Universidad de Valladolid

FACULTAD DE EDUCACIÓN DE SEGOVIA

GRADO EN EDUCACIÓN PRIMARIA

TRABAJO FIN DE GRADO

Experiencia de implementación del Modelo de Barras del Método Singapur para la enseñanza de las Matemáticas en 5º de Educación Primaria.

Autora:
Amaya Isabel Delgado Fariña

Tutores académicos:
Belén Palop del Río
Juan José Santa Engracia de Pedro

UVa SEGOVIA

RESUMEN

Debido a la necesidad de dar respuesta a la situación que presenta el alumnado de Educación Primaria en el área de Matemáticas, concretamente en la resolución de problemas, realizamos este trabajo.
Los últimos resultados obtenidos por el alumnado de 4º de Educación Primaria y que recoge el informe "*Trends in Mathematics and Science Study de* 2019 ("TIMSS")", un proyecto de la "*International Association for the Evaluation of Educational Achievement* ("IEA")" revelan la, particularmente deficitaria, situación de España en el área de Matemáticas.

Sabemos qué países lideran los buenos resultados matemáticos en estas pruebas internacionales, por lo que nos hemos interesado, particularmente, en conocer qué metodología emplea Singapur.
Mostramos en el presente trabajo una pequeña investigación con cuatro grupos de alumnos de 5º curso de Educación Primaria de un mismo centro educativo, en la que uno de los grupos será el grupo experimental y trabajará durante unas semanas la modelización de problemas con el Modelo de Barras. El resto de los grupos actuarán como grupos de control y trabajarán sobre los mismos problemas y durante el mismo tiempo, pero con la metodología que se viene utilizando tradicionalmente en el centro.

Los resultados alcanzados manifiestan una clara efectividad del método en cuanto a la capacidad de los alumnos para resolver problemas, así como, una mejora en la competencia matemática del alumnado del grupo experimental con respecto al grupo de control.
Tras la intervención hemos llegado a las siguientes conclusiones: el Modelo de Barras facilita a los alumnos la resolución de problemas (aun cuando se realiza una introducción tardía del método) y la relevancia de la realización de este tipo de investigaciones a pequeña escala en los centros educativos como paso previo a la introducción de cualquier innovación pedagógica, permitiendo al equipo docente verificar si en su contexto y situación es conveniente realizar el cambio.

Palabras clave

Educación Primaria, Matemáticas, Resolución de problemas, Método Singapur, Modelo de Barras, Competencia Matemática, Innovación Pedagógica

ABSTRACT

This study aims towards the necessity to find reasoning behind the situation exhibited by Primary level students regarding Mathematics, specifically focusing on problem-solving.
Considering data from the *International Association for the Evaluation of Educational Achievement* ("IEA")'s project, *Trends in Mathematics and Science Study de* 2019 ("TIMSS"), the latest results obtained by fourth grade primary students, reveal the deficiencies the mathematical field faces in Spain.

The knowledge of which countries lead the charts of this international mathematical assessment, determined the importance of studying the method applied in Singapore.
This project is based on a study performed with four groups of fifth grade primary students from the same school. One out of the four groups were the experimental group, who were introduced to the Bar Method Model and, for weeks, systematically worked on its application in problem solving.
The other three remained as control groups, working along the same period, but continuing to apply the school's traditional methodology.

Results obtained from this study clearly reflect the effectiveness the new method applied had, not only on the students' problem-solving capacity, but also on the overall mathematical competence displayed by the experimental group in relation with the control groups.
Considering the data, the conclusions reached are clear: the Bar Model Method simplifies the problem-solving process for students (even when introduced at higher levels of education). And the importance that small scale studies like this, carry regarding the impact that any type of pedagogical innovation would have on the school, providing teachers with knowledge that allows to better verify the situation and repercussions that these changes would imply, and consequently being able to make better choices.

Keywords

Primary Education, Mathematics, Problem solving, Singapore's method, Bar Method, Mathematical competence, Pedagogical innovation.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo surge ante la necesidad de intentar dar respuesta a la situación que presenta nuestro alumnado en la resolución de problemas matemáticos.

Como refiere el marco legislativo actual, la resolución de problemas debe ser el "eje principal de la actividad matemática", constituyéndose como "fuente y soporte principal" de su aprendizaje.

Sin embargo, y a pesar de la relevancia otorgada a la misma, hemos observado, como también avalan diversas investigaciones e informes oficiales, el número creciente de alumnos que tiene dificultades a la hora de resolver los problemas en nuestras aulas.

No obstante, sabemos que hay países cuyos alumnos llevan años obteniendo muy buenos resultados matemáticos, particularmente Singapur, por cuya metodología para la enseñanza de la Matemáticas nos interesamos en este trabajo, particularmente en lo referente a la resolución de problemas y al Modelo de Barras, la estrategia sobre la que se apoya la resolución de problemas del acreditado Método Singapur.

Presentamos en este trabajo una pequeña investigación con cuatro grupos de alumnos de 5º curso de Educación Primaria (n=76) de un mismo centro educativo en la que uno de los grupos será el grupo experimental y trabajará durante unas semanas la modelización de problemas con el Modelo de Barras. El resto de los grupos actuarán como grupos de control y trabajarán sobre los mismos problemas y durante el mismo tiempo, pero con la metodología que se viene utilizando tradicionalmente en el centro.

Nuestros resultados muestran una clara efectividad del método en cuanto a la capacidad de los alumnos para resolver problemas, así como, una mejora en la competencia matemática de manera general del alumnado en el grupo experimental con respecto al grupo de control.

Concluímos en primer lugar que el modelo de barras facilita a los alumnos la resolución de problemas incluso cuando se realiza una introducción tardía del método, ya que es lo habitual comenzar desde los primeros cursos de Educación Primaria. En segundo lugar, hemos podido comprobar la importancia de la realización de este tipo de investigaciones a pequeña escala en los centros educativos como paso previo a la introducción de cualquier innovación pedagógica, permitiendo al equipo docente verificar si en su contexto y situación es conveniente realizar el cambio.

2. OBJETIVOS

El presente trabajo tiene como principal objetivo llevar a la práctica una experiencia de adaptación al Modelo de Barras para la resolución de problemas del Método Singapur con alumnado de quinto curso de Educación Primaria, con la intención de comprobar si la implementación de una nueva metodología para la resolución de problemas, promueve la construcción de aprendizaje matemático en nuestro alumnado y, en consecuencia, mejora su aptitud y competencia matemática, lo que le permitiría obtener mejores resultados en las futuras pruebas que realice, así como tener una buena apreciación de la Matemática y de lo que puede ofrecerle su aprendizaje para la vida.

Por otra parte, también persigue este estudio conocer y tratar de entender las creencias y la actitud de nuestro alumnado hacia las Matemáticas y cómo afectan éstas, particularmente, a la hora de resolver un problema matemático.

Por último, pretendemos contribuir modestamente con esta investigación a la identificación y análisis de la eficiencia de nuestra propuesta para la mejor adquisición de la competencia matemática en Educación Primaria; aspectos que entendemos deben ser objeto de observación, reajuste y cambio, para intentar revertir la situación actual de nuestro alumnado.

3. JUSTIFICACIÓN

Numerosas investigaciones e informes derivados de pruebas nacionales e internacionales evidencian una baja competencia matemática en el alumnado que cursa la educación obligatoria en nuestro país. Una parte del alumnado que cursa estas etapas:

- no logra alcanzar los objetivos, ni desarrollar la competencia matemática prescrita por el currículo nacional y sus concreciones autonómicas (presentando, principalmente, serias dificultades en la resolución de problemas), lo que convierte a las Matemáticas en un importante filtro dentro del sistema educativo (Defior, 2000), (B. Blanco Otano y L. J. Blanco Nieto, 2009).
- siente que las Matemáticas son difíciles y que no se le da su aprendizaje (Gómez-Chacón, 2000), mostrando rechazo hacia el área porque no entiende ni el origen ni la utilidad de los aspectos matemáticos que estudia.

Los últimos resultados obtenidos por el alumnado de 4º de Educación Primaria y que recoge el informe "*Trends in Mathematics and Science Study* de 2019 ("TIMSS")" un proyecto de la "*International Association for the Evaluation of Educational Achievement* ("IEA")" que cada cuatro años, evalúa y mide, el éxito en el área de Matemáticas, entre otras, del alumnado de 4º de Educación Primaria y 2º de "Educación Secundaria Obligatoria ("ESO")", revelan la, particularmente deficitaria, situación de España en el área de matemáticas.

Analizando este informe con detenimiento, además de constatar que España sigue estando por debajo de la media de los países de la *"Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico ("OCDE")"* y de la *"Unión Europea ("UE")",* podemos encontrar los diferentes indicadores preocupantes que detallamos a continuación:

Con respecto a la competencia matemática (dominios de contenido y cognitivos), los estudiantes obtienen tres puntos menos (una media de 502 puntos) con respecto a la misma evaluación del año 2015, constatando un ligero descenso con respecto a la evaluación anterior (el promedio de la OCDE es de 527 puntos).

La cuestión más importante es el alto porcentaje de alumnos que se encuentran en niveles bajos en Matemáticas: 9% en el nivel muy bajo y 26% en el nivel bajo. Tan solo un 4% del alumnado aparece en niveles avanzados.

Otro dato revelador es que sólo el 37% del alumnado evaluado manifestó sentir gusto hacia las Matemáticas.

También confirma este informe que las alumnas obtienen peores resultados que los alumnos y que continúa incrementándose la brecha de género en matemáticas (15 puntos de diferencia), siendo nuestro país el cuarto de los de la OCDE con mayor diferencia de rendimiento por sexos en el área de Matemáticas, solo por detrás de Portugal, Canadá y Chipre. El aumento de esta brecha de género en los países de la OCDE y de la UE fue de 9 y 11 puntos, respectivamente.

Por otro lado, la evaluación constata que el 53% de los docentes españoles carecen de especialización en aspectos matemáticos (la media de la OCDE es del 43% y la de Singapur se reduce al 11%) y que tan solo un 37% de los maestros en España se han formado en capacitación Matemática en los últimos dos años.

Por último, queremos subrayar que nuestro país ocupa el segundo lugar en referencia a los docentes de matemáticas con mayor grado de satisfacción con su profesión, lo que resulta difícil de entender y correlacionar, a la vista de los resultados obtenidos por su alumnado.

Todo lo expuesto nos obliga como docentes, y por lo tanto corresponsables de esta situación, no sólo a conocer el estado de esta, sino a indagar y encontrar las posibles causas del problema y, en la medida de nuestras posibilidades, contribuir a solventar esta situación.

A lo largo de este trabajo trataremos de identificar el origen de la situación descrita y con objeto de promover cambios que contribuyan a su solución, implementaremos en un aula de 5º curso de Educación Primaria, una experiencia de resolución de problemas mediante el Modelo de Barras del Método Singapur para la enseñanza de las Matemáticas, con la intención de comprobar si la modelización de problemas que propone el Método Singapur consigue la mejora del desarrollo de la competencia matemática en nuestro alumnado.

4. ANTECEDENTES Y FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Pasamos a analizar diferentes aspectos relacionados con la enseñanza de las Matemáticas y la adquisición de esta competencia por parte de nuestro alumnado en la Etapa Primaria, con la intención de conocer el alcance y la implicación actual de los mismos en el proceso de E-A de nuestro alumnado, así como valorar las posibilidades de reajuste y/o cambio de estos factores en la intervención docente en el aula.

4.1. Los problemas matemáticos

Un problema matemático no es lo mismo que una tarea o ejercicio matemático, pese a que tradicionalmente y de manera general, libros de texto y docentes suelen emplear estas nominaciones sin que se ajusten realmente a la actividad que se le proporciona al alumnado. Esta situación se agrava cuando, sin identificar correctamente lo que es un verdadero problema matemático, se pretende medir el nivel de desarrollo de la competencia matemática del alumno a través de ejercicios rutinarios a aplicación de algoritmos, excluyendo así el aprendizaje y desarrollo los vitales procesos cognitivos implicados en la construcción del conocimiento matemático por parte del alumno.

<u>Elementos que intervienen en la resolución de problemas</u>

La resolución de problemas precisa de una serie de mecanismos cognitivos por parte del alumno que Blum y LeiB (2007) explicaron en el "ciclo de modelización matemática" (Figura 1), en el que se integran las fases y los procesos de matematización involucrados en la resolución de un problema.

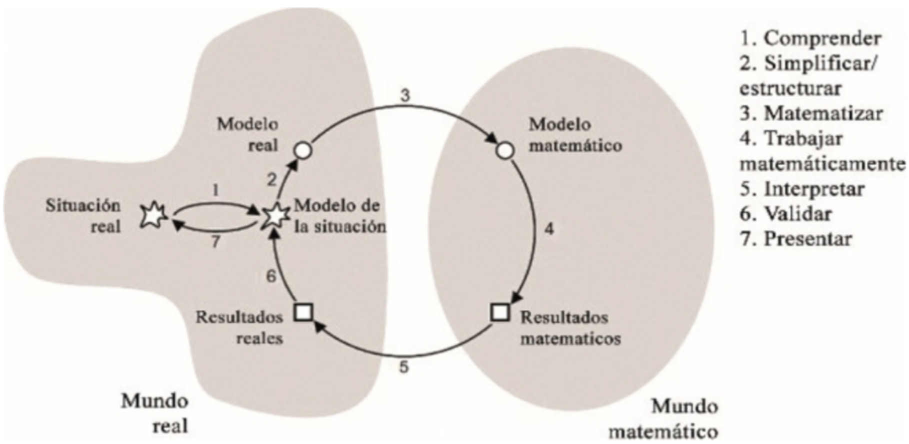


Figura 1. Ciclo de modelización matemática de Blum y LeiB (2007)

Fuente: tomado de Gutiérrez, R., Prieto, J. y Ortiz, J. (2017)

Dichos procesos aparecen a lo largo de las tres fases del ciclo: "modelo real", "modelo matemático" y "resultados matemáticos".

En la primera fase, el alumno interpreta y comprende el enunciado del problema (en función de sus conocimientos previos) y elabora una representación de este (modelo real). A continuación, el alumno debe convertir su representación del problema (modelo real) en términos matemáticos (matematizar) con la intención de obtener un modelo útil para poder resolver el problema. Para ello el alumno tendrá que poner en juego mecanismos cognitivos (interpretar, describir, predecir, explicar y argumentar) adecuados a su competencia matemática.

En la segunda fase, el alumno cuenta con la representación del problema a través de un modelo matemático, finalizando así el proceso de matematización.

Con el objeto de avanzar hacia la última fase del ciclo, el alumno debe aplicar al modelo matemático todos aquellos "hechos básicos", "procedimientos" y "conceptos matemáticos", necesarios para alcanzar unos resultados matemáticos.

En la última fase del ciclo, en la que el alumno ya cuenta con unos resultados matemáticos, tendrá además que interpretarlos, validarlos y presentarlos (Gutiérrez, R., Prieto, J. y Ortiz, J, 2017).

Pólya y la resolución de problemas.

En un inicio, Pólya (1965) presentó las siguientes bases a partir de las cuales un problema sería considerado un buen problema:

- Está considerado como un proceso y no únicamente como unos resultados; y posibilita desarrollar distintas estrategias para poder resolverlo.
- El contexto en el que se desarrolla la resolución del problema resulta interesante para el alumnado y consigue motivarlo; posibilitando, dicha situación, que emplee a fondo sus conocimientos previos, y en la construcción de su nuevo conocimiento, los examine, los modifique o los rechace.
- El resolutor no descubre rápidamente la utilización del algoritmo pertinente; y si se diera este caso, debería buscar otra/-s forma/-s de llegar a la misma solución, explicando el procedimiento seguido.
- La revisión y corrección de los errores cometidos durante el proceso, al propiciar el razonamiento matemático, son considerados una importantísima fuente de conocimiento.

A partir de las propuestas de Pólya (1965), otros muchos autores elaboraron definiciones del término problema.

Pólya, (1965), enumeró también una serie de pasos cuyo seguimiento permitiría solucionar correctamente un problema: 1. "Comprender el problema", 2. "Concebir un plan para llegar a la solución", 3. "Ejecutar el plan", 4. "Verificar el procedimiento" y 5. "Comprobar los resultados". Siguiendo estos pasos el alumno, debe "entender" la situación problemática expuesta y qué es lo que se pide (identificar los datos y la incógnita que se espera que solucione). A continuación, el resolutor podrá concebir un plan de actuación, tras saber qué razonamientos y cálculos tendrá que realizar para averiguar la incógnita (para ello es indispensable tener los conocimientos previos adecuados y experiencia). En la fase de ejecución, el alumno aplicará el plan ideado; para lo que, una vez más, será preciso poner en juego los conocimientos previos, el despliegue de sus habilidades cognitivas y su capacidad de concentración sobre la situación problemática a resolver, con el objeto de que sea escrupuloso y revise cada pormenor. Por último, el resolutor revisará el plan que ideó y los resultados obtenidos como solución. Esto promoverá la consolidación de sus aprendizajes y conocimientos matemáticos, así como una mejor comprensión de la solución a la que logró llegar.

Además de la estructuración de la resolución de problemas en pasos o fases Pólya estableció las bases de la heurística de resolución de problemas, que recoge una serie de estrategias generales que pueden ayudar al alumnado a resolver un problema (buscar regularidades, codificar, organizar (hacer figuras, esquemas), experimentar (ensayo y error), simplificar el problema …

4.2. La resolución de problemas en el currículo

Analizaremos sucintamente la concreción curricular de la C.A de Castilla y León para determinar cómo el alumno debe desarrollar su competencia matemática, y qué papel tiene la resolución de problemas en dicho desarrollo, según la legislación educativa vigente.

El DECRETO 26/2016, de 21 de julio, *por el que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la Educación Primaria en la Comunidad de Castilla y León*, en el ANEXO IB, *Áreas del bloque de asignaturas troncales*, aparecen indicaciones para el área de MATEMÁTICAS que se refieren a la resolución de problemas (sus procesos), como un "eje principal de la actividad matemática", debiendo ser la "piedra angular", "fuente y soporte principal del aprendizaje matemático".

El texto legislativo autonómico recoge en el *Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas* que la resolución de problemas es un "proceso básico e imprescindible en el quehacer matemático", que debe desarrollarse a lo largo de toda la etapa educativa, de forma transversal al resto de bloques de contenido del área, dado que representa un eje fundamental de las matemáticas. También recoge este apartado aspectos relacionados con la "Planificación del proceso de resolución de problemas", así como la relevancia del "aprendizaje de estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas".

Asimismo, dentro del apartado *orientaciones metodológicas*, se indica la necesidad de que el alumnado posea conocimientos matemáticos previos y experiencia para poder afrontar la resolución de problemas. También, dentro de este apartado se incide en que es necesario que, de manera sistémica y recurrente, nuestro alumnado analice y discuta los resultados obtenidos en la resolución de problemas, con el objeto de que participe e interiorice los procesos implicados en la misma.

Hemos comprobado tras esta breve revisión del currículo que los procesos de resolución de problemas son reconocidos como "ejes principales de la actividad matemática", confiriendo a la resolución de problemas, bajo la denominación de "piedra angular de la educación matemática", la relevancia de ser la base de la estructura de todo el conocimiento matemático escolar, para cuyo desarrollo prevé el aprendizaje de estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas.

4.3. La resolución de problemas en el aula

Actitud del alumno frente a la resolución de un problema

Como apuntamos anteriormente, el DECRETO 26/2016 recoge que: "[…] partiendo de los conocimientos matemáticos previos y de la experiencia (el alumnado) pueda establecer sus propias estrategias para resolver las situaciones que se les planteen, eligiendo y analizando distintos caminos y procedimientos para resolver el mismo problema."

En este sentido, el alumnado necesita, previa a la resolución de problemas, controlar todo lo relativo al primero de los tres dominios cognitivos (conocer), que recoge el marco teórico de TIMSS (Fraile, 2017).

Así pues, un alumno de 4º de Ed. Primaria necesita saber (Mullis et al., 2009):

- "Hechos básicos": lenguaje básico matemático (definiciones, propiedades…), sin cuyo conocimiento no se pueden construir los cimientos del pensamiento matemático.
- "Procedimientos": heurísticas, normas, algoritmos…, que sirven al alumnado para conectar los "hechos básicos" y la resolución de problemas. El alumnado debe conocer la existencia de diversos procedimientos para la resolución de problemas concretos (tipología de problemas).
- "Conceptos": estas ideas básicas servirán al alumno establecer categorías y conexiones, lo que le permitirá "ir más allá de lo que sabe".

Todo ello conforma el nivel más básico de conocimiento matemático al que llega el alumnado a través de un aprendizaje asociativo, y en el que es primordial que se produzca la comprensión, la memorización simple, y la fundamental práctica de ejercicios sencillos (Siegler, 2004). Sin la adquisición de este primer nivel de conocimiento matemático, que por otra parte es el que aborda la práctica totalidad de las actividades que aparecen en los libros de texto, "no es posible plantearse el pensamiento matemático con la finalidad de resolver problemas" (Fraile, 2017)

"Aplicar", es el segundo dominio cognitivo y se trata, en líneas generales, de la capacidad del alumnado para utilizar los conocimientos adquiridos en el nivel anterior.

El tercer dominio que debe adquirir nuestro alumnado es "razonar", que involucra su capacidad de pensamiento lógico y sistemático, para formular hipótesis y argumentar la solución a la que ha llegado partiendo del análisis del enunciado del problema.

Además de conocer hechos, procedimientos y conceptos matemáticos, para que un alumno resuelva exitosamente un problema, también entran en juego su actitud, sus emociones y afectos; y sus creencias. Goldin (1988), Gómez-Chacón (1997, 1998) y McLeod (1989a, 1989b, 1992), citados por Fraile (2017)

Nos referiremos al "dominio afectivo" relacionado con la resolución de problemas, y que trata de explicar cómo la dimensión afectiva del alumno representa un aspecto relevante dicho procesos.

Los principales descriptores básicos del dominio afectivo son: las creencias, las actitudes y las emociones; y conforman todas ellas un aspecto importantísimo a tener en cuenta a la hora de evaluar los resultados del alumnado en la resolución de problemas.

Las creencias son subjetivas y parten de las experiencias vividas por el alumno relacionadas con las matemáticas y su proceso de E-A; conectadas con el autoconcepto del estudiante y su relación con el área (tienen una gran carga afectiva); creencias acerca de la enseñanza de las matemáticas y las promovidas por el entorno social del alumno.

La última de estas cuatro categorías está relacionada estrechamente con la brecha de género existente entre los resultados obtenidos por sexos en matemáticas y que confirman los informes de las diferentes evaluaciones realizadas (TIMSS)

Por ello, la labor docente consistirá en implicar activamente al alumno en la resolución el problema; propiciando que sienta confianza y se descubra capaz; con el objeto de que empiece a confiar en sus posibilidades de éxito. Esta implicación personal promoverá en el alumno la realización de un mayor esfuerzo en la resolución de problemas (Fraile, 2017)

Las emociones aparecen como respuesta a un hecho y pueden suponer al alumno una gran carga positiva o negativa. Se trata de respuestas afectivas consecuencia de la interacción entre el proceso de E.A del alumno, la influencia del entorno social y la interpretación propia (Fraile 2017). Estas emociones son de compleja interpretación tanto para el alumno que las siente, como para el docente, que debe observarlas para llevar a cabo una adecuada intervención.

Por último, las actitudes están relacionadas con una predisposición positiva o negativa que condiciona la conducta del alumno y contribuyen a su forma de proceder. Gómez-Chacón (2000) responsabiliza del elevado número de fracasos en el aprendizaje del área a "las actitudes negativas del alumnado" debidas a "factores ambientales y personales".

No obstante, y siguiendo el discurso de Fraile (2017) "La implicación activa del alumno en el proceso de aprendizaje aumenta cuando se siente competente, cuando confía en sus propias capacidades y tiene altas expectativas de autoeficacia, valora positivamente las tareas y se implica en las mismas" por lo que el papel del docente es vital a la hora de facilitar situaciones a su alumnado que promuevan las actitudes anteriormente descritas.

De igual forma, y dado que el error forma parte del proceso de E-A de nuestro alumnado, se debe propiciar un clima en el aula en el que los alumnos se sientan seguros cuando cometen errores "corregir los propios errores requiere un espacio seguro para cometerlos" (Morales, 2019). Es fundamental que los alumnos interioricen que deben intentar, cuántas veces precisen, aquello que "no les sale" y que el hecho de seguir intentándolo ya es motivo de valoración positiva y las sucesivas equivocaciones derivadas del esfuerzo, de la práctica y del empeño, jamás acarrearán valoraciones negativas. Si el docente no gestiona adecuadamente "el error" en clase, su alumnado podría generar rechazo "al riesgo o a la intentona, o incluso a expresar sus dudas en el aula" (Morales, 2019) y así, al no solventar sus conflictos cognitivos, no conseguiría adquirir y consolidar aprendizajes duraderos.

No basta con que el profesor detecte el error para que el alumno aprenda. Quien está aprendiendo es quien puede corregir sus propios errores para que se produzca el aprendizaje. Si logramos que las aulas sean espacios en los que los alumnos se sientan con confianza para cometer errores multiplicaremos sus oportunidades de aprender." (Morales, 2019)

Además de lo expuesto hasta ahora, y como veremos a continuación, existen más factores implicados en la exitosa resolución de un problema matemático: el adecuado nivel de comprensión lectora del alumno (vocabulario, conocimientos previos…); los aspectos/estrategias inadecuadas que el alumno emplea y debe "desaprender" (búsqueda de palabras clave para asociación de algoritmos...), la "calidad" y pertinencia del problema presentado (papel del docente) ...

Comprensión lectora y resolución de problemas en Educación Primaria

La comprensión lectora es una habilidad imprescindible en el proceso de E-A de cualquier área. En matemáticas, la lectura comprensiva del enunciado de un problema implica, además de la comprensión general del texto (vocabulario, intencionalidad…), la traducción de una situación (cotidiana o no) a expresiones matemáticas, lo que obliga a interpretar el vocabulario del texto del problema y en ocasiones, puede ocurrir que el significado de alguna palabra del enunciado resulte confuso para el alumno.

Autores como Beyer (1998) señalan que parte de las dificultades que encuentran los alumnos en la resolución de problemas se debe al insuficiente dominio tanto del lenguaje natural como del lenguaje matemático.

Por todo ello es necesario, como ya hemos apuntado, por una parte, que los alumnos cuenten con un desarrollo competencial adecuado al nivel que cursan y por otra, que los enunciados de los problemas que se les faciliten presenten un vocabulario conciso, sin ambigüedades, para facilitar la comprensión de éste. También en este sentido, la sintaxis del enunciado debe ser clara y precisa con el objeto de contribuir al éxito del proceso de resolución.

Aprendizaje de "pseudoestrategias" para resolver un problema

Cuando el alumno encuentra dificultades para visualizar el puzle completo que conforman las diferentes piezas del enunciado (datos, incógnita, relaciones entre ellas…), así como qué lugar ocupa cada una de estas piezas dentro del puzle, suele recurrir a "pseudoestrategias" para, sin comprenderla, intentar resolver la situación problemática que se le ha planteado.

Así, por ejemplo, el alumno busca en el enunciado "palabras clave" (más, menos…) que podrían indicarle la operación que debe realizar. Sin embargo, en muchas ocasiones, estas palabras pueden inducirlo a error, o lo que es aún peor, que resuelva el problema, sin entenderlo.

A esto se refiere Rizo y Campistrous (1999), citado por Pérez y Ramírez (2011), explicando que "lamentablemente esta estrategia es enseñada por maestros bien intencionados que no tienen un sentido de sus límites."

Otro de estos "elementos clave" para Puig y Cerdán, (1988) es el emplazamiento del problema dentro de un tema o unidad didáctica determinada en el libro de texto, lo que promovería que el alumno emplease un algoritmo concreto para resolver el problema: el que están "dando" en ese momento. En resumen, estos erróneos procedimientos sustituyen el necesario análisis por parte del alumno del enunciado del problema y la búsqueda pertinente de estrategias adecuadas para su resolución.

Actitud del docente frente a la resolución de problemas en Educación Primaria

A pesar de que el currículo vigente deja claro el papel central de la resolución de problemas en el aula de Primaria, ya sea porque el docente entiende la misma como la práctica aislada de un algoritmo o fórmula matemática en particular, o la aplicación de un procedimiento de reciente explicación, ubicado en el actual tema o unidad didáctica del libro de texto; o bien porque desconoce cómo debe enseñar a su alumnado a resolver problemas; lo cierto es que los alumnos, en la sesión destinada al área de Matemáticas, generalmente, no resuelven problemas matemáticos, sino que realizan ejercicios y tareas, muchas veces sin analizar la situación planteada, y aplicando el algoritmo o procedimiento que se haya explicado recientemente.

De esta manera el alumno cree que su papel frente a la resolución de problemas es la de estar pendiente de la explicación del docente, memorizarla y emplear ese aprendizaje para intentar resolver el próximo problema, lo que supone un aprendizaje memorístico, a través de repetir problemas del mismo tipo (Goméz-Chacón, 2000).

Como ya apuntamos al inicio de este trabajo, la última evaluación TIMSS realizada, constata que el 53% de los docentes españoles carecen de especialización en aspectos matemáticos y que tan solo un 37% de los maestros en España se han formado en capacitación Matemática en los últimos dos años. Por ello es preciso que los docentes, a través de la formación continua, amplíen sus conocimientos y se actualicen en relación con la didáctica de la resolución de problemas y los fundamentos teóricos de la misma, así como en el conocimiento de nuevas metodologías cuya aplicación está cosechando éxitos en las pruebas internacionales a las que concurren también nuestros alumnos.

Sin lugar a dudas, mostrar este nivel de interés hacia el proceso de E-A del que el profesorado forma parte, contribuirá a que la resolución de problemas se convierta en el centro de la actividad de la clase de matemáticas y a plantear entonces verdaderos problemas matemáticos que inviten al alumnado a su resolución a través del descubrimiento, el razonamiento y la creatividad; en definitiva, desarrollar la resolución de problemas como una actividad de pensamiento, que promueva el esfuerzo cognitivo (Pérez y Ramírez 2011).

Este conocimiento de la didáctica, como proponen tras sus investigaciones y estudios diferentes autores y expertos en el área (Pérez y Ramírez 2011), permitirá al decente, además:

- Realizar una selección de los problemas (de redacción clara y vocabulario accesible y preciso) que promuevan el análisis, la reflexión y el razonamiento; sabiendo desechar aquellos enunciados que invitan al estudiante a una resolución mecánica y rutinaria.
- Secuenciar la presentación de estos, siguiendo una gradación ascendente en nivel de dificultad, que esté en consonancia con el desarrollo psicoevolutivo de su alumnado (ni tan fáciles como para prescindir de la reflexión, ni tan difíciles como para frustrarlos en su resolución)
- Proporcionar problemas contextualizados, que planteen situaciones que el alumno podría tener que resolver en la vida real y animarlo a que plantee su resolución como lo haría fuera del aula. Situaciones-problema en las que el alumnado reconozca la utilidad y el sentido que tiene el aprendizaje de las matemáticas, estableciendo conexiones entre lo aprendido en el aula y sus actividades cotidianas (Blanco, B. y Blanco, L. 2009).
- Seguir los principios instruccionales propuestos por Lester (2013), citado por Tarín y Tárraga (2021): el principio de compromiso prolongado: para que el alumnado mejore en la resolución de problemas, tiene que "trabajar en tareas problemáticas de una manera regular, durante un período prolongado de tiempo"; y el principio de variedad de tareas: los estudiantes progresarán como resolutores de problemas "sólo si se les brindan oportunidades para resolver una variedad de tipos de tareas problemáticas"
- Implementar nuevos métodos para la resolución de problemas (como el Modelo de Barras del Método Singapur), proporcionándoles así herramientas y recursos para descubrir de forma autónoma las incógnitas planteadas.
- Orientar y entrenar al alumnado en el uso de técnicas heurísticas adecuadas para el análisis del problema: alentar al alumnado a predecir la solución al problema, le posibilita saber si las operaciones que han efectuado son acertadas; lo que evitará que dé por buenos resultados ilógicos fruto de la aplicación de un procedimiento aprendido de forma mecánica, en lugar de los provenientes del análisis y el razonamiento; hacer ver a alumnado que no existe una manera única de resolver problemas; y animarlo a que pruebe una y otra vez hasta que logre encontrar la incógnita planteada de la forma más autónoma posible.
- Fomentar la curiosidad y la motivación del alumnado a través de la resolución de problemas.

También, en aras de conseguir unos problemas de mayor calidad y accesibilidad para el alumnado, existen investigaciones que indican la conveniencia de enriquecer los enunciados de estos situacionalmente (añadir información no matemática que ayude al alumnado a comprender mejor la situación en la que se da el problema) ya que esto ayuda al alumnado en su comprensión y resolución, (Tarín y Tárraga, 2021).

Por todo lo expuesto, es obvio que el papel que el docente asuma frente a la resolución de problemas en particular, y ante el proceso de E-A de las Matemáticas en general, será uno de los condicionantes que pueden contribuir al éxito o fracaso de su alumnado en el área.

En este sentido, "un instrumento ágil y muy útil para averiguar dónde está el alumno y la naturaleza de sus dudas o dificultades" es la "pregunta bisagra" (Morales, 2020).
Este tipo de pregunta debe ser concisa y puede realizarse en la mitad de una secuencia de instrucciones, para ver si el alumnado está listo para continuar; o al final de una sesión para comprobar que los alumnos han entendido aquello que se proponía; también al inicio de una clase para hacer un barrido del conocimiento inicial y saber cómo orientar la explicación del contenido…
Lo más interesante de este tipo de evaluaciones, es que permiten que el docente actúe de manera simultánea e inmediata, controlando y asegurando la eficacia de su intervención en el proceso de E-A del alumnado, ya que le posibilitan un análisis de la situación (detectar errores, carencias, dificultades del alumnado…) en medio del proceso, y así poder, sobre la marcha, tomar decisiones didácticas (modificar, ampliar, retomar, parar...) reajustando el proceso de E-A a lo que su alumnado precisa en cada momento.
De la manera tradicional, por ejemplo, sólo se evalúa una unidad didáctica tras su finalización, y muchas veces cuando el alumnado ya está inmerso en la siguiente, lo que no permite al docente realizar una evaluación formativa del mismo, ni proporcionarle la ayuda precisa para que comprenda en profundidad los aspectos mal asimilados, hasta que se vuelva a incidir en esos conocimientos, generalmente en la unidad didáctica de turno en el siguiente curso escolar.
Se trata, por tanto, de integrar la evaluación en la instrucción diaria, fundamentando las decisiones que toma el docente en qué revelan los datos, más que guiarse por los datos en sí mismos.
Las preguntas bisagra deben diseñarse de forma que permitan una rápida y sencilla recopilación de la información por parte del docente. Su creación debe otorgar a las respuestas incorrectas un papel tal, que asistan al docente en el conocimiento, no sólo de qué alumnos no entienden, sino saber qué es lo que no entienden.
La gran parte de las preguntas bisagra se presentan en formato de selección múltiple y es interesante que cuenten varias opciones posibles de las que sólo una es correcta o incluso con más de una respuesta correcta, ya que así, la respuesta del alumnado provee de mayor y más precisa información al docente.
También es relevante entender que tanto los alumnos que dan respuestas correctas como los que se equivocan al hacerlo deben dar sus razonamientos, ya que existe la posibilidad de que un alumno que haya respondido acertadamente, lo haya hecho a través de un razonamiento erróneo o del azar. Siendo más graves los "falsos correctos" que los "falsos negativos" ya que los estudiantes no entienden algo que están haciendo. "Esto es un problema de validación, ya que partiendo de la respuesta del alumno buscamos hacer deducciones sobre la calidad del procedimiento cognitivo del estudiante" (Wylie y Wiliam, 2006).

El empleo de las preguntas bisagra, supone basar el desarrollo de la sesión en tantos elementos como alumnos con los que cuente la clase, ya que, en función del número e interpretación de sus respuestas, la sesión puede tomar diferentes caminos. De ahí la necesidad de la elaboración de preguntas bisagra de calidad que reporten al docente la "cantidad justa de información que permita evaluar y dirigir mejor las clases, pero sin llegar al punto en el que la evaluación le quite tiempo a la instrucción." (Wylie y Wiliam, 2006)

Con respecto a la selección de las preguntas, Falmagne, Cosyn, Doignon & Thiéry (2003), citados por Wylie y Wiliam (2006) muestran que la eficiencia de una evaluación sobre la "masterización" de un dominio, puede aumentar sustancialmente haciendo uso de la propia estructura interna del dominio. Si lo que pretendemos es que el alumno controle todo el dominio, deberíamos centrarnos en la menor cobertura de este, siendo ésta, el sub-espacio, o la parte más efectiva. El alumno que domine ese subespacio tendrá el dominio completo "masterizado".

Por último, una parte crítica de la práctica con las preguntas bisagra, es hacer la conexión entre las respuestas incorrectas y concepciones comunes del alumnado. Un docente consigue centrarse en el aprendizaje necesario, si sabe cuáles son las dudas o errores habituales de sus alumnos, es decir, qué, normalmente, les cuesta más, y no sólo sabiendo qué les está costando en un momento concreto.

En resumen, la correcta elaboración de una pregunta bisagra, debería posibilitarnos la obtención de "información precisa sobre qué sabe cada alumno y, sobre todo, qué no sabe y por qué motivos no lo sabe (por qué se equivoca un alumno)" (Morales, 2020). Como ya hemos apuntado, es muy importante que a la hora de confeccionar la pregunta bisagra tratemos de evitar que la misma se pudiera responder de manera acertada, pero siguiendo procedimientos erróneos.

Para concluir este apartado, y a modo de resumen, la acción del maestro de matemáticas en relación con la resolución de problemas debe ocuparse de proveer (seleccionar, reescribir, inventar …) y facilitar una gran variedad de verdaderos problemas matemáticos, secuenciados y presentados a su alumnado siguiendo una gradación de dificultad acorde al desarrollo de su proceso de E-A. El docente, Como guía en el proceso de resolución de un problema, también es de vital importancia, ya que debe, inicialmente, constatar que el resolutor entiende el problema; a continuación, si es preciso, debe auxiliarlo, a través de interrogantes y consejos, en el diseño de la estrategia para resolverlo. Durante el desarrollo de la estrategia, el docente insistirá en que el resolutor sea cuidadoso y metódico, comprobando la exactitud de cada paso ejecutado; y una vez finalizada la resolución establecerá relaciones pertinentes con otro tipo de problemas de razonamiento análogos, para favorecer su aplicación en otros contextos problemáticos, que incluyen la vida real.

Y cuando todo lo anterior no sea suficiente, el docente debe seguir buscando la manera de que su alumnado afronte de manera exitosa la resolución de problemas. Una buena forma de iniciar esa búsqueda es mirar hacia aquellos lugares que obtienen buenos resultados en ese sentido, es decir, aquellos donde se consigue que el alumnado logre construir su conocimiento matemático y allí, en lo más alto de la lista encontramos a países como Singapur.

4.4. El Método Singapur para la enseñanza de las Matemáticas

A principio de los años 80 el gobierno de Singapur comenzó a preguntarse por qué su alumnado tenía un rendimiento tan bajo en Matemáticas y tras un análisis de la situación auspiciado por el profesor de Matemáticas británico Richard Skemp, concluyeron que se debía a tres grandes errores que estaban cometiendo en sus aulas derivados de la equivocada creencia en que las Matemáticas consistían en hacer cálculos. Estos tres aspectos detectados fueron los siguientes:

- Pedir a su alumnado que hiciera muchos cálculos tediosos.
- Enseñar las Matemáticas de una manera procedimental y rutinaria (aprender procedimientos rutinarios)
- Hacer que sus alumnos aprendieran Matemáticas de memoria (memorización rutinaria)

Skemp advirtió que en el proceso de E-A matemático, se debe enseñar la comprensión de los procedimientos de forma paralela a la comprensión de los conceptual, lo que consideró llamar "entendimiento instrumental y "comprensión relacional".

Las teorías de Skemp, y de otros autores que veremos a continuación, tuvieron una influencia significativa en el método para la enseñanza de las Matemáticas que hoy sigue Singapur, y que como el propio país reconoce, conforman un compendio surgido de la de revisión y recopilación de aquellos aspectos de eficacia demostrada de las concepciones clásicas de la Matemática occidental del siglo XX.

A partir de aquí, una intervención gubernamental dio paso a la implementación del Método en el país, elaborando los libros de texto y formando a los docentes.

Tan solo tres años después de la introducción de este método, sus alumnos comenzaron a obtener mejores resultados en las pruebas internacionales, resultados que se mantienen hasta el día de hoy.

A continuación, explicaremos algunos aspectos de las teorías del aprendizaje que respaldan este Método de E-A de la Matemáticas.

Fundamentación del Método Singapur.

El Método Singapur, aglutina diferentes aspectos provenientes de diversas teorías del aprendizaje. Las aportaciones de Jerome Bruner, Zoltan Dienes y Richard Skemp son claves en el método, convirtiéndose en sus principios pedagógicos.

Jerome Bruner: enfoque CPA y currículo en espiral.

Bruner expone que el aprendizaje se da por un "procesamiento activo de la información" que el alumno organiza y construye por sí mismo.

Este autor entiende que el proceso de aprendizaje sigue un camino que parte de lo concreto, pasando por lo pictórico, para llegar finalmente a lo abstracto. A este "tránsito" se lo denomina "enfoque

CPA". Se trata de una progresión, acorde a las capacidades y habilidades cognitivas del alumnado, en la que la construcción de conocimiento matemático se relaciona con los tipos de representación. De esta manera, en los niveles inferiores de la etapa, el alumnado partiría de lo concreto, lo manipulativo, para interesarse y aprender los conocimientos matemáticos asumibles en este estadio (acordes a su desarrollo psicoevolutivo). En los siguientes niveles (2º/ 3º de Primaria), se aprenden formas de representar pictóricamente los conocimientos matemáticos ya adquiridos a través de la manipulación. Como veremos más adelante, el Modelo de Barras encaja con el paso intermedio (pictórico) del enfoque CPA. El alumnado utilizará una representación pictórica (barra) para representar la información relevante del problema: las cantidades matemáticas (conocidas o no) y sus relaciones. Esta visualización del problema lo ayudará a comprenderlo y resolverlo. A partir de aquí, en los niveles siguientes, el alumnado formaliza (proceso de abstracción) lo aprendido hasta ahora (definiciones, reglas, fórmulas…)

Bruner plantea en este tránsito un enfoque en espiral organizando el aprendizaje de tal manera que se favorezca la construcción, por parte del alumno, de un conocimiento y una comprensión más profunda de la Matemática, a través de una revisión periódica de los conocimientos que, en consonancia con la perspectiva del enfoque CPA, promoverá en el alumnado, para un mismo aspecto matemático, un conocimiento manipulativo del mismo (concreto); una representación pictórica (visualización profunda del aspecto matemático en cuestión) y el paso a la construcción de una idea matemática del aspecto tratado desde el inicio de la etapa (abstracción).

Zoltan Dienes: variabilidad sistemática.

Dienes propone presentar al alumnado los diferentes aspectos matemáticos a través de unas tareas variadas facilitadas de forma sistemática. Esto potencia el aprendizaje partiendo de la presentación de una misma realidad matemática a través de múltiples procedimientos matemáticos. Además de proporcionar al alumnado esta variabilidad Perceptual, también será un objetivo del docente facilitarle situaciones en las que verbalice los procedimientos seguidos en la construcción de su conocimiento. Así el docente podrá comprobar "el nivel de comprensión real que tiene el alumno sobre aquello que está haciendo" (Zúñiga, 2013).

Richard Skemp: comprensión instrumental y conceptual.

Este autor aporta al docente de matemáticas una perspectiva sobre" la comprensión" en las Matemáticas y distingue dos tipos de comprensión: la comprensión instrumental (que permite al alumnado hacer una operación) y la comprensión conceptual (que posibilita al alumno explicar el procedimiento que ha seguido).

El proceso de E-A del alumnado debe promover la interacción de ambos tipos de comprensión, ya que Skemp explica que carece de sentido la realización de operaciones matemáticas si se desconoce por qué han de hacerse.

El alumno debe saber qué conceptos matemáticos avalan el procedimiento que ha realizado y además tiene que ser capaz de verbalizarlo.

Siguiendo el enfoque del autor, el Modelo de Barras del Método Singapur permite al alumnado llegar a una comprensión profunda del problema a través de la visualización de éste, lo que le permitirá explicar, razonadamente, tanto la elección de los procedimientos como las operaciones que empleará en su resolución.

La resolución de problemas y el Modelo de Barras

Una característica fundamental del Método Singapur es el Modelo de Barras, consistente en una modelización de problemas matemáticos que permite una viva comprensión matemática desde un enfoque no aritmético, lo que nos insta a replantear la didáctica de la resolución de problemas. Se trata de que el alumno identifique y "dibuje" la información relevante (explícita e implícita) del problema utilizando diferentes barras (rectángulos) para representar cantidades (conocidas y desconocidas); de tal manera que las barras (su tamaño, disposición y correcto etiquetado) expresen la relación que existe entre los diferentes datos del problema. Esta representación visual de la situación del problema ayudará al alumno a decidir la forma adecuada de resolverlo.

Esta estrategia posibilita al alumnado elaborar un modelo pictórico que represente la información que aparece en la situación problemática; y como ya apuntamos anteriormente, no sólo le permite representar la información que "ve" en el problema, sino que también le posibilita identificar aquella información que el problema no muestra a simple vista. Esta completa visualización de la información del problema facilita una comprensión profunda del mismo.

La experiencia de adaptación que llevaremos a cabo en el aula de 5º curso de Primaria, a través de la implementación de la estrategia del Modelo de Barras para la resolución de problemas, mostrará el trabajo que realiza el Método Singapur en la parte central del tránsito Concreto-Pictórico-Abstracto.

Cabo, Moreno y Bazán (2007), recogen los pasos a seguir en la aplicación del Modelo de Barras:

- Leer con atención el problema completo.
- Identificar los sujetos del problema.
- Dibujar una barra unidad para cada uno de ellos.
- Leer el problema de nuevo, haciendo paradas en cada dato numérico del enunciado.
- Etiquetar las barras unidad con los datos suministrados por el enunciado.
- Identificar la cantidad desconocida que constituye la pregunta del problema y etiquetarla.
- Realizar las operaciones correspondientes y escribir el resultado en el gráfico.
- Redactar, como una oración completa, la solución del problema. (Cabo, Moreno y Bazán, 2007).

A modo de resumen, destacaremos los aspectos fundamentales en la aplicación del Modelo de Barras:

- Realizar de manera correcta (realista) la representación gráfica del enunciado. Es importante observar si el alumnado mantiene la proporción entre las cantidades a la hora de hacer las barras, lo que nos informaría que su sentido numérico está bien desarrollado (Palop, B. y Ramos, P. A., 2020).

- Etiquetar cada rectángulo o fragmento de él, con el valor que representa, así como etiquetar con signos de interrogación las barras de valor desconocido y con flechas bidireccionales (que abarquen la porción a averiguar) y signos de interrogación, la partes de éstas de las que desconocemos su valor (Urbano, S., Fernando, J. y Fernández, M., 2016).
- Reducir a la unidad, reconociendo las porciones de los rectángulos que son "unitarias" y que facilitarán al alumnado realizar comparaciones entre rectángulos o porciones de éstos y poder reconocer así las relaciones entre los diferentes valores. (Urbano, S., Fernando, J. y Fernández, M., 2016)

En definitiva, este enfoque de construcción de conocimiento matemático, a diferencia del enfoque abstracto, da la oportunidad al alumnado de enfrentarse a los enunciados de los problemas matemáticos con mayor confianza ya que permite visualizar mejor las relaciones entre cantidades (Palop, B. y Ramos, P. A., 2020).

Se exponen a continuación las diferentes variantes que pueden ser abordadas a la hora de resolver un problema mediante el modelo de barras. Para una mejor comprensión de los modelos se añadirán en el Anexo 1 ejemplos de cada una de las situaciones expuestas.

Modelo Partes-Todo

Este modelo representa problemas en los que hay un todo y varias partes que componen ese todo; y tiene por objeto organizar una correspondencia cuantitativa entre esas partes y ese todo.

El alumnado, tras la lectura del enunciado debe dibujar, de modo consecutivo, las barras que representan los datos (conocidos o no), de tal manera que el dibujo de ambas barras genera una barra de mayor tamaño que representará el todo. El alumnado, a continuación, etiquetará con cantidades y signos de interrogación las diferentes barras que ha dibujado.

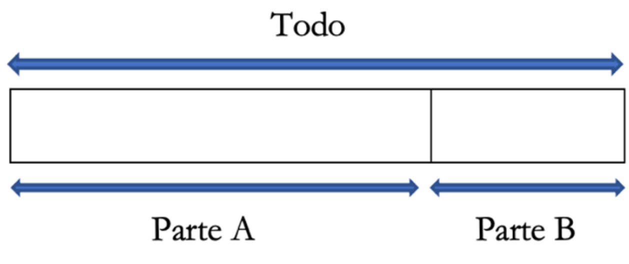


Figura 2. Modelo Partes-Todo que implica adiciones y sustracciones.

Fuente: elaboración propia.

Una vez que se presenta el enunciado gráficamente (con barras), ya el resultado (y las operaciones que debe efectuar para llegar a él) no suele ser difícil de intuir por el alumno. (Palop, B. y Ramos, P. A., 2020). El alumnado resolverá, con esta variante, problemas que precisen para su resolución sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, fracciones… Así encontramos los siguientes tipos:

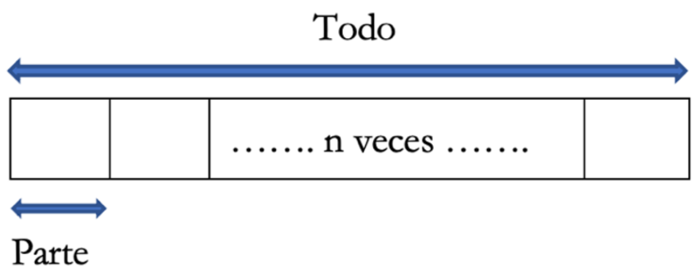


Figura 3. Modelo Partes-Todo que implica que una cantidad es n veces la otra y el uso de divisiones (repartos y agrupaciones) y multiplicaciones.
Fuente: elaboración propia.

El modelo anterior es aplicable, igualmente, a problemas en los que uno de los valores es un múltiplo del otro.
También con fracciones, el modelo Partes-Todo, permite una compresión profunda del problema. Así por ejemplo encontraríamos el siguiente tipo, con múltiples variantes, en función de las cantidades e incógnitas, conocidas o no; que desarrollaremos en el Anexo 1.a

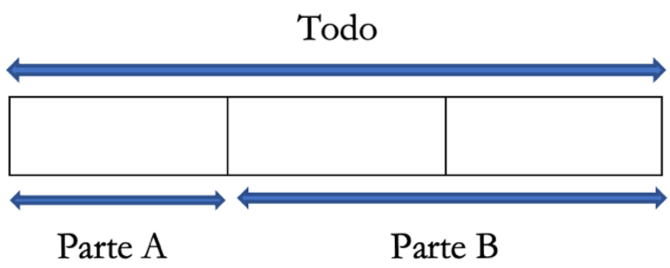


Figura 4. Modelo Partes-Todo que implica el uso de fracciones.
Fuente: elaboración propia.

Será de vital importancia aquí, insistir y comprobar que el alumnado dibuja las diferentes partes que conforman el todo de idéntico tamaño con el objeto de que esta representación permita al alumno identificar la barra unidad. Llegados a este punto, igualmente debe entender la diferencia entre una unidad y una barra unidad, "que es un conjunto de unidades relacionado con diferentes magnitudes del problema (conocidas o desconocidas) que utilizaremos para relacionar unas cantidades y otras". (Urbano, S., Fernando, J. y Fernández, M., 2016).
Como comprobaremos posteriormente, la fortaleza de esta modelización reside en que la representación clara de los datos del problema posibilita al alumno poder establecer la operatoria que relaciona unos datos con otros.
En los problemas 1.a, 1.b, 2.a, 2.b, 2.c, 3.a y 3.b situados en el Anexo 1.a, aparecerán detalladas y resueltas, las diferentes variantes que hemos presentado anteriormente para el Modelo Partes-Todo.

<u>Modelo de Comparación</u>

Esta variante se emplea en problemas en los que la estrategia más efectiva es comparar dos situaciones diferentes y en ellos estableceremos la siguiente relación cuantitativa entre las cantidades que aparecen en él: cantidad mayor, cantidad menor y diferencia entre ambas, comparando así las situaciones planteadas en el enunciado.

El alumnado, tras la lectura del enunciado debe dibujar, una barra para cada situación, situándolas una encima de la otra. Dichas barras, de diferente longitud, ilustran las cantidades que aparecen en el problema (Figura 5). Además, si el enunciado implica hallar el total de los valores representados en las barras, el alumnado dibujará verticalmente, a un lado de las barras, un corchete cuya amplitud abarque los dos rectángulos (Figura 6). Por último, el modelo se etiquetará correctamente, con cantidades y signos de interrogación, las diferentes barras que ha dibujado.

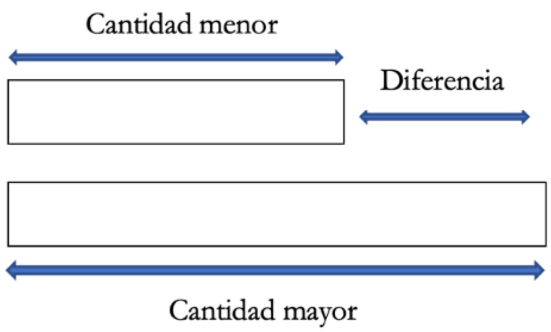


Figura 5. Modelo de Comparación que implica adiciones y sustracciones.

Fuente: elaboración propia.

En esta aplicación encontraríamos tres alternativas: conocer las dos cantidades y que nos pregunten por la diferencia; o bien conocer cualquiera de las dos cantidades, así como la diferencia entre ambas y que la incógnita del problema sea la cantidad desconocida.

A continuación, mostramos la modelización que realizaremos cuando el total está implicado en el problema, bien como incógnita o como dato del enunciado.

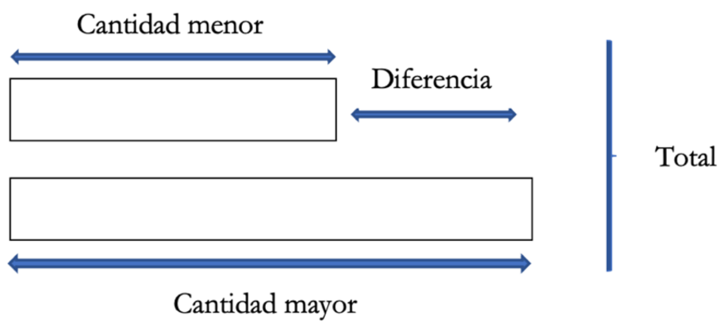


Figura 6. Modelo de Comparación que implica adiciones y sustracciones e involucración del total.

Fuente: elaboración propia.

En problemas en los que el Modelo de Comparación implique productos o divisiones con involucración del total, podemos emplear también el Modelo Partes-Todo que implica también estos algoritmos.

Como hemos podido observar hasta ahora, igual que ocurre con el modelo Partes-Todo, desde que el alumnado "dibuja" el problema, le será muy intuitivo reconocer qué operaciones lo resolverán.
Tras lo expuesto, concluimos que ambas variantes de modelización se aplican, generalmente, a una tipología de problemas concretos. El conocimiento de esta metodología por parte del alumnado y el entrenamiento en la misma le posibilitará el desarrollo de la capacidad para elegir el modelo más adecuado a cada problema. (Urbano, S., Fernando, J. y Fernández, M., 2016).
En los problemas 1.a, 1.b, 1.c, 2.a, 2.b, 3.a y 3.b, situados en el Anexo 1.b aparecerán detalladas y resueltas, las diferentes variantes que hemos presentado anteriormente para el Modelo de Comparación.
El Método Singapur para la enseñanza de las Matemáticas introduce estas dos variantes del método: Partes-Todo y Comparación (modelos elementales) en 2º curso de Educación Primaria (Palop, B. y Ramos, P. A., 2020) y aunque también recoge esta metodología el Modelo Antes-Después, el mismo no será objeto de presentación en este trabajo debido a que la corta duración (18 sesiones) de nuestra experiencia de implementación del Modelo de Barras, no permite su aprendizaje, el cual pospondremos para una futura intervención.

5. MARCO METODOLÓGICO

Una vez realizado el estudio documental que nos ubica el proceso de E-A de la resolución de problemas y en la competencia matemática, en particular, la competencia en la resolución de problemas del alumnado que cursa Educación Primaria en España, procedemos a detallar el estudio cuantitativo que nos permite contrastar la percepción de los problemas y la efectividad en su resolución en alumnos de 5º curso de Educación Primaria, con y sin la implementación del Modelo de Barras del Método Singapur para la enseñanza de las Matemáticas. Para ello se seleccionó un grupo experimental en el que implementar la modelización de barras y una muestra comparable conformada por tres clases del mismo centro educativo como grupo de control. La totalidad del alumnado de los agrupamientos cursa el mismo nivel educativo, cuenta con un número similar de alumnos y pertenece al mismo centro escolar.
En los siguientes epígrafes abordaremos todos los detalles de la segunda parte de nuestro trabajo.

5.1. Enfoque de la investigación

El método de investigación empleado en este trabajo es cuantitativo. Siguiendo la aplicación del método científico y mediante la observación de los datos obtenidos, transitamos por las siguientes fases de este enfoque:

1. Observación y valoración de fenómenos.
2. Establecimiento de conjeturas e hipótesis derivadas de la fase anterior.
3. Comprobación del grado de fundamento de las ideas propuestas previamente.

4. Revisión de las hipótesis tomando como base el análisis de los datos obtenidos.
5. Propuesta de nuevas intervenciones con el objeto de clarificar, cambiar o fundamentar mejor las hipótesis o generar nuevas.

El desarrollo de la presente investigación cuenta con las cualidades más relevantes del enfoque cuantitativo que a continuación se relacionan:

- La elección de nuestra idea de partida se ve transformada en diversas preguntas, y estas originan varias hipótesis, para las que desarrollaremos una estrategia (pruebas usando diseños de investigación adecuados) que permitirá su comprobación para aceptarlas o refutarlas.
- Este enfoque nos permitirá medir (con instrumentos de medición estandarizados) y establecer las variables del contexto, analizándolas con métodos estadísticos.
- Emplearemos la recolección y el análisis de datos para dar respuesta a las cuestiones que plantea esta investigación y verificar las conjeturas preestablecidas.
- Otorgamos al análisis cuantitativo de los datos el establecimiento escrupuloso de los diversos patrones de comportamiento de la muestra.
- Basarnos en este modelo deductivo y lógico y en la representatividad de la muestra, nos permitirá generalizar los resultados de esta investigación.
- Constituiremos conclusiones relacionadas con las hipótesis planteadas inicialmente.

En resumen, hemos escogido un enfoque cuantitativo para este trabajo porque consideramos que la recolección y el análisis de los datos siguiendo determinados criterios lógicos, puede ser una forma efectiva para conocer nuestra realidad y entender el alcance de nuestra propuesta.

5.2. Diseño de la investigación

El tipo de estudio que hemos llevado a cabo se basa en un diseño cuasi-experimental. Hemos optado por el mismo debido a las limitaciones del contexto que impiden realizar un diseño experimental. Se trata, por tanto, según Pedhazur y Schmelkin (1991) de una experimentación que carece de aleatoriedad en la asignación de los sujetos a los grupos de estudio, por lo que debemos "identificar y separar los efectos de los tratamientos del resto de factores que afectan a la variable dependiente" (Bono, 2012).

A pesar de este inconveniente y siguiendo lo sugerido por Rossi y Freeman, (1989), si los grupos de control guardan similitud en la totalidad de los aspectos esenciales con el de tratamiento (grupo experimental), la investigación cuasi-experimental se asemeja bastante con los experimentos aleatorizados (Bono, 2012).

Nuestra investigación comparará el grupo sometido a tratamiento (grupo experimental) con tres grupos control del mismo curso y centro educativo, y aunque somos conscientes de que nuestro diseño de investigación está falto de un control completo, creemos que nos permite la obtención de resultados científicamente auténticos.
La Tabla 1 muestra los diferentes grupos participantes en la investigación y las fases de la misma.

Tabla 1.
Grupos y fases de la investigación.

Grupo	Prueba 1	Intervención	Prueba 2
Experimental	Grupo 4	Sí	Grupo 4
Control	Grupos 1, 2 y 3	No	Grupos 1, 2 y 3

Fuente: elaboración propia.

Atendiendo al objetivo descrito al inicio; podemos definir este trabajo como un estudio de investigación correlacional.
En este tipo de investigación se evalúa la relación que existe entre unas variables en un contexto determinado, con el objeto de establecer si existe una correlación entre ellas, y en ese caso determinar su tipo e intensidad.
El principal objetivo de este tipo de investigación consiste en analizar cómo puede comportarse una variable sabiendo cómo lo hace otra u otras variables relacionadas; es decir, podemos predecir qué pasará tomando como base las evidencias obtenidas en "la constatación estadística de un vínculo de correlación" (Cazau, 2006).

Variables de investigación

Definir las variables independientes y dependientes del estudio nos permite comprobar la relación de existente entre ellas, es decir la dependencia entre ambas, puesto que los valores obtenidos por las variables dependientes estarán determinados por la variable independiente.
La variable independiente es la introducción en el aula de la práctica diaria y sistemática de la resolución de problemas. Dentro de esta, estudiaremos, a su vez, dos variables independientes:

1. Sistematización de la práctica diaria de la resolución de problemas siguiendo metodologías tradicionales
2. Sistematización de la práctica diaria de la resolución de problemas siguiendo el Modelo de Barras del Método Singapur para la enseñanza de las Matemáticas.

Con respecto a las variables dependientes, éstas estarán conformadas por los resultados obtenidos por los alumnos de los cuatro grupos en la prueba "Test de preguntas liberadas del TIMSS 1".

Hipótesis

Nuestras hipótesis de trabajo se constituyen, dadas las características del mismo, en "proposiciones tentativas acerca de las posibles relaciones entre dos o más variables" (Hernández, Fernández y Baptista, 2004). Así pues, y como apuntamos anteriormente, la presente investigación tiene por objeto conocer el fundamento de nuestras conjeturas tratando de comprobar lo siguiente:

1. La sistematización y la práctica diaria de la resolución de problemas en el aula, mejora la competencia matemática del alumnado, independientemente de la metodología empleada.
2. El Método Singapur para la enseñanza de las Matemáticas (Modelo de Barras), consigue mejorar la competencia del alumnado en resolución de problemas, resultando ser una metodología mucho más eficaz que las utilizadas tradicionalmente.

Muestreo y participantes

Como explicamos con anterioridad, el muestreo empleado en este estudio no ha sido aleatorio, sino por conveniencia, dado el contexto de la investigación. Por ello, se han utilizado los distintos agrupamientos de alumnado ya conformados en el centro educativo, eligiéndose como grupo experimental el tutorizado por la autora del presente trabajo.

En este sentido, apuntaremos aquí que, en los aspectos fundamentales, el grupo de tratamiento y los tres grupos de control guardan semejanza.

La muestra objeto de estudio la conforman 76 alumnos de 5º curso de Ed. Primaria del CEIP Atalaya de Palazuelos de Eresma, Segovia, que están divididos en cuatro grupos-clase con la siguiente distribución:

Tabla 2.

Distribución y características del alumnado de la muestra.

Grupo	**Número de alumnos**	**Distribución según género**	**Alumnado repetidor (Rept.)**	**Características específicas**
A (control)	19	12 niñas y 7 niños	1 alumno	1 alumna TDAH
B (control)	19	13 niñas y 6 niños	2 alumnas	1 alumna TDAH (Rept.)
C (control)	20	9 niñas y 11 niños	1 alumna	1 alumno TDAH
D (exp.)	18	8 niñas y 10 niños	1 alumno y 1 alumna	1 alumna TDAH (Rept.) 1 alumno Difict. del lenguaje (Rept.)

Fuente: elaboración propia.

Los grupos, tal y como están conformados en la actualidad, llevan dos cursos escolares juntos (contando el actual), pues se produjo la mezcla del alumnado de los cuatro grupos originales (1º- 3º de Educación Primaria), cuando estos pasaron a 4º nivel de la etapa. Otra característica de los cuatro grupos-clase es que sus anteriores tutores realizaron esta labor durante un único curso académico.
Además del alumnado anteriormente relacionado colaboran en este estudio los cuatro tutores de los grupos. Como característica común a los cuatro maestros, para todos, la asignación de estos grupos es nueva en el presente curso escolar.

Instrumentos utilizados

Con la intención de posibilitar todas las mediciones necesarias para esta investigación de forma confiable y válida, hemos utilizado diferentes instrumentos cuya precisión y conveniencia está avalada por experiencias similares realizadas con anterioridad (Fraile, M. 2017) y también hemos diseñado otros siguiendo las mismas pautas.
Así pues, para facilitar la recogida de datos se han llevado a cabo diversas pruebas que enumeramos a continuación siguiendo su orden de aplicación:

1. "Test de percepción personal sobre la resolución de problemas" (Fraile, M., 2017)
2. "Test de preguntas liberadas de TIMSS 1" (Fraile, M., 2017)
3. "Test de preguntas liberadas de TIMSS 2"
4. "Problemas 1". Revisión y análisis de los resultados obtenidos por los 76 alumnos en problemas que formaron parte de las diferentes pruebas objetivas realizadas a lo largo de los dos primeros trimestres del presente curso escolar 20-21 (evaluaciones de las UU.DD 1-10 de 5º de Primaria)
5. "Problemas 2". Prueba de problemas liberados de las evaluaciones de las UU.DD 1-10 de 5º de Primaria 20-21, para. la comprobación de la evolución de resultados en la resolución de problemas"

A continuación, explicaremos brevemente las características de los instrumentos que han posibilitado explorar y describir el estado inicial de nuestro alumnado, el proceso de E-A seguido por éste y el estado final alcanzado, teniendo como eje vertebrador la resolución de problemas.

Test de percepción personal sobre la resolución de problemas

El trabajo en las cuatro aulas comienza pasando a la totalidad del alumnado el "Test de percepción personal sobre la resolución de problemas" (Fraile, M. 2017) que aparece en el Anexo 2. Este test está compuesto por 26 preguntas cuyo propósito se centra en facilitarnos una aproximación a la visión que tiene el alumno sobre sí mismo a la hora de enfrentarse a la resolución de problemas: qué expectativas de éxito tiene; cómo los afronta; qué estrategias de resolución tiene y cómo se siente antes, durante y una vez realizados.

Test de preguntas liberadas de TIMSS 1

Con el objeto de averiguar el grado de competencia matemática (conocimientos, aplicación y razonamiento) del alumnado de 5º de Primaria, en lo que a realización de problemas se refiere, se realiza una prueba conformada por 9 preguntas liberadas pertenecientes a la evaluación TIMSS 2011 (Anexo 3) elaborada por Fraile, M. (2017), que abordan los tres dominios de habilidades matemáticas (conocer, aplicar y razonar), descritos anteriormente en la fundamentación teórica del presente trabajo y que recogemos en la Figura 7: "Relación de preguntas seleccionadas, dominio de contenido y dominio cognitivo" situada en Anexo 4.

Las preguntas de la prueba (también las de la oficial), responden a una única pregunta, exceptuando la pregunta M031346 (P1), que cuenta, además, con dos subpreguntas, lo que supone un total de 11 respuestas solicitadas al alumnado para el Test de preguntas liberadas del TIMSS 1.

Los grupos objeto de estudio pertenecen al nivel de 5º de Primaria y no al de 4º, que es el que originalmente se somete a la prueba TIMSS.

Sin embargo, y dada la situación de emergencia sanitaria y pandemia, el alumnado de la muestra, como el resto del alumnado español, permaneció en situación de confinamiento domiciliario desde la segunda quincena del mes de marzo hasta final del curso pasado. Por esta situación, en el presente curso escolar, y de manera prescriptiva para todos los centros de Ed. Primaria de la C.A. de Castilla y León, se ha implementado un plan de refuerzo y consolidación de los contenidos del nivel anterior (4º curso), con el objeto de compensar las posibles deficiencias que el alumnado pudiera acarrear derivadas de dicha situación excepcional. Con todo, y tras las, también prescriptivas, pruebas iniciales realizadas este curso (mes de octubre), el equipo de tutores de nivel pudo comprobar las importantísimas carencias que, en líneas generales, mostraba este alumnado en las áreas troncales.

Por todo ello, se consideró pertinente el paso del "Test de preguntas liberadas del TIMSS 1" a esta muestra de alumnos que, oficialmente, se encuentran cursando un nivel de 5º de Ed. Primaria. Además, se comprobó que esta prueba, con alumnos de 5º curso de Primaria, ya se había llevado a la práctica en el curso escolar 16/17 por la investigadora Fraile Rey M. A., que muy amablemente facilitó sus materiales para ser utilizados en el presente trabajo.

Además, con la intención de conocer y evaluar aspectos concernientes a la metacognición, cada una de las preguntas del Test empleado viene acompañada de un sucinto cuestionario que permite conocer y analizar las posibles dificultades que han presentado al alumno los problemas propuestos y cómo las ha afrontado. Dicho cuestionario aparece en la Figura 8: "Cuestionario de metacognición" (Anexo 5).

Dosier de "Resolución de problemas (REPASO) I y II

Como herramienta de trabajo para la experiencia de la práctica de resolución de problemas, se diseñaron y secuenciaron 53 problemas que fueron presentados al alumnado repartidos en dos dosieres con el siguiente contenido:

1. "Resolución de problemas (REPASO) I", conformado por 30 problemas de estructura aditiva con números decimales (Anexo 6.a y 6.b).
2. "Resolución de problemas (REPASO) II" compuesto por 23 problemas de estructura multiplicativa con números naturales (Anexo 7).

Para la elaboración de los dosieres se realizó una selección de los problemas que aparecen en el libro de texto de la Ed. Santillana para las 10 primeras UU.DD de 5º de Primaria, (editorial empleada en el centro educativo) Tras realizar la selección, que atendió a la variabilidad en cuanto a dificultad y forma de los problemas; los enunciados se reescribieron, presentándose de manera sencilla y clara. También se reajustaron los valores numéricos (pensando especialmente en el grupo experimental de la muestra) con la intención, por un lado, de evitar los cálculos complejos que alejaran la atención de nuestro alumnado del aprendizaje que perseguíamos (modelización de problemas) y por otro, que promovieran el éxito de la resolución, mejorando así la autoconfianza y la implicación activa en esta práctica. El diseño de estos instrumentos ha contado con la supervisión de Belén Palop, tutora del presente TFG.

Test de preguntas liberadas de TIMSS 2

Este es el instrumento diseñado con el objeto de averiguar si tras la experiencia de resolución de problemas implementada durante 18 días, el alumnado mejora su grado de competencia matemática (conocimientos, aplicación y razonamiento) en lo que a realización de problemas se refiere. Igualmente pretende conocer si su valoración acerca de cómo percibe los problemas y la evaluación de sus expectativas de logro sobre ellos, se ha modificado tras la exposición a la práctica sistemática de realización de problemas que promueve esta experiencia en el aula.

La prueba, que aparece en el Anexo 8, está compuesta por 9 nuevas preguntas liberadas pertenecientes a la evaluación TIMSS 2011 (la P1, como en la anterior prueba, cuenta además con dos subpreguntas y la P3 con una subpregunta). Además, se añadieron, a este nuevo cuestionario tres preguntas de control: P2, P4 (números: fracciones) y la P.9 (Visualización de datos: leer e interpretar), que ya formaron parte del "Test de preguntas liberadas TIMSS 1", con el objeto de comprobar, conocidos los resultados de partida, si se había producido una mejora en los mismos.

Para la elaboración del nuevo test conformado esta vez por 12 preguntas (dos de ellas con dos y una subpreguntas, respectivamente), se tomó como fuente el informe oficial del *International Association for the Evaluation of the Educational Achievement* IEA (2013) y se realizó una selección de aquellas preguntas que abordaran los mismos dominios de contenidos y cognitivos que fueron evaluados por el "Test de preguntas liberadas de TIMSS 1". La relación de las preguntas seleccionadas para el "Test de preguntas liberadas de TIMSS 2, atendiendo a los diferentes dominios descritos, aparece en la Tabla 3: "Relación de preguntas seleccionadas, dominio de contenido y dominio cognitivo" (Anexo 9).

Cada una de las preguntas del Test está acompañada del cuestionario de metacognición que permitirá conocer y evaluar los aspectos, y en su caso, los cambios producidos con respecto a la anterior prueba.

En el diseño del presente instrumento han colaborado estrechamente Belén Palop, tutora del presente TFG y Juan José Santa Engracia.

5.3. Proceso de investigación

En este epígrafe detallaremos el proceso que hemos seguido para dar respuesta a las hipótesis de trabajo planteadas con anterioridad, haciendo constar que la realización de la recogida de datos y el contraste con las hipótesis de la investigación se lleva a cabo por la autora del presente trabajo bajo la supervisión de a tutora del mismo, Belén Palop y la colaboración de Juan José Santa Engracia.

Desarrollo de la primera prueba "Test de percepción personal sobre la resolución de problemas"

El trabajo en el centro escolar comenzó pasando, a la totalidad del alumnado, el "Test de percepción personal sobre la resolución de problemas". Esta prueba que dio inicio a nuestra intervención en el aula se pasó de manera simultánea a los cuatro grupos que conforman la muestra el miércoles, 28 de abril de 2021. En ella se solicitó al alumnado que contestase mediante una escala de valoración (1- Casi nunca; 2- Pocas veces; 3- A menudo; 4- Casi siempre) a 26 preguntas relacionadas con su perspectiva sobre la resolución de problemas. La realización del Test se desarrolló con normalidad.
Como ya hemos indicado el trabajo realizado en los diferentes grupos-clases ha precisado de la ayuda de sus respectivos tutores.

Desarrollo de la segunda prueba "Test de preguntas liberadas de TIMSS 1"

La siguiente prueba realizada por el alumnado fue el "Test de preguntas liberadas de TIMSS 1".
La segunda prueba de nuestra intervención en el aula se pasó de manera simultánea a los cuatro grupos que conforman la muestra el viernes, 30 de abril de 2021. Para ello se facilitó a los tutores de los grupos unas pautas de aplicación y seguimiento de las pruebas, con el objeto de reproducir idénticas condiciones en los cuatros grupos-clase objetos del estudio. Las instrucciones dadas se relacionan a continuación:

- Inicio de la sesión de, aproximadamente, 55 minutos de duración.
- Presentación de la prueba: número de preguntas que la componen y estructura de las mismas.
- Facilitación de instrucciones de cumplimentación: uso de lápiz para su realización; no está permitido el empleo de la goma (los errores se tachan con un aspa, no se emborronan, con el objeto también de su valoración). El alumnado puede acompañar sus operaciones, explicar y justificar (sería deseable que lo hiciera) con textos/dibujos/modelos, etc. todo aquello que haga en su proceso de resolución de cada pregunta (razonamientos y procesos de resolución utilizados).

- Resolución de dudas iniciales.
- Realización individual de la prueba (45 minutos), en la que se le indica al alumnado que no consulte duda alguna, puesto que las dudas iniciales ya han sido resueltas en gran grupo.

La corrección de los problemas con el alumnado de cada grupo se llevó a cabo el siguiente día lectivo y fue realizada por sus respectivos tutores. Dicha corrección, al igual que la puesta en común y resolución de dudas, se hizo en gran grupo, no pudiendo emplear otro tipo de agrupamiento debido al protocolo sanitario prescrito en las aulas. Con esta actividad, se quiso propiciar en el alumnado la posibilidad de ahondar más en los razonamientos empleados, así como posibilitarles la toma de conciencia sobre los procesos seguidos en la resolución de problemas.

Experiencia de resolución de problemas, con y sin, implementación del Modelo de Barras del Método Singapur para la resolución de problemas en 5º de Educación Primaria

La experiencia de resolución de problemas, con y sin, implementación del Modelo de Barras comenzó prácticamente dos semanas después de la realización del "Test de preguntas liberadas de TIMSS 1" y se llevó a cabo durante 18 sesiones (desde el 12 de mayo hasta el 4 de junio), período en el que el alumnado trabajó y solucionó en el aula una selección de 53 problemas.

Aunque inicialmente se destinó a cada sesión una duración de 20 minutos, fue necesaria, tras el desarrollo de la primera sesión, aumentar el tiempo destinado a las mismas para los cuatro grupos, por lo que se estableció un nuevo horario flexible (30-45 minutos)

Con respecto a la periodicidad, la experiencia se desarrolló con carácter diario y dentro de las sesiones destinadas al área de Matemáticas.

Los 53 problemas facilitados a la totalidad del alumnado se distribuyeron y secuenciaron en dos grupos:

- 1º "Resolución de problemas (REPASO) I", conformado por 30 problemas de estructura aditiva con números decimales (período de realización: del 12 al 26 de mayo de 2021)
- 2º "Resolución de problemas (REPASO) II" compuesto por 23 problemas de estructura multiplicativa con números naturales (período de realización: del 27 de mayo al 4 de junio de 2021)

Si bien sólo el grupo experimental de la muestra (GRUPO D) trabajó la modelización de problemas propuesta por el Método Singapur como estrategia de resolución de problemas, todos los grupos realizaron la experiencia de resolución de problemas, partiendo de los mismos enunciados, en idéntica cantidad y dedicación temporal y horaria.

La principal diferencia estribó en la metodología empleada por el alumnado para su resolución y por sus tutores a la hora de solventar posibles dudas (metodología tradicional basada en la aritmética)
Sin embargo, y aunque ambos dosieres presentados al alumnado contaban con idénticos problemas para los cuatro grupos, el dosier "Resolución de problemas (REPASO) I", se presentó al grupo experimental (GRUPO D) con la serie completa de problemas, pero sin pregunta alguna, esto es, sin incógnita a la que dar respuesta (Anexo 6.b), con la intención de que la atención y el entrenamiento del alumnado se centrara en:

- La representación pictórica (modelización) de la información (datos) que aparecía en los enunciados a través de los nuevos elementos presentados.
- Evitar distracciones en la correcta utilización de estos elementos y en el reconocimiento de las relaciones existentes entre ellos: barras, llaves, y su emplazamiento adecuado en función de la información que facilita el problema; reconocimiento, correcto diseño y uso de la barra unidad; riguroso etiquetado (datos y emplazamiento) …

(Todos estos elementos han sido convenientemente explicados en el marco teórico de este trabajo).

Esta iniciativa, propuesta por la tutora del presente TFG, causó un sorprendente impacto en el alumnado y permitió presentar la experiencia con un mayor grado de novedad, si cabe. De tal forma que fue percibida por el grupo, sobre todos por aquellos que tienen bajas expectativas de éxito ante la resolución de problemas, como un reto en el que se habían cuasi homogeneizado los niveles de partida, pues se trataba de leer el problema y representar mediante un dibujo los datos que contenía. Esto incrementó la motivación entre el alumnado.
Debido a esta característica de la primera treintena de problemas, hubo que volver sobre los mismos, una vez realizadas todas las modelizaciones, para plantear las incógnitas, modelizarlas (en ocasiones fue necesaria optar por otra modelización o añadir más barras) y resolver los problemas.
Otro aspecto diferenciador para el grupo experimental (GRUPO D) fue que, siguiendo la metodología Singapur (C-P-A), explicada en el marco teórico, se realizaron una serie de actividades con material manipulativo para hacer un breve repaso de los números decimales (bloques de base 10 y barras), previo al trabajo de los problemas de estructura aditiva; y del repaso de los números naturales (regletas para trabajar, entre otras la propiedad distributiva respecto de la suma), antes de comenzar con el dosier de problemas de estructura multiplicativa.
Los otros tres grupos (grupos de control) abordaron la práctica de resolución de problemas desde una perspectiva tradicional, centrada en la aritmética.
Con respecto al dosier "Resolución de (REPASO) II", dicha herramienta fue idéntica para todos los grupos (todos los enunciados contaban con preguntas), por lo que tanto los alumnos con la implementación de la modelización, como el resto, solucionaron los problemas planteados, uno tras otro, no haciendo falta volver sobre ellos.

Desarrollo de la tercera prueba "Test de preguntas liberadas de TIMSS 2"

La tercera y última prueba llevada a cabo en esta investigación, ("Test de preguntas liberadas TIMSS 2") fue realizada de manera simultánea por el alumnado de los cuatro grupos que conforman la muestra el martes, 8 de junio de 2021. Para ello, se apuntó a los tutores que debían seguir las mismas indicaciones que les fueron facilitadas en la prueba anterior y que han sido detalladas con anterioridad. Como ya ocurrió con el "Test de preguntas liberadas TIMSS 1", la tarea de corrección de los problemas con el alumnado de cada grupo fue realizada por sus respectivos tutores, de manera idéntica a como se procedió con el test anterior y que ya describimos.

A continuación, y una vez presentado el marco metodológico de esta investigación, explicaremos cuáles han sido los resultados alcanzados por el alumnado tras la intervención cuyo eje vertebrador ha sido la resolución de problemas. También se describe cómo se ha llevado a la práctica la misma, así como su resultado.

6. ANÁLISIS DE LA INTERVENCIÓN Y EXPOSICIÓN DE RESULTADOS

Con respecto al establecimiento de los criterios de análisis de datos, así como la participación en la reflexión cualificada sobre los mismos, apuntaremos aquí que han colaborado de manera fundamental en esta investigación nuestra tutora, Belén Palop y Juan José Santa Engracia, constituyéndose ambos como guías en este trabajo.

6.1. Análisis de los resultados obtenidos en el "Test de percepción personal sobre la resolución de problemas"

Esta primera prueba tenía por objeto realizar una aproximación a la visión que tiene el alumno sobre sí mismo a la hora de enfrentarse a la resolución de problemas: qué expectativas de éxito tiene; cómo los afronta; qué estrategias de resolución tiene y cómo se siente antes, durante y una vez realizados.

El método de análisis empleado en la valoración de estos resultados se basa en tres factores, comprendiendo así tres "subescalas" diferentes.

Los resultados dimanados de este test quedan recogidos en la Figura 9: "Problem-Solving-Cofidence ("PSC")"; la Figura 10: "Approach-Avoidance-Style ("AAS")" y la Figura 11: "Personal Control ("PC")".

Comenzaremos con el análisis de la "subescala "que hace referencia a la capacidad en la resolución de problemas evaluando la precepción de capacidad propia sobre dicha resolución, además de la autoconfianza y creencia que presenta el alumno a la hora de resolver problemas de manera eficaz.

Test de percepción personal sobre la resolución de problemas

“Problem-Solving-Cofidence (“PSC”)”

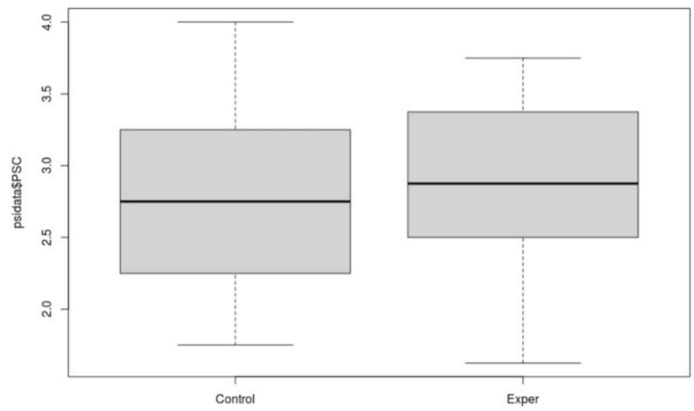


Figura 9. “Problem-Solving-Cofidence (“PSC”).

Fuente: tomado de Palop, B. (2021)

Como podemos observar en la Figura 9, no existen diferencias significativas entre el grupo experimental y el grupo de control en lo referente a la percepción personal de competencia a la hora de resolver con acierto los problemas, mostrando un elevado autoconcepto y grado de autoconfianza.

La segunda “subescala” (estilo “approach-avoidance” o “acercamiento-alejamiento”) evalúa la actitud del estudiante frente al problema, específicamente su tendencia a evitarlo o a enfrentarse a él.

Test de percepción personal sobre la resolución de problemas

“Approach-Avoidance-Style (“AAS”)”

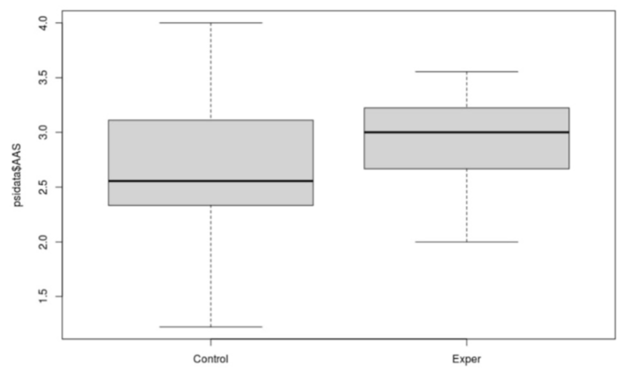


Figura 10. “Approach-Avoidance-Style (“AAS”)”.

Fuente: tomado de Palop, B. (2021)

En lo referente a cómo el alumno afronta el problema, observamos una ligera diferencia entre el grupo experimental y el de control, mostrando los alumnos del primero, una mayor disposición a afrontar y enfrentarse a la resolución del problema.

Por último, la "subescala" referida al control personal se centra en evaluar factores relacionados con el control propio de las emociones y de la actitud.

Test de percepción personal sobre la resolución de problemas
"Personal Control ("PC")"

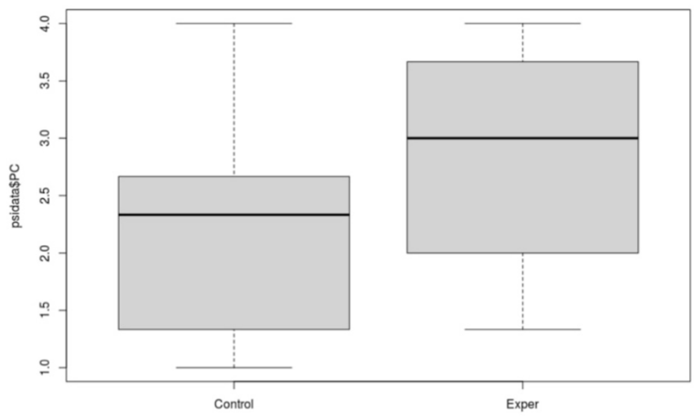


Figura 11. "Personal Control ("PC")".
Fuente: tomado de Palop, B. (2021)

Estos resultados muestran una diferencia significativa entre la gestión emocional y actitud de los alumnos del grupo experimental y los del grupo de control revelando que, de partida, los grupos de la muestra no son homogéneos. De la imagen se desprende que el grupo experimental presenta un mayor control personal sobre sus emociones y una mejor actitud frente a la resolución de problemas.

6.2. Análisis de los resultados obtenidos en el "Test de preguntas liberadas del TIMSS 1"

Debido a los límites de extensión del presente trabajo, se analizarán de manera general la totalidad de los datos que ha arrojado el "Test de preguntas liberadas TIMSS 1", centrándonos, por lo significativo de los mismos, en los resultados obtenidos en tres de sus nueve preguntas.

La Tabla 4. "Porcentaje de acierto por preguntas" aparece en el Anexo 10 "Resultados del Test de preguntas liberadas del TIMSS 1"

Los resultados generales dimanados de la prueba que analizaremos a continuación son los siguientes:

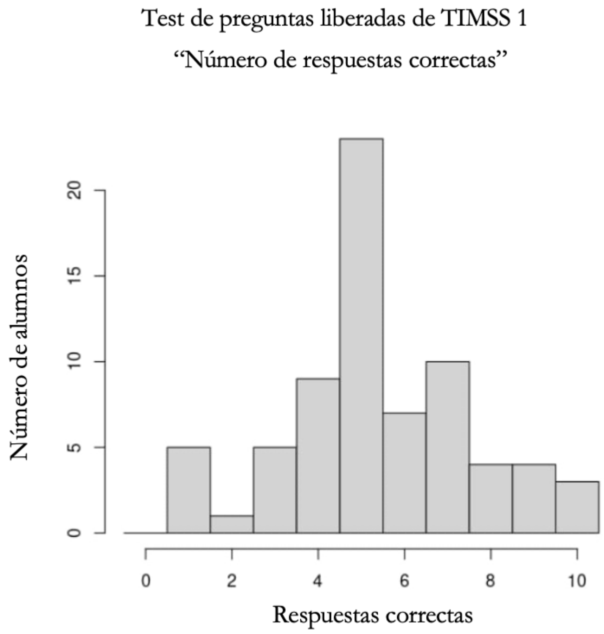


Figura 12. "Número de respuestas". Test de preguntas liberadas de TIMSS 1
Fuente: tomado de Palop, B. (2021)

Como podemos observar en el histograma la Figura 12: "Número de respuestas correctas", la gráfica es casi simétrica. Sabemos que, de los 76 alumnos de la muestra, tres alumnos contestan bien la totalidad de las preguntas (4%); cuatro alumnos solventan de forma correcta diez problemas (5%) y otros cuatro alumnos (5%) resuelven acertadamente a nueve problemas. Un 69% del alumnado alcanza a responder correctamente a cinco o más cuestiones. No encontramos alumno alguno que haya respondido erróneamente a la totalidad del test y 12 alumnos contestan con acierto a una sola pregunta (16%). Como analizaremos más tarde, los bajos resultados obtenidos están en consonancia con los alcanzados en la prueba oficial TIMSS 2011 por la media del alumnado español.

A continuación, centraremos nuestro análisis en los resultados correctos obtenidos por pregunta a través de dos recursos: la Figura 13: "Porcentaje de acierto de las preguntas identificadas según dominio de contenido y grupos de alumnado (A, B, C y D)" y la Tabla 4: "Porcentaje de acierto por preguntas" en la que aparece cada pregunta relacionada con su dominio de contenido y el porcentaje de acierto (Anexo 10).

Test de preguntas liberadas de TIMSS 1

"Porcentaje de acierto de las preguntas identificadas según dominio de contenido y grupos de alumnado (A, B, C y D)".

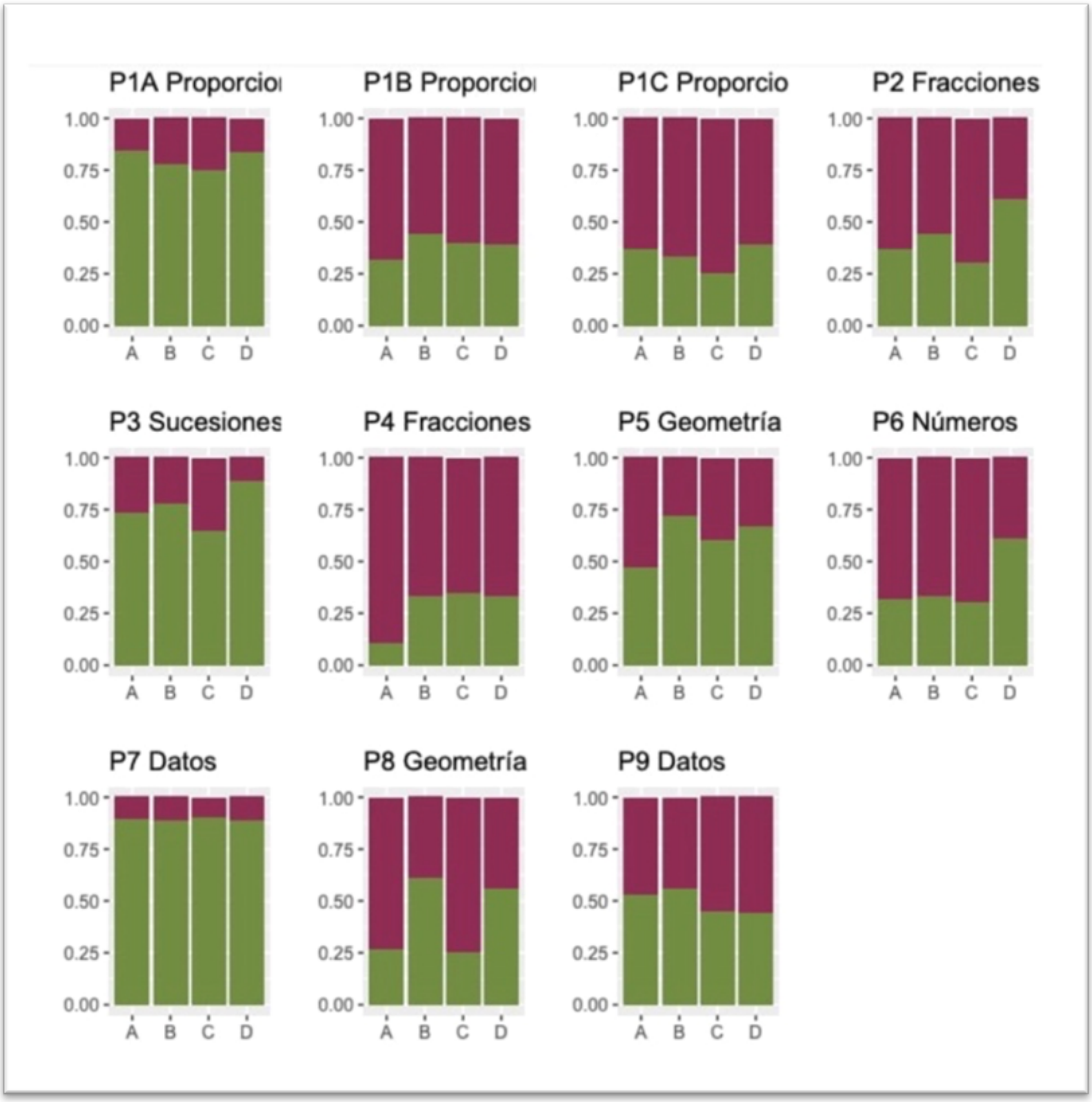


Figura 13. "Porcentaje de acierto de las preguntas identificadas según dominio de contenido y grupos de alumnado (A, B, C y D)". Test de preguntas liberadas de TIMSS 1.

Fuente: tomado de Palop, B. (2021)

Como se observa en la Figura 13 y en la Tabla 4 (Anexo 10) son llamativos, entre otros, los resultados obtenidos por una parte significativa del alumnado de los cuatro grupos en los siguientes dominios: "Números: proporcionalidad" (P1 B y P1C), "Números: fracciones" (P2 y P4) y en la P6 ("Números: operatoria-división", por ser particularmente bajos.
Con respecto a las preguntas de proporcionalidad, el hecho de que tres ítems conformen la valoración del dominio, y que, en uno de ellos, el porcentaje de acierto fuera el segundo más alto de la muestra (tras el de "representación de datos" P.7), nos permite obtener, entre los tres porcentajes resultantes una media del 51% de acierto, por lo que nos centraremos ahora en el análisis de los resultados de las otras tres preguntas: P2, P4 y P6.
Para ello, comenzaremos analizando los resultados obtenidos por nuestro alumnado en las preguntas P2 y P4, relacionadas con el dominio de contenido "Números (fracciones)". Siguiendo la dinámica anterior, los resultados aparecen reflejados en la Figura 14: "Porcentaje de acierto de la muestra de la pregunta P2" (Anexo 11.a); la Figura 15: "Metacognición P2" (Anexo 11.b); la Figura 16: "Porcentaje de acierto de la muestra de la pregunta P4" (Anexo 11.c) y la Figura 17: "Metacognición P4" (Anexo 11.d).
Como podemos observar en la información de estas figuras, los porcentajes de acierto por pregunta de dominio: "Números (fracciones)", el primer gráfico correspondiente a la pregunta P2 muestra que alrededor de un 40% del alumnado responde acertadamente a esta cuestión. Sin embargo, se distingue en el diagrama de Metacognición correspondiente a esa pregunta que, aproximadamente un 63% del alumnado, considera fácil el problema y un porcentaje prácticamente idéntico, cree que lo ha realizado correctamente. Además, más del 75% de los alumnos manifiesta entender lo que el problema le pide.
Con respecto a los resultados obtenidos para el mismo dominio en la pregunta P4, en el gráfico correspondiente podemos observar que tan solo 18 alumnos (24%) logró resolver correctamente el problema. Sin embargo, tal y como ocurre en el caso anterior, la gráfica de Metacognición P4, revela que casi para un 60% de los alumnos, el problema resulta sencillo y alrededor de un 71% de la muestra informa que entiende lo que la cuestión le solicita. No obstante, en esta pregunta, las expectativas de éxito, con respecto a la P2, caen a un 21%.
Proseguiremos nuestro análisis presentando los resultados obtenidos por los alumnos en la pregunta P6 "Números: operatoria(división)" que aparecen recogidos en la Figura 18: "Porcentaje de acierto de la pregunta P6" (Anexo 12.a); y la Figura 19: "Metacognición P6" (Anexo 12.b).
Como se observa el primer gráfico correspondiente a los resultados de la pregunta P6, alrededor de un 40% del alumnado resuelve correctamente la cuestión. Sin embargo, se distingue en la gráfica de Metacognición que, aproximadamente un 83% del alumnado considera fácil el problema y un 92% de la muestra admite entender qué le pide el problema. Además, prácticamente un 75% de los alumnos, cree que lo ha realizado de forma correcta.
Tras esta valoración de los resultados de las preguntas P2, P4 y P6, podemos concluir que el alumnado presenta carencias importantes en la adquisición y desarrollo, tanto de estos dominios de contenido, como de los dominios cognitivos matemáticos necesarios para la resolución exitosa de estas

preguntas. No obstante, estas dificultades no son percibidas por el propio alumnado, ya que, según muestran los resultados obtenidos en la Metacognición, el alumnado cree entender estos problemas, encontrándolos, incluso, sencillos. A esta situación hay que añadir las elevadas expectativas de logro que demuestra tener nuestro alumnado. Podríamos hablar de que poseen una autoconfianza y una elevada percepción de la propia competencia para la resolución de problemas relacionados con estos dominios sustentada en la ignorancia, en el desconocimiento de aspectos esenciales que conforman en "Primer Dominio: Conocer", al que se hizo referencia en el marco teórico del presente trabajo. Como ya apuntamos, nuestro alumnado debe tener adquiridos una serie "hechos básicos, procedimientos y conceptos que un alumno de 4º de Primaria (cursan 5º de Primaria) necesita saber, ya que sin ellos no es posible plantearse el pensamiento matemático con la finalidad de resolver problemas" (Mullis et al., 2009)

Llegados a estas conclusiones y con el objeto de concretar cuáles son las dificultades que alumnado presenta en estos dominios y tratar de solventarlas, se compartió con el resto de los tutores de los grupos de la muestra la información obtenida (especialmente con el tutor del grupo-clase A, grupo que ha obtenido el menor porcentaje de respuestas correctas en la prueba). Cada tutor asumió la manera de detectar y tratar de corregir este desfase, y para el grupo objeto de la implementación del Modelo de Barras del Método Singapur para la resolución de problemas, se incidió sobre los dominios de contenido y cognitivos que valoran de las preguntas P2, P4 y P6 convertidas en preguntas bisagra, "un instrumento ágil y muy útil para averiguar dónde está el alumno y la naturaleza de sus dudas o dificultades" Morales Lobo, M. (2020)

Tras los resultados obtenidos con la aplicación de este "Test de preguntas liberadas del TIMSS 1" concluimos que resulta un instrumento de gran utilidad que permite identificar carencias y errores de aprendizaje del alumnado y posibilita, además "detectar las causas que explicarían el bajo rendimiento de los alumnos en la resolución de problemas" (Fraile, A. 2018)

Con el objeto de valorar desde una perceptiva más global los resultados obtenidos en el "Test de preguntas liberadas del TIMSS 1", elaboramos un cuadro comparativo de resultados oficiales del estudio TIMSS 2011 que nos permitiese establecer relaciones entre una selección de países representativos por sus resultados y los obtenidos por nuestro alumnado. La información contenida en el mismo, que analizaremos seguidamente, queda recogida en la Tabla 5: "Test de preguntas liberadas del TIMSS y TIMSS oficial 2011. Comparativa de porcentaje de aciertos" (Anexo 13).

Como podemos observar en el cuadro, los resultados obtenidos por nuestra muestra superan a los de la media española en la totalidad de las preguntas liberadas. Con respecto a la media internacional, los resultados actuales son superados sólo en cuatro ítems y la diferencia mayor no supera los 5 puntos porcentuales.

En relación con los resultados obtenidos por otros países que suelen presentarse por muchos expertos como modelos a seguir, en el caso de Finlandia, en lo referido al dominio "Números: proporcionalidad", nuestra muestra alcanza resultados ligeramente inferiores a los suyos; y en dos de las preguntas (P3 y P7), se consiguen mejores porcentajes en nuestro estudio.

Por último, también se incluye en el cuadro comparativo el caso de Singapur, dado que se encuentra a la cabeza de los resultados en esta prueba internacional en sus últimas ediciones. Como dato anecdótico, referir que en las preguntas P5 y P7, nuestra muestra y Singapur obtienen idénticos resultados (en la P5, Finlandia supera todos los resultados).
Damos paso ahora a la descripción de la implementación del Modelo de Barras del Método Singapur para la resolución de problemas en uno de los cuatro grupos de 5º de Educación Primaria, experiencia central del presente trabajo.

6.3. Análisis de los resultados obtenidos en el "Test de preguntas liberadas del TIMSS 2"

Una vez más, y debido a los límites de extensión del presente trabajo, se analizarán con detalle aquellos datos más significativos obtenidos en el "Test de preguntas liberadas TIMSS 2". No obstante, encontraremos otros datos de interés en la Tabla 6: "Porcentaje de acierto por preguntas" y la Tabla 7: "Comparativa de porcentaje de acierto en TIMSS 1 y 2: preguntas de control" (Anexo 14).
Comenzaremos haciendo un análisis general de los resultados globales y realizando también una comparativa de los resultados obtenidos en el test inicial y final.

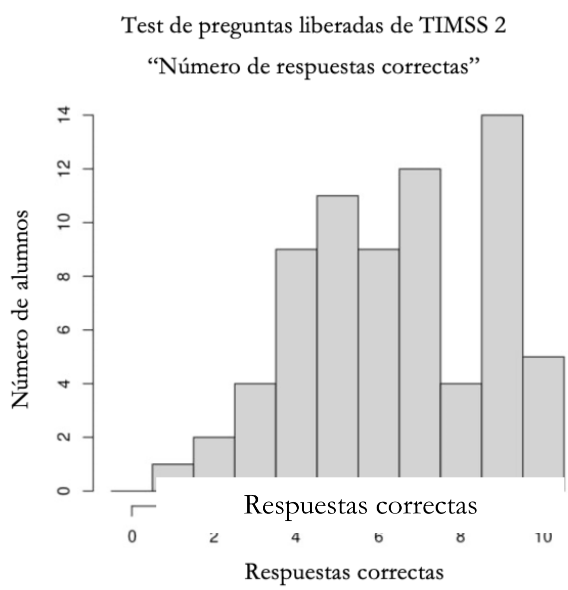


Figura 20. "Número de respuestas correctas." Test de preguntas liberadas del TIMSS 2.
Fuente: tomado de Palop, B. (2021)

Como podemos observar en el histograma de la Figura 20, la gráfica se encuentra desplazada hacia la derecha, revelando que ha habido una mejora de los resultados comparándola con el histograma Figura 12 correspondiente a los resultados del "Test de preguntas liberadas del TIMSS 1". Dicha comparativa puede observarse en la Figura 21 (Anexo 14.a).

De los 76 alumnos que realizaron la prueba (compuesta por un total de 14 cuestiones: 12 preguntas y dos "subpreguntas" en la P1), cinco alumnos contestan bien a la totalidad de las preguntas (6%); cinco alumnos solventan de forma correcta trece problemas (6%) y otros nueve alumnos resuelven acertadamente a 12 problemas (16%).

Por otra parte, un 41% del alumnado alcanza a responder correctamente a siete o más cuestiones. No encontramos alumno alguno que haya respondido erróneamente a la totalidad del test y 12 alumnos contestan con acierto a una sola pregunta (3%).

Estos porcentajes indican que existe una mejora generalizada del alumnado en los resultados obtenidos en el segundo test TIMSS.

En la Tabla 6: "Porcentaje de acierto por preguntas" que encontraremos en el Anexo 14.b, aparece cada pregunta codificada y numerada, relacionada con su dominio de contenido y con el porcentaje de acierto obtenido en la misma. Este cuadro nos facilita información precisa del porcentaje de acierto de nuestro alumnado y nos permite ahondar en el análisis anterior de los datos, pudiendo concluir que los porcentajes revelan que existe una mejora generalizada en los resultados obtenidos por la totalidad de la muestra en el segundo test TIMSS.

Con la intención de posibilitar un mejor análisis de los datos de esta prueba, en la Tabla 7: "Comparativa de porcentaje de acierto en TIMSS 1 y 2: preguntas de control" disponible en el Anexo 14.c, comparamos los resultados obtenidos en las tres preguntas de control añadidas al segundo Test: P2, P4 (números: fracciones) y la P.9 (Visualización de datos: leer e interpretar), que ya formaron parte del "Test de preguntas liberadas TIMSS 1", con el objeto de comprobar, conocidos los resultados de partida, si se había producido una mejora en los mismos.

Como podemos observar, los porcentajes de acierto han mejorado para el dominio de contenido "Números: fracciones", si bien, desde una perspectiva global, que luego se verá matizada por los porcentajes de acierto por grupos-clase, el porcentaje de acierto sigue siendo muy bajo. No obstante, los últimos resultados obtenidos superan significativamente la media española y la internacional del estudio TIMSS 2011 en estas preguntas: ver Tabla 5, Anexo 13.

Con respecto a los resultados alcanzados en el dominio de contenido "Representación de datos (lectura e interpretación)", el porcentaje ha caído sensiblemente, bajando hasta el 46% de aciertos.

A continuación, centraremos nuestro análisis en los resultados correctos obtenidos por pregunta, dominio de contenido y grupo, que quedan recogidos en la Figura 22: "Porcentaje de acierto de las preguntas identificadas según dominio de contenido y grupos de alumnado (A, B, C y D)".

Test de preguntas liberadas del TIMSS 2

"Porcentaje de acierto de las preguntas identificadas según dominio de contenido y grupos de alumnado (A, B, C y D)".

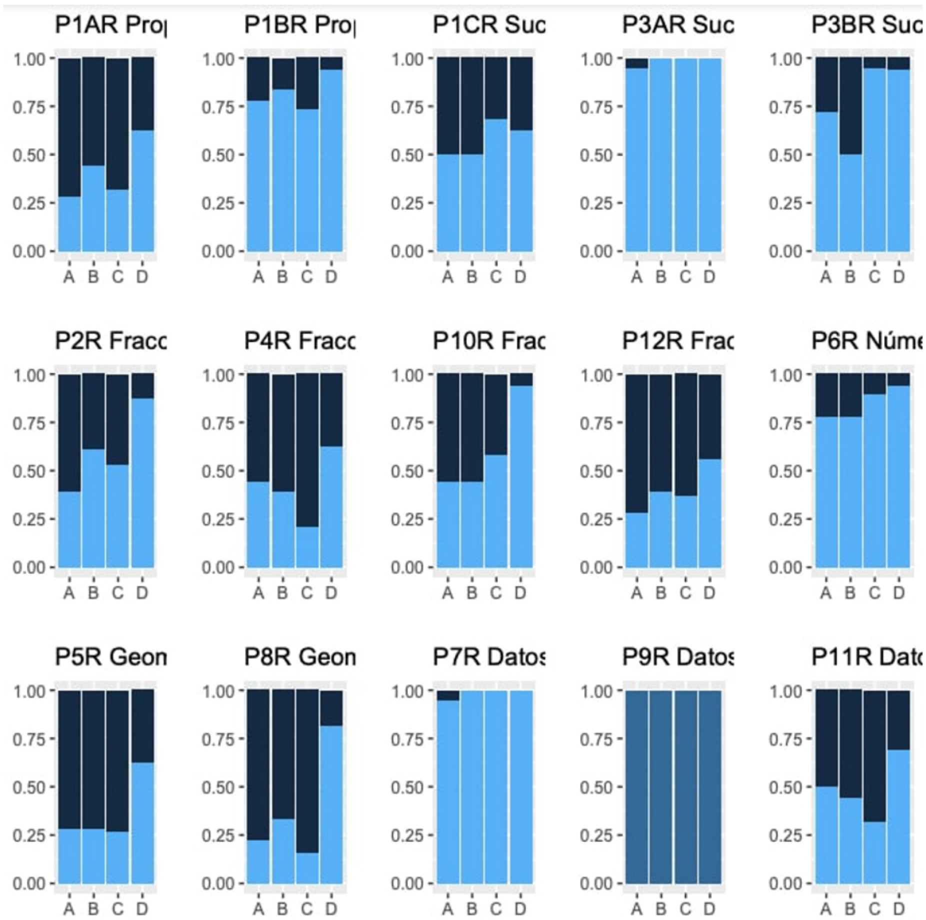


Figura 22. "Porcentaje de acierto de las preguntas identificadas según dominio de contenido y grupos de alumnado (A, B, C y D)." Test de preguntas liberadas del TIMSS 2

Fuente: tomado de Palop, B. (2021)

Estos datos apuntan en la misma dirección que los anteriormente analizados, es decir, que los resultados globales han mejorado con respecto al Test inicial y además revelan que, en la práctica totalidad de los problemas planteados, el grupo experimental (D), obtiene mejores resultados que los tres grupos de control.

Para concluir con el análisis de datos, abordaremos más detenidamente cómo ha sido el incremento de puntuación en las pruebas, el incremento de puntuación entre los grupos y la distribución de los incrementos, cuyos gráficos encontraremos en la Figura 23: "Incremento de puntuación de las pruebas por grupos, según preguntas y dominios de contenido"; la Figura 24: "Incremento de puntuación entre grupos" y la Figura 25: "Distribución de incrementos".

Recordaremos aquí que el análisis de los resultados obtenidos en la prueba "Test de preguntas liberadas del TIMSS 1" reveló que los cuatro grupos-clase no eran homogéneos de partida, ya que obtuvieron diferentes porcentajes de respuestas correctas. Por ello, para hacer una comparación entre ambos grupos, experimental y de control, usamos como variable respuesta de nuestro análisis el incremento de puntuación de las pruebas, que es independiente del punto de partida de los alumnos en cada uno de los grupos.

Test de preguntas liberadas del TIMSS 1 y 2
"Incremento de puntuación de las pruebas por grupos, según preguntas y dominio de contenido."

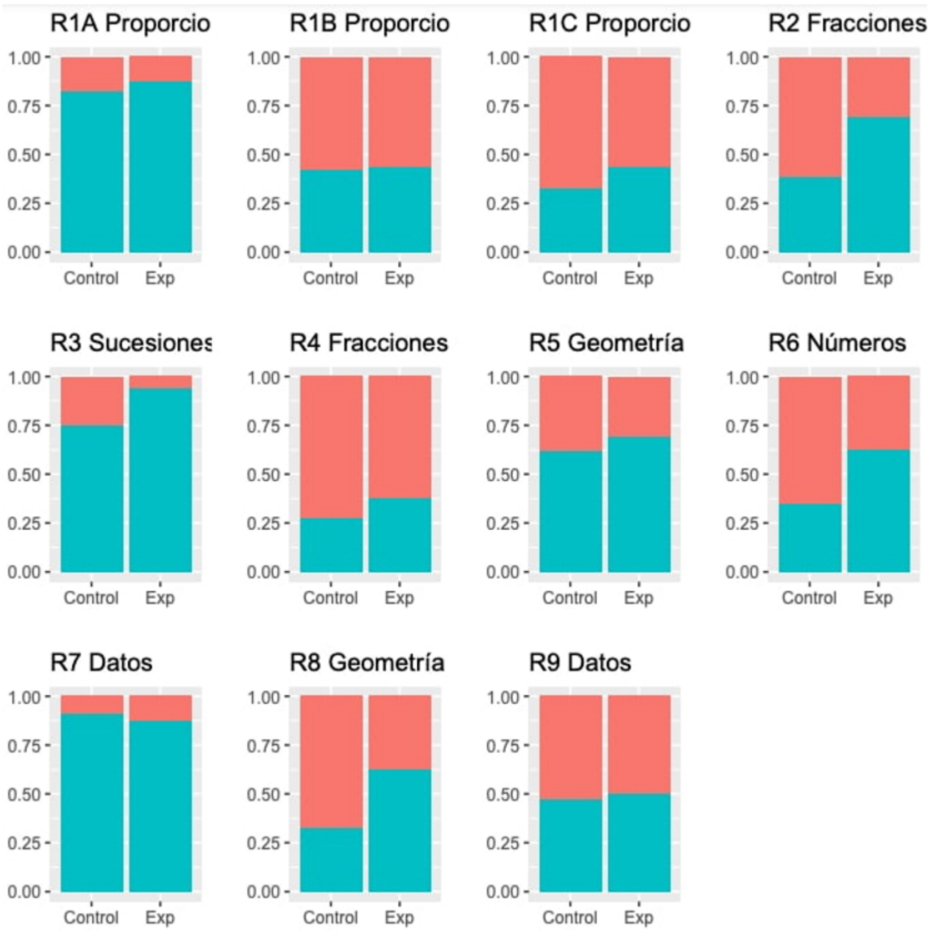


Figura 23. "Incremento de puntuación de las pruebas." Test de preguntas liberadas del TIMSS 1 y 2.
Fuente: tomado de Palop, B. (2021)

Como se observa en la Figura anterior, entre el primer y el segundo Test, 19 alumnos mantienen sus resultados (+- 0.5 puntos de diferencia); 11 alumnos bajan su puntuación entre 0.5 y 2.5 puntos; y 41 alumnos mejoran sus resultados con, entre 0.5 y 6 puntos de diferencia, siendo esto coherente con el trabajo que se ha realizado en las cuatro aulas para mejorar su afrontamiento de la resolución de problemas.

Test de preguntas liberadas del TIMSS 1 y 2
"Incremento de puntuación entre grupos"

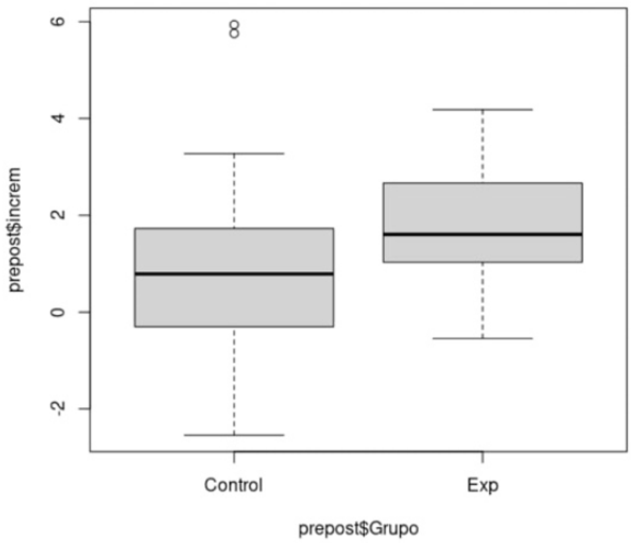


Figura 24. "Incremento de puntuación entre grupos." Test de preguntas liberadas del TIMSS 1 y 2.
Fuente: tomado de Palop, B. (2021)

La imagen que recoge la Figura 24: "Incremento de puntuación entre grupos", también muestra en cuánto se ha incrementado la puntuación entre el grupo experimental y el grupo de control.

Test de preguntas liberadas del TIMSS 1 y 2

"Distribución de incrementos"

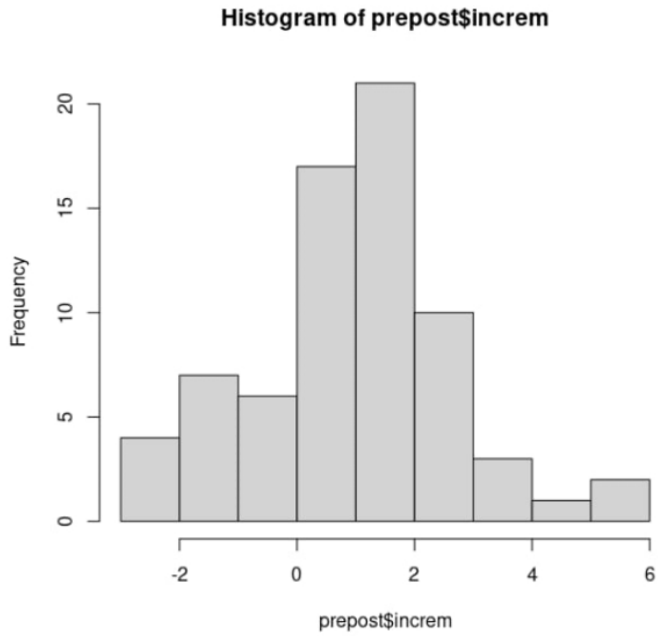


Figura 25. "Distribución de incrementos." Test de preguntas liberadas del TIMSS 1 y 2

Fuente: tomado de Palop, B. (2021)

Para finalizar, analizaremos la información recogida en el histograma de la Figura 25: "Distribución de incrementos" que revela que la distribución de incrementos es bastante común.

A continuación, analizaremos el alcance y las oportunidades y las limitaciones del contexto en el que se ha desarrollado la intervención, exponiendo nuestras consideraciones finales y conclusiones.

7. ANÁLISIS DEL ALCANCE. OPORTUNIDADES Y LIMITACIONES DEL CONTEXTO EN EL QUE SE HA DESARROLLADO LA INTERVENCIÓN. CONSIDERACIONES FINALES, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

7.1. Análisis del alcance y oportunidades de la intervención.

La resolución de problemas supone el eje del aprendizaje matemático, sin embargo, generalmente el alumnado realiza en clase tareas rutinarias y mecánicas, basadas en el paradigma tradicional de enseñanza del área, estando alejadas, por tanto, del verdadero esfuerzo cognitivo que requiere la resolución de un problema, por lo que es fundamental que el maestro sepa lo que es un problema; conozca los criterios para su selección y/o creación; y la metodología a seguir para enseñar a sus alumnos a resolverlos. Sólo a través de la formación continua y el perfeccionamiento, los maestros podrán implementar metodologías que ayuden a mejorar la competencia matemática de su alumnado. Sin embargo, además del esfuerzo anterior, es preciso, para provocar estos necesarios cambios, que los equipos directivos de los centros educativos ejerzan un verdadero liderazgo, comprometiéndose a implementar nuevas metodologías a través de la implicación, la reflexión y la organización efectiva de los docentes de sus centros.

Además de los resultados obtenidos en las pruebas internacionales, numerosos estudios avalan la potencia de la herramienta que supone el Modelo de Barras del Método Singapur para la enseñanza de las Matemáticas, revelando los importantes beneficios de la enseñanza-aprendizaje de este método intuitivo de resolución de problemas. Esta metodología posibilita un tránsito natural entre lo concreto, lo pictórico y lo abstracto, adecuando el aprendizaje de la Matemáticas al desarrollo cognitivo del alumno, a través de los enfoques de espiralidad, variabilidad y comprensión instrumental y conceptual.

7.2. Análisis de las limitaciones de la intervención

La utilización del Modelo de Barras no posibilita entender el enunciado del problema (lenguaje natural y lenguaje matemático); tampoco realizar las operaciones que implica su resolución (conocimiento matemático). Para ambas cosas el alumno requiere contar con el adecuado nivel competencial (lingüístico y matemático) que posibilite ambas cosas. La modelización es una estrategia que proporciona al alumno una comprensión profunda del problema a través de la realización del dibujo de su enunciado, lo que le posibilita reconocer las relaciones entre los valores y las operaciones que debe realizar.

7.3. Consideraciones finales

Pese a que las bondades del Método Singapur son ya mundialmente conocidas, su implementación en nuestro sistema educativo requiere la articulación de diversos factores, siendo el primero la voluntad de propiciar un cambio de paradigma en la enseñanza de las Matemáticas con el objeto de mejorar la competencia de nuestro alumnado.

Para ello sería necesario que el país apostara por la implementación de este Método, adaptándolo a las características de nuestra sociedad, lo que supondría cambios en el currículo escolar, en la formación de los futuros maestros y en la promoción de su formación continua para su perfeccionamiento; cambio radical de los textos escolares…

7.4. Conclusiones

Tras la finalización de nuestra investigación y del cotejo de los objetivos planteados al inicio de esta, podemos concluir que la implementación del Modelo de Barras del Método Singapur para la resolución de problemas ha conseguido mejorar la competencia matemática del alumnado de 5º de curso de Educación Primaria (Grupo D). La representación pictórica de los enunciados ha posibilitado el desarrollo de sus procesos cognitivos matemáticos, revelando los resultados obtenidos que la implementación de este Modelo que tiene una perspectiva no aritmética puede generar cambios importantes, mejorando también el grado de autonomía en la resolución de problemas.

Por otro lado, también confirmó nuestra investigación que los grupos que realizaron la experiencia de resolución de problemas sin implementación del Modelo de Barras mejoraron sus resultados en el Test final, por lo que comprobamos nuestra idea de que la práctica sistémica y diaria de la resolución de problemas mejora la competencia del alumnado en la misma, independientemente de que la metodología empleada esté basada en la aritmética.

También obtuvimos resultados que confirmaron que el grupo que implementó el Modelo de Barras consiguió mejores resultados que el resto de los grupos en el Test final.

Como ya hemos recogido con anterioridad, nuestro trabajo pretendía proveer a nuestro alumnado de un nuevo método para afrontar la resolución de problemas, que transformara radicalmente su forma de comprenderlos y resolverlos, contribuyendo así, no sólo a la mejora de sus actitudes matemáticas, sino al desarrollo también actitudes positivas hacia las matemáticas.

En este sentido, el alumnado del grupo experimental mantuvo una actitud proactiva durante la implementación de la experiencia que despertó el interés y la motivación de todos, particularmente al inicio de la misma cuando su práctica diaria consistió en la modelización de enunciados sin incógnita a resolver, lo que permitió a los alumnos que perciben la resolución de problemas como una práctica compleja, aproximarse a ella desde una nueva e intuitiva perspectiva.

Tras los resultados obtenidos por el alumnado de 5º curso de Educación Primaria, alumnado próximo a finalizar esta etapa y que lleva por tanto la práctica totalidad de la misma "aprendiendo" matemáticas con metodologías tradicionales; creemos que la implementación del Método Singapur como propuesta para la mejora de la resolución de problemas se puede aplicar en cualquier otro curso de la Etapa Primaria.

En este sentido, creemos profundamente que, si la implementación de este Método tuviera lugar desde el inicio de la Etapa Primaria, sin lugar a duda, el alumnado desarrollaría más y de mejor manera su competencia matemática, obteniendo así mejores resultados en el área porque:

- El Modelo de Barras permite la comprensión profunda del problema, identificando los diferentes valores y las relaciones entre ellos, lo que posibilita intuir la forma de proceder para su resolución.
- La utilización de la barra unidad permite una aproximación y transición natural hacia el lenguaje algebraico.
- Permite a todos aproximarse y acceder al conocimiento matemático.
- Supone, en definitiva, la apuesta por un cambio de paradigma en la educación Matemática.

7.5. Recomendaciones

Esta experiencia de implementación del Modelo de Barras del Método Singapur podría dar algunas ideas a aquellos docentes que, no estando satisfechos con el desarrollo de competencia matemática alcanzada por su alumnado, quisieran investigar en cómo intentar revertir esa situación.

No obstante, y como ya referimos, promover cambios de este calado, requieren de la ineludible implicación y compromiso, al menos, de la dirección del centro educativo y de la totalidad del claustro de este.

8. BIBLIOGRAFÍA

Alsina, Á., Abarca, M. y Grabulosa, I. (2020). Evaluando la competencia matemática: construcción y validación de una rúbrica. *Números Revista de Didáctica de las Matemáticas, 105*, 119-139. Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/105/Articulos_05.pdf

Ban Har, Y. (8 noviembre 2015). *Mat en Singapur 1970s*. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=Lu2o_9LjWlw&list=PL2kQlGJ9_w48L_-e68fmog4vcPWl3N9hE&index=3&t=16s

Beyer, W. (1998). Algunas Precisiones acerca de la Resolución de Problemas y de su Implementación en el Aula. *Paradigma*, 19 (1) Recuperado de https://core.ac.uk/download/pdf/322887318.pdf

Blanco, B. y Blanco, L. (2009). Contextos y estrategias en la resolución de problemas de primaria. *Números Revista de Didáctica de las Matemáticas, 71*, 75-85. Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/71/Articulos_03.pdf

Cabo, M., Moreno, G., y Bazán, A. (2007). *Método gráfico de Singapur: Solución de problemas, 1*. México D.F.: Santillana. Recuperado de https://www.academia.edu/37004907/Solución_de_problemas_Método_gráfico_de_Singapur

Cazau, P. (2006). *Introducción a la Investigación en Ciencias Sociales.* (3ª ed.). Buenos Aires. Recuperado de https://alcazaba.unex.es/asg/400758/MATERIALES/INTRODUCCIÓN%20A%20LA%20INVESTIGACIÓN%20EN%20CC.SS..pdf

DECRETO 26/2016, de 21 de julio, por el que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la Educación Primaria en la Comunidad de Castilla y León (BOCYL núm.142, de 25 de julio de 2016).

Defior, S. (2000). *Las dificultades de aprendizaje: un enfoque cognitivo: lectura, escritura, matemáticas*. España: Editor Aljibe.

Fraile Rey, M. A. (2017). *El desarrollo de actitudes valiosas para la resolución de problemas matemáticos en educación primaria* (Tesis doctoral, Universidad de Alcalá).
Recuperada de https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=158681

Fraile, A. (2018). Análisis de procesos de resolución de problemas en preguntas liberadas de TIMSS – 2011. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 7*(2), 38-54. Recuperado de https://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6/article/view/60/58

Gómez-Chacón, I. M. (2000). *Matemática emocional: los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid: Narcea Ediciones.

Gutiérrez, R., Prieto, J. y Ortiz, J. (2017). Matematización y trabajo matemático en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *Educación Matemática 29*(2). Recuperado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262017000200037#B4

Hernández, R.; Fernández, C. y Baptista P. (2004). *Metodología de la investigación.* (4ª ed.) México D. F.: Ed. McGraw-Hill Interamericana. Recuperado de https://www.uv.mx/personal/cbustamante/files/2011/06/Metodologia-de-la-InvestigaciÃ³n_Sampieri.pdf

INEE (2016). Resultados del Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias TIMSS 2015. Madrid: Ministerio de Educación, Ciencia y Deporte.

INEE (2020). Resultados del Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias TIMSS 2019. Madrid: Ministerio de Educación, Ciencia y Deporte.

International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). (2013). *TIMSS USA 4 Released mathematics items.* TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College, Chestnut Hill, MA and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA), IEA Secretariat, Amsterdam, the Netherlands. Recuperado de https://nces.ed.gov/timss//pdf/TIMSS2011_G4_Math.pdf

Juárez, M. y Aguilar, M. (2018). El método Singapur, propuesta para mejorar el aprendizaje de las Matemáticas en Primaria. *Números Revista de Didáctica de las Matemáticas, 98*, 75-86. Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/98/Volumen_98.pdf

Meneses-Patiño, Y. y Ardila, L. (2019). El Método Singapur como estrategia didáctica para el fortalecimiento de la competencia de resolución de problemas aditivos en estudiantes de básica primaria. *Eco Matemático, 10*(1), 28-41. Recuperado de https://revistas.ufps.edu.co/index.php/ecomatematico/article/view/2540

Morales, M. (2019). *Aulas seguras para cometer errores.* PrácticaReflexiva.pro. Recuperado de https://practicareflexiva.pro/aulas-seguras-para-cometer-errores/

Morales, M. (2020). *Las preguntas bisagra: una estrategia ágil para averiguar dónde está el alumno.* PrácticaReflexiva.pro. Recuperado de https://practicareflexiva.pro/las-preguntas-bisagra-una-estrategia-agil-para-averiguar-donde-esta-el-alumno/

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Ruddock G. J., O'Sullivan C. Y., & Preuschoff C. (2009). *TIMSS 2011 Assessment Frameworks.* TIMSS & PIRLS International Study Center. Lynch School of Education, Boston College.

Palop, B. y Ramos, P. A. (7 abril, 2020). *Resolución de problemas con el Modelo de Barras. Educación Primaria 1. Modelos Elementales.* Recuperado de https://youtu.be/M18CveR10FU

Palop, B. y Ramos, P. A. (7 abril, 2020). *Resolución de problemas con el Modelo de Barras. Educación Primaria. 2. Problemas de estructura aditiva.* Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=4vtqMd-KysA

Palop, B. y Ramos, P. A. (7 abril, 2020). *Resolución de problemas con el Modelo de Barras. Educación Primaria. 3.Problemas de estructura aditiva con más de una etapa.* Recuperado de https://youtu.be/M2THbzKYiHw

Palop, B. y Ramos, P. A. (7 abril, 2020). *Resolución de problemas con el Modelo de Barras. Educación Primaria. 4. Estructura Multiplicativa.* Recuperado de https://youtu.be/3Mj8_pNHnD0

Palop, B. y Ramos, P. A. (7 abril, 2020). *Resolución de problemas con el Modelo de Barras. Educación Primaria. 5. Agrupamiento y reparto.* Recuperado de https://youtu.be/Z-T5GC6Yqmc

Palop, B. y Ramos, P. A. (7 abril, 2020). *Resolución de problemas con el Modelo de Barras. Educación Primaria. 6. Práctica Avanzada.* Recuperado de https://youtu.be/3Z6-3MMcYN8

Palop, B. y Ramos, P. A. (8 mayo, 2020). *Resolución de problemas con el Modelo de Barras. Educación Primaria. 7. Introducción al trabajo con fracciones.* Recuperado de https://youtu.be/8ZjdM4OepoY
Palop, B. y Ramos, P. A. (10 mayo, 2020). *Resolución de problemas con el Modelo de Barras. Educación Primaria. 8. Problemas con suma de fracciones.* Recuperado de https://youtu.be/Xg4dLkrGo5Y

Palop, B. y Ramos, P. A. (12 mayo, 2020). *Resolución de problemas con el Modelo de Barras. Educación Primaria. 9. Problemas con producto de fracciones.* Recuperado de https://youtu.be/pqOBk_1ovbQ

Palop, B. y Ramos, P. A. (12 mayo, 2020). *Resolución de problemas con el Modelo de Barras. Educación Primaria. 10. Problemas con división de fracciones.* Recuperado de https://youtu.be/QMjk-ueBHKw

Pérez, Y. y Ramírez, R. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos teóricos y metodológicos**.** *Revista de Investigación, 35*(73), 169-193. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3897810

Pólya, G. (1965). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving.* John Wiley & Sons.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares.* Madrid. Síntesis.

Puig, L. (2008). Presencia y ausencia de la resolución de problemas en la investigación y el currículo. *Investigación en educación matemática XII*, (93-112). Recuperado de https://www.academia.edu/204477/Puig_L._2008_._Presencia_y_ausencia_de_la_resolución_de_problemas_en_la_investigación_y_el_curr%C3%ADculo._En_R._Luengo_B._Gómez_M._Camacho_y_L._Blanco_Eds._Investigación_en_Educación_Matemática_12._Actas_del_Duodécimo_Simposio_de_la_Sociedad_Española_de_Investigación_en_Educación_Matemática_pp._93-111_._Badajoz_Sociedad_Extremeña_de_Educación_Matemática_Ventura_Reyes_Prósper_Sociedad_Española_de_Investigación_en_Educación_Matemática

Rodríguez, S. (2011). El método de enseñanza de matemática Singapur: "Pensar sin límites". *Revista Pandora Brasil,* (27), 1-3. Recuperado de http://revistapandorabrasil.com/revista_pandora/matematica/selva.pdf

Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2004). Development of Numerical Estimation in Young Children. *Child Development, 75*(2), 428-444. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2004.00684.x

Tarín, J. y Tárraga, R. (2020). La resolución de problemas en los libros de texto de matemáticas de Educación Primaria: del informe Cockcroft a la actualidad. *Números Revista de Didáctica de las Matemáticas, 107*, 35-54. Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/107/Articulos_02.pdf

Urbano, S., Fernando, J. y Fernández, M. (2016). El modelo de barras: una estrategia para resolver problemas de enunciado en Primaria. *Revista Internacional de Ciencia, Matemáticas y Tecnología © Global Knowledge Academics, 3*(1), 23-37. Recuperado de https://core.ac.uk/download/pdf/287746562.pdf

Wylie, C. y Wiliam, D. (2006). Diagnostic Questions: Is There Value in Just One? Unpublished Work Copyright © 2006 by Educational Testing Service. Recuperado de http://www.dylanwiliam.org/Dylan_Wiliams_website/Papers_files/DIMS%20%28NCME%202006%29.pdf

Zúñiga P., G. (2013). *Metodología Singapur: el caso del Método del Modelo de Barras. Una mirada Socioepistemológica* (Trabajo fin de grado, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso). Recuperada de http://opac.pucv.cl/pucv_txt/txt-3000/UCE3388_01.pdf

9. ANEXOS

Anexo 1

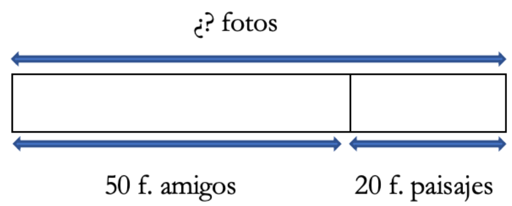
Modelo de Barras del Método Singapur para la enseñanza de las Matemáticas
Modelización de problemas

Anexo 1.a

Modelo de PARTES-TODO

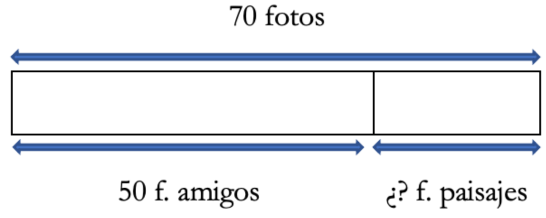
A continuación, presentamos una serie de problemas de enunciados, en extremo sencillos, ya que el objeto de estos es demostrar cómo visualiza el Modelo de Barras la información contenida en los mismos. Así encontramos, por ejemplo:

1.a- Julia tiene en su teléfono móvil 50 fotos de amigos y otras 20 de paisajes. ¿Cuántas fotos tiene Julia en total?



Aparecen dos partes conocidas y un todo desconocido. Precisa una suma para su resolución. Julia tiene en total 70 fotos. 50 + 20 = 70

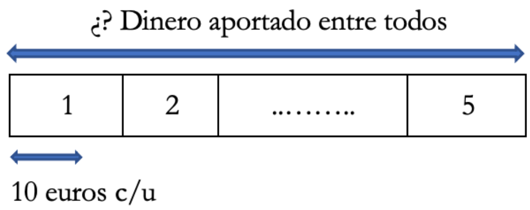
1.b- Julia tiene en su teléfono móvil 70 fotos de paisajes y amigos. Si 50 de ellas son de amigos ¿Cuántas fotos de paisajes tiene Julia en su teléfono móvil?

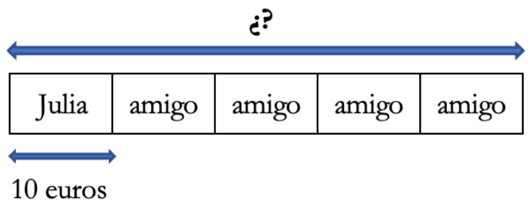


Aparece una parte desconocida y otra conocida; también se sabe cuánto es el todo. Precisa una resta para su resolución. 70 - 50 = 20 Julia tiene 20 fotos de paisajes en su teléfono móvil.

Si la incógnita fuera el número de fotos de amigos, una vez facilitado el de paisajes se procedería de igual forma, a través de una resta.

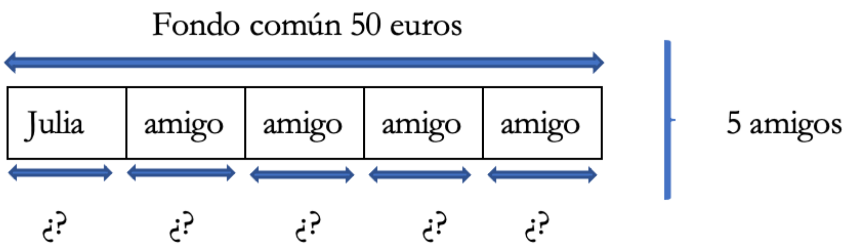
2.a- Julia y sus cuatro amigos han quedado esta tarde para merendar e ir al cine. Han decidido poner un fondo común de gastos, aportando 10 euros cada uno. ¿Cuánto dinero han aportado entre todo





Conocemos el valor de una parte, así como el número de partes que conforman el todo. Además, sabemos que todas las partes tienen el mismo valor (un valor es n veces otro). Utilizaremos una multiplicación para su resolución. 5 x 10 = 50 Entre todos han aportado 50 euros al fondo común.

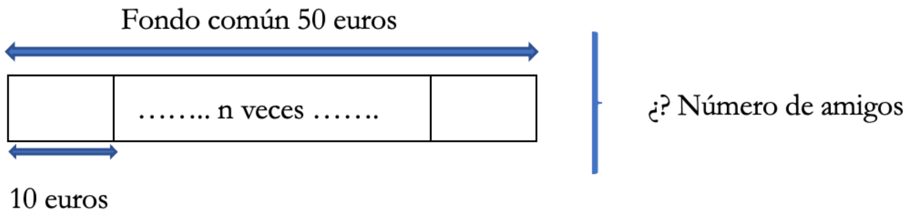
2.b- Julia y sus cuatro amigos han quedado esta tarde para merendar e ir al cine. Han decidido poner, a partes iguales, un fondo de gastos común que finalmente ha ascendido a 50 euros. ¿Cuánto dinero ha aportado cada uno sabiendo que todos han contribuido con la misma cantidad?



Conocemos el valor del todo y el número de partes "iguales" (de idéntico valor) en las que está dividido ese todo. Utilizaremos una división para su resolución. 50 : 5 = 10 Cada uno ha aportado 10 euros al fondo común.

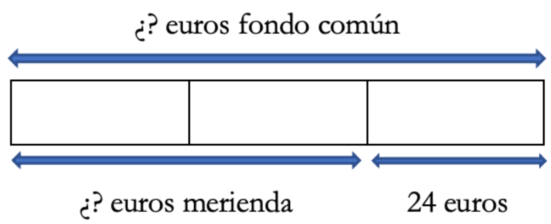
Si la incógnita fuera la cantidad de personas que aportan dinero, una vez facilitado el valor del todo y el valor de una parte (dinero que aporta cada uno de ellos para el fondo común), representaríamos como sigue:

2.c- Julia y algunos amigos han quedado esta tarde para merendar e ir al cine. Han decidido poner cada uno de ellos 10 euros para un fondo común de gastos, logrando recaudar 50 euros. ¿Cuántos amigos, incluida Julia, han quedado esta tarde?



Conocemos el valor del todo y la cantidad de dinero que aporta cada amigo (todos aportan el mismo número de euros) en las que está dividido ese todo. Utilizaremos una división para su resolución. Esta tarde han quedado cinco amigos, incluida Julia. 50 : 10 = 5

3.a- Cuatro amigos han quedado esta tarde para merendar e ir al cine. Para los gastos han decidido crear un fondo común. Han gastado 2/3 del dinero en la merienda y les sobran 24 euros del dinero inicial para la compra de las entradas del cine. ¿Cuánto dinero había inicialmente en el fondo común?



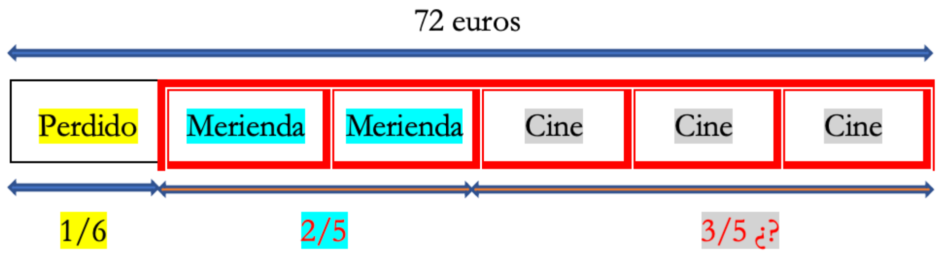
1/3 = 24 euros sobran para comprar las entradas del cine.

2/3 = 48 euros han gastado en la merienda.

24 + 48 = 72 euros había, inicialmente, en el fondo común.

En este problema, observamos como tras el dibujo del rectángulo y su etiquetado, se ha dividido la barra en tres partes, ya que indica que se han gastado 2/3 en la merienda, de tal manera que la "barra unidad" sería 1/3, cuyo valor conocemos, lo que permitirá la sencilla resolución del problema.

3.b- Unos amigos tenían 72 euros para gastar en ocio esta tarde, pero han perdido 1/6 del dinero que tenían. Del dinero que les queda 2/5 partes las destinarán a comprar algo para merendar y el resto para las entradas del cine. ¿Cuánto dinero podrán gastar en las entradas?



1/6 de 72 = 12 euros han perdido.

72 – 12 = 60 euros les quedan tras la pérdida de dinero inicial.

2/5 de 60 = 24 euros destinan a la merienda.

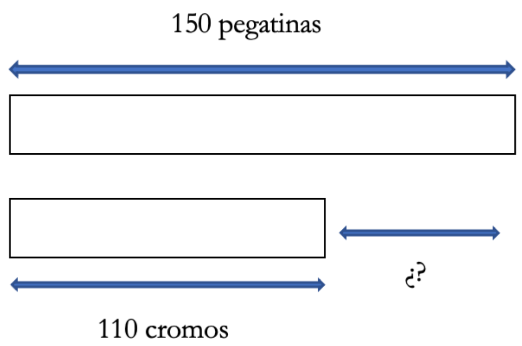
3/5 de 60 = 36 euros podrán gastar en las entradas.

Anexo 1.b

Modelo de Comparación

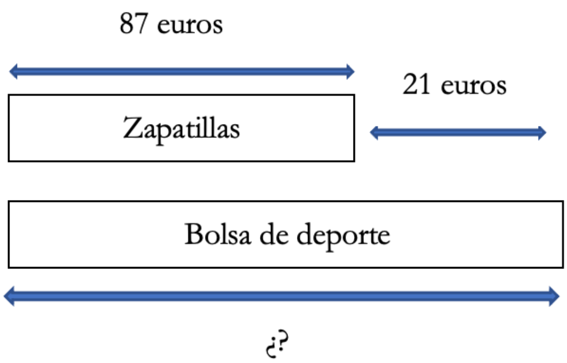
A continuación, presentamos una serie de problemas de enunciados, en extremo sencillos, ya que el objeto de estos es demostrar cómo visualiza el Modelo de Barras la información contenida en los mismos. Así encontramos, por ejemplo:

1.a- Julia tiene 170 pegatinas y 130 cromos. ¿Cuántas pegatinas tiene más que cromos?



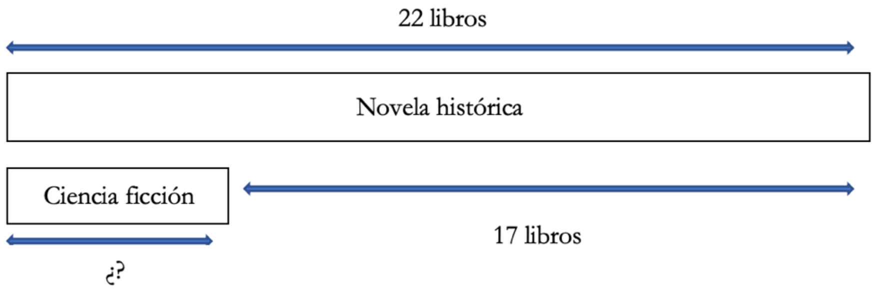
Aparecen dos cantidades conocidas y nos preguntan por la diferencia entre ellas. Precisa una resta para su resolución. 170 - 130 = 40 Julia tiene en 40 pegatinas más que cromos.

1.b- Unas zapatillas deportivas cuestan 87 euros y una bolsa de deporte cuesta 21 euros más que las zapatillas. ¿Cuánto cuesta la bolsa de deporte?



Aparece una cantidad conocida y también conocemos la diferencia que existe entre ésta y la cantidad que no conocemos. Precisa una suma para su resolución. 87 + 21 = 108 La bolsa de deporte cuesta 108 euros.

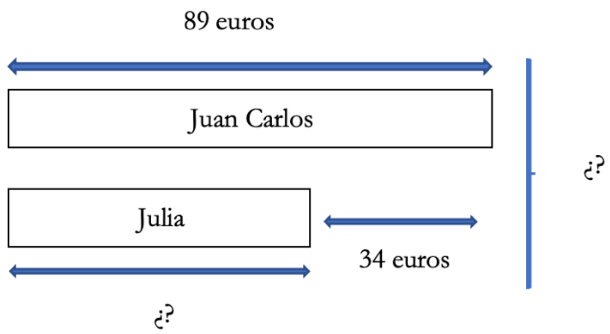
1.c- Julia tiene 22 libros de novela histórica y 17 libros menos de ciencia ficción? ¿Cuántos libros de ciencia ficción tiene Julia?



Como en el anterior problema, aparece una cantidad conocida y también conocemos la diferencia que existe entre ésta y la cantidad que desconocemos. Precisa una resta para su resolución.

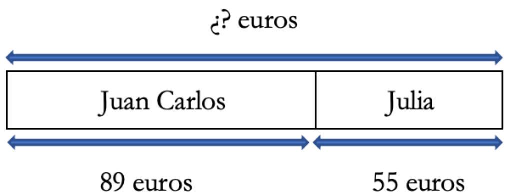
22 - 17 = 5 Julia tiene 5 libros de ciencia ficción.

2.a- Juan Carlos tiene 89 euros y sabemos que tiene 34 euros más que Julia. ¿Cuánto dinero tienen entre los dos?



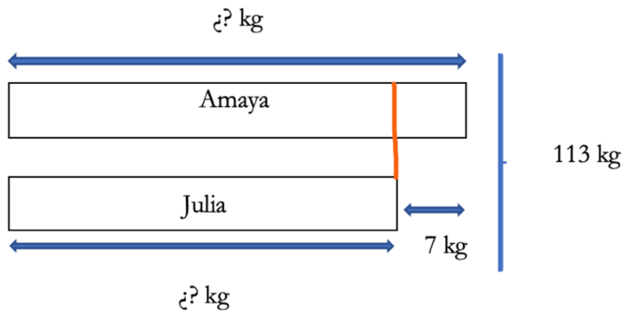
Aparece una cantidad conocida y también conocemos la diferencia que existe entre ésta y la cantidad que no conocemos. No conocemos el total, Precisa de una resta pata hallar la primera incógnita y de una suma para la resolución. 89 - 34 = 55 Julia tiene 55 euros.

En este problema de estructura aditiva con más de una etapa, si el alumno lo precisa, podrá utilizar más de un modelo para resolver el problema. Así pues, proseguiría su resolución con la siguiente modelización con el modelo Partes-Todo:



Aparecen dos partes conocidas y un todo desconocido. Precisa una suma para su resolución. Entre los dos tienen 144 euros. 89 + 55 = 144.

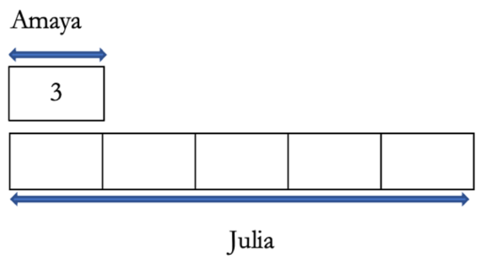
2.b- Amaya pesa 7 kilos más que Julia. Si entre las dos pesan 113 kg, ¿cuánto pesa cada una?



Aparece el total conocido y también conocemos la diferencia que existe entre dos valores que no conocemos. Es muy importante para la resolución del problema que el alumno dibuje el segmento (rojo) que delimite los kg que tienen en común Amaya y Julia, ya que esta acción le permitirá darse cuenta de que, restando la diferencia entre ambas cantidades al total, conseguirá dar con el valor que, repartido entre dos, revelará el peso de Julia. 113 – 7 = 106   106 : 2 = 53   Julia pesa 53 kg.

Llegado a este punto, será el dibujo de ese mismo segmento (rojo), el que le indicará que debe sumar al peso de Julia, los 7 kg de diferencia entre ambos pesos. 53 + 7 = 60 Amaya pesa 60 kg.

3.a- Julia tiene 5 veces más pantalones que Amaya. Si Amaya tiene 3 pantalones, ¿Cuántos pantalones tiene Julia?



Conocemos el valor de la barra unidad (3) y sabemos que la misma se repite 5 veces. Utilizaremos una multiplicación para resolver el problema 5 x 3 = 15   Julia tiene quince pantalones.

3.b- Elena tiene 5 veces menos años que Julia, que tiene 20 años. ¿Cuántos años tiene Elena?

Conocemos uno de los valores y la relación que existe con el otro (5 veces menos). Utilizaremos una división para resolver el problema 20 : 5 = 4   Elena tiene 4 años.

Anexo 2

Test de percepción personal sobre la resolución de problemas

N.º	Pregunta	Casi nunca	Pocas veces	A menudo	Casi siempre
Ej.	Me siento seguro resolviendo la mayoría de los problemas	1	2	3	4
1	Normalmente se me ocurren formas creativas y eficaces para resolver un problema	1	2	3	4
2	Puedo resolver la mayoría de los problemas incluso cuando la solución no está clara	1	2	3	4
3	Cuando tengo que resolver un problema pienso en diferentes maneras de solucionarlo, antes de resolverlo	1	2	3	4
4	Después de resolver un problema, mi resultado suele ser correcto	1	2	3	4
5	Cuando pienso en una manera de resolver un problema, primero pienso cual podría ser el resultado	1	2	3	4
6	A veces no analizo suficientemente los problemas antes de resolverlos	1	2	3	4
7	Cuando tengo que resolver un problema, una de las primeras cosas que hago, es entender qué es lo que me pide el problema	1	2	3	4
8	Cuando mi respuesta a un problema es incorrecta, pienso por qué y en qué me he equivocado	1	2	3	4
9	Cuando tengo un problema, intento resolverlo de la primera forma que se me ocurre	1	2	3	4
10	Cuando tengo un problema, no siempre estoy seguro de si sabré solucionarlo	1	2	3	4
11	Cuando pienso en cómo resolver un problema, no se me ocurren muchas formas de solucionarlo	1	2	3	4
12	Confío en mi capacidad para resolver problemas nuevos y difíciles	1	2	3	4
13	Doy respuestas muy rápidas y luego me arrepiento de ellas	1	2	3	4
14	Cuando voy a resolver un problema, me paro a pensar antes de hacer cada uno de los pasos	1	2	3	4
15	Cuando elijo una posible solución para un problema, me paro a pensar en otras soluciones posibles	1	2	3	4
16	Muchos de los problemas que resuelvo me parecen demasiado complicados	1	2	3	4
17	Soluciono el problema con la primera idea que se me ocurre	1	2	3	4

18	Cuando estoy tratando de resolver un problema, a veces siento que no me centro en lo que el problema me pide	1	2	3	4
19	Cuando tomo una decisión, estudio las consecuencias de cada alternativa y comparo unas con otras	1	2	3	4
20	Cuando planeo la forma de solucionar un problema, estoy casi seguro de que esa solución va a ser acertada	1	2	3	4
21	Cuando no entiendo bien un problema, una de las primeras cosas que hago es leer atentamente el enunciado y buscar la información más importante	1	2	3	4
22	Cuando no consigo solucionar un problema a la primera, me siento molesto y pienso que no sé resolverlo	1	2	3	4
23	Creo que puedo resolver la mayoría de problemas, si me esfuerzo y les dedico suficiente tiempo	1	2	3	4
24	Después de resolver un problema no pienso en qué cosas hice bien y cuáles mal	1	2	3	4
25	Estoy seguro de que puedo resolver problemas nuevos para mí	1	2	3	4

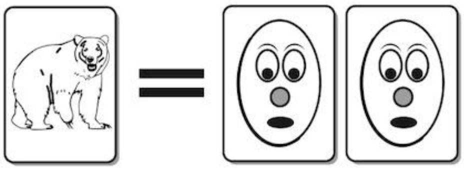
Anexo 3

Test de preguntas liberadas de TIMSS 1

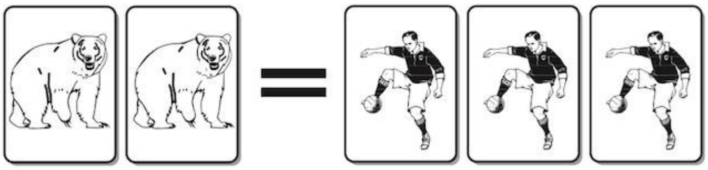
Nombre:____Curso: ______

M031346

1. En la feria del pueblo había un puesto donde la gente podía cambiar cromos.



1 cromo de animales vale por 2 cromos de muñecos.



2 cromos de animales valen por 3 cromos de deportes.

Algunos niños fueron al puesto a cambiar cromos.

A. Berta tenía 5 cromos de animales para cambiarlos por cromos de muñecos. ¿Cuántos cromos de muñecos obtendría?

Respuesta: ________cromos de muñecos.

B. Jaime tenía 8 cromos de animales para cambiarlos por cromos de deportes. ¿Cuántos cromos de deportes obtendría?

Respuesta:________cromos de deportes.

C. Esteban tenía 15 cromos de deportes para cambiarlos por cromos de animales. ¿Cuántos cromos de animales obtendría?

Respuesta: ________cromos de animales.

Este problema me ha resultado:	Fácil.	Dificultad media.	Difícil.
Creo que tengo el problema:	Bien resuelto.	Podría tenerlo bien resuelto.	No lo tengo bien resuelto.
Este problema es:	Completamente nuevo para mí.	He visto problemas como este antes, perohe olvidado cómo se resolvían.	Recuerdo haber trabajado problemas como este antes y recuerdo como se resuelven.
En el ejercicio:	He entendido lo que me pedía en el enunciado.	No me ha quedado muy claro el enunciado, pero lo he hecho.	No lo he entendido el enunciado.
¿Has trabajado alguna vez este tipo de problemas en casa?	Sí.	A veces.	No.

M051091

2. ¿Cuál de estas fracciones no es igual a las demás?

Ⓐ $\frac{1}{2}$

Ⓑ $\frac{4}{8}$

Ⓒ $\frac{2}{4}$

Ⓓ $\frac{2}{8}$

- Opción A
- Opción B
- Opción C
- Opción D

Este problema me ha resultado:	Fácil.	Dificultad media.	Difícil.
Creo que tengo el problema:	Bien resuelto.	Podría tenerlo bien resuelto.	No lo tengo bien resuelto.
Este problema es:	Completamente nuevo para mí.	He visto problemas como este antes, perohe olvidado cómo se resolvían.	Recuerdo haber trabajado problemas como este antes y recuerdo como se resuelven.
En el ejercicio:	He entendido lo que me pedía en el enunciado.	No me ha quedado muy claro el enunciado, pero lo he hecho.	No lo he entendido el enunciado.
¿Has trabajado alguna vez este tipo de problemas en casa?	Sí.	A veces.	No.

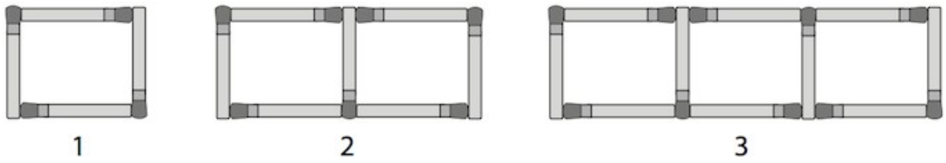
M051601

3. Carlos tiene que formar con cerillas las figuras 1 a 4.

Las figuras 1, 2 y 3 se muestran a continuación.

Necesita cuatro cerillas para formar la figura 1, siete cerillas para formar la figura 2, y diez cerillas para formar la figura 3.

Carlos sigue la misma regla cada vez para formar la siguiente figura de la serie.



¿Cuántas cerillas necesitará para formar la figura 4?

Este problema me ha resultado:	Fácil.	Dificultad media.	Difícil.
Creo que tengo el problema:	Bien resuelto.	Podría tenerlo bien resuelto.	No lo tengo bien resuelto.
Este problema es:	Completamente nuevo para mí.	He visto problemas como este antes, perohe olvidado cómo se resolvían.	Recuerdo haber trabajado problemas como este antes y recuerdo como se resuelven.
En el ejercicio:	He entendido lo que me pedía en el enunciado.	No me ha quedado muy claro el enunciado, pero lo he hecho.	No lo he entendido el enunciado.
¿Has trabajado alguna vez este tipo de problemas en casa?	Sí.	A veces.	No.

M041299

4. Tomás comió 1/2 de un pastel, y Juana comió 1/4 del pastel. ¿Qué parte del pastel comieron entre los dos?

Este problema me ha resultado:	Fácil.	Dificultad media.	Difícil.
Creo que tengo el problema:	Bien resuelto.	Podría tenerlo bien resuelto.	No lo tengo bien resuelto.
Este problema es:	Completamente nuevo para mí.	He visto problemas como este antes, perohe olvidado cómo se resolvían.	Recuerdo haber trabajado problemas como este antes y recuerdo como se resuelven.
En el ejercicio:	He entendido lo que me pedía en el enunciado.	No me ha quedado muy claro el enunciado, pero lo he hecho.	No lo he entendido el enunciado.
¿Has trabajado alguna vez este tipo de problemas en casa?	Sí.	A veces.	No.

M041155

5. El patio de la escuela es un cuadrado que mide 100 metros de lado. Ruth recorre todoel borde del patio. ¿Cuánto camina?

- 100 metros
- 200 metros
- 400 metros
- 10.000 metros

Este problema me ha resultado:	Fácil.	Dificultad media.	Difícil.
Creo que tengo el problema:	Bien resuelto.	Podría tenerlo bien resuelto.	No lo tengo bien resuelto.
Este problema es:	Completamente nuevo para mí.	He visto problemas como este antes, perohe olvidado cómo se resolvían.	Recuerdo haber trabajado problemas como este antes y recuerdo como se resuelven.
En el ejercicio:	He entendido lo que me pedía en el enunciado.	No me ha quedado muy claro el enunciado, pero lo he hecho.	No lo he entendido el enunciado.
¿Has trabajado alguna vez este tipo de problemas en casa?	Sí.	A veces.	No.

M041098

6. La pintura viene en latas de 5 litros. Santi necesita 37 litros de pintura. ¿Cuántas latas debe comprar?

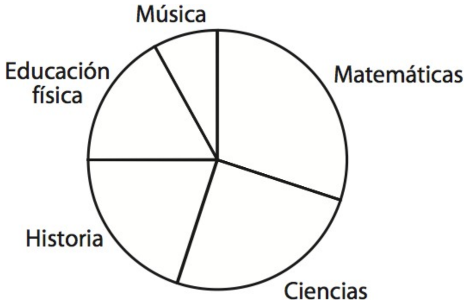
- ○ 32
- ○ 185
- ○ 7
- ○ 8

Este problema me ha resultado:	Fácil.	Dificultad media.	Difícil.
Creo que tengo el problema:	Bien resuelto.	Podría tenerlo bien resuelto.	No lo tengo bien resuelto.
Este problema es:	Completamente nuevo para mí.	He visto problemas como este antes, perohe olvidado cómo se resolvían.	Recuerdo haber trabajado problemas como este antes y recuerdo como se resuelven.
En el ejercicio:	He entendido lo que me pedía en el enunciado.	No me ha quedado muy claro el enunciado, pero lo he hecho.	No lo he entendido el enunciado.
¿Has trabajado alguna vez este tipo de problemas en casa?	Sí.	A veces.	No.

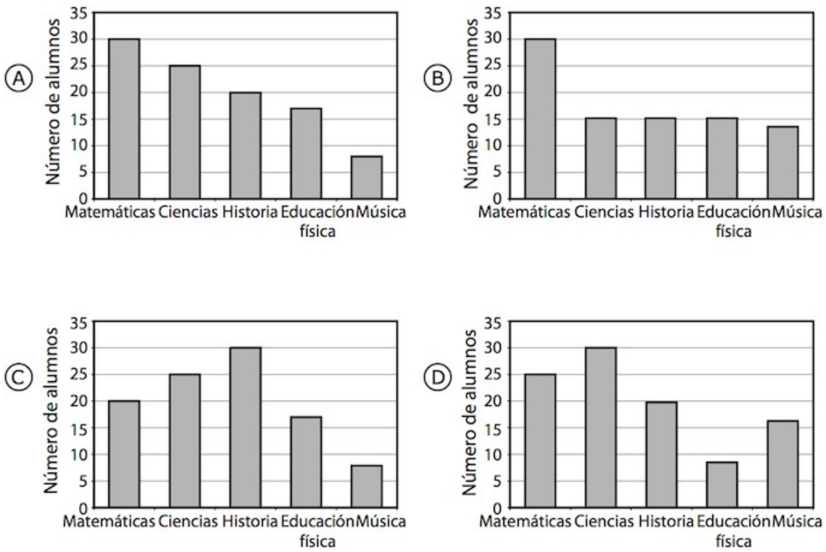
M041184

7. El profesor Juan preguntó a los alumnos del colegio sobre sus asignaturas preferidas.

Este gráfico circular muestra cuántos alumnos prefirieron cada una de las 5 asignaturas.



¿Qué gráfico de barras muestra la misma información que el gráfico circular?

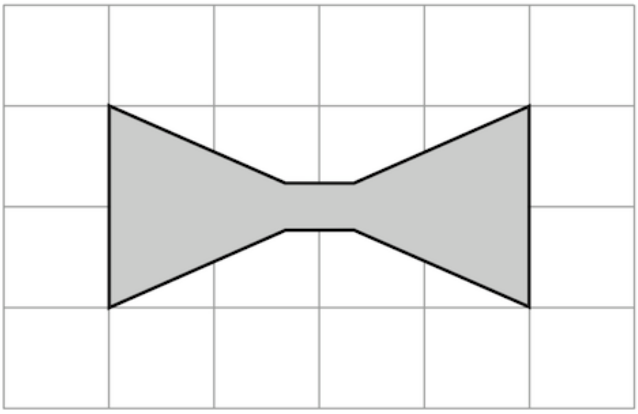


- Gráfico A
- Gráfico B
- Gráfico C
- Gráfico D

Este problema me ha resultado:	Fácil.	Dificultad media.	Difícil.
Creo que tengo el problema:	Bien resuelto.	Podría tenerlo bien resuelto.	No lo tengo bien resuelto.
Este problema es:	Completamente nuevo para mí.	He visto problemas como este antes, perohe olvidado cómo se resolvían.	Recuerdo haber trabajado problemas como este antes y recuerdo como se resuelven.
En el ejercicio:	He entendido lo que me pedía en el enunciado.	No me ha quedado muy claro el enunciado, pero lo he hecho.	No lo he entendido el enunciado.
¿Has trabajado alguna vez este tipo de problemas en casa?	Sí.	A veces.	No.

M051123

8.



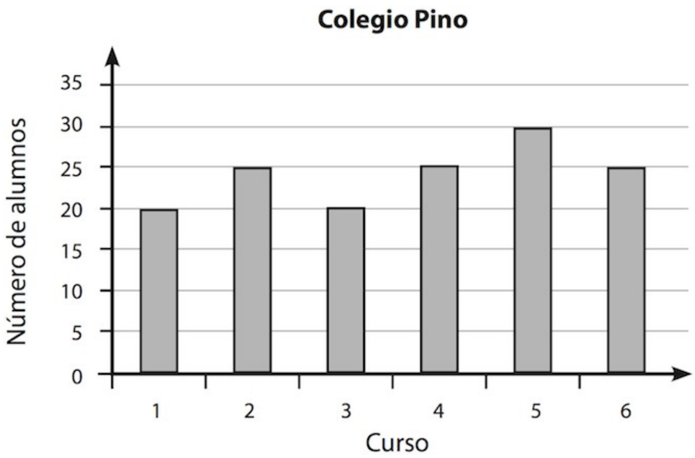
¿Cuántos ejes de simetría tiene esta figura?

- ○ 0
- ○ 1
- ○ 2
- ○ 4

Este problema me ha resultado:	Fácil.	Dificultad media.	Difícil.
Creo que tengo el problema:	Bien resuelto.	Podría tenerlo bien resuelto.	No lo tengo bien resuelto.
Este problema es:	Completamente nuevo para mí.	He visto problemas como este antes, perohe olvidado cómo se resolvían.	Recuerdo haber trabajado problemas como este antes y recuerdo como se resuelven.
En el ejercicio:	He entendido lo que me pedía en el enunciado.	No me ha quedado muy claro el enunciado, pero lo he hecho.	No lo he entendido el enunciado.
¿Has trabajado alguna vez este tipo de problemas en casa?	Sí.	A veces.	No.

M051117

9. El gráfico muestra el número de alumnos de cada curso en el Colegio Pino.



En el Colegio Pino hay plazas para 30 alumnos en cada curso. ¿Cuántos alumnos máscabrían en el colegio?

- 35
- 7
- 180
- 145

Este problema me ha resultado:	Fácil.	Dificultad media.	Difícil.
Creo que tengo el problema:	Bien resuelto.	Podría tenerlo bien resuelto.	No lo tengo bien resuelto.
Este problema es:	Completamente nuevo para mí.	He visto problemas como este antes, perohe olvidado cómo se resolvían.	Recuerdo haber trabajado problemas como este antes y recuerdo como se resuelven.
En el ejercicio:	He entendido lo que me pedía en el enunciado.	No me ha quedado muy claro el enunciado, pero lo he hecho.	No lo he entendido el enunciado.
¿Has trabajado alguna vez este tipo de problemas en casa?	Sí.	A veces.	No.

Anexo 4

"Relación de preguntas seleccionadas, dominio de contenido y dominio cognitivo"

Pregunta (ÍTEM)	*Dominio de contenido*	*Dominio cognitivo*
M031346	Números	Aplicar, razonar
M041098	Números	Aplicar
M041299	Números	Conocer
M051091	Números	Conocer
M051601	Números	Aplicar
M041155	Formas y mediciones geométricas	Aplicar
M051123	Formas y mediciones geométricas	Conocer
M041184	Representación de datos	Razonar
M051117	Representación de datos	Razonar

Figura 7. "Relación de preguntas seleccionadas, dominio de contenido y dominio cognitivo".
Fuente: tomado de Fraile, M. (2018)

Anexo 5

"Cuestionario de metacognición"

Percepción sobre el grado de dificultad	*Este problema me ha resultado:*	Fácil	Dificultad media	Difícil
Percepción sobre la Corrección	*Creo que tengo el problema:*	Bien resuelto	Podría tenerlo bien resuelto	No lo tengo bien resuelto
Percepción sobre el nivel de comprensión	*En el ejercicio:*	He entendido lo que me pedía el enunciado	No me ha quedado muy claro el enunciado, pero lo he hecho	No he entendido el enunciado
Grado de familiaridad con el problema	*Este problema es:*	Completamente nuevo para mí	He visto problemas como este antes, pero he olvidado cómo se hacían	Recuerdo haber trabajado problemas como este antes y recuerdo cómo se resuelven
	¿Has trabajado alguna vez este tipo de problemas en casa?	Sí, a menudo	A veces	No

Figura 8. Cuestionario de metacognición.
Fuente: tomado de Fraile, M. (2018)

Anexo 6

Dosieres de RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS (REPASO) I

Anexo 6.a

"Dosier de RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS (REPASO) I"

Nombre y apellidos: Curso: Fecha:

1. Leyre y Miguel Ángel están construyendo una maqueta y tienen un listón de un metro de longitud cada uno.
   - Leyre corta 3 decímetros de su listón. ¿Cuántos decímetros le quedan?

   - Miguel Ángel corta 28 centímetros del suyo. ¿Cuántos centímetros le quedan?

2. Martín se está entrenando duro para su próxima carrera y quiere hacer en bicicleta un circuito de 14,8 Km. Ha recorrido ya 5,72 km. ¿Cuántos kilómetros más debe hacer Martín para finalizar el circuito?

3. Alejandra prepara su fiesta de cumpleaños y ha comprado una tarta que pesa 1,5 Kg y una tarrina de helado que pesa 0,75 kg. ¿Cuántos kilos pesan en total la tarta y el helado? ¿Cuántos kilos pesa la tarta más que el helado?

4. Jimena ha comprado un libro de aventuras por 18,7 euros y un bolígrafo chulísimo por 9,65 euros. Ha pagado su compra con un billete de 50 euros. ¿Cuántos euros le tienen que devolver?

5. Carlos gastó de sus ahorros 25,76 euros el martes y el miércoles gastó 9 euros menos que el martes. ¿Cuánto gastó Carlos en total?

6. Dani pesa 29 Kg y su hermana Lucía pesa 5,89 kg más que él. ¿Cuánto pesan los dos hermanos juntos?

7. Vega tenía ahorrados 18,5 euros y se compró una agenda que le costó 5,85 euros. ¿Cuánto dinero tiene ahora?

8. Luis tenía en su hucha unos euros que había ido ahorrando. Después de comprar un regalo por valor de 12,65 euros para su amigo invisible, le siguen quedando en su hucha 5,85 euros. ¿Cuántos euros tenía Luis en su hucha antes de comprar el regalo?

9. Javier ha llevado a clase, para la experiencia del cálculo de densidades, una piedra de masa 342,86 gramos y Aitana Quiñones otra de 278,21 gramos. ¿Cuántos gramos pesa la piedra de Javier más que la de Aitana Quiñones?

10. También para esa experiencia, la pieza de material indeformable y translúcido que trajo Kristiyan pesó 187,58 gramos, que son 34,14 gramos menos que la masa de la canica metálica de Darío. ¿Cuántos gramos pesa la canica de Darío?

11. Claudia ha ganado el último concurso PAER de "Piruetas arriesgadas en el recreo" y le han hecho entrega de un bono por valor de 28,75 euros, que podrá canjear en la tienda de deporte del pueblo (cuando le quiten la escayola). Daniel ha ganado el segundo premio y su bono tiene un valor de 5,25 euros menos que el de Claudia. ¿Qué importe tiene el bono de Daniel?

12. Las alturas de Candela y Sergio suman 2,74 metros. Si Sergio mide 1,36 metros, ¿cuánto mide Candela?

13. Daniel tiene 47,85 euros y sabemos que tiene 16,3 euros más que su amiga Aitana Bernardo. ¿Cuánto dinero tienen entre los dos?

14. Javier pesa 9,53 kg más que su amiga Leyre. Si entre los dos pesan 78,46 kg, ¿cuánto pesa cada uno?

15. En su hucha, Candela tiene 60,5 euros más que en la hucha de su hermano Álvaro. Si Candela saca 34,25 euros de su hucha y los mete en la hucha de su hermano, ¿quién tiene ahora más euros en su hucha, Candela o Álvaro? ¿Cuántos euros más?

16. Dani empleó sus ahorros en comprar una consola de videojuegos que le costó 300 euros. Además, compró dos juegos por 45,5 euros cada uno y una carísima funda para su nueva máquina por 50,75 euros. ¿Cuánto pagó en total, si le descontaron 125,25 euros?

17. Aitana Quiñones compró en su librería preferida un libro de aventuras, otro de misterio y dos marcapáginas. El libro de misterio le costó 12,49 euros. El libro de aventuras le costó tanto como el de misterio, y cada marcapáginas tenía un precio de 0,79 euros. ¿Cuánto gastó en total Aitana en la librería?

18. Martín llevó su bicicleta vieja al taller. Tras su reparación pagó su arreglo y los accesorios con un billete de 200 euros. Los detalles de la factura fueron los siguientes:

    - Llanta nueva -> 30,35 euros.
    - Ajuste de frenos -> 20,95 euros.
    - Dinamo nueva -> costó el doble que la llanta.
    - Reflectantes -> 15,5 euros.
    - Repintado del cuadro -> 65,35 euros.

    ¿Cuánto le devolvieron?

19. Jimena vio en su tienda de deportes favorita unas deportivas que costaban 50,75 euros, una camiseta con un precio de 10,5 euros. También le gustó una bolsa de deporte que valía 35,75 euros y una botella isotérmica que costaba 2 euros. Finalmente decidió comprar lo siguiente: dos camisetas, unas deportivas y un par de botellas isotérmicas.
    ¿Cuánto pagó en total Jimena por su compra?

20. El recorrido por la Sierra que propone Javier para la próxima excursión tiene una distancia total de 6,09 km. Del mismo, 2,26 km transcurren por un sendero pedregoso. Por un camino con gran pendiente, tenemos que andar 0,94 km más que los kilómetros que recorrimos por el sendero pedregoso. El resto del recorrido será cuesta abajo.
¿Cuántos kilómetros recorrimos de sendero pedregoso más que los que andamos cuesta abajo?

21. Miguel Ángel es 3,5 años más viejo que su hermano José María. José María es 2,5 años mayor que el nieto de Concha que tiene 5 años. ¿Qué edad tiene Miguel Ángel?

22. Kristiyan tiene 372 cromos sin repetir. Además, tiene 206 cromos repetidos más que los que tiene sin repetir y 122 cromos nuevos y sin abrir, más que los que tiene repetidos. ¿Cuántos cromos tiene en total Kristiyan?

23. Darío compró el siguiente material para hacer su disfraz de caballero medieval: láminas plásticas por 17,53 euros; bridas, por 8,4 euros menos, y madera para hacer la espada y el escudo, por 35,27 euros. ¿Cuánto gastó Darío en total en su compra?

24. Daniel corre cada día 5,2 Km porque está entrenando para mejorar su marca. Su hermana entrena sólo los domingos y recorre 3/4 partes de lo que hace su hermano a diario. ¿Cuántos kilómetros corre su hermana cada domingo?

25. Aitana Bernardo ha gastado 1/4 de su paga semanal, así que ya sólo le quedan 7,5 euros. ¿Cuántos euros le dan a Aitana cada semana?

26. Candela y Sergio han ido a comprar dos pizzas iguales. Cada uno paga su pizza, que cuesta 9,2 euros. Candela ha comido 3/4 de su pizza y Sergio 4/5 de la suya. ¿Quién ha comido más pizza? Atendiendo al dinero que ha gastado cada uno, ¿cuánto vale la cantidad de pizza que cada uno se ha comido ya?

27. Leyre y Claudia han sacado 60 fotocopias a principio de curso para hacer los dictados diarios. A estas alturas del curso, a Leyre le queda el 3/10 de las fotocopias y a Claudia le queda 1/3 de las suyas. ¿Qué fracción de fotocopias le queda a cada una? ¿Quién ha gastado más fotocopias? ¿Cuántas más?

28. Carlos es el encargado de la experiencia de cálculo de volúmenes y está esperando a que su maestrita Amaya llegue del baño con la cantidad de agua necesaria para llenar varios vasos graduados iguales para comenzar la práctica. Amaya trae el agua en tres garrafas: la más grande contiene agua para llenar 3/5 partes de un vaso graduado. Cada una de las dos garrafas pequeñas lleva agua para llenar 2/5 partes de un vaso graduado. ¿Cuántos vasos graduados llenaremos, como mínimo, con el agua que trae la maestra?

29. Luis y Vega están pintando el decorado de la obra "El aula de Tócame Roque". Luis ha pintado la mitad del decorado y Vega otra cuarta parte. Si en el trabajo realizado ya llevan gastados 15,96 litros de pintura, ¿cuántos litros más necesitarán para terminar de pintar el decorado?

30. Alejandra se ha propuesto mejorar su última marca y ha previsto recorrer todos los domingos un circuito de 6,39 km. El pasado domingo recorrió 2/3 del circuito por la mañana y por la tarde hizo 1/4 del recorrido, porque debía asistir a un cumpleaños. ¿Qué fracción del circuito quedó pendiente? ¿Cuántos metros son?

Anexo 6.b

“Dosier de RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS (REPASO) I” (sin incógnitas)

Nombre y apellidos: Curso: Fecha:

MODELIZACIÓN DE PROBLEMAS

1. Leyre y Miguel Ángel están construyendo una maqueta y tienen un listón de un metro de longitud cada uno. Leyre corta 3 decímetros de su listón y Miguel Ángel corta 28 centímetros del suyo.

2. Martín se está entrenando duro para su próxima carrera y quiere hacer en bicicleta un circuito de 14,8 Km. Ha recorrido ya 5,72 km.

3. Alejandra prepara su fiesta de cumpleaños y ha comprado una tarta que pesa 1,5 Kg y una tarrina de helado que pesa 0,75 kg. Inicialmente, lleva la compra en dos bolsas diferentes, pero debido a la mala calidad de estas, una se rompe a medio camino y se ve obligada a meter toda la compra en una sola bolsa.

4. Jimena ha comprado un libro de aventuras por 18,7 euros y un bolígrafo chulísimo por 9,65 euros. Ha pagado su compra con un billete de 50 euros.

5. Carlos gastó de sus ahorros 25,76 euros el martes y el miércoles gastó 9 euros menos que el martes.

6. Dani pesa 29 Kg y su hermana Lucía pesa 5,89 kg más que él.

7. Vega tenía ahorrados 18,5 euros y se compró una agenda que le costó 5,85 euros.

8. Luis tenía en su hucha unos euros que había ido ahorrando. Después de comprar un regalo por valor de 12,65 euros para su amigo invisible, le siguen quedando en su hucha 5,85 euros.

9. Javier ha llevado a clase, para la experiencia del cálculo de densidades, una piedra de masa 342,86 gramos y Aitana Quiñones otra piedra con una masa que supera a la de Javier en 78,21 gramos.

10. También para esa experiencia, la pieza de material indeformable y translúcido que trajo Kristiyan pesó 187,58 gramos, que son 34,14 gramos menos que la masa de la canica metálica de Darío.

11. Claudia ha ganado el último concurso PAER de "Piruetas arriesgadas en el recreo" y le han hecho entrega de un bono por valor de 28,75 euros, que podrá canjear en la tienda de deporte del pueblo (cuando le quiten la escayola). Daniel ha ganado el segundo premio y su bono tiene un valor de 5,25 euros menos que el de Claudia.

12. Las alturas de Candela y Sergio suman 2,74 metros. Sergio mide 1,36 metros.

13. Daniel tiene 47,85 euros y sabemos que tiene 16,3 euros más que su amiga Aitana Bernardo.

14. Javier pesa 9,53 kg más que su amiga Leyre. Entre los dos pesan 78,46 kg,

15. En su hucha, Candela tiene 60,5 euros más que en la hucha de su hermano Álvaro. Candela saca 34,25 euros de su hucha y los mete en la hucha de su hermano.

16. Dani empleó sus ahorros en comprar una consola de videojuegos que le costó 300 euros. Además, compró dos juegos por 45,5 euros cada uno y una carísima funda para su nueva máquina por 50,75 euros.

17. Aitana Quiñones compró en su librería preferida un libro de aventuras, otro de misterio y dos marcapáginas. El libro de misterio le costó 12,49 euros. El libro de aventuras le costó tanto como el de misterio, y cada marcapáginas tenía un precio de 0,79 euros.

18. Martín llevó su bicicleta vieja al taller. Tras su reparación pagó su arreglo y los accesorios con un billete de 200 euros. Los detalles de la factura fueron los siguientes:
    - Llanta nueva -> 30,35 euros.
    - Ajuste de frenos -> 20,95 euros.
    - Dinamo nueva -> costó el doble que la llanta.
    - Reflectantes -> 15,5 euros.
    - Repintado del cuadro -> 65,35 euros.

19. Jimena vio en su tienda de deportes favorita unas deportivas que costaban 50,75 euros, una camiseta con un precio de 10,5 euros. También le gustó una bolsa de deporte que valía 35,75 euros y una botella isotérmica que costaba 2 euros. Finalmente decidió comprar lo siguiente: dos camisetas, unas deportivas y un par de botellas isotérmicas.

20. El recorrido por la Sierra que propone Javier para la próxima excursión tiene una distancia total de 6,09 km. Del mismo, 2,26 km transcurren por un sendero pedregoso. Por un camino con gran pendiente, tenemos que andar 0,94 km más que los kilómetros que recorrimos por el sendero pedregoso. El resto del recorrido será cuesta abajo.

21. Miguel Ángel es 3,5 años más viejo que su hermano José María. José María es 2,5 años mayor que el nieto de Concha que tiene 5 años.

22. Kristiyan tiene 372 cromos sin repetir. Además, tiene 206 cromos repetidos más que los que tiene sin repetir y 122 cromos nuevos y sin abrir, más que los que tiene repetidos.

23. Darío compró el siguiente material para hacer su disfraz de caballero medieval: láminas plásticas por 17,53 euros; bridas, por 8,4 euros menos, y madera para hacer la espada y el escudo, por 35,27 euros.

24. Daniel corre cada día 5,2 Km porque está entrenando para mejorar su marca. Su hermana entrena sólo los domingos y recorre 3/4 partes de lo que hace su hermano a diario.

25. Aitana Bernardo ha gastado 1/4 de su paga semanal, así que ya sólo le quedan 7,5 euros.

26. Candela y Sergio han ido a comprar dos pizzas iguales. Cada uno paga su pizza, que cuesta 9,2 euros. Candela ha comido 3/4 de su pizza y Sergio 4/5 de la suya.

27. Leyre y Claudia han sacado 60 fotocopias a principio de curso para hacer los dictados diarios. A estas alturas del curso, a Leyre le queda el 3/10 de las fotocopias y a Claudia le queda 1/3 de las suyas.

28. Carlos es el encargado de la experiencia de cálculo de volúmenes y está esperando a que su maestrita Amaya llegue del baño con la cantidad de agua necesaria para llenar varios vasos graduados iguales para comenzar la práctica. Amaya trae el agua en tres garrafas: la más grande contiene agua para llenar 3/5 partes de un vaso graduado. Cada una de las dos garrafas pequeñas lleva agua para llenar 2/5 partes de un vaso graduado.

29. Luis y Vega están pintando el decorado de la obra “El aula de Tócame Roque”. Luis ha pintado la mitad del decorado y Vega otra cuarta parte. En el trabajo realizado ya llevan gastados 15,96 litros de pintura.

30. Alejandra se ha propuesto mejorar su última marca y ha previsto recorrer todos los domingos un circuito de 6,39 km. El pasado domingo recorrió 2/3 del circuito por la mañana y por la tarde hizo 1/4 del recorrido, porque debía asistir a un cumpleaños.

Anexo 7

“Dosier de RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS (REPASO) II”

Nombre y apellidos: Curso: Fecha:

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON EL MODELO DE BARRAS DEL MÉTODO SINGAPUR.

1. Leyre guarda en cada estuche 4 bolígrafos y 1 lápiz. Tiene 3 estuches: uno en casa, otro, que siempre lleva en la mochila y el que tiene de repuesto en su cajonera. ¿Cuántos útiles de escritura tiene Leyre en total?

2. En su librería, Candela ha colocado sus libros favoritos en tres estantes. En cada estante ha puesto 12 libros de misterio y 19 libros de aventuras. ¿Cuántos libros ha colocado en total en su librería? ¿Cuántos libros de aventuras más que de misterio ha colocado?

3. A Dani le encanta la repostería y para celebrar la victoria de su equipo de fútbol, ha horneado 2 bandejas con 28 pasteles de crema y 34 pasteles de chocolate cada una. ¿Cuántos pasteles ha preparado Dani en total?

4. Darío tiene cuatro veces más cromos que su hermana Marian, que tiene 72 cromos. ¿Cuántos cromos tiene Darío?

5. Carlos tenía en su hucha 90 euros. Sacó 3 billetes de 5 euros y 5 monedas de 2 euros. ¿Cuánto dinero le queda en la hucha?

6. Miguel Ángel tenía 98 cromos y hoy ha comprado 8 sobres de 5 cromos cada uno. ¿Cuántos cromos tiene ahora Miguel Ángel?

7. Luis tiene tres veces menos cromos que su mejor amigo, que tiene 72. ¿Cuántos cromos tiene Luis?

8. Claudia ha invitado a merendar a cuatro amigos con motivo de su cumpleaños. Para ella y para cada uno de sus invitados compra un menú de 6 euros y un helado de 2 euros. Paga la celebración con un billete de 50 euros. ¿Cuánto le devuelven?

9. Javier compró un paquete de pilas de 15 unidades para las 4 linternas que llevará al campamento de verano. Sabiendo que cada linterna necesita tres pilas, ¿cuántas pilas le sobrarán?

10. Sergio necesita una camiseta. Acude a su tienda favorita y en ella encuentra tres modelos distintos de camisetas que le gustan y cada uno de ellos está disponible en 4 colores diferentes. ¿Entre cuántas camisetas distintas podrá elegir Sergio?

11. Aitana Bernardo busca un regalo para su madre y entra en una perfumería en la que hay 12 marcas de perfumes. Cada marca dispone de 4 tipos de fragancias: floral, cítrica, amaderada y dulce. ¿Entre cuántas fragancias diferentes podrá elegir Aitana el perfume para su madre?

12. Jimena ha ido a un restaurante y en la carta tienen 5 primeros platos: sopa, puré, ensalada, gazpacho y entrantes variados; y 6 segundos: filete de ternera, pescado a la plancha, parrillada de verduras, paella, albóndigas y tortilla española. ¿Entre cuántos menús distintos, como máximo, podrá elegir Jimena?

13. Kristiyan ha visto en las noticias que ya ha llegado la fruta del programa “5 al día” para los colegios de toda la provincia de Segovia. Tienen preparadas 256 cajas de naranjas de 45kg. cada una y otras 80 cajas de naranjas de 36 kg. cada una. ¿Cuántos kilogramos de naranjas tienen preparados para repartir en los colegios de la provincia?

14. Según el recuento que lleva Aitana Quiñones, se han apuntado a la excursión de fin de curso, entre alumnos y padres, 945 personas. Viajaremos en autobuses de 35 plazas cada uno. ¿Cuántos autocares necesitaremos para la excursión?

15. Vega fue la encargada de dirigir cómo se adornó el colegio para la celebración del carnaval. Ella decidió colocar 12 ristras con 60 globos cada una. Al finalizar la jornada, se habían pinchado 152 globos. ¿Cuántos globos seguían inflados cuando terminó la fiesta?

16. Alejandra quiere colocar sus 67 libros en la librería de su habitación. Si quiere poner 9 libros en cada estante, ¿Cuántos estantes con 9 libros podrá llenar?

17. Martín lleva unas semanas en casa de unos amigos que viven bastante lejos del colegio. Durante este tiempo, ha hecho 18 veces el trayecto para asistir al centro y ha recorrido en total 1620 km. ¿Cuántos kilómetros tiene el trayecto que realiza Martín cada día que asiste al colegio?

18. Los padres de Leyre le compraron para su habitación una mesa por 74 euros y cuatro estanterías iguales. La factura que pagaron ascendió a 536 euros en total. ¿Cuánto cuesta cada una de las estanterías que le han comprado?

19. Candela quiere sacar los 245 litros de agua que hay en su piscina hinchable. Para ello pide ayuda a Dani, que se presenta con un cubo de 12 litros de capacidad y a Darío, que trae un cubo que puede contener 25 litros. ¿Cuántos cubos completos podría llenar cada uno de ellos si utilizará su cubo para sacar el agua de la piscina?

20. Carlos ha visitado el centro de interpretación de aves autóctonas y allí le han explicado que tienen catalogadas 15.340 aves diferentes, que se agrupan según su tipo de nidificación. Así encontramos 236 aves distintas en cada grupo de nidificación. Según estos datos, ¿cuántos tipos de nidificación existen?

21. Miguel Ángel ha confirmado el precio total del viaje de fin de curso, que asciende a 10.108 euros. Sabiendo que asistirán 18 alumnos y la tutora, y que todos pagan por el viaje la misma cantidad. ¿Cuántos euros pagará cada persona por el viaje?

22. Luis ha visto en un documental que, en una reserva natural, se calcula que, en un año, los animales carnívoros consumen 47.450 kg de carne. Suponiendo que cada día comieran la misma cantidad de alimento, ¿cuántos kilos de carne consumirían a diario estos animales?

23. Los padres de Claudia le han comprado una colección de libros de misterio por 130 euros. Al inicio han entregado 73 euros y el resto del dinero lo pagarán en varios plazos de 4,75 euros cada uno. ¿Cuántos plazos tendrán que abonar?

Anexo 8

"Test de preguntas liberadas de TIMSS 2"

Nombre:_____________________________________ Grupo:_____ Fecha:_________

M031009

1. Gregoria quiere enviar cartas a 12 amigos. En la mitad de los sobres pondrá una hoja y en la otra mitad, pondrá dos hojas. ¿Cuántas hojas necesitará en total?

Respuesta: ____ .

Este problema me ha resultado:	Fácil.	Dificultad media.	Difícil.
Creo que tengo el problema:	Bien resuelto.	Podría tenerlo bien resuelto.	No lo tengo bien resuelto.
Este problema es:	Completamente nuevo para mí.	He visto problemas como este antes, pero he olvidado cómo se resolvían.	Recuerdo haber trabajado problemas como este antes y recuerdo como se resuelven.
En el ejercicio:	He entendido lo que me pedía en el enunciado.	No me ha quedado muy claro el enunciado, pero lo he hecho.	No lo he entendido el enunciado.
¿Has trabajado alguna vez este tipo de problemas en casa?	Sí.	A veces.	No.

M031185

1.B. En las cartas que Gregoria envía a sus amigos aparecen unos mapas que tienen una escala que indica que 1 centímetro en el mapa representa a 4 kilómetros en la realidad. La distancia entre dos pueblos en el mapa es de 8 centímetros. ¿A cuántos kilómetros de distancia están los dos pueblos?

A. 2 kilómetros
B. 8 kilómetros.
C. 16 kilómetros.

Este problema me ha resultado:	Fácil.	Dificultad media.	Difícil.
Creo que tengo el problema:	Bien resuelto.	Podría tenerlo bien resuelto.	No lo tengo bien resuelto.
Este problema es:	Completamente nuevo para mí.	He visto problemas como este antes, pero he olvidado cómo se resolvían.	Recuerdo haber trabajado problemas como este antes y recuerdo como se resuelven.
En el ejercicio:	He entendido lo que me pedía en el enunciado.	No me ha quedado muy claro el enunciado, pero lo he hecho.	No lo he entendido el enunciado.
¿Has trabajado alguna vez este tipo de problemas en casa?	Sí.	A veces.	No.

D. 32 kilómetros.

M031016

1.C. En uno de los pueblos se han vendido tres mil entradas para un partido de baloncesto, que han sido numeradas desde el número 1 al 3000. Las personas cuyas entradas terminen en 112, recibirán un premio el día del partido. Anota todos los números premiados.

Números premiados: ____ .

Este problema me ha resultado:	Fácil.	Dificultad media.	Difícil.
Creo que tengo el problema:	Bien resuelto.	Podría tenerlo bien resuelto.	No lo tengo bien resuelto.
Este problema es:	Completamente nuevo para mí.	He visto problemas como este antes, pero he olvidado cómo se resolvían.	Recuerdo haber trabajado problemas como este antes y recuerdo como se resuelven.
En el ejercicio:	He entendido lo que me pedía en el enunciado.	No me ha quedado muy claro el enunciado, pero lo he hecho.	No lo he entendido el enunciado.

¿Has trabajado alguna vez este tipo de problemas en casa?	Sí.	A veces.	No.

M041320

2. ¿Qué oración significa que Jacobo se comió 2/4 de una pizza?

E. Jacobo comió 1/5 de la pizza.
F. Jacobo comió 1/4 de la pizza.
G. Jacobo comió 1/3 de la pizza.
H. Jacobo comió 1/2 de la pizza.

Este problema me ha resultado:	Fácil.	Dificultad media.	Difícil.
Creo que tengo el problema:	Bien resuelto.	Podría tenerlo bien resuelto.	No lo tengo bien resuelto.
Este problema es:	Completamente nuevo para mí.	He visto problemas como este antes, pero he olvidado cómo se resolvían.	Recuerdo haber trabajado problemas como este antes y recuerdo como se resuelven.
En el ejercicio:	He entendido lo que me pedía en el enunciado.	No me ha quedado muy claro el enunciado, pero lo he hecho.	No lo he entendido el enunciado.
¿Has trabajado alguna vez este tipo de problemas en casa?	Sí.	A veces.	No.

M031079B

3. Se muestra debajo, una secuencia de cuatro figuras:

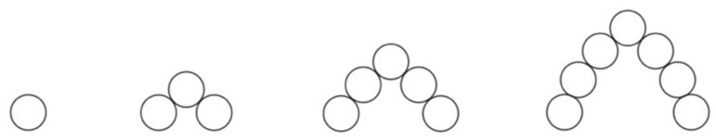


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

A. Completa la tabla para la Figura 4

Figura	Número de círculos
1	1
2	3
3	5
4	

B. ¿Cuántos círculos se necesitarían para pintar la Figura 5? Respuesta: ______.

Este problema me ha resultado:	Fácil.	Dificultad media.	Difícil.
Creo que tengo el problema:	Bien resuelto.	Podría tenerlo bien resuelto.	No lo tengo bien resuelto.
Este problema es:	Completamente nuevo para mí.	He visto problemas como este antes, pero he olvidado cómo se resolvían.	Recuerdo haber trabajado problemas como este antes y recuerdo como se resuelven.
En el ejercicio:	He entendido lo que me pedía en el enunciado.	No me ha quedado muy claro el enunciado, pero lo he hecho.	No lo he entendido el enunciado.
¿Has trabajado alguna vez este tipo de problemas en casa?	Sí.	A veces.	No.

M031210

4. ¿Cuáles de estas fracciones son mayores que 1/2?

A. 3/5

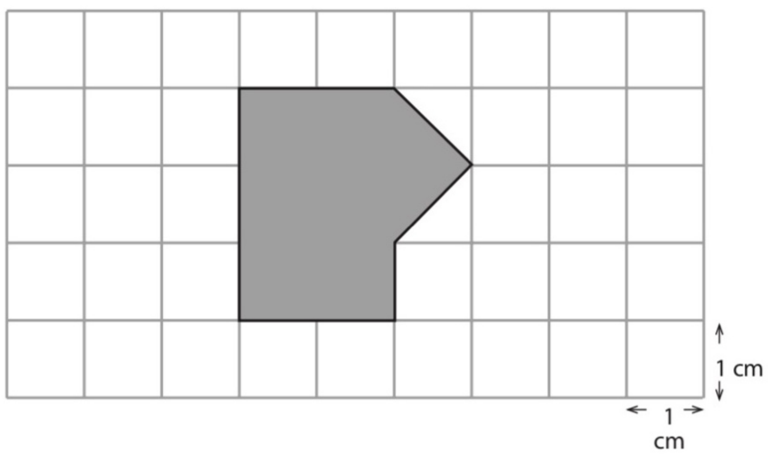
B. 3/6

C. 3/7

Este problema me ha resultado:	Fácil.	Dificultad media.	Difícil.
Creo que tengo el problema:	Bien resuelto.	Podría tenerlo bien resuelto.	No lo tengo bien resuelto.
Este problema es:	Completamente nuevo para mí.	He visto problemas como este antes, pero he olvidado cómo se resolvían.	Recuerdo haber trabajado problemas como este antes y recuerdo como se resuelven.
En el ejercicio:	He entendido lo que me pedía en el enunciado.	No me ha quedado muy claro el enunciado, pero lo he hecho.	No lo he entendido el enunciado.
¿Has trabajado alguna vez este tipo de problemas en casa?	Sí.	A veces.	No.

M031297

5. Los cuadrados de la cuadrícula de abajo son de 1 cm por 1 cm. ¿Cuál es el área de la parte sombreada en centímetros cuadrados?



Respuesta: ____________ centímetros cuadrados.

Este problema me ha resultado:	Fácil.	Dificultad media.	Difícil.
Creo que tengo el problema:	Bien resuelto.	Podría tenerlo bien resuelto.	No lo tengo bien resuelto.
Este problema es:	Completamente nuevo para mí.	He visto problemas como este antes, pero he olvidado cómo se resolvían.	Recuerdo haber trabajado problemas como este antes y recuerdo como se resuelven.
En el ejercicio:	He entendido lo que me pedía en el enunciado.	No me ha quedado muy claro el enunciado, pero lo he hecho.	No lo he entendido el enunciado.
¿Has trabajado alguna vez este tipo de problemas en casa?	Sí.	A veces.	No.

M031218

6. Seiscientos libros deben empaquetarse en cajas que contienen 15 libros cada una. ¿Cuál de las siguientes opciones puede usarse para encontrar el número de cajas necesarias?

A. Sumar 15 a 600.

B. Restar 15 a 600.

C. Multiplicar 600 por 15.

D. Dividir 600 entre 15.

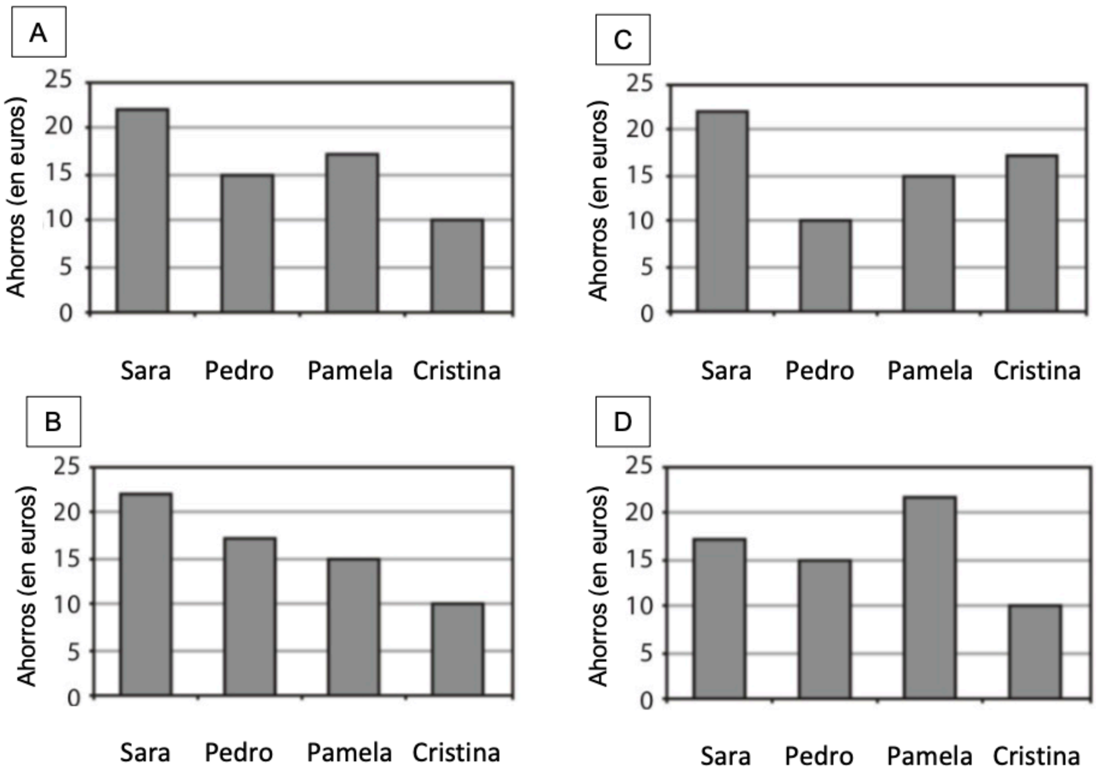
Este problema me ha resultado:	Fácil.	Dificultad media.	Difícil.
Creo que tengo el problema:	Bien resuelto.	Podría tenerlo bien resuelto.	No lo tengo bien resuelto.
Este problema es:	Completamente nuevo para mí.	He visto problemas como este antes, pero he olvidado cómo se resolvían.	Recuerdo haber trabajado problemas como este antes y recuerdo como se resuelven.
En el ejercicio:	He entendido lo que me pedía en el enunciado.	No me ha quedado muy claro el enunciado, pero lo he hecho.	No lo he entendido el enunciado.

¿Has trabajado alguna vez este tipo de problemas en casa?	Sí.	A veces.	No.

M041199

7. La maestra dio a Juan la siguiente tabla y le pidió que identificara la gráfica que nuestra correctamente los datos de la tabla. ¿Qué gráfico tiene que elegir?

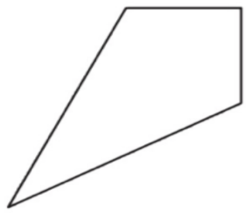
Nombre	Ahorros
Sara	22 euros
Pedro	15 euros
Pamela	17 euros
Cristina	10 euros



Este problema me ha resultado:	Fácil.	Dificultad media.	Difícil.
Creo que tengo el problema:	Bien resuelto.	Podría tenerlo bien resuelto.	No lo tengo bien resuelto.
Este problema es:	Completamente nuevo para mí.	He visto problemas como este antes, pero he olvidado cómo se resolvían.	Recuerdo haber trabajado problemas como este antes y recuerdo como se resuelven.
En el ejercicio:	He entendido lo que me pedía en el enunciado.	No me ha quedado muy claro el enunciado, pero lo he hecho.	No lo he entendido el enunciado.
¿Has trabajado alguna vez este tipo de problemas en casa?	Sí.	A veces.	No.

M041327

8. Dibuja la línea de simetría en esta forma:



Este problema me ha resultado:	Fácil.	Dificultad media.	Difícil.
Creo que tengo el problema:	Bien resuelto.	Podría tenerlo bien resuelto.	No lo tengo bien resuelto.
Este problema es:	Completamente nuevo para mí.	He visto problemas como este antes, pero he olvidado cómo se resolvían.	Recuerdo haber trabajado problemas como este antes y recuerdo como se resuelven.
En el ejercicio:	He entendido lo que me pedía en el enunciado.	No me ha quedado muy claro el enunciado, pero lo he hecho.	No lo he entendido el enunciado.
¿Has trabajado alguna vez este tipo de problemas en casa?	Sí.	A veces.	No.

M041175

9. Este gráfico muestra el tipo de galletas vendidas por la panadería local.

¿Qué tipo de galleta fue la más vendida por la panadería?

A. Avena
B. Vainilla
C. Chocolate
D. Azúcar

Este problema me ha resultado:	Fácil.	Dificultad media.	Difícil.
Creo que tengo el problema:	Bien resuelto.	Podría tenerlo bien resuelto.	No lo tengo bien resuelto.
Este problema es:	Completamente nuevo para mí.	He visto problemas como este antes, pero he olvidado cómo se resolvían.	Recuerdo haber trabajado problemas como este antes y recuerdo como se resuelven.
En el ejercicio:	He entendido lo que me pedía en el enunciado.	No me ha quedado muy claro el enunciado, pero lo he hecho.	No lo he entendido el enunciado.
¿Has trabajado alguna vez este tipo de problemas en casa?	Sí.	A veces.	No.

M051091

10. ¿Cuál de estas fracciones no es equivalente a las demás?

Ⓐ $\frac{1}{2}$

Ⓑ $\frac{4}{8}$

Ⓒ $\frac{2}{4}$

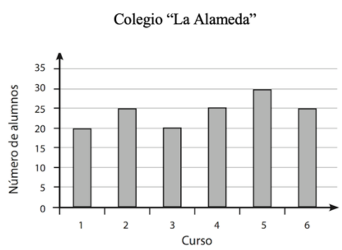
Ⓓ $\frac{2}{8}$

○ Opción A
○ Opción B
○ Opción C
○ Opción D

Este problema me ha resultado:	Fácil.	Dificultad media.	Difícil.
Creo que tengo el problema:	Bien resuelto.	Podría tenerlo bien resuelto.	No lo tengo bien resuelto.
Este problema es:	Completamente nuevo para mí.	He visto problemas como este antes, pero he olvidado cómo se resolvían.	Recuerdo haber trabajado problemas como este antes y recuerdo como se resuelven.
En el ejercicio:	He entendido lo que me pedía en el enunciado.	No me ha quedado muy claro el enunciado, pero lo he hecho.	No lo he entendido el enunciado.
¿Has trabajado alguna vez este tipo de problemas en casa?	Sí.	A veces.	No.

M051117

11. El gráfico muestra el número de alumnos de cada curso en el Colegio “La Alameda”.



El colegio “La Alameda” ofrece un máximo de 30 plazas para alumnos en cada curso. Sabiendo, según la información del gráfico, el número de alumnos que ya hay en cada curso, ¿cuántos alumnos más cabrían en el colegio?

- 35
- 30
- 180
- 145

Este problema me ha resultado:	Fácil.	Dificultad media.	Difícil.
Creo que tengo el problema:	Bien resuelto.	Podría tenerlo bien resuelto.	No lo tengo bien resuelto.
Este problema es:	Completamente nuevo para mí.	He visto problemas como este antes, pero he olvidado cómo se resolvían.	Recuerdo haber trabajado problemas como este antes y recuerdo como se resuelven.
En el ejercicio:	He entendido lo que me pedía en el enunciado.	No me ha quedado muy claro el enunciado, pero lo he hecho.	No lo he entendido el enunciado.
¿Has trabajado alguna vez este tipo de problemas en casa?	Sí.	A veces.	No.

M041299

12. Rubén comió 1/2 del pastel y Nieves comió 1/4 del mismo pastel. ¿Qué parte del pastel comieron entre los dos?

Respuesta: ____ .

Este problema me ha resultado:	Fácil.	Dificultad media.	Difícil.
Creo que tengo el problema:	Bien resuelto.	Podría tenerlo bien resuelto.	No lo tengo bien resuelto.
Este problema es:	Completamente nuevo para mí.	He visto problemas como este antes, pero he olvidado cómo se resolvían.	Recuerdo haber trabajado problemas como este antes y recuerdo como se resuelven.
En el ejercicio:	He entendido lo que me pedía en el enunciado.	No me ha quedado muy claro el enunciado, pero lo he hecho.	No lo he entendido el enunciado.
¿Has trabajado alguna vez este tipo de problemas en casa?	Sí.	A veces.	No.

Anexo 9

Tabla 3.
"Relación de preguntas seleccionadas, dominio de contenido y dominio cognitivo." Test de preguntas liberadas de TIMSS 2.

Código y número de pregunta	Dominio de contenido	Dominio cognitivo
M031009 1.A	Números enteros	Aplicar
M031185 1.B	Números enteros	Razonar
M031016 1.C	Números enteros	Razonar
M041320 2.	Números (fracciones y decimales)	Conocer
M031079 3.A	Números (patrones y relaciones)	Aplicar
M031079B 3.B	Números (patrones y relaciones)	Aplicar
M031210 4.	Números (fracciones y decimales)	Conocer
M031297 5.	Geometría (formas y mediciones geométricas)	Aplicar
M031218 6.	Números enteros (operatoria)	Aplicar
M041199 7.	Visualización de datos (organizar y representar)	Razonar
M041327 8.	Geometría (formas y mediciones geométricas)	Aplicar
M041175 9.	Visualización de datos (leer e interpretar)	Conocer
M051091 10 (*)	Números (fracciones y decimales)	Conocer
M051117 11 (*)	Visualización de datos (leer e interpretar)	Razonar
M041299 12 (*)	Números (fracciones y decimales)	Conocer

(*) Preguntas que también formaron parte del "Test de preguntas liberadas de TIMSS 1".
Fuente: elaboración propia.

Anexo 10

"Test de preguntas liberadas de TIMSS 1". Porcentaje de acierto por preguntas

Tabla 4.
"Tabla de porcentajes de acierto por pregunta, con identificación del código, número de pregunta y dominio de contenido". Test de preguntas liberadas de TIMSS 1.

Código, número de pregunta y dominio de contenido	% de alumnado que responde correctamente
M031346 - 1.A Números enteros (proporcionalidad)	79 %
1.B Números enteros (proporcionalidad)	41 %
1.C Números enteros (proporcionalidad)	33 %
M051091 - 2. Números (fracciones)	39 %
M051601 - 3. Números (patrones)	76 %
M041299 - 4. Números (fracciones)	24 %
M041155 - 5. Geometría (formas y mediciones geométricas)	61 %
M041098 - 6. Números enteros (operatoria)	39 %
M041184 - 7. Representación de datos (organización)	89 %
M051123 - 8. Geometría (formas y mediciones geométricas)	41 %
M051117 - 9. Representación de datos (lectura e interpretación)	50 %

Fuente: elaboración propia.

Anexo 11

Test de preguntas liberadas de TIMSS 1 (P2, P4)

Anexo 11.a

Test de preguntas liberadas de TIMSS 1
"Porcentaje de acierto de la pregunta P2". "Números (fracciones)"

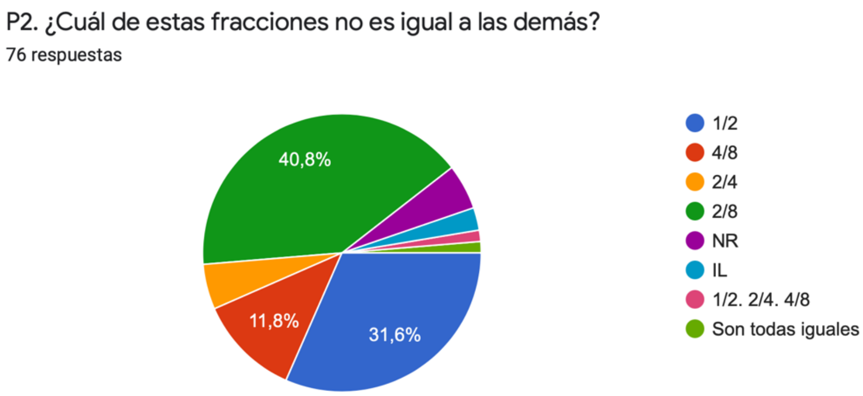


Figura 14. "Porcentaje de acierto del alumnado de la muestra de la pregunta P2 "Números (fracciones)"". Test de preguntas liberadas de TIMSS 1.
Fuente: elaboración propia.

Anexo 11.b

Test de preguntas liberadas de TIMSS 1
"Metacognición "Números (fracciones)"".

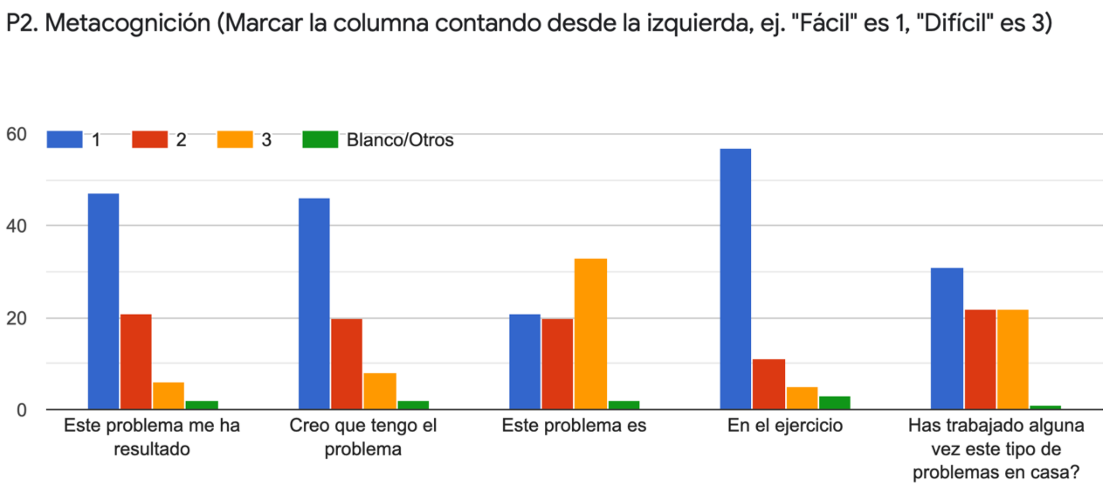


Figura 15. "Metacognición P2 "Números (fracciones)"". Test de preguntas liberadas de TIMSS 1
Fuente: elaboración propia.

Anexo 11.c

Test de preguntas liberadas de TIMSS 1
"Porcentaje de acierto de la pregunta P4 "Números (fracciones)"".

P4. Tomás comió 1/2 de un pastel, y Juana comió 1/4 del pastel. ¿Qué parte del pastel comieron entre los dos?

76 respuestas

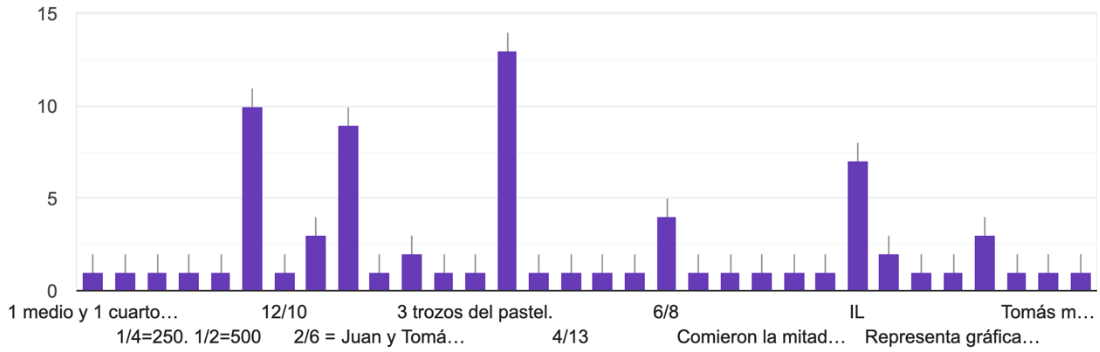


Figura 16. "Porcentaje de acierto del alumnado de la muestra de la pregunta P4 "Números (fracciones)"". Test de preguntas liberadas de TIMSS 1

Fuente: elaboración propia.

Anexo 11.d

Test de preguntas liberadas de TIMSS 1
"Metacognición "Números (fracciones)"".

P4. Metacognición (Marcar la columna contando desde la izquierda, ej. "Fácil" es 1, "Difícil" es 3)

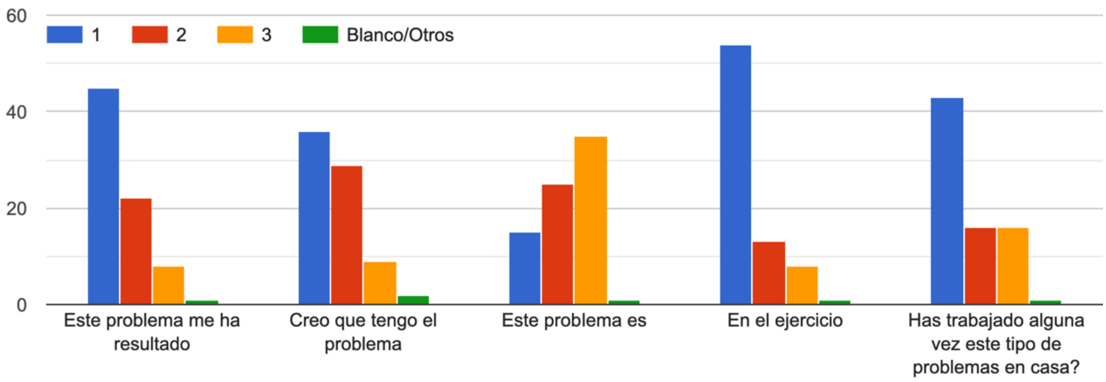


Figura 17. "Metacognición P4 "Números (fracciones)."" Test de preguntas liberadas de TIMSS 1

Fuente: elaboración propia.

Anexo 12

Test de preguntas liberadas de TIMSS 1 (P6)

Anexo 12.a

Test de preguntas liberadas de TIMSS 1
"Porcentaje de acierto de la pregunta P6. "Números: operatoria (división)"".

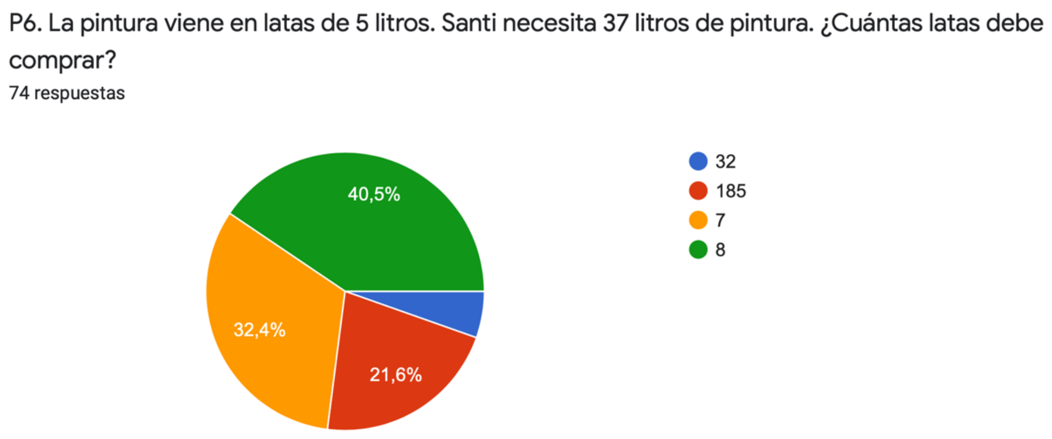


Figura 18. "Porcentaje de acierto del alumnado de la muestra de la pregunta P6. "Números: operatoria (división)"". Test de preguntas liberadas de TIMSS 1.
Fuente: elaboración propia.

Anexo 12.b

Test de preguntas liberadas de TIMSS 1
"Metacognición "Números: operatoria (división)"".

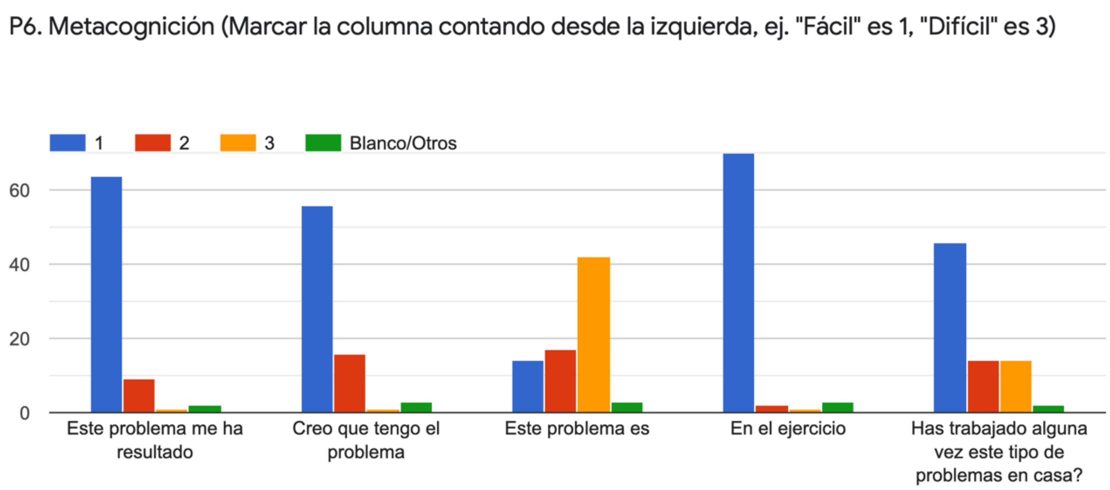


Figura 19. "Metacognición P6. "Números: operatoria (división)"". Test de preguntas liberadas de TIMSS 1.
Fuente: elaboración propia.

Anexo 13

Tabla 5.

"Comparativa del porcentaje de aciertos", Test de preguntas liberadas de TIMSS 1y TIMSS oficial 2011

Código Número de pregunta Dominio de contenido	% correcto Muestra 2021	% correcto España 2011	% correcto Media Internacional 2011	% correcto Finlandia 2011	% correcto Singapur 2011
M031346 - 1.A Números enteros (proporcionalidad)	79 %	63 %	62 %	81 %	86 %
1.B Números enteros (proporcionalidad)	41 %	20 %	31 %	43 %	71 %
1.C Números enteros (proporcionalidad)	33 %	14 %	25 %	34 %	61 %
M051091 - 2. Números (fracciones)	39 %	30 %	44 %	68 %	81 %
M051601 - 3. Números (patrones)	76 %	50 %	54 %	72 %	82 %
M041299 - 4. Números (fracciones)	24 %	14 %	23 %	46 %	84 %
M041155 - 5. Geometría (formas y mediciones geométricas)	61 %	38 %	50 %	70 %	61 %
M041098 - 6. Números enteros (operatoria)	39 %	36 %	44 %	59 %	66 %
M041184 - 7. Representación de datos (organización)	89 %	75 %	72 %	84 %	89 %
M051123 - 8. Geometría (formas y mediciones geométricas)	41 %	29 %	43 %	33 %	80 %
M051117 - 9. Representación de datos (lectura e interpretación)	50 %	50 %	54 %	63 %	73 %

(*) Cuadro comparativo de los resultados obtenidos en el Test de preguntas liberadas del TIMSS 1 aplicado en esta investigación y los resultantes del estudio TIMSS oficial 2011 (selección de países significativos y media internacional)

Fuente: basado en IEA (2013).

Anexo 14

"Resultados del Test de preguntas liberadas de TIMSS 2"

Anexo 14.a

"Test de preguntas liberadas de TIMSS 2"

Test de preguntas liberadas del TIMSS 1" — Número de preguntas correctas

Test de preguntas liberadas del TIMSS 2" — Número de preguntas correctas

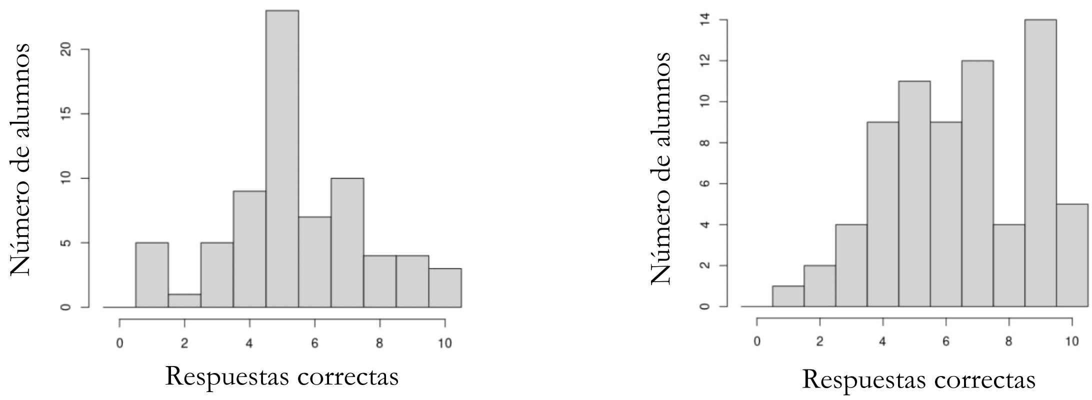


Figura 21. "Comparativa de los resultados obtenidos en los Test de preguntas liberadas del TIMSS 1 y 2".
Fuente: elaboración propia.

Anexo 14.b

Tabla 6.
"Porcentaje de acierto por preguntas". Test de preguntas liberadas del TIMSS 2.

Código y Nº de pregunta	Dominio de contenido	% de alumnado que responde correctamente
M031009 1.A	Números enteros	39 %
M031185 1.B	Números enteros	78 %
M031016 1.C	Números enteros	57 %
M041320 2.	Números (fracciones y decimales)	55 %
M031079 3.A	Números (patrones y relaciones)	97 %
M031079B 3.B	Números (patrones y relaciones)	74 %
M031210 4.	Números (fracciones y decimales)	41 %
M031297 5.	Geometría (formas y mediciones geométricas)	33 %
M031218 6.	Números enteros (operatoria)	82 %
M041199 7.	Visualización de datos (organizar y representar)	97 %
M041327 8.	Geometría (formas y mediciones geométricas)	36 %
M041175 9.	Visualización de datos (leer e interpretar)	100 %
M051091 10	Números (fracciones y decimales)	55 %
M051117 11	Visualización de datos (leer e interpretar)	46 %
M041299 12	Números (fracciones y decimales)	37 %

Fuente: elaboración propia.

Anexo 14.c

Tabla 7.
"Comparativa de porcentaje de acierto en TIMSS 1 y 2: preguntas de control"

Código - número de pregunta y dominio de contenido	% de alumnado que responde correctamente "Test TIMSS 1"	% de alumnado que responde correctamente "Test TIMSS 2"
M051091 - 2 /10 Números (fracciones)	39 %	55 %
M041299 – 4 /12 Números (fracciones)	24 %	46%
M051117 – 9 /11 Representación de datos (lectura e interpretación)	50 %	46%

Fuente: elaboración propia.