Educación Primaria. *BOE, 72,* 9594-9667.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007, 20 de julio). ORDEN ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación primaria. *BOE, 173,* 31487-31566.

Ministerio de Educación y Ciencia (2014, 1 de marzo). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por la que se establece el currículo de Educación primaria. *BOE, 52,* 19349-19420.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Núñez, C., De Castro, C., Del Pozo, A., Mendoza, C. y Pastor, C. (2010). Inicio de una investigación de diseño sobre el desarrollo de competencias numéricas con niños de 4 años. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 463-474). Lleida: SEIEM.

OCDE (2005). *Informe PISA 2003: Aprender para el mundo del mañana*. Madrid: Santillana.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares.* Madrid: Síntesis.

Puig, L. (1996). *Elementos de Resolución de Problemas*. Granada: Comares.

Ramírez, M. y De Castro, C. (2012). El aprendizaje de algunos aspectos del sistema de numeración decimal a través de problemas aritméticos verbales al inicio de educación primaria. En D. Arnau, J.L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática – 2012* (pp-109). Valencia: Universitat de València y SEIEM.

Santos, L. M. (2008). La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 159-192). Badajoz: SEIEM.

Verschaffel, L., Greer, B. y De Corte, E. (2007). Whole Number Concepts and Operations. En Frank K. Lester (ed.) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics* (557-628). Charlotte, NC: Information Age Pub.

Apéndice

Tabla 3. Problemas planteados en el taller

Sesión	*Problema*
1	Al principio había 11 damas atrevidas, ¿Cuántas quedaban cuando se habían ido 6?
2	Si había 11 damas atrevidas, y después se fueron algunas y quedaban 3 ¿Cuántas damas se habían ido?
3	Si el gato tragón se comió un hombre, un burro, 5 pajaritos y 7 niñas. ¿Cuántos se comió en total?
4	El gato tragón se comió 7 niñas. Si cada niña tiene 2 brazos, ¿Cuántos bracitos se comió el gato?
5	Marcel y Tristán se comieron 18 buñuelos de crema. ¿Cuántos se comió cada uno?
6	En el cumpleaños de Marcel había 3 globos. Si por la mañana había 15, ¿Cuántos habían explotado?
7	Si tenemos 2 cajas llenas de patitos, con 10 patitos en cada caja, y 3 patitos sueltos, ¿Cuántos patitos tenemos en total?
8a	Si hay 26 patitos de goma, y en cada caja caben 10 patitos, ¿Cuántas cajas podemos llenar? ¿Y Cuántos patitos quedan sin guardar?
8b	Si hay 34 patitos, y en cada caja caben 10 patitos. ¿Cuántas cajas podemos llenar? ¿Y cuántos patitos quedan sin guardar?
9	Finn Herman cenó un jamón, dos pollos, tres filetes y veintiséis deliciosas salchichas. ¿Cuántas cosas tomó para cenar?
10	Si Finn Herman tiene 38 dientes en la mandíbula superior y 30 en la inferior, ¿cuántos dientes tiene en total?
11	Si tenemos 37 huevos, ¿cuántas cajas de 10 huevos podemos llenar y cuántos huevos sobran?
12	Si tenemos 4 decenas de huevos y 5 huevos más, ¿cuántos huevos tenemos en total?
13	Si en enero llegaron 31 pingüinos y en febrero vinieron otros 28, ¿cuántos pingüinos había al final de febrero?
14	Cuando llegaron a 60 pingüinos, repartieron los pingüinos en 4 grupos iguales. ¿Cuántos pingüinos pusieron en cada grupo?
15	Cuando había 45 pingüinos, los guardaron poniendo 10 en cada caja. ¿Cuántas cajas llenaron y cuántos pingüinos sobraron?
16	La reina de los pasteles le regala 2 decenas de pasteles a la princesa. Por el camino, a la princesa le entra hambre y se come 8 pasteles. ¿Cuántos pasteles quedan para su mamá?
17	Al volver a casa, la princesa le llevó a su mamá 12 pasteles, una decena de flores, un balón y un gato. ¿Cuántas cosas le lleva en total de regalo?
18	Si el papá de Mónica subió 4 decenas de escalones, luego hizo un descanso, y después subió 38 escalones más, ¿Cuántos escalones había subido en total?
19	Si la escalera tenía 9 decenas de escalones en total y el papá de Mónica ya había subido 78, ¿Cuántos escalones le faltaban por subir para llegar a la luna?
20	Si consigues 32 euros por saltar entre ortigas, y 29 euros por tragarte una rana muerta, ¿Cuántos euros has conseguido al final?
21	Si entras en un supermercado encima de un toro y rompes 5 cajas de galletas con 12 galletas cada una, ¿Cuántas galletas aplastas en total?
22	Si en total hay 35 personas y 18 de ellas están arriba, ¿cuántas están abajo?
23	Si arriba hay 4 decenas de pájaros y abajo hay 26 pájaros, ¿cuántos pájaros hay más arriba que abajo?
24	Para dar de comer a sus peces, Bruno echaba 24 guisantes en la pecera. ¿Cuántos guisantes se comía cada pez?

DESARROLLO CONCEPTUAL DE LAS RECTAS Y PUNTOS NOTABLES DEL TRIÁNGULO EN LIBROS DE TEXTO DE NIVEL BÁSICO

Conceptual Development Notable Lines and Points of a Triangle in Textbooks Basic Level

Luz Esmeralda Reyes, Flor Monserrat Rodríguez

Universidad Autónoma de Guerrero

Resumen

Presentamos un estudio referente al tratamiento del contenido rectas y puntos notables del triángulo en libros de texto de nivel básico en México. Utilizamos la metodología de análisis de contenido y analizamos definiciones, problemas o ejercicios, representaciones que usan para enseñar dicho contenido, actividades donde se apliquen los conceptos involucrados, entre otras cuestiones. La revisión indica que el contenido rectas y puntos notables se inicia en nivel primaria con la recta altura, dando su definición y trazo de ella en algunos triángulos, continuando en secundaria el trabajo con las cuatro rectas (bisectriz, mediatriz, altura y mediana).

Palabras clave: *libros de texto, rectas notables.*

Abstract

We present a study concerning the treatment of content notable lines and points of a triangle in textbooks basic level in Mexico. We use the methodology of content analysis and analyze definitions, problems or exercises, representations used to teach the content, activities where they apply the concepts involved, among other issues. The review indicates that the content and notable points straight starts at primary level with the line height, giving its definition and stroke her some triangles, continuing in high school working with the four lines (bisector, bisector, altitude and median).

Keywords: *textbook, notable lines.*

INTRODUCCIÓN

Los libros de texto son un recurso de alto impacto en el proceso de enseñanza - aprendizaje, se consideran incluso como los materiales curriculares con mayor incidencia cuantitativa y cualitativa en el aprendizaje de los estudiantes dentro y fuera del aula. En ocasiones este material llega a condicionar de forma importante el tipo de enseñanza que se realiza, puesto que muchos enseñantes se apegan al contenido al pie de la letra. A este respecto, Barrantes y Zapata (2008) mencionan que muchas veces los profesores utilizan al libro como material exclusivo y no otros materiales que amplíen el esquema conceptual del alumno, lo que puede ocasionar que el estudiante se quede solamente con la información que se propone en el libro de texto.

En esta misma dirección, Guillén, González y García (2009) señalan que los docentes suelen acomodar sus programaciones, objetivos, contenidos, metodología e incluso la evaluación a partir del manual elegido (libro de texto), es por ello, que se han interesan por indagar sobre algunos conceptos en libros de textos para ver cómo es que se presenta el contenido matemático en ellos, considerando las definiciones, representaciones, ejercicios y problemas.

Por su parte, González y Sierra (2004) consideran al libro de texto un material importante para la educación, pues éste ha ejercido diferentes papeles en ella, ya sea como objeto de estudio, como

Reyes, L. E., Rodríguez, F. M. (2014). Desarrollo conceptual de las rectas y puntos notables del triángulo en libros de texto de nivel básico. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 543-551). Salamanca: SEIEM.

material de consulta, como registro de las actividades del alumno, como colección de ejercicios propuestos y problemas a resolver. Esto ha originado una práctica escolar determinada por su uso, así como una organización de la enseñanza que se mantiene en la actualidad salvo casos aislados.

Sin embargo, se ha reportado que la utilización exclusiva de libros de texto, privilegia a que muchos estudiantes se formen concepciones erróneas, investigadores como (Gutiérrez y Jaime, 1996; Azcárate, 1997; Barrantes y Zapata, 2008) han encontrado que en los libros muchas veces suelen presentarse figuras estándar, o un número pequeño de ellas, lo cual conduce al estudiante a formarse ideas equivocadas. Los autores señalan que específicamente en el contenido rectas y puntos notables del triángulo, las dificultades y errores que presentan algunos estudiantes son: con el trazo de las mediatrices o alturas en triángulos obtusángulos o rectángulos, en la suposición de que todas las rectas notables son siempre interiores al triángulo, en creer que el triángulo tiene una sola altura y además sostienen que los libros han contribuido a formar esas concepciones, pues se ha encontrado que en ellos se presentan triángulos acutángulos con una sola altura, o únicamente con rectas notables interiores a esos triángulos.

Por lo anterior, en esta investigación partimos de la idea que algunos errores presentados en ciertos estudiantes pueden ser debido al tratamiento de los conceptos en libros de texto. El objetivo entonces consistió en **Realizar un análisis en libros de texto de nivel básico (primaria y secundaria) sobre el contenido rectas y puntos notables del triángulo para estudiar su tratamiento[1].** El tema, sin duda, es trascendente para la comprensión de otros contenidos de la geometría y en la solución de problemas de la misma matemática y en sus aplicaciones. Por ejemplo, el concepto de altura es fundamental para determinar el área de figuras geométricas como triángulos, rectángulos, o el volumen de algunos cuerpos geométricos como conos, el concepto de mediana se utiliza cuando se quiere encontrar el centro de gravedad de una figura triangular, por citar algunos.

ELEMENTOS TEÓRICOS – METODOLÓGICOS

Análisis de contenido

El interés por indagar sobre libros de texto es por la importancia que tiene este material en la educación y en particular en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Ahora bien, dentro de las ciencias sociales el análisis de contenido se considera una técnica eficiente para buscar información en un texto dado. Sin embargo, en este tipo de estudios se debe resaltar la objetividad, lo que se logra a través de la formulación de reglas claras y explícitas que sirvan como pautas para que otros investigadores puedan analizar el mismo material bajo iguales condiciones y puedan validar o falsar las conclusiones.

Para realizar el análisis de contenido hemos seguido las fases propuestas en (Cabero y Loscertales, 2002):

a) **Fase 1. Preanálisis.** En esta fase se identifican y seleccionan los textos, se hace una primera revisión de la literatura y de investigaciones similares sobre la temática de estudio seleccionada y se hace una primera revisión de los textos a utilizar.
b) **Fase 2. Unidades de análisis.** Constituyen segmentos del contenido de los mensajes que son caracterizados para ubicarlos dentro de las categorías.
c) **Fase 3. Categorización.** Es una operación de clasificación de elementos constitutivos de un conjunto por diferenciación, tras la agrupación por analogía, a partir de criterios previamente definidos.
d) **Fase 4. Inferencia.** Se explica y deduce lo que hay en un texto. El analista de contenido busca algunas conclusiones o extrae inferencias explicaciones “contenidas” explícitas o implícitas en el propio texto.

En la **Fase 1,** los libros de texto que se consideraron para nivel primaria como para nivel secundaria corresponden a la reforma 2011, reforma actual en México, para nivel primaria fueron seis libros que corresponden a los seis grados y son únicos, sin embargo, el criterio para la selección de libros para nivel secundaria radicó en la realización de una entrevista a profesores de este nivel que hayan impartido el contenido rectas y puntos notables del triángulo, dicha entrevista nos permitió obtener información de las editoriales más usadas por los profesores para la enseñanza del contenido ya que México cuenta con diferentes editoriales sobre libros de matemáticas. Los libros analizados en el nivel básico son los siguientes:

Nivel Primaria (6 a 12 años de edad)

- SEP. (2011). *Matemáticas. Primer grado*. México.
- SEP. (2011). *Matemáticas. Segundo grado*. México.
- SEP. (2011). *Matemáticas. Tercer grado*. México.
- SEP. (2011). *Matemáticas. Cuarto grado*. México.
- SEP. (2011). *Matemáticas. Quinto grado*. México.
- SEP. (2011). *Matemáticas. Sexto grado*. México.

Nivel Secundaria (12-15 años de edad)

- Espinoza, H., Ponce, J.C. y Reyes, A. V. (2011).*Matemáticas 1*. México: Ediciones sm.(L1E1)[2]
- Amador, M. E., Olivares, M. G. y San Agustín, R. B. (2011). *Matemáticas 2*. México: Ediciones sm. (L2E1)
- Nebbia, C. F. (2011). *Matemáticas 3*. México: Ediciones sm. (L3E1)
- Escareño, F. y López, O. L. (2013). *Matemáticas 1*. México: Trillas. (L1E2)
- Escareño, F. y López, O. L. (2013). *Matemáticas 2*. México: Trillas. (L2E2)
- Escareño, F. y López, O. L. (2013). *Matemáticas 2*. México: Trillas. (L3E2)
- Sánchéz, F. (2012). *Matemáticas 1*. México: Fernández Educación.(L1E3)
- Sánchéz, F. (2012). *Matemáticas 2*. México: Fernández Educación.(L2E3)
- Sánchéz, F. (2012). *Matemáticas 3*. México: Fernández Educación.(L3E3)

Asimismo, la revisión de literatura y una primera exploración en los libros, nos permitieron conformar las categorías y unidades de análisis utilizadas en esta investigación (**Fase 2 y 3**).

Coincidimos con algunos investigadores como Gómez (2002), Sierra y González (2004) entre otros, que es importante indagar un cierto concepto a través de sus definiciones, representaciones, problemas que se proponen entre otras situaciones, es por ello, que el análisis realizado en los libros de texto se hizo a través de tres categorías que son: Análisis Conceptual, Tipos de Representación y Análisis Fenomenológico.

Las categorías mencionadas anteriormente, a su vez, quedaron conformadas por unidades de análisis, que tienen que ver con: cómo se introduce el concepto, cómo se define, qué ejercicios, ejemplos y actividades de retroalimentación se proponen (Análisis Conceptual), qué representaciones se encuentran para cada uno de los conceptos involucrados (Tipos de Representación) y qué aplicaciones tiene cada uno de éstos en torno a la matemática misma o a la vida cotidiana (Análisis Fenomenológico). La Tabla 1, resume detalladamente las categorías y unidades de análisis utilizadas.

Estas categorías de análisis arrojaron información relevante sobre el tratamiento de las rectas y puntos notables del triángulo, y por lo tanto, elementos de punto de partida para investigaciones futuras que se orienten hacia la elaboración de propuestas de enseñanza y aprendizaje de este contenido.

Tabla 1. Categorías y unidades de análisis utilizadas para el análisis de libros

Categorías	**Unidades de análisis**	**Descripción general de los propósitos**
Análisis conceptual	• Cómo se introduce el concepto. • Cómo se define. • Qué tipo de ejemplos, ejercicios o problemas son los que se usan para explicar los conceptos de altura, mediana, bisectriz y mediatriz. • Actividades de retroalimentación.	Modo de introducción, definición y organización del concepto, tipo, función y niveles de complejidad de los problemas, actividades, ejercicios y si estos permiten comprender un concepto, relacionado a alguna recta o punto notable del triángulo.
Tipos de representación	• Geométrico. • Simbólico.	Tipo de representación utilizada, para la enseñanza-aprendizaje del tema.
Análisis fenomenológico	• En torno a la matemática misma. • Fenómenos de la vida diaria.	La finalidad es mostrar qué aplicabilidad tienen cada uno de los conceptos considerados.

RESULTADOS (FASE 4)

Nivel primaria

Después de hacer una revisión en los libros de primaria se encontró que la única recta notable que se trabaja es la *altura de un triángulo.* Ésta se introduce a partir de tercer grado mediante ángulos rectos, los cuales se representan por medio de giros, se menciona que un cuarto de giro representa un ángulo recto. Con ello se dan algunas ideas de lo que es perpendicularidad. En cuarto grado se continúa con el trabajo de rectas perpendiculares, las cuales se definen como "rectas secantes que se cruzan formando ángulos de 90 grados a los cuales se les llama ángulos rectos. En quinto grado aparece la recta altura, y se define como *la menor distancia que hay entre un vértice y su lado opuesto o la prolongación de éste.* Como ejercicios se enfatiza en el trazo de la altura en triángulos acutángulos y obtusángulos, trabajando poco el trazo de ella en triángulos rectángulos. En sexto grado se trabaja con rectas perpendiculares y se da de nuevo la definición dada en cuarto grado.La representación encontrada para abordar el concepto de altura es geométrica (ver Figura 1). Las aplicaciones se enfocan a la resolución de problemas de la misma matemática, tal es el caso de determinar áreas de figuras geométricas, por ejemplo triángulos.

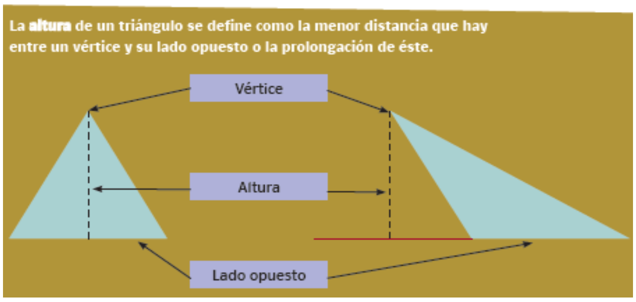


Figura 1. Representación de la recta altura en nivel primaria

En este nivel se observa el trazo de una sola altura, generalmente en triángulos acutángulos y obtusángulos, dejando de lado el trabajo en triángulos rectángulos, sin embargo, el plan y programa de estudios sugiere que se localicen y tracen las alturas en diferentes triángulos. Consideramos que si no se trabaja con las tres alturas, puede crear una imagen equivocada en el estudiante al creer que el triángulo tiene una sola altura, por otra parte el trabajar poco con triángulos rectángulos no permite al estudiante desarrollar este concepto de forma completa en los diferentes tipos de triángulos.

Nivel secundaria

En este nivel las rectas y puntos notables del triángulo se trabajan en primer grado tal y como lo establece el plan y programa de estudios 2011. Con respecto al concepto altura, hay un cambio en la definición que se da en este nivel con la definición que se da en nivel primaria, ya que se define como la recta perpendicular que va desde un vértice al lado opuesto de ese vértice y en nivel primaria se define como la menor distancia que hay entre un vértice y su lado opuesto o prolongación de éste.

Las actividades que se proponen con respecto a este concepto en algunos libros como el (L1E1) y (L1E2), es su trazo en triángulos equiláteros, escalenos, rectángulos, isósceles, acutángulos, obtusángulos, sin embargo, en el libro (L1E3) se pide únicamente el trazo de esta recta en triángulos acutángulos.

El libro (L1E1) hace preguntas como ¿En qué triángulos las dos alturas coincidieron con los lados? ¿En cuáles triángulos las alturas se cortaron en un sólo punto? ¿En qué triángulos las alturas se intersecan siempre dentro, en uno de los vértices y fuera de la figura?, lo cual en nuestra opinión podría hacer que los estudiantes reflexionen sobre lo que sucede con esta recta en los diferentes tipos de triángulos. Los libros analizados mencionan que las tres alturas de un triángulo, o su prolongación, se intersecan en un punto llamado ortocentro. Las representaciones encontradas, tanto de la altura como del ortocentro, son geométricas, pero escasas, se encuentra aplicabilidad en la matemática misma para determinar áreas de figuras geométricas y algunas relacionadas a la vida cotidiana para encontrar alturas de edificios o personas. Aunque los diferentes libros trabajan el concepto altura, no todos realizan el trazo de ella en los diferentes tipos de triángulos, además, se observa que la presentación de triángulos es casi siempre con base horizontal, lo cual hace que muchas veces los estudiantes no sean capaces de trazar las alturas en triángulos con base no horizontal.

Con respecto al concepto mediatriz, todos los libros coinciden en iniciar su trabajo haciendo la construcción de la mediatriz de un segmento, con ello, y haciendo algunas preguntas orientadoras se espera que los estudiantes descubran la propiedad que caracteriza a esta recta. Posteriormente la definen como *una recta perpendicular al segmento que pasa por el punto medio del segmento*, la cual tiene la propiedad de que *cualquier punto que este sobre la mediatriz está a la misma distancia de los extremos del segmento*. Los ejercicios que se plantean son el trazo de mediatrices en triángulos acutángulos, rectángulos y obtusángulos. Se menciona que las mediatrices de los tres lados del triángulo se intersecan en un punto llamado circuncentro. El libro (L1E1) señala que si el triángulo es rectángulo el circuncentro se localiza a la mitad del lado mayor del triángulo, si el triángulo es acutángulo, el circuncentro se localiza dentro del triángulo y, si es obtusángulo se localiza fuera del triángulo, sin embargo, no se proponen actividades donde el estudiante explore estas situaciones que sería lo más conveniente para una mejor comprensión del concepto. Las representaciones que proponen los libros (L1E2) y (L1E3) son geométricas y el (L1E1) geométricas y simbólicas. Las aplicaciones encontradas en el libro (L1E1) son en torno a la misma matemática, el caso de trazar una circunferencia teniendo tres puntos no colineales y con respecto a la vida cotidiana como el siguiente ejemplo: *Un comerciante quiere poner una gasolinera que se encuentre a la misma distancia de tres pueblos*. ¿Dónde debe poner la gasolinera? En el siguiente diagrama se representan los pueblos, Figura 2.

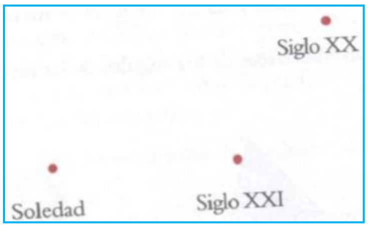


Figura 2. Representación de tres puntos considerados como pueblos para el problema empleado

Situaciones similares con respecto a la vida cotidiana se encuentran en los libros (L1E2 y L1E3).

En relación al concepto bisectriz, al igual que la recta mediatriz, se introduce a partir de la construcción de ella en algunos ángulos, posteriormente se enuncia que *es la recta que divide a un ángulo en dos ángulos iguales*, además que *si un punto está sobre la bisectriz, entonces ese punto está a la misma distancia de cada uno de los lados del ángulo*. El libro (LIE1) da como representación la Figura 3, la cual describe lo mencionado anteriormente.

Como O y P están sobre la bisectriz del $\measuredangle AQB$, entonces $\overline{OE} = \overline{OF}$ y $\overline{PG} = \overline{PH}$ asimismo $\measuredangle AQP = \measuredangle PQB$.

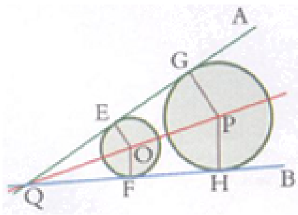


Figura 3. Representación de la bisectriz de un ángulo

En todos los libros se proponen como ejercicios trazar la bisectriz de algunos ángulos y en triángulos acutángulos, rectángulos y obtusángulos. Mencionan que en cualquier triángulo las bisectrices se cortan en un punto llamado incentro. La representación que utilizan los libros (L1E2) y (L1E3) para la enseñanza de este concepto es geométrica, en el libro (L1E1) además de la representación geométrica aparece la representación simbólica. En todos los libros se encuentra aplicabilidad en la vida cotidiana, aunque en el libro (L1E2) se encuentra también aplicabilidad en la misma matemática. Un ejemplo acerca de la vida cotidiana es el siguiente: *Ingrid va a decorar su habitación con un reloj de pared. Tiene el siguiente triángulo de madera y quiere hacer un agujero para incrustar un reloj de forma circular* (ver Figura 4) *¿De qué tamaño es el reloj mayor que se puede incrustar?¿Habrá alguna forma de encontrar el lugar exacto para insertar el reloj de Ingrid?*

Figura 4. Representación del triángulo de madera

Sobre el concepto de mediana, algunos libros como (E1L1) y (L1E3) proponen su estudio utilizando material tangible como madera y cartulina. Se pide que reproduzcan en estos materiales triángulos como los que se muestran en la Figura 5, para que encuentren el baricentro. Con preguntas como ¿Cuál de los triángulos tiene su superficie paralela al piso? Se espera que los estudiantes reconozcan la propiedad que tiene el baricentro.

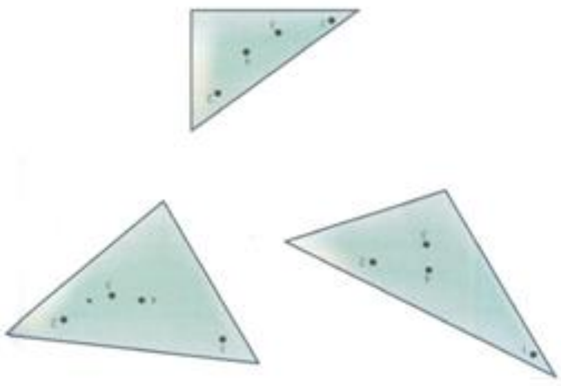


Figura 5. Representación de triángulos acutángulo, obtusángulo y rectángulo

Los distintos libros definen a la mediana de un triángulo como *el segmento que va del punto medio de un lado al vértice opuesto*. Además que las medianas se unen en un punto llamado baricentro o centro de gravedad. El libro (L1E2) plantea actividades como las siguientes:

1. Una mediana del triángulo *ABC* divide a éste en dos regiones triangulares. ¿Tendrán éstas la misma superficie? ¿Por qué?

a) Traza las otras dos medianas del triángulo *ABC* ¿En cuántas regiones triangulares queda dividido el triángulo?

b) ¿Tendrán estas regiones la misma superficie? Para comprobarlo, calcula el área de las regiones triangulares que se forman. (ver Figura 6)

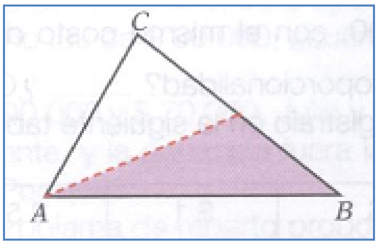


Figura 6. Representación de un triángulo dividido por una mediana

Las representaciones encontradas en todos los libros son geométricas. En el libro (L1E2) se representa una sola mediana lo cual hace que no se experimente el trazo de las tres y por tanto no se observa que sucede con el baricentro. Es el único concepto del que no se encuentra aplicabilidad en la misma matemática o en la vida cotidiana en los textos, por lo que se sugiere que se debieran incluir actividades de este estilo para que los estudiantes tengan conocimiento de su aplicabilidad con la vida cotidiana, por ejemplo.

CONCLUSIONES

En nivel primaria encontramos que el concepto altura de un triángulo se define como la *menor distancia entre un vértice y el lado opuesto o su prolongación*, sin embargo, del análisis de libros se observó, que antes de esta definición se trató el concepto de perpendicularidad, por lo que consideramos que es necesario que la definición de altura de un triángulo dada en este nivel, se vincule con el concepto de perpendicularidad pues en grados superiores la altura de un triángulo se define como la perpendicular que va de un lado al vértice opuesto, esta manera de definirla coincidiría con la definición que se da en nivel secundaria y por tanto los estudiantes tendrían elementos de vinculación entre los conceptos menor distancia y perpendicularidad, y la vinculación de conceptos sin duda es, un elemento para favorecer la comprensión de éstos.

Se observó también que la definición de altura, únicamente es enunciada sin impacto en los ejercicios, pues los ejercicios que se plantean son para resolverse de manera idéntica a los ejercicios planteados como ejemplos, lo cual limita sin duda la comprensión de la definición en cuanto a su aplicabilidad. Por otra parte, el trazo de esta recta es poco tratado en triángulos rectángulos, se pone más énfasis sobre el trazo de ella en triángulos acutángulos y obtusángulos, creemos que ello se debe a que la recta altura es visible (literalmente) en estos tipos de triángulos, y por tanto, en los triángulos rectángulos puede generar conflictos en los estudiantes de nivel primaria al no ser evidente para ellos. Es probable que el trazo de una sola altura en los triángulos, se deba a la utilidad que tiene esta recta para determinar áreas o volúmenes de figuras o cuerpos geométricos, ya que en general para calcular áreas y volúmenes se usa la medida de una sola altura. No obstante, aunque es en nivel primaria, donde los niños empiezan prácticamente su vida escolar, consideramos que se debieran proponer actividades donde se pida el trazo de las tres alturas y considerando los diferentes tipos de triángulos, ya que el trabajar mayoritariamente con triángulos acutángulos u obtusángulos, limita al estudiante a desarrollar completamente el trabajo de este concepto.

La representación encontrada es la geométrica, sin embargo, consideramos que se debieran proponer más representaciones ya que las encontradas son escasas.

Del análisis fenomenológico, se encuentra utilidad en la misma matemática, donde se utiliza la altura para determinar áreas o volúmenes de figuras o cuerpos geométricos. No se encuentran problemas sobre la vida cotidiana respecto a este concepto, lo cual puede deberse a lo mencionado anteriormente, porque su trabajo es para la introducción del cálculo de áreas o volúmenes.

En nivel secundaria, se trabajan las cuatro rectas notables con sus respectivos puntos de corte (bisectriz-incentro, mediatriz-circuncentro, altura-ortocentro, mediana-baricentro) en los diferentes tipos de triángulos, sin embargo, estos triángulos en su mayoría de veces se presentan con una base horizontal. Investigadores como (Tall y Vinner, 1981; Hershkowitz, 1990) establecen que esta forma viene dada por errores ocasionados por la presentación visual donde con frecuencia no hay o hay pocos ejemplos, de figuras no estándar o en posición no estándar, lo cual hace que se formen concepciones de representaciones prototípicas al momento de abordar estos conceptos. Creemos que la presentación insistente de triángulos siempre con base horizontal radica en que el concepto altura se utiliza también para medir altura de personas, de edificios entre otras cosas, lo cual hace pensar que siempre se debe tener una base horizontal para poder medir desde ahí. Asimismo, en la revisión se observan pocas actividades con respecto al circuncentro e incentro, baricentro y ortocentro, por lo cual, se necesitan actividades para reforzar estos conceptos, ya que hay libros, donde solamente se menciona que el circuncentro se encuentra dentro del triángulo si éste es acutángulo, fuera si es obtusángulo y sobre uno de los lados del triángulo si es rectángulo o que el incentro siempre se localiza en el interior del triángulo, pero no se proponen actividades donde el estudiante explore estas situaciones y de esta manera sea más productivo el aprendizaje.

Las representaciones encontradas en su mayoría son geométricas pero escasas, por lo que se sugiere revisar minuciosamente los contenidos matemáticos propuestos en los textos y proponer ejemplos, representaciones, actividades y problemas que favorezcan la vinculación entre las representaciones dadas y la definición del concepto, así como la identificación de los elementos esenciales de éstos, lo cual es necesario para comprender dicho contenido matemático. Como ya se mencionó, otras representaciones como las simbólicas podrían complementar la enseñanza de estos conceptos. Creemos que si se dan diferentes y diversas representaciones ayuda de alguna manera al estudiante comprender mejor los conceptos y por otra parte a no formarse concepciones erróneas o prototípicas respecto a ellos.

Por otra parte, el plan y programa de estudios 2011, que corresponde a nivel secundaria, sugiere que se trabaje el trazo y análisis de todas las rectas notables, sin embargo, el análisis de textos realizado indica que muchas de las actividades propuestas en los libros, se enfatizan más en el trazo de estas rectas dejando de lado su análisis, lo cual limita al desarrollo completo de estos conceptos. Asimismo este plan y programa propone que en la educación básica los alumnos sean capaces de construir nuevos conocimientos a través de sus saberes previos lo cual implica: Formular y validar conjeturas, plantearse nuevas preguntas, comunicar, analizar e interpretar procedimientos de resolución, encontrar diferentes formas de resolver problema, entre otras cuestiones, sin embargo, muchas de las actividades propuestas en los libros analizados no conllevan a las situaciones mencionadas anteriormente. Por lo todo lo anterior consideramos que los libros de texto debieran complementar en su contenido, otros materiales ya sean software como GeoGebra, Cabri II Plus, entre otros, que permitan trabajar este contenido de una manera constructiva descubriendo sus propiedades, o material tangible lo cual es una manera de motivar a los estudiantes a trabajar dicho contenido.

Referencias

Azcárate, C. (1997). Si el eje de ordenadas es vertical, ¿qué podemos decir de las alturas de un triángulo? *Suma: Revista sobre la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 25,* 23-30.

Barrantes, M., Zapata, M. A. (2008).Obstáculos y Errores en la Enseñanza-Aprendizaje de las Figuras Geométricas. *Campo Abierto, 27 (1)*, 55-71.

Cabero, J., Loscertales, F. (2002). *Elaboración de un sistema categorial de análisis de contenido para analizar la imagen del profesor y la enseñanza en la prensa*. Universidad de Sevilla. Grupo de tecnología Educativa. p. 1-25. En http://tecnologiaedu.us.es/revistaslibros/ANALISIS.htm

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *EMA*, *7(3*), 251-292.

González, M. T., Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la Enseñanza Secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las ciencias, 22 (3), 389-408.*

Guillén Soler, G., González Quiza, E., García Moreno, M.A. (2009). Criterios específicos para analizar la geometría en libros de texto para la enseñanza primaria y secundaria obligatoria. Análisis desde los cuerpos de revolución. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 247-258). Santander: SEIEM.

Gutiérrez, A., Jaime, A. (1996). Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio. En Giménez, J., Llinares, S. y Sánchez, M.V. (eds.). *El proceso de llegar a ser un profesor de Primaria. Cuestiones desde la educación matemática. Granada: Ed. Comares. 1996,*145-169.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition* (pp. 70-95). Cambridge: Cambridge University Press.

SEP (2011). *Programas de estudio 2011.Educación Básica Primaria*. México.

SEP (2011). *Programas de estudio 2011.Educación Básica secundaria. Guía para el maestro*. México

Tall, D., Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-16.

---

[1]Entendamos por tratamiento la forma en que se presentan los conocimientos a enseñar es decir, definiciones, ejercicios, actividades, representaciones, fenomenología.

[2] Significa Libro 1 (Primer grado) de la editorial 1. De tal forma que si se tiene L3E2, significa que nos referimos al Libro 3 (Tercer grado) de la editorial 2.

MEJORAR NUESTRO PROPIO CONOCIMIENTO MEDIANTE EL ANÁLISIS DE UN EPISODIO DE LA PRÁCTICA – DISTINTOS FOCOS DE ANÁLISIS

Improving our own knowledge through analysing an episode from teachers' practice – different focuses of analysis

C. Miguel Ribeiro[a,b], Mª Teresa González[c], Ceneida Fernández[d], Leticia Sosa[a,e], Dinazar Escudero[f], Miguel A. Montes[f], Luis C. Contreras[f], Eric Flores[f], José Carrillo[f], Nuria Climent[f], Lorenzo Blanco[g], Janeth Cárdenas[g], Edelmira Badillo[h], Pablo Flores[i], José María Gavilán-Izquierdo[j], Gloria Sánchez-Matamoros[j], María de la Cinta Muñoz-Catalán[j], Rocío Toscano[j]

[a]Centro de Investigación sobre el Espacio y las Organizaciones, Universidad del Algarve (Portugal), [b]UNESP (Rio Claro, Brasil); [c]Universidad de Salamanca; [d]Universidad de Alicante; [e]Universidad Zacatecas (México); [f]Universidad de Huelva; [g]Universidad de Extremadura; [h]Universidad Autónoma de Barcelona; [i]Universidad de Granada; [j]Universidad de Sevilla

Resumen

Una de las formas esenciales para lograr una mejor comprensión del contenido del conocimiento del profesor está ligada al análisis de su práctica. Esa práctica puede ser encarada de una forma amplia que no se limite sólo a la práctica de clase. Por otro lado, una discusión y reflexión sobre una misma situación de la práctica desde diferentes perspectivas teóricas y metodológicas puede contribuir también a una mejor comprensión no solo de la práctica sino también de los instrumentos metodológicos y teóricos en los que se sustenta el análisis. En esta comunicación presentamos y discutimos parte del trabajo desarrollado en la reunión intermedia del grupo de investigación sobre el conocimiento y desarrollo profesional del profesor de la SEIEM y cuyo foco de atención fue la discusión de las potencialidades del análisis de un mismo episodio desde cinco focos teóricos distintos.

Palabras clave: *conocimiento y desarrollo profesional del profesor, análisis de la práctica; diferentes perspectivas teóricas*

Abstract

One of the core ways allowing obtain an ampler and deeper understanding on the content of teachers' knowledge concerns analysing teachers' practices. Such practice can be perceived in a broader way, not limited to classroom practice. On the other side, discussing and reflecting on the same situation with different theoretical and methodological approaches seems to contribute also for obtaining a deeper understanding not only on such practice but also on the used approaches for such analysis. In this paper we present and discuss part of the work developed in the intermeeting of the group research teachers' knowledge and development of SEIEM concerning the potentialities of analyzing one episode using five different theoretical approaches.

Keywords: *teachers' knowledge and profesional development, analysing teachers practices, different theoretical perspectives*

INTRODUCCIÓN

En los últimos años el foco de discusión en el grupo de investigación sobre el conocimiento y desarrollo profesional del profesor de la SEIEM ha acompañado las evoluciones y cambios del foco de interés de la investigación que se viene haciendo también en el ámbito internacional. Estos

Ribeiro, C. M., González, M. T., Fernández, C., Sosa, L., Escudero, D., Montes, M. A.,… Toscano, R. (2014). Mejorar nuestro propio conocimiento mediante el análisis de un episodio de la práctica – distintos focos de análisis. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 553-562). Salamanca: SEIEM.

cambios buscan, no solo, compartir el tipo de discusiones que se hacen en los foros internacionales (e.g., CERME, PME, ICME), sino contribuir a una reflexión más profunda de los trabajos que cada grupo de investigación está desarrollando en el contexto español. Así, de discutir aspectos de la investigación enfocada en la resolución de problemas o las creencias del profesor, en los últimos años se ha pasado a centrar la discusión en el análisis del conocimiento del profesor y las nuevas conceptualizaciones del conocimiento del profesor (e.g., Ribeiro y Carrillo, 2011).

En la actualidad un foco importante (pero no exclusivo) del trabajo que se desarrolla en este grupo está centrado en discutir y reflexionar aquellos aspectos del desarrollo profesional y del conocimiento que permitan una mejor comprensión de la práctica del profesor, de los factores que influyen en ella y cómo lo hacen. Ese foco nos podrá ayudar a mejorar no solo esa práctica sino también la formación e, incluso, la investigación que hace cada grupo de investigación al ser más conocedor y consciente de sus perspectivas. Esto potencia (al menos eso se espera) no solo considerar el propio foco de atención o la importancia de la investigación que se desarrolla individualmente sino también una gama de posibilidades de trabajos conjuntos, lo que permitiría tornar más visible (en términos locales y globales) lo que se hace y darnos cuenta de su importancia en los diferentes contextos.

Se considera que, siendo uno de los aspectos centrales del grupo el que se refiere al conocimiento del profesor, y buscando una mejor comprensión del contenido de ese conocimiento (y de los factores que pueden influir esa práctica), una *practice-based approach* (e.g., Jakobsen, Thames, Ribeiro y Delaney, 2012; Thames y Van Zoest, 2013) mediante un análisis desde múltiples perspectivas (teóricas/metodológicas) de la práctica de un profesor encarándolo como un estudio de caso instrumental (Stake, 2005), permitirá obtener algunas informaciones para alcanzar esa mejor comprensión. Aquí presentamos uno de los aspectos que nos llevan a decir que el trabajo del grupo ha acompañado las problemáticas internacionales en el área e, incluso, ha a ellas contribuido de forma substancial

Así, este artículo emerge de una propuesta presentada al grupo para analizar un mismo episodio de la práctica, desde distintas perspectivas teóricas (las que los diferentes grupos de investigación que participaron en el seminario están trabajando), discutiéndose en el seno del grupo cinco análisis y/o abordajes distintos que en algunos casos se han complementado. La cuestión que pretendíamos discutir puede ser enunciada del siguiente modo: ¿Qué diferencias y similitudes se pueden observar al analizar un mismo episodio de clase desde distintas perspectivas/abordajes teóricas y de qué modo ese tipo de trabajo puede contribuir a una mejor comprensión de la práctica y del conocimiento del profesor?

Empezamos presentando brevemente cada una de las perspectivas consideradas, justificando, después, algunas de las opciones metodológicas para la selección del episodio a analizar, así como algunos de los aspectos particulares que cada grupo, presente en el seminario, ha considerado para hacer ese análisis. Terminamos con la discusión del análisis realizado y algunas reflexiones y potencialidades de este tipo de trabajo cómo forma de contribuir a los avances en investigación, a la comprensión de la práctica y a la formación de profesores. Esto se ha realizado tanto para el análisis de una misma situación desde múltiples perspectivas cómo del proceso metodológico seguido y subsecuentes discusiones.

ALGUNOS APUNTES TEÓRICOS

En este apartado presentamos algunos aspectos centrales de las distintas conceptualizaciones teóricas consideradas para analizar un episodio de la práctica. En primer lugar hay que clarificar que, por práctica entendemos todas las situaciones que se relacionan con la actuación docente y no solo con lo que ocurre en la clase. En ese sentido hemos adoptado la noción de *practice-based approach* (e.g., Thames y Van Zoest, 2013), incluyendo distintos contextos y formas de obtención de información (e.g., cursos de formación continuada, talleres, entrevistas).

Las cinco perspectivas teóricas consideradas con potencialidades para el análisis a realizar, se pueden agrupar en tres grupos: (i) conceptualizaciones/modelos del conocimiento del profesor; (ii) perspectiva socio cultural; (iii) la resolución de problemas cómo un contenido del conocimiento del profesor. Aunque seamos conscientes de la variedad de posibles abordajes y consideraciones teóricas (que enriquecerían el trabajo que se está haciendo en el propio grupo), nos centramos exclusivamente en estas ya que, como hemos mencionado, se refieren a las conceptualizaciones del conocimiento del profesor que están trabajando los distintos grupos presentes en el seminario. Eso conduce a que no se discutan otras conceptualizaciones también importantes del conocimiento del profesor, así como otras perspectivas que se refieren al objeto de estudio del trabajo que se presenta.

En las perspectivas correspondientes al primer grupo incluimos: *Knowledge Quartet* – KQ (Rowland, Huckstep & Thwaites, 2005); *Mathematical Knowledge for Teaching* – MKT (Ball, Thames & Phelps, 2008) y *Mathematics Teachers Specialized Knowledge* – MTSK (Carrillo, Climent, Contreras & Muñoz-Catalán, 2013), derivadas todas ellas de las ideas de (Shulman, 1986).

El KQ constituye un cuadro conceptual para orientar la observación de las aulas en aquellos aspectos relativos al conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido para facilitar el análisis de las situaciones observadas. Se trata de un marco flexible que permite capturar las ideas importantes y encuadrarlas en un número no excesivo de categorías conceptuales que puedan ser eficaces en la investigación. Considera cuatro dimensiones: *fundamentación*, *transformación*, *conexión* y *contingencia*. La fundamentación incluye los conocimientos y comprensión de la matemática en sí misma y de la pedagogía específica de la matemática, así como las creencias acerca de las matemáticas, las finalidades de la matemática y las condiciones con las cuales los alumnos aprenden mejor matemáticas. Las otras tres dimensiones se refieren al contexto en el que se pone en práctica el conocimiento. Así la transformación realizada sobre el conocimiento a enseñar en formas pedagógicamente fuertes sería la segunda categoría. La conexión incluye la secuenciación del material para la enseñanza y una concienciación de las exigencias cognitivas de los diferentes tópicos y tareas así como el establecimiento de relaciones entre diferentes conceptos matemáticos y la contingencia es la capacidad de respuesta de un profesor en situaciones de aula imprevistas y la habilidad para “think on one’s foot” lo que incluye la capacidad de convencer, de fundamentar y de dar explicaciones esclarecedoras en situaciones imprevistas y no planificadas.

El MKT considera el *Subject Matter Knowledge* (SMK) y el *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) de Shulman divididos cada uno en seis sub dominios y asume como uno de los elementos centrales la especificidad del conocimiento del profesor en relación a otros profesionales que utilizan la matemática de forma instrumental. En el dominio del SMK se incluye un conocimiento común del contenido (CCK) que se refiere a un saber hacer (e.g., saber encontrar la respuesta correcta para determinada operación matemática así como determinar que otra respuesta es incorrecta); el conocimiento especializado del contenido (SCK) amplía el CCK e incluye, por ejemplo, un conocimiento que le permite al profesor saber el porqué de determinado error o utilizar distintas representaciones para un mismo contenido; el conocimiento en el horizonte (HCK) se refiere al conocimiento que le permite proyectar para el aprendizaje futuro lo que se hace en cada momento. En cuanto al PCK, incluye el conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT) que se relaciona con la secuenciación de las tareas, las estrategias y representaciones a utilizar; el conocimiento del contenido y de los alumnos (KCT) que está asociado a anticipar las dificultades/facilidades de los alumnos y el conocimiento del contenido curricular (KCC) que integra una visión completa de la diversidad de programas concebidos para la enseñanza en un determinado nivel de escolaridad así como la diversidad de materiales didácticos disponibles.

En cuanto al MTSK, siendo una “evolución” del MKT considera también tres subdominios en cada uno de los dos dominios de Shulman, pero asume que todo el conocimiento es especializado. En el dominio del Conocimiento Matemático se incluye el conocimiento de los temas (KoT) pero es más que el conocimiento de la matemática como disciplina puesto que incluye también la matemática escolar, así como lo relativo a su fundamentación teórica y los procedimientos, estándar y alternativos o las distintas formas de representación; el conocimiento de la estructura matemática (KSM) que se refiere a los conocimientos que permiten al profesor establecer conexiones entre las matemáticas elementales y las avanzadas; y el conocimiento de la práctica de la matemática (KPM) que se corresponde con aquellas formas de hacer y proceder en matemáticas que un profesor ha de conocer para desarrollar su clase, como son las diferentes formas de demostrar, el significado de definición, axioma o teorema como elementos constituyentes de la matemática, o el conocimiento de la sintaxis matemática. Entre los subdominios del PCK se consideran: el conocimiento de los estándares de aprendizaje en matemáticas (KMLS) que son los referentes que indican en qué momento debe aprenderse cada contenido y a qué nivel de profundidad; el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) que incluye conocer distintas estrategias que permitan al profesor impulsar el desarrollo de las capacidades matemáticas procedimentales o conceptuales, contemplando también aquí el conocimiento (formal o informal) de teorías de enseñanza de la matemática; y el conocimiento de las características del aprendizaje matemático (KFLM) que incluye el conocimiento de las dificultades, errores y obstáculos en el aprendizaje de un concepto, así como el conocimiento de la forma en que los alumnos aprenden un cierto contenido, contemplando también el conocimiento (formal o informal) de teorías de aprendizaje de la matemática.

En (ii) se ha asumido la perspectiva socio cultural de Sfard (2007) que considera que los individuos pueden participar en diferentes tipos de actividades comunicativas, cada una de ellas con sus propias reglas denominadas *discursos*. En esta perspectiva se propone un conjunto de herramientas teóricas, características discursivas, para el análisis del discurso: palabras matemáticas, mediadores visuales, narrativas aceptadas y rutinas. Sfard (2007) las aplica específicamente al discurso matemático y aquí se amplía esta idea asumiendo su adaptación al discurso didáctico-matemático. Las palabras matemáticas se asocian con aquellas utilizadas en el discurso matemático, incluyendo términos no propiamente matemáticos con significado y utilidad matemático/a; los mediadores visuales son entendidos como los medios con los que los participantes del discurso identifican los objetos de los que están hablando y coordinan su comunicación, incluyendo los artefactos simbólicos; las narrativas asumidas se corresponden a cualquier texto hablado o escrito que da una descripción de los objetos, de las relaciones entre estos objetos o de las actividades con los objetos que están sujetas a la aceptación o rechazo (narrativas que se etiquetan como verdaderas por una comunidad dada); y las rutinas son patrones repetitivos bien definidos en las acciones de los interlocutores característicos de un discurso dado. Las regularidades específicamente matemáticas pueden ser identificadas mediante el uso de las palabras matemáticas y los mediadores matemáticos o mediante el proceso de crear y fundamentar narrativas asumidas.

Finalmente, la resolución de problemas (RP) es considerada, en el currículo de Matemáticas, como un contenido específico que los profesores debieran conocer y desarrollar en sus aulas (Blanco & Cárdenas, 2013), llegando a señalar que los contenidos asociados a la resolución de problemas constituyen la principal aportación que desde el área se puede hacer a la autonomía e iniciativa personal. Estos contenidos supondrían la reflexión sobre procesos comunes en la resolución de problemas (Puig, 2008) y su conocimiento complejo debiera permitirles tomar decisiones en y sobre sus prácticas profesionales (Santos, 2011). Son múltiples las referencias a la RP que los profesores deberían dominar y que constituyen las categorías desde las que puede analizarse la práctica docente. En nuestro caso, hemos considerado tres de esas categorías: desarrollo del modelo general de resolución de problemas, considerando sus cuatro fases (analizar y comprender el problema, diseño de estrategias, ejecución de las estrategias y revisión del problema, del resultado y toma de decisiones); uso del lenguaje y comunicación con los estudiantes; y contextos, formatos y tareas en el desarrollo del problema.

CONTEXTO Y MÉTODO

Este artículo es parte del trabajo desarrollado en un seminario intermedio del grupo de investigación conocimiento y desarrollo profesional del profesor de la SEIEM por lo que no se encuadra en ninguno proyecto de investigación. Aun así se pretende obtener una mejor comprensión sobre la práctica docente, discutiendo esa práctica desde distintas miradas teóricas y metodológicas. Podemos considerarlo cómo un estudio de caso instrumental (Stake, 2005) que nos permite simultáneamente una visión local y global del foco de análisis contemplando visiones más amplias y completas de la entidad estudiada.

Con la intención de posibilitar un análisis de un mismo episodio que permitiera mejorar nuestro conocimiento de la práctica y el conocimiento del profesor sobre distintas perspectivas se pidió a los miembros del grupo que facilitaran un episodio de la práctica (encarada de forma amplia). De las propuestas que se recibieron se ha seleccionado una para realizar un análisis y discusión durante dos días de trabajo en la Universidad de Sevilla (Anexo). El episodio seleccionado forma parte de los datos recogidos para una tesis doctoral sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas que se está realizando en la Universidad de Huelva.

El episodio se corresponde a una actividad que un profesor de secundaria (Omar) realiza como parte de una tarea de un curso virtual de la maestría en Matemática Educativa realizado en 2013 en el Centro de Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA) en México. En la actividad se pidió a los profesores del curso resolver "el problema de las cuerdas". Para facilitar el proceso de análisis del episodio, correspondiente a la resolución que Omar hizo del problema, se ha dividido dicho episodio en unidades pequeñas de información (Ribeiro, Carrillo y Monteiro, 2008). El episodio seleccionado se corresponde con un tipo de práctica distinta de las que se estudian más comúnmente (no se corresponde a una práctica de clase), con lo que se pretendía una nueva forma de mirar el conocimiento del profesor (en términos teóricos y metodológicos) Además de resolver el problema, Omar señala las formas en las que los estudiantes podrían abordar la actividad.

En cuanto al análisis, realizado por cada uno de los grupos que se han prestado a ello, lo han realizado de forma independiente, por lo que tanto el proceso como el foco han sido distintos y han estado guiados por cada una de las bases teóricas que los sustentan. Así, aquí discutiremos no el análisis individual sino más bien algunos aspectos de las discusiones y reflexiones que han emergido en el grupo, basadas en los análisis individuales realizados. Hay que mencionar que el objetivo del trabajo no es hacer comparaciones entre las distintas miradas teóricas/metodológicas, siendo esa diversidad de abordajes un elemento más para enriquecer la comprensión del conocimiento del profesor, de su contenido y naturaleza.

DISCUTIENDO UN EPISODIO DE LA PRÁCTICA

El análisis efectuado según cada una de las perspectivas teóricas nos conduce a una multiplicidad de puntos comunes y otros distintos. Aunque los puntos de coincidencia sean importantes (ya que revelan también aspectos fuertes de las conceptualizaciones teóricas), mucho más importante, para nosotros, son los puntos de discordia y el recorrido que nos permitirá resolver el/los problemas emergentes – considerando la resolución de problemas además de un contenido del conocimiento del profesor (Blanco & Cárdenas, 2013) también un contenido del conocimiento del investigador (Ribeiro, 2013). Ese foco de interés y atención en los puntos disjuntos se basa en el hecho de que, independientemente del marco teórico que consideremos – si buscamos entender mejor los distintos aspectos del conocimiento del profesor, estando este formado por distintos aspectos imbricados (separados pero inseparables) –, muchas dudas emergerán, pero será la búsqueda de respuestas la que nos permitirá avanzar.

Uno de los aspectos comunes al proceso de análisis se relaciona con la necesidad sentida de ampliar la información sobre el contexto del episodio y de los objetivos asociados a la investigación de la que ha surgido (e.g., Escudero y Carrillo, 2014), como la necesidad de haber realizado una entrevista posterior para clarificar algunos aspectos – pero no necesariamente los mismos considerando cada una de los análisis hechos. Otro aspecto común, se refiere al conocimiento sobre resolución de problemas que debe tener el profesor o bien al uso de diferentes modos de representación. Uno de los aspectos centrales considerados se refiere a las distintas cuestiones de investigación que han emergido (y en las que cada grupo se ha enfocado) desde una misma premisa inicial: analizar el conocimiento de Omar con base en el episodio presentado. Esas diferentes cuestiones de investigación tienen su origen en diferentes paradigmas y pueden ser respondidas recorriendo a los diferentes modelos/conceptualizaciones teóricas. Así, podemos decir que el análisis enfocado a los aspectos comunes muestra la necesidad/importancia de una multiplicidad de formas de obtener información para una misma problemática, y la emergencia de distintas cuestiones de investigación dependiendo de cómo miramos la práctica.

Una diferencia entre los diferentes marcos se refiere a que, por ejemplo, el KQ se centra más en la práctica y el aspecto de la interacción (una componente más social) entre los alumnos y el profesor y eso se relaciona con la categoría *contingencia*, lo que suponía un inconveniente para analizar este episodio concreto. Según el KQ uno de los aspectos a destacar se refiere al hecho de que, por ser una práctica distinta de la clase (en un curso online), no se verifican situaciones de contingencia (o al menos tales situaciones no son evidentes en las respuestas). El análisis revela un conjunto de conocimientos (e.g., circunferencia cómo un conjunto infinito de puntos; concepto de cuerda; recuerda fórmulas) y evidencias la falta de otros (e.g., utilización inadecuada de terminología matemática – en la identificación de el área del círculo; ¿podrá la cantidad de puntos ser un número no entero?; confusión del límite con el término general de la sucesión), aspectos que se consideran incluidos en la *fundamentación*. En cuanto a la categoría de *conexión* se incluye aquí el caso particular del cálculo de las diagonales (número de lados menor que 20); relacionar el problema propuesto con una sucesión y el cálculo del término general de esa sucesión; y el considerar/conocer el curso en que tendría sentido la tarea de explorar la sucesión. Relativo a la *transformación*, ahí se incluye un conocimiento del cálculo del número de cuerdas mediante su trazado manual; el cálculo de las diagonales de un polígono regular (selección de ejemplos: polígono con 20 lados); la determinación del término general de la sucesión del cálculo de diagonales para polígonos con diferente cantidad de lados; y el establecimiento del número de diagonales a partir del término general anterior sumando el número de lados.

El análisis del episodio según el MKT presenta varios aspectos comunes con lo que se ha mencionado en relación con el KQ – en términos de conocimientos evidenciados y a discutir pero, por corresponder a conceptualizaciones distintas, algunos de esos aspectos del conocimiento se consideran en subdominios bastante distintos. En particular podemos referir que el considerar como ejemplo un polígono de 20 lados, se corresponderá al KCT, pero relacionar el número de cuerdas con la determinación de las diagonales se podría considerar como HCK o SCK mismo incluso CCK, dependiendo de la formación del profesor y del nivel educativo en que tenga sentido abordar el círculo cómo un polígono con un número infinito de lados (e.g., Ribeiro, 2013). Al final del episodio (E2[3]) se identifica esencialmente un conocimiento curricular, que se consideraba incluido en la categoría de *conexión* del KQ. Uno de los aspectos que se destaca del análisis hecho según esta conceptualización es el hecho de que, también, pero no sólo, al no haber sido aportada información complementaria relativa al contexto de recogida de datos (uno de los problemas ya mencionados en común en todos las análisis), en muchas situaciones queda la duda de si determinado conocimiento se podría considerar incluido en el CCK o en el SCK (e.g., relacionar el número de puntos de una circunferencia con el número de cuerdas; el número de puntos es siempre un número entero).

Esta dificultad en diferenciar el CCK y el SCK del MKT ha sido una de las bases que han conducido a la elaboración del MTSK – donde se considera la integración de diferentes conocimientos tanto matemáticos cómo didácticos que contribuyen a la especificidad del conocimiento del profesor. En el MTSK la discusión que se ha hecho con anterioridad al respecto de que un determinado conocimiento pueda corresponder a CCK o a SCK no tiene sentido, incluyéndose esos conocimientos en el KoT–eso se señala también como uno de los resultados y avances en términos de discusiones de conceptualizaciones teóricas. Basado en este modelo se ha hecho un análisis más detallado que con los demás, desglosando distintos aspectos del conocimiento de Omar asociándolos a los distintos subdominios del modelo, lo que se justifica al formar parte de un trabajo de algunos miembros del grupo. Una discusión más amplia se puede encontrar en Escudero y Carrillo (2014). Muchos de los aspectos de este análisis se refieren a conocimientos y situaciones ya identificadas basadas en el KQ y el MKT pero, por la naturaleza del modelo en que se basa, es mucho más fina que las presentadas anteriormente.

Cuando el episodio se mira bajo la perspectiva socio cultural de Sfard (2008) son enfatizados, de forma obvia, los mediadores visuales utilizados (ejemplos gráficos que en KQ se incluye en la *conexión*, en el MKT en CCK u SCK y en el MTSK en el KSM). Como resultado del análisis del discurso matemático del profesor se pueden identificar algunos mediadores visuales de diferente naturaleza (gráficos y analíticos), identificando también narrativas, asociándolas a definiciones (de cuerda) y a características de objetos geométricos (una circunferencia tiene infinitos puntos). Este discurso matemático, y su corrección y adecuación, en las demás conceptualizaciones se encuentra disperso en casi todos los subdominios de forma implícita. Una de las rutinas identificadas en el episodio se refiere al hecho de que Omar diga que calcula las cuerdas trazándolas de manera efectiva, lo que lleva a suponer que después se cuentan las cuerdas trazadas. El hecho de considerar la didáctica de las matemáticas como un tipo especial de discurso en este abordaje lleva a una discusión (y levanta la cuestión) de lo que se corresponde, por ejemplo, con una rutina en matemáticas y en didáctica de la matemática (representación verbal, gráfico, analítica E2[2]) – si corresponderán a cosas distintas o no, y cual será su naturaleza.

Procurando entender cómo el conocimiento del profesor permite tomar decisiones en y sobre sus prácticas profesionales se ha analizado el episodio según las cuatro fases de RP añadiendo una visión del lenguaje utilizado y las formas cómo resuelve el problema propuesto. Mirar lo que hace Omar (se refiere a elementos “didácticos” de la educación; pone de manifiesto la comprensión del problema de las cuerdas desde lo matemático; menciona las posibles formas de resolver el problema y el nivel escolar donde desarrollaría cada forma de resolver el problema) bajo la perspectiva de RP permite asociar distintos sub episodios a cada una de las etapas de esa resolución. Al considerar una comprensión matemática del problema estamos relacionando esa comprensión con un conocimiento sobre, por ejemplo, ¿qué es cuerda?; ¿qué es una circunferencia?; ¿cuántas cuerdas puede trazar?, conocimientos que se incluyen en el saber matemático del profesor (que en KQ se considera *fundamentación*, en el MKT podrá incluirse en CCK u SCK y en el MTSK en el KoT). Esa comprensión le permite también cuestionar la adecuación o no del problema al nivel escolar para el que se propone pero al proponer diferentes estrategias (gráfica, conceptual y procedimental – mediadores visuales según la perspectiva socio cultural de Sfard) las asume para sí mismo no contemplando el contexto de la práctica en que se encuentra – se olvida de que eso se deberá adecuar a los alumnos.

ALGUNOS COMENTARIOS Y POTENCIALIDADES PARA LA FORMACIÓN Y LA INVESTIGACIÓN

Aunque tengamos algunas respuestas relativas al conocimiento de Omar según cada uno de los modelos, y de forma integrada considerando los distintas abordajes, nos hemos quedado con muchas más cuestiones – lo que en sí mismo nos parece un punto a enfatizar ya que será la búsqueda de respuestas a (esas y otras) cuestiones lo que nos permitirá avanzar en la investigación y, tal como refiere Kilpatrick (1981), parar y pensar. Para cada uno de los modelos/conceptualizaciones nos podemos cuestionar, por ejemplo sobre si: ¿se pueden identificar más conocimientos con este modelo?; ¿qué aspectos de los episodios no han sido puestos en evidencia?; ¿se podrían identificar otros conocimientos o profundizar en los puestos en evidencia utilizando otros instrumentos de investigación?; ¿qué fortalezas y debilidades muestra el modelo?; ¿Cuáles son las (des)ventajas al tener como punto de partida una determinada conceptualización y no otra?.

Este tipo de trabajo, de analizar un mismo episodio bajo distintas perspectivas, no pretende ser una etapa para conectar diferentes teorías o modelos pero si un medio que permita una mejor comprensión de un mismo fenómeno desde distintos focos de atención. Este abordaje múltiple permite una visión simultáneamente más profunda y amplia del fenómeno así como una comprensión de los distintos marcos teóricos y su rol en el análisis, ya que la adopción de uno en detrimento de otro conduce a distintas cuestiones de investigación. La discusión de esas diferentes cuestiones de investigación, y los variados abordajes efectuadas en el sentido de obtener una mejor comprensión sobre la práctica han permitido una reflexión y toma de consciencia de los distintos posicionamientos teóricos y metodológicos para, discutir algunos de los aspectos que se consideran nucleares en la investigación y en la formación de profesores – encarada como un aspecto central en el desarrollo profesional del profesor.

Este tipo de trabajo, además de posibilitar una más plena comprensión de la práctica nos ha permitido una reflexión sobre el rol de los formadores de profesores (nosotros) en la formación, en el desarrollo del conocimiento del profesor y en su desarrollo profesional. Considerando que debemos promover, a todos los niveles, una relación entre la teoría y la práctica, y siendo la investigación el puente que las une, el trabajo, discusión y reflexión considerando diferentes posibilidades de abordaje y enfoques para una misma situación nos permite potenciar su uso en la práctica, para desarrollar tareas especificas para la formación, teniendo en consideración el hecho de que ese conocimiento puede ser enseñado y su especificidad para el desarrollo de la práctica (e.g., Ribeiro, Mellone y Jakobsen, 2013), minimizando las situaciones de contingencia, en el sentido de Rowland et al., (2005).

Es aun necesario realizar más investigaciones que nos permitan entender mejor las potencialidades concretas, y el trabajo asociado a un tipo de discusión cómo la que hemos experimentado – tanto para la formación como para la investigación y la práctica – pero si consideramos que el conocimiento del profesor es esencial para desarrollar aprendizajes profundos en los alumnos, entonces también nuestro conocimiento cómo formadores de profesores, e investigadores que se preocupan con esa formación (a todos los niveles), deberá ser foco de discusión ya que deberemos ampliar las consideraciones que hacemos para los profesores a nosotros mismos – puesto que nuestros alumnos son los profesores o estudiantes para profesores (Jaworski, 2008).

Agradecimientos:

Este artículo há sido parcialmente financiado por la Fundação para a Ciência e a Tecnologia (Portugal).

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Blanco, L. J., & Cárdenas, J. A. (2013). La resolución de problemas como contenido en el currículo. *Revista Campo Abierto, 32*(1), 137-156.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. In B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya: Middle East Technical University, Ankara.

Escudero, D., & Carrillo, J. (2014). Knowledge of Features of Learning Mathematics as part of MTSK. In *Proceedings PME* (pp. to appear). Vancouver: PME

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematics knowledge for teaching on student achievement. *American Education Research Journal*, *42*(2), 371-406.

Jakobsen, A., Thames, M. H., Ribeiro, C. M., & Delaney, S. (2012). Using Practice to Define and Distinguish Horizon Content Knowledge. In ICME (Ed.), *12th ICME* (pp. 4635-4644). Seoul: ICME.

Kilpatrick, J. (1981). The reasonable ineffectiveness of research in mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 2*(2), 22-29.

Puig, L. (2008). Resolución de problemas: 30 años después. In R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho & L. J. Blanco (Eds.), *Actas del XIII Simposio de la SEIEM* (pp. 93-111). Badajoz, España.

Ribeiro, C. M. (2013). Del cero hasta más allá del infinito - algunas perspectivas desde el comienzo de la tesis doctoral hasta el futuro “también” a largo plazo. In A. B. Alcaraz, G. G. Pereda, A. E. Castro & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 71-85). Bilbao: Universidad del País Basco, SEIEM.

Ribeiro, C. M., & Carrillo, J. (2011). Relaciones en la prática entre el conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) y las creencias del profesor. In M. M. Rodríguez, G. F. García, L. J. Blanco & M. P. Medina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 513-521). Ciudad Real: SEIEM, Universidad Castilla-La Mancha.

Ribeiro, C. M., Carrillo, J., & Monteiro, R. (2008). Uma perspectiva cognitiva para a análise de uma aula de matemática do 1.º ciclo: um modelo de apresentação de conteúdo tendo como recurso o desenho no quadro. In R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho & L. J. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 545-555). Badajoz: SEIEM.

Ribeiro, C. M., Mellone, M., & Jakobsen, A. (2013). Prospective teachers’ knowledge in/for giving sense to students’ productions. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education - mathematics learning across the life span* (Vol. 4, pp. 89-96). Kiel, Germany: PME.

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*, 255-281.

Santos, L. (2011). El papel de la Resolución de Problemas en el Desarrollo del Conocimiento Matemático de los Profesores para la Enseñanza. Paper presented at the XIII CIAEM-IACME.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *Journal of the Learning Sciences*, 16(4), 565-613.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: human development, the growth of discourse, and* mathematizing. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

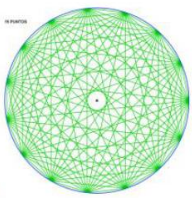
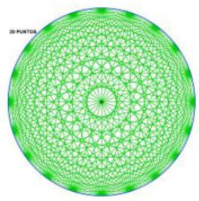
Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15(2)*, 4-14.

Stake, R. E. (2005). Qualitative Case Studies. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *The Sage handbook of qualitative research* (pp. 443-466). Thousand Oaks: Sage Publications.

Thames, M., & Van Zoest, L. R. (2013). Building coherence in research on mathematics teacher characteristics by developing practice based approaches. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 45*, 583-594.

ANEXO

Resolviendo el problema de las cuerdas – Omar:		
Se colocan n puntos sobre una circunferencia. ¿Es posible determinar el número de todas las cuerdas que pueden trazarse?		
Episodio 1		
E1	E1[1]	La mayoría de trabajos realizados en el campo de la matemática, apuntan a encontrar estrategias para la enseñanza de diferentes conceptos dentro del aula, con el objeto de que el estudiante produzca conocimiento matemático.

	E1[2]	“El estudiante aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana.	
	E1[3]	Este saber, fruto de la adaptación del estudiante, se manifiesta por respuestas nuevas que son prueba del aprendizaje” Brousseau (1986).	
Episodio 2			
E2	Resolver el siguiente problema:		
	E2[1]	Se colocan (n) puntos sobre una circunferencia. ¿Es posible determinar el número de todas las cuerdas que pueden trazarse?	
		E2[1]_a	Recordemos que cuerda es un segmento que une dos puntos marcados en la circunferencia en línea recta; como es conocido una circunferencia está conformado por infinitos puntos, y a partir de éstos se pueden trazar también infinitas cuerdas, que pasan por el área del círculo.
		E2[1]_b	La cuerda parte desde un punto, y llega a otro, entonces si hay ∞ puntos, entonces el número de cuerdas estaría dado por ∞ .
		E2[1]_c	Sin embargo si en una circunferencia se dan unos determinados puntos, y se pide que se determine el número de cuerdas, es posible hallarlas si esa cantidad de puntos es un número entero positivo.
	E2[2]	Presentar las técnicas o diferentes maneras en las cuales puede ser resuelto	
		E2[2]_a	Una de las técnicas más comunes es trazar manualmente las cuerdas en un círculo; pero esto lo podemos realizar cuando el número de puntos es pequeño. Me atrevo a decir cuando el número es menor de 20 puntos.
		E2[2]_b	Ejemplo con un polígono regular
		E2[2]_c	 
		E2[2]_d	La otra manera sería utilizando la sucesión que se puede hallar, teniendo en cuenta que se conoce, y se maneja con regularidad en el aula de clase, el número de diagonales que se pueden encontrar en un polígono regular inscrito en una circunferencia.
		E2[2]_e	Esta sucesión está dada de la siguiente forma: $D = \frac{n}{2}(n-3)$, donde (n) me representa el número de los lados del polígono inscrito.
		E2[2]_f	Si conozco esto puedo decir que el número de cuerdas que se pueden trazar puede ser conocido, teniendo en cuenta que los puntos marcados pueden ser equidistantes uno del otro o no; debido a que las diagonales en un polígono irregular se marcan de la misma manera como en los regulares, solamente que no son equivalentes.
		E2[2]_g	Entonces el número de cuerdas trazadas teniendo en cuenta las diagonales, estaría dada de la siguiente manera: *cuerdas*=*D*+*n*, donde (D), número de diagonales, y (n), número de puntos que es igual al número de lados del polígono; $cuerdas = \frac{n}{2}(n-3) + n = \frac{n}{2}(n-1)$
		E2[2]_h	Sabiendo que esta es la sucesión puedo hallar el límite $lim_{n \to x}\left(\frac{n}{2}(n-1)\right)$. Donde (x) es cualquier entero positivo.
	E2[3]	¿A qué nivel escolar se le puede proponer como actividad de trabajo?	
		E2[3]_a	Considero que la primera técnica es probable aplicarla en los grados de la secundaria 9° grado, cuando se enseñe los polígonos con sus diagonales, o cuando se mencione en geometría las cuerdas.
		E2[3]_b	En este grado se enseña un poco de sucesiones, al menos la introducción, se entabla alguna relación entre la parte algorítmica con la gráfica, necesaria para una mejor interpretación de la situación.
		E2[3]_c	Respecto a la segunda técnica se puede aplicar a estudiantes de finales de la secundaria o principios de la universidad, cuando se vean límites de sucesiones. Con este concepto aprendido se facilita más hallar el total de cuerdas de determinados puntos.
Episodio 3			
E3	REFERENCIAS		
	E3[1]	Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática. Facultad de matemática, astronomía, física. Universidad Nacional de Córdoba	

LA VARIABLE SINTÁCTICA EN EL PASO DEL LENGUAJE NATURAL AL ALGEBRAICO

The syntactic variable in the passage from natural to algebraic language

Carlos Soneira, María José Souto, Ana Dorotea Tarrío

Universidad de A Coruña

Resumen

En este trabajo se analiza desde el punto de vista cognitivo el cambio de registro semiótico desde el lenguaje natural al algebraico. La dificultad del proceso viene determinada, entre otras, por dos tipos de variables, una ligada a la complejidad sintáctica del lenguaje natural, y otra a la necesidad que en ocasiones existe de movilizar objetos matemáticos aludidos solo implícitamente y que a su vez provoca cambios en la organización sintáctica de un registro a otro. Con una muestra de estudiantes universitarios de primer curso de grado aplicamos técnicas de contraste de hipótesis y medidas no paramétricas de tamaño del efecto para estudiar la incidencia de las dos variables, tanto por separado como condicionadas entre sí. Los resultados muestran que ambas influyen en el proceso, si bien de forma distinta y con algunas relaciones entre sí. Se discute la aplicación al diseño de instrucción.

Palabras clave: *representación semiótica, conversión, complejidad sintáctica.*

Abstract

This article analyzes the change of semiotic register from natural to algebraic language from a cognitive point of view. The difficulty of the process is determined by, among others, two kind of variables, one linked to the syntactic complexity, and other to the necessity of mobilizing implicit mathematical content and dealing with changes in the syntactic organization between registers that sometimes occurs. Over a sample of first course university degree students we apply non parametric hypothesis test and effect size in order to study the influence of each variable, both separately and conditional. The results indicate that both variables have influence on the process but in a different way and with some relations between each other. Applications to instruction design are discussed.

Keywords: *semiotic representation, conversion, syntactic complexity.*

INTRODUCCIÓN

En Educación Matemática, las representaciones y los sistemas de representación semiótica juegan un papel fundamental en distintos marcos teóricos, como el PMA (Dreyfus, 1991), ELOS (Socas, 2007), EOS (Font, Godino y D'Amore, 2007), o el enfoque cognitivo de Duval (1993, 2006). De las varias interpretaciones de la noción de representación, nos centraremos en la de "cuerpo lingüístico, o sistema de lenguaje" (Goldin y Janvier, 1998). Esta interpretación interviene en el proceso de aprendizaje, pues aun asumiendo la naturaleza mental del conocimiento matemático, los registros semióticos son fundamentales para la formación y aprehensión de las propias representaciones internas. En este sentido, Golding (1998) propone una correspondencia explícita entre una representación externa y la una interna concebida como la competencia cognitiva para construir y manipular la externa; Duval (2006) desde un enfoque cognitivo sostiene que las representaciones semióticas útiles en matemáticas son representaciones semióticas interiorizadas.

Por otro lado, varios autores ponen de manifiesto la especial relevancia del lenguaje verbal natural en el aprendizaje de las matemáticas. Es el más usado por el docente durante las clases para dar

Soneira, C., Souto, M. J., Tarrío, A. D. (2014). La variable sintáctica en el paso del lenguaje natural al algebraico. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 563-572). Salamanca: SEIEM.

explicaciones sobre el propio libro de texto; el estudiante lo usa para comunicar sus ideas y la verbalización del pensamiento propio aporta al estudiante feedback sobre el estado del aprendizaje (Pimm, 1987).

Este trabajo continúa y completa el estudio iniciado en (Soneira, Souto y Tarrío, en preparación) donde, mediante un estudio intra-sujeto se analizan procesos cognitivos que tienen lugar cuando un sujeto intenta expresar en lenguaje algebraico un enunciado dado en lenguaje verbal natural. En concreto se discute la relación entre la competencia para movilizar mentalmente resultados matemáticos no mencionados explícitamente en el enunciado verbal pero esenciales para obtener la expresión algebraica, y la competencia para manejar estructuras sintácticas complejas en lenguaje natural. Como resultado de (Soneira et al, en preparación) se aprecian diferencias estadísticamente significativas en el desempeño de la tarea de cambio de registro en función de si hay que movilizar o no resultados implícitos, que la complejidad sintáctica sólo afecta significativamente al proceso de cambio cuando no es necesario movilizar resultados implícitos, y que las que las dificultades asociadas a la movilización de resultados son mucho mayores que las asociadas a la sintaxis. En el presente trabajo realizamos un estudio inter-sujeto por el siguiente motivo: en el diseño intra-sujeto, para limitar el efecto de la variable individuo, cada sujeto realiza el cambio de registro de todos los enunciados, pero esto pudiere distorsionar los resultados por el efecto de la memoria y la práctica, al ser posible que a medida que el sujeto realiza sucesivos intentos de obtener una misma expresión algebraica para enunciados distintos, el desempeño mejore también por la práctica y no solo por tipo de enunciado. En el presente estudio cada sujeto debe obtener una expresión algebraica una única vez, para eliminar el efecto de la práctica. La comparación de resultados inter e intra-sujeto permitirá observar el efecto de la práctica y la memoria a corto plazo.

MARCO TEÓRICO

Analizamos el desempeño en la realización de una tarea desde un punto de vista cognitivo, siguiendo los trabajos de Duval (1993, 1995, 2006) donde se sostiene que la actividad cognitiva requerida en matemáticas se distingue de la de otras áreas por presentar tres características propias. Destacamos la conocida como paradoja de Duval, la cual expone que los objetos matemáticos, en contraposición con los de las ciencias empíricas, no son perceptibles directamente a través de los sentidos, solo es posible acceder a ellos a través de las representaciones semióticas. Por otra parte, los objetos no deben confundirse con las representaciones semióticas, pero entonces “(...) Cómo pueden los aprendices evitar confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas si sólo pueden relacionarse con ellos mediante representaciones semióticas?” (Duval, 1993).

Para Duval (2006) la importancia de las representaciones semióticas en la articulación del pensamiento matemático radica en su capacidad de transformación, punto compartido por otros autores como Dreyfus (1991) quien sitúa la capacidad para integrar representaciones y pasar de una a otra con facilidad como la última fase del proceso de aprendizaje. Aunque la noción de representación de (Dreyfus, 1991) incluye a las mentales, no tenemos noticia de la actividad mental del sujeto sino a través de las representaciones externas, y las modificaciones realizadas en estas pueden vehicular modificaciones conceptuales (Socas, 2007). Por ello en este trabajo analizamos representaciones semióticas producidas por los sujetos y el proceso de cambio de registro, y nos fijamos en la movilización de resultados matemáticos implícitos, pues para ello el sujeto necesita distinguir el objeto representado de la representación semiótica concreta que se le presenta.

Para realizar nuestro análisis cognitivo usamos la distinción de dos tipos de transformaciones de representaciones semióticas (Duval, 2006): los tratamientos y las conversiones. Los primeros son transformaciones de representaciones dentro del mismo registro, como sacar factor común y reagrupar en un polinomio. Una conversión consiste en un cambio de registro de representación sin variar los objetos denotados, como expresar mediante un número racional la fracción representada con un modelo de área. La conversión es cognitivamente más compleja que el tratamiento; no basta con conocer las reglas sintácticas internas del registro, sino distinguir la información esencial que define el objeto representado y trasladar al registro imagen solo esa información desechando aspectos superfluos impuestos por el registro origen, lo que presupone cierto grado de comprensión global del objeto.

Los registros fuente e imagen determinan los procesos cognitivos que tienen lugar en la conversión, pero se identifican tres factores con carácter general (Duval, 1995):

- La existencia o no de una correspondencia uno a uno entre todas las componentes significativas (símbolos, palabras) de los contenidos de las representaciones fuente e imagen.
- El carácter unívoco o no de la elección para cada componente significativa de la representación imagen.
- Para las componentes significativas que pueden aplicarse, el orden de organización en la representación fuente se mantiene o cambia en la representación imagen.

Si eses tres factores tienen respuesta afirmativa se dice que la conversión es congruente, y no congruente en caso contrario. Con respecto al presente trabajo, para realizar conversiones congruentes puede ser suficiente con conocer las reglas sintácticas de ambos registros, con lo que la complejidad sintáctica, medida según los índices del apartado siguiente, tendría a priori un papel destacado como variable condicionante de la tarea. Por su parte, en el caso no congruente, para realizar la conversión es necesario además reconocer los objetos representados y movilizar contenidos matemáticos presentes solo de forma implícita en el enunciado, lo que consideramos una competencia matemática diferente del mero manejo sintáctico y una variable independiente de la anterior.

Índice de complejidad sintáctica

Para medir la complejidad sintáctica de los enunciados adaptamos los índices introducidos por Salvador (1985) adaptándolos a la norma actual de la Real Academia de la Lengua (RAE, 2010). En la definición aparecen las nociones de enunciado y oración. Siguiendo la gramática actual (RAE, 2010), consideramos que un enunciado es el mensaje mínimo o unidad de comunicación que constituye por sí mismo un mensaje autónomo; y una oración es una unidad de predicación que pone en relación un sujeto con un predicado verbal, siendo simple si consta de un único predicado verbal, o compuesta en caso contrario.

Tenemos:

$$\text{Índice de complejidad numérica: ComNum}=10\ O/E$$

con O el número de oraciones y E el número de enunciados.

$$\text{Índice de complejidad cualitativa: ComCua}=(S+2(Y+Co)+3S_1+4\ S_2+5\ S_3)/E$$

con S el número de oraciones simples, Y el de yuxtapuestas, Co el de coordinadas, S_i el de subordinadas de grado *i* y E el número de enunciados. Para clasificar los enunciados consideramos que la complejidad es baja si ComNum ≤ 2, ComCua≤ 20, y alta si ComNum ≥ 40, ComCua ≥ 5. Para establecer estos límites, los inferiores se fijan al constatar los autores la dificultad de redactar enunciados de conversión no congruente para estudiantes universitarios con valores más bajos y tampoco encontrarlos en la literatura; para los superiores se recogen las consideraciones de (Salvador, 1984) sobre la dificultad práctica de mantener la claridad y coherencia de expresión para valores superiores.

OBJETIVOS

La competencia para manejar estructuras sintácticas complejas por una parte, y la de movilizar resultados matemáticos implícitos por otra, parecen a priori diferentes; la falta de conocimientos matemáticos puede imposibilitar la movilización aun cuando el manejo de la sintaxis sea bueno. Pero ambas son necesarias en el proceso de conversión dependiendo del enunciado concreto. Este trabajo, continuando el estudio (Soneira et al, en preparación) pero ahora en una situación de muestras independientes, pretende estudiar si el desempeño en la realización de una tarea de conversión del lenguaje natural al algebraico varía dependiendo de la necesidad de poner en práctica las competencias indicadas y si existe relación entre ambas. En concreto nos planteamos:

- ¿Existen diferencias significativas en el desempeño de la conversión en función de si la conversión es congruente o no? ¿Y en función de la complejidad sintáctica del enunciado en lenguaje natural?
- ¿Supone una mayor dificultad el carácter no congruente o la complejidad sintáctica alta?
- ¿La influencia del carácter congruente o no de la conversión es la misma siempre o depende de la complejidad sintáctica del enunciado?
- ¿La influencia de la complejidad sintáctica alta es la misma siempre o depende del carácter congruente o no de la conversión?
- ¿Influyen la práctica y la memoria inmediata en la realización de tareas de conversión?

MÉTODO

Participantes

En el estudio participaron de forma voluntaria 46 estudiantes de primer curso de Grado en Ingeniería de Edificación y del Grado en Ingeniería Informática. Los planes de estudio de cursos anteriores cubren todos los contenidos requeridos y los estudiantes están familiarizados con el proceso de conversión del lenguaje natural al algebraico. Ninguno de ellos había participado en el estudio intra-sujeto anterior. Se formaron cuatro poblaciones con un tamaño muestral de 21 sujetos como mínimo para cada población, escogiendo a los sujetos de forma aleatoria, y a cada una se le aplicó un cuestionario diferente.

Instrumento

En el estudio intra-sujeto se diseñó un cuestionario consistente en 20 enunciados verbales para realizar la conversión y de él se extrajeron cuatro cuestionarios con 5 ítems, agrupando los ítems de un mismo tipo en función del carácter congruente “C” o no “N” y de la complejidad sintáctica alta “A” o baja “B”. Combinando esta clasificación, los enunciados pueden ser NA, NB, CA o CB. De cara a posteriores análisis, diremos que un enunciado es C o N dependiendo del carácter congruente o no de la conversión, sea cual sea su complejidad sintáctica; y que es B o A dependiendo de su complejidad sintáctica, tanto si su conversión es congruente como si no.

A cada una de las poblaciones se le propuso sólo uno de los 4 cuestionarios diferentes, es decir, realizaron la conversión de un único tipo de enunciados NA, NB, CA o CB.

El cuestionario aplicado en el estudio intra-sujeto se diseñó partiendo e de un cuestionario inicial con 64 enunciados, sometido a un panel de expertos formado por varios licenciados en matemáticas docentes en ejercicio en secundaria y universidad. Se preguntó sobre la idoneidad, claridad y dificultad de cada ítem y el tiempo estimado para la realización de la tarea. A partir de su opinión se escogieron 24 ítems, con los que se realizó una prueba piloto con 8 estudiantes de 1º de Grado de Ingeniería Informática, quedando al final 20 ítems.

La dificultad de la conversión está condicionada por los objetos matemáticos concretos aludidos en el enunciado; de los que el sujeto puede tener una mayor o menor comprensión. Para aliviar este problema, cada objeto aludido en un tipo de enunciado también lo es en los otros. La Tabla 1 muestra un mismo objeto matemático en un ítem de cada tipo.

Tabla 1. Ejemplos tipos de ítem.

Tipo	Enunciado
NA	Expresa con una única ecuación que un punto del espacio verifica que alguna de sus coordenadas es tal que el cinco es un divisor de ella.
NB	Expresa con una única ecuación la siguiente propiedad de un punto del espacio: el siete es un divisor de alguna de sus coordenadas.
CA	Expresa mediante una ecuación que un punto del espacio tiene la propiedad de que si realizamos el producto de sus coordenadas entonces el resultado es igual a tres multiplicado por un número.
CB	Expresa mediante una ecuación la siguiente propiedad de un punto del espacio: el producto de sus tres coordenadas es igual a cuatro multiplicado por otro número.

Para evitar equívocos se impuso la condición de no usar cuantificadores en las expresiones algebraicas; de lo contrario algunos enunciados N pasarían a ser C. Se concedió un máximo de 3 minutos por ítem.

Sobre los criterios de corrección, se estableció antes de pasar la prueba una primera categorización de las posibles respuestas con niveles jerárquicamente ordenados, pero se ha modificado después de intentar aplicarla a los resultados reales, al observarse que los sujetos podían captar aspectos de un nivel y no de otro y viceversa. Tanto con los resultados de la prueba piloto como de la final, cada uno de los autores valoró independientemente todas las respuestas, posteriormente se pusieron en común y discutieron con detalle esas valoraciones para fijar unos criterios unificados. Se otorga de cero a un punto por plasmar alguno de los siguientes aspectos:

- Asignación de variables y/o símbolos.
- Identificación y uso correcto de operaciones y relaciones de igualdad y no igualdad.
- Identificación de conceptos implícitos o explícitos en el enunciado.

Además, si la expresión algebraica final es formalmente correcta se concede otro punto. Sobre estos criterios, los dos primeros aspectos se basan en el catálogo de errores expuesto por Cerdán (2008), quien clasifica los errores en tres categorías: en el uso de letras, que se relacionan con el primer aspecto del presente estudio; en expresiones algebraicas, y en igualdades; estos dos últimas categorías de (Cerdán, 2010) se relacionan con el 2º aspecto del presente trabajo. Dadas las características concretas del estudio, introducimos el tercer aspecto, pues en la tarea de conversión, sobre todo en el caso no congruente, es necesaria la movilización mental de resultados implícitos.

Exponemos a continuación algunos ejemplos de respuestas obtenidas para ilustrar la aplicación de los criterios en la Tabla 2.

Enunciado tipo NA:

"Expresa mediante una ecuación la propiedad que cumple un número cuyas tres cifras son tales que la cifra de las unidades más la de las decenas por diez más la de las centenas por cien es igual a cuatro veces la suma de la cifra de las unidades más diez por la de las decenas"

Respuesta (Figura 1):

$$a + b \cdot 10 + c \cdot 100 = 4a + 10 \cdot b. \qquad 1$$

Figura1

Se asignan correctamente variables pero no se tienen en cuenta las diferencias en la sintaxis de los dos registros sobre la prevalencia de las operaciones; y no se moviliza la propiedad distributiva.

Enunciado tipo NA:

> "Expresa mediante una única condición en lenguaje algebraico la propiedad que cumple un punto del espacio el cual verifica que ninguna de sus coordenadas es nula."

Respuesta (Figura 2):

1) $x \cdot y \neq 0$ 4

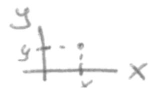


Figura 2

Se usa el registro gráfico como puente entre el lenguaje natural y el algebraico. La propiedad movilizada "dos números reales son distintos de cero si y solo si su producto es distinto de cero" no es eminentemente geométrica, pero la inclusión de la expresión "punto del espacio" parece llevar al sujeto a usar el registro gráfico.

Enunciado tipo NB:

> "Expresa con una única ecuación la siguiente propiedad de un punto del espacio: el siete es un divisor de alguna de sus coordenadas"

Respuesta (Figura 3):

7) $7/x \neq 0$ 0

Figura 3.

El sujeto no moviliza la propiedad "un producto de enteros es divisible por un número primo si y solo si alguno de los factores lo es", y toma el caso particular de que lo sea la primera coordenada. No identifica correctamente variables ni operaciones. Parece intentar traducir literalmente el enunciado, y al no ser posible solo plasma un caso particular.

Análisis estadístico

Consideramos dos variables independientes: "Tipo de conversión", con valores N y C, y "Complejidad Sintáctica" con valores A y B; y una variable dependiente "Puntuación" con valores en [0,4]. Las variables independientes pueden interpretarse como factores con dos niveles cada uno. Para realizar el análisis tomamos de forma aleatoria 21 sujetos de cada una de las 4 poblaciones, en una situación de muestras independientes.

Al testar los supuestos de un ANOVA de dos factores, las pruebas de Kolmogorov-Smirnov y Shapiro-Wilks indican que ninguna de las poblaciones es normal. Tienen la misma varianza (prueba de Levene), pero las formas de sus distribuciones no son siempre iguales entre sí. Por ello descartamos el uso de ANOVA. Entonces, en un contexto no paramétrico, para aprovechar la información al menos ordinal usamos la prueba de Mann-Whitney para decidir si hay diferencias significativas entre las distribuciones según el tipo de enunciado. En todas estas pruebas rechazamos la hipótesis inicial si la significatividad asintótica es < 0,05. Para estudiar el tamaño del efecto empleamos la curva COR, interpretando el área bajo la curva como la probabilidad de que una puntuación seleccionada aleatoriamente de una población sea mayor que una puntuación seleccionada aleatoriamente de otra población distinta.

Posteriormente, para estudiar la dependencia condicional en este contexto no paramétrico, seguimos la siguiente estrategia: primero transformamos en dicotómica la variable "Puntuación" asignando un "Insuficiente" a todas aquellas respuestas con puntuación menor que 3, y un "Suficiente" a las otras; a continuación aplicamos la prueba de Cochran y Mantel-Haenszel para contrastar la hipótesis de independencia condicional entre las variables factor y respuesta una vez controlado el efecto del estrato. Para determinar si la relación de dependencia es la misma en todos los estratos usamos los estadísticos de Breslow-Day y de Tarone.

Todos los cálculos se realizaron con el Programa IBM SPSS Statistics 21

Tabla 2. Ejemplos aplicación criterios corrección

	Figura1	Figura2	Figura3
Asignación variables y símbolos	Si	Si	No
Operaciones y relaciones de igualdad y no igualdad	No	Si	No
Identificación de conceptos en el enunciado	No	Si	No
Expresión formal correcta	No	Si	No

RESULTADOS

Cuando no haya lugar a confusión, llamaremos también C, N, B, A, CB, CA, NB, y NA respectivamente, a las variables definidas como la puntuación obtenida al realizar una conversión de un enunciado del tipo correspondiente. En la Tabla 3 se recogen los estadísticos descriptivos para ofrecer una primera visión general.

Tabla3. Media (M), mediana (Me), desviación típica (De) según tipo de enunciado

	NA	NB	CA	CB	N	C	A	B
M	1,1476	1,2095	2.0671	3.4000	1.1786	2.7336	1.6074	2.3048
Med	1,0000	1,0000	2,4000	3,2000	1,0000	3,0000	1,2000	2,4000
Des	0,85418	0,89772	1.10692	.63246	.86604	1.11704	1.08173	1.34798

Sobre la primera pregunta expuesta en el apartado OBJETIVOS acerca existencia de una diferencia significativa en las distribuciones de las puntuaciones en los diversos cuestionarios, la Tabla 4 recoge los resultados de la prueba de Mann-Whitney, indicando que existen diferencias significativas en todos los casos excepto al comparar los resultados según la complejidad sintáctica para enunciados de conversión no congruente.

Tabla 4. Contraste de hipótesis. H_0 = Distribuciones iguales

	(NA,NB)	(CA,CB)	(NA,CA)	(NB,CB)	(N,C)	(A,B)
H_0	Aceptar	Rechazar	Rechazar	Rechazar	Rechazar	Rechazar

En cuanto a la segunda pregunta de los objetivos, el cálculo del tamaño del efecto mediante la curva COR (Tabla 5) indica que las mayores dificultades dependen del carácter congruente de la conversión, algo también sugerido por los descriptivos de la Tabla 3.

Tabla 5. Tamaño del efecto mediante COR

	P(B>A)	P(C>N)	P(NB>NA)	P(CB>CA)	P(CB>NB)	P(CA>NA)
Área bajo COR	0,655	0,844	0,527	0,847	0,964	0,726

Con respecto a las preguntas tercera y cuarta del apartado OBJETIVOS, es decir, la dependencia condicional, los estadísticos de Cochran y Mantel-Hansel permiten rechazar la hipótesis de independencia condicional de la variable “Puntuación” en función del carácter congruente o no de la conversión, una vez controlado el efecto del estrato “Complejidad sintáctica”. Por su parte las pruebas de Tarone y Breslow-Day llevan a aceptar la hipótesis de que la relación de dependencia es la misma para enunciados A y B. Lo mismo ocurre con la dependencia condicional de la “Puntuación” en función de la “Complejidad sintáctica” controlando el efecto del estrato “Tipo de conversión”, la dependencia existe pero es la misma para enunciados N y C.

Finalmente, sobre la quinta pregunta, la comparación de las tablas de descriptivos correspondientes a ambos estudios sugiere que la práctica y la memoria inmediata sí tienen efecto en las puntuaciones obtenidas, los sujetos parecen mejorar con la práctica.

CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

Tomando las puntuaciones exactas, concluimos que existen diferencias significativas en las distribuciones en función del carácter congruente y la complejidad sintáctica, excepto al restringirnos a enunciados N y analizar la influencia de la sintaxis, esto es, la distribución de las puntuaciones de enunciados NA es la misma que las de los NB. Con estas consideraciones respondemos afirmativamente a la primera pregunta del apartado OBJETIVOS.

En cuanto a qué variables influyen más en la dificultad de la conversión (segunda pregunta), los resultados muestran con claridad que lo determinante es la necesidad o no de movilizar objetos matemáticos implícitos en el enunciado, en concordancia con lo indicado por Duval (1995, 2006) sobre la especificidad de la actividad cognitiva en matemáticas.

Si tenemos en cuenta en vez de las puntuaciones exactas, solo si el sujeto alcanza un nivel adecuado en la realización de conversiones, concluimos también que el desempeño está condicionado por el carácter congruente. Al cuantificar la dependencia según los estratos dados por el índice de complejidad sintática, esta es la misma para los enunciados A y B. Condierando la variable sintáctica como factor, vemos que la puntuación también depende de ella, pero de nuevo la intensidad de la dependencia es la misma para enunciados N y C. Respondemos así a las preguntas tercera y cuarta de los OBJETIVOS.

En la parte de discusión del estudio, el hecho de que las distribuciones comparadas varíen siempre, excepto al comparar puntuaciones en enunciados NA y NB, sugiere que la no congruencia es un obstáculo de tal magnitud que la complejidad sintáctica pasa a un segundo plano. Además, una vez que el contraste de hipótesis nos asegura que las diferencias son estadísticamente significativas, si tenemos en cuenta también los descriptivos reflejados en la Tabla 3 para estas muestras concretas, y nos fijamos al mismo tiempo en cómo varía el tamaño del efecto dependiendo del par de variables considerado, vemos que la influencia de la variable sintáctica es alta en general y restringiéndose a enunciados congruentes, pero muy limitada si consideramos solo enunciados N. Esto sugiere que la variable sintáctica debe estudiarse por separado según el carácter congruente y no de forma global.

Diversos autores, como Duval (2006) o Dreyfus (1991) relacionan la capacidad para pasar de un registro semiótico a otro con el grado de comprensión del objeto matemático representado. Pero la necesidad de cierto grado de comprensión global del objeto existe de veras si la conversión es no congruente, pues en el caso congruente puede ser suficiente con conocer las reglas sintácticas de ambos registros y los objetos a comprender serían más bien los propios símbolos y estructuras sintácticas en el sentido indicado por Goldin (1998). Con respecto a esto, los resultados sobre el tamaño del efecto muestran que la probabilidad de convertir mejor un enunciado congruente que uno no congruente es mayor si ambos enunciados son B que si ambos son A, es decir, los enunciados B hacen más evidentes esas diferencias, pasando de P(CA>NA)= 0,726 a P(CB>NB)=0,964. En la Tabla 3 también vemos que, para las muestras concretas las diferencias entre las medias de NB y CB son mucho mayores que entre NA y CA. Tales diferencias pueden deberse a que la dificultad añadida por la complejidad sintáctica obstaculiza la comprensión ya con enunciados C, siendo razonable pensar que también con los N. Si eso fuese así, los enunciados B serían más adecuados para evaluar el grado de comprensión del objeto representado por parte del sujeto, y eso nos lleva a sugerir el uso por parte del docente de enunciados B en detrimento de los A durante las clases de matemáticas, tanto para ofrecer explicaciones sobre conceptos y realizar preguntas orientadas en la construcción del conocimiento, como para proponer actividades de evaluación.

Al comparar el presente estudio con el intra-sujeto anterior, los resultados de inter-sujeto confirman los del intra-sujeto pero aportan más información. Sobre todo al comparar enunciados CA y CB, porque con el anterior diseño los datos muestrales no permitían aprovechar la información ordinal debido a la ausencia de simetrías en las distribuciones. Sin embargo, con el diseño inter-sujeto, al no necesitarse la hipótesis de simetría, sí aprovechamos toda la información. Además, en el estudio anterior tampoco se realizaba un contraste de hipótesis sobre la dependencia condicional según estratos como en las peguntas tercera y cuarta del estudio presente. Por otra parte, en relación a la quinta pregunta del apartado OBJETIVOS, la comparación de resultados sugiere que la práctica al realizar tareas de conversión donde los conceptos y resultados matemáticos implicados se repiten en distintos ítems, sí mejora las puntuaciones. De hecho, los estadísticos descriptivos sugieren que aún en el caso de que el sujeto no sea capaz de realizar la conversión de un enunciado N, los procesos cognitivos que tienen lugar en su mente al intentarlo, son útiles a la hora de convertir enunciados C donde intervengan los mismos conceptos y resultados matemáticos.

Sobre las limitaciones del estudio señalamos especialmente que los cuestionarios aplicados están orientados a estudiantes de primer curso de grado que siguieron el bachillerato tecnológico, por lo que las conclusiones no pueden extenderse más allá de esa fase de desarrollo cognitivo y formación previa. Sería incluso en este caso necesario realizar nuevas pruebas a fin de ampliar la muestra. En cuanto a las perspectivas de futuro, consideramos interesante la realización de estudios similares con poblaciones de otro nivel educativo o con estudiantes de edades similares a los de este estudio pero con una formación previa diferente.

Referencias

Cerdán, F. (2008). Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico. Un catálogo de errores. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 257-272). Badajoz, España: Sociedad Extremeña de Educación Matemática “Ventura Reyes Prósper” y Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

D'Amore, B. (2007). Mathematical objects and sense. How semiotic transformations change the sense of mathematical objects. *Acta Didactica Universitatis Comenianae*, 7, 23-45.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Nueva York, Dordrecht, Los Países Bajos: Kluwert Academic Publishers.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* 5, 37-65.

Duval, R. (1995). Sémiois et pensée humaine. Registres sémiiotiques et apprentissages intellectuels. Berna, Suíza: Peter Lang.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103-131.

Font, V., Godino, J., y D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the learning of Mathematics*, 27(2) 2-7.

Goldin, G. (1998). Representational systems, Learning and Problem Solving in Mathematics. *Journal of Mathematical Behaviour,* 17(2), 137-165.

Goldin, G. y Janvier, C. (1998). Representations and the psychology of mathematics education. *Journal of Mathematical Behaviour,* 17(1) 1-4.

Pimm, D. (1987). Speaking mathematically: Communication in mathematics classrooms. Londres, Reino Unido: Routledge & Kegan Paul.

Real Academia Española (2010). Nueva gramática de la lengua español. Manual. Madrid, España: Espasa.

Salvador F. (1985). Los índices de complejidad sintáctica, instrumentos de evaluación de la expresión escrita: Estudio experimental en el ciclo medio de EGB, *Enseñanza*, 3, 59-81.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. *Investigación en Educación Matemática XI*, 19-52.

Soneira, C., Souto. M. J., y Tarrío, A. D. (en preparación). Análisis cognitivo del proceso de conversión del lenguaje natural al algebraico.

SIGNIFICADOS CONFLICTIVOS DE ECUACIÓN Y FUNCIÓN EN ESTUDIANTES DE PROFESORADO DE SECUNDARIA

Conflictive meanings of the equation and function concepts in secondary school student teachers

Miguel R. Wilhelmi[a], Juan D. Godino[b], Aitzol Lasa[a]

[a]Universidad Pública de Navarra, [b]Universidad de Granada

Resumen

En el marco de una acción formativa sobre reconocimiento de las características del razonamiento algebraico elemental con estudiantes del máster de secundaria, especialidad matemáticas, se detecta que las nociones de función y ecuación interfieren la una en la otra. Así, en situaciones elementales en las que es preciso movilizar una función, identificando las variables independiente, dependiente y regla de correspondencia, los estudiantes interpretan la situación en términos de incógnitas y ecuaciones. Se describen algunas respuestas prototípicas de este fenómeno, el contexto y metodología de la investigación, así como algunas implicaciones para la formación de profesores.

Palabras clave*:* *formación de profesores, significado, variable, ecuación, función, conocimiento epistémico especializado*.

Abstract

Along a training intervention on recognition of elementary algebraic reasoning features by master' students of secondary school mathematics, we observed an interference between the notions of function and equation. Thus, in elementary situations where students should mobilize a function, and identify the independent and, dependent variable and the correspondence rule, students interpret the situation in terms of unknowns and equations. In this paper we describe some prototypical responses where this phenomenon is visible, the context and research methodology, as well as some implications for teacher's education.

Keywords: *teacher's education, variable, equation, function, epistemic specialized knowledge*

INTRODUCCIÓN

Las dificultades de comprensión del concepto de variable por parte de los alumnos que inician el estudio del álgebra en secundaria han sido informadas por diversos autores.

> "Tomamos también en consideración las interpretaciones incorrectas que los estudiantes hacen de la variable, presentes en la literatura. En algunos casos, el estudiante asigna un valor numérico a un símbolo literal (a veces, se basa en su posición en el alfabeto), incluso en los casos en los que debe ser interpretado como número generalizado […]. Además, el estudiante debe interpretar las letras como abreviaturas de los nombres de los objetos" (Chrysostomou y Christou, 2013, 186).

Una de las explicaciones de estas dificultades está en la diversidad de usos que se hacen de las variables en el trabajo matemático (Schoenfeld y Arcavi, 1988). El análisis que hacen estos autores revela la riqueza y multiplicidad de significados del objeto algebraico que designa el término "variable". Estrechamente relacionado con la variable está el concepto de incógnita, el cual para algunos autores se considera como un uso de la variable, pero para otros se entiende como un objeto algebraico diferente.

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D., Lasa, A. (2014). Significados conflictivos de ecuación y función en estudiantes de profesorado de secundaria. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 573-582). Salamanca: SEIEM.

Variable significa algo que efectivamente varia, o que tiene múltiples valores, mientras que incógnita es algo que tiene un valor fijado pero que no se conoce aún. En una ecuación del tipo, $x + 10 = 2x + 5$, la incógnita x se usa como designación de un número específico cuya identidad será desvelada tras el proceso de resolución. En contraste, en la expresión $f(x) = 2x + 1$, la x no refiere a un número específico sino a uno cualquiera de los elementos de un conjunto de números previamente establecido. En las clases de matemáticas estos términos se utilizan en ocasiones informalmente de manera equivalente, pudiendo degenerar en una dialéctica que es necesario controlar (Barwell, 2013). Sin embargo, "el concepto de variable es raramente discutido en asignaturas en la universidad" (Biehler y Kempen, 2013) y, por lo tanto, la ambigüedad propia de la secundaria puede estabilizarse en los estudiantes universitarios.

En este trabajo, se muestra que la confusión entre incógnita y variable es persistente en el tiempo, presentándose tardíamente incluso en estudiantes con una formación científico-técnica que cursan un máster en formación de profesorado de matemáticas de secundaria. Esta confusión radical tendrá implicaciones en la distinción entre ecuación y función, esto es, entre las dos prácticas esenciales en el desarrollo del álgebra y su adquisición (Ely y Adams, 2012):

> "Las dos practicas más importantes […] son (a) el uso de una letra con el significado de un elemento genérico en un conjunto o una cantidad indeterminada, no solo una incógnita, y (b) la representación y cuantificación de una cantidad que cambia en función de otra. Afirmamos que el estudiante debe ser capaz de dar significado a estas dos prácticas en el trabajo con variables." (p.23).

Así, unas de las claves en el paso de la aritmética al álgebra es la superación de una visión restrictiva del álgebra como una aritmética generalizada, según la cual el álgebra es exclusivamente hereditaria de las propiedades aritméticas, "pero con letras". Así, "las letras [son] simples sustitutos de un número fijo que hay que encontrar" (Lacasta, Madoz y Wilhelmi, 2006). Esta visión facilita un ingreso ágil del álgebra y es comúnmente asumida en el currículo y en los libros de texto.

> "Con el álgebra logramos un dominio más general de los números. Los simbolizamos con letras y operamos con ellas como si fueran números, estableciendo equilibrios […] Cuando se quiere operar con un número aún desconocido o cuando se desea utilizar un número cualquiera en lugar de uno concreto se suelen tomar las letras como sustitutivos de los números." (Colera et al., 1996, 116–119).

Pero pronto, esta visión restrictiva del álgebra como aritmética generalizada debe ser abandonada, debido a los diferentes usos y significados que debe darse al lenguaje algebraico.

> "En matemáticas se utilizan letras para designar números con distinta finalidad. A veces, estos números tienen un valor desconocido que se pretende calcular; otras representan cualquier número y se utilizan para establecer relaciones numéricas. También pueden sustituir a un conjunto de números que verifican un determinada propiedad." (Frías et al., 2003, 72).

La complejidad de los procesos en el tránsito de la aritmética al álgebra en la Educación Secundaria ha llevado a estudios sistemáticos y monográficos, como el impulsado en el seno de la SEIEM (Palarea, Castro y Puig, 2012). Aquí, el objetivo es analizar en qué sentido esta complejidad está adquirida tras una formación técnico-científica universitaria. De manera más precisa, determinar contextos donde los conflictos de significado entre las nociones de incógnita y ecuación, de variable y función, son persistentes. Para abordar este objetivo, antes de la descripción de la experimentación, los resultados y su discusión, se describe brevemente en el marco teórico y metodológico. Se concluye con implicaciones en la formación de profesores.

MARCO TEÓRICO Y PROBLEMA

Para describir e interpretar los hechos didácticos que hemos observado usaremos algunas herramientas del EOS (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2012; Font, Godino y Gallardo, 2013), marco teórico que postula la pluralidad de los significados de los objetos matemáticos dependiendo de los marcos institucionales y contextos de uso. Tales significados son interpretados en términos de los sistemas de prácticas que el sujeto (o la institución) pone en juego ante cierta clase de situaciones-problema.

La realización de las prácticas matemáticas es posible por la intervención de *objetos* (lenguaje, situaciones, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) en sus diferentes *facetas contextuales* (personal / institucional; ostensiva / no ostensiva; ejemplar / tipo; unitaria / sistémica; expresión / contenido) y de *procesos* que posibilitan la emergencia de nuevos objetos.

El reconocimiento, comprensión y articulación de los diversos significados de los objetos, facetas y procesos matemáticos, y de la trama de funciones semióticas implicadas en tales significados, es un componente clave del *conocimiento epistémico especializado* (Godino, 2009) que debe tener el profesor para organizar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En este trabajo, centrado en los significados de incógnita y ecuación, variable y función, se parte de estudios previos de otros autores. Wagner (1983) analiza las diferencias y semejanzas del uso de símbolos literales respecto de los numerales y las palabras; Schoenfeld y Arcavi (1988) desvelan diversos significados para la variable y Bardini, Radford y Sabena (2005) identifican dificultades de estudiantes de secundaria con las nociones de incógnita, variable y parámetro. Aquí se muestra cómo estos significados persisten en titulados de carreras científico-técnicas.

Siguiendo a Freudenthal (1983), Schoenfeld y Arcavi, establecen diez definiciones del término variable y dos concepciones diferentes de dicho objeto: una, como nombres polivantes; otra, como objetos variables. La primera concepción corresponde a “una cantidad que puede asumir un valor de un conjunto especificado de valores”, o bien, “un símbolo que puede ser reemplazado por cualquier elemento de un conjunto determinado” (por ejemplo, $a + 3 = 3 + a$). La segunda concepción refiere algo que “se supone que cambia continuamente… Movimiento de crecimiento o decrecimiento”; o bien, algo que “es capaz de variar en valor” (por ejemplo, épsilon se aproxima a 0).

> “Este uso dual del mismo término variable plantea algunas cuestiones matemáticas y pedagógicas interesantes. Freudenthal deplora la mezcla de las dos ideas. Enfatiza la importancia del sentido original cinemático de la noción de variable, especialmente cuando se va a estudiar las funciones y expresiones similares a “épsilon se aproxima a 0” (Schoenfeld y Arcavi, 1988, 424).

De hecho, el concepto de variable es uno de los aspectos clave en el paso de la aritmética al álgebra.

> “Una dificultad crucial en esta transición del pensamiento algebraico es el concepto de variable. Por ejemplo, los estudiantes que comienzan el álgebra, inconscientes de las múltiples funciones de las letras en las expresiones matemáticas, a menudo solo tratan a una variable como representando una cantidad fija desconocida.” (Ely y Adams, 2012, 20).

Bardini et al. (2005) mencionan resultados de investigaciones previas sobre los significados que atribuyen los estudiantes a las variables (e.g. MacGregor, & Stacey, 1993; Trigueros, & Ursini, 1999; Bednardz, Kieran, & Lee, 1996). Así, sostienen los autores que “uno de tales significados consiste en concebir una variable como un número indeterminado de un cierto tipo: no es un número indeterminado en sí mismo. Para muchos estudiantes, es simplemente un número temporalmente indeterminado cuyo destino es convertirse en determinado” (p. 2-129).

Como hemos visto más arriba, este planteamiento viene a veces reforzado en algunos desarrollos del currículo y en libros de texto y en estrategias didácticas para su enseñanza, cuya sentencia prototípica sería “el álgebra es como la aritmética, pero en lugar de números se manipulan letras”. Además, hay que recordar que, originariamente, el método cartesiano estaba fundado en la premisa de que los “segmentos desconocidos” debían ser tratados “como si fueran conocidos” (Descartes, 1886, 3) y, por lo tanto, la propia noción de incógnita guarda una identificación preclara con “un número escondido que hay que determinar”. Hay pues razones cognitivas, instruccionales y epistémicas que justifican la dificultad radical en la adquisición de la noción de variable y su uso y significados en contextos diferenciados.

POBLACIÓN, MUESTRA, CUESTIONARIO Y ANÁLISIS A PRIORI

Estudiantes del Máster en Profesorado de Educación Secundaria, especialidad Matemáticas. La formación inicial de estos estudiantes es técnica-científica; en general, ingenieros de diferentes procedencias, físicos y, naturalmente, matemáticos. Aunque en menor número, también realizan la especialidad algunos arquitectos o estudiantes de economía, que superan alguna prueba específica de ingreso o aportan complementos formativos adicionales.

El cuestionario ha sido resuelto por 46 estudiantes de dos universidades españolas, a los cuales se les propuso un taller de reflexión sobre las características del razonamiento algebraico elemental (RAE). La acción formativa comprendía dos momentos:

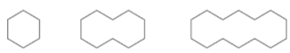
1. Resolución individual por los estudiantes de un cuestionario sobre conocimientos matemáticos y didácticos acerca del RAE por espacio de 2 horas.
2. Análisis de las respuestas dadas e institucionalización de las características del RAE (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014), con énfasis en la articulación de dicho razonamiento entre los niveles de educación primaria y secundaria.

En este trabajo se analizan las respuestas de los estudiantes a tres cuestiones incluidas en el cuestionario, que requieren poner en juego los conceptos de ecuación y función. En la figura 1 se muestran tres tareas propuestas a los estudiantes del Máster en Profesorado de Matemáticas (EPM) que han permitido revelar conflictos de significado de los conceptos de ecuación y función.

Tarea 1. Un profesor propone el siguiente problema a sus alumnos:
En una tienda venden el kg de peras a 2 € y cobran 10 céntimos de euro por la bolsa. ¿Cuánto costaría una bolsa de 4 kg de peras?
a) Enuncia una variante del problema que pueda servir para iniciar el estudio de las funciones lineales.
b) Resuelve el problema que enuncies e indica los conocimientos algebraicos que se usan.
Tarea 2. Analiza las siguientes expresiones y contesta:

1. $4x + 5 = 25$
2. $y = 2x + 1$
3. $P = 2c + 2l$

a) Describe la interpretación que haces de cada una de las expresiones anteriores.
b) Enuncia tres problemas que se puedan proponer a alumnos de primaria cuya solución lleve a plantear estas expresiones.
Tarea 3. Considera la siguiente secuencia de figuras.



a) Representa los dos términos siguientes de la secuencia e indica el número de segmentos necesarios para construir cada una. Explica cómo lo haces.
b) ¿Cómo cambiarías el enunciado de la tarea para inducir algún procedimiento de resolución que ponga en juego conocimientos de tipo algebraico?
c) ¿Cuáles serían tales conocimientos algebraicos?

Figura 1. Tareas que revelan conflictos de significado de los conceptos de ecuación y función

A continuación se describen los comportamientos esperados en cada una de ellas, mostrando, a modo de ilustración, algunas respuestas observadas representativas de estos comportamientos.

Comportamiento esperado en la tarea 1

El estudiante determinará una cuestión que precise:

a) La representación tabular de una función o la determinación de una fórmula. Por ejemplo: “¿Podrías dar una regla para poder calcular el coste de una bolsa con 5, 10,…, kilos de peras?”

b) La definición de una función definida a trozos. Es normal que el precio de un kilo de fruta disminuya si el cliente compra muchos kilos. Es una estrategia clásica para incentivar el consumo. Además, es previsible que se observe que en una bolsa cabe como máximo un número de kilos de fruta y que, por lo tanto, se indique que "cada tantos kilos es necesario adquirir una bolsa adicional" (esto supone introducir una función polinómica en dos variables de grado 1). Así, por ejemplo: ¿cuál es el precio de "x" kilos si en la frutería hay una oferta según la cual se reduce a 2/3 si se compra más de 5 kilos de peras y a la mitad si se compra más 10, sabiendo que en una bolsa caben únicamente 3 kilos de peras?

En la figura 2 se dan dos respuestas que son representativas de los comportamientos "tabular", "fórmula" o "función a trozos" descritos.

<table>
<tr>
<td>Representación tabular y mediante fórmula</td>
<td>La función sería del tipo: $f(x) = 2x + 0{,}10$.
Se le podría añadir al enunciado:
Establece una tabla que me indique ~~el valor precio~~ los euros que necesito si compraré desde 1Kg. de peras a 10 Kg.

b) Estableciendo la función $f(x) = 2x + 0{,}10$.
x = nº de Kilos.

<table>
<tr><td>Kilos</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Euros</td><td>2,10</td><td>4,10</td><td>6,10</td><td>8,10</td><td>10,10</td><td>12,10</td><td>14,10</td><td>16,10</td><td>18,10</td><td>20,10</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Función a trozos</td>
<td>b)
$y = \begin{cases} 2x + 0'10 & 0 < x \leq 3 \\ 1'20\,x + 0'10 & x > 3 \end{cases}$

Hasta los 3kg $y = 2 \cdot 3 + 0'10 = 6'10$ €
Los 4'5 restantes $y = 1'20 \cdot 4'5 + 0'10 = 5'50$ €
$6'10 + 5'50 = 11'60$ € los 7'5kg

Conocimientos algebraicos: función afín, funciones definidas a trozos.</td>
</tr>
</table>

Figura 2. Respuestas a la tarea 1

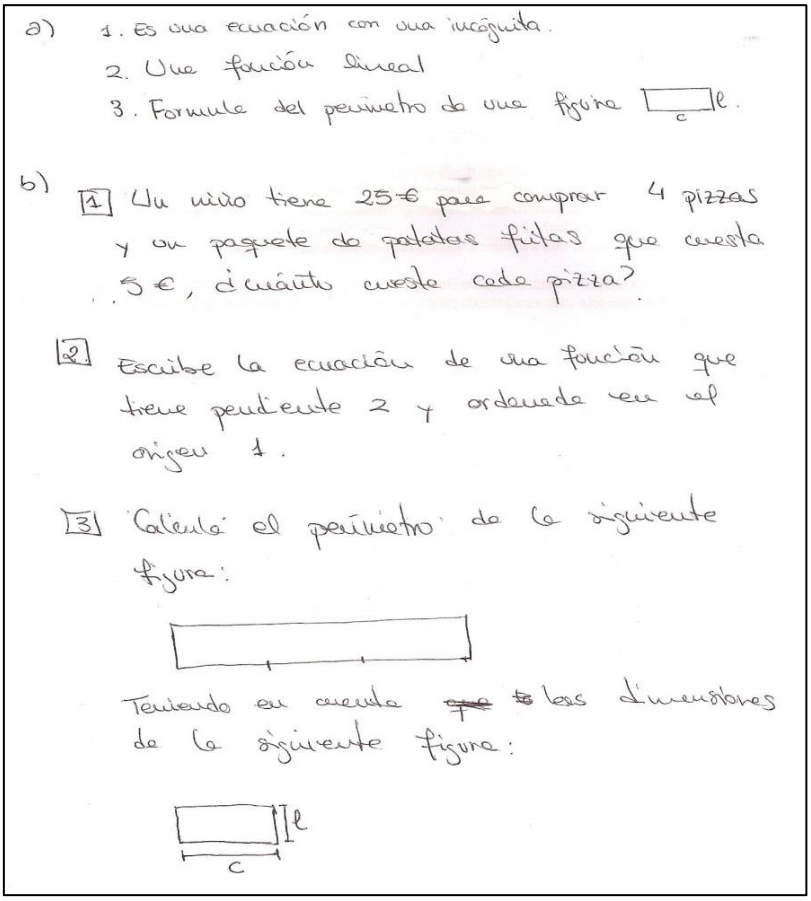
Comportamiento esperado en la tarea 2

Para la expresión 1) se espera que el EPM reconozca una ecuación lineal con una incógnita y que plantee, por ejemplo: "Por la compra de las entradas al cine de 4 personas y unos refrescos hemos pagado en total 25 €. Si los refrescos costaron 5 €, ¿Cuánto costó cada entrada al cine?"

Para la expresión 2) se espera que el EPM reconozca una función afín y que enuncie, por ejemplo: "Cada minuto que pasa una tortuga recorre en línea recta 2m. Si al principio la tortuga estaba a una distancia de 1m, ¿a qué distancia y estará transcurridos *x* minutos?

Para la expresión 3) se espera reconocer la una fórmula para calcular el valor de una variable *P* en función de otras dos, *c* y *l*. Por ejemplo, podría ser la fórmula de cálculo del perímetro de un rectángulo de base *c* y altura *l*.

Se ponen en juego los conceptos de ecuación de primer grado; función afín; fórmula de una función con dos variables independientes y el proceso de enunciado de situaciones-problema modelizables con las expresiones dadas. En la figura 3 se muestra una respuesta prototípica a la tarea 2. En esta respuesta se reconocen y distinguen los objetos ecuación y función. El estudiante utiliza la expresión "ecuación de una función" (enunciado 2), según el uso escolar generalizado (figura 4).


a) 1. Es una ecuación con una incógnita.
2. Una función lineal
3. Formula del perímetro de una figura l c.

b) 1 Un niño tiene 25 € para comprar 4 pizzas y un paquete de patatas fritas que cuesta 5 €, ¿cuánto cuesta cada pizza?

2 Escribe la ecuación de una función que tiene pendiente 2 y ordenada en el origen 1.

3 Calcula el perímetro de la siguiente figura:

Teniendo en cuenta ~~que~~ las dimensiones de la siguiente figura:

l c

Figura 3. Respuesta a la tarea 2

2.2. Fórmula o ecuación de una función

¿Qué operaciones tenemos que hacer para calcular las ganancias del autocar del ejemplo anterior, a partir del número de viajeros?

Fíjate en que cada viajero paga 2,5 €, y que los gastos del viaje son de 20 €.

Si llamamos x al número de viajeros, entre todos pagan $2{,}5x$ €. Si restamos los gastos, resulta: $2{,}5x - 20$

Por tanto, llamando y a las ganancias, obtenemos $y = 2{,}5x - 20$.

Con esa fórmula, al dar sucesivos valores a x, se hallan los de y. Observa la tabla del margen.

Muchas funciones pueden expresarse mediante una fórmula o ecuación.

Figura 4. "Fórmula" como sinónimo de "ecuación" referido a una función (Frías et al., 2003, 139)

Comportamiento esperado en la tarea 3

Para la cuestión b) se espera que el EPM enuncie una cuestión que pida hallar el número de segmentos para formar la figura en una posición elevada, por ejemplo, 46 (fig. 5, resp. 3a). O bien, que pueda formular una regla que permita hallar el número de segmentos necesarios para la figura en una posición n cualquiera y realizar una manipulación funcional de la misma (fig. 5, resp. 3b).

En este caso no es posible obtener el número de segmentos mediante una estrategia de conteo directo sobre las figuras. Es necesario identificar una regla del tipo: "La figura en la posición n se compone de n hexágonos, luego para ello se requieren $6n$ segmentos. Pero se deben suprimir los lados interiores cuyo número es n–1; como esos lados interiores corresponden a dos hexágonos contiguos se deben descontar $2(n–1)$ segmentos. Luego el número de segmentos necesarios sigue la regla: $N(n) = 6n – 2(n–1) = 4n + 2$. Para el caso $n = 46$, $N(46) = 186$". También se puede establecer que la figura está compuesta por *n* hexágonos a los cuales se les quita dos lados (4*n*), añadiendo los dos segmentos de los extremos, 4*n* + 2.

(3a)	b) Añadiría una pregunta del tipo. ¿Cuántos segmentos son necesarios para construir la figura número 23?
(3b)	b) Para introducir conocimientos de tipo algebraico puedo preguntar ¿Cuántos segmentos conformarán la sexta figura de la sucesión? Calcularlo y posteriormente comprobarlo a través de la figura Solución ⇒ Nº elementos = $6+(n-1)\times 4$ elementos figura de partida posición respecto a la figura de partida cuantos incrementos la realizado nº de elementos nuevos por figura. También, puedo preguntar en sentido contrario, si tengo una figura compuesta de 22 segmentos ¿Qué posición ocupará en la secuencia?

Figura 4. Respuestas a la tarea 3

Los objetos y procesos que se ponen en juego en la resolución serán: regla general para hallar el número de segmentos, expresada con lenguaje ordinario, o con lenguaje simbólico-literal; función afín, variable independiente, *n*, (número de orden de la figura), variable dependiente, N(*n*) (número de segmentos necesarios para construir la figura de orden *n*). Justificación deductiva de la validez de la fórmula.

RESULTADOS Y SU DISCUSIÓN

En la figura 3 se ha mostrado una respuesta de un estudiante a la tarea 2 donde se observa un conflicto de significado entre las nociones de incógnita y ecuación, que interfieren en el reconocimiento de los objetos variable y función. De hecho, esta cuestión cumple en el cuestionario una función exploratoria que revela que las interpretaciones dadas por los estudiantes reflejan la dualidad "expresión-contenido": indistintamente las respuestas se refieren a *nociones involucradas* (ecuación, función, fórmula; o bien, ecuaciones lineales con 1, 2 o 3 incógnitas), *objetos que representan* (valor solución, recta, perímetro). Asimismo, los estudiantes se refieren indistintamente a *objetos discursivos* (lenguaje, definiciones, proposiciones) u *objetos operativos* (procedimientos y argumentos) que sirven para abordar una situación-problema (por ejemplo, hallar el valor que corresponde a la ecuación, interpretar una relación entre variable o calcular la variable *P* sumando el doble de las variables *c* y *l*).

Este tipo de conflicto puede observarse asimismo en las tareas 1 y 3 (figura 6). Así, el estudiante que resuelve la tarea 1 (figura 6) ignora completamente la consigna dada que requiere movilizar el concepto de función; el problema enunciado es una simple reformulación de la tarea aritmética dada introduciendo la noción de incógnita y ecuación. En la solución de esta tarea hemos encontrado que 9 estudiantes de 46 revelan el conflicto de significado entre ecuación y función, que se identifica por un fenómeno de polisemia u homonimia sin fundamento matemático ni contextual.

Se observa que el estudiante que resuelve la tarea 3 (figura 6) solo reconoce en los tres enunciados el concepto de incógnita. Los enunciados que propone no requieren poner en juego las nociones de variable y función. En la solución de esta tarea hemos encontrado 16 estudiantes de 46 que revelan el conflicto de significado entre ecuación y función.

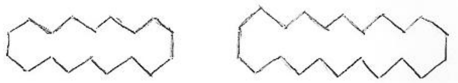
Cuestión	Respuesta
1	a) Luis va al supermercado y compra 4 Kg de peras, y además, necesita una bolsa para llevar las peras que cuesta 10 céntimos. Si tuvo que pagar 8'10 €. ¿Cuánto cuesta el kg de peras? b) $4x + 0'10 = 8'10$ $4x = 8$ $\boxed{x = 2}$ Por lo tanto, el kg de peras ~~es~~ vale 2 €. Los conocimientos algebraicos utilizados son las expresiones algebraicas y resolución de ecuaciones de primer orden.
3	6a)  nº segmentos = 18 nº segmentos = 22 Hay 4 segmentos en cada hexágono + 1 segmento inicial + 1 segmento final nº segmentos = 4 · nº hexágonos + 2 $= 4x+2$ 6b) En una fábrica se utilizan palillos para construir las siguientes figuras geométricas ... Quieren realizar una figura con 24, pero necesitan saber cuántos palillos se usarán para construirla y así poder encargarlos. ¿Cómo podrías calcularlos sin necesidad de contarlos en un dibujo? 6c) Ecuación de primer grado con una incógnita.

Figura 5. Respuesta de estudiantes a las tareas 1 y 3 donde se observan conflictos de significado

Un grupo de 5 estudiantes elegidos intencionalmente han tenido dos sesiones adicionales de formación sobre el RAE y un cuestionario diseñado *ad hoc*, formado por dos cuestiones: una, resolución de una cuestión; otra, análisis de 7 respuestas con distintos niveles de algebrización al problema planteado (que por razones de espacio no aportamos en este trabajo). La cuestión era:

> Resuelve el siguiente problema mediante tres procedimientos, graduando el nivel de algebrización en ellos: "Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para comer durante 40 días. Sin embargo, encontró sitios en donde pudo ahorrar 4 euros al día en la comida. De esta forma, el presupuesto inicial le duró 60 días. ¿Cuánto dinero recibió?"

El grupo es heterogéneo, si se atiende a las *titulaciones de origen* (2 ingenieros, 2 arquitectos y 1 matemático), al *rendimiento* mostrado en las actividades programadas (1 bajo, 2 medio y 2 alto) y a su *desempeño profesional* (1 estudiante ejerce de profesor de secundaria, los otros cuatro son profesionales en empresas; dos de estos últimos con experiencia en grupos reducidos y clases particulares). Cuatro estudiantes de este grupo muestran, salvo algunos comportamientos anecdóticos—por lo aislados y no sistemáticos—, un uso fino de la terminología y de la interpretación de los procesos y significados involucrados. La maestría en la interpretación y alcance de los niveles de algebrización otorga a estos estudiantes un instrumento para mejorar sus prácticas operativas y discursivas.

CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

Este trabajo muestra la necesidad de contemplar en la formación de profesores la clarificación de los significados de los conceptos de incógnita, variable, ecuación y función a fin capacitarles para una enseñanza idónea de la iniciación al álgebra de los alumnos. Si los profesores presentan conflictos de significado relacionados con estas nociones tendrán dificultades tanto para interpretar los comportamientos mostrados por sus alumnos en las actividades matemáticas relacionadas como para diseñar tareas adecuadas que favorezcan el pensamiento matemático asociado.

El sistema o red de nociones que confluyen en el concepto de variable desempeña un papel esencial en el trabajo matemático y en consecuencia es clave en la formación matemática de los alumnos de primaria y secundaria. No basta que los profesores tengan un uso operativo de las ecuaciones y funciones, sino que se requiere un conocimiento especializado del contenido que permita comprender los potenciales conflictos y diseñar situaciones que permitan su resolución. Es necesario que los profesores distingan con claridad los objetos lingüísticos y conceptuales involucrados, así como las diversas situaciones en que tales objetos se usan, como una parte de su formación epistemológica especializada orientada hacia la enseñanza.

> “Para ayudar a que los estudiantes comprendan los diferentes y variados significados de una letra como una variable, no justamente como una incógnita, los educadores matemáticos deberían ser capaces de distinguir entre los diversos usos de las letras algebraicas y comprender el modo en que estos diferentes usos se relacionan unos con otros” (Ely y Adams, 2012, 20)

La incógnita y la variable, la ecuación y la función, son objetos conceptuales diferentes aunque con frecuencia se expresan mediante los mismos objetos lingüísticos. La diversidad de definiciones que se pueden dar de la noción de variable (Schoenfeld y Arcavi, 1988), revelan que en cierto modo el término “variable” puede referir a una variedad de objetos diferentes, siendo otro ejemplo del fenómeno ontosemiótico descrito en Font, Godino y Gallardo (2013), el objeto matemático es único y múltiple simultáneamente.

El análisis ontosemiótico de estas nociones, tanto desde el punto de vista epistémico o institucional como cognitivo o personal, ayuda a desvelar la complejidad de objetos y significados involucrados y proponer intervenciones educativas fundamentadas para resolver los conflictos de aprendizaje y progresar en la construcción del conocimiento.

Las deficiencias observadas en las respuestas de los estudiantes a las tareas revelan carencias en el conocimiento y comprensión de la noción de variable, y en consecuencia en la falta de distinción entre ecuación y función. Pero no se trata de deficiencias en el nivel de desarrollo cognitivo sino de carencias en el currículo de formación didáctico-matemática de los estudiantes. Estos pueden superar los estudios de grado de matemáticas con estas carencias conceptuales, pero el desempeño como profesores se puede ver seriamente perjudicado si no se complementa con una profundización en la formación epistemológica específica sobre la pluralidad de significados de los objetos matemáticos y las configuraciones de objetos y procesos en los cuales cristalizan tales significados.

Por último, el análisis clínico de las respuestas de cinco estudiantes, sugiere que la instrucción sistematizada en la comprensión de los niveles de algebrización (Godino et al., 2014) permite a los estudiantes superar los conflictos de significado entre los conceptos de ecuación y función. Este resultado de la instrucción debe ser testado convenientemente, mediante fundamentación teórica y estudios empíricos, que impliquen grupos mayores e igualmente heterogéneos. Es de interés pues identificar los beneficios de una formación basada en los procesos progresivos de simbolización y generalización en los distintos niveles de algebrización.

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación EDU2012-31869, MINECO.

Referencias

Bardini, C., Radford, L., & Sabena, C. (2005). Struggling with variables, parameters, and indeterminate objects or how to go insane in mathematics. En Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the PME,* Vol. 2, pp. 129-136. Melbourne: PME.

Barwell, R. (2013). Formal and informal language in mathematics classroom interaction: a dialogic perspective. En A. M. Lindmeier, & A. Heinze (Eds.) (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the PME,* Vol. 2, pp. 73-80. Kiel, Germany: PME.

Biehler, R., & Kempen, L. (2013). Students' use of variables and examples in their transition from generic proof to formal proof. *CERME 8,* 6-10 February 2013, Manavgat-Side, Antalya - Turkey [Disponible en (12/03/2014): http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG1/WG1_Kempen.pdf].

Chrysostomou, M., & Christou, C. (2013). Examining 5th grade students' ability to operate on unknowns through their levels of justification. En A. M. Lindmeier, & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the PME,* Vol. 2, pp. 185–192. Kiel, Germany: PME.

Colera J., Gaztelu I., & Guzman M. de (1996). *Matemáticas* 1º E.S.O Madrid: Anaya.

Descartes, R. (1886). *La Geométrie*. Nouvelle édition. Paris : A. Hermann, librairie scientifique. [Disponible en (18/03/2014): http://www.gutenberg.org/files/26400/26400-pdf.pdf]

Ely, R., & Adams, A. (2012). Unknown, placeholder, or variable: what is x*? MERJ,* 24 (1), 199–38.

Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 97–124.

Freudenthal, H. (1983). *The didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

Frías, V., Molero, M, Salvador A., & Zuasti, N. (2003). *Esfera. Matemáticas: ESO 2*. Barcelona: Casals.

Fujii, T. (2003). Probing students´s understanding of variables through cognitive conflict: Is the concept of a variable so difficult for students to understand. En N. Pateman, B. Dougherty & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the International Group for the PME* (Vol. 1): 47–64. Honolulu, HI.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis del conocimiento del profesor de matemáticas. *Unión* 20, 13-31.

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49–68). Jaén: SEIEM.

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para maestros. *Enseñanza de las Ciencias* 32(1), 199–219.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education,* 39 (1-2), 127–135.

Lacasta, E., Madoz, E. G., & Wilhelmi, M. R. (2006). El paso de la aritmética al álgebra en la Educación Secundaria Obligatoria. *Indivisa*, IV, 79–90.

Palarea, M. (Coord.), Castro, E., & Puig, L. (2012). Seminario II: fines de la investigación en pensamiento algebraico. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* XVI (pp. 71–95). Jaén: SEIEM.

Schoenfeld, A. & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics Teacher,* 81(6), 420–427.

Trigueros, M., & Ursini, S. (1999). Does the understanding of variable evolve through schooling? *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the PME* (Vol. 4, 273–280). Haifa, Israel: PME.

Wagner, S. (1983). What are these things called variables? *Mathematics Teacher*, 76, 474–79.

PÓSTERES

LAS REFORMAS CURRICULARES DE LA DISCIPLINA DE MATEMÁTICAS EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA PORTUGUESA A LO LARGO DEL SIGLO XIX

Changes in mathematics official programs, in high school, in Portugal, during XIX century

Ana Paula Aires[a], Ana Santiago[b]

[a]Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, [b]UIED - FCT da Universidade Nova de Lisboa

Introducción: En este póster se presenta parte de una investigación más amplia acerca del lugar que el estudio de las matemáticas ocupan en los programas de Enseñanza Secundaria a lo largo de los siglos XIX y XX, más concretamente, en el período de 1835-1974 (Aires & Santiago, 2014).

Objetivo de la Investigación: Centrando-nos en el período de 1835-1894, intentamos identificar y caracterizar los marcos más importantes que ocurrieran y tuvieran repercusión en la disciplina de Matemáticas de la Enseñanza Secundaria Portuguesa.

La creación de los centros de Educación Secundaria: En 1836 se crean los centros de Educación Secundaria (Diário do Governo nº 275 (19/11/1836)), con 10 disciplinas, una de matemáticas: *Aritmética, álgebra, geometria, trigonometria, e desenho*. Pero no se sabe la duración de las clases ni tampoco la duración de la Educación Secundaria.

La estructuración de los centros de Educación Secundaria: En el año de 1860 (Diário do Governo nº133(12/6/1860)) surgen nuevos cambios, la disciplina se designa por *Matemática elementar, compreendendo a aritmética, a álgebra até às equações do segundo grau com uma incógnita, a geometria sintética os princípios de trigonometria plana – geografia matemática*. Se refiere que el curso durará 5 años, se distribuyen las disciplinas y los contenidos por cada uno de los años y se refiere el número semanal de clases de cada disciplina y su duración. En 1872 fue publicado el primer currículo de matemáticas, especificando los contenidos a enfocar en cada año y en cada tema.

La consolidación de los centros de Educación Secundaria: En 1894 (Diário do Governo nº183 de 17/8/1895) surge la última reforma del siglo XIX, siendo considerada una de las más bien planificadas. La Educación secundaria se distribuye por dos cursos: el primero de 5 años y el segundo de 2 años. El primer curso aborda la *Aritmética*, *Álgebra Elementar e Geometria Plana* y el curso complementar el *Álgebra, Geometria no Espaço, Trigonometria, e Cosmografia Elementar*. En cada año la matemática tiene una carga horaria de 4 horas semanales.

Conclusiones: El período de 1835-1894 se ha constituido como un horizonte temporal decisivo en la enseñanza secundaria portuguesa. Con efecto, fue durante este período que se organizó y consolidó toda la estructura de la Educación Secundaria al mismo tiempo que fue publicado el primer currículo de matemática para este nivel de enseñanza. Estas medidas confirman la importancia concedida por los gobernantes a la enseñanza en general y a la enseñanza de la disciplina de matemática en particular.

Aires, A. P., Santiago, A. (2014). Las reformas curriculares de la disciplina de matemáticas en la enseñanza secundaria portuguesa a lo largo del siglo XIX. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (p. 585). Salamanca: SEIEM.

EL USO DE LOS RECURSOS COMPUTACIONALES EN LA CLASE Y EN LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO[1]

The use of computational resources in the classroom and Teacher Formation

Maria Madalena Dullius[a], Marli Teresinha Quartieri[b], Isabel Kristiner[c]

[a]Centro Universitário Univates, [b]Centro Universitário Univates, [c]Centro Universitário Univates.

Actualmente los estudiantes llegan a la escuela con otros conocimientos o intereses, ya no quieren solo recibir información, ya que a esta se puede acceder fácilmente por otros medios, sobre todo digitales. Se percibe un gran descontento de los estudiantes para las clases en todas las materias en general, pero en las matemáticas la cuestión es más preocupante porque los estudiantes no ven la razón para cálculos masivos realizados sin el uso de la tecnología. Además, los estudiantes conocen y utilizan herramientas tecnológicas para diferentes actividades diarias, pero rara vez como soporte para construir las gráficas y tablas, realizar simulaciones e investigaciones, buscar videos educativos, etc. que pueden ser importantes para la construcción del conocimiento. Una de las razones de la escasa utilización de las tecnologías en el proceso de enseñanza puede ser la falta de preparación de los docentes en relación con la tecnología. En este trabajo se presentan y discuten los resultados de una investigación realizada con los graduados de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas que han desarrollado sus investigaciones en el uso de tecnologías. Se ha buscado verificar cómo los maestros siguen o no el uso de las tecnologías digitales en sus clases. La metodología sigue los preceptos de la investigación cualitativa, donde se llevó a cabo inicialmente una búsqueda de las tesis realizadas en el contexto antes mencionado y, a continuación, se envió un cuestionario a los graduados para obtener información sobre la utilización que hacen de los recursos de computación en sus clases. Seis graduados completaron el cuestionario y comentaron que utilizan los recursos computacionales para optimizar el desempeño de ciertas actividades, para ayudar en el desarrollo del razonamiento, porque proporcionan herramientas dinámicas y atractivas y los estudiantes interactúan más. Ellos comentaron que las herramientas que más utilizan son la hoja de cálculo electrónica, softwares específicos, objetos de aprendizaje y juegos. También señalaron que exploran diferentes actividades, tales como construcción de gráficas, manejo de la información, estudio de la matemáticas financieras básicas, presentación o desarrollo de contenidos matemáticos. Cuando se les preguntó acerca de lo que alentó el uso de recursos informáticos en el aula, mencionan la voluntad personal, la necesidad, el conocimiento y la formación del maestro. Los principales aspectos que los graduados indican como positivos con respecto al uso de los recursos informáticos en sus clases son: los estudiantes se interesan en el conocimiento; los estudiantes mantienen la atención, mayor motivación, mayor participación, la modernización del entorno escolar, las nuevas formas de exponer los conocimientos. Y negativos: falta de conciencia de algunos estudiantes sobre el uso de Internet, la ausencia de un monitor que entienda la máquina en el laboratorio de computación, infraestructura deficiente, el sistema operativo Linux no permite ejecutar muchos programas o juegos, pocas máquinas. Por último queremos resaltar que las actividades abordadas durante el desarrollo de la tesis de maestría causaron cambios en la enseñanza de estos profesores con respecto al uso de las tecnologías.

---

[1] Este trabajo se ha realizado con el apoyo financiero de la Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul – FAPERGS y de la Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES – Brasil.

Dullius, M. M, Quartieri, M. T., Kristiner, I. (2014). El uso de los recursos computacionales en la clase y en la formación del profesorado. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (p. 587). Salamanca: SEIEM.

EL HELICÓPTERO DE BOX, INICIACIÓN AL DISEÑO DE EXPERIMENTOS

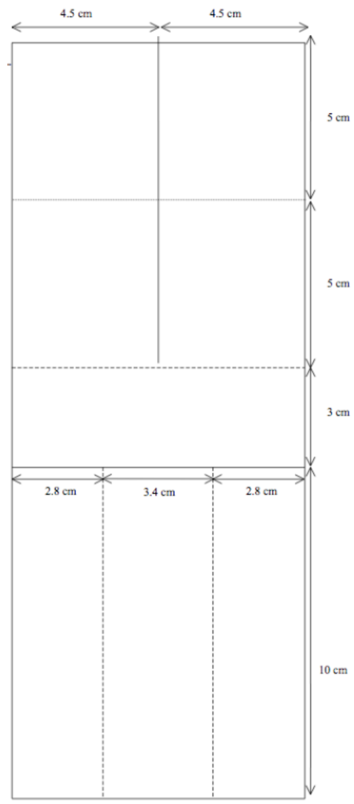
Box's helicopter, introduction to experimental design

Irene García-Camacha, Raúl Martín, Mª Mercedes Fernández

Universidad de Castilla-La Mancha

El diseño de experimentos es una etapa crucial del método científico de especial interés en las ciencias experimentales y la ingeniería (Montgomery, 2005). El planteamiento de un problema práctico desde este punto de vista, resulta una difícil tarea en los primeros cursos de enseñanza universitaria. Para la iniciación del alumnado en este nuevo campo de la estadística se propone el uso del siguiente material creativo basándose en la idea de Box (1991): El helicóptero de Box. Los objetivos de esta investigación son estudiar si el alumno que ha realizado la actividad es capaz de descubrir intuitivamente los factores que influyen en un experimento, percatarse de la importancia del diseño en el resultado final y comprobar si el desarrollo de esta actividad práctica facilita la comprensión de los conocimientos teóricos a posteriori.

La actividad consta de dos partes: la primera debe elaborarse por parejas de modo que cada una de ellas realice un helicóptero con ayuda de la plantilla y un clip que ha de colocarse en la parte inferior del cuerpo del helicóptero. Deben realizarse varios lanzamientos desde una altura de 3,5m y calcular el tiempo promedio. Tras esta primera parte experimental, se llevará a cabo una puesta en común: los alumnos habrán obtenido tiempos distintos y debe discutirse a qué es debido. Para esta reflexión podemos apoyarnos en las siguientes cuestiones: ¿por qué en los diferentes lanzamientos en una misma pareja se obtienen tiempo distintos? ¿por qué el promedio entre las diferentes parejas es diferente?¿se han desarrollado los experimentos bajo las mismas condiciones?¿se han desarrollado en un mismo escenario? La respuesta a tales cuestiones debe hacer caer en la cuenta al alumno de la importancia de las fuentes de variabilidad, la validez y la aleatorización de un experimento.



La segunda parte, se realizará de forma conjunta: los helicópteros serán elaborados por una misma persona, en las mismas condiciones y el mismo escenario tras un proceso de randomización de los experimentos. Ahora, los experimentos diferirán en el diseño del helicóptero, es decir, en las dimensiones, materiales y en la elaboración del mismo. Cada uno de los factores a considerar debe tener dos niveles. Con esta segunda parte se trata de introducir al alumno en los diseños factoriales.

Referencias

Box, G. (1991). Teaching Engineers Experimental Design With A Paper Helicopter. *Quality Engineering*, *4*(3), 453-459.

Montgomery, D.C. (2005). *Diseño y análisis de experimentos*. Limusa Willey.

García-Camacha, I., Martín, R., Fernández, M. M. (2014). El helicóptero de box, iniciación al diseño de experimentos. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (p. 589). Salamanca: SEIEM.

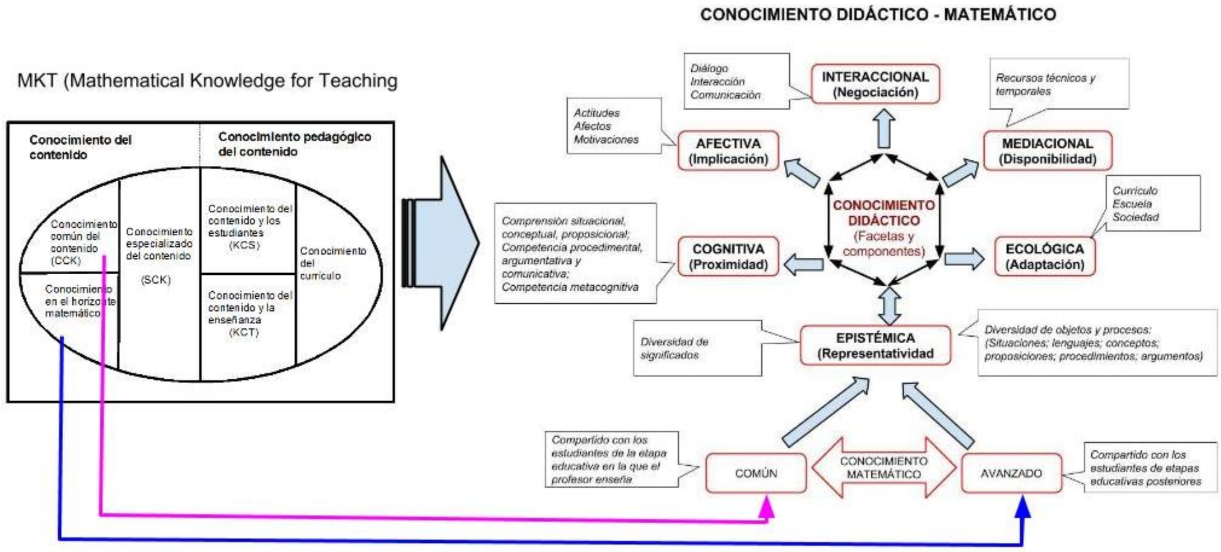
DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA AL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO – MATEMÁTICO

From Mathematical Knowledge for Teaching to Didactic – Mathematical Knowledge

Juan D. Godino[a], Luis R. Pino-Fan[b]

[a]Universidad de Granada (España), [b]Universidad de los Lagos (Chile)

En este trabajo se analizan las relaciones entre las categorías de conocimientos del profesor de matemáticas propuestas por dos modelos: el Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT, Mathematical Knowledge for Teaching) (Ball, Thames, & Phelps, 2008) y el Conocimiento Didáctico – Matemático (CDM) (Godino, 2009). Ambos modelos se aplican al análisis de las respuestas de un profesor en formación a una tarea matemática y cuestiones didácticas relacionadas. La descripción de los modelos estará apoyada en el uso de recursos visuales (figura adjunta) y la reproducción de una videoconferencia explicativa, alojada en la web y reproducible por los asistentes interesados mediante el correspondiente código QR.



El uso que hacen estos modelos del término *conocimiento* implica comprensión y competencia. Se trata de categorías primarias de conocimiento las cuales se combinan para formar conocimientos más complejos que involucran dos o más categorías primarias. En el modelo CDM los conocimientos relativos a las distintas facetas (epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional) incluyen las normas, metanormas y criterios de idoneidad didáctica así como los fundamentos teóricos correspondientes.

Reconocimiento: Trabajo realizado en el marco del proyecto EDU2012-31869, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO, España).

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.

Godino, J. D., Pino-Fan, L. R. (2014). Del conocimiento matemático para la enseñanza al conocimiento didáctico – matemático. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (p. 591). Salamanca: SEIEM.

CARACTERIZACIÓN DE LA NOCIÓN DE RELACIÓN DE EQUIVALENCIA EN MANUALES PARA LA FORMACIÓN DE MAESTROS EN ESPAÑA

Characterization of the notion of equivalence relationship in textbooks used in teachers instruction in Spain

Ignacio González-Ruiz[a], Marta Molina[a], Carmen López[b]

[a]Universidad de Granada, [b]Universidad de Salamanca

En este trabajo se atiende a la noción de relación de equivalencia en el contexto de la formación inicial de maestros. Se realiza una caracterización del tratamiento que se hace de dicha noción en manuales empleados en España para la formación inicial en matemáticas de maestros, en un periodo que abarca casi cuarenta años y culmina con la implantación de la nueva titulación de Grado Educación Primaria. Tal caracterización se focaliza en dos dimensiones bien diferenciadas: la fenomenología y los sistemas de representación (Rico, 2012). Por un lado se ahonda en aquellos contextos, situaciones o problemas que confieren sentido a la noción de relación de equivalencia y, por otro, se profundiza en los conjuntos de signos y reglas que posibilitan la representación de dicha noción y permiten su relación con otras.

Los criterios seguidos en la selección de obras (ver Tabla 1) son: la representatividad de éstas en la formación inicial de maestros y la capacidad de las mismas para vislumbrar los cambios más significativos que se perciben en un mismo autor a la hora de abordar la noción de relación de equivalencia en etapas distintas. Estas etapas se caracterizan por la aparición de nuevos decretos o directrices ministeriales conducentes a la modificación de los planes de estudio de maestros.

La metodología que se adopta para el análisis en los manuales se corresponde a una modificación de la propuesta en López (2011), de naturaleza dual, fundamentada en el análisis de contenido y en la adecuación de cada obra, y por ende de su tratamiento de la noción de relación de equivalencia, al contexto histórico-académico que le corresponde.

Tabla 1. Etapas histórico-académicas y selección de obras

Primera Etapa: Desde la ley de Educación de 1970 (Plan de Estudios de 1971)
Aizpún, A. (1970). *Teoría y didáctica de la matemática actual*. Barcelona: Vicens-Vives.
Roanes Macías, E. (1972). *Matemáticas para profesores: EGB*. Salamanca: Anaya.
Martínez, J., Bujanda, M. P. y Velloso, J. M. (1981) *Matemáticas–1* (Escuelas Universitarias de Profesorado de E.G.B.). Madrid: SM.
Nortes Checa A. (1986). *Matemáticas para magisterio 1*. Murcia: Librería González-Palencia.
Segunda Etapa: Reformas de los 90 (Plan de Estudios de 1993 y Plan de Estudios de 1999)
Roanes Macías, E. (1983). *Didáctica de las Matemáticas.* Salamanca: Anaya.
Nortes Checa A. (1993). *Matemáticas y su Didáctica.* Murcia: Universidad de Murcia.
Maza Gómez, C. y Arce Jiménez, C. (1991). *Ordenar y clasificar.* Madrid: Síntesis.

Referencias

López, C. (2011). La formación inicial de Maestros en Aritmética y Álgebra a través de los libros de texto. Tesis doctoral. Salamanca: Universidad de Salamanca.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *AIEM*, 1, 39-63.

González-Ruiz, I., Molina, M., López, C. (2014). Caracterización de la noción de relación de equivalencia en manuales para la formación de maestros en España. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (p. 593). Salamanca: SEIEM.

EL DORADO CONTADOR: ANÁLISIS DE UNA ARITMÉTICA DEL SIGLO XVI

El Dorado Contador: Analysis of a sixteenth-century arithmetic

María José Madrid, Carmen López

Universidad de Salamanca

La historia de la educación matemática supone una herramienta fundamental para mejorar la educación que recibirán las futuras generaciones; es por eso que desde hace ya varios años se considera una parte clave en las investigaciones educativas relativas a las matemáticas. Dentro de estas investigaciones, resulta innegable el potencial que tiene el libro de texto como fuente de información sobre la historia de la educación, al fin y al cabo este suele reflejar de uno u otro modo la posterior actividad que se realiza en las aulas (González y Sierra, 2003).

El estudio de libros de texto históricos ofrece numerosa información sobre la época y la educación durante la misma, pudiendo incluso aportar soluciones a problemas educativos actuales y ayudar a mejorar los manuales de texto que se escriben en este momento.

A lo largo de este trabajo se regresará al siglo XVI, período en el que la aparición de la imprenta potenció una mayor difusión del conocimiento matemático en castellano. En particular, se analizará una aritmética comercial de dicho siglo, *El Dorado Contador* de Miguel Gerónimo de Santa Cruz impresa por primera vez en 1594 y que refleja, fundamentalmente, la actividad comercial de Valencia y Sevilla. La edición que se ha estudiado a lo largo de este trabajo es la correspondiente al año 1625, impresa en Madrid, y forma parte de la colección de la Biblioteca General de la Universidad de Salamanca.

En el análisis de contenido de la obra se ha utilizado la metodología preconizada en Sierra y López (2013) en torno a tres organizadores: Análisis conceptual, Sistemas de representación y Análisis fenomenológico. Añadiendo además un cuarto organizador: Análisis Didáctico-Cognitivo. Se pretenderá conocer los contenidos que incluye y su secuenciación, los ejercicios y problemas que recoge y los sistemas de representación que se utilizan. Se detallarán las intenciones manifestadas por el autor para la obra, los lectores a los que va dirigida y las posibles influencias que recibió el autor para su escritura. Se terminará este análisis estudiando la fenomenología presentada, es decir, el contexto en el que está escrita.

El objetivo final es analizar cómo esta aritmética influye sobre la vida en el final del siglo XVI, y en particular sobre las matemáticas y su educación; y qué aporta esta información para mejorar la educación matemática actual y los manuales de texto.

Referencias

De Santa Cruz, M.G. (1625). Libro de arithmetica especvlativa, y práctica, intitvlado, el dorado contador, contiene la fineza y reglas de contar oro y plata, y los Aneajes de Flandes. Madrid: Viuda de Alonso Martín.

González, M.T. y Sierra, M. (2003). El método de investigación histórico en la didáctica del análisis matemático. En Castro, E. (ed.), *Investigación en educación matemática: séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 109-130). Granada: Universidad de Granada.

Sierra, M. y López C. (2013). Análisis de contenido en Aritmética y Álgebra en manuales de Formación de Maestros (1839-1971). En Rico, L., Lupiañez, J.L. y Molina, M. (ed.), *Análisis Didáctico e Investigación en Educación Matemática* (pp. 375-402). Granada: Editorial Comares.

Madrid, M. J., López, C. (2014). El dorado contador: análisis de una aritmética del siglo XVI. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (p. 595). Salamanca: SEIEM.

ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS EN ESTUDIANTES DEL GRADO DE PRIMARIA

Attitudes towards mathematics students of the degree of primary school teacher

Alexander Maz-Machado, Carmen León-Mantero, José Carlos Casas

Universidad de Córdoba

Resumen

Como parte de un estudio cuantitativo sobre las actitudes ante las matemáticas en estudiantes universitarios, presentamos un avance de investigación realizado con alumnos del Grado de Maestro de Primaria. El objetivo del estudio es conocer y caracterizar cuál es la actitud de lso maestros en formación sobre las matemáticas. Todo ello tras analizar las valoraciones o utilidades, ansiedades, agrados, motivaciones y seguridad o confianza que las matemáticas les reportan mediante el análisis de un cuestionario de escala Likert con 25 preguntas. La escala aplicada tiene un Alfa de Crombach α= 0,915 por lo que es altamente fiable.

Más de la mitad de los alumnos se siente nervioso ante las matemáticas y un gran porcentaje encuentra dificultades al trabajar con ellas. las valoraciones medias acerca del agrado hacia las matemáticas son moderadamente bajas, y prácticamente a nadie le resultan divertidas.

Podemos observar que el 44,65% valoran las matemáticas positivamente como parte fundamental de sus estudios y las consideran útiles para los estudiantes, pero no desean utilizarlas en su futura práctica profesional. Además encuentran muchas dificultades al trabajar con ellas, por tanto provocan en ellos nerviosismo y desagrado.

La valoración media que otorgan a la utilidad de las matemáticas es de 3,51 mientras que para la ansiedad que les genera la puntuación media es de 3,21.

Puesto que sólo el 19,4% considera la posibilidad de cursar alguna otra asignatura de matemáticas más alla de las obligatorias, asi como que solo el 17,1% señale que le gustaria tener una ocupación en las que tuviera que utilizar las matemáticas, indica que no se les ha mostrado la importacia de las matemáticas no solo para su futuro desarrollo profesional sino para la vida misma. Esto es contradictorio con los resultados obtenidos cuando se les pregunto si las matemáticas eran importantes para su futuro profesional, donde el 52,9% respondio de forma positiva.

Palabras clave: Actitudes, maestros en formación, matemáticas

Maz-Machado, A., León-Mantero, C., Casas, J. C. (2014). Actitudes hacia las matemáticas en estudiantes del Grado de Primaria. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (p. 597). Salamanca: SEIEM.

LAS RAMAS DE LAS FIGURAS NO PERMITEN VER EL BOSQUE DE LOS RAZONAMIENTOS

Branches of the figures show not allow the forest of reasoning

Cristina Pecharromán, Tomás Ortega

Universidad de Valladolid

Objetivo de la investigación: Observar cómo son los razonamientos de un grupo de profesores de matemáticas de Educación Secundaria cuando se enfrentan a tres construcciones geométricas del pentágono regular. Averiguar si discriminan una construcción geométrica que no permite deducir una propiedad y otra que sí. Establecer la relación que asegura que las tres construcciones presentadas son exactas.

Marco teórico de contenidos: Tres construcciones geométricas del pentágono regular:

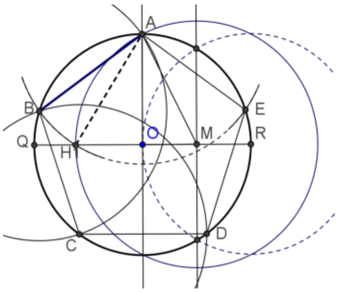


Figura 1. AH1=lado

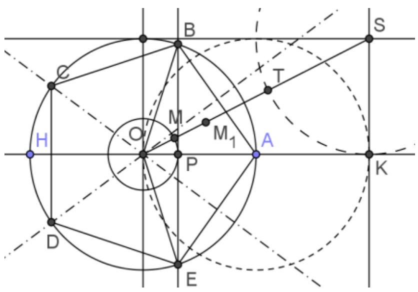


Figura 2. OP=cos(72º)

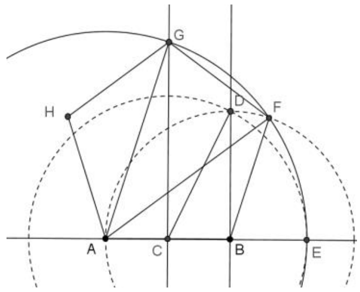


Figura 3. AF/AB=Φ

Test de explicaciones y cálculos: 1. Explica si en la figura 1 se ha establecido que los ángulos centrales son iguales.2. Explica si puedes tener la absoluta seguridad de que el pentágono es regular.3. Explica si puedes tener la total seguridad de que los lados se cierran justamente en E. 4. Explica si ahora, con la figura 2, es seguro que ABCDE es un pentágono regular.5. Calcula cuánto mide el lado sabiendo que en las figuras 1 y 2 el radio mide 1 cm.6. Calcula cuánto mide el radio de la circunferencia circunscrita si el lado del pentágono es 1 cm.7**.** Calcula la razón entre la diagonal y el lado del pentágono regular.

Dos ejemplos de respuestas: Una destaca sobre todas. El Profesor se da cuenta de que no puede deducir la regularidad del pentágono sólo de la construcción geométrica de la figura 1. De ella obtiene la longitud del lado y la amplitud del ángulo central de uno de los 4 triángulos isósceles iguales construidos aplicando el teorema del coseno y comprueba que es la parte real de la primera solución compleja de z^5-1=0. (Prof. 35). En esta otra, se mide “Según la construcción con GeoGebra, no se puede asegurar que el pentágono de la figura 1 sea regular porque GH=5,96; HI=5,96; IB=5,95; BJ=5,96 y JG=7,55” (Prof. 05)

Conclusiones: Hay gran diversidad de respuestas y sorprende la cantidad errores en los razonamientos directos asociados a las construcciones de las figuras-datos. También se detecta que los profesores conocen propiedades del pentágono regular y esto, sin duda, constituye un obstáculo para realizar razonamientos directos correctos. No interpretan adecuadamente las construcciones: sustituyen razonamientos por comprobaciones, hacen suposiciones faltas de fundamento e incluso incurren en contradicciones, conocen la relación áurea entre los segmentos del pentágono y la aplican sin fundamento. Los cálculos suelen ser correctos, aplican matemáticas de secundaria, pero son aproximados porque en lugar de considerar las relaciones métricas exactas de las construcciones usan la calculadora. Se detecta ausencia de rigor en la interpretación de las figuras.

Pecharromán, C., Ortega, T. (2014). Las ramas de las figuras no permiten ver el bosque de los razonamientos. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (p. 599). Salamanca: SEIEM.

ESTUDIO DE LA INTERACCIÓN DE PAREJAS DE ALUMNOS ASIÁTICOS CHINA-PAQUISTÁN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Study of the interaction of couples of Asian students China Pakistan in mathematical problem solving

Núria Rosich[a], Anna C. Rodríguez[b], Manuel García[c]

[a]Universidad de Barcelona, [b]Generalitat de Catalunya, [c]Generalitat Valenciana

En este poster mostramos un estudio realizado en la regulación de la enseñanza-aprendizaje de matemáticas del Aula de Acogida donde se trabaja bajo la perspectiva de D'Ambrosio (1984) de la etnomatemática. El estudio nos lleva al análisis de la resolución de ejercicios de matemáticas realizados por parejas con un integrante de cada país. Estas personas son nativas de diferentes países y las interacciones se realizan en una tercera lengua que es la de la de la profesora suponiendo así un vínculo de unión. Así acaba siendo un análisis de grupos, constituidos por dos alumnos más la profesora. Dado que todos nuestros estudios se vinculan a los alumnos recién llegados a Barcelona no podemos realizar el estudio de otra forma pues si los integrantes fuesen nativos del mismo país la interacción se realizaría en su idioma y esto nos impediría analizarlo. Entre los objetivos, queremos ver la relación que se crea y si esto les ayuda a progresar en el proceso de aprendizaje pero aunque Vigotsky nos hace reflexionar sobre el hecho de cómo las interacciones sociales funcionan hacia dentro del ser y hacia el exterior, sólo podremos estudiar la parte hacia el exterior así pues cogeremos la teoría de Piaget que nos hace ir más lejos cuando dice que estas relaciones sociales originan unas respuestas y son estas relaciones y sus respuestas las que estudiaremos para ver su incidencia en el proceso de aprendizaje.

El análisis sigue la propuesta de Kebrat-Orecchioni (1990) que consiste en los siguientes rangos de generalidad. **Interacción:** sucesión de intercambios, delimitada de tres formas, al modificar el número de participantes, o el lugar o el tema. **Secuencia:** periodo en el que se realiza una transacción lingüística. **Intercambio (cooperativos, de validación, pregunta respuesta, validación-continuación, interrupción, aclaratorio, cogenerativo, de desacuerdo, encajados):** Termino de acción reacción y se define intercambio si hay intercambio sí hay respuesta, es decir hay consecuencia. **Intervención (acto de lengua)**: Calsamiglia y Tusón (1997) la definen como la aportación de un individuo al desarrollo de lo que se habla, se da información o toma posición.

El objetivo de ver si las parejas bilingües podían realizar los mismos intercambios que las parejas monolingües y si nosotros los podíamos estudiar y analizar se ha satisfecho con éxito. Los procesos estudiados en la resolución de problemas nos han resultado gratificantes pues hemos visto como el idioma no se convierte en una dificultad insuperable ya que los alumnos utilizan cualquier forma de transmisión de información para que el compañero entienda el ejercicio y llevar así el proceso de aprendizaje hasta un punto más que aceptable.

Referencias

Kerbrat-Orecchioni, C. (1998). Les interactions verbales. Approche interactionnelle et structure des conversations. Tome I. France. Troisiéme Èdition. Armand Colin.

Calsamiglia, H., Tusón, A. (1997). *Las cosas del decir. Manual de análisis del discurso*. Barcelona:Ed Ariel.

D'Ambrosio, U.,(1984) "The intercultural transmission of mathematical knowledge. Effects on mathematical education" UNICAMP, Campinas

Rosich, N., Rodríguez, A. C., García, M. (2014). Estudio de la interacción de parejas de alumnos asiaticos china-paquistan en la resolución de problemas matemáticos. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (p. 601). Salamanca: SEIEM.

AUTONOMÍA EN LA INTERACCIÓN EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS NO RUTINARIOS EN AULAS DE PRIMARIA

Autonomy during an interaction in problem solving with non routine problems in primary classrooms

Beatriz Sánchez, Marta Ramos, José María Chamoso, Javier Rosales, Santiago Vicente

Universidad de Salamanca

La resolución de problemas ha sido foco de interés en la investigación en Educación Matemática en los últimos años (p.e: Rigo, 2013; Verschaffel et al., 2000). Una gran parte de estudios que analizan la interacción entre maestros de Primaria y sus estudiantes cuando resuelven problemas rutinarios en el aula habitual incluyen, en sus resultados, la escasa participación de los alumnos en el proceso (Rosales et al., 2008). Pero apenas se sabe qué sucede en la interacción cuando resuelven problemas no rutinarios. Por tanto, se plantea analizar la autonomía durante la interacción de un maestro de Primaria cuando resuelve un problema no rutinario con sus estudiantes.

Para ello, se grabó la interacción de un maestro de Primaria, con 31 años de experiencia y elegido al azar entre una muestra de los que aceptaron ser grabados, cuando resolvía con los estudiantes un problema no rutinario, extraído del libro de Tahan (1986). Una vez transcrita, se organizó en ciclos (Wells, 1999) y, a partir de los contenidos que se hacían públicos en cada uno de ellos, se categorizaron en función de quién fue el responsable de construirlo: Nivel 1 (P: profesor), Nivel 2 (Pa: profesor-alumno), Nivel 3 (Ap: alumno-profesor) y Nivel 4 (A: alumno). Los resultados se agruparon en porcentajes atendiendo a las categorías consideradas. En este sentido, el Nivel 2, obtuvo un 44,54%, seguido del Nivel 3 (36,97%), mientras que el Nivel 1 obtuvo un 13,45% y el Nivel 4 un 5,04%.

Estos resultados muestran que la autonomía de los estudiantes en la interacción con el maestro cuando resolvían problemas no rutinarios difiere de la obtenida en trabajos similares cuando los problemas eran rutinarios. Ante la escasa muestra utilizada, más investigación sobre ello sería recomendable para analizar si el tipo de problema utilizado influye en la autonomía. Para ello se plantea ampliar la muestra de maestros utilizando el mismo problema para analizar si se producen los mismos resultados, así como elegir otros problemas rutinarios (de diferentes niveles de dificultad) resueltos por los mismos maestros con los estudiantes para comparar los resultados e identificar los momentos en que se produce mayor autonomía. Estos resultados, si se corroboran con estos estudios, tendrían una fuerte repercusión educativa porque sugerirían aumentar la propuesta de problemas no rutinarios en las aulas de Primaria si se desea una mayor participación del estudiante en la construcción del conocimiento.

Rigo, M. (2013). La convicción, la comprensión y las prácticas de racionalidad en la primaria. Estudio del profesor. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 459-466). Bilbao: SEIEM.

Rosales, J., Orrantia, J., Vicente, S. y Chamoso, J. M. (2008). La resolución de problemas aritméticos en el aula. ¿Qué hacen los profesores cuando trabajan conjuntamente con sus alumnos?, *Cultura y Educación*, 20 (4), 423-439.

Tahan, M. (1986). *El hombre que calculaba*. México: Limusa, S.A.

Verschaffel, L., Greer, B., y De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. The Netherlands: Swets & Zeitlinger Publishers.

Wells, G. (1999). *Dialogic inquiry: Toward a sociocultural practice and theory of education*. Cambridge: CUP.

Sánchez, B., Ramos, M., Chamoso, J. M., Rosales, J., Vicente, S. (2014). Autonomía en la interacción en resolución de problemas no rutinarios en aulas de primaria. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (p. 603). Salamanca: SEIEM.

UN ANÁLISIS DE LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA. HISTORIA Y CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DE CONTENIDO

An analysis for the graphic representation of the logarithmic function.

History and Pedagogical Content Knowledge.

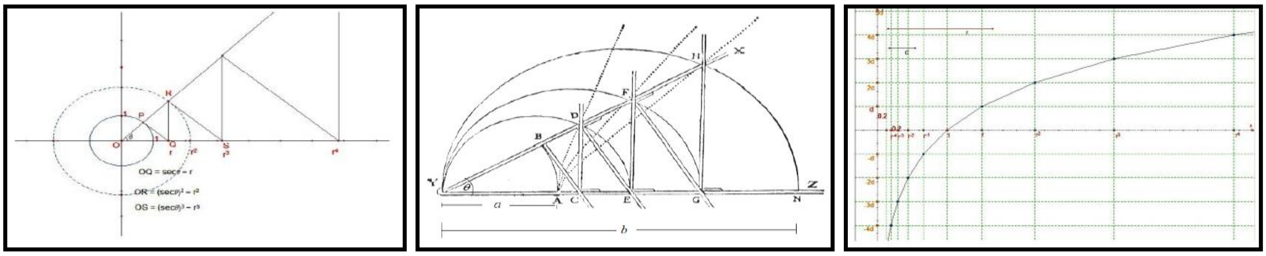
Jeannette Vargas, José Novoa, Maureen Castañeda

Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca, Universidad Pedagógica Nacional

OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN: Constituir a la luz de la noción conocimiento didáctico de contenido, un análisis de elementos, propuestos a los profesores de precálculo, en lo concerniente a construcciones de la representación gráfica de la función logarítmica; desarrollo histórico y construcciones mentales planteadas desde la teoría APOS.

ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN: El análisis documental presenta tres fases; en primer lugar, una revisión bibliográfica de la literatura en educación matemática relativa a la función logarítmica; desarrollo histórico y construcciones de su representación gráfica. Posteriormente se examinan, a partir de la noción de conocimiento didáctico del contenido, las publicaciones que describen la construcción de la gráfica de esta función. Por último, dichas construcciones se caracterizan, haciendo uso de la teoría APOS, en las formas de conocer acción, proceso u objeto del concepto.

En uno de los casos, en la caracterización de la construcción (figura *a*) se identifica la forma de conocer acción vinculada con la generación de cada punto de la progresión geométrica (figura b), también se determina la interiorización de dichas acciones en el proceso que se examina en el eje x (puntos de la forma r^n) y en la aproximación, con segmentos rectilíneos, a la curva logarítmica (figura c) la forma de conocer objeto.



Figuras a.,b.,c. Construcción de la representación gráfica de la función logarítmica propuesta con argumentos de J.A. Serret, 1887.

CONCLUSIONES: El análisis de construcciones mentales establecidas con el referente de la teoría APOS, se constituye en un aporte a tener en cuenta en los cursos de formación inicial y continua de profesores.

La identificación de características dentro de la noción de conocimiento didáctico del contenido, permiten resaltar la importancia de la reflexión de los docentes sobre la coherencia entre sus conocimientos y los diálogos que pueden potenciar en el aula con sus estudiantes.

Referencias

Vargas, J., Pérez, E., González, M. T. (2011). El logaritmo: ¿cómo animar un punto que relacione una progresión geométrica y una aritmética? En P. Perry (Ed.), Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones (pp. 129-138). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Vargas, J., Novoa, J., Castañeda, M. (2014). Un análisis de la representación gráfica de la función logarítmica. Historia y conocimiento didáctico del contenido. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (p. 605). Salamanca: SEIEM.

Homenaje al profesor Modesto Sierra Vázquez

HOMENAJE AL DR. SIERRA

Tribute to Dr. Sierra

Tomás Ortega
Universidad de Valladolid

Resumen

Este texto es un homenaje al Dr. Sierra y en él se hace una sinopsis de sus aportaciones a la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática desde su creación. Se destaca su labor como tesorero y presidente de la Sociedad y las ponencias que ha presentado en los diferentes simposios de la SEIEM.

Palabras clave: *SEIEM, Didáctica, Análisis Matemático, Historia, Educación Matemática*

Abstract

This text is a tribute to Dr. Sierra and the synopsis of their contributions to the Spanish Society for Research in Mathematics Education since creation is done. It highlights his work as treasurer and president of the Society and has presented papers at various symposia to SEIEM.

Keywords: *SEIEM, Didactic, Mathematical Analysis, History, Mathematics Education*

INTRODUCCIÓN

Como pasa el tiempo, Modesto. Muchas veces recuerdo cuando oíamos el “tararí” desde nuestra clase de “Topo”, en la vieja Facultad de Ciencias, en Valladolid, donde nos hacían sudar la gota gorda, pero donde también disfrutamos de lo que sin duda fueron unos de los mejores años de nuestras vidas, los de estudiantes universitarios, años de los que no puede faltar un recuerdo a los días de nuestro patrón, “San Bourbaki”.

Después, ya licenciados, seguimos caminos distintos y en el 1992 nos encontramos nuevamente como profesionales, docentes e investigadores, en nuestra querida Área de Conocimiento “Didáctica de la Matemática”. Me atrevo a pensar que tu vida profesional tiene que estar llena, sin duda lo está, de muchas satisfacciones y por ello me permito escribir ¡FELICIDADES, DR. SIERRA!

Me toca a mí escribir unas líneas de homenaje a tu persona y lo hago gustoso, con cariño, y quiero que sean con profesionalidad. En ellas voy a intentar destacar tu dilatada e intensa contribución a nuestra Sociedad de Investigación, la SEIEM, y te pido perdón porque, a buen seguro, me dejaré en el teclado algunos pasajes importantes para ti y para todos nosotros.

EL COMIENZO

Tu contribución a la SEIEM es muy dilatada y data desde 1996, cuando dimos los primeros pasos para crear la Sociedad con aquellas jornadas de trabajo que transcurrieron en el Centro de Desarrollo Curricular del Ministerio de Educación y Ciencia (Madrid), en marzo de ese mismo año. En estas jornadas se propuso el nombre, de la Sociedad, se estableció su reglamento, se organizaron sus primeros campos de investigación en Didáctica de la Matemática y se eligió a la primera Junta Directiva de la que formaste parte y asumiste la responsabilidad de ser el tesorero de la Sociedad. El 12 de marzo de 1996, los 34 investigadores en Didáctica de la Matemática presentes, entre ellos el Dr. Sierra, firman el acta de constitución de la Sociedad. A renglón seguido se crearon los estatutos

Ortega, T. (2014). Homenaje al Dr. Sierra. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 609-613). Salamanca: SEIEM.

y se legaliza la Sociedad, hecho que ocurrió en el 4/10/1996 y en el documento firmado y sellado por el Ministerio del Interior también está registrada la firma del Dr. Sierra.

La Sociedad ya está fundada y legalizada. ¿Y ahora qué? Se piensa que la mejor forma de potenciar la actividad investigadora en España es hacerla pública. Con esta voluntad de servicio se crean los simposios nacionales como foros de comunicación, intercambio y fomento de la investigación en Didáctica de la Matemática con una periodicidad anual. Así, en 1997 el Dr. Sierra, que a la sazón tenía su docencia en Zamora, asume la responsabilidad de organizar el primer Simposio de la SEIEM. Se celebra en esta ciudad, que es un Campus de la Universidad de Salamanca, y en él participaron 60 investigadores de 25 universidades. Todo un éxito si pensamos en el número de constituyentes de la Sociedad. El Dr. Sierra escribe la presentación del simposio, modera el Primer Seminario de Investigación y es coeditor de las actas del Simposio. Citando a Popper, el Dr. Sierra afirma que "En la ciencia lo esencial es la actitud crítica", pensamiento y actitud que, me atrevo a pensar, han estado siempre presentes en él.

TESORERO Y PRESIDENTE

El Dr. Sierra asumió la responsabilidad de poner en marcha y organizar la tesorería de la SEIEM. Él fue su primer tesorero desde la creación de la primera Junta directiva, 11 de marzo de 1996, hasta septiembre del año 2000. (Presidente: Luis Rico; Secretario: Eduardo Lacasta; Tesorero: Modesto Sierra; Vocales: Carmen Azcárate, Victoria Sánchez y Luis Puig),. Fue en este año cuando me pasó el testigo y quiero reconocer su labor, ya que continuar algo iniciado es fácil, pero crearlo no tanto. Él me enseñó cómo funcionaba el sistema y, siguiendo su buen consejo, seguí persiguiendo durante un tiempo a los miembros de la Sociedad hasta conseguir que no hubiese devolución de recibos. En este período se obtiene la reconocimiento de Sociedad sin Ánimo de Lucro y se cierran las cuentas de los simposios de Zamora, Pamplona y Valladolid, siendo el Dr. Sierra, además, miembro de los Comités Científicos de estos simposios y coordinador del primer Comité.

Desde septiembre de 2002 hasta septiembre de 2005 el Dr. Sierra asume la presidencia de la SEIEM. Durante este período se celebran los congresos de Granada, La Coruña y Córdoba, la Sociedad participa en el Comité Español de Matemáticas (CEMat), de la Unión Matemática Internacional y se cambia la estructura de los simposios SEIEM. La investigación en el Área se ha ido afianzando y, con el fin de facilitar la comunicación entre las investigaciones que se están desarrollando en diferentes universidades, por primera vez se admiten comunicaciones generales, que son sometidas a doble referee ciego. La responsabilidad última corresponde al Comité Científico, que se encargó de su gestión. Esta estructura se ha mantenido hasta la fecha y con ella los simposios han ganado participación y calidad. En la actualidad se reciben alrededor de 80 trabajos de investigación (comunicaciones generales), que son sometidas a un proceso de arbitraje doble ciego, tan exigente como el de cualquier revista de investigación.

También en este período se cambian las fechas de edición de las actas. Con el fin de que los asistentes dispongan de ellas durante el simposio, éstas se hacen públicas antes de su desarrollo y se entregan con la documentación del mismo. Finalmente, en el VII Simposio, que se celebró en Granada, se creó el Grupo de Investigación "Historia de las Matemáticas y de la Educación Matemática".

PONENTE

En el I SEIEM (Zamora, 1997) moderó el tema de debate que constituyó el Seminario I: "Profesor de Matemáticas y contextos de investigación ¿Cómo abordar la investigación sobre el conocimiento didáctico del contenido en los profesores de matemáticas? Opciones y líneas". En este mismo simposio, junto con las doctoras González y López presentó en el Grupo de Investigación Didáctica del Análisis Matemático el tema de estudio *Límites y continuidad.*

En el II SEIEM (Pamplona, 1998) coordinó el tema de debate: El libro "Elementos de resolución de problemas", cinco años después.

III SEIEM (Valladolid, 1999), junto con los doctores Azcárate y Camacho, presentó la ponencia *"Perspectivas de investigación en didáctica de las matemáticas: investigación en didáctica del Análisis".* En ella hace una breve exposición del Pensamiento Matemático Avanzado y presenta las principales investigaciones realizadas por los miembros del grupo de investigación de Didáctica del Análisis.

IV SEIEM (Huelva, 2000) Coordinador del Comité Científico y Coeditor de las actas de este simposio junto con los doctores Contreras, Carrillo y Climent.

La investigación del Dr. Sierra se desarrolla entre Didáctica del Análisis Matemático e Historia de la Educación Matemática. Así, en el V SEIEM (Almería, 2001), junto con la Dra. González presentaron el taller *"Un problema de optimización a través de diversos libros históricos y de texto"*. En esta ponencia señalan la importancia de estudiar la contribución que los libros de texto han tenido en la Historia de la Educación Matemática y manifiestan cómo en los libros de texto se muestran las corrientes didácticas dominantes, las contradicciones entre las propuestas oficiales y la implementación en los libros, incluso la influencia de los nuevos métodos de impresión en la propia estructura del texto.

VI SEIEM (Logroño, 2002), el Dr. Sierra, participó de manera activa en los debates de los Seminarios de Investigación y en los palleres que se desarrollaron en le grupo de invistigación en Didáctica del Análisis.

En el VII SEIEM (Granada, 2003), con la Dra. González, presentan la ponencia *El método de investigación histórico en la didáctica del análisis matemático*. En esta comunicación describen las cinco fases que determinan el método de investigación histórico (Planteamiento de la investigación, Heurística y crítica, Análisis de la documentación, Hermenéutica y Exposición) y describen las características de estas fases a la vez que las relaciones con algunas de las investigaciones realizadas con él.

En el VIII SEIEM (La Coruña, 2004). Junto con el Dr. Belmonte presentaron el trabajo *Intuición y esquemas conceptuales de infinito: Actualización*. Esta aportación es una síntesis de las investigaciones realizadas en los últimos 25 años sobre el concepto del infinito y las directrices para un trabajo de tesis doctoral.

IX SEIEM (Córdoba, 2005). Continuando con el trabajo anterior y también con el Dr. Belmonte, en el Grupo de Investigación de Análisis Matemático, presentan el trabajo *Algunos elementos para el análisis diacrónico del concepto de infinito.* Es esta comunicación definen las hipótesis de la investigación y de ellas destaco "El carácter contradictorio al que conducen las intuiciones primarias del infinito y la inevitable naturaleza metafórica del lenguaje utilizado dan lugar a una evolución muy lenta de este concepto".

Con la Dra. Codes, también en Didáctica del Análisis Matemático, presentan *"Entorno computacional y educación matemática: Una revisión del estado actual"*. En este trabajo sintetizan las investigaciones más importantes llevadas a cabo en los últimos 20 años que tratan de dar respuesta a preguntas como éstas: ¿cómo utilizar las nuevas tecnologías para enseñar matemáticas?, ¿qué tópicos matemáticos se pueden enseñar en este nuevo entorno?, ¿hay que modificar el currículo, y si es así, cómo?, ¿cuáles son las actitudes de los alumnos hacia el uso de las nuevas tecnologías?

X SEIEM (Huesca, 2006). Con la Dra. Codes presentan "Una primera aproximación al análisis de la comprensión de alumnos de primero de la escuela de informática de la UPSA sobre la noción matemática del concepto de serie numérica". Utilizan el marco teórico del enfoque APOE, y partiendo de una propuesta de una descomposición genética del concepto matemático serie numérica, caracterizan los niveles de desarrollo de este concepto (intra, inter y trans) y se definen subniveles dentro de los niveles de desarrollo intra e inter. Estos subniveles marcan la transición de un nivel de comprensión a otro superior, transición que se manifiesta a través de las acciones que se llevan a cabo sobre los elementos del modelo propuestos en la descomposición genética del concepto de serie.

XI SEIEM (La Laguna, 2007). Con los doctores Codes y Raboso presentan "Innovación en la recogida de datos para una investigación de carácter cualitativo. Un ejemplo con alumnos universitarios en un entorno computacional". En esta comunicación describen como una herramienta de software que captura la pantalla del ordenador en el proceso de recogida de datos aporta un tipo de información muy valiosa. Ella les permite conocer algunos aspectos de la utilización que hacen los estudiantes de una herramienta de cálculo simbólico como Maple y les facilita el proceso de análisis al respaldar la triangulación de los datos obtenidos mediante grabaciones de video.

XII SEIEM (Badajoz, 2008) Con la Dra. Codes presentan "Análisis y clasificación de errores cometidos por estudiantes universitarios en el aprendizaje del concepto de convergencia de serie numérica". En esta comunicación, los autores describen cómo, en el primer análisis de datos recogidos en una investigación en torno al aprendizaje del concepto de serie numérica, se han detectado manifestaciones de diversos errores que dificultan el aprendizaje de dicho concepto, y cómo estos errores aportan pistas sobre los obstáculos y dificultades de los estudiantes al resolver una actividad sobre rectángulos.

XIII SEIEM (Santander, 2009). Es Coordinador del Seminario I. Análisis de los libros de Texto y con el Dr. López-Flores presenta en el Grupo de Investigación en Historia de la Educación la investigación *"Un análisis de la obra de José Mariano Vallejo desde la perspectiva de la investigación histórica en educación matemática",* donde describen los avances en la investigación sobre esta obra en la que aplican la metodología de investigación histórica y tratan de caracterizar la Matemática presente en la obra desde tres puntos de vista, *como saber científico, como materia a enseñar y como materia a aprender*. También en este simposio y en el mismo Grupo de Investigación, con la Dra. Carrillo, presentan *"La evolución de la aritmética como materia escolar. Un análisis de libros de texto desde la revolución francesa hasta el final de la guerra civil española (1789-1939)"*, que se trata del planteamiento de una investigación del campo de la Educación Matemática y se apoya en la Metodología Histórica. El objetivo de este trabajo es describir el proceso evolutivo que ha tenido la aritmética desde su institucionalización como materia escolar en el currículo español, para ello se realizará un análisis de algunos de los libros de texto empleados en España durante la época referida (1789-1939).

XIV SEIEM (Lérida, 2010). En el Grupo de Investigación de Historia de la Educación Matemática, con la Dra. Carrillo, presentan *"Análisis preliminar de manuales escolares de aritmética",* donde describen los avances metodológicos de la investigación presentada en el anterior SEIEM y los resultados de un análisis preliminar de 50 libros publicados por autores españoles en la época mencionada. En el mismo grupo de investigación, con el Dr. López-Flores, presentan *"Un análisis sistémico de la obra de José Mariano Vallejo desde la perspectiva de la investigación histórica en educación matemática: libros para primera enseñanza"*, también describe el avance de la investigación descrita en el SEIEM anterior, que consiste en la realización de un análisis de contenido centrando fundamentalmente en mostrar las estructuras conceptuales, los sistemas de representación usados y la fenomenología. En este escrito se presenta la parte de la obra de Vallejo dedicada a la enseñanza básica.

También estuvo presente en el XV SEIEM (Ciudad Real, 2011). En él intervino en los debates que siguieron a las ponencias de los dos seminarios de investigación y los de las comunicaciones que estaban más relacionadas con sus investigaciones.

También ha participado de forma activa en las reuniones intermedias de los grupos de investigación de Investigación Histórica y de Análisis Matemático, tratando de fomentar la investigación y el espíritu crítico.

El Dr. Sierra sólo ha faltado a los dos últimos simposios y su ausencia ha sido por fuerza mayor. Su andadura, que es muy fructífera en aportaciones a la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática y que es referencia para quienes investigan en temas de Didáctica del Análisis Matemático e Historia de la Educación Matemática, comienza en su querida Universidad de Salamanca (I SEIEM, Campus de Zamora, 1997) y hoy, 17 años más tarde, nos encontramos para reconocer su contribución a nuestra Sociedad de Investigación en su querida Universidad, Decana de las Universidades españolas.

Quiero terminar este pequeño homenaje al Dr. Sierra, con el que me une una amistad desde nuestra época de estudiantes, con unas palabras llenas de sinceridad, de reconocimiento a su dilatada investigación y de cariño. El Dr. Sierra es un trabajador incansable, amante del estudio, un investigador brillante, una persona entrañable, alegre y bondadosa, que sin duda se ha ganado el respeto y el cariño de todos nosotros. También me consta el cariño que profesa a su familia, especialmente a su mujer, Piedad, sus hijas Maite y Natalia, y a su hermano Vicente.

¡FELICIDADES MODESTO!

Referencias

Actas de los sucesivos simposios de la SEIEM.

ÍNDICE DE AUTORES