Universidad de Valladolid

Escuela de Doctorado Universidad de Valladolid

PROGRAMA DE DOCTORADO EN INVESTIGACIÓN TRANSDISCIPLINAR EN EDUCACIÓN

TESIS DOCTORAL:

Problemas aditivos de una etapa con números racionales en un centro de especial dificultad

Presentada por Ana María Gómez Benito para optar al grado de
Doctora por la Universidad de Valladolid

Dirigida por:
Antonio M. Oller Marcén
Tomás Ortega del Rincón

Memoria presentada por D.ª . Ana María Gómez Benito para optar al Grado de Doctor por la Universidad de Valladolid, realizada en el Programa de Doctorado Investigación Transdisciplinar en Educación.

Directores de la Tesis:

Dr. Antonio M. Oller Marcén.

Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza (Adscrito a la Universidad de Zaragoza).

Dr. Tomás Ortega del Rincón.

Departamento de Didáctica de las Ciencias Sociales, Experimentales, y de la Matemática (Universidad de Valladolid).

Los doctores *Antonio M. Oller Marcén* y *Tomás Ortega del Rincón*, directores de la tesis doctoral titulada *Problemas aditivos de una etapa con números racionales en un centro de especial dificultad,*

CERTIFICAN:

Que la presente memoria ha sido realizada por D.ª Ana María Gómez Benito bajo su dirección y que se trata de un trabajo original y muy interesante para el área de Didáctica de la Matemática.

Valladolid, septiembre de 2020.

Fdo.: Antonio M. Oller Marcén   Fdo.: Tomás Ortega del Rincón

A Omar, Unai y Miguel

”Quien cuenta con más dificultades en su entorno inmediato para realizar máximos aprendizajes en el centro educativo hay que darle más, porque lo mismo no será suficiente” (*)

(*) Del libro Aprendizaje dialógico en la Sociedad de la Información (Aubert et al. 2013) resumiendo las teorías de Vygotsky

Es una gran alegría para mí que este camino, que comencé hace ya varios años, llegue a su fin. No olvido, sin embargo, que en este largo recorrido nunca he estado sola.

En el lado académico ha estado Antonio, que me ha guiado durante todo este proceso aportando sus buenas ideas, acompañándome y realizando una inestimable labor de corrección.

Cuando un camino se empieza, tiene que haber alguien que nos recuerde que en algún momento hay que terminarlo, y allí ha estado Tomás con energía, decisión y mucho ánimo.

Junto a mí, desde el principio, ha estado mi hermana Mª José, apoyándome y leyendo una y mil veces este trabajo; ofreciéndome, además, su orientación y su ayuda en todo momento.

Un lugar destacado ocupa José María Gairín, quien me ayudó a iniciar este proceso y siempre ha estado pendiente de su desarrollo.

Mi trayecto pasa todos los días por un pequeño instituto de educación secundaria al lado del campo del Rayo. Allí tengo que agradecer al equipo directivo todas las facilidades puestas en la realización de este trabajo; a Berta, por su labor incansable en el centro, por sus permanentes ganas de trabajar y por descubrirme un lugar tan bonito como son los grupos interactivos, y, por supuesto, a mis alumnos, por necesitar más y ayudarme a buscar ese más que necesitan.

La Universidad queda a veces muy lejos de los centros de enseñanzas medias, y más de centros tan alejados de su entorno como puede ser un instituto de difícil desempeño de Vallecas. Para unir esos puentes, entre otros han estado aquí Juan Miguel y, sobre todo, Esperanza, siempre dispuestos a echar una mano.

En esta senda, como siempre, conmigo va mi gente: mi madre, que me recuerda tantas veces que la vida no es igual para todos, que me apoya y me anima y que tanto confía en mí; mi padre, que desde allí arriba me recuerda que siempre hay que seguir intentándolo, y como no, Omar, que camina a mi lado y me ha hecho infinitamente más llevaderos los tramos más duros, así como Unai y Miguel, que me alegran este y todos los caminos de mi vida.

Contenido

INTRODUCCIÓN

Para comprender mejor la motivación, los objetivos y el enfoque de la investigación, resulta imprescindible presentar un breve acercamiento a la trayectoria profesional de la doctoranda en el ámbito de la enseñanza de las Matemáticas.

Ana Gómez Benito comenzó su andadura en la enseñanza secundaria en el curso 2004-2005, tras un año como profesora ayudante en la Universidad de Navarra en el área de Métodos Cuantitativos. El cambio de la Universidad a Secundaria fue todo un reto. Los alumnos ya no estaban allí de forma voluntaria, sino como algunos repetían "estamos aquí porque nos obligan". ¿En qué momento la educación había pasado a considerarse una obligación en vez de un derecho?. Los tres primeros cursos transcurrieron en un instituto de Arganda del Rey. En Arganda del Rey por aquel entonces solo había tres institutos públicos y ningún centro concertado o privado. Al instituto iban todo tipo de alumnos, había diversidad pero no segregación. Sí que se encontraban dificultades por niveles distintos de los alumnos y por conflictividad dentro de las aulas, pero de una forma bastante moderada. Por ejemplo, en la clase de matemáticas salían al grupo de compensatoria un máximo de cinco alumnos y eran una minoría los alumnos que repetían curso.

El siguiente centro fue un instituto de Vallecas donde estuvo dos cursos. Las diferencias entre ambos institutos fueron sustanciales. En Vallecas encontró mucha más segregación y más dificultades en el aula. Un porcentaje elevado del alumnado provenía de familias desestructuradas y había muchos más alumnos con desfases significativos. Aquí los alumnos que salían al grupo de compensatoria era siempre el máximo permitido (12-15) y el resto de grupos estaban divididos en desdobles. A pesar de la merma en el número de alumnos, la dificultad de atender a estos respecto a los anteriores aumentaba de forma considerable. Además de sentir que estaban allí por obligación, sentían muchos de ellos una gran desafección por el sistema educativo y todo lo que conllevaba; pero también había alumnos muy adaptados al sistema con muy buenos resultados. Aquí la labor de atender a la diversidad se complicaba. La opción del instituto era organizar al alumnado "por niveles"; formaban una clase de alumnos "buenos" que correspondía, en general, a los alumnos que tenían francés como optativa, y dos de alumnos "malos" una de ellas era íntegramente de compensatoria y la otra de alumnos con mucho desarraigo del sistema educativo. Aquí se plantean varios interrogantes, ¿es esta la mejor de las agrupaciones posibles?, ¿qué pasa con los alumnos intermedios?, ¿qué expectativas se transmiten a los alumnos de los dos grupos "malos"?

De aquí pasó a un instituto de los denominados "históricos" bilingüe en alemán. El tipo de alumnado cambió nuevamente de manera sustancial. Los alumnos que acudían a la rama bilingüe estaban divididos en dos grupos y el resto eran grupos bastante heterogéneos.

Tras siete años trabajando, en el curso 2011-2012 obtuvo su plaza definitiva en un centro de especial dificultad. Esto le hizo replantearse muchas cosas en las que hasta entonces no había reparado. Cuando en una clase cinco o seis alumnos pasan dificultades en el aula o fuera de ella, se hace todo lo posible por ayudarles y sacarlos adelante. Cuando el número de alumnos con dificultades aumenta y estos pasan a ser la mayoría, la situación se complica mucho. Los resultados que se obtienen no pueden ser comparados con resultados de otros centros, el índice de fracaso escolar es mucho más alto que la media de España, de la Comunidad de Madrid o incluso del mismo barrio. Los alumnos con desfase curricular se sienten desmotivados en el aula, e incluso aburridos, esto hace que la conflictividad en las aulas aumente muchísimo a la par el interés decae. En cualquier centro es habitual encontrar alumnos con niveles muy dispares, pero en algunos centros los alumnos con desfases curriculares de más de dos años suponen una mayoría, aunque no una totalidad. En general, estos desfases van asociados a otras problemáticas sociales que se reflejan en el aula y que no podemos aislar. La mayoría de nuestros alumnos va a tener pocas opciones de mejorar su complicada situación actual. Estamos convencidos de que la educación es la mejor vía para ello. Por eso nos parece una responsabilidad social brindar a todos nuestros alumnos esta vía.

Dicho esto, atender a estos alumnos, sin descuidar a aquellos que sí podrían seguir el ritmo habitual, se convierte en una tarea complicada. Se necesita una metodología que pueda atender a la vez a la minoría de alumnos que no presenta desfase curricular, sin dejar atrás a los que sí lo tienen. Sin embargo, es difícil encontrar referencias y estudios sobre este tipo de centros. Probablemente estos estudios no existen porque estos centros son escasos. Sí que aparece bibliografía sobre centros similares, pero de primaria. ¿Estos estudios serían extrapolables a educación secundaria? ¿Las prácticas de éxito educativo que se llevan a cabo en Educación Primaria pueden funcionar en secundaria?

En definitiva, esta trayectoria profesional y todas las preguntas e inquietudes a las que dio lugar llevaron a la doctoranda a plantearse el interés de una investigación con origen en su aula. Por un lado, partiendo de la posibilidad de que con el uso de ciertas metodologías se pueden mejorar los aprendizajes y disminuir la conflictividad. Por otro lado, teniendo en cuenta el contexto del centro y del alumnado con el que se trabajará y por las razones que se detallarán a continuación, se decidió enmarcar el estudio en el ámbito de los problemas aditivos de una etapa.

Las estructuras aditiva y multiplicativa de los números naturales son las primeras estructuras numéricas que aborda el sistema educativo. Además, conforman los cimientos sobre los que los alumnos construirán sus futuros aprendizajes y sus creencias sobre la naturaleza de las matemáticas. La estructura operatoria de los números racionales sustenta y por tanto condiciona el aprendizaje de otras estructuras numéricas y, en general, el aprendizaje de otras ramas de la matemática. Los problemas aditivos de una etapa sencillos se introducen en la educación primaria. Involucran únicamente dos cantidades conocidas y una desconocida sometidas a relaciones de cambio, combinación, comparación o igualación (Puig & Cerdán, 1988). En Secundaria, estos problemas se abandonan rápidamente en favor de problemas aritméticos de varias operaciones combinadas y, posteriormente, de problemas algebraicos. El motivo, posiblemente, sea que se consideran problemas demasiado sencillos que ya han sido tratados en la etapa anterior.

Partimos del supuesto de que la comprensión de un concepto matemático viene determinada en gran medida por la cantidad de situaciones problemáticas diferentes en las que se identifica dicho concepto matemático. Es decir, comprende mejor las matemáticas aquel alumno que es capaz de conocer mayor número de perspectivas de cada uno de los conceptos involucrados en una situación concreta. Así lo advertía M. de Guzmán (1984) al decir: "lo que sobre todo deberíamos proporcionar a nuestros alumnos a través de las matemáticas es la posibilidad de hacerse con hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas matemáticos y no matemáticos. ¿De qué les puede servir hacer un hueco en su mente en que quepan unos cuantos teoremas y propiedades relativas a entes con poco significado si luego van a dejarlos allí herméticamente emparedados? A la resolución de problemas se le ha llamado, con razón, el corazón de las matemáticas, pues ahí es donde se puede adquirir el verdadero sabor que ha traído y atrae a los matemáticos de todas las épocas. Del enfrentamiento con problemas adecuados es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos, ideas para el desarrollo de herramientas, en una palabra, la vida propia de las matemáticas".

Entendemos además que nuestros alumnos, como ciudadanos, deben alcanzar el más alto grado posible de competencia aritmética, antes de iniciar la instrucción sobre contenidos más abstractos como son el álgebra y el análisis matemático. Consideremos, por ejemplo, un problema como este: "Entre Juan y Luis tienen 5 canicas y entre Juan y Ana tienen 7. ¿Cuántas canicas tiene Ana más que Luis?". Se trata evidentemente de un problema de comparación de una etapa, que se resuelve directamente mediante una resta. Sin embargo, las cantidades conocidas que actúan como datos en el problema son el resultado de la unión de cantidades desconocidas cuyo valor ni se conoce ni puede conocerse (y que, de hecho, es irrelevante en el proceso de resolución). Desde un punto de vista simbólico, este problema involucra la identidad la identidad $(y - z) = (x + y) - (x + z)$.

Pensamos que estos problemas resultan interesantes puesto que su resolución va más allá de las meras manipulaciones aritméticas e involucra elementos de lo que algunos autores denominan pensamiento relacional que, entre otros aspectos se centra en "las propiedades de las operaciones, en cómo trasformar expresiones y operaciones, y cómo esta trasformación afecta a las operaciones" (Castro & Molina, 2007, p. 71).

Pese a este interés didáctico, las clasificaciones clásicas de los problemas aditivos de una etapa (Vergnaud, 1982; Puig & Cerdán, 1988) no parecen tener en cuenta estas particularidades. Por otro lado, una búsqueda en libros de texto actuales permite constatar que problemas como el anterior no aparecen en Primaria ni en Secundaria. Sin embargo, su tratamiento en el aula puede contribuir de forma clara a la formación matemática de nuestros alumnos, tanto por su valor intrínseco, como por su posible utilidad como base para enseñanzas posteriores más abstractas como el álgebra (Socas, 2011). El interés de este tipo de problemas aumentará, en nuestra opinión, cuando trabajamos con alumnos de especial dificultad en Secundaria, con los que el carácter de estos estudios es en muchos casos terminal.

García Olivares (2008) señala que la diversidad de alumnos conviviendo en la misma aula se ha convertido en uno de los mayores retos educativos con los que se tiene que enfrentar el profesorado de Secundaria a la hora de impartir su materia. Además de los niveles muy diferentes que encontramos, también encontramos alumnos de diferentes procedencias con distintos sistemas educativos. Todo esto lleva a los profesores de Secundaria muchas veces al desánimo y surge la necesidad de buscar una metodología adecuada a esta problemática.

Por otro lado, hemos de tener en cuenta que la enseñanza de las matemáticas con alumnos de especial dificultad es una labor compleja que debe ser abordada con cuidado para tratar de reducir no solo el fracaso escolar, sino el riesgo de exclusión social (Ritacco Real, 2012). A este respecto, el aprendizaje dialógico y en particular los grupos interactivos son actuaciones de éxito educativo, como ya demostró el programa INCLUD-ED 2011 (Valls et al., 2014) que mejoran el aprendizaje y disminuyen la conflictividad (Arostegui, Darretxe & Beloki, 2013) consiguiendo que alumnos de los programas de compensatoria o de integración participan en esta actividad como uno más de sus compañeros.

Teniendo en cuenta lo anterior, surgen de manera natural las siguientes preguntas de investigación:

1. ¿Son capaces los alumnos de Educación Secundaria Obligatoria de reconocer y de resolver correctamente problemas aditivos de una etapa en los que aparecen cantidades desconocidas que juegan un papel aunque no puedan calcularse, y que no se han trabajado durante la Educación Primaria?
2. ¿Permite una metodología basada en los grupos interactivos el trabajo con éxito de este tipo de problemas con alumnos de especial dificultad?

A continuación describimos la estructura de esta memoria. En el Capítulo 1 presentamos los objetivos específicos mediante los que se pretende responder las preguntas de investigación anteriores, así como el marco teórico que organiza la investigación. En el Capítulo 2, por su parte, presentamos el marco metodológico general de la investigación, detallamos el diseño y las fases según las cuales se ha desarrollado nuestro trabajo y hacemos una breve discusión sobre criterios de calidad. A continuación, en el Capítulo 3, se hace un breve repaso a la situación de los problemas aritméticos de una etapa en la enseñanza actual, tanto a través de una revisión del currículo oficial, como del análisis de una colección de libros de texto. El Capítulo 4 contiene la descripción de la clasificación de problemas que hemos desarrollado y los resultados de una serie de pruebas diagnósticas de carácter empírico llevadas a cabo para valorar la dificultad relativa de cada uno de los tipos de problemas descritos. En el Capítulo 5, se muestra el diseño y la implementación de dos ciclos de una propuesta didáctica organizada principalmente mediante el método de los grupos interactivos. Por último, en el Capítulo 6, presentamos las principales conclusiones de nuestro trabajo y apuntamos posibles líneas futuras en las que continuarlo.

CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES, OBJETIVOS Y MARCO TEÓRICO

En este primer capítulo presentamos antecedentes a nuestro trabajo y los objetivos de investigación que nos permitirán responder con propiedad a las dos preguntas de investigación que acabamos de plantear en el capítulo anterior y que servirán como guía de la investigación que se realizará, tanto en la planificación de las actividades de aula como en el desarrollo de las mismas. También se describirá el marco teórico en el que se sustenta el análisis de todos los datos que se vayan recopilando a lo largo de la experimentación y que permitirán enunciar las conclusiones de la investigación.

1.1. Antecedentes

Dentro de las investigaciones previas realizadas sobre problemas aditivos, son numerosos los estudios que se centran en alumnado de Educación Primaria, o incluso de Infantil, pero bastante más escasos los que se realizan en Educación Secundaria. Podría parecer que estos problemas (problemas que se resuelven con una operación de suma o resta) están superados en Educación Secundaria, pero como señalan Almeida y Bruno (2013) estas dificultades en ocasiones no son superadas en la enseñanza obligatoria, sobre todo dependiendo de la posición de la incógnita buscada en el problema. En general en el aula no se trabajan los problemas en los que la incógnita está en el estado inicial o intermedio (Castillo et al., 2017). Por ello nos parece importante reintroducir estos problemas en Educación Secundaria. Además, en el tipo de centro en el que vamos a trabajar (como ya desarrollaremos más adelante) es elevado el número de alumnos con dificultades. En esos casos, como indican Orrantia et al. (2012), los estudiantes muestran un uso poco flexible e ineficiente del conocimiento conceptual necesario para resolver problemas aritméticos. E inversamente, un mayor nivel de desempeño en tareas de resolución de problemas les llevaría a un mayor nivel de desarrollo de su conocimiento conceptual (Oyarzún & Salvo, 2010).

Uno de los objetivos de la educación matemática es que los alumnos tengan suficientes estrategias para resolver problemas (Barrantes & Zapata, 2010). De hecho, como señalan Castillo y Ramírez (2013), para que un niño logre resolver un problema es necesario el conocimiento de estrategias básicas de resolución de problemas. En Educación Infantil, los niños ya utilizan de forma intuitiva algunas estrategias de resolución de problemas (Zarzar & Martínez, 2012), pero es importante que esas estrategias vayan aumentando y consolidándose. Estos tres estudios se centran en

Educación Infantil y Primaria, en nuestro estudio queremos observar qué ocurre con esas estrategias durante la Educación Secundaria.

Dentro de los estudios realizados en Educación Primaria constatamos que la introducción de materiales facilita el uso de estrategias de resolución de problemas (Ramírez & de Castro, 2016). Estos materiales favorecen las tareas de conteo; mediante ellas los estudiantes son capaces de comenzar a resolver problemas de estructura aditiva y facilitan el desarrollo de procesos de abstracción (Alba & Quintero, 2016). Los alumnos con dificultades abandonan las estrategias de conteo más tarde que el resto (Peake et al., 2014), por lo que hay que seguir ofreciéndoselas. La realización de una intervención en el aula sobre problemas aditivos mejora las puntuaciones obtenidas por los alumnos antes y después (García & Blanco, 2016). A partir de aquí se realizará una intervención en el aula de Secundaria, ofreciendo materiales que favorezcan las estrategias de conteo.

Rodríguez et al. (2019) analizaron la presencia de los problemas aditivos en los libros de texto mexicanos, encontrando que los problemas con estructuras sencillas aparecen con una frecuencia mucho mayor que los de estructuras complejas. Desde otro punto de vista, Vicente y Manchado (2017) reflejaron que en los libros de texto españoles la mayor parte de los problemas desajustados (problemas que proponen situaciones muy alejadas de la vida de los alumnos) son problemas de fracciones. Además, los modelos de resolución de problemas que proponen son incompletos (no promueven el razonamiento), tal y como indican Sánchez y Vicente (2015). A partir de estas informaciones se analizará la presencia de los problemas aditivos en los libros de texto españoles.

Por otro lado, hemos indicado que la diversidad en las aulas es un hecho en la educación actual. Si queremos construir una escuela más inclusiva tenemos que conseguir que los alumnos y toda la comunidad educativa se sientan partícipes de ella (Arnaiz, 2003). La inclusividad de la escuela lleva consigo una mejora de la convivencia (Torrego, 2010), de la motivación y de los resultados (Bonell & Ríos, 2016). Una forma de colaborar en esta inclusividad es trayendo a la comunidad educativa a las aulas mediante los grupos interactivos que permite a nuestros alumnos trabajar juntos (Iglesias et al., 2013), aprovechando así los beneficios del aprendizaje dialógico (Chocarro & Sáenz, 2016) mediante el cual, debemos priorizar un alto nivel de aprendizaje instrumental para conseguir la inclusión social de todos nuestros alumnos (Aubert et al. 2004). La mejora de la motivación que conllevan estas prácticas influye directamente en las habilidades de resolución de problemas matemáticos (Herrera et al., 2018). La mayoría de los estudios hechos sobre grupos interactivos y centros con alto riesgo de exclusión social se han realizado en centros de primaria. En este estudio queremos llevar estas prácticas a Educación Secundaria.

1.2. Objetivos de la investigación

Para tratar de responder a las preguntas de investigación con las que cerramos el capítulo anterior, nos planteamos una serie de objetivos específicos de investigación.

Recordamos que la primera pregunta de investigación planteada es:

¿Son capaces los alumnos de Educación Secundaria Obligatoria de reconocer y de resolver correctamente problemas aditivos de una etapa en los que aparecen cantidades desconocidas que juegan un papel aunque no puedan calcularse, y que no se han trabajado durante la Educación Primaria?

Para responder a esta primera pregunta de investigación necesitaremos, por un lado, de una clasificación de problemas aritméticos más completa que las que se suele presentar en la literatura y, por otro, de una cierta medida de la dificultad de los diferentes tipos de problemas. En consecuencia, la pregunta anterior se concreta en los siguientes objetivos específicos:

- O1. Desarrollar una clasificación de problemas aditivos de una etapa que extienda a las clasificaciones clásicas considerando la presencia de cantidades desconocidas que juegan un papel aunque no puedan calcularse.

- O2. Determinar empíricamente el grado de dificultad de los distintos tipos de problemas y conocer las estrategias puestas en juego espontáneamente por los alumnos al enfrentarse a ellos.

Por su parte, la segunda pregunta de investigación es:

¿Permite una metodología basada en los grupos interactivos el trabajo con éxito de este tipo de problemas con alumnos de especial dificultad?

Esta segunda pregunta de investigación está más claramente orientada hacia la práctica educativa e implica necesariamente el trabajo en el aula. Por ello, podemos concretarla en los siguientes objetivos específicos:

- O3. Diseñar una experiencia didáctica para trabajar problemas aditivos de una etapa "complejos" con alumnos de especial dificultad de 2º de E.S.O. haciendo uso de una metodología basada en los grupos interactivos.

- O4. Implementar la secuencia didáctica anterior y analizar su impacto sobre el éxito de los alumnos al resolver problemas aditivos de una etapa "complejos" y sobre las estrategias utilizadas por éstos.

- O5. Evaluar el grado de satisfacción y de implicación de los alumnos participantes con respecto a la metodología docente utilizada.

1.3. Marco teórico

Teniendo en cuenta los objetivos marcados, el marco teórico que sustenta nuestro trabajo se organiza en tres líneas fundamentales: los problemas aritméticos, el aprendizaje de las matemáticas en contextos de exclusión social y el aprendizaje dialógico con una atención especial a los grupos interactivos.

1.3.1. Problemas aritméticos

Nuestro estudio se centra en los denominados problemas aditivos de una etapa. En los problemas aritméticos se pueden establecer una o varias relaciones entre las variables. Los problemas en los que en el enunciado aparece una sola relación los denominaremos problemas de una etapa. Estos problemas se resuelven con una sola operación. Mientras que si en el enunciado aparecen varias relaciones, los denominaremos problemas de varias etapas. Estos problemas necesitarán más de una operación para ser resueltos y las siguientes operaciones utilizan resultados obtenidos en las anteriores.

Los problemas de una etapa en función de la aritmética que se utilice para resolverlos se dividen en dos grandes grupos: los de estructura aditiva: se resuelven con una suma o una resta y los de estructura multiplicativa, que se resuelven con un producto o división.

El estudio y la clasificación de los problemas aritméticos de una etapa involucrando números naturales ha sido un importante tema de trabajo en Didáctica de la Matemática en los últimos 50 años (Vergnaud, 1982; 1988; Puig y Cerdán, 1988; González, 1998). También abundan los estudios que describen, evalúan y analizan las respuestas y estrategias utilizadas por alumnos de diversos niveles educativos (Carpenter y Moser, 1982; Bell, Fischbein y Greer, 1984; Anghlieri, 1989) o sus dificultades (Castro, Rico, Batanero y Castro, 1991).

Vergnaud y Durand (1976), en referencia a este tipo de problemas, hacen notar que algunos enunciados describen acciones que se desarrollan en el tiempo, mientras que en otros enunciados no ocurre así. En el primer caso, consideran que los números que intervienen, unos representan estados, y otros transformaciones. Y desde estas consideraciones, establecen cinco categorías de enunciados, en función de las relaciones de contexto que se establecen entre los números; a su vez, cada una de estas categorías da lugar a diferentes clases de problemas al considerar la posición de la incógnita; además, cada una de estas clases se puede subdividir en subclases atendiendo al sentido de las transformaciones. En un trabajo posterior, Vergnaud (1982), incorpora la posibilidad de que el enunciado del problema exprese una comparación entre números y amplia las categorías semánticas a seis: composición de medidas, transformación entre medidas, relación estática entre medidas, composición de dos transformaciones, transformación entre dos relaciones estáticas y composición de dos relaciones estáticas.

Para Nesher y Katriel (1977), los problemas aditivos de una etapa constan de un mínimo de tres frases (dos proposiciones y una pregunta), con una dependencia semántica entre ellas que pone de manifiesto una unión de conjuntos disjuntos. Esta dependencia semántica les permite categorizar los enunciados según que afecte a: argumentos (especifican a qué unidades se refieren los números), adjetivos (califican los argumentos), agentes (gestionan argumentos), localizaciones espaciales de los argumentos, tiempos en los que se producen los sucesos, verbos (actúan sobre los argumentos) y términos relacionales entre argumentos. Más adelante, Nesher (1982) establece tres categorías semánticas: dinámica, estática y comparación. Estas categorías se pueden considerar equivalentes a las que Vergnaud denomina, respectivamente, transformación entre medidas, comparación de medidas y relación estática de medidas.

Carpenter y Moser (1982) identifican las que denominan "dimensiones básicas" para caracterizar las acciones y relaciones que contienen los enunciados de los problemas aditivos de una etapa. A partir de tres dimensiones establecen seis categorías de problemas: juntando (hay una acción que aumenta la cantidad inicial), separando (la acción disminuye la cantidad inicial), parte-parte-todo (establece una relación estática entre una entidad y sus dos partes), comparación (se comparan dos cantidades), igualando-añadir (existe una aumento y también una comparación), e igualando—quitar (existen una disminución y una comparación); a su vez, cada una de estas categoría da lugar a distintos tipos de problemas según la posición de la incógnita. Los mismos autores comentan que esta clasificación no pretende ser exhaustiva pues se limita a clasificar los problemas que resultan adecuados para los niños que realizan sus primeros aprendizajes sobre la suma y la resta de números naturales.

González Mari (1995) considera un conjunto numérico nuevo, que denomina números naturales relativos, que es isomorfo al conjunto de medidas naturales relativas y en el que los datos e incógnita del problema son medidas susceptibles de tener dos orientaciones. Establece una clasificación de los problemas aditivos a partir de la consideración conjunta de, por una parte, la estructura numérica y sus operaciones aditivas (números naturales, naturales relativos y enteros) y, por otra parte, de la estructura semántica global (cambio, combinación y comparación). De este modo obtiene seis categorías: combinación natural simple (intervienen medidas naturales), comparación natural simple (la medida natural relativa procede de la comparación entre medidas naturales), transformación natural simple (hay un operador aditivo que actúa sobre una medida natural y la transforma en otra medida natural), y tres categorías en las que intervienen medidas naturales relativas: comparación relativa simple, transformación relativa simple y combinación relativa simple. En esta clasificación el autor atiende más a la variable estructura numérica que a la variable estructura semántica, y en ella quedan recogidas las categorías de Carpenter y Moser, así como todas las de Vergnaud salvo la de composición de dos relaciones estáticas.

Posteriormente, Socas, Hernández y Noda (1998), construyen un modelo teórico para organizar el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas relativas. Se toma como punto de partida la noción del esquema partes-todo de Piaget, y se caracterizan las organizaciones y reglas de acción que se dan en los procesos numéricos y de medida en dos grandes categorías: la categoría I se construye al considerar tres variables (posición de la incógnita, los estados y variaciones como significado de los números, y el sentido de estados y variaciones), y las categorías II y III que contemplan las relaciones asimétricas o situaciones de comparación entre estados y entre variaciones. En total encuentran 108 problemas de la categoría I y 48 entre las categorías II y III. Esta clasificación es teórica puesto que, a nuestro entender, se contabilizan enunciados que admiten respuesta múltiple, como es el caso de los tipos *Estado + Estado = Variación* o *Estado + Variación = Variación*.

Además de la propia estructura semántica de los problemas, existen otras variables relevantes a la hora de abordar su estudio y que afectan a la dificultad que estos problemas tienen para los estudiantes. Podemos citar como especialmente relevante lo posición de la incógnita (Adetula, 1989) o la utilización de distintos sistemas de representación para proporcionar la información (Gagatsis & Elia, 2004).

Elia, Gagatsis y Demetrious (2007) realizan un estudio estadístico con más de 1400 alumnos de Primaria en el que aportan evidencias de que los estudiantes tienen mayores dificultades al enfrentarse a problemas en los que se proporciona información mediante una representación pictórica que, por ejemplo, cuando la información se proporciona de forma verbal. Además, señalan también el escaso impacto que tiene la inclusión de una figura decorativa. Por otro lado, aunque se centran únicamente en problemas de transformación, estos mismo autores determinan que los problemas en los que la cantidad desconocida se encuentra en el estado final resultan más sencillos.

En cuanto a propuestas concretas para el trabajo con problemas aditivos de una etapa en el aula, queremos mencionar el estudio de Willis y Fuson (1988) que proponen el uso por parte de los estudiantes de lo que ellos denominan "schematic drawings" (ver Figura 1.1). Estos autores proponen incluir la selección del diagrama adecuado y la introducción de los datos en el mismo dentro del proceso de resolución por parte de los estudiantes como paso previo a la realización de la operación aritmética correspondiente. Los autores señalan que el uso de estos diagramas no solo puede contribuir a mejorar la capacidad de los estudiantes de resolver este tipo de problemas, sino que también permitió que los alumnos con los que realizó el estudio empírico fueran capaces de "clasificar" los problemas que se les proponían de forma más rica más allá de problemas de suma o resta.

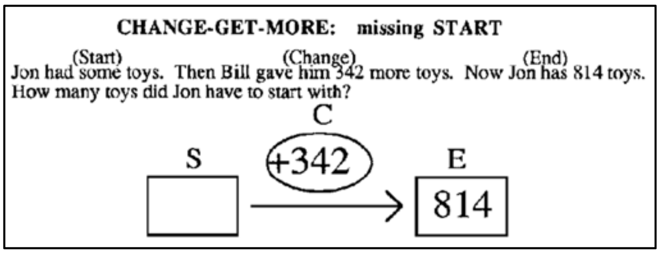


Figura 1.1. "Schematic drawing" correspondiente a un problema de transformación (Willis & Fuson, 1988, p. 194).

El uso de esquemas similares a los anteriores puede resultar de especial interés en un contexto de estudiantes con necesidades educativas especiales. Así Ramos, Castro y Castro-Rodríguez (2016) utilizaron este tipo de herramientas con tres alumnos de 17-18 años con necesidades educativas especiales en un contexto de problemas aditivos de una etapa sencillos mostrando un impacto positivo sobre el éxito de los alumnos; si bien indican la necesidad constancia por parte del profesorado y de una explicación clara de su uso por no considerarlo evidente para los alumnos. En nuestro trabajo tendremos en cuenta este resultado a la hora de ofrecer estrategias al alumnado.

En este sentido, buscando una mayor sencillez, los "schematic drawings" pueden adaptarse con facilidad y convertirse en materiales de tipo manipulativo dando lugar a las denominadas "cajitas Liro". Este material ha sido diseñado por Norma Lidia Rosas Tavares para la resolución de problemas aditivos de una etapa (Tavares, 2012). Su idea nació impartiendo clase de matemáticas a alumnos de segundo grado (7-8 años). Las primeras cajitas las diseñó para problemas de combinación (unión). A partir de allí, diseñó las correspondientes cajitas (Figura 1.2) para problemas de comparación y de cambio (transformación). Si bien la autora diseñó cajitas para transformación, comparación y unión con cantidades simples, son adaptables a otros tipos de problemas.

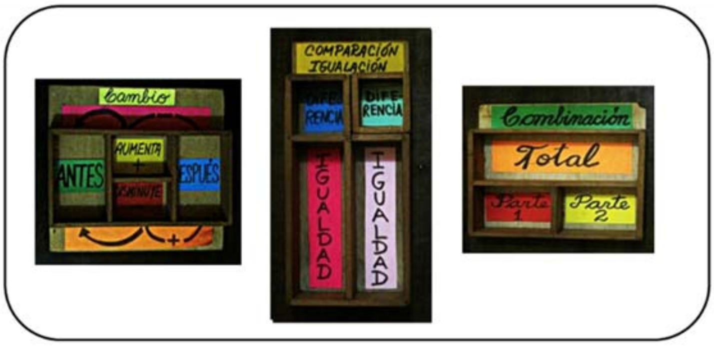


Figura 1.2. Ejemplos de cajitas Liro (Tavares, 2012).

Avanzando en el currículo, en determinado momento, se tiene que pasar del uso de números naturales al uso de decimales y de fracciones. El paso del número natural al número racional (representaciones decimal y racional) conlleva una cierta "discontinuidad" en el sentido de que algunos de los modelos utilizados por los alumnos a la hora de dotar de significado a las cantidades y a las operaciones entre ellas dejan de tener validez. De hecho, como señala Gómez (2011): "está por ver qué conocimientos usan los estudiantes para salvar las discontinuidades y qué enfoques son los más adecuados para diseñar la intervención del profesor de modo que se favorezca que los estudiantes que tropiezan con dificultades las superen".

Existe una amplísima literatura en relación a las dificultades conceptuales asociadas a los significados del número racional, en muchas ocasiones debidas a deficiencias en el proceso de enseñanza y aprendizaje de dichos conceptos (Gairín, 1999; Escolano, 2007). Estas deficiencias, junto quizás con otros factores, implican también serias dificultades en el plano meramente procedimental (Lortie-Forgues, Tian & Siegler, 2015) que se extienden más allá de la educación obligatoria. Es de esperar, por lo tanto, que el tipo de números implicados en el enunciado del problema sea una variable relevante a la hora de considerar la tasa de éxito de los alumnos.

Además de los errores procedimentales relacionados con los elementos anteriores, existen otros errores habituales al afrontar problemas aditivos como los que consideramos. Vondrová, Novotná y Havlíčková (2019) señalan, por ejemplo, el uso de una operación inadecuada o una mala interpretación del problema a los que prestaremos especial atención.

1.3.2. Aprendizaje (de las matemáticas) en contextos de exclusión social

La enseñanza de las matemáticas, como la educación en general, debe perseguir como uno de sus objetivos fundamentales la formación de ciudadanos autónomos y libres (Delval, 2013). Para ello resulta de especial importancia tener en cuenta la existencia de fenómenos relacionados con la exclusión social en el ámbito educativo (Dubet, 2005).

Existen trabajos que se dedican a identificar buenas prácticas llevadas a cabo en centros escolares en relación al trabajo en contextos de riesgo de exclusión social. Ritacco Real (2012) presenta, de hecho, un estudio centrado en el área de matemáticas en el que identifica de manera emergente en un estudio empírico hasta seis de dichas buenas prácticas: la comunicación en el aula, la implicación y cercanía en el aprendizaje, los criterios flexibles en la evaluación, la atención individualizada, el aprendizaje significativo y los materiales específicos.

Pensamos que en un contexto de exclusión social cobran una especial importancia los aspectos actitudinales y afectivos relacionados con el aprendizaje de las matemáticas. Como señalan Beltrán y Cárdenas (2016, p. 264) al resolver problemas "afloran también diversas emociones, como el miedo, la ansiedad o la tranquilidad; y actitudes, positivas o negativas, ante el desarrollo de la tarea, como la confianza, el deseo de buscar otros caminos para solucionar el problema, la perseverancia o el interés". En su trabajo de revisión, Gil, Blanco y Guerrero (2005) señalan la necesidad de que los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas generen reacciones afectivas positivas en los alumnos y señalan variables de tipo afectivo que influyen sobre estos procesos como, por ejemplo, la confianza en sí mismo o el estilo atribucional.

Las buenas prácticas señaladas con anterioridad contribuyen de manera fundamental a general reacciones afectivas positivas y también a promover actitudes positivas en los alumnos cuando se enfrentan a un problema de matemáticas. Por otro lado, desde un punto de vista más general, la forma en la que agrupemos dentro y fuera del aula determinará nuestra metodología a seguir y también influirá en estos factores.

Dentro de las agrupaciones escolares podemos encontrar tres modelos principales (Cifuentes, Torrego & Siles, 2012): mixture, streaming e inclusión.

- En el modelo mixture, todo el alumnado heterogéneo permanece en la misma aula, no hay apoyos ni dentro ni fuera del aula. Esta organización del aula se basa en el principio de igualdad de oportunidades, donde todo el alumnado comparte unos mismos objetivos, contenidos y actividades de aprendizaje, independientemente de las características individuales de estos. A pesar de este objetivo igualitario, el desarrollo de esta modalidad no da respuesta a la diversidad del alumnado (Valls, Siles & Molina, 2011)
- En el modelo streaming, los alumnos con desfase curricular reciben apoyo fuera del aula y/o realizan actividades distintas a los demás acordes a su nivel (adaptaciones curriculares). Diversos estudios han demostrado que los alumnos de más bajo nivel ven reducidos significativamente los contenidos de sus aprendizajes lo que disminuye su autoestima y aumenta sus probabilidades de abandono escolar.
- En el modelo inclusión, todos los alumnos permanecen en la misma aula y los apoyos se reciben dentro de esta con los mismos objetivos para todos los alumnos.

Los resultados del proyecto "I+D MIXTRIN: Formas de agrupación del alumnado y su relación con el éxito escolar: Mixture, Streaming e Inclusión" del

Ministerio de Educación y Ciencia 2008-2011, que analiza cómo se concreta cada modalidad en los centros educativos de enseñanza obligatoria en España han evidenciado que las actuaciones educativas inclusivas son las que tienen mayores garantías de éxito académico para todo el alumnado (Valls, Siles & Molina 2011).

Las medidas que previenen el abandono escolar coinciden, en parte, con las estrategias que favorecen las expectativas positivas hacia el estudio, la autoestima, el éxito y el rendimiento escolar que han sido identificadas en el marco del proyecto INCLUD-ED, fruto del análisis de literatura científica, políticas educativas y prácticas de éxito (Consortium INCLUD-ED, 2009; Padrós et al., 2011). Según estos estudios, el aprendizaje dialógico, y en particular los grupos interactivos son actuaciones de éxito educativo que mejoran el aprendizaje y disminuyen la conflictividad (Arostegui et al., 2013). Los grupos interactivos contribuyen a superar aspectos como el fracaso escolar, el absentismo y la segregación, ya que muchos de los elementos que los definen están relacionados con las buenas prácticas mencionadas con anterioridad y con la generación de reacciones emocionales positivas en los alumnos.

En esta investigación diseñaremos una propuesta teniendo en cuenta la idoneidad del modelo inclusión. Seguiremos la metodología de los grupos interactivos como medida para prevenir el fracaso escolar y reducir la conflictividad.

1.3.3. Aprendizaje dialógico. Comunidades de aprendizaje y grupos interactivos

El aprendizaje dialógico es la concepción comunicativa del aprendizaje caracterizada por la importancia de todas las interacciones que cada alumno o alumna establece con las demás personas (Aubert, García & Racionero, 2009). Se basa en siete principios básicos (Flecha et al. 2002).

1. El diálogo igualitario: la fuerza del diálogo está en los argumentos y no en la posición jerárquica de quien habla.
2. La inteligencia cultural: abarca a la inteligencia académica, práctica y comunicativa.
3. La transformación: el aprendizaje dialógico transforma las relaciones entre la gente y su entorno aspirando a conseguir una transformación de su contexto.
4. La dimensión instrumental: aprendizaje de los instrumentos fundamentales para vivir en la sociedad actual.
5. La creación de sentido: el alumno debe encontrar sentido a su aprendizaje a través de iteraciones y mediante el diálogo igualitario; conectando la realidad vivida con los conocimientos escolares.
6. Solidaridad: al trabajar de forma cooperativa mejoran tanto las relaciones entre el alumnado (solidaridad) como aumentan los aprendizajes (Prieto et al., 2009).
7. Igualdad de diferencias: una educación de calidad es un objetivo para todos los estudiantes independientemente de su origen y contexto social y cultural. El alcance de este objetivo no requiere que nadie renuncie ni pierda su identidad individual ni colectiva (Prieto et al., 2009).

Una de las vías que concretan los principios del aprendizaje dialógico son las denominadas comunidades de aprendizaje entendidas como "proyectos de transformación de centros educativos dirigido a la superación del fracaso escolar y la eliminación de conflictos" y distinguidas por "una apuesta por el aprendizaje dialógico […] donde el diálogo igualitario se convierte en un esfuerzo común para lograr la igualdad educativa de todas las alumnas y alumnos." (Flecha et al., 2002).

En el curso 1995-1996 se introducen en España, desde países como EEUU, Canadá, Corea o Brasil, las comunidades de aprendizaje. El centro pionero fue el Ruperto Medina de Portugalete (Vizcaya). Desde entonces se han extendido por toda España, aunque en mayor medida en unas comunidades que en otras (algunos gobiernos autonómicos han apostados por ellas) y con bastante más presencia en centros de primaria que de secundaria (Tabla 1.1).

	0-3	Infantil y Primaria	Secundaria	integral (infantil, primaria y secundaria)	Educación especial	Educación personas adultas	Formación profesional	TOTAL
Andalucía	2	62	10	5	2	5	1	87
Aragón	0	5	0	0	0	0	0	5
Castilla La Mancha	0	4	0	0	0	0	0	4
Castilla León	0	3	1	0	0	0	0	4
Cataluña	3	36	1	0	0	1	0	41
Euskadi	0	30	2	5	1	4	0	42
Extremadura	0	9	0	1	0	0	0	10
Galicia	0	1	0	0	0	0	0	1
La Rioja	0	1	0	0	0	0	0	1
Madrid	2	2	0	0	0	0	0	4
Melilla	0	1	0	0	0	0	0	1
Murcia	0	1	0	0	0	0	0	1
Navarra	0	9	0	0	0	0	0	9
Ceuta	0	1	0	0	0	0	0	1
Valencia	0	12	2	0	1	0	0	15
TOTAL	7	180	16	11	4	10	1	225

Tabla 1.1. Comunidades de aprendizaje en España por Comunidades autónomas. (Imagen de utopiadream.info, octubre 2018)

En las comunidades de aprendizaje se llevan a cabo aquellas actuaciones educativas de éxito que la Comunidad Científica Internacional ha demostrado que contribuyen a mejorar el aprendizaje de los alumnos y la mejora de la convivencia en el centro educativo. Estas actuaciones son, por ejemplo, grupos interactivos, tertulias dialógicas, formación de familiares, participación educativa de la comunidad, etc. Todas estas actuaciones (en conjunto o por separado) se pueden llevar a cabo en centros independientemente de si se constituyen en una comunidad de aprendizaje o no.

Vamos a prestar especial atención a los grupos interactivos (GI) como propuesta metodológica para conseguir aprendizajes máximos para todos nuestros alumnos (Aubert et al., 2013). Los GI utilizan la agrupación del tipo inclusión, organizando a los alumnos en grupos heterogéneos en los que participan todos los alumnos. Es importante destacar que con los GI todo el alumnado realiza las mismas actividades; también el alumnado de compensatoria (ya sea de tipo A, con apoyo de compensatoria recibido dentro del aula, como de tipo B, alumnos que reciben el apoyo fuera del aula) y el Alumnado con Necesidades Educativas Especiales. De hecho, los GI han sido señalados en numerosos estudios europeos como una estrategia de éxito educativo a nivel de resultados, convivencia, motivación y habilidades sociales (INCLUD-ED, 2011).

Para implementar los grupos interactivos se divide la clase en grupos heterogéneos de 4 o 5 alumnos. Se plantean 4 o 5 actividades en tantos espacios de la clase. Cada actividad la dirige un voluntario. Cada grupo de alumnos realiza todas las actividades planteadas. El tiempo de clase se divide en turnos de la misma duración y cada grupo realiza una actividad en cada turno. Al finalizar el turno ese grupo de alumnos pasa a la siguiente actividad y el voluntario permanece en la misma actividad. Las actividades no pueden ser secuenciales porque a cada grupo le toca comenzar por una actividad distinta. El encargado de diseñar cada actividad, coordinar a los voluntarios, organizar los grupos, medir los tiempos, y supervisar que todo funcione correctamente es el profesor de la materia en la que se están poniendo en práctica los grupos interactivos. Es deseable que el profesor no tenga que actuar a la vez como voluntario en alguna de las actividades. Los alumnos se enfrentan de forma conjunta a la actividad. Todos los alumnos realizan, y terminan, todas las actividades. No solo los más aventajados. Esta práctica ayuda a los alumnos con más dificultades, ya que mediante las explicaciones de sus compañeros, reciben la información de forma más sencilla, con un lenguaje cercano a ellos. También ayuda a los alumnos con menos dificultades, ya que al expresar en alto su explicación sobre los conocimientos que se están trabajando en ese momento, afianzan esa información. Con los GI los alumnos aprenden además a trabajar en grupo lo que es cada vez más exigido socialmente.

Así pues, el papel de los voluntarios es fundamental. Como señalan Carralero et al. (2006): "Es importante que los adultos tengan niveles altos de expectativas y confíen en las capacidades de cada alumno para aprender y lograr el éxito académico y social que necesitan para superar el peligro de exclusión social al que se enfrentan". Estas personas serán tan diversas como se pueda. En primer lugar, se valora la participación de las propias familias o personas del entorno inmediato, perfiles de los que con frecuencia se ha subestimado cuál podía ser su aportación a una escuela. Además, participan también (en diversos casos, a través de convenios con universidades o con entidades del entorno) estudiantes universitarios, profesionales y otros perfiles (Vieira et al., 2013).

Estos voluntarios son, preferiblemente, personas del entorno de nuestros alumnos. Mediante el diálogo con el alumnado, animan a estos a realizar las actividades, teniendo una misión profundamente motivadora. Esta forma de trabajo en el aula permite que, a pesar de la escasez de recursos humanos en los centros educativos se pueden llevar a cabo de forma más eficaz los procesos de aprendizaje cooperativo y dialógico puesto que la atención de una sola persona a varios grupos de trabajo dificulta que el abordaje de la tarea fluya adecuadamente e impide una atención individualizada a los procesos de cada grupo y de cada persona dentro de su grupo (Bonell, 2006).

Sin embargo, el valor de este voluntariado no reside solo en la posibilidad de contar con un mayor número de recursos humanos, sino en la riqueza de su pluralidad y la inteligencia cultural que se aporta (Ramis & Krastrina, 2010). Esto permite multiplicar y abrir horizontes a los niños y niñas de estos centros, incrementando sus expectativas, motivación y también el interés hacia la continuidad de los estudios. En efecto, siguiendo con los enfoques interaccionistas del aprendizaje, cuanto más diversas y ricas sean las interacciones a las que se exponen los alumnos y alumnas, mayor es su potencial para el aprendizaje. La literatura científica ha aportado muchas evidencias del valor de romper con la división entre el contexto escolar o académico y el discurso, registro y tipo de relaciones del alumnado. Para los colectivos con mayor riesgo de exclusión educativa y de abandono escolar, el reconocimiento de aspectos como su lengua materna o bagaje cultural influyen de forma decisiva en la relación del alumnado con el centro (Cummins, 2002). El hecho de que personas de la propia comunidad participen activamente en las actividades permite este reconocimiento. No obstante, en ocasiones resulta complicado lograr la participación de voluntarios ya que como señalan Ortega et al. (2015) “muchas personas de la comunidad tienen miedo de no saber resolver las actividades escolares y quedar en evidencia ante el alumnado”

Otro efecto claro de la participación de personas de la propia comunidad en la escuela consiste en el hecho de proporcionar referentes positivos hacia los estudios (Pardós et al., 2011). Que los voluntarios sean personas diversas procedentes de la comunidad, entornos familiares, personas del barrio o pueblo, integrantes de asociaciones, estudiantes universitarios, alumnado de cursos superiores, ofrece también la ventaja de que los chicos y chicas se encuentran con referentes muy diversos que tienen una característica en común: están preocupados por su aprendizaje, confían en sus capacidades y concretan esa preocupación y confianza en apoyo desinteresado (Bonell, 2006). Hay que tener en cuenta que los profesores han tratado previamente con sus alumnos y en muchas ocasiones también han recibido informaciones de profesores de esos alumnos de cursos anteriores, lo que les lleva a formar un concepto educativo de ese alumno que puede influir en sus interacciones con él. Los alumnos forman un autoconcepto académico fruto de sus interacciones con profesores y compañeros que en muchas ocasiones puede ser muy negativo. Sobre todo en alumnos con dificultades de aprendizaje o con historiales previos de fracaso educativo. Los voluntarios, en general, no tienen ningún concepto académico previo de cada uno de nuestros alumnos por lo que los valoran a todos por igual y cada alumno puede reconstruir su autoconcepto académico al participar en los grupos desde la aprobación de nuevos interlocutores.

En definitiva la percepción por parte del alumnado, profesorado y voluntariado participantes, es que los GI permiten acelerar el aprendizaje y hay un aprovechamiento mucho mayor del tiempo, resultan motivadores y facilitan la implicación de todos los y las estudiantes en lo que se está trabajando. La realización de esta actuación educativa de éxito en las escuelas de primaria ha promovido la continuidad educativa del alumnado en la educación secundaria y superior. Estudiantes de escuelas analizadas que han participado en GI a lo largo de su escolarización han incrementado su motivación por seguir estudiando y atribuyen parte de ello a que la escuela les dio la oportunidad de tener dicha experiencia (Pardós et al., 2011).

CAPÍTULO 2. ASPECTOS METODOLÓGICOS DE LA INVESTIGACIÓN

En el presente capítulo describimos los aspectos metodológicos más relevantes relativos a la investigación que llevaremos a cabo. En primer lugar, presentamos el marco metodológico general para, a continuación, describir en mayor detalle el diseño y las fases de la investigación que están asociadas a esta metodología. Por otra parte, como se apreciará en este capítulo y a lo largo de esta investigación, el marco teórico no es independiente de la metodología, sino que está completamente integrado en las fases que componen su desarrollo. Para terminar presentamos una breve discusión sobre los criterios de calidad.

2.1. Marco metodológico general

Desarrollaremos nuestra investigación en el aula, pues en dicho espacio se producen y se pueden analizar la interrelación entre sujetos y las componentes del objeto de conocimiento, las componentes de la instrucción y las componentes del aprendizaje. Además "los problemas del educador emergen de su propia práctica y se van modificando como producto de las observaciones y de las reflexiones. El aula se convierte, entonces, en un escenario propicio para comprenderla y transformarla" (Muñoz, Quintero & Munévar, 2002, p. 5).

En este sentido el trabajo que realizamos puede enmarcarse en el paradigma de la investigación basada en la práctica (*practice-based research*) que puede definirse (Candy & Edmonds, 2018, p. 63) como "una investigación original llevada a cabo para obtener nuevo conocimiento por medio de la práctica y de los resultados de dicha práctica". Adicionalmente, existen autores (Smith & Dean, 2009) que distinguen entre investigación basada en la práctica e investigación orientada hacia la práctica (*practice-led research*) entendida como aquella investigación que pretende obtener una nueva o mejor comprensión sobre la práctica.

Como también señalan Candy y Edmonds, este enfoque de la investigación en relación con la práctica (*practice-related research*) que englobaría los dos constructos anteriores además de algunos otros que pueden derivarse, parte del supuesto epistemológico de que la investigación y la práctica operan como procesos interdependientes y complementarios. Así pues, este paradigma de investigación resulta muy adecuado para la investigación educativa y, de hecho, enfoques metodológicos utilizados en Educación Matemática como puede ser la investigación de diseño (Molina, Castro, Molina & Castro, 2011) pueden entenderse dentro de este paradigma.

El método seguido en nuestro trabajo será el de la investigación-reflexión-acción (IRA). Entre otros aspectos, este método conlleva una reflexión continua sobre el proceso de enseñanza aprendizaje; ya que las reflexiones que vayamos obteniendo en nuestro estudio las podremos implementar para mejorar nuestra propuesta educativa. La Figura 2.1 recoje los principales rasgos de esta metodología de investigación.

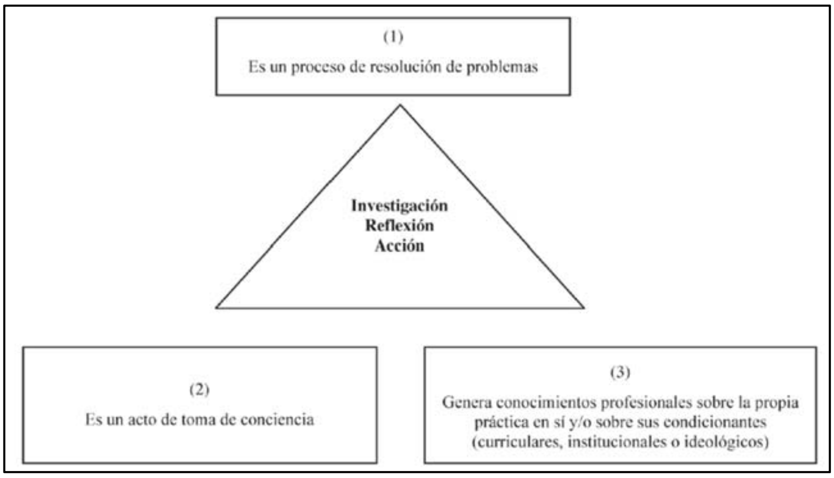


Figura 2.1. Rasgos de la IRA (García, Mena & Sánchez, 2011, p. 256).

Mena (2007) indica que generalmente las investigaciones que adoptan esta metodología suelen centrarse en uno de los tres rasgos indicados (siendo la resolución de problemas el más abordado). En nuestro caso, pretendemos prestar atención a los tres vértices del triángulo. En particular, y poniendo esto en relación con la discusión anterior, nuestra investigación es en cierto sentido no solo basada en la práctica (puesto que implica resolver un problema identificado en un ámbito educativo concreto) sino también orientada hacia la práctica (en tanto que pretendemos diseñar una propuesta de actuación en el aula que aborde elementos tanto conceptuales como metodológicos desde un punto de vista novedoso).

El vértice "toma de conciencia" está evidentemente relacionado con el planteamiento de la investigación, con las preguntas que la motivan y los objetivos marcados. A continuación, tenemos el "proceso de resolución del problema" dentro del cual se identifican generalmente tres pasos (García, Mena & Sánchez, 2011, p. 256) que son:

1. La identificación de preocupaciones, necesidades o problemas (primer paso).
2. Diseño y ejecución de un plan de actuación para abordarlas (segundo paso).
3. Evaluación del plan de actuación (tercer paso).

Finalmente, dado que como ya hemos dicho, abordamos la investigación en relación con la práctica, las conclusiones obtenidas como resultado de nuestra investigación deben "generar conocimiento profesional sobre la práctica" atendiendo así al vértice restante.

2.2. Diseño y fases de la investigación

Los objetivos de investigación señalados en el capítulo anterior, junto con el marco metodológico general que acabamos de describir, han determinado que la investigación se haya desarrollado según las cuatro fases siguientes:

- Fase 1. Esta primera fase se relaciona con el vértice "toma de conciencia". En ella se recopila información relevante tanto desde el punto de vista de la investigación en educación matemática, como desde el de la práctica educativa. Para tales fines, esta fase se divide en dos subfases:

  1.1. Recopilación y estudio de bibliografía relativa al tema de investigación, tanto en lo relativo a aspectos conceptuales (problemas aditivos, pensamiento relacional, etc.) como a aspectos metodológicos (aprendizaje dialógico, grupos interactivos, etc.).
  1.2. Estudio de la presencia de los problemas aritméticos de una etapa en el currículo oficial y en los libros de texto.

- Fase 2. Esta segunda fase está principalmente relacionada con el primer paso (identificación de preocupaciones, necesidades o problemas) del vértice "proceso de resolución del problema". Como antes, se divide en dos subfases:

  2.1. Desarrollo de una clasificación propia de problemas aditivos de una etapa que considere la presencia de cantidades desconocidas que no se pueden determinar.
  2.2. Determinación empírica del grado de dificultad de los distintos problemas y de las estrategias utilizadas para resolverlos.

- Fase 3. Esta fase se corresponde esencialmente con los dos pasos restantes (diseño y ejecución de un plan de actuación, y evaluación del mismo) del vértice "proceso de resolución del problema". Por su naturaleza empírica, se descompone en tres subfases:

  3.1. Diseño de una propuesta didáctica basada en el uso de grupos interactivos.
  3.2. Implementación de la propuesta didáctica.
  3.3. Análisis de los resultados.

- Fase 4. Finalmente, la última fase se corresponde con el tercer vértice "generar conocimiento profesional sobre la práctica" y el ella se aborda la evaluación global del trabajo realizado y se presentan las conclusiones.

Además de considerar los rasgos definitorios de la IRA descritos con anterioridad, podemos relacionar las distintas fases con los objetivos de investigación. En este sentido, la Fase 1, como fundamentación teórica y metodológica, y la Fase 4, de evaluación y conclusiones, son evidentemente transversales a todos los objetivos de investigación planteados. Por otro lado, vemos que los objetivos O1 y O2 se abordan en la Fase 2 (con cada uno de los objetivos correspondiéndose con una de las subfases); mientras que los objetivos O3 y O4 son abordados en la Fase 3 (con el objetivo O3 correspondiéndose con la subfase 3.1 y el objetivo O4 con las subfases 3.2 y 3.3). Finalmente, el objetivo O5 se aborda especialmente en la Fase 4.

A continuación, vamos a proporcionar algunos detalles concretos sobre cada una de las distintas fases.

2.2.1. Fase 1

En esta fase de la investigación se persigue un doble objetivo. En primer lugar, mediante una revisión bibliográfica, pretendemos una puesta al día teórica y metodológica sobre el objeto de estudio y sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje en ámbitos como en el que se va a llevar a cabo la experimentación. Por otro lado, teniendo en cuenta que la experimentación se va a desarrollar en un contexto de aula real y se va a insertar dentro del normal desarrollo del curso escolar (lo que respeta un principio ecológico en el desarrollo curricular), se aborda un estudio del currículo oficial y de algunos libros de texto para ubicar nuestro objeto de estudio dentro de la práctica educativa habitual.

La revisión bibliográfica se ha orientado, como ya se ha mencionado, hacia los distintos aspectos conceptuales relativos a los problemas aritméticos de una etapa y hacia aspectos metodológicos relacionados con la enseñanza de las matemáticas en contextos de riesgo de exclusión social, el aprendizaje dialógico y los grupos interactivos. Esta revisión, cuyos resultados se han presentado ya en el capítulo anterior, han proporcionado herramientas teóricas, metodológicas y analíticas que serán utilizadas de manera significativa en las dos fases siguientes.

Desde el punto de vista teórico, la revisión bibliográfica tiene una influencia directa sobre el desarrollo de la clasificación de problemas aditivos que se utilizará. Desde el punto de vista metodológico, el trabajo de fundamentación se refleja en el diseño de la propuesta didáctica orientada a alumnos de especial dificultad y sobre la organización de las sesiones de clase. Por último, las categorías para el análisis de los datos también se extraen de la revisión bibliográfica realizada. Todos estos aspectos se detallarán más adelante.

Finalmente, teniendo en cuenta que dos de los objetivos planteados suponen el diseño e implementación de una propuesta didáctica, resulta imprescindible realizar un pequeño análisis de la situación de los problemas aditivos de una etapa en la enseñanza habitual, que se presentará en el Capítulo 3 de esta memoria.

Para ello, en primer lugar, se aborda el análisis de currículo oficial (Rico, 1991). En concreto, se ha realizado un análisis del currículo LOMCE de la Comunidad de Madrid tanto de Educación Primaria como Secundaria. Este análisis curricular nos proporcionará información sobre la presencia de los problemas aditivos de una etapa en los distintos niveles educativos que resultará central para valorar la pertinencia de nuestro trabajo.

Por otro lado, Schubring (1987, p. 41) señala que: “la práctica docente no está tan determinada por los decretos ministeriales como lo está por los libros utilizados para la enseñanza”. De hecho, la investigación sobre libros de texto es un tema interesante en sí mismo (Marco-Buzunáriz, Muñoz-Escolano, & Oller-Marcén, 2016) y admite muy diversos enfoques. En nuestro caso, no se trata de uno de nuestros objetivos, por lo que nos hemos limitado a analizar la propuesta de Savia de SM por ser la que mayoritariamente se utiliza en el IES en que se desarrollará la experimentación en una fase posterior.

2.2.2. Fase 2

En esta segunda fase de la investigación se desarrolla una clasificación de problemas aritméticos de una etapa y se lleva a cabo un estudio empírico para recabar información sobre la dificultad de cada uno de los tipos de problemas considerados.

La clasificación que pretendemos abordar se organiza en torno a los siguientes elementos. Algunos de ellos surgen de los antecedentes teóricos estudiados mientras que otros suponen un aporte original:

- Existen dos tipos de cantidades: simples o relacionales (Socas, Hernández & Noda, 1998)
- En los problemas hay dos cantidades conocidas (datos) una o varias cantidades desconocidas (Puig & Cerdán, 1988).
- Las cantidades desconocidas son de dos clases: cantidades desconocidas que intervienen en el problema pero que ni son datos ni son la incógnita buscada (y que, además, no pueden ser calculadas) y una cantidad desconocida que es la solución buscada en el problema.
- La relación que se establece entre las cantidades puede ser de tres tipos: unión, comparación y transformación.

Estos cuatro factores articularán la clasificación que se presentará en el Capítulo 4 de esta memoria.

Una vez desarrollada la clasificación que vamos a utilizar, la segunda parte de esta fase de investigación consiste en un estudio empírico que permita obtener información sobre la dificultad relativa de cada uno de los tipos de problemas, medida a través de los errores cometidos por los alumnos, y sobre las estrategias utilizadas de forma espontánea por los alumnos (Verschaffel & De Corte, 1997).

Para llevar a cabo este estudio, se realizaron una serie de pruebas. Todas ellas se desarrollaron en el IES Vallecas Magerit. En la Tabla 2.1 se proporciona la información relativa a cada una de las pruebas en cuanto a su extensión, número de participantes y fechas de realización.

Inicialmente se lleva a cabo una prueba piloto inicial en la que se incluyen 10 problemas diferentes. Con esta prueba se pretende un primer acercamiento en el que valorar aspectos como la implicación de los alumnos en su realización o el tiempo que necesitan para resolver los problemas. Tras esta prueba piloto se desarrolló una batería de pruebas en la que los problemas incluidos se definen en base a las dos variables siguientes:

- Tipo de problema: cada uno de los 33 tipos de la clasificación desarrollada.
- Tipo de número: los datos del problema pueden ser números naturales, fraccionarios o decimales.

<table>
<tr><th colspan="2"></th><th>Número de alumnos</th><th>Número de problemas</th><th>Fecha</th></tr>
<tr><td colspan="2">Prueba piloto</td><td>14</td><td>10</td><td>09/06/2014</td></tr>
<tr><td colspan="2">Prueba 1</td><td>22</td><td>9</td><td>12/03/2015</td></tr>
<tr><td colspan="2">Prueba 2</td><td>18</td><td>12</td><td>26/03/2015</td></tr>
<tr><td colspan="2">Prueba 3</td><td>15</td><td>9</td><td>17/06/2015</td></tr>
<tr><td colspan="2">Prueba 4</td><td>18</td><td>3</td><td>25-30/09/2015</td></tr>
<tr><td colspan="2">Prueba 5</td><td>14</td><td>15</td><td>21/09/2016</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pruebas 6 y 7</td><td>17</td><td>12</td><td>28/10/2016</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Pruebas 8 y 9</td><td>Parte 1</td><td>18</td><td>8</td><td>10/01/2017</td></tr>
<tr><td>Parte 2</td><td>16</td><td>3</td><td>27/02/2017</td></tr>
<tr><td>Parte 3</td><td>18</td><td>4</td><td>08/03/2017</td></tr>
<tr><td>Parte 4</td><td>19</td><td>3</td><td>16/03/2017</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Prueba 10</td><td>Parte 1</td><td>19</td><td>3</td><td>24/03/2017</td></tr>
<tr><td>Parte 2</td><td>19</td><td>3</td><td>31/03/2017</td></tr>
<tr><td>Parte 3</td><td>19</td><td>3</td><td>24/4/2017</td></tr>
<tr><td>Parte 4</td><td>16</td><td>3</td><td>28/04/2017</td></tr>
<tr><td>Parte 5</td><td>19</td><td>3</td><td>03/05/2017</td></tr>
<tr><td>Parte 6</td><td>18</td><td>3</td><td>04/05/2017</td></tr>
<tr><td>Parte 7</td><td>19</td><td>3</td><td>05/05/2017</td></tr>
</table>

Tabla 2.1. Información sobre las pruebas diagnósticas.

En consecuencia, como vemos en la Tabla 2.1, el número total de problemas planteados en las pruebas es de 99. Esto explica, además, la necesidad de plantear estas pruebas a lo largo de un periodo relativamente largo de tiempo para evitar la saturación de los alumnos participantes en las mismas.

Se analizaron las producciones de los alumnos desde el punto de vista cuantitativo y cualitativo. Cuantitativamente se estudiaron tres variables dicotómicas (que toman los valores correcto o incorrecto): estructura, operación y algoritmo. Las dos primeras se corresponden con los errores identificados por Vondrová, Novotná y Havlíčková (2019) mientras que la tercera se corresponde con aspectos meramente procedimentales. Cuando las tres variables toman el valor 'Correcto' se considera que el problema ha sido resuelto de forma correcta. Las distintas estrategias utilizadas espontáneamente se determinaron de manera emergente a partir de un análisis cualitativo de las respuestas. En la Tabla 2.2 se proporciona la información más relevante en relación con las variables del análisis.

Variable	**Categorías**	**Informa sobre**
Estructura	Correcto / Incorrecto	Identificación por parte del alumno del carácter aditivo del problema
Operación	Correcto / Incorrecto	Selección por parte del alumno de la operación adecuada para resolver el problema
Algoritmo	Correcto / Incorrecto	Aplicación del algoritmo para el cálculo de la solución del problema
Estrategia	Emergentes	Estrategia utilizada por el alumno para resolver el problema

Tabla 2.2. Variables para el análisis de los problemas de las pruebas diagnósticas.

Además de para obtener una primera aproximación a la dificultad de los distintos tipos de problemas, los resultados obtenidos en esta fase se utilizarán a modo de “grupo de control” (Singh, 2007) para poder evaluar el éxito de la propuesta que implementamos en la siguiente fase del trabajo. Para ello, las categorías de análisis en las pruebas de evaluación de la fase siguiente serán las mismas que acabamos de describir.

2.2.3. Fase 3

Teniendo en cuenta el carácter cíclico e iterativo inherente al proceso de diseño de secuencias didácticas (Collins, Joseph & Bielaczyc, 2004), se llevaron a cabo dos ciclos de experimentación. Ambos tuvieron lugar con alumnos de 2º de E.S.O. en el IES Vallecas Magerit de Madrid. La Tabla 2.3 muestra información de cada uno de los ciclos.

	Número de sesiones	Número de alumnos	Fechas
Ciclo 1	6	19	Mayo y junio de 2017
Ciclo 2	9	27	Noviembre y diciembre de 2017

Tabla 2.3. Información sobre los ciclos de experimentación.

En ambos ciclos de experimentación se ha optado por seguir un modelo de tipo “inclusión” (Cifuentes, Torrego & Siles, 2012) tratando de seguir buenas prácticas relacionadas con la enseñanza de las matemáticas en contexto de exclusión (Ritacco Real, 2012).

De este modo, el uso de grupos interactivos contribuye de forma importante a la implicación y cercanía en el aprendizaje. Además, cabe señalar que la participación de voluntarios fomenta aspectos clave como la comunicación en el aula y la atención individualizada. En el diseño de las actividades realizadas (y de la secuencia global) se ha perseguido obtener aprendizajes significativos y, finalmente, el uso de materiales manipulativos es un elemento fundamental en ambos ciclos.

Respecto al uso de materiales, planteamos el uso tanto de materiales estructurados como no estructurados. En cuanto a los no estructurados, se utilizarán bloques de construcción, billetes y monedas de euro (ficticios), lápices o bolígrafos y legumbres. Los materiales estructurados que utilizaremos con mayor frecuencia son piezas de cartulina representando fracciones y cajitas Liro. (Tavares, 2012). También se hará un uso bastante importante de esquemas gráficos de cajitas Liro que actúan al modo de los “schematic drawings” planteados por Willis y Fuson (1988) y por Ramos, Castro y Castro-Rodríguez (2016).

En el primer ciclo se plantean 4 sesiones de trabajo en grupos interactivos, precedidas por una sesión introductoria de clase en gran grupo y seguidas de una prueba final que sirve para evaluar tanto a los alumnos como el funcionamiento de la propuesta didáctica. Las conclusiones obtenidas de análisis del primer ciclo se revierten en el rediseño del segundo ciclo en el que se alternaron las sesiones de trabajo en grupos interactivos con sesiones de trabajo de refuerzo en el aula, razón por la que se aumentó el número de sesiones. Pese a este aumento en el número de sesiones, se ha intentado que la duración de la propuesta permita su inclusión en la programación de la asignatura sin ocasionar problemas en su desarrollo.

Durante los ciclos de experimentación se generan datos a partir de dos fuentes, fundamentalmente. Por un lado, se dispone de información documental obtenida a partir de la digitalización de las producciones de los alumnos (tanto las correspondientes a las sesiones de clase, como las relativas a las pruebas finales de evaluación). Por otro lado, también se dispone de la información obtenida a partir de las observaciones de la profesora-investigadora durante el desarrollo de las sesiones.

El análisis de los datos generados en esta fase es de carácter mixto, en función del momento en que se generaron dichos datos. Mientras que los datos generados en las sesiones de trabajo en el aula (ya sea en sesiones de grupos interactivos o de clase) se han analizado de forma esencialmente cualitativa, los datos generados en las pruebas finales de evaluación se analizan de forma esencialmente cuantitativa.

El análisis cualitativo de las producciones de los alumnos durante las sesiones de clase es de un carácter exploratorio e interpretativo y se orienta, por una parte, hacia la comprensión de los errores cometidos por los alumnos y, por otra, hacia la determinación de estrategias utilizadas de manera espontánea por los alumnos. También se prestará atención a la presencia de errores procedimentales relacionados con la aplicación de algoritmos de cálculo. El análisis cuantitativo de las producciones asociadas a las pruebas de evaluación se organiza en torno a las mismas variables y categorías utilizadas en la fase anterior (recordar Tabla 2.2) para, de este modo, poder realizar comparativas entre los resultados obtenidos en las pruebas diagnósticas (que, como dijimos, actúan aquí a modo de grupo de control) y los obtenidos tras la implementación de la prueba final.

2.2.4. Fase 4

La última fase supone la evaluación del trabajo realizado, la presentación de las conclusiones principales (organizadas en función de los cuatro objetivos de investigación planteados) y el planteamiento de líneas futuras de trabajo sugeridas por la investigación realizada.

En lo que respecta a la propuesta diseñada e implementada, la evaluación de los resultados obtenidos en el segundo siclo de implementación se llevó a cabo según un doble plano, atendiendo por un lado a aspectos relacionados con el contenido matemático trabajado y por otro a aspectos relativos a la metodología docente utilizada.

Para evaluar la propuesta desde el punto de vista de la comprensión del contenido, se compararon los resultados obtenidos en la prueba de evaluación realizada en la última sesión con los resultados obtenidos en las pruebas diagnósticas. Adicionalmente, para obtener una visión más a largo plazo, se realizó una comparativa entre los resultados obtenidos por los alumnos en la propuesta y los resultados de esos mismos alumnos en la evaluación final global del curso.

Por último, queremos prestar especial atención a las potencialidades de la metodología docente utilizada. Por ello, para evaluar la propuesta desde el punto de vista de la metodología docente utilizada, se diseñó un cuestionario para la valoración del uso de grupos interactivos por parte de los alumnos participantes (ver Anexo IV) que se analizó en esta última fase. En ese cuestionario, se trata de obtener información sobre dos aspectos, fundamentalmente:

- Sobre aspectos relativos a la opinión de los alumnos sobre la metodología, organización y funcionamiento de las sesiones de clase (preguntas 1, 6, 7, 8 y 9).
- Sobre aspectos actitudinales y afectivos (Gil, Blanco & Guerrero, 2005) vinculados a su trabajo en los grupos y relacionados con elementos como su autoconcepto, interés, ansiedad, etc. (preguntas 2, 3, 4, 5)

Los resultados obtenidos en estas dos dimensiones pueden ser utilizados en posteriores ciclos de implementación y motivan en cierta medida algunas de las líneas futuras de trabajo que se plantean.

2.3. Criterios de calidad

Rico, Sierra y Castro (2002) recogen una serie de criterios de calidad provenientes del ámbito de la investigación en educación (y en ciencias sociales en general), pero particularizados al ámbito de la didáctica de las matemáticas (ver Tabla 2.4).

Criterio	Explicitación
Pertinencia	¿Para qué o para quién es importante la investigación? ¿Qué se va a mejorar? ¿Qué utilidad va a tener?
Validez	¿Cómo se justifica la interpretación que se hace de la investigación? ¿qué consecuencias se derivan?
Objetividad	¿Hasta qué punto es posible refutar las conclusiones y argumentos utilizados?
Originalidad	¿Hasta qué punto la investigación muestra ideas conocidas en una nueva perspectiva?
Rigor y precisión	¿Qué precisión tienen las observaciones realizadas? ¿Con qué exigencias se han llevado a cabo? ¿Qué precisión tienen los criterios para interpretar las informaciones obtenidas?
Predictibilidad	¿Qué explicación se deriva del estudio? ¿Qué comprensión proporciona? ¿Hasta qué punto se anticipan las actuaciones de alumnos y profesores?
Replicabilidad	¿Están claramente descritos los procedimientos utilizados? ¿Sería posible para otro investigador replicar el estudio? ¿Es pública la totalidad de la información?
Conexiones	¿De qué modo está relacionado el estudio con la matemática y con la educación?

Tabla 2.4. Criterios de calidad (Rico, Sierra & Castro, 2002, p. 54).

Como estos mismos autores señalan, los criterios de rigor y precisión y replicabilidad se vinculan con aspectos metodológicos, los criterios de validez, objetividad y conexiones se orientan hacia la evaluación del marco teórico y, finalmente los criterios de pertinencia y predictibilidad tratan de evaluar la coherencia del trabajo.

El criterio de originalidad, como es natural, implica la ubicación del trabajo en un corpus de conocimiento más amplio.

En nuestra investigación, hemos tenido en consideración estos criterios de calidad y pensamos que se han logrado cumplir en buena medida. En concreto:

- Respecto a los criterios relativos a aspectos metodológicos (rigor y precisión y replicabilidad), pensamos que la investigación ha sido rigurosa y precisa ya que se ha seguido una metodología de investigación clara, se han utilizado unos instrumentos de recogida de datos adecuados al tipo de investigación y estos datos se han analizado en base a unas variables y categorías bien definidas. Por su parte, la replicabilidad del estudio está garantizada puesto que el diseño global, tanto de la investigación en sí como de la fase de experimentación, se ha proporcionado explícitamente.
- En cuanto a los criterios que se orientan hacia la evaluación del marco teórico (validez, objetividad y conexiones), pensamos que también están garantizados. El trabajo que hemos llevado a cabo (tanto el de carácter teórico como el de carácter experimental) se sustenta en unos antecedentes teóricos sólidos y bien aceptados y las conclusiones se articulan en torno a ellos. Además, el estudio realizado se relaciona de forma clara con campos de investigación importantes tanto de la educación matemática (pensamiento numérico) como del ámbito educativo general (enseñanza en contextos de especial dificultad, aprendizaje dialógico).
- Los criterios que evalúan la coherencia del trabajo (pertinencia y predictibilidad) están también cubiertos. La investigación tiene utilidad tanto teórica (por la clasificación de problemas aditivos de una etapa que se desarrolla) como sobre la práctica educativa, puesto que se diseña una secuencia didáctica que puede resultar de interés en otros ámbitos similares a aquel en que la hemos implementado. Además, se proporcionan resultados sobre la dificultad de los problemas que pueden servir de base para posteriores investigaciones.
- El criterio de originalidad, por último, también se cumple puesto que, por un lado, nuestra clasificación teórica tiene en consideración de forma novedosa aspectos ya considerados previamente y, por otro, la fase experimental es plenamente original.

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS ADITIVOS DE UNA ETAPA EN LA ENSEÑANZA ACTUAL

En este capítulo vamos a presentar una breve revisión de la presencia de los problemas aditivos de una etapa en la práctica educativa actual. Para ello, como se ha indicado en el capítulo dedicado a la metodología, vamos a desarrollar la primera fase metodológica descrita: revisar los documentos oficiales relevantes (en nuestro caso, los correspondientes al currículo de la Comunidad de Madrid, porque éste es el ámbito geográfico en el que se desarrolla la investigación) y también realizaremos un pequeño análisis de la propuesta editorial utilizada en el centro en que se llevó a cabo la fase experimental de esta tesis. Esta revisión se hace en el marco de los problemas aritméticos descrito en el capítulo 1 y se tienen en cuenta las características que le son propias y que nos ayudarán a clasificar los tipos de problemas encontrados.

3.1. Currículo LOMCE de Matemáticas

En este punto analizaremos el currículo de Matemáticas de toda la educación obligatoria en la LOMCE. En la vigente ley educativa y en la concreción del currículo por parte de la Comunidad de Madrid, aparecen referencias a números naturales y racionales, a problemas aditivos de una etapa y en general a resolución de problemas tanto en Educación Primaria como en la Educación Secundaria Obligatoria como contenidos específicos de los currículos correspondientes.

3.1.1. Educación Primaria

El documento oficial en este caso es el DECRETO 89/2014, de 24 de julio, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el Currículo de la Educación Primaria[1].

La Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa[2] (LOMCE, en adelante), modifica en su artículo único la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE, en adelante)

---

[1] B.O.C.M. Núm. 175; pp. 10-19, 45-58

[2] B.O.E. Núm. 295 Sec. I.; pp. 97858-97921

El área de Matemáticas pertenece al bloque de las asignaturas troncales. Por ello, los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables para toda la etapa de Primaria son los propuestos por el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte en el Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria[3]. Este currículo no está dividido por cursos y hace referencia a toda la Educación Primaria en su conjunto.

En este Real Decreto se indica que "Los procesos de resolución de problemas constituyen uno de los ejes principales de la actividad matemática y deben ser fuente y soporte principal del aprendizaje a lo largo de la etapa, puesto que constituyen la piedra angular de la educación matemática."[4] Este punto se concreta con varios Contenidos[5], entre ellos: "Planificación del proceso de resolución de problemas" dentro de este punto encontramos: "Estrategias y procedimientos puestos en práctica: hacer un dibujo, una tabla, un esquema de la situación, ensayo y error razonado, operaciones matemáticas adecuadas, etc.". En paralelo a estos contenidos, se detallan diversos Criterios de Evaluación. El que ocupa el número dos es: "Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas". Asociado a este criterio de Evaluación aparece el Estándar de aprendizaje Evaluable 2.2. "Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas".

Continuando con los contenidos que afectan a nuestro estudio, en el Bloque 2: Números, aparece el punto : "Números enteros, decimales y fracciones" y operaciones con estos tipos de números. Con criterios de evaluación referentes a la realización de operaciones y resolución de problemas con ellos. Entre los Estándares de aprendizaje Evaluables, nos gustaría resaltar el siguiente: "8.1. Utiliza y automatiza algoritmos estándar de suma, resta, multiplicación y división con distintos tipos de números, en comprobación de resultados en contextos de resolución de problemas y en situaciones cotidianas."

La Comunidad de Madrid complementa los contenidos y los distribuye, junto con los estándares de aprendizaje evaluables, para cada uno de los seis cursos que conforman este nivel educativo de manera que se adecúen a la edad del alumno y al grado de capacidad que este alcanza en cada momento de su trayectoria escolar.

En el B.O.C.M 89/2014, de 24 de julio donde se concretan los Contenidos, Criterios de Evaluación y Estándares de Aprendizaje Evaluables planteados por el B.O.E. 126/2014, de 28 de febrero para la Comunidad de Madrid, se dividen estos contenido y estándares de aprendizaje entre los seis cursos de Educación Primaria; pero la Comunidad de Madrid en el área de Matemáticas no separa entre contenidos, Criterios de Evaluación y Estándares de Aprendizaje (como sí que hace en otras áreas). En la Tabla 3.1 se resume la aparición de los contenidos en cada curso de Educación Primaria.

[3] B.O.E. Núm. 52 Sec. I.; pp. 19349-19420
[4] B.O.E. Núm. 52 Sec. I.; p. 19386
[5] B.O.E. Núm. 52 Sec. I.; pp. 19388-19390

	Números naturales	Números decimales	Fracciones	Problemas aditivos de una etapa	Problemas aditivos de varias etapas
1º Primaria	x			x	
2º Primaria	x			x	x
3º Primaria	x			x	x
4º Primaria	x	x	x		x
5º Primaria	x	x	x		
6º Primaria	x	x	x		

Tabla 3.1. Presencia de los distintos contenidos en Educación Primaria.

A continuación se detalla esta presencia de manera concreta en cada uno de los cursos de esta etapa educativa. Como podemos observar los problemas aditivos de una etapa solo aparecen en los tres primeros cursos de Educación Primaria. En quinto curso el currículo solo hace referencia a problemas con medidas angulares y con tiempos. En sexto curso, el currículo contempla problemas concernientes a los siguientes contenidos: porcentajes, regla de tres, unidades de medida, relaciones métricas y utilizando la media aritmética; todos los cuales exceden el ámbito de estudio de esta tesis doctoral. En todos los cursos, las referencias a los problemas aditivos se contemplan en el bloque denominado “Números y operaciones”. A continuación se explicitan estos pasajes literalmente en cada uno de los cursos.

3.1.1.1. Primer curso[6]

Números naturales menores que 100. Nombre, grafía y ordenación Descomposición aditiva según el valor posicional de sus cifras.

> 10. Resuelve problemas que implican una sola orden y una operación de suma o resta.

3.1.1.2. Segundo curso[7]

Operaciones con números naturales menores que 1.000. Adición y sustracción.

> 11. Resuelve problemas sencillos relacionados con la vida diaria que impliquen una o dos operaciones de suma y resta.

3.1.1.3. Tercer curso[8]

Operaciones con números naturales. Adición y la sustracción.

> 9. Resuelve problemas de una o dos operaciones de suma y resta.

[6] B.O.C.M. Núm. 175; p. 46
[7] B.O.C.M. Núm. 175; p. 47
[8] B.O.C.M. Núm. 175; p. 49

3.1.1.4. Cuarto curso[9]

Operaciones con números naturales menores que 100.000. Suma, Resta, multiplicación y división. Iniciación a las fracciones. Iniciación a los números decimales. Equivalencia entre fracciones y decimales.

9. Resuelve problemas sencillos de la vida cotidiana que involucran dos de las cuatro operaciones.

3.1.1.5. Quinto curso[10]

Fracciones y decimales.

21. Establece la relación entre decimal y fracción (con decimales finitos).

Operaciones con números naturales y decimales. Adición y sustracción de fracciones con igual denominador.

37. Utilización de la calculadora para paso de fracción a decimal.

3.1.1.6. Sexto curso[11]

Operaciones con fracciones.

12. Suma y resta fracciones con el mismo denominador.

Números decimales. Ordenación y redondeo de números decimales. Expresión decimal de una fracción.

19. Escribe la expresión decimal de una fracción, redondeando el resultado de la división, en su caso, hasta las milésimas.

Operaciones números naturales y decimales.

28. Automatiza el algoritmo de la suma y la resta con números naturales y decimales.

3.1.2. Educación Secundaria Obligatoria

El documento oficial en este caso es el DECRETO 48/2015, de 14 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria[12].

El decreto señala la necesidad de elaborar estrategias de resolución de problemas y establece la resolución de problemas como uno de los ejes fundamentales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Indicando que la "habilidad de formular, plantear, interpretar y resolver problemas es una de las capacidades esenciales de la actividad matemática, ya que permite a las personas emplear los procesos cognitivos para abordar y resolver situaciones interdisciplinares reales, lo que resulta de máximo interés para el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico. En este proceso de resolución e investigación están involucradas muchas otras competencias, además de la matemática, entre otras, la comunicación lingüística, al leer de forma

[9] B.O.C.M. Núm. 175; p. 51
[10] B.O.C.M. Núm. 175; p. 53
[11] B.O.C.M. Núm. 175; p. 56
[12] B.O.C.M. Núm. 118; pp. 10-309

comprensiva los enunciados y comunicar los resultados obtenidos; el sentido de iniciativa y emprendimiento al establecer un plan de trabajo en revisión y modificación continua en la medida que se va resolviendo el problema; la competencia digital, al tratar de forma adecuada la información y, en su caso, servir de apoyo a la resolución del problema y comprobación de la solución; o la competencia social y cívica, al implicar una actitud abierta ante diferentes soluciones"[13].

Hay un primer bloque común a todos los cursos de ESO denominado "Procesos, métodos y actitudes en matemáticas". Este bloque se centra en la resolución de problemas, tanto en su planteamiento, como en su desarrollo. Señala la importancia del uso de un lenguaje adecuado y de la reflexión sobre los resultados. También destaca el uso de estrategias de resolución de problemas[14]. En nuestro estudio nos planteábamos si nuestros alumnos utilizaban estrategias de resolución de problemas y en la propuesta didáctica les ofreceremos algunas.

En la Tabla 3.2 se indican los contenidos que afectan a los problemas aditivos de una etapa con números naturales y racionales en cada uno de los cursos de ESO al margen de lo referido en el mencionado bloque común. En su mayor parte, las referencias a problemas aditivos de una etapa aparecen vinculadas, como en Primaria al bloque denominado "Números y álgebra".

	Números naturales	Números decimales	Fracciones	Resolución de problemas
1º E.S.O.	x	x	x	x
2º E.S.O.	x	x	x	x
3º E.S.O.		x	x	x
4º E.S.O.				x

Tabla 3.2. Presencia de los distintos contenidos en ESO.

3.1.2.1. Matemáticas 1º y 2º ESO

Entre los contenidos de 1º y 2º de ESO encontramos números enteros, números racionales y operaciones con números racionales[15]. Sobre estos contenidos, el currículo considera los siguientes criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables[16]:

1. Utilizar números naturales, enteros, fraccionarios, decimales y porcentajes sencillos, sus operaciones y propiedades para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria.
    1.3. Emplea adecuadamente los distintos tipos de números y sus operaciones, para resolver problemas cotidianos contextualizados, representando e interpretando mediante medios tecnológicos, cuando sea necesario, los resultados obtenidos.

[13] B.O.C.M. Núm. 118; p. 95
[14] B.O.C.M. Núm. 118; p. 100
[15] B.O.C.M. Núm. 118; pp. 97
[16] B.O.C.M. Núm. 118; pp. 102

3.1.2.2. Matemáticas 3º y 4º ESO

En este apartado nos referimos a las materias de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 3º E.S.O, Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas de 3º E.S.O, Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 4º E.S.O y Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas de 4º E.S.O. En estas cuatro materias el Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas, en lo que afecta a nuestro estudio se completa con:

3º ESO materias de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 3º E.S.O y Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas de 3º E.S.O. En ambas materias aparecen como contenido los números racionales y los siguientes criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables que consideramos interesantes para nuestro estudio; pero con distinta numeración, por eso hemos indicado primero la numeración correspondiente a Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas y entre paréntesis la correspondiente a Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas[17].

1. (1) Utilizar las propiedades de los números racionales para operarlos, utilizando la forma de cálculo y notación adecuada, para resolver problemas de la vida cotidiana, y presentando los resultados con la precisión requerida.
    1.8. (1.6) Expresa el resultado de un problema, utilizando la unidad de medida adecuada, en forma de número decimal, redondeándolo si es necesario con el margen de error o precisión requeridos, de acuerdo con la naturaleza de los datos.
    1.10. (1.8) Emplea números racionales para resolver problemas de la vida cotidiana y analiza la coherencia de la solución.

4º ESO materias de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 4º E.S.O y Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas de 4º E.S.O[18].

1. Números reales. (Excede del tema de estudio)

3.1.3. Reflexiones

Ni en el en el Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero ni en el decreto 48/2015, de 14 de mayo se nombran de forma específica los problemas aditivos de una etapa. En el decreto 89/2014, de 24 de julio solo en los tres primeros cursos de primaria se nombran expresamente estos problemas. Aunque la legislación vigente sí que indica la importancia de la resolución de problemas, haciendo referencia a ello en todos los cursos de Educación Primaria y en un bloque común a todos los cursos de Educación Secundaria. Sin embargo en estos problemas no es especifican los problemas aditivos de una etapa, salvo, como ya hemos indicado en los tres primeros cursos de Educación Primaria.

Respecto al tipo de números considerados en los currículos, los números naturales aparecen en todos los cursos de primaria y en 1º y 2º de ESO, los números

[17] B.O.C.M. Núm. 118; pp. 110, 123 y 124
[18] B.O.C.M. Núm. 118; pp. 113, 127.

racionales, tanto en su forma decimal como en su forma fraccionaria, desde 4º de Primaria hasta 3º de ESO. Estos conceptos siempre van acompañados de estándares referentes a la resolución de problemas con ellos.

Tanto en el Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero[19], como en los decretos 89/2014, de 24 de julio[20] y 48/2015, de 14 de mayo[21] aparece como punto importante la resolución de problemas. En relación con nuestro trabajo, es interesante destacar la aparición en el Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, donde se regula la Educación Primaria, del criterio de evaluación “Estrategias y procedimientos puestos en práctica: hacer un dibujo, una tabla, un esquema de la situación, ensayo y error razonado, operaciones matemáticas adecuadas, etc.”. En paralelo a estos contenidos, se detallan diversos Criterios de Evaluación. El que ocupa el número dos es: “Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas”. Asociado a este criterio de Evaluación aparece el Estándar de aprendizaje Evaluable 2.2. “Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas”. A su vez en el decreto 48/2015, de 14 de mayo donde se regula la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Madrid también hace especial énfasis en las estrategias de resolución de problemas.

3.2. Presencia de los problemas aditivos de una etapa en los libros de texto

Vamos a analizar la propuesta didáctica completa de una editorial concreta para toda la educación obligatoria. Con este propósito hemos escogido la propuesta de la editorial SM que se comercializa con el nombre de Savia. Esta elección está motivada por ser la propuesta que mayoritariamente se utiliza en el IES donde se llevará a cabo la fase experimental de esta investigación.

3.2.1. Análisis de la propuesta didáctica ‘Savia’ de SM

En el primer curso de Educación Primaria se plantean un total de 107 problemas aditivos de una etapa, siendo la gran mayoría problemas en los que los datos son cantidades simples y se pide calcular su unión, comparación o transformación. Un ejemplo de este tipo de problemas se reproduce en la Figura 3.1.

[19] B.O.E. Núm. 52, Sec. I.; pp. 19349-19420
[20] B.O.C.M. Núm. 175; pp. 10-19, 45-58
[21] B.O.C.M. Núm. 118; pp. 10-309

Figura 3.1. Ejemplos de problemas de unión de cantidades simples (reproducidos de Savia SM. 1º Primaria)

En 2º y 3º de Primaria aparecen 60 y 48 problemas aditivos de una etapa respectivamente. En este caso, además de problemas como los señalados anteriormente, aparecen problemas en los que un dato y la incógnita son cantidades simples siendo el otro dato una unión, comparación o transformación de esas cantidades simples (ver Figura 3.2, por ejemplo).

Figura 3.2. Problema de unión de cantidades simples con la unión como dato y una cantidad simple como incógnita (reproducido de Savia SM. 3º Primaria)

La frecuencia de enunciados de este tipo se reduce en 4º de Primaria manteniéndose en los mismos niveles durante 5º curso y cayendo a 14 y 6 problemas durante 6º y 1º de ESO. En estos cursos superiores, además de aparecer problemas con números naturales, aparecen problemas con enteros, con decimales, que en muchas ocasiones están planteados en el contexto del trabajo con unidades del Sistema Métrico Decimal (ver la Figura 3.3 y la Figura 3.4, por ejemplo), y con fracciones.

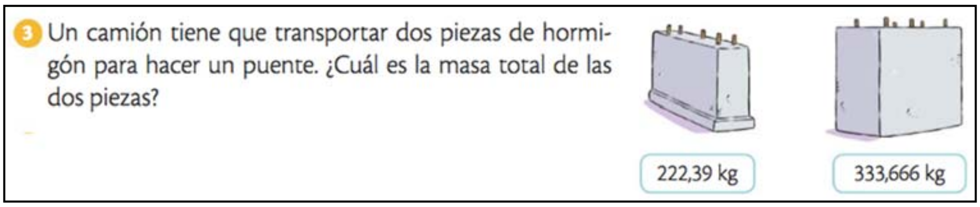


Figura 3.3. Problema de unión de cantidades simples vinculado al SMD (reproducido de Savia SM. 4º Primaria)

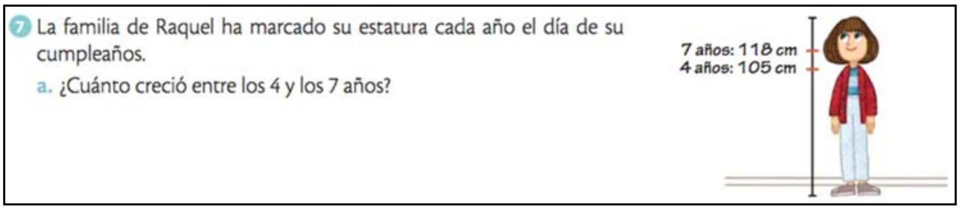


Figura 3.4. Problema de transformación de cantidades simples vinculado al SMD (reproducido de Savia SM. 6º Primaria)

En la Tabla 3.3 resumimos la aparición de cada tipo de problema desde 1º de Primaria hasta 1º de la ESO. Los distintos tipos de problemas encontrados son:

- A: Los datos son cantidades simples y la incógnita es la unión de las mismas.
- B: Los datos son cantidades simples y la incógnita es la comparación de las mismas.
- C: Los datos son cantidades simples y la incógnita es la transformación de las mismas.
- D: Los datos son la unión de dos cantidades simples y una de ellas y la incógnita en la otra cantidad simple.
- E: Los datos son la comparación de dos cantidades simples y una de ellas y la incógnita en la otra cantidad simple.
- F: Los datos son la transformación de dos cantidades simples y una de ellas y la incógnita en la otra cantidad simple.
- Otros: Ninguno de los anteriores (ver Figura 3.5, por ejemplo).

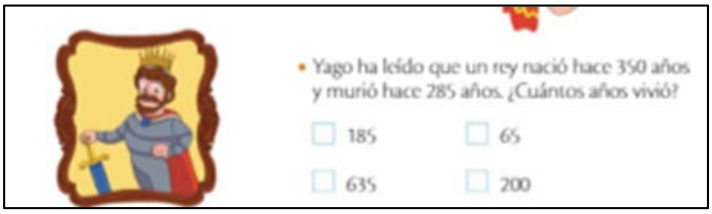


Figura 3.5 Problema que no pertenece a ninguno de los tipos detallados (reproducido de Savia SM. 2º Primaria)

	A	B	C	D	E	F	Otros	Total
1º EP	41	19	26	7	10	4		**107**
2º EP	16	13	9	8	7	5	2	**60**
3º EP	15	10	4	4	3	11	1	**48**
4º EP	11	8	7	1		5		**32**
5º EP	6	12	9	3		4		**34**
6º EP	1	4	4	1		4		**14**
1º ESO	1	1	1			3		**6**

Tabla 3.3. Frecuencia de aparición de los distintos tipos de problemas en los libros de texto analizados.

En la Figura 3.6 se ha representado la frecuencia de aparición de los distintos tipos de problemas en los cursos de 1º de Primaria a 1º de ESO. Se puede apreciar de forma más evidente el rápido y progresivo descenso en el número de problemas aditivos de una etapa que desaparecen después de 1º de ESO.

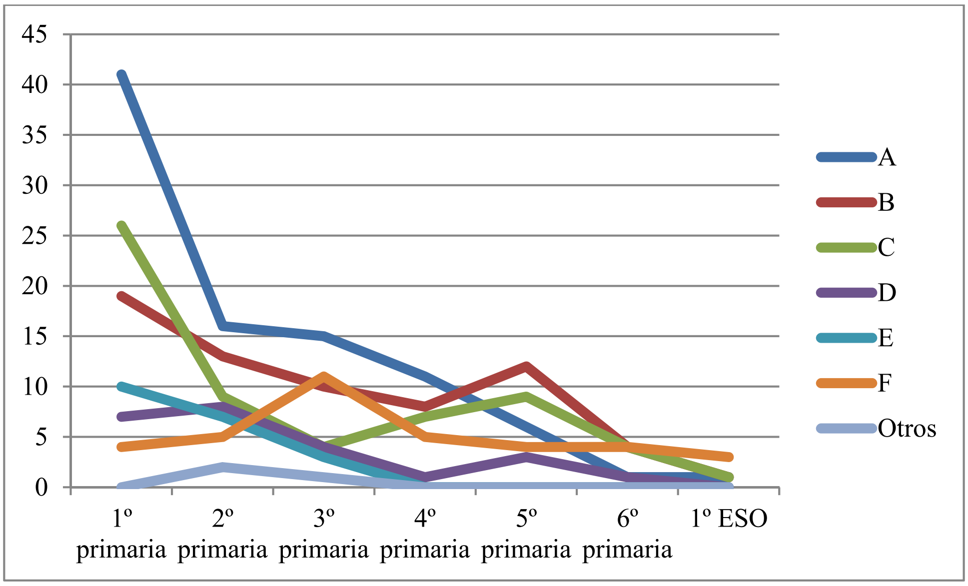


Figura 3.6. Distribución por cursos de los tipos de problemas que aparecen en los libros de texto de matemáticas analizados.

3.2.2. Reflexiones

En la propuesta didáctica Savia de SM, en los primeros cursos de primaria aparecen con frecuencia los problemas aditivos de una etapa (ver punto 1.2.1) en línea con el Currículo oficial. A partir de 4º de primaria, la presencia de este tipo de problemas es sustituida por la aparición de problemas aritméticos de varias etapas, llegándose a convertir en anecdótica en 1º de ESO y en prácticamente inexistente a partir de entonces (Figura 3.7).

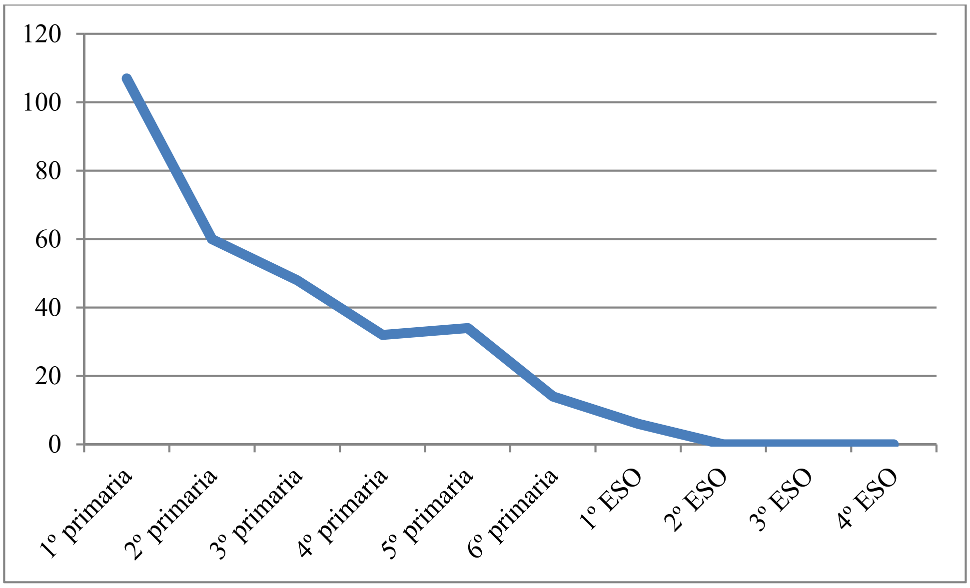


Figura 3.7. Número total de problemas de una etapa que aparecen en la propuesta editorial analizada.

Otro punto destacable es la poca variedad de estos problemas que aparece. Únicamente aparecen en la propuesta analizada problemas que involucran cantidades simples y, de hecho, de los 301 problemas que se han analizado tan solo 1 involucra cantidades que no pueden calcularse y que no son necesarias en el problema. En concreto, es el siguiente (reproducido de Savia SM. 2º Primaria): "Yago ha leído que un rey nació hace 350 años y murió hace 285 años. ¿Cuántos años vivió?". En este problema, los datos son las transformaciones entre dos cantidades simples desconocidas (año "actual" y año de nacimiento y muerte, respectivamente).

Además, hay dos problemas cuyo planteamiento pensamos que es incorrecto y que, por ello, se clasificaron como "otros". En concreto, son los siguientes:

- Del pueblo de Marta al pueblo de Berta hay 53 km. Del pueblo de Berta al de Marcos hay 17 km. ¿Cuántos kilómetros hay desde el pueblo de Marta hasta el de Marcos? (reproducido de Savia SM. 2º Primaria)
- Ver Figura 3.8 (en la señal aparece: Badajoz 281 y Lisboa 507".

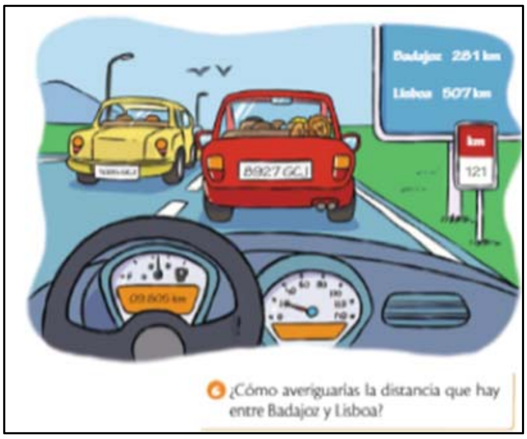


Figura 3.8. Problema que no pertenece a ninguno de los tipos detallados (reproducido de Savia SM. 3º Primaria)

Llama la atención que pese a tratarse previsiblemente de problemas de una mayor dificultad para los alumnos, éstos aparecen en 2º y 3º de Primaria.

El currículo oficial de la Comunidad de Madrid nombra de forma expresa los problemas aditivos de una etapa para 1º, 2º y 3º de Primaria; esto se ve reflejado en la propuesta de Savia de SM con 107, 60 y 48 problemas de este tipo respectivamente. A partir de ese momento estos problemas no vuelven a aparecer en el currículo y de manera sucesiva van desapareciendo de la propuesta. La Comunidad, en ningún momento especifica qué tipo de problemas, con qué tipo de cantidades o relaciones tratar, así esta propuesta didáctica opta por trabajar, prácticamente siempre con problemas que involucren cantidades simples.

Este currículo hace especial hincapié en la resolución de problemas y en las estrategias de resolución, la editorial salva ese punto en Educación Primaria añadiendo a cada unidad un punto denominado "Resuelvo Problemas" en 1º y 2º de Primaria y "Grandes estrategias" en 3º, 4º, 5º y 6º de primaria donde se les facilitan estrategias de resolución de problemas. Ninguno de los problemas que aparecen en "Grandes estrategias" es aditivo de una etapa. En Educación Secundaria, en todos los cursos, tras cada unidad aparece un punto llamado "Ponte a prueba" en el que primero aparece un problema resuelto y después se plantea uno o varios problemas con similitudes con el anterior.

CAPÍTULO 4. CLASIFICACIÓN DE PROBLEMAS ADITIVOS DE UNA ETAPA

En este capítulo vamos a presentar la clasificación de problemas aditivos de una etapa que hemos desarrollado para el marco de nuestro trabajo. En primer lugar fundamentamos, describimos y presentamos la clasificación propiamente dicha y, a continuación, presentamos los resultados de una serie de pruebas experimentales llevadas a cabo para obtener información sobre la dificultad relativa de cada uno de los tipos de problemas. Las conclusiones obtenidas servirán de base para el diseño posterior de una secuencia didáctica.

4.1. Clasificación

Dada una determinada magnitud, llamamos cantidades simples a aquellas que resultan directamente de la medida de dicha magnitud. Por otro lado, dadas dos cantidades simples, podemos establecer entre ellas tres tipos de relaciones: su unión, su comparación y su transformación. Llamamos cantidades relacionales a aquellas cantidades que provienen del resultado de relacionar dos cantidades simples. Teniendo en cuenta las relaciones entre cantidades que acabamos de señalar, existen tres tipos de cantidades relacionales.

En los problemas que vamos a abordar existen cantidades que juegan tres papeles claramente diferenciados: Cantidades desconocidas que intervienen en el problema pero que ni son datos ni son la incógnita buscada, cantidades conocidas son los datos del problema y, por último, una cantidad desconocida que es el valor buscado en el problema (Para el primer tipo de cantidades utilizaremos letras minúsculas. Los otros dos tipos se indicarán con mayúsculas).

La clasificación de problemas aditivos de una etapa que proponemos se articula en torno a los datos y la incógnita y surge de considerar las distintas posibilidades existentes tanto para los datos como para la incógnita del problema respecto de los cuatro tipos de cantidades considerados. En primer lugar, si sólo nos fijamos en las posibles combinaciones para los datos del problema, encontramos 10 posibilidades distintas:

- Tipo 1: Los datos son dos cantidades simples.
- Tipo 2: Los datos son una cantidad simple y una unión de cantidades simples.
- Tipo 3: Los datos son una cantidad simple y una comparación de dos cantidades simples.
- Tipo 4: Los datos son una cantidad simple y una transformación de una cantidad simple en otra.
- Tipo 5: Los datos son dos uniones de cantidades simples.
- Tipo 6: Los datos son una unión de dos cantidades simples y una comparación de dos cantidades simples.
- Tipo 7: Los datos son una unión de dos cantidades simples y una transformación de una cantidad simple en otra.
- Tipo 8: Los datos son dos comparaciones de cantidades simples.
- Tipo 9: Los datos son una comparación de dos cantidades simples y una transformación de una cantidad simple en otra.
- Tipo 10: Los datos son dos transformaciones de una cantidad simple en otra.

Para cada uno de estos 10 tipos de problemas se pueden distinguir distintos subtipos en función de la naturaleza de la incógnita y de la aparición de cantidades desconocidas que no son incógnitas. Es interesante señalar que el número de subtipos posibles está restringido por el hecho de que deben tratarse de problemas de una etapa; es decir, que se resuelven mediante una única operación de suma o resta y por el hecho de que las cantidades desconocidas que no son incógnitas no puedan ser calculadas. Otra restricción surge de los significados de las operaciones de unión, comparación y transformación. Por ejemplo, carece de sentido real una cantidad obtenida como la unión de una comparación y una transformación o la comparación entre una transformación y una cantidad simple. Una vez considerados los aspectos anteriores y analizados los 10 tipos de problemas que se han descrito, hemos obtenido un total de 33 tipos de problemas diferentes.

4.1.1. Problemas de Tipo 1

Como hemos indicado, en este tipo de problemas los datos son dos cantidades simples: S_1 y S_2. En este caso, aparecen tres subtipos de problemas según la naturaleza de la incógnita. En concreto:

- Tipo 1.1 La incógnita es $U(S_1, S_2)$, la unión de ambas cantidades.
- Tipo 1.2 La incógnita es $C(S_1, S_2)$, la comparación de ambas cantidades.
- Tipo 1.3 La incógnita es $T(S_1, S_2)$, la transformación que convierte S_1 en S_2.

En la Tabla 4.1 damos la interpretación en términos simbólicos de cada uno de estos tres tipos y proporcionamos un ejemplo:

Tipo	Datos	Incógnita	Ejemplo
1.1	x, y	$x + y$	Juan tiene 3 canicas y Luis tiene 4, ¿cuántas tienen entre los dos?
1.2	x, y	$x - y$ ó $y - x$	Juan tiene 3 canicas y Luis tiene 5, ¿cuántas canicas menos tiene Juan que Luis?
1.3	x, y	$x - y$ ó $y - x$	Juan tiene 2 canicas y Luis tiene 4, ¿cuántas comprará Juan para tener las mismas que Luis?

Tabla 4.1. Interpretación simbólica y ejemplos de los distintos problemas de Tipo 1.

4.1.2. Problemas de Tipo 2

En este tipo de problemas los datos son una cantidad simple y una unión de cantidades simples: S_1 y U. En este caso, aparecen cuatro subtipos de problemas según la naturaleza de la incógnita. En concreto:

- Tipo 2.1 Los datos son S_1 y $U_1=U(S_1, S_2)$. La incógnita es S_2.
- Tipo 2.2 Los datos son S_1 y $U_1=U(s, s')$ donde s y s' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $U_2=U(S_1, U_1)$.
- Tipo 2.3 Los datos son S_1 y $U_1=U(s, s')$ donde s y s' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $C(S_1, U_1)$.
- Tipo 2.4 Los datos son S_1 y $U_1=U(s, s')$ donde s y s' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $T(S_1, U_1)$.

En la Tabla 4.2 damos la interpretación en términos simbólicos de cada uno de estos tres tipos y proporcionamos un ejemplo:

Tipo	Datos	Incógnita	Ejemplo
2.1	$x, x + y$	$y = (x + y) - x$	Juan tiene 3 canicas, entre Juan y Luis tienen 7 canicas. ¿Cuántas canicas tiene Luis?
2.2	$x , y + z$	$x + y + z$	Juan tiene 3 canicas, entre Luis y Ana tienen 8 canicas. ¿Cuántas tienen entre los 3?
2.3	$x , y + z$	$x - (y + z)$ ó $(y + z) - x$	Juan tiene 3 canicas, entre Luis y Ana tienen 8 canicas. ¿Cuántas canicas más que Juan tienen Luis y Ana?
2.4	$x , y + z$	$x - (y + z)$ ó $(y + z) - x$	Juan tiene 3 canicas, entre Luis y Ana tienen 8 canicas. ¿Cuántas canicas debe comprar Juan para tener las mismas que Ana y Luis?

Tabla 4.2. Interpretación simbólica y ejemplos de los distintos problemas de Tipo 2.

4.1.3. Problemas de Tipo 3

En este tipo de problemas los datos son una cantidad simple S_1 y una comparación entre cantidades simples *C*. Aparecen tres subtipos de problemas según la naturaleza de la incógnita:

- Tipo 3.1 Los datos son S_1 y $C_1=C(S_1, S_2)$. La incógnita es S_2.
- Tipo 3.2 Los datos son S_1 y $C_1=C(s, s')$ donde *s* y *s'* son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $C_2=C(U(S_1, s), s')$.
- Tipo 3.3 Los datos son S_1 y $C_1=C(s, s')$ donde *s* y *s'* son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $T_1=T(s, U(S_1, s'))$.

En la Tabla 4.3 damos la interpretación en términos simbólicos de cada uno de estos tres tipos y proporcionamos un ejemplo:

Tipo	Datos	Incógnita	Ejemplo
3.1	$x, x-y$ $x, y-x$	$y = x-(x-y)$ $y = y-x+x$	Juan tiene 3 canicas, Luis tiene 2 menos que Juan. ¿Cuántas canicas tiene Luis?
3.2	$x, y-z$	$(x+y)-z$ ó $z-(x+y)$	Juan tiene 3 canicas. Ana tiene 2 canicas menos que Luis. ¿Cuántas canicas más o menos que Ana tienen entre Juan y Luis?
3.3	$x, y-z$	$(x+y)-z$ ó $z-(x+y)$	Juan tiene 3 canicas. Ana tiene 2 canicas menos que Luis. ¿Cuántas canicas debe comprar Ana para tener las mismas que Juan y Luis juntos?

Tabla 4.3. Interpretación simbólica y ejemplos de los distintos problemas de Tipo 3.

4.1.4. Problemas de Tipo 4

En este tipo de problemas los datos son una cantidad simple y una transformación de una cantidad simple en otra S_1 y *T*. En este caso, solo aparece un subtipo de problema. En concreto:

- Tipo 4.1 Los datos son S_1 y $T_1=T(S_1, S_2)$. La incógnita es S_2.

En la Tabla 4.4 se da la interpretación en términos simbólicos de los problemas de Tipo 4.1 y se proporciona un ejemplo:

Tipo	Datos	Incógnita	Ejemplo
4.1	$x, x-y$ $x, y-x$	$y = x-(x-y)$ $y = x+(y-x)$	Juan tiene 3 canicas y le regalan otras 2. ¿Cuántas tiene ahora?

Tabla 4.4. Interpretación simbólica y ejemplo del problema de Tipo 4.

4.1.5. Problemas de Tipo 5

Como hemos indicado, en este tipo de problemas los datos son dos uniones de cantidades simples: U_1 y U_2. En este caso, aparecen cinco subtipos de problemas según la naturaleza de la incógnita. En concreto:

- Tipo 5.1 Los datos son $U_1=U(s, s')$ y $U_2=U(s, s'')$ donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $C_1=C(s', s'')$.
- Tipo 5.2 Los datos son $U_1=U(s, s')$ y $U_2=U(s, s'')$ donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $T_1=T(s', s'')$.
- Tipo 5.3 Los datos son $U_1=U(s, s')$ y $U_2=U(s'', s''')$ donde s, s', s'' y s''' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $U_3=U(U_1, U_2)$.
- Tipo 5.4 Los datos son $U_1=U(s, s')$ y $U_2=U(s'', s''')$ donde s, s', s'' y s''' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $C_1=C(U_1, U_2)$.
- Tipo 5.5 Los datos son $U_1=U(s, s')$ y $U_2=U(s'', s''')$ donde s, s', s'' y s''' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $T_1=T(U_1, U_2)$.

En la Tabla 4.5 damos la interpretación en términos simbólicos de cada uno de estos cinco tipos y proporcionamos un ejemplo

Tipo	Datos	Incógnita	Ejemplo
5.1	$x + y, x + z$	$y - z = (x + y) - (x + z)$	Entre Juan y Luis tienen 5 canicas y entre Juan y Ana tienen 7. ¿Cuántas canicas más o menos que Luis tiene Ana?
5.2	$x + y, x + z$	$y - z = x + y - (x + z)$	Entre Juan y Luis tienen 5 canicas y entre Juan y Ana tienen 7. ¿Cuántas debe comprar Luis para tener las mismas que Ana?
5.3	$x + y , z + t$	$x + y + z + t$	Entre Juan y Luis tienen 5 canicas y entre Ana y María tienen 4. ¿Cuántas tienen todos juntos?
5.4	$x + y , z + t$	$x + y - (z + t)$	Entre Juan y Luis tienen 5 canicas y entre Ana y María tienen 4. ¿Cuántas canicas más o menos tienen entre Juan y Luis que entre Ana y María?
5.5	$x + y , z + t$	$x + y - (z + t)$	Entre Juan y Luis tienen 5 canicas y entre Ana y María tienen 4. ¿Cuántas canicas tienen que perder entre Juan y Luis para tener las mismas que entre Ana y María?

Tabla 4.5. Interpretación simbólica y ejemplos de los distintos problemas de Tipo 5.

4.1.6. Problemas de Tipo 6

En este tipo de problemas los datos son una unión y una comparación de cantidades simples: U_1 y C_1 . En este caso, aparecen tres subtipos de problemas según la naturaleza de la incógnita:

- Tipo 6.1 Los datos son U_1=U(s, s') y C_1=C(s, s'') donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es U_2=U(s', s'').
- Tipo 6.2 Los datos son U_1=U(s, s') y C_1=C(s'', s''') donde s, s' y s'' y s''' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es C_2=C(s'', U(s''', U_1)).
- Tipo 6.3 Los datos son U_1=U(s, s') y C_1=C(s'', s''') donde s, s' y s'' y s''' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es T_2=T(s'', U(s''', U_1)).

En la Tabla 4.6 se da la interpretación en términos simbólicos de cada uno de estos tres tipos y se proporciona un ejemplo

Tipo	Datos	Incógnita	Ejemplo
6.1	$x + y, x - z$ ó $x + y, z - x$	$y + z = x + y - (x - z)$ ó $y + z = x + y + (z - x)$	Entre Juan y Luis tienen 5 canicas. Ana tiene 2 canicas más que Juan. ¿Cuántas canicas tienen entre Ana y Luis?
6.2	$x + y , z - t$	$(x+y+z) - t =$ $(x+y)+(z - t)$ ó $z - (t + x + y) =$ $(z - t)+ (x + y)$	Entre Juan y Luis tienen 6 canicas. Ana tiene 2 canicas más que María. ¿Cuántas canicas más que María tienen entre Juan, Luis y Ana?
6.3	$x + y , z - t$	$(x+y+z) - t =$ $(x+y)+(z - t)$ ó $z - (t + x + y) =$ $(z - t) + (x + y)$	Entre Juan y Luis tienen 6 canicas. Ana tiene 2 canicas más que María. ¿Cuántas canicas comprará María si quiere tener las mismas que tienen entre Juan, Luis y Ana?

Tabla 4.6. Interpretación simbólica y ejemplos de los distintos problemas de Tipo 6.

4.1.7. Problemas de Tipo 7

En este tipo de problemas los datos son una unión y una transformación de cantidades simples S_1 y T. En este caso, solo aparece un subtipo de problema. En concreto:

- Tipo 7.1 Los datos U_1 =$U(s, s')$ y T_1 =T(s, s'') donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es U_2=$U(s', s'')$.

En la Tabla 4.7 se da la interpretación en términos simbólicos de los problemas de Tipo 7.1 y se proporciona un ejemplo:

Tipo	Datos	Incógnita	Ejemplo
7.1	$x + y, x - z$ $x + y, z - x$	$y + z =$ $x + y - (x - z)$ $y + z =$ $x + y + z - x$	Entre Juan y Luis tienen 5 canicas. Juan se compra 3 canicas. ¿Cuántas canicas tienen ahora entre los dos?

Tabla 4.7. Interpretación simbólica y ejemplo del problema de Tipo 7.

4.1.8. Problemas de Tipo 8

Como hemos indicado, en este tipo de problemas los datos son dos comparaciones de cantidades simples: C_1 y C_2. En este caso, aparecen cuatro subtipos de problemas según la naturaleza de la incógnita. En concreto:

- Tipo 8.1 Los datos son $C_1=C(s, s')$ y $C_2=C(s, s'')$ donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $C_3=C(s', s'')$.
- Tipo 8.2 Los datos son $C_1=C(s, s')$ y $C_2=C(s, s'')$ donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $T_1=T(s', s'')$.
- Tipo 8.3 Los datos son $C_1=C(s, s')$ y $C_2=C(s'', s''')$ donde s, s', s'' y s''' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $C_3=C(U(s, s''), U(s', s'''))$.
- Tipo 8.4 Los datos son $C_1=C(s, s')$ y $C_2=C(s'', s''')$ donde s, s', s'' y s''' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $T_1=T(U(s, s''), U(s', s'''))$.

En la Tabla 4.8 damos la interpretación en términos simbólicos de cada uno de estos cinco tipos y proporcionamos un ejemplo

Tipo	Datos	Incógnita	Ejemplo
8.1	$x-y$, $x-z$	$y-z=-(x-y)+(x-z)$	Juan tiene 2 canicas más que Luis y Luis tiene 4 canicas menos que Ana. ¿Cuántas canicas más o menos que Juan tiene Ana?
8.2	$x-y$, $x-z$	$y-z=-(x-y)+(x-z)$	Juan tiene 2 canicas más que Luis y Luis tiene 4 canicas menos que Ana. ¿Cuántas canicas debe ganar Ana para tener las mismas que Juan?
8.3	$x-y$, $z-t$	$x+z-(y+t)=x-y+z-t$	Juan tiene 2 canicas más que Luis y Ana tiene 1 más que María. ¿Cuántas canicas más que Luis y María tienen entre Juan y Ana?
8.4	$x-y$, $z-t$	$(x+z)-(y+t)=(x-y)+(z-t)$	Juan tiene 2 canicas más que Luis y Ana tiene 1 más que María. ¿Cuántas canicas deben comprar entre Luis y María para tener las mismas que entre Juan y Ana?

Tabla 4.8. Interpretación simbólica y ejemplos de los distintos problemas de Tipo 8.

4.1.9. Problemas de Tipo 9

En este tipo de problemas los datos son una comparación entre cantidades simples C_1 y una transformación de cantidades simples T_1. Aparecen dos subtipos de problemas según la naturaleza de la incógnita:

- Tipo 9.1 Los datos son $C_1=C(s, s')$ y $T_1=T(s', s'')$ donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $C_2=C(s, s'')$.

- Tipo 9.2 Los datos son $C_1=C(s, s')$ y $T_1=T(s', s'')$ donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $T_2=T(s, s'')$.

En la Tabla 4.9 damos la interpretación en términos simbólicos de cada uno de estos dos tipos y proporcionamos un ejemplo:

Tipo	Datos	Incógnita	Ejemplo
9.1	$x-y, y-z$	$x-z=x-y+y-z$	Juan tiene 3 canicas más que Luis. Si Juan se compra 2 canicas más, ¿cuántas tiene ahora más que Luis?
9.2	$x-y, y-z$	$x-z=x-y+y-z$	Juan tiene 3 canicas más que Luis. Si Juan se compra 2 canicas más, ¿cuántas debe comprar Luis para tener las mismas que Juan?

Tabla 4.9. Interpretación simbólica y ejemplos de los distintos problemas de Tipo 9.

4.1.10. Problemas de Tipo 10

Como hemos indicado, en este tipo de problemas los datos son dos transformaciones entre cantidades simples: T_1 y T_2. En este caso, aparecen siete subtipos de problemas según la naturaleza de la incógnita. En concreto:

- Tipo 10.1 Los datos son $T_1=T(s, s')$ y $T_2=T(s', s'')$ donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $T_3=T(s, s'')$.
- Tipo 10.2 Los datos son $T_1=T(s, s')$ y $T_2=T(s, s'')$ donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $T_3=T(s', s'')$.
- Tipo 10.3 Los datos son $T_1=T(s, s'')$ y $T_2=T(s', s'')$ donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $T_3=T(s, s')$.
- Tipo 10.4 Los datos son $T_1=T(s, s')$ y $T_2=T(s', s'')$ donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $C_1=C(s, s'')$.
- Tipo 10.5 Los datos son $T_1=T(s, s')$ y $T_2=T(s'', s''')$ donde s, s', s'' y s''' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $T_3=T(U(s, s''), U(s', s'''))$.
- Tipo 10.6 Los datos son $T_1=T(s, s')$ y $T_2=T(s'', s''')$ donde s, s', s'' y s''' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $C_1=C(U(s, s''), U(s', s'''))$.
- Tipo 10.7 Los datos son $T_1=T(s, s')$ y $T_2=T(s, s'')$ donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $C_1=C(T_1, T_2)$.

En la Tabla 4.10 damos la interpretación en términos simbólicos de cada uno de estos siete tipos y proporcionamos un ejemplo

Tipo	Datos	Incógnita	Ejemplo
10.1	$x-y$, $y-z$	$x-z = x-y+y-z$	A Juan sus padres le regalan 5 canicas y sus abuelos 2. ¿Cuántas canicas le han regalado en total?
10.2	$x-y$, $x-z$	$y-z = (x-z)-(x-y)$	A Juan le regalan 5 canicas sus padres y después sus abuelos le regalan unas cuantas más. En total le han regalado 7 canicas, ¿cuántas le han regalado sus abuelos?
10.3	$x-y$, $z-y$	$x-z = (x-y)-(z-y)$	A Juan le regalan unas cuantas canicas sus padres y después sus abuelos le regalan 5 más. En total le han regalado 7 canicas, ¿cuántas le han regalado sus padres?
10.4	$x-y$, $y-z$	$x-z = x-y+y-z$	Por la mañana Juan compra 4 canicas nuevas. Jugando en el patio pierde 2. ¿Cuántas canicas más o menos tiene Juan al final del día respecto del inicio?
10.5	$x-y$, $z-t$	$x+z-(y+t) = x-y+z-t$	Juan compra 3 canicas y Ana compra 2. ¿Cuántas han comprado entre los dos?
10.6	$x-y$, $z-t$	$x+z-(y+t) = x-y+z-t$	Jugando en el patio Juan y Ana forman equipo. Juan pierde 3 canicas y Ana gana 1. ¿Cuántas canicas más o menos tienen al final de recreo entre los dos?
10.7	$x-y$, $x-z$	$x-y-(x-z)$	Juan compra 5 canicas por la mañana y 7 por la tarde. ¿Cuántas canicas más ha comprado por la mañana que por la tarde?

Tabla 4.10. Interpretación simbólica y ejemplos de los distintos problemas de Tipo 10.

4.2. Estudio sobre la dificultad de los problemas

A partir de la clasificación realizada para problemas aditivos de una etapa que acabamos de describir, diseñamos una batería de pruebas diagnósticas con el fin de determinar la dificultad de los distintos tipos y subtipos de problemas. Además, nos interesa conocer si hay diferencias en las estrategias de resolución de problemas al usar decimales, fracciones o naturales. Por ello para cada uno de los tipos de problemas incluidos en cada prueba se proponen tres enunciados: uno con naturales, otro con fracciones y otro con decimales.

Para analizar los resultados de las pruebas se consideraron tres variables dicotómicas: estructura, operación y algoritmo (ver Capítulo 2) que fueron analizadas de manera secuencial; es decir, para que una respuesta se considere correcta debe estarlo en las tres variables y un fallo en una de ellas hace que no se consideren las siguientes. Teniendo en cuenta los objetivos de la investigación, se decidió que las operaciones planteadas fueran sencillas, tratando de minimizar los errores en la aplicación del algoritmo correspondiente.

En total se llevaron a cabo 9 pruebas. La primera de ellas se diseñó a modo de prueba piloto para realizar una primera exploración. Cada una de las ocho pruebas restantes se dedicó en exclusiva a uno o dos de los tipos de problemas descritos en la sección anterior. Así pues, se planteó un total de 99 problemas. Todas las pruebas tuvieron lugar en el IES Vallecas Magerit de Madrid.

4.2.1. Prueba Piloto

4.2.1.1. Descripción de la prueba

La primera prueba se realizó a finales del curso 2013-2014. En concreto tuvo lugar el 9 de junio de 2014. Participaron 14 alumnos de la clase 2ºA del IES Vallecas Magerit que dispusieron de un máximo de 55 minutos para su realización. La prueba se desarrolló sin incidentes.

Enunciado	Tipo	Tipo de número
Un grupo de amigos va de excursión. Tras caminar 3,85 km paran a almorzar. Después retoman la marcha y hacen 2,781 km más, llegando a su destino. ¿Cuántos kilómetros recorrieron en total?	1.1	Decimales
Si Juan y María juntan sus lápices tienen 36 entre los dos. Silvia tiene 8 lápices más que Juan. ¿Cuántos lápices tienen entre Silvia y María?	6.1	Naturales
Mario va a la pollería y compra $\frac{3}{4}$ de kilo de pechuga y $\frac{1}{2}$ kg de muslos. ¿Cuántos kilos de pollo compró en total?	1.1	Fracciones
Entre Juan y Miguel tienen 20,35€ y entre Juan y Ana tienen 16,43€, ¿cuánto dinero más o menos que Miguel tiene Ana?	5.1	Decimales
Tres operarios tienen que pintar un almacén. Entre los dos primeros pintan $\frac{2}{3}$ de metro cuadrado de pared del almacén. El tercero pinta $\frac{1}{6}$ de metro cuadrado más que el segundo. ¿Cuánta superficie pintan entre el primero y el tercero?	6.1	Fracciones
Carmen tiene cinta de raso roja, verde y azul. Entre el trozo de cinta roja y el de cinta verde tiene $\frac{5}{8}$ de metro. Entre el rojo y el azul tiene $\frac{7}{12}$ de metro. ¿Cuánto más o menos mide el trozo de cinta verde respecto de la azul?	5.1	Fracciones
En el armario de Carmen hay 12 camisetas de manga corta y 9 de manga larga. ¿Cuántas camisetas hay en total?	1.1	Naturales
Un granjero tiene tres gallinas Ca, Co, Cu. Entre Ca y Co comen 0,1 kg de pienso cada día, Cu come 0,27 kg más que Co. ¿Cuántos kilos comen entre Ca y Cu?	6.1	Decimales
Si Laura y su hermana Ana se suben a la báscula juntas, esta marca 93 kg. Sin embargo si Laura se sube con su hermano Juan, la báscula marca 105 kg. ¿Quién pesa más, Ana o Juan? ¿Cuánto más?	5.1	Naturales

Tabla 4.11. Problemas prueba piloto.

Esta prueba piloto (ver Anexo I) estaba compuesta por nueve problemas de tres tipos diferentes. Se incluyen problemas de Tipo 1.1, previsiblemente sencillos, y problemas de Tipo 5.1 y de Tipo 6.1 Estos problemas involucran dos uniones y una comparación de cantidades relacionales. En la Tabla 4.11 se recogen el enunciado, el tipo de problema según nuestra clasificación y el tipo de números utilizados en los datos para cada uno de los nueve problemas.

4.2.1.2. Resultados y análisis

A excepción de los problemas de Tipo 1.1, el resto de problemas ofrece grandes dificultades a nuestros alumnos, siendo de hecho más alumnos los que dejan el problema en blanco que los que se enfrentan a él (Figura 4.1). Solo dos problemas no presentan ningún ejercicio en blanco: Tipo 1.1 con decimales y Tipo 6.1 con naturales. Tres de los problemas no fueron resueltos de forma totalmente satisfactoria por ningún alumno, aunque en dos de ellos es debido a una incorrecta aplicación del algoritmo necesario. En todo caso, en los problemas de Tipo 5.1 y 6.1 la tasa de éxito identificando la estructura y la operación correctas fue inferior al 25% frete a una tasa de acierto superior al 64% en todos los problemas de Tipo 1.1.

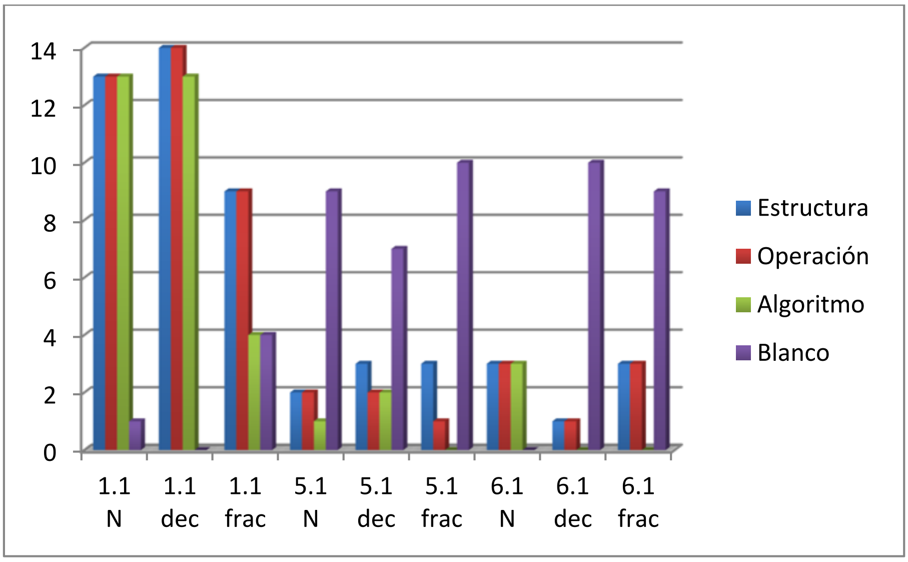


Figura 4.1. Frecuencia absoluta de los aciertos en cada apartado para cada tipo de problema. (N: naturales, dec: decimales y frac: fracciones)

Como cabía esperar, los alumnos han encontrado grandes dificultades al enfrentarse a problemas en los que aparecen cantidades desconocidas que no se pueden calcular y que no son necesarias en la resolución. Pese a que son pocos los alumnos que han respondido de forma correcta, aparecen algunas estrategias que merece la pena comentar. La más interesante consiste en considerar casos particulares; es decir, asignar algún valor concreto a una o varias de esas magnitudes. En la Figura 4.2, vemos un ejemplo en el que el alumno conscientemente sigue esta estrategia.

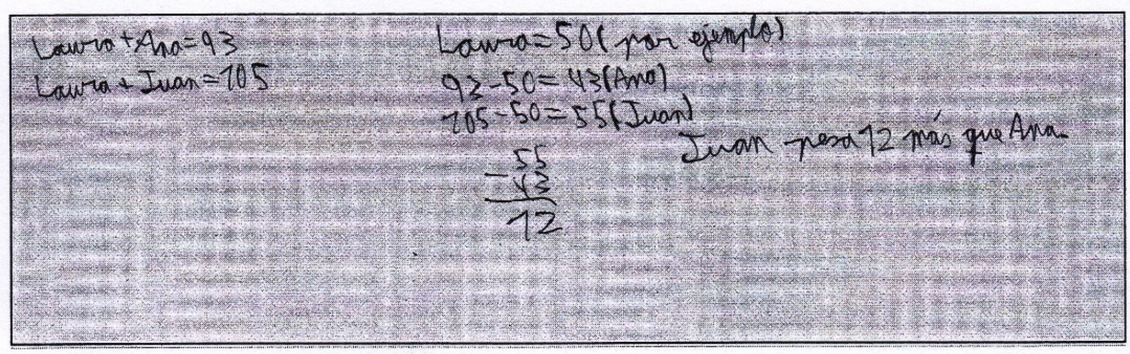


Figura 4.2. Ejemplo de resolución de un problema de Tipo 5.1 N por parte de un alumno en el que se resuelve conscientemente dando un caso particular.

En algunas ocasiones los alumnos utilizan esta estrategia sin hacerlo explícito o sin ser conscientes de ello. Es el caso de la respuesta que vemos en la Figura 4.3. Vemos que mientras en la Figura 4.2 el alumno señala de manera explícita que considera que Laura pera 50 kilos "por ejemplo", la respuesta de la Figura 4.3 considera (sin verbalizarlo) el caso particular de que Juan y María tengan el mismo número de lápices (y de ahí la división 36:2).

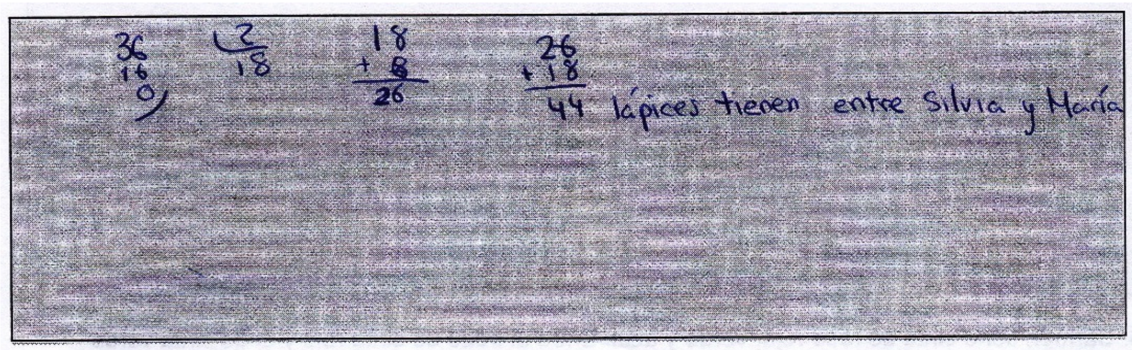


Figura 4.3. Ejemplo de resolución de un problema de Tipo 6.1 N por parte de un alumno en el que lo resuelve dando un caso particular sin ser consciente de ello.

Finalmente, en cuanto a las dificultades relacionadas con la aplicación de algoritmos y con el manejo de los distintos tipos de números, se aprecia en la Figura 4.1 que éstas son aún mayores en el caso de las fracciones. De hecho, encontramos casos (ver Figura 4.4, por ejemplo) en los que los alumnos transforman las fracciones en números decimales para poder realizar las operaciones con mayor facilidad.

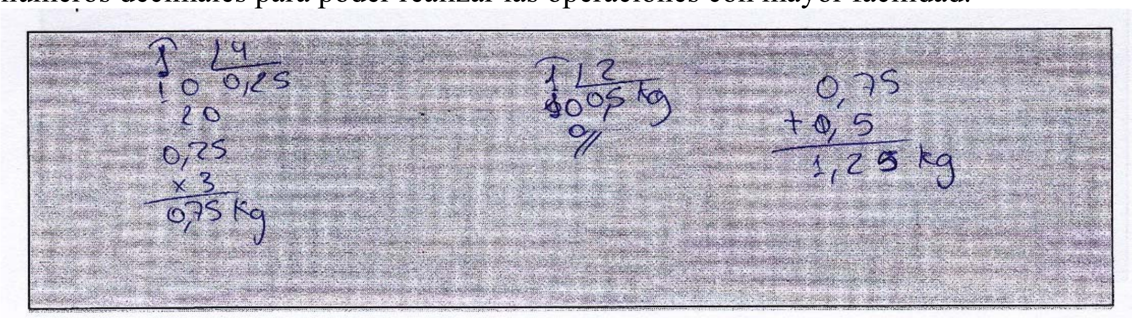


Figura 4.4. Ejemplo de resolución de un problema de Tipo 1.1 fracciones por parte de un alumno convirtiendo las fracciones en números decimales.

4.2.2. Prueba 1

4.2.2.1. Descripción de la prueba

La primera prueba se realizó durante el curso 2014-2015. En concreto tuvo lugar el 12 de marzo de 2015. Participaron 22 alumnos de la clase 2ºA del IES Vallecas Magerit que dispusieron de un máximo de 55 minutos para su realización. La prueba se desarrolló sin incidentes.

Esta Prueba 1 (ver Anexo I) estaba compuesta por nueve problemas, todos ellos de Tipo 1. Es decir, en todos ellos los datos son cantidades simples. En la Tabla 4.12 se recogen el enunciado, el tipo de problema según nuestra clasificación y el tipo de números utilizados en los datos para cada uno de los nueve problemas.

Enunciado	**Tipo**	**Tipo de número**
Ana tiene 3 canicas y Basilio tiene 4, ¿cuántas tienen entre los dos?	1.1	Naturales
Isabel compra 4,5 kilos de manzanas y Juan compra 2,8 kilos, ¿cuántos kilos más compra Isabel que Juan?	1.2	Decimales
Ramón ha cogido 5/16 de kilo de setas y Sonia 9/12 de kilo, ¿qué fracción de kilo de setas tiene que coger Ramón para tener la misma que Sonia?	1.3	Fracciones
Carmen tiene 3 sellos y David tiene 5, ¿cuántos sellos menos tiene Carmen que David?	1.2	Naturales
Luis tiene 8,7 metros de cable y Manuel tiene 6,84 metros, ¿cuántos metros de cable comprará Manuel para tener los mismos metros de cable que Luis?	1.3	Decimales
Nuria anda 5/8 de kilómetro por la mañana, y por la tarde 9/4 de kilómetro, ¿cuántos kilómetros anda en todo el día?	1.1	Fracciones
Eduardo tiene 2 muñecos y Fernando tiene 4, ¿cuántos muñecos comprará Eduardo para tener los mismos que Fernando?	1.3	Naturales
Guillermo tiene 3,6 euros e Hipólito tiene 4,25€, ¿cuántos euros tienen entre los dos?	1.1	Decimales
Para desayunar, Olivia bebe 3/10 de litro de leche mientras que su hermana Paula bebe 4/15 de litro, ¿qué fracción de litro bebe menos Paula que Olivia?	1.2	Fracciones

Tabla 4.12. Problemas Prueba 1.

4.2.2.2. Resultados y análisis

Como se puede apreciar en la Figura 4.5, los resultados son en general buenos. Aunque llama la atención el impacto que tiene el tipo de números utilizado incluso más allá de los errores en la aplicación de algoritmos.

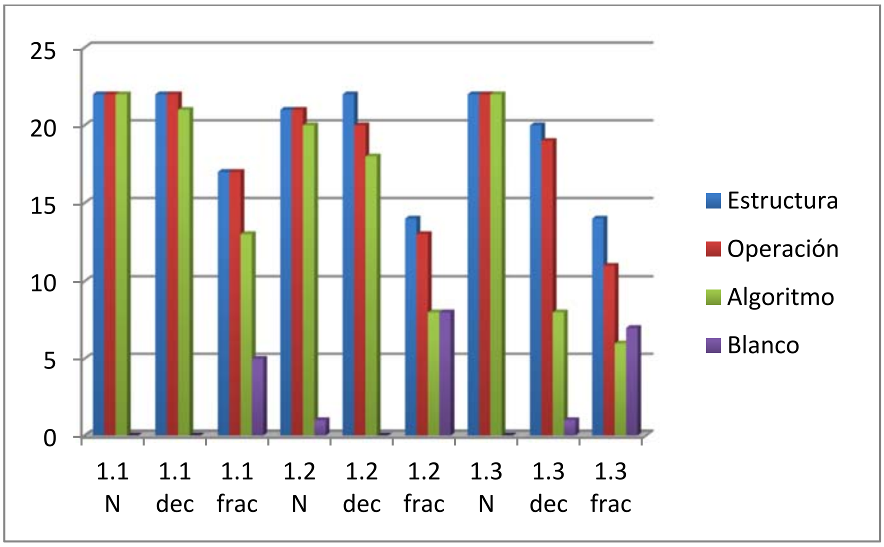


Figura 4.5. Frecuencia absoluta de los aciertos en cada apartado para cada subtipo de problema de Tipo1. 1 (N-natural, dec-decimal, frac-fracción).

En el caso de los problemas planteados con números naturales o decimales encontramos un porcentaje de acierto superior al 80% en cuanto a la identificación de la estructura y operación con independencia del tipo de problema. Sin embargo, este porcentaje disminuye en el caso de los problemas con fracciones, principalmente debido al aumento de las respuestas en blanco.

Los resultados promedios con números naturales, decimales y fracciones para cada tipo de problemas nos dan la siguiente información:

PROBLEMA 1.1.

El problema 1.1 (los datos son S_1 y S_2 cantidades simples y la incógnita es $U(S_1, S_2)$, la unión de ambas cantidades) es el que mejores resultados tiene, los alumnos lo realizan correctamente en el 85% de los casos.

PROBLEMA 1.2.

El problema 1.2 (los datos son S_1 y S_2 cantidades simples y la incógnita es $C(S_1,S_2)$, la comparación de ambas cantidades) lo realizan correctamente el 70% de los alumnos.

PROBLEMA 1.3.

El problema 1.3 (los datos son S_1 y S_2 cantidades simples y la incógnita es $T(S_1,S_2)$, la transformación que convierte S_1 en S_2.) es el que peores resultado obtiene, ya que lo realizan correctamente sólo el 55% de los alumnos.

La relativa facilidad de los problemas planteados en esta prueba (dejando de lado las dificultades asociadas a aspectos operativos) hace que no surjan por parte de los alumnos demasiadas estrategias de resolución. La única estrategia que encontramos está relacionada con el uso de representaciones gráficas. En la Figura 4.6, por ejemplo, vemos que una alumna recurre al uso de diagramas para tratar comparar dos fracciones con diferentes numeradores y denominadores, aunque no quede muy claro cómo lo hace.

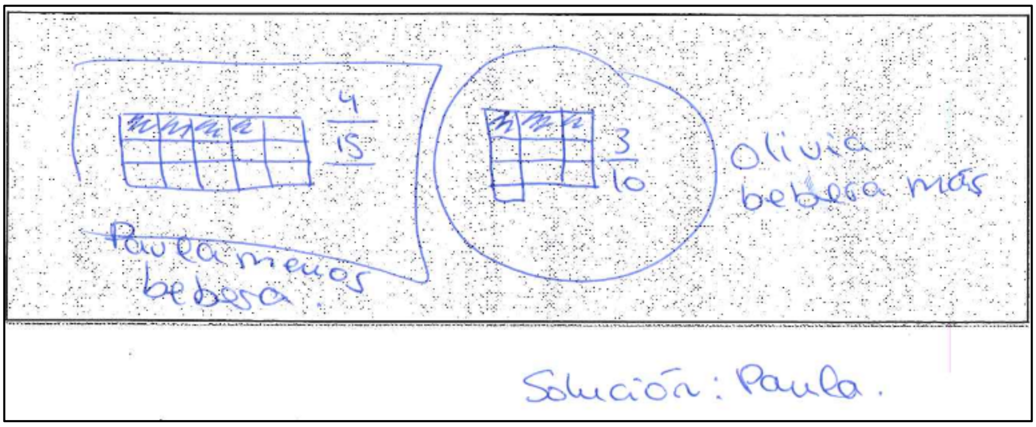


Figura 4.6. Ejemplo de resolución de un problema de Tipo 1.2 con fracciones por parte de un alumno.

4.2.3. Prueba 2

4.2.3.1. Descripción de la prueba

La Prueba 2 se realizó durante el curso 2014-2015. En concreto tuvo lugar el 26 de marzo de 2015. Participaron 18 alumnos de la clase 2ºA del IES Vallecas Magerit que dispusieron de un máximo de 55 minutos para su realización. La prueba se desarrolló sin incidentes.

Esta Prueba 2 (ver Anexo I) estaba compuesta por doce problemas, todos ellos de Tipo 2. Es decir, en todos ellos los datos son una cantidad simple S_1 y una unión de cantidades simples U.

Enunciado	**Tipo**	**Tipo de número**
Arturo tiene 387 libros, entre Berta y Arturo tienen 734 libros. ¿Cuántos libros tiene Berta?	2.1	Naturales
Claudia duerme 37/4 de hora, entre David y Ernesto duermen 15/2 de hora. ¿Cuántas horas duermen entre los tres?	2.2	Fracciones
Rosa conduce durante 173,5 km, entre Sofía y Tomás conducen durante 389,63 km. ¿Cuántos kilómetros más que Rosa conducen Sofía y Tomás?	2.3	Decimales
En la casa de Carmen hay 11 sillas, entre las casas de Daniel y Estrella hay 28 sillas. ¿Cuántas sillas hay entre las tres casas?	2.2	Naturales
Fabiola recicla 5/6 de litro de aceite usado, entre Irene y Gorka reciclan 11/8 de litro de aceite. ¿Cuántos litros más que Fabiola reciclan entre Irene y Gorka?	2.3	Fracciones
Úrsula bebe 0,45 litros de agua, entre Valentina y Yolanda beben 0,8 litros de agua. ¿Cuántos litros de agua debe beber Úrsula para haber bebido los mismos litros que entre Valentina y Yolanda?	2.4	Decimales

Fermín hace 8 pasteles, entre Gemma y Hugo hacen 19 pasteles. ¿Cuántos pasteles más que Fermín hacen entre Gemma y Hugo?	2.3	Naturales
Javier anda 21/5 de kilómetro, entre Lidia y Mercedes andan 63/15 de kilómetro. ¿Cuántos kilómetros debe andar Javier para haber andado lo mismo que entre Lidia y Mercedes?	2.4	Fracciones
Laura pesa 63,7 kilos, entre Laura y Manuel pesan 130 kilos. ¿Cuántos kilos pesa Manuel?	2.1	Decimales
Inés resuelve 3 problemas, entre Jorge y Klein resuelven 8 problemas. ¿Cuántos problemas debe resolver Inés para haber resuelto los mismos que entre Jorge y Klein?	2.4	Naturales
Adrián compra 3/7 de kilo de naranjas, entre Adrián y Blanca compran 7/4 de kilo de naranjas. ¿Cuántos kilos de naranjas compra Blanca?	2.1	Fracciones
Noelia tiene 23,64 €, entre Óscar y Pablo tienen 31,79 €. ¿Cuánto dinero tienen entre los tres?	2.2	Decimales

Tabla 4.13. Problemas Prueba 2.

En la Tabla 4.13 se recogen el enunciado, el tipo de problema según nuestra clasificación y el tipo de números utilizados en los datos para cada uno de los doce problemas.

4.2.3.2. Resultados y análisis

Los resultados promedios con números naturales, decimales y fracciones para cada tipo de problemas nos dan la siguiente información:

PROBLEMA 2.1.

El problema 2.1 (los datos son S_1 y $U_1=U(S_1, S_2)$, la incógnita es S_2) es el que peores resultados tiene, los alumnos lo realizan correctamente en el 63% de los casos.

PROBLEMA 2.2.

El problema 2.2 (los datos son S_1 y $U_1=U(s, s')$ donde s y s' son cantidades simples desconocidas, la incógnita es $U_2=U(S_1, U_1)$) es el que mejores resultados obtiene, lo realizan correctamente un 74% de los alumnos.

PROBLEMA 2.3.

El problema 2.3 (los datos son S_1 y $U_1=U(s, s')$ donde s y s' son cantidades simples desconocidas, la incógnita es $C(S_1, U_1)$) lo realizan correctamente el 69% de los alumnos.

PROBLEMA 2.4

El problema 2.4 (Los datos son S_1 $U_1=U(s,s')$ donde s y s' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $T(S_1,U_1)$), lo realizan correctamente el 69% de los alumnos. El resultado es el mismo en los problemas 2.3 y 2.4, parece que, al menos en este caso, ha supuesto la misma dificultad la comparación que la transformación.

En la Figura 4.7 se muestran los resultados en todos los problemas de esta prueba. El número de participantes de la prueba fue de 18, todos ellos acertaron la estructura y la operación en los Tipos 2.1 y 2.2 con naturales. Aunque los demás tipos funcionaron algo peor, ningún tipo de problema, con ningún tipo de número, baja del 50% de aciertos en algoritmo. Los aciertos en operación oscilan desde el 61% (Tipo 2.1 fracciones) hasta el 100% (Tipo 2.1 y 2.2 naturales). Por ejemplo, en el problema Tipo 2.1 fracciones, todos los alumnos que no aciertan la operación, es porque lo dejan en blanco.

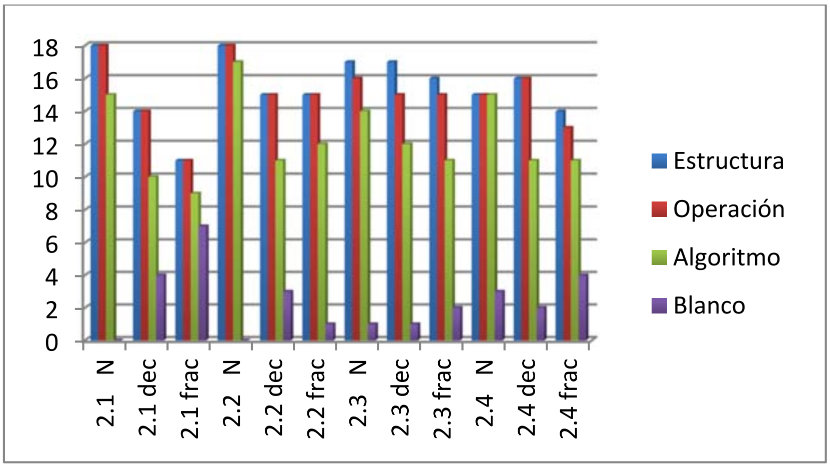


Figura 4.7. Frecuencia absoluta de los aciertos en cada apartado para cada subtipo de problema de Tipo 2 (N-natural, dec-decimal, frac-fracción)..

Entre las pocas estrategias de resolución encontradas señalaremos dos. En la primera, como ya hemos visto otras veces, el alumno entiende que si le dan la unión de dos valores, cada una de las cantidades simples que forman la unión, tienen que ser iguales (Figura 4.8). Es decir, está dando un valor particular de forma no consciente:

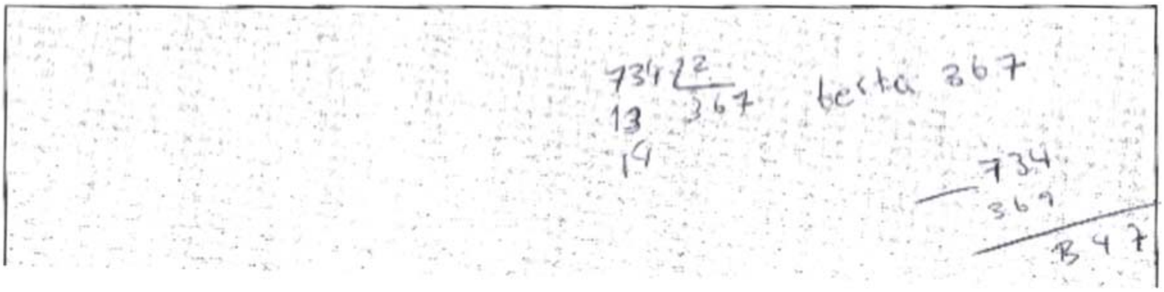


Figura 4.8. Ejemplo de resolución de un problema de Tipo 2.1 N por parte de un alumno.

En el segundo caso el alumno hace uso del álgebra para resolver el problema (Figura 4.9):

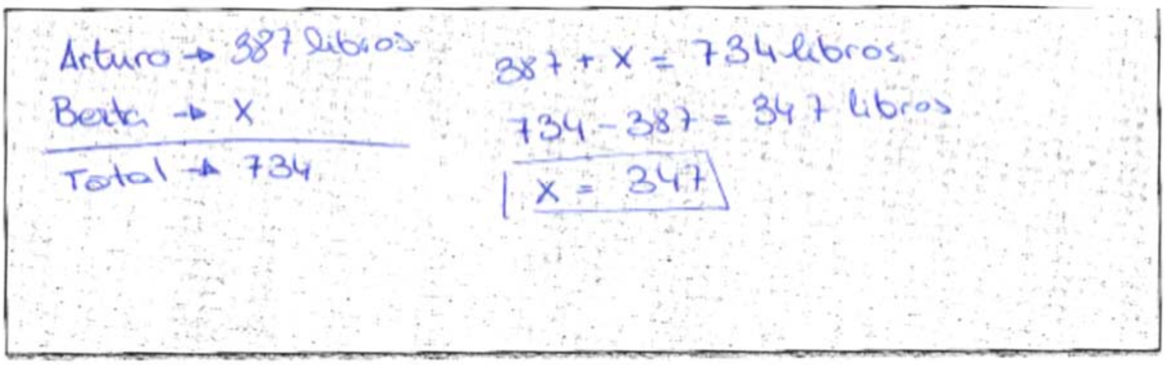


Figura 4.9. Ejemplo de resolución de un problema de Tipo 2.1 N por parte de un alumno.

Los ejercicios con números naturales los realiza bien prácticamente el 85% del alumnado. Sin embargo, los ejercicios con decimales los realiza completamente bien el 61% de los alumnos y con fracciones el 60%.

4.2.4. Prueba 3

4.2.4.1. Descripción de la prueba

La Prueba 3 se realizó a finales del curso 2014-2015. En concreto tuvo lugar el 17 de junio de 2015 (Faltaban dos días para terminar las clases). Participaron 15 alumnos de la clase 2ºA del IES Vallecas Magerit que dispusieron de un máximo de 55 minutos para su realización. La prueba se desarrolló sin incidentes.

Esta Prueba 3 (ver Anexo I) estaba compuesta por nueve problemas, todos ellos de Tipo 3. Es decir, en todos ellos los datos son una cantidad simple S_1 y una comparación entre cantidades simples *C*. En la Tabla 4.14 se recogen el enunciado, el tipo de problema según nuestra clasificación y el tipo de números utilizados en los datos para cada uno de los nueve problemas.

Enunciado	Tipo	Tipo de número
En 2°A hay 27 alumnos, 2º B tiene 3 alumnos menos que 2ºA. ¿Cuántos alumnos hay en 2ºB?	3.1	Naturales
En una jarra caben 3/10 de l. de agua más que en un vaso. En una botella cabe ½ l. de agua. ¿Cuántos litros de agua más o menos que en un vaso caben en una botella y una jarra juntas?	3.2	Fracciones
Valentina tiene 37,5€. Ángel tiene 4,75€ menos que Francisco. ¿Cuánto dinero debe ganar Francisco si quiere tener la misma cantidad de dinero que entre Valentina y Ángel juntos?	3.3	Decimales
La receta de un bizcocho indica que tengo que poner 1/4 kilo de harina de trigo. De harina de maíz tengo que poner 1/6 de kilo menos que de harina de trigo. ¿Qué cantidad de harina de maíz tengo que poner?	3.1	Fracciones
Mi perro Blas pesa 25,7 kg. Mi gata Rita pesa 11,23 kg más que mi periquito Curro. ¿Cuántos kilos más o menos que Rita pesan entre Blas y Curro?	3.2	Decimales

Carmen tiene 15 libros menos que Belén. Lucía tiene 257 libros. ¿Cuántos libros tiene que comprar Belén para tener los mismos que entre Carmen y Lucía?	3.3	Naturales
Un anillo pesa 95,37g, otro anillo similar pesa 6,4g más, ¿cuánto pesa este segundo anillo?	3.1	Decimales
Juan tiene 37 canicas. Ana tiene 2 canicas menos que Luis. ¿Cuántas canicas más o menos que Ana tienen entre Juan y Luis?	3.2	Naturales
Quiero hacer una macedonia de frutas. Tengo 3/4 de kg de fresas. Si tengo 7/12 kg de plátano más que de manzana, ¿cuántos kilogramos de manzana tengo que comprar para poder poner la misma cantidad de manzana que de plátano y fresa juntos?	3.3	Fracciones

Tabla 4.14. Problemas Prueba 3.

4.2.4.2. Resultados y análisis

Los resultados promedios con números naturales, decimales y fracciones para cada tipo de problemas nos dan la siguiente información:

PROBLEMA 3.1.

El problema 3.1 (los datos son S_1 y $C_1=C(S_1, S_2)$ y la incógnita es S_2) es el que mejores resultados tiene, los alumnos lo realizan correctamente en el 71% de los casos. En este caso las cantidades desconocidas que aparecen las pueden calcular.

PROBLEMA 3.2.

El problema 3.2 (los datos son S_1 y $C_1=C(s, s')$ donde s y s' son cantidades simples desconocidas, la incógnita es $C_2=C(U(S_1, s), s')$), lo realizan correctamente sólo un 20% de los alumnos. Aquí aparecen dos cantidades desconocidas que no pueden calcular, lo que supone una gran dificultad para nuestros alumnos.

PROBLEMA 3.3.

El problema 3.3 (los datos son S_1 y $C_1=C(s, s')$ donde s y s' son cantidades simples desconocidas y la incógnita es $T_1=T(s, U(S_1, s'))$, lo realizan correctamente sólo el 22% de los alumnos. Como en el tipo anterior, vuelven a aparecer cantidades desconocidas que no pueden calcular.

Como vemos en la Figura 4.10 los ejercicios en blanco superan en 6 de los 9 apartados los aciertos en algoritmo y en 4 de ellos supera incluso los aciertos en estructura. El problema Tipo 3.2 con decimales lo deja en blanco el 80% del alumnado. El problema 3.1 con naturales tiene un 100% de aciertos en los tres apartados, en el caso de las fracciones todos los alumnos que lo intentan aciertan la operación, pero no así en el de decimales, donde un 13% de los alumnos la confunde. En el problema 3.3 con naturales, casi la mitad de los alumnos que se enfrentan al problema falla en la operación.

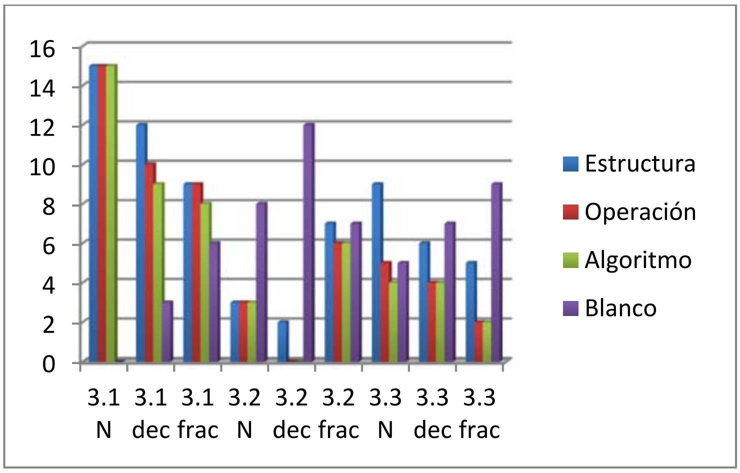


Figura 4.10. Frecuencia absoluta de los aciertos en cada apartado para cada subtipo de problema de Tipo 3.

En esta prueba hemos encontrado tres estrategias de resolución. En el problema 3.1 que, a tenor de los resultados, no les ha supuesto ninguna dificultad, encontramos una representación gráfica (Figura 4.11).

Figura 4.11. Ejemplo de resolución de un problema de Tipo 3.1 decimales por parte de un alumno.

En el problema 3.2 con naturales, que deja en blanco más del 50% de la clase, encontramos un ejemplo de caso particular siendo consciente de ello (Figura 4.12).

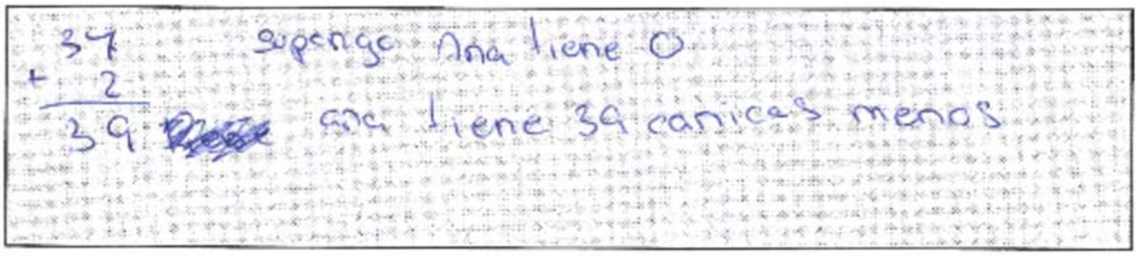


Figura 4.12. Ejemplo de resolución de un problema de Tipo 3.2 N por parte de un alumno.

Como ya hemos comentado, el problema 3.2 con decimales es el problema de esta prueba que más ejercicios en blanco deja. En este caso, encontramos el uso de lenguaje algebraico como estrategia de resolución (Figura 4.13).

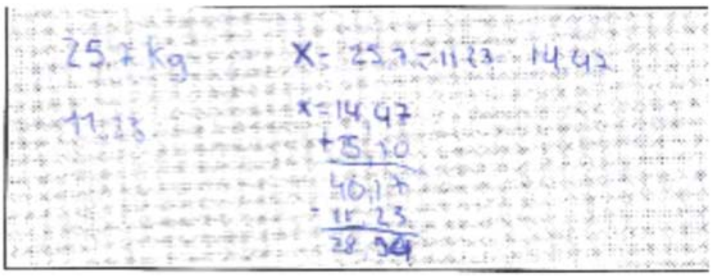


Figura 4.13. Ejemplo de resolución de un problema de Tipo 3.2 decimales por parte de un alumno.

En esta prueba, con toda probabilidad, ha influido de manera negativa la fecha de realización, tan cercana al final de curso. Los ejercicios con números naturales los realiza bien prácticamente el 50% de los alumnos (48,89% de ejercicios correctos). Pero el grado de acierto se reduce en los ejercicios con decimales y fracciones. Con números decimales los realiza completamente bien el 20% de los alumnos y con fracciones el 22%. Este apartado ya presenta problemas de gran dificultad para ellos, a tenor de los resultados. En general, siguen sin utilizar estrategias de resolución.

4.2.5. Prueba 4

4.2.5.1. Descripción de la prueba

La prueba la realizaron los alumnos de 2ºA, 2ºB y 3ºA de ESO del IES Vallecas Magerit (Madrid) del curso 2015—2016. Como el estudio lo estamos centrando en los alumnos de 2ºA del curso 2014-2015, se han seleccionado sus pruebas entre todas las demás. La prueba tuvo lugar entre el 25 y el 30 de septiembre de 2015 (según el grupo en el que estuvieran en el curso 2015—2016)). Participaron 18 alumnos. En 2ºA el curso anterior había 21 alumnos, pero 3 de ellos han cambiado de centro escolar. Dispusieron de un máximo de 55 minutos para su realización. La prueba se desarrolló sin incidentes.

Esta Prueba 4 (ver Anexo I) estaba compuesta por tres problemas, todos ellos de Tipo 4. Es decir, en todos ellos los datos son una cantidad simple S_1 y una transformación de una cantidad simple en otra *T*. En la Tabla 4.15 se recogen el enunciado, el tipo de problema según nuestra clasificación y el tipo de números utilizados en los datos para cada uno de los tres problemas.

Enunciado	**Tipo**	**Tipo de número**
Miguel tiene 186 flores en su jardín y le regala 29 a Juan, ¿cuántas flores le quedan?	4.1	Naturales
Elsa pesaba 57,6 kg, si gana 1,72 kg, ¿cuánto pesa ahora?	4.1	Decimales
Ana tiene 3/4 de kilo de frambuesas, si compra 3/8 de kilo de frambuesas más, ¿cuántos kilos de frambuesas tiene ahora?	4.1	Fracciones

Tabla 4.15. Problemas Prueba 4.

4.2.5.2. Resultados y análisis

Los resultados promedios con números naturales, decimales y fracciones para cada tipo de problemas nos dan la siguiente información:

PROBLEMA 4.1.

En el problema 4.1 los datos son S_1 y $T_1=T(S_1, S_2)$ y la incógnita es S_2. Los problemas del Tipo 4 son los que mejores resultados tienen entre todas las pruebas, los alumnos los realizan correctamente en el 78% de los casos.

En este apartado los problemas han resultado de baja dificultad para ellos, a tenor de los resultados (Figura 4.14). Todas las cantidades que intervienen se pueden calcular. En este apartado no hemos encontrado ninguna estrategia de resolución.

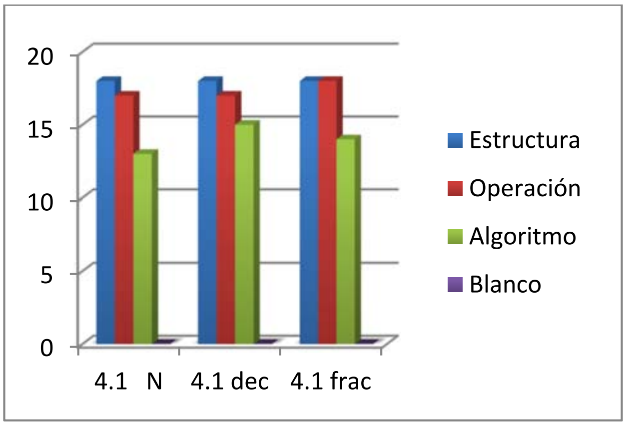


Figura 4.14. Frecuencia absoluta de los aciertos en cada apartado para cada subtipo de problema de Tipo 4.

En resumen, los alumnos han utilizado distintas estrategias en la resolución de las cuatro pruebas:

- Realizar un dibujo para intuir la respuesta (1.2 fracciones, 1.3 fracciones)
- Comparar fracciones antes de operar (1.2 fracciones, 1.3 fracciones, 2.4 fracciones)
- Extraer los datos del problema (1.2 fracciones, 1.3 fracciones, 2.4 naturales, 3.1 fracciones)
- Extraer los datos del problema y representarlos con un dibujo (3.1 decimales)
- Buscar la cantidad que tengo que sumar a la cantidad dada para obtener el resultado deseado, en lugar de restar (1.3 naturales)
- Dividir una cantidad unión en dos partes iguales para averiguar cada una de las cantidades simples que la forman (2.1 naturales) aunque es una estrategia errónea los alumnos la utilizan porque les es muy costoso trabajar con uniones de cantidades.
- Uso del álgebra (2.1 naturales, 2.2 fracciones, 3.2 naturales, 3.2 decimales, 3.3 fracciones)
- Pasar las fracciones a decimales y trabajar con números decimales (3.1 fracciones)

- Dar un valor cualquiera a una cantidad desconocida, para poder resolver el problema. (3.2 naturales)

4.2.6. Prueba 5

4.2.6.1. Descripción de la prueba

La Prueba 5 se realizó durante el curso 2016-2017. En concreto tuvo lugar el 21 de septiembre de 2016. Participaron 14 alumnos de 2ºB del IES Vallecas Magerit que dispusieron de un máximo de 55 minutos para su realización. Dos alumnas dejaron la prueba completamente en blanco, alegando que no sabían realizar ningún problema aunque tampoco mostraron interés. Estas pruebas han sido contabilizadas.

Enunciado	Tipo	Tipo de número
Entre Juan y Luis tienen 5 canicas y entre Juan y Ana tienen 7. ¿Cuántas canicas más o menos que Luis tiene Ana?	5.1	Naturales
Si junto mi dinero con el de Claudia tenemos 32,45€, si lo junto con el de Mercedes 41,22€, ¿cuánto dinero tendría que ganar Claudia para tener la misma cantidad que Mercedes?	5.2	Decimales
Vamos a realizar un pastel, la leche junto a la harina pesan 1/5 de kilo, el azúcar con los huevos pesan 1/6 de kilo, si el pastel no tiene más ingredientes, ¿cuánto pesará?	5.3	Fracciones
Entre Francisco y Manuel tienen 25 camisetas y entre Carlos y Fernando tienen 17. ¿Cuántas camisetas más o menos que Carlos y Fernando tienen entre Francisco y Manuel?	5.4	Naturales
Entre mi perro y mi gato comen 0,750 kg de carne y entre el perro y el gato de mi vecina 0,8 kg. ¿Cuántos kilos deben comer más mis mascotas para comer lo mismo que las de mi vecina?	5.5	Decimales
Entre María y Raquel tienen 157 cromos y entre María y Paula tienen 213. ¿Cuántos cromos debe comprar Raquel para tener los mismos que Paula?	5.2	Naturales
Entre Matilde y Eva tienen 57,8 € y entre Julia y Gema 47,38€. ¿Cuántos euros menos que entre Matilde y Eva tienen entre Julia y Gema?	5.4	Decimales
Entre mi hermana y yo llevamos a una fiesta 3/2 de litro de naranjada, entre mi prima y mi primo llevan 5/4 de litro de limonada. ¿Cuántos litros menos de limonada deberíamos haber traído entre mi hermana y yo para haber traído la misma cantidad que mis primos?	5.5	Fracciones
Entre Alberto y Eva tienen 59 libros y entre Belén y Andrés tienen 46. ¿Cuántos libros tienen todos juntos?	5.3	Naturales
Un refresco y una hamburguesa me cuestan 3,7€, a mi amigo un refresco y un perrito caliente le cuestan 2,9€, ¿Cuál es la diferencia de precio entre un perrito y una hamburguesa?	5.1	Decimales
He estado midiendo los árboles de mi jardín, entre el manzano y el peral miden 36/24 de metro y entre el manzano y el cerezo 45/60, ¿cuántos metros debe crecer el cerezo hasta alcanzar al peral?	5.2	Fracciones

Cuatro amigos se reparten un trabajo. Los dos primeros hacen su parte en 7,4 minutos y los otros dos hacen la suya en 6,32. ¿Cuánto han tardado en total en hacer el trabajo?	5.3	Decimales
Entre Mónica y Lucía vendimian 38/5 de kilo de uva y entre Ester y Eva 27/4. ¿Cuántos kilos menos que entre Mónica y Lucía recogen entre Ester y Eva?	5.4	Fracciones
Entre Marta y Manuela tienen 7 pintalabios y entre Silvia y Ana tienen 9. ¿Cuántos pintalabios deben comprar entre Marta y Manuela para tener los mismas que entre Silvia y Ana?	5.5	Naturales
Entre Irene y Ruth trabajan 53/6 de hora, entre Irene y María 31/4, ¿cuántas horas más o menos que Ruth trabaja María?	5.1	Fracciones

Tabla 4.16. Problemas Prueba 5.

Esta Prueba 5 (ver Anexo I) estaba compuesta por quince problemas, todos ellos de Tipo 5. Es decir, en todos ellos los datos son dos uniones de cantidades simples U_1 y U_2. En la Tabla 4.16 se recogen el enunciado, el tipo de problema según nuestra clasificación y el tipo de números utilizados en los datos para cada uno de los quince problemas.

4.2.6.2. Resultados y análisis

En esta prueba un 35% de los ejercicios quedaron en blanco, el ejercicio 5.2 de fracciones solo consiguió 4 aciertos en estructura. Además, como se observa en la Figura 4.15 muchos ejercicios quedaron por debajo del 50% en aciertos de algoritmo, en el caso de los problemas con fracciones alrededor del 30% de los fallos son debidos al algoritmo. Los problemas 5.1 tanto con decimales como con fracciones se quedaron en blanco en más del 50% de los casos. El problema 5.1 con naturales es el ejercicio con más fallos en operación (más del 20%).

Los problemas Tipo 5 se han resueltos correctamente en el 38,57% de ellos: 48,57% en el caso de números naturales, en un 57,14% en el caso de los decimales y en un 10% en el de las fracciones.

Esta prueba se realizó en septiembre, a esas alturas de curso todavía no se han dado las fracciones en segundo, sí que las vieron en primero, pero en general parecen bastante olvidadas. Al menos en la resolución de los algoritmos de suma y resta de fracciones, notaremos una mejoría cuando avance el curso.

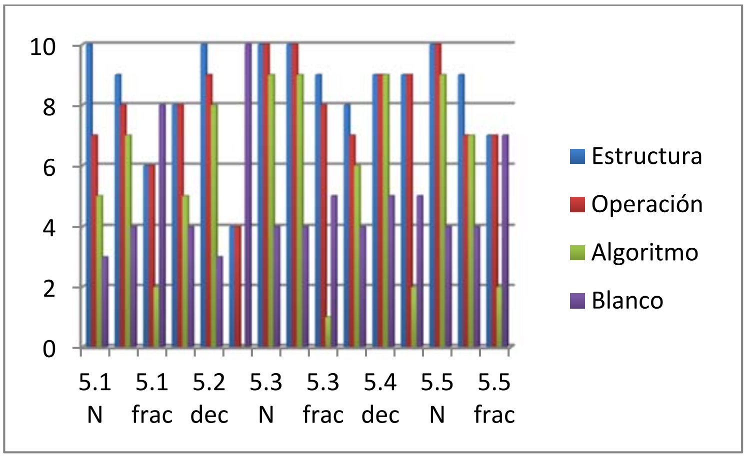


Figura 4.15. Frecuencia absoluta de los aciertos en cada apartado para cada subtipo de problema de Tipo 5.

Los resultados promedios con números naturales, decimales y fracciones para cada tipo de problemas nos dan la siguiente información:

PROBLEMA 5.1.

En el problema 5.1 los datos son $U_1=U(s, s')$ y $U_2=U(s, s'')$ donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas y la incógnita es $C_1=C(s', s'')$. Los problemas del Tipo 5.1 son realizados correctamente en el 33,33% de los casos.

PROBLEMA 5.2.

En el problema 5.2 los datos son $U_1=U(s, s')$ y $U_2=U(s, s'')$ donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas y la incógnita es $T_1=T(s', s'')$. Los problemas del Tipo 5.2 son realizados correctamente en el 30,95% de los casos.

PROBLEMA 5.3.

En el problema 5.3 los datos son $U_1=U(s, s')$ y $U_2=U(s'', s''')$ donde s, s', s'' y s''' son cantidades simples desconocidas y la incógnita es $U_3=U(U_1, U_2)$. Los problemas del Tipo 5.3 son realizados correctamente en el 45,24% de los casos. Son los problemas de Tipo 5 que mejores resultados obtienen.

PROBLEMA 5.4.

En el problema 5.4 los datos son $U_1=U(s, s')$ y $U_2=U(s'', s''')$ donde s, s', s'' y s''' son cantidades simples desconocidas y la incógnita es $C_1=C(U_1, U_2)$. Los problemas del Tipo 5.4 son realizados correctamente en el 40,48% de los casos.

PROBLEMA 5.5.

En el problema 5.5 los datos son $U_1=U(s, s')$ y $U_2=U(s'', s''')$ donde s, s', s'' y s''' son cantidades simples desconocidas y la incógnita es $T_1=T(U_1, U_2)$. Los problemas del Tipo 5.5 son realizados correctamente en el 42,86% de los casos.

En los problemas Tipo 5 hemos visto muy pocas estrategias de resolución. En este caso la única estrategia de resolución que utilizaron los alumnos fue dar valores particulares (Figura 4.16)

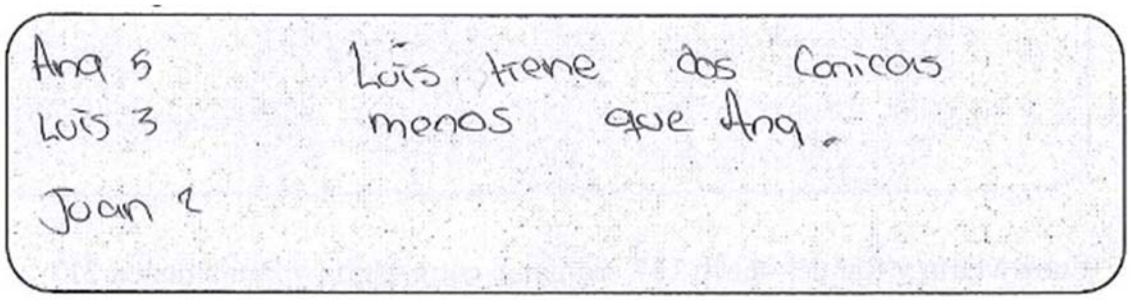

Ana 5 Luis tiene dos Canicas
Luis 3 menos que Ana.
Juan 2

Figura 4.16 Ejemplo de resolución de un problema de Tipo 5.1 N por parte de un alumno.

4.2.7. Prueba 6

4.2.7.1. Descripción de la prueba

La Prueba 6 se realizó durante el curso 2016-2017. Tuvo lugar el 28 de octubre de 2016. Participaron 17 alumnos de la clase 2ºB del IES Vallecas Magerit que dispusieron de un máximo de 55 minutos para su realización. La prueba se desarrolló sin incidentes.

Esta Prueba 6 (ver Anexo I) estaba compuesta por doce problemas, de los Tipos 6 y 7. En los problemas de Tipo 6 los datos son una unión U_1 y una comparación C_1 de cantidades simples. En los de Tipo 7 una unión U_1 y una transformación T_1 de cantidades simples. En la Tabla 4.17 se recogen el enunciado, el tipo de problema según nuestra clasificación y el tipo de números utilizados en los datos para cada uno de los doce problemas.

Enunciado	**Tipo**	**Tipo de número**
Entre Juan y Luis tienen 153 cromos. Ana tiene 26 cromos menos que Juan. ¿Cuántos cromos tienen entre Ana y Luis?	6.1	Naturales
Esta semana está siendo muy lluviosa. Entre el lunes y el martes cayeron 7/100 de litro de agua. El miércoles cayeron 2/100 de litro más que el jueves. ¿Cuántos litros más que el jueves cayeron entre los tres primeros días de la semana?	6.2	Fracciones
Entre Manuel y Miguel llevan tejidos 28,4 cm. Rubén teje 4,1 cm menos que Daniel. ¿Cuántos centímetros tiene que tejer Rubén para haber tejido tantos centímetros como entre Manuel, Miguel y Daniel juntos?	6.3	Decimales
Entre Enrique y Cristina tienen 5 peces de colores. Los padres de Cristina le regalan 3 peces más por su cumpleaños. ¿Cuántos peces tienen ahora entre los dos?	7.1	Naturales
Entre Inés y Cristina trabajan 49/6 de hora, Luisa trabaja 3/4 de hora menos que Inés, ¿cuántas horas trabajan entre Cristina y Luisa?	6.1	Fracciones

Hoy he visto cuatro capítulos de Bob Esponja, entre los dos primeros han durado 22,7 minutos, el tercero ha durado 2,06 minutos más que el cuarto. ¿Cuántos minutos menos que entre los tres primeros ha durado el cuarto?	6.2	Decimales
Entre Claudia y Nora resuelven 22 problemas. Olivia resuelve 12 problemas más que Manuela. ¿Cuántas Problemas tiene que resolver Olivia para haber resuelto los mismos que entre Claudia, Nora y Manuela juntas?	6.3	Naturales
Esta mañana en el mercado he comprado 5/3 de kilo entre uvas y peras. Si antes de llegar a casa me como 1/15 de kilo de uvas, ¿cuánto pesa la fruta que llevo al llegar a casa?	7.1	Fracciones
Entre María y Pablo tienen 218,26 €. Carmen tiene 38,73 € más que Pablo, ¿cuántos euros tienen entre María y Carmen?	6.1	Decimales
Entre Ramón y Adrián tienen 64 libros. Leo tiene 23 libros menos que Carlos. ¿Cuántos libros más que Carlos tienen entre Ramón, Adrián y Leo?	6.2	Naturales
Entre Eva y Marta han recorrido 25/80 de kilómetro, Silvia recorre 2/7 menos que Mónica, ¿cuánto tiene que recorrer Silvia para recorrer los mismos kilómetros que entre las otras tres chicas juntas?	6.3	Fracciones
Entre Raúl y Paula tienen 125,34 €, Raúl se gasta 38,5€ en un libro, ¿cuánto dinero tienen ahora entre los dos?	7.1	Decimales

Tabla 4.17. Problemas Prueba 6.

4.2.7.2. Resultados y análisis

En la Figura 4.17.observamos que más de la mitad de los ejercicios quedaron en blanco, solo dos problemas (6.1 y 7.1 para naturales) superan los 10 aciertos en estructura (de un total de 17 alumnos que realizaron la prueba). En operación solo los problemas 7.1 con naturales y con decimales superan el 50% de aciertos.

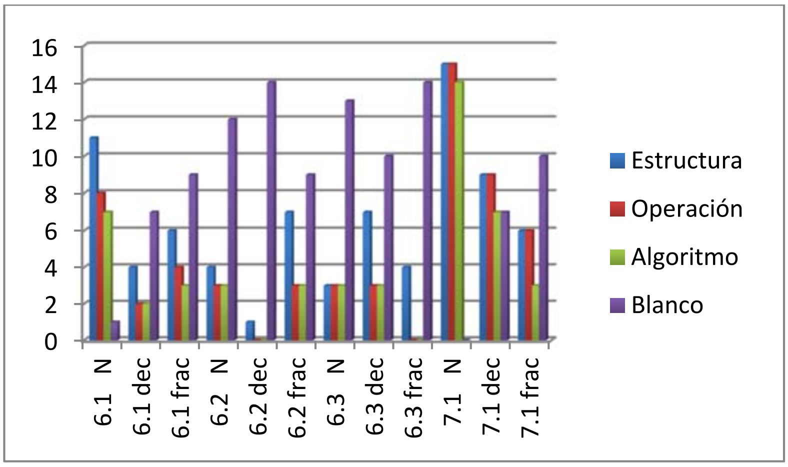


Figura 4.17. Frecuencia absoluta de los aciertos en cada apartado para cada subtipo de problema de Tipos 6 y 7.

Los resultados promedios con números naturales, decimales y fracciones para cada tipo de problemas nos dan la siguiente información:

PROBLEMA 6.1.

En el problema 6.1 los datos son $U_1=U(s, s')$ y $C_1=C(s, s'')$ donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas y la incógnita es $U_2=U(s', s'')$. Los problemas del Tipo 6.1 son realizados correctamente en el 23,53% de los casos.

PROBLEMA 6.2.

En el problema 6.2 los datos son $U_1=U(s, s')$ y $C_1=C(s'', s''')$ donde s, s' y s'' y s''' son cantidades simples desconocidas y la incógnita es $C_2=C(s'', U(s''',U_1))$. Los problemas del Tipo 6.2 son realizados correctamente en el 19,61% de los casos.

PROBLEMA 6.3.

En el problema 6.3 los datos son $U_1=U(s, s')$ y $C_1=C(s'', s''')$ donde s, s' y s'' y s''' son cantidades simples desconocidas y la incógnita es $T_2=T(s'', U(s''',U_1))$. Los problemas del Tipo 6.3 son realizados correctamente en el 11,76% de los casos.

PROBLEMA 7.1.

En el problema 7.1 los datos U_1 =U(s, s') y T_1 =T(s, s'') donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas y la incógnita es $U_2=U(s', s'')$. Los problemas del Tipo 7.1 son realizados correctamente en el 47,06% de los casos.

En todos los problemas de esta prueba aparecen cantidades que no podemos calcular. Esto supone una gran dificultad para nuestros alumnos. Esta dificultad a algunos alumnos les lleva a plantear más estrategias de resolución, a otros, a dejar los problemas en blanco. Las estrategias utilizadas en estos problemas han sido:

Dar un caso particular (no consciente) (Figura 4.18).

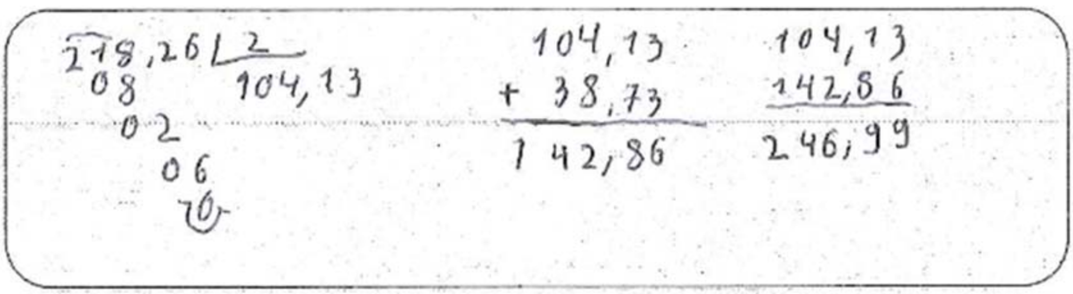


Figura 4.18. Ejemplo de resolución de un problema de Tipo 6.1. decimales por parte de un alumno.

En la figura 4.19 también dan un caso particular, pero puede ser de forma consciente.

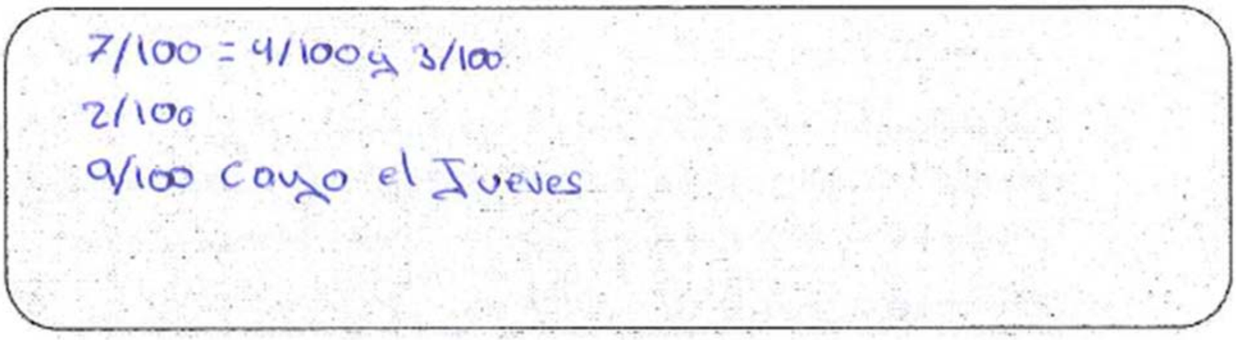


Figura 4.19. Ejemplo de resolución de un problema de Tipo 6.2. fracciones por parte de un alumno.

Señalar las palabras claves. (Figura 4.20)

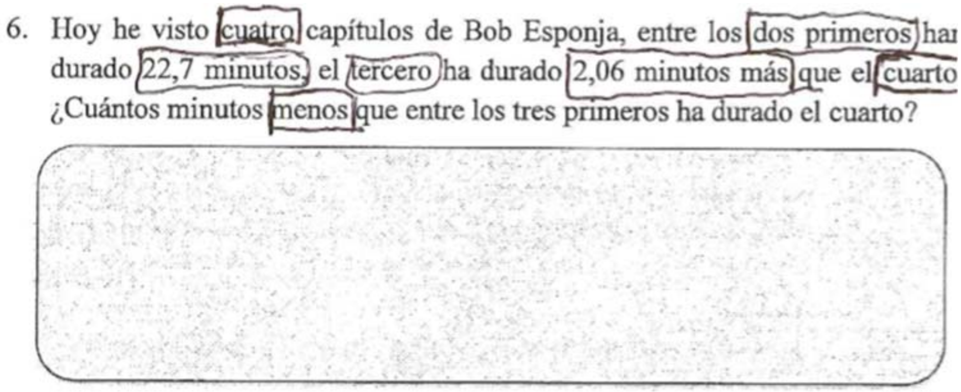


Figura 4.20. Ejemplo de resolución de un problema de Tipo 6.2. decimales por parte de un alumno.

Un alumno en vez de restar 22–12, busca la cantidad que tiene que sumar a 12 para llegar a 22 (Figura 4.21). Ya nos ha aparecido en más ocasiones. A veces a nuestros alumnos les resulta más fácil buscar la cantidad a sumar que restar.

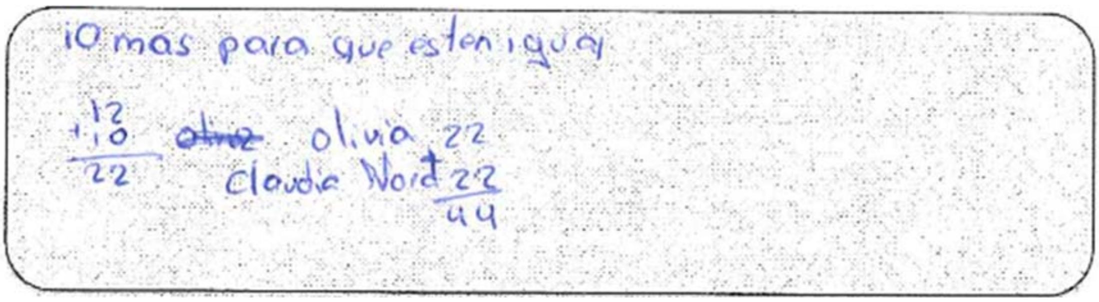


Figura 4.21. Ejemplo de resolución de un problema de Tipo 6.3. N por parte de un alumno.

Los problemas Tipo 6 se han resuelto correctamente en el 25,5% en el caso de números naturales, en un 9,8% en el caso de los decimales y en un 19,6% en el de las fracciones.

Los problemas Tipo 7 han funcionado bastante mejor que sus predecesores con un 82,4% de respuestas correctas con números naturales, 41,2% con decimales y 17,7% con fracciones.

4.2.8. Prueba 7

4.2.8.1. Descripción de la prueba

La Prueba 7 se realizó durante el curso 2016-2017. La prueba la realizaron los alumnos de 2ºB de ESO del IES Vallecas Magerit (Madrid). Se han juntado los problemas Tipo 8 y Tipo 9. La prueba constó de 18 problemas. Para pasarla se dividió en cuatro partes, la primera con 8 problemas, la segunda con 3, la tercera con 4 y la cuarta con 3. El dividirla en partes más pequeñas hizo que los alumnos se enfrentaran a ella con mayor motivación y menos protestas.

El proceso de pasar tantos problemas, se está haciendo largo. En general a los alumnos la parte de los problemas es una de las partes de las matemáticas que más les desagrada, se sienten bastante inseguros ante ellos y no tienen hábito de resolverlos. Por otro lado, estar toda la sesión de clase haciendo una misma actividad, les cansa y su atención decae. Probablemente si ciertos problemas hubieran aparecido al principio de las pruebas hubieran tenido mejores resultados que apareciendo al final.

Al dividir la prueba en partes de 3 o 4 problemas solo necesitamos dedicar media clase a ello, pudiendo dedicar la otra media a otras actividades.

Además de las ventajas que observamos, hemos llegado a un acuerdo con los alumnos, haremos todos los problemas que faltan pero en partes de 3 o 4 problemas. Llegar a un acuerdo con ellos les motiva para enfrentarse a las pruebas dando lo mejor de ellos mismos, ya que se sienten partícipes del proceso.

El número de alumnos que participaron en la prueba y fechas fueron:

- Parte 1 (problemas 1 a 8): 18 alumnos, 30-1-2017.
- Parte 2 (problemas 9 a 11): 16 alumnos, 27-2-2017.
- Parte 3 (problemas 12 a 15): 18 alumnos, 8-3-2017.
- Parte 4 (problemas 16 a 18): 19 alumnos 16-3-2017.

Esta Prueba 7 (ver Anexo I) estaba compuesta por 18 problemas, de los Tipos 8 y 9. En los problemas de Tipo 8 los datos son comparaciones entre cantidades simples C_1 y C_2. En los de Tipo 9 los datos son una comparación y una transformación de cantidades simples C_1 y T_1. En la Tabla 4.18 se recogen el enunciado, el tipo de problema según nuestra clasificación y el tipo de números utilizados en los datos para cada uno de los 18 problemas.

	Enunciado	Tipo	Tipo de número
Parte 1	Juan tiene 2 canicas más que Luis y Luis tiene 4 canicas menos que Ana. ¿Cuál es la diferencia entre el número de canicas de Juan y el de Ana?	8.1	Naturales
	Lorena pesa 12/5 de kilo más que Carlos y 23/10 menos que Mario, ¿cuántos kilos debería adelgazar Mario para pesar lo mismo que Carlos?	8.2	Fracciones

	Ayer por la tarde estuve un rato viendo la televisión, vi Clan durante 3,47 minutos más que Boing y Disney Chanel durante 1,5 minutos menos que Neox, ¿cuántos minutos más pasé viendo Clan y Disney Chanel que Boing y Neox?	8.3	Decimales
	Lucas tiene 23 libros más que Mateo. Si Mateo se compra 2 libros más, ¿cuántos tiene ahora menos que Lucas?	9.1	Naturales
	El reparto calórico ideal de cada comida recomienda ingerir las mismas calorías a media mañana y a media tarde y 10/100 más calorías en la comida que en la cena, ¿cuántas calorías más hay que ingerir entre media mañana y la comida más que entre media tarde y la cena?	8.3	Fracciones
	María, Irene y Ruth construyen una torre cada una. La torre de Ruth mide 27,34 cm menos que la de María y la torre de María mide 15,7 cm más que la de Irene, ¿Cuántos centímetros debe añadir Ruth a su torre si quiere que mida tanto como la de Irene?	8.2	Decimales
	Carmen tiene 6 lápices más que Gemma y Ana tiene 7 más que María. ¿Cuántas lápices deben comprar entre Gemma y María para tener los mismos que entre Carmen y Ana?	8.4	Naturales
	Elena tiene 1/10 de kilo de pipas más que Luis, si Luis se compra 1/20 de kilo de pipas más, ¿cuántos kilos de pipas menos que Elena tiene Luis?	9.1	Fracciones
Parte 2	Unai tiene 38,7€ más que Francisco y Francisco tiene 9,83€ más que Carlos, ¿Cuál es la diferencia entre la cantidad de euros de Carlos y de Unai?	8.1	Decimales
	Omar tiene 73 muñecos más que Dani y Dani tiene 43 muñecos más que Sergio. ¿Cuántos muñecos tendría que comprar Sergio para tener los mismos que Omar?	8.2	Naturales
	Luisa tiene 34,5 € menos que Francisco y Juana tiene 18,53€ menos que Manuela, ¿cuánto dinero tendrían que gastar entre Francisco y Manuela para tener el mismo dinero que entre Luisa y Juana?	8.4	Decimales
Parte 3	En un maratón Manuel lleva recorridos 13/4 de kilómetro más que Carlos. Manuel recorre 11/12 de kilómetro más y llega a la meta, ¿cuántos kilómetros debe recorrer Carlos para llegar a la meta?	9.2	Fracciones
	Teresa tiene 145,64€ más que David, si Teresa se gasta 34,85€ en dos libros, ¿cuánto dinero tiene que ganar David para tener la misma cantidad que Teresa?	9.2	Decimales
	Lucía trabaja ¾ de hora menos que Arancha y Arancha trabaja ½ hora más que Belén, ¿Cuántas horas más o menos que Belén trabaja Lucía?	8.1	Fracciones
	Raquel resuelve 5 problemas más que Esther y Sonia 4 más que Elisa. ¿Cuántos problemas más que entre Esther y Elisa han resuelto entre Raquel y Sonia?	8.3	Naturales
Parte 4	Esta mañana he estado en el mercado, he comprado 4/5 de kilo menos de fresas que de manzanas y 4/3 de kilo más de melón que de sandía, ¿cuántos kilos entre manzanas y sandías tendré que comprar para haber comprado lo mismo que de fresas y melón?	8.4	Fracciones

	Andrés y Marcos están tejiendo una bufanda cada uno, Andrés lleva 13,5 cm más que Marcos, si Andrés teje 5,17 cm más, ¿cuántos centímetros menos que Andrés lleva tejidos Marcos?	9.1	Decimales
	Carolina este año ha ganado 5 medallas más que Raúl, si Raúl gana dos medallas más, ¿cuántas medallas debe ganar Raúl para tener las mismas que Carolina?	9.2	Naturales

Tabla 4.18. Problemas Prueba 7.

4.2.8.2. Resultados y análisis

Los resultados promedios con números naturales, decimales y fracciones para cada tipo de problemas de Tipo 8 nos dan la siguiente información:

PROBLEMA 8.1.

En el problema 8.1 los datos son $C_1=C(s, s')$ y $C_2=C(s, s'')$ donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas y la incógnita es $C_3=C(s', s'')$. Los problemas del Tipo 8.1 son realizados correctamente en el 23,84% de los casos.

PROBLEMA 8.2.

En el problema 8.2 los datos son $C_1=C(s, s')$ y $C_2=C(s, s'')$ donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas y la incógnita es $T_1=T(s', s'')$. Los problemas del Tipo 8.2 son realizados correctamente en el 18,29% de los casos.

PROBLEMA 8.3.

En el problema 8.3 los datos son $C_1=C(s, s')$ y $C_2=C(s'', s''')$ donde s, s', s'' y s''' son cantidades simples desconocidas y la incógnita es $C_3=C(U(s, s''), U(s', s'''))$. Los problemas del Tipo 8.3 son realizados correctamente sólo en el 1,85% de los casos. En términos absolutos, sólo un alumno resuelve bien el problema con números naturales y ninguno lo resuelve con decimales o fracciones.

PROBLEMA 8.4.

En el problema 8.4 los datos son $C_1=C(s, s')$ y $C_2=C(s'', s''')$ donde s, s', s'' y s''' son cantidades simples desconocidas y la incógnita es $T_1=T(U(s, s''),U(s', s'''))$. Los problemas del Tipo 8.4 son realizados correctamente en el 26,89% de los casos.

En todos los problemas de Tipo 8 intervienen cantidades que no pueden ser calculadas. Como ya hemos visto con anterioridad, esto dificulta mucho la resolución de estos problemas por parte de nuestros alumnos. Gráficamente podemos observar los bajos porcentajes de acierto, tanto en operación como en algoritmo, en la Figura 4.22. En los problemas 8.1 con fracciones, 8.2 decimales, 8.3 con todos los tipos de números y 8.4 con naturales, más de la mitad de los alumnos dejan el ejercicio en blanco. También llama la atención un 61% de fallos en operación en el problema 8.1 con naturales, un 38% con decimales; un 38% en el 8.2 con naturales, un 39% en el 8.2 con fracciones; un 28% en el 8.3 con decimales; 38% en el 8.4 con decimales, 68% con fracciones.

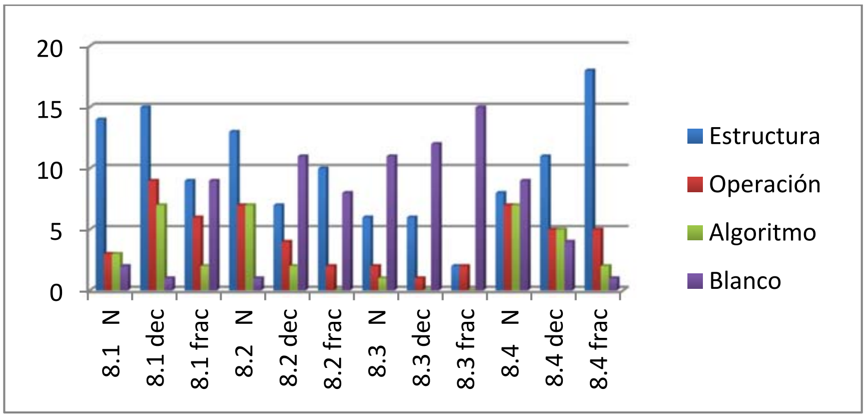


Figura 4.22. Frecuencia absoluta de los aciertos en cada apartado para cada subtipo de problema de Tipo 8.

Los resultados promedios con números naturales, decimales y fracciones para cada tipo de problemas de Tipo 9 nos dan la siguiente información:

PROBLEMA 9.1.

En el problema 9.1 los datos son C_1=C(s, s') y T_1=T(s', s'') donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas y la incógnita es C_2=C(s, s''). Los problemas del Tipo 9.1 son realizados correctamente en el 41,91% de los casos.

PROBLEMA 9.2.

En el problema 9.2 los datos son C_1=C(s, s') y T_1=T(s', s'') donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas y la incógnita es T_2=T(s, s''). Los problemas del Tipo 9.2 son realizados correctamente en el 43,27% de los casos.

Los problemas Tipo 9 han funcionado bastante mejor que sus predecesores con un 42,59% de respuestas correctas en total. 67,69% de respuestas correctas con números naturales, 43,42% con decimales y 16,67% con fracciones (Figura 4.23). A pesar de ello, en el problema 9.1 con fracciones un 56% de los problemas queda en blanco. El porcentaje de fallo en operación es del 42 % en el 9.1 con decimales y 44% en el 9.2 con fracciones.

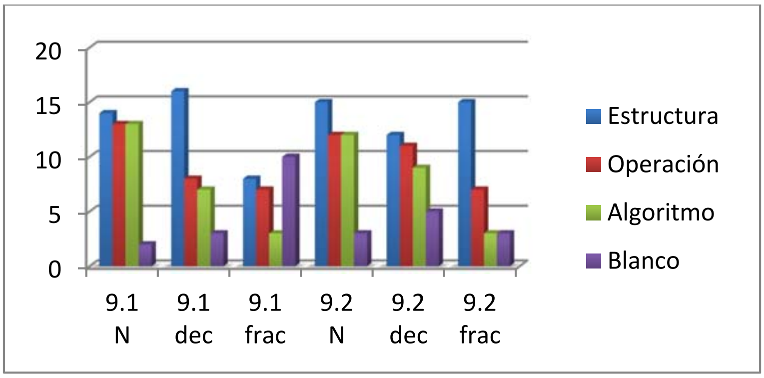


Figura 4.23. Frecuencia absoluta de los aciertos en cada apartado para cada subtipo de problema de Tipo 9.

A continuación podemos observar algunos ejemplos de las escasas estrategias de resolución empleadas en estos dos tipos de problemas:

El uso de lenguaje algebraico es recurrente, como podemos observar en la Figura 4.24.

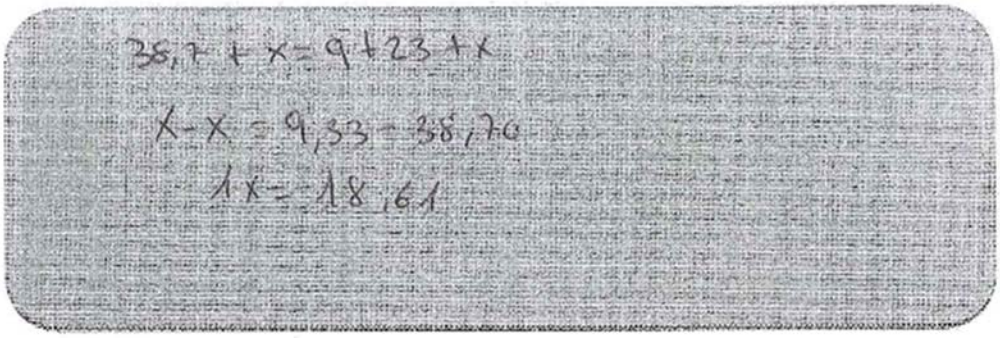


Figura 4.24. Ejemplo de resolución de un problema de Tipo 8.1 decimales por parte de un alumno.

Búsqueda de un caso particular (Figura 4.25).

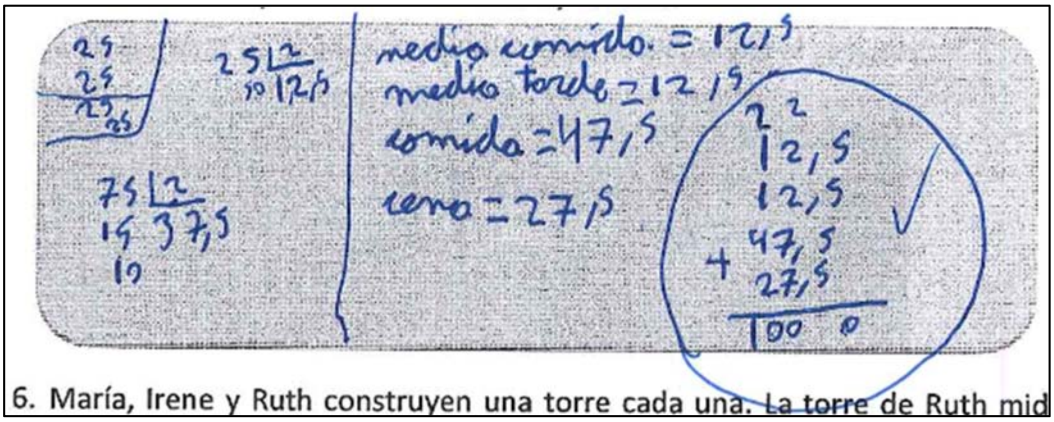


Figura 4.25. Ejemplo de resolución de un problema de Tipo 8.3. fracciones por parte de un alumno.

Realización de representaciones gráficas (Figura 4.26).

Figura 4.26. Ejemplo de resolución de un problema de Tipo 8.1. N por parte de un alumno.

A veces nos es muy difícil catalogar los fallos, un problema mal planteado se puede considerar como fallo en operación o fallo en estructura porque a veces no nos queda muy claro qué intentaba hacer nuestro alumno.

Una estrategia de resolución muy utilizada es le álgebra, pero como hemos comprobado en muchos de los problemas, esta estrategia, al menos en este tipo de problemas, conduce a muchos errores. No sabemos si recurren al álgebra porque no saben otra forma de resolver el problema o por "rutina". Si se motiva a los estudiantes a utilizar métodos aritméticos en lugar de algebraicos se pueden lograr mejores resultados y mejores modos de actuación hacia el aprendizaje de las matemáticas (Pérez et al., 2018).

En los problemas 8-9 hemos visto muy pocas estrategias de resolución diferentes al álgebra, en dos ocasiones los alumnos han hecho un dibujo referente al enunciado y en una ocasión se han dado valores particulares.

Los problemas Tipo 8 se han resuelto correctamente en el 17,71% de ellos: en un 26,22% en el caso de números naturales, en un 21,53% en el caso de los decimales y en un 5,41% en el de las fracciones.

Los problemas Tipo 9 han funcionado bastante mejor que sus predecesores con un 42,59% de respuestas correctas en total. 67,69% de respuestas correctas con números naturales, 43,42% con decimales y 16,67% con fracciones.

Como viene siendo habitual los resultados mejores se obtienen con números naturales, seguidos de números decimales y muy alejados los resultados con fracciones.

En esta serie el problema 8.3 ha obtenido resultados significativamente malos, sólo un 1,85% de acierto, muy posiblemente por su complejidad: los datos son $C_1=C(s, s')$ y $C_2=C(s'', s''')$ donde s, s', s'' y s''' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $C_3=C(U(s, s''), U(s', s'''))$ (la incógnita es una comparación de uniones de cantidades desconocidas)

Sin embargo el problema 8.4 (donde la incógnita es una transformación de uniones de cantidades desconocidas) Los datos son $C_1=C(s, s')$ y $C_2=C(s'', s''')$ donde s, s', s'' y s''' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $T_1=T(U(s, s''), U(s', s'''))$; mejora hasta casi un 27% de aciertos.

4.2.9. Prueba 8

4.2.9.1. Descripción de la prueba

La Prueba 8 se realizó durante el curso 2016-2017. La prueba la realizaron los alumnos de 2ºB de ESO del IES Vallecas Magerit (Madrid). La prueba constó de 21 problemas. Para pasarla se dividió en 7 partes de tres problemas cada una.

Número de alumnos que participaron en la prueba y fechas:

- Parte 1 (problemas 1 a 3): 19 alumnos, 24-3-2017.

- Parte 2 (problemas 4 a 6): 19 alumnos, 31-3-2017.
- Parte 3 (problemas 7 a 9): 19 alumnos, 24-4-2017.
- Parte 4 (problemas 10 a 12): 16 alumnos 28-4-2017.
- Parte 5 (problemas 13 a 15): 19 alumnos, 3-5-2017.
- Parte 6 (problemas 16 a 18): 18 alumnos, 4-5-2017.
- Parte 7 (problemas 19 a 21): 19 alumnos, 5-5-2017.

Para cada parte tuvieron unos 20 minutos para hacerla. Las pruebas se realizaron sin incidentes.

Esta Prueba 8 (ver Anexo I) estaba compuesta por 21 problemas, todos ellos de Tipo 10. Es decir, en todos ellos los datos son dos transformaciones entre cantidades simples T_1 y T_2. En la Tabla 4.19 se recogen el enunciado, el tipo de problema según nuestra clasificación y el tipo de números utilizados en los datos para cada uno de los nueve problemas.

	Enunciado	**Tipo**	**Tipo de número**
Parte 1	Marta es alfarera. En su almacén tiene unos cuantos jarrones. Durante la semana ha hecho 4 jerrones y ha vendido 10, ¿cómo ha variado el número de jarrones del almacén?	10.7	Naturales
	Muriel se encuentra 2,77 € y se gasta cierta cantidad de ellos. Si vuelve a casa con 1,3 € más de los que llevaba al salir, ¿cuántos euros se gastó?	10.2	Decimales
	Una máquina tejedora teje algunos metros de tejido por la mañana, por la tarde teje 20/3 de metro, si al final del día ha tejido un total de 31/2 de metro, ¿cuántos metros ha tejido por la mañana?	10.3	Fracciones
Parte 2	María en enero engordó 0,800 kg y en febrero adelgazó 0,750 kg, ¿cuánto ha variado su peso?	10.1	Decimales
	Una piscina se puede vaciar por 2 desagües. Si abro solo el primero durante una hora salen 1234/3 litros. Si abro solo el segundo durante una hora salen 2471/6 litros. ¿Por qué desagüe sale más agua en una hora, y cuánta?	10.7	Fracciones
	Mi Colegio FC ha marcado 5 goles en el segundo tiempo. Si al final del partido había marcado un total de 9 goles, ¿cuántos había marcado en el primer tiempo?	10.3	Naturales
Parte 3	Tengo un peral en el jardín que el año pasado creció 1/3 de metro y este año ha crecido 1/5 de metro, ¿cuánto ha crecido entre los dos años?	10.1	Fracciones
	A Juan le regalan 5 canicas sus padres y después sus abuelos le regalan unas cuantas más. En total le han regalado 7 canicas, ¿cuántas le han regalado sus abuelos?	10.2	Naturales
	Gemma se compra un libro por 12,56€. Después se compra unos zapatos que le cuestan 28,13 €. ¿cuántos euros más cuestan los zapatos que el libro?	10.7	Decimales
Parte 4	Por la mañana Juan compra 4 canicas nuevas. Jugando en el patio pierde 2. ¿Cuántas canicas más o menos tiene Juan al final del día respecto del inicio?	10.4	Naturales

	Por realizar cierto trabajo, Daniel ha ganado 23,56€ y Javier 18,87€, ¿cuántos euros han ganado entre los dos?	10.5	Decimales
	Tengo 2 botellas con cierta cantidad de agua en cada una. Echo 5/6 de litro en la primera y 3/4 de litro en la segunda. ¿Cuánta cantidad de agua más o menos que en la primera he echado en la segunda botella?	10.6	Fracciones
Parte 5	En una cuenta bancaria se ingresan 123, 85€. Después pasa un recibo de 96,77€, ¿cuándo hay más dinero, antes o después de hacer las dos operaciones? ¿Cuánto?	10.4	Decimales
	Tengo 2 botellas con cierta cantidad de agua en cada una. Echo 5/6 de litro en la primera y 3/4 de litro en la segunda. ¿Cuánta cantidad de agua he echado en total entre ambas botellas?	10.5	Fracciones
	Jugando en el patio Juan y Ana forman equipo. Juan pierde 3 canicas y Ana gana 1. ¿Cuántas canicas más o menos tienen al final de recreo entre los dos?	10.6	Naturales
Parte 6	María echa 1/3 de litro en una bañera con agua, después saca 1/6 de litro, ¿qué cantidad más de agua hay ahora en la bañera?	10.4	Fracciones
	Felipe compra 32 cromos y Daniela compra 35. ¿Cuántos cromos han comprado entre los dos?	10.5	Naturales
	Elisa y Raquel tienen una empresa, la última operación de Elisa conlleva unas pérdidas de 1875,45€ y la de Raquel unos beneficios de 3564,12€. ¿Cuánto dinero más o menos tiene la empresa tras estas dos operaciones?	10.6	Decimales
Parte 7	Marta es alfarera. Por la mañana elabora 9 jarrones y por la tarde 7, ¿cuántos jarrones ha elaborado más por la mañana que por la tarde?	10.1	Naturales
	Gemma se compra un libro. Después se compra unos zapatos que le cuestan 32,24 €. Si en total se gastó 58,1€, ¿cuánto le costó el libro?	10.3	Decimales
	Arturo el lunes compra 3/4 de kilo de fresas y el martes cierta cantidad más. Si entre los dos días ha comprado 15/8 de kilo de fresas, ¿cuántas fresas compró el martes?	10.2	Fracciones

Tabla 4.19. Problemas Prueba 8.

4.2.9.2. Resultados y análisis

Como podemos observar en la Figura 4.27 y como más adelante desarrollaremos, los resultados en este tipo de problemas mejoraron de forma considerable con respecto a todos sus predecesores (salvo los problemas de Tipo 4 que prácticamente igualaron).

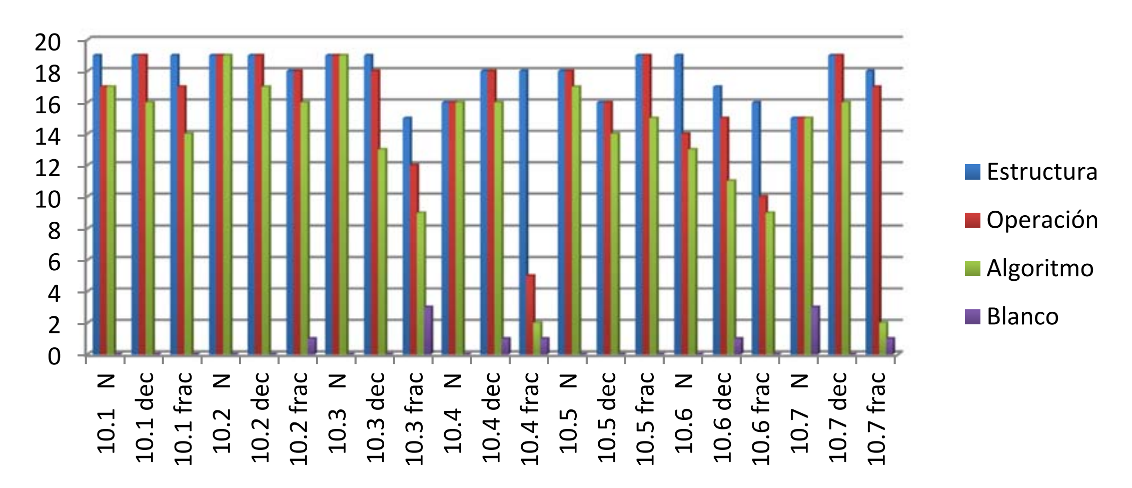


Figura 4.27 . Frecuencia absoluta de los aciertos en cada apartado para cada subtipo de problema de Tipo 10.

PROBLEMA 10.1.

En el problema 10.1 los datos son $T_1=T(s, s')$ y $T_2=T(s', s'')$ donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas y la incógnita es $T_3=T(s, s'')$. Los problemas del Tipo 10.1 son realizados correctamente en el 82,46% de los casos. Todos los alumnos se enfrentan al problema, solo hay dos fallos en operación en naturales y en decimales. En el caso de fracciones solo hay tres fallos en el algoritmo.

PROBLEMA 10.2.

En el problema 10.2 los datos son $T_1=T(s, s')$ y $T_2=T(s, s'')$ donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas, la incógnita es $T_3=T(s', s'')$. Los problemas del Tipo 10.2 son realizados correctamente en el 91,23% de los casos. Con ninguno de los tres tipos de números aparecen errores en operación.

PROBLEMA 10.3.

En el problema 10.3 los datos son $T_1=T(s, s'')$ y $T_2=T(s', s'')$ donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas, la incógnita es $T_3=T(s, s')$. Los problemas del Tipo 10.3 son realizados correctamente en el 71,93% de los casos. En el caso de los números decimales aparece un error en operación, con fracciones, aparecen tres. Además, el ejercicio de fracciones desanima a tres alumnos a enfrentarse a él.

PROBLEMA 10.4.

En el problema 10.4 los datos son $T_1=T(s, s')$ y $T_2=T(s', s'')$ donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas, la incógnita es $C_1=C(s, s'')$. Los problemas del Tipo 10.4 son realizados correctamente en el 89,18% de los casos. Entre los tres problemas, solo aparece un fallo en operación.

PROBLEMA 10.5.

En el problema 10.5 los datos son $T_1=T(s, s')$ y $T_2=T(s'', s''')$ donde s, s', s'' y s''' son cantidades simples desconocidas, la incógnita es $T_3=T(U(s, s''), U(s', s'''))$. Los problemas del Tipo 10.5 son realizados correctamente en el 86,96% de los casos. Siendo todos los errores debidos al algoritmo.

PROBLEMA 10.6.

En el problema 10.6 los datos son $T_1=T(s, s')$ y $T_2=T(s'', s''')$ donde s, s', s'' y s''' son cantidades simples desconocidas, la incógnita es $C_1=C(U(s, s''), U(s', s'''))$. Los problemas del Tipo 10.6 son realizados correctamente en el 61,93% de los casos. De los fallos, el 66% son debidos a la mala elección de la operación.

PROBLEMA 10.7

En el problema 10.7 los datos son $T_1=T(s, s')$ y $T_2=T(s, s'')$ donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas, la incógnita es $C_1=C(T_1, T_2)$. Los problemas del Tipo 10.7 son realizados correctamente en el 57,89% de los casos. El 75% de los errores son debidos a fallos de algoritmo.

Los problemas 10.6 y 10.7 han sido los que más dificultades han supuesto para nuestros alumnos dentro del Tipo 10.

Las estrategias que hemos encontrados en este apartado han sido:

Paso de fracción a decimal (Figura 4.28):

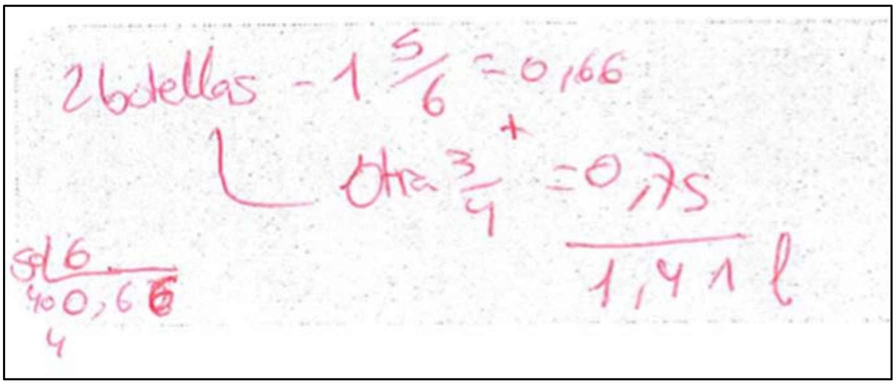


Figura 4.28. Ejemplo de resolución de un problema de Tipo 10.5. fracciones por parte de un alumno.

Uso de lenguaje algebraico (Figura 4.29):

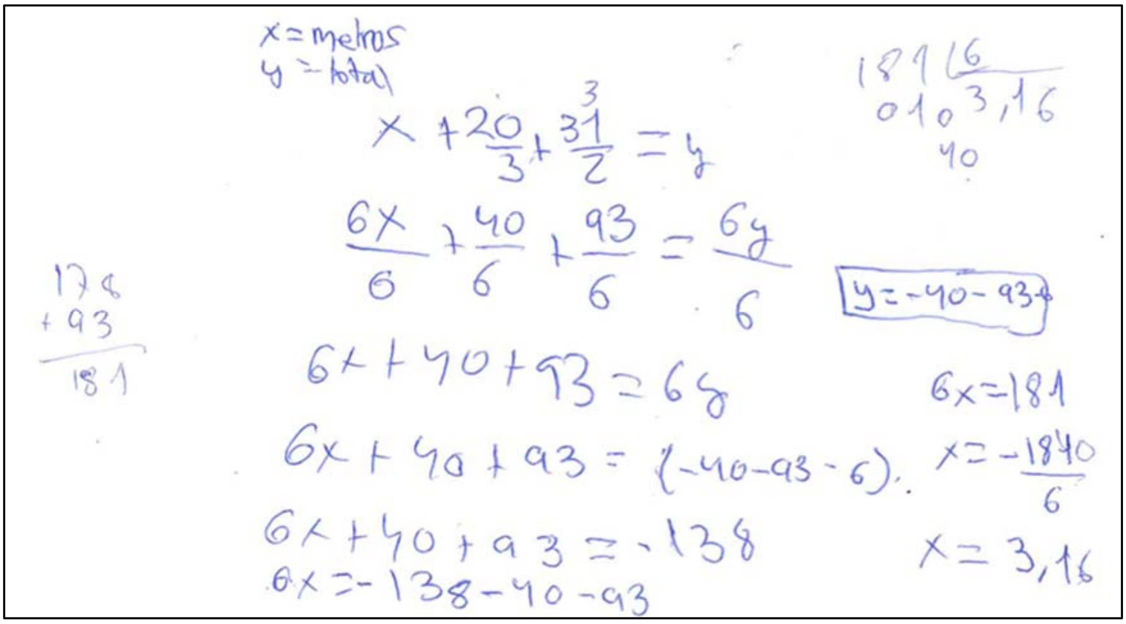


Figura 4.29. Ejemplo de resolución de un problema de Tipo 10.3. fracciones por parte de un alumno.

Sumar para buscar la resta (Figura 4.30)

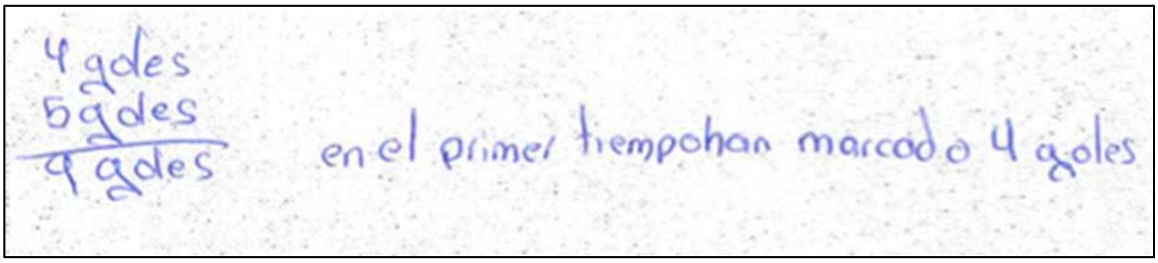


Figura 4.30. Ejemplo de resolución de un problema de Tipo 10.3. N por parte de un alumno.

En los problemas Tipo 10 llegamos a un 77,37% de aciertos, como ha ocurrido en casi todos los tipos anteriores, los mejores resultados se obtienen con naturales, 90,18%, seguido de decimales, 79,88%, y por último fracciones, 62,05%.

Al pasar la prueba 8 todavía no habíamos comenzado la unidad didáctica, pero la práctica con la resolución de todos los modelos anteriores sirvió de entrenamiento a nuestros alumnos. Además, el haber negociado con ellos que los problemas se pasarían de tres en tres y su implicación en el proceso hizo que su motivación fuera en aumento.

En esta prueba se ve una menor presencia del álgebra en la resolución de los problemas, probablemente porque el álgebra se dio en el segundo trimestre y estos problemas se han pasado durante el tercero, por lo que no la tienen tan presente.

Es escasa la utilización de estrategias de resolución. En contadas ocasiones buscan el número decimal equivalente a una determinada fracción.

Con este tipo de problemas terminamos las pruebas.

4.3. Reflexiones

	N	decimales	fracciones	total
T1	96,97	71,21	40,91	69,70
1.1	100	95,45	59,09	84,85
1.2	90,91	81,82	36,36	69,70
1.3	100	36,36	27,27	54,55
T2	84,72	61,11	59,72	68,52
2.1	83,33	55,56	50	62,96
2.2	94,44	61,11	66,67	74,07
2.3	77,78	66,67	61,11	68,52
2.4	83,33	61,11	61,11	68,52
T3	48,89	28,89	35,56	37,78
3.1	100	60	53,33	71,11
3.2	20	0	40	20
3.3	26,67	26,67	13,33	22,22
T4	72,22	83,33	77,78	77,78
4.1	72,22	83,33	77,78	77,78
T5	48,57	57,14	10	38,57
5.1	35,71	50	14,29	33,33
5.2	35,71	57,14	0	30,95
5.3	64,29	64,29	7,14	45,24
5.4	42,86	64,29	14,29	40,48
5.5	64,29	50	14,29	42,86
T6	25,49	9,80	19,61	18,30
6.1	41,18	11,76	17,65	23,53
6.2	17,65	0	41,18	19,61
6.3	17,65	17,65	0	11,76
T7	82,35	41,18	17,65	47,06
7.1	82,35	41,18	17,65	47,06
T8	26,22	21,53	5,41	17,72
8.1	16,67	43,75	11,11	23,84
8.2	43,75	11,11	0	18,29
8.3	5,56	0	0	1,85
8.4	38,89	31,25	10,53	26,89
T9	67,69	43,42	16,67	42,59
9.1	72,22	36,84	16,67	41,91
9.2	63,16	50	16,67	43,27
T10	90,18	79,88	62,05	76,81
10.1	89,47	84,21	73,68	82,46
10.2	100	89,47	84,21	91,23
10.3	100	68,42	47,37	71,93
10.4	100	84,21	10,53	89,18
10.5	89,47	87,5	78,95	86,96
10.6	68,42	61,11	56,25	61,93
10.7	78,95	84,21	10,53	57,89
TOTAL	64,15	52,01	33,00	50,51

Tabla 4.20. Porcentaje de acierto en cada tipo de problema.

Una vez realizadas las pruebas diagnósticas, disponemos de un panorama general sobre la capacidad de los alumnos participantes de abordar con éxito los distintos tipos y subtipos de problemas propuestos utilizando diversos sistemas de numeración. En la Tabla 4.20 se muestran los porcentajes de acierto correspondientes. Recordemos, que para que una respuesta se considerase un acierto debía ser correcta en las tres variables analizadas.

Como se puede observar en la tabla, los problemas de Tipos 1, 2, 4 y 10 son los que menos dificultades presentan para nuestros alumnos. Aun así, problemas como los Tipos 1.3, 10.4 y 10.7 con fracciones tienen resultados por debajo del 30% en el primer caso y cercanos al 10% en los otros dos.

Con una dificultad media, alrededor de un 40% de aciertos, aparecen los Tipos 3, 5, 7 y 9. Si consideramos estos problemas con fracciones, se observa un considerable aumento de la dificultad.

Con una dificultad muy alta, con menos del 20% de aciertos, encontramos los Tipos 6 y 8. Curiosamente, en los problemas de Tipo 6, aparecen más dificultades con los números decimales que con fracciones. En el problema 8 los aciertos con fracciones son de un 5%.

Los resultados de esta tabla los tendremos en cuenta para seleccionar las tareas de la propuesta didáctica posterior y para comparar los resultados de los alumnos después de implementarlas.

CAPÍTULO 5. TRABAJO EN EL AULA. DISEÑO, IMPLEMENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este capítulo describimos el diseño de una propuesta didáctica basada tanto en la clasificación desarrollada anteriormente, como en los resultados de las diversas pruebas diagnósticas descritas en el capítulo anterior. También llevamos a cabo el análisis de los resultados obtenidos como resultado de su implementación. Como hemos mencionado, la propuesta se desarrolló en dos ciclos en el IES Vallecas Magerit e incluyeron el uso de grupos interactivos y diversos materiales manipulativos.

5.1. Contexto social en que se actúa

La institución escolar en la que se desarrolla nuestro trabajo es un Instituto de Educación Secundaria del barrio madrileño de Vallecas. Este centro ofrece características muy específicas que lo diferencian de otros del mismo nivel educativo.

El I.E.S. Vallecas Magerit es un instituto de los denominados Centro de Especial Dificultad[22] por tratarse de difícil desempeño por las características de sus alumnos, en este caso (aportamos datos del curso 2018-2019 extraídos del informe de Jefatura de estudios del claustro de final de curso):

- Un 27 % de alumnos en la ESO son alumnos con necesidades de compensación educativa. En 1º ESO suponen un 51% del total.
- El porcentaje de alumnado inmigrante es de un 35% en ESO
- El porcentaje de alumnos de etnia gitana alcanza un 16,3%, pero es de un 40% en 1º de ESO.
- El 56,4% de los alumnos de 2º, 3º y 4º ESO tienen materias pendientes.
- El 41,24% de los alumnos de la ESO menores de 16 años están en seguimiento por absentismo y muchos muestran una nula adhesión al sistema educativo.
- También los alumnos mayores de 16 años faltan mucho a clase en ESO, FP Básica, ciclos de Grado Medio y Bachillerato.
- El porcentaje de alumnos que promocionan o titulan tras la evaluación extraordinaria es únicamente del 65,6% frente al 86,9% de media en la Comunidad de Madrid.

[22] Es un centro que ha sido expresamente clasificado como tal por la Consejería de Educación e Investigación, por ser sus plazas de difícil desempeño debido a circunstancias especiales. Estos centros y puestos no son adjudicados, de oficio, a ningún participante forzoso. Las posibles vacantes en estos centros se podrán adjudicar exclusivamente a quienes lo pidan expresa y voluntariamente.

Otro indicador de la problemática del centro podría ser los resultados de la Evaluación Externa de 4º de ESO (cada competencia se valora con un nivel mínimo de 1 y máximo de 6). En todas las competencias evaluadas el instituto objeto de análisis se encuentra un nivel o dos por debajo de la media de la Comunidad de Madrid (Tabla 5.1)

Competencias	Comunicación lingüística en español	Comunicación lingüística: inglés	Matemáticas académicas	Matemáticas aplicadas	Social y cívica
IES Vallecas Magerit	Nivel 3	Nivel2	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 2
Comunidad de Madrid	Nivel 4	Nivel 4	Nivel 4	Nivel 3-4	Nivel 3-4

Tabla 5.1. Nivel de competencia prueba Evaluación Externa de 4º de ESO del instituto en estudio y de la Comunidad de Madrid. El nivel 1 indica el mínimo nivel y el nivel 6 el máximo.

Los problemas de disciplina son frecuentes sobre todo en los primeros cursos de ESO, destacando 1º de ESO (Tabla 5.2). Por ejemplo, en el curso 2018-2019 se contabilizaron 1146 faltas leves entre los 90 alumnos de 1º de ESO.

Número de faltas durante el curso 2018-2019			
Leves	Graves	Muy graves	Expediente
2011	594	41	1

Tabla 5.2. Número de faltas de cada tipo durante el curso 2018-2019 en el IES en estudio.

5.2. Desarrollo del primer ciclo

Como hemos podido ver el apartado 3.1, en la LOMCE, la resolución de problemas constituye el primer bloque en todos los cursos de ESO. Además, en las pruebas de evaluación externa el porcentaje que suponen los problemas respecto al total de actividades es de un 60% en matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas y de un 55% en matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas (datos de la Prueba externa de Evaluación de 4º de ESO de la Comunidad de Madrid en abril de 2018). Por otro lado, hay que tener en cuenta que, dada la naturaleza del centro en que actuamos, la ESO tiene un carácter terminal en un alto porcentaje de los alumnos.

Por todo ello, nos proponemos introducir una unidad didáctica en 2° ESO para trabajar problemas aditivos de una etapa, haciendo énfasis en la distinción entre los distintos tipos de cantidades para trabajar posteriormente con ellas. Se decide ubicar la propuesta en segundo y no en primero de ESO porque parece que es en segundo de ESO, cuando un porcentaje aceptable de alumnos domina los algoritmos de la suma y resta de fracciones.

Respecto a la metodología adoptada, señalamos que, en el instituto de estudio, la profesora de lengua lleva muchos años realizando grupos interactivos. De este modo, aprovecharemos la logística que ella tiene preparada para llevar a cabo esta unidad didáctica y trabajaremos en grupos interactivos una vez cada 15 días.

5.2.1. Diseño de las sesiones de trabajo

Como hemos señalado, la propuesta consta de 6 sesiones. La primera sesión se desarrolla con el grupo-clase y se dedica a introducir algunos conceptos básicos. Las dos siguientes se dedican a trabajar problemas aditivos de una etapa (con números naturales, decimales y fracciones) utilizando la metodología de grupos interactivos, la cuarta sesión es de trabajo individual en el aula, la quinta sesión vuelve a retomar el trabajo en grupos interactivos y, finalmente, la sexta se dedica a realizar una pequeña prueba escrita que sirve para evaluar el funcionamiento global de la actuación realizada.

5.2.1.1. Primera sesión

En esta primera sesión se pretende introducir, tanto conceptual como terminológicamente, los distintos tipos de cantidades que pueden aparecer dentro de un problema aditivo. En esta sesión se sigue una metodología tradicional que alterna las intervenciones de la profesora con el trabajo en grupos de los alumnos.

Las definiciones que se desea presentar son las siguientes: cantidad simple, unión de medidas, comparación y transformación de medidas. Con los ejemplos presentados se pretende que los alumnos adquieran conciencia de los distintos tipos de cantidades

Esquema de la sesión

- Presentación en gran grupo de los distintos tipos de cantidades (15 min).
- Trabajo de los alumnos en pequeños grupos poniendo ejemplos de distintos tipos de cantidades (20 min).
- Puesta en común e institucionalización (20 min).

5.2.1.2. Segunda sesión

En esta segunda sesión, se pretende que los alumnos sean capaces de inventar problemas de Tipos 1.1, 1.2, 1.3 (los más sencillos) y que lleguen a resolver problemas de Tipo 2.1, 3.1, 4.1, 5.1, 7.1 y 8.1 (aunque solo con números naturales). Se trabajará según la metodología de los grupos interactivos y se realizarán tres actividades. Para ello habrá tres turnos de modo que cada grupo de alumnos realizará una actividad diferente en cada espacio. Como apoyo para la resolución de los problemas se proporcionarán cajitas Liro y material manipulable (lápices).

Esquema de la sesión

Espacio 1. En este espacio habrá tres cartulinas con un problema cada una. Los alumnos deberán leer el problema y tendrán que inventar otro problema del mismo tipo. Los problemas son:

- Elías tiene 3 canicas y Lucero tiene 4, ¿cuántas tienen entre los dos? (Tipo 1.1)

- Anny tiene 3 canicas y David tiene 5, ¿cuántas canicas menos tiene Anny que David? (Tipo 1.2)
- Diego tiene 2 canicas y Mayerly tiene 4, ¿cuántas comprará Diego para tener las mismas que Mayerly? (Tipo 1.3)

Espacio 2. En este espacio habrá tres cartulinas con un problema cada una. Los alumnos deberán leer cada problema y resolverlo. Para ello dispondrán de tres cajitas Liro (una para unión, una para comparación y una para transformación). Los problemas son:

- Francis ha leído 6 libros durante este curso, si entre Francis y Costin han leído 14, ¿cuántos ha leído Costin? (Tipo 2.1)
- Noemí come 5 galletas, si Felipe come dos galletas más que ella, ¿cuántas galletas come Felipe? (Tipo 3.1)
- Denisa tiene 7 camisetas y le regalan 3 por su cumpleaños, ¿cuántas tiene ahora? (Tipo 4.1)

Espacio 3. En este espacio habrá tres cartulinas con un problema cada una. Los alumnos deberán leer cada problema y resolverlo. Para ello dispondrán de lápices de colores en suficiente cantidad para resolverlos. Los problemas son:

- Entre Samira y Alexia tienen 14 bolígrafos y entre Samira y Raúl tienen 11 bolígrafos, ¿cuántos bolígrafos más o menos que Raúl tiene Alexia? (Tipo 5.1)
- Tenemos 8 lapiceros, unos rojos y otros azules; si prestamos tres lapiceros rojos, ¿cuántos lapiceros entre rojos y azules tenemos? (Tipo 7.1)
- En nuestro estuche hay lapiceros rojos, azules y verdes. Si el número de lapiceros rojos supera en dos a los azules, y el número de azules supera en tres a los verdes, ¿cuál es la diferencia entre el número de lapiceros rojos y el número de lapiceros verdes?, ¿de qué color hay más? (Tipo 8.1)

5.2.1.3. Tercera sesión

En esta tercera sesión, se pretende que los alumnos sean capaces de resolver problemas de Tipos 6.1, 6.2, 6.3, 8.1, 8.2, 8.4, 9.1, 9.2 con fracciones, identificar cada fracción con otra fracción equivalente (reducir a común denominador) e identificar fracciones con números decimales. Se trabajará según la metodología de los grupos interactivos y se realizarán cuatro actividades, tres con problemas aditivos con fracciones y una cuarta actividad (a petición de la profesora que atiende al alumnado de compensatoria) será un famoso problema a resolver utilizando álgebra. Para ello habrá cuatro turnos de modo que cada grupo de alumnos realizará una actividad diferente en cada turno. No habrá material de apoyo.

Esquema de la sesión

Espacio 1. En este espacio habrá una cartulina con tres problemas. Los alumnos deberán leer los problemas y reescribirlos reduciendo todas las fracciones a común denominador para después resolverlos. Los problemas son:

- Esta semana está siendo muy lluviosa. Entre el lunes y el martes cayeron 7/100 de litro de agua. El miércoles cayeron 2/100 de litro más que el jueves. ¿Cuántos litros más que el jueves cayeron entre los tres primeros días de la semana? (Tipo 6.2)
- Esta mañana he estado en el mercado, he comprado 4/5 de kilo menos de fresas que de manzanas y 4/3 de kilo más de melón que de sandía, ¿cuántos kilos entre manzanas y sandías tendré que comprar para haber comprado lo mismo que de fresas y melón? (Tipo 8.4)
- En un maratón, Elías lleva recorridos 13/4 de kilómetro más que Francis. Elías recorre 11/12 de kilómetro más y llega a la meta, ¿cuántos kilómetros debe recorrer Francis para llegar a la meta? (Tipo 9.2)

Espacio 2. En este espacio se planteará un problema de álgebra que no tiene interés para nuestro estudio.

Espacio 3. En este espacio habrá una cartulina con tres problemas. Los alumnos deberán leer los problemas y reescribirlos convirtiendo cada fracción en número decimal para después resolverlos. Los problemas son:

- Entre Inés y Cristina trabajan 49/6 de hora, Luisa trabaja 3/4 de hora menos que Inés, ¿cuántas horas trabajan entre Cristina y Luisa? (Tipo 6.1)
- Lorena pesa 12/5 de kilo más que Carlos y 23/10 menos que Mario, ¿cuántos kilos debería adelgazar Mario para pesar lo mismo que Carlos? (Tipo 8.2)
- Elena tiene 1/10 de kilo de pipas más que Luis, si Luis se compra 1/20 de kilo de pipas más, ¿cuántos kilos de pipas menos que Elena tiene Luis? (Tipo 9.1)

Espacio 4. En este espacio habrá una cartulina con dos problemas. Los alumnos deberán leer los problemas y resolverlos libremente en grupo sin ninguna indicación

- Entre Eva y Marta han recorrido 25/80 de kilómetro, Silvia recorre 2/7 menos que Mónica, ¿cuánto tiene que recorrer Silvia para recorrer los mismos kilómetros que entre las otras tres chicas juntas? (Tipo 6.3)
- Lucía trabaja 3/4 de hora menos que Arancha y Arancha trabaja 1/2 hora más que Belén, ¿cuántas horas más o menos que Belén trabaja Lucía? (Tipo 8.1)

5.2.1.4. Cuarta sesión

En la cuarta sesión se pretende que los alumnos resuelvan dos problemas de Tipo 1.3 y 5.2 identificando fracción con número decimal. Los alumnos trabajaran de forma individual.

Los problemas a resolver serán los siguientes y el tiempo disponible para la realización de los mismos será de 10 minutos:

- Ramón ha cogido 5/16 de kilo de setas y Sonia 9/12 de kilo, ¿qué fracción de kilo de setas tiene que coger Ramón para tener las mismas que Sonia? (Tipo 1.3)
- He estado midiendo los árboles de mi jardín, entre el manzano y el peral miden 36/24 de metro y entre el manzano y el cerezo 45/60, ¿cuántos metros debe crecer el cerezo hasta alcanzar al peral? (Tipo 5.2)

5.2.1.5. Quinta sesión

En esta quinta sesión, se pretende que los alumnos sean capaces de resolver problemas 1.2 y 5.3 con fracciones y 1.3, 6.1, 6.2, 8.2 y 8.3 con decimales, resolver y plantear un problema Tipo 3.2 con naturales e identificar fracciones con otras equivalentes con el mismo denominador. Se trabajará según la metodología de los grupos interactivos y se realizarán cuatro actividades. Para ello habrá cuatro turnos de modo que cada grupo de alumnos realizará una actividad diferente en cada turno. Como apoyo para la resolución de los problemas se proporcionarán monedas y billetes de juguete (euros) y torres Lego.

Esquema de la sesión

<u>Espacio 1</u>. En este espacio se plantean tres problemas con números decimales. En la mesa habrá monedas y billetes de juguete (euros). Los alumnos deberán leer los problemas y resolverlos. Los problemas son:

- Luis tiene 8,7 m de cable y Manuel tiene 6,84 m, ¿cuántos metros de cable comprará Manuel para tener los mismos metros de cable que Luis? (Tipo 1.3)
- Entre María y Pablo tiene 218,26 €. Carmen tiene 38,73 € más que Pablo, ¿cuántos euros tienen entre María y Carmen? (Tipo 6.1)
- Hoy he visto cuatro capítulos de Bob Esponja, entre los dos primeros han durado 22,7 minutos, el tercero ha durado 2,06 minutos más que el cuarto. ¿Cuántos minutos menos que entre los tres primeros ha durado el cuarto? (Tipo 6.2)

<u>Espacio 2</u>. En este espacio se plantean dos problemas con números decimales. En la mesa habrá bloques tipo Lego. Los alumnos deberán leer los problemas y resolverlos comparando la altura de los bloques. Los problemas son:

- María, Irene y Ruth construyen una torre cada una. La torre de Ruth mide 27,34 cm menos que la de María y la torre de María mide 15,7 cm más que la de Irene, ¿cuántos centímetros debe añadir Ruth a su torre si quiere que mida tanto como la de Irene? (Tipo 8.2)

- Ayer por la tarde estuve un rato viendo la televisión, vi Clan durante 3,47 minutos más que Boing y Disney Chanel durante 1,5 minutos menos que Neox, ¿cuántos minutos más pasé viendo Clan y Disney Chanel que Boing y Neox? (Tipo 8.3)

Espacio 3. En este espacio se plantea un problema con números naturales. Los alumnos deberán leer el problema y resolverlo y después plantear un problema similar para que lo resuelva el siguiente grupo. El problema que planteamos es:

- Felipe tiene 37 canicas. Alexia tiene dos canicas menos que Samuel, ¿cuántas canicas más o menos que Alexia tienen entre Felipe y Samuel? (Tipo 3.2)

Espacio 4. En este espacio se plantean dos problemas con fracciones. En la hoja que se dará a los alumnos aparecerá cada problema copiado tres veces, la primera en el enunciado original, la segunda con huecos para que los alumnos escriban todas las fracciones con el mismo denominador y la tercera también con huecos para que trabajen con números naturales correspondientes a los numeradores del segundo paso, una vez resuelto el problema sólo con los numeradores, los alumnos deberán deshacer el camino andado y resolverlo con fracciones. Los problemas son:

- Para desayunar, Olivia bebe 3/10 de litro de leche, mientras que su hermana Paula bebe 4/15 de litro, ¿qué fracción de litro bebe menos Paula que Olivia? (Tipo 1.2)
- Vamos a realizar un pastel, la leche junto a la harina pesan 1/5 de kilo, el azúcar con los huevos pesan 1/6 de kilo, si el pastel no tiene más ingredientes, ¿cuánto pesará? (Tipo 5.3)

5.2.1.6. Sexta sesión

La sexta y última sesión estará dedicada a realizar una prueba que nos permita evaluar el funcionamiento de la propuesta. En particular, se propondrá a los alumnos una pequeña prueba escrita que deberán realizar individualmente sin ayuda de materiales y sin ninguna indicación sobre posibles estrategias a aplicar.

Los problemas a resolver serán los siguientes y el tiempo disponible para la realización de los mismos será de 20 minutos:

- Quiero hacer una macedonia de frutas. Tengo 3/4 de kg de fresas. Si tengo 7/12 kg de plátano más que de manzana, ¿cuántos kilogramos de manzana tengo que comprar para poder poner la misma cantidad de manzana que de plátano y fresa juntos? (Tipo 3.3)
- Hoy he visto cuatro capítulos de Bob Esponja, entre los dos primeros han durado 22,7 minutos, el tercero ha durado 2,06 minutos más que el cuarto. ¿Cuántos minutos menos que entre los tres primeros ha durado el cuarto? (Tipo 6.2)

- Una piscina se puede vaciar por dos desagües. Si abro solo el primero durante una hora salen 1234/3 de litro. Si abro solo el segundo durante una hora salen 2471/6 litros. ¿Por qué desagüe sale más agua en una hora y cuánta? (Tipo 10.7)

Como se observa, dos de los problemas se plantearán utilizado fracciones y uno de ellos decimales. Además, dos de los tipos de problemas planteados en clase no han sido trabajados durante las sesiones anteriores.

5.2.2. Resultados de la implementación

A continuación, presentamos los resultados de la implementación de las seis sesiones diseñadas. Este primer ciclo de la propuesta se desarrolló durante el curso 2016-2017. En concreto, en los meses de mayo y junio de 2017. Se trabajó con 19 alumnos a lo largo de 6 sesiones de clase.

5.2.2.1. Primera sesión

La primera sesión tuvo lugar el día 9 de mayo de 2017. Se comenzó dando la definición de los distintos tipos de cantidades (cantidades simples, uniones, comparaciones y transformaciones) y presentando ejemplos de cada una de ellas. En la Figura 5.1 presentamos los apuntes de una alumna con los ejemplos que se pusieron en clase. El ejemplo de transformación que se puso fue "María pierde 5 canicas".

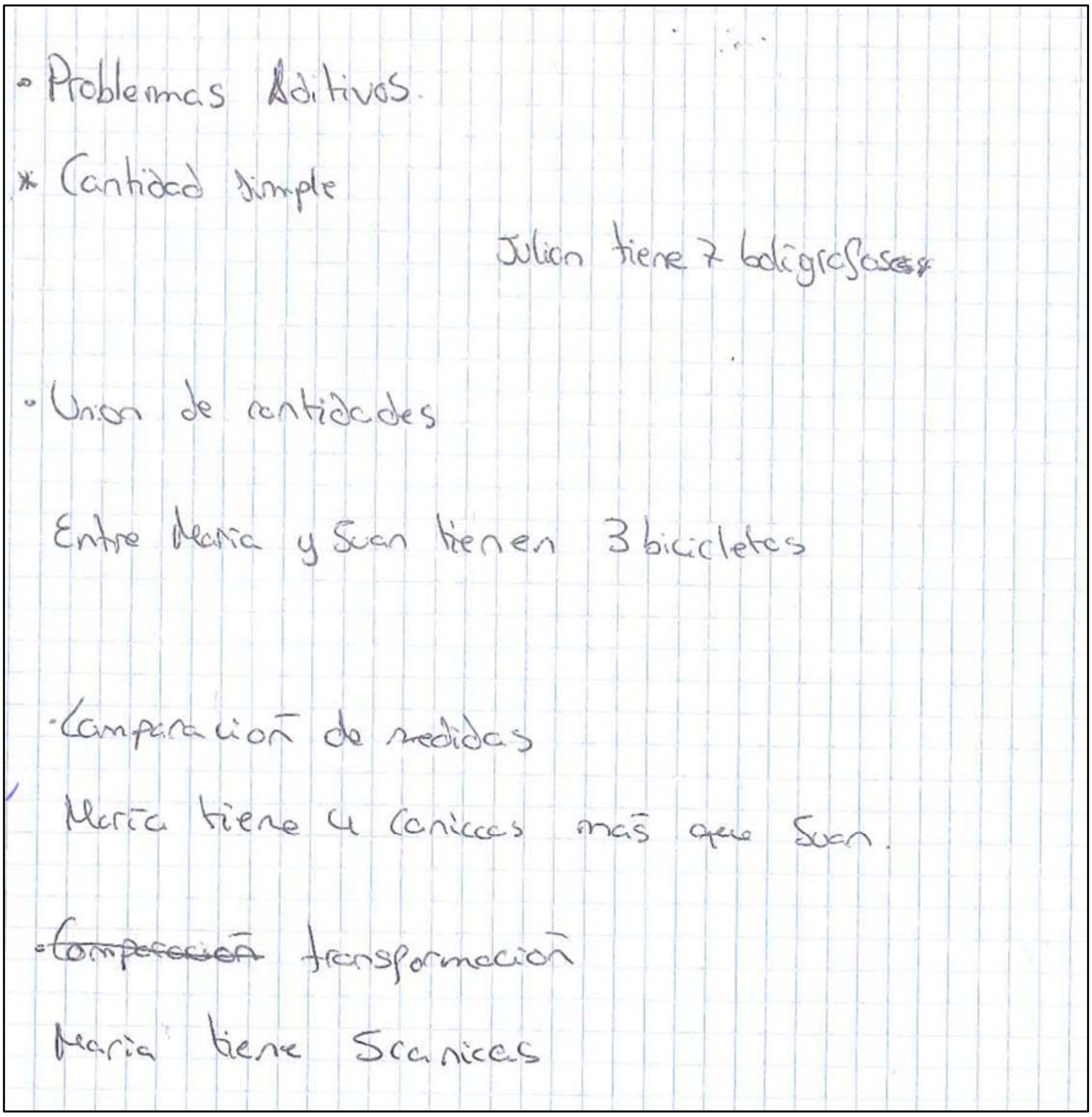


Figura 5.1. Ejemplo de apuntes de una alumna de la primera sesión.

A continuación, los alumnos trabajaron en grupos pequeños, siguiendo su disposición en el aula, poniendo ejemplos de cada una de ellas. En las Figuras 5.2 y 5.3 se muestran las producciones de dos de los grupos.

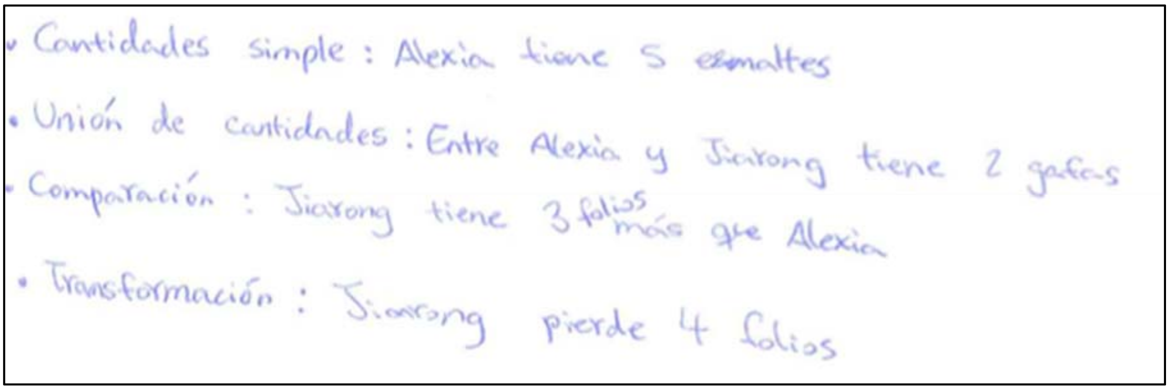


Figura 5.2. Ejemplos de cada tipo de cantidad puesto por un grupo de alumnas

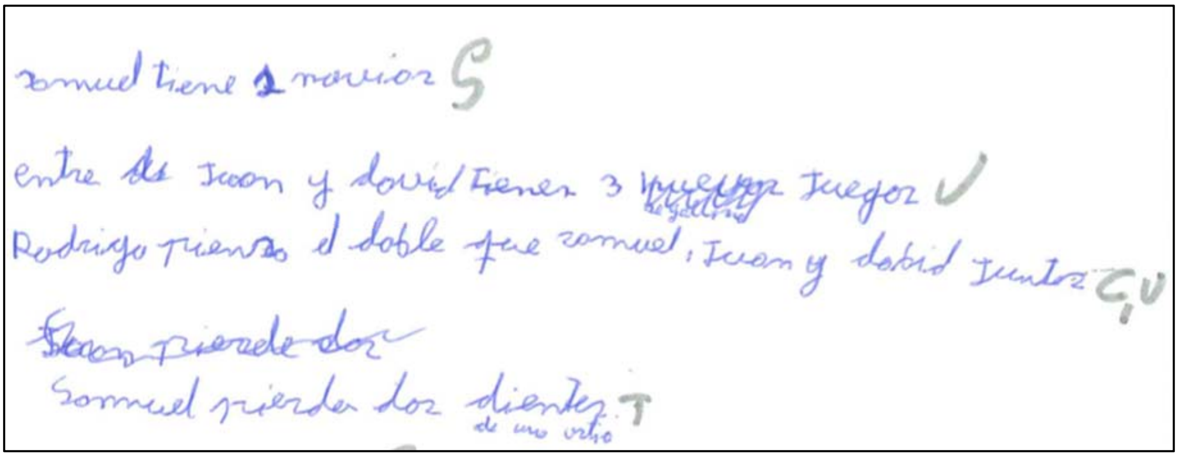

zamuel tiene 1 navios G
entre los Juan y david tienen 3 ~~huevos~~ Juegos V
de gallina
Rodrigo tiene el doble que zamuel, Juan y dabid juntos C, V
~~Juan pierde dos~~
Samuel pierde dos dientes T
de uno solo

Figura 5.3. Ejemplos de cada tipo de cantidad puesto por un grupo de alumnos

Por último, se pusieron en común algunas de las respuestas de los alumnos. En general todos los grupos quisieron participar y leer sus propuestas.

En clase pudieron preguntar todas las dudas que les surgieron y luego participaron mucho en la puesta en común en gran grupo. Al finalizar la clase cada grupo entregó sus ejemplos. Todos los ejemplos entregados fueron correctos, si bien es verdad que ninguno innovó y siguieron fielmente el esquema de los ejemplos dados.

5.2.2.2. Segunda sesión

La segunda sesión tuvo lugar el día 10 de mayo de 2017. Como ya hemos indicado, trabajamos siguiendo la metodología de los grupos interactivos. Aprovechando su carácter inclusivo, juntamos el grupo 2ºB matemáticas con el grupo 2ª B matemáticas compensatoria. Por ello coordinamos la actividad con la profesora de compensatoria. Trabajamos problemas aditivos con materiales manipulables: lápices de colores y cajitas Liro.

Teniendo en cuenta el número de alumnos, estos se dividieron en cuatro grupos heterogéneos. En consecuencia, pese a haber planificado tres actividades, se establecieron cuatro espacios en la clase. En tres de dichos espacios se desarrolló una de las actividades propuestas y en el cuarto se llevó a cabo una actividad diferente en cada turno para así poder ajustar las tres actividades y los tres turnos a los cuatro grupos.

En el primer espacio actuó como voluntaria una madre de alumnos del instituto, realizando la primera actividad (Figura 5.4). Ella había participado como voluntaria muchas veces en grupos de lengua, su experiencia nos fue de mucha ayuda en este primer día de trabajo en grupos interactivos.

Figura 5.4: Voluntaria con grupo de alumnos. En la foto se aprecia el ejemplo de problema Tipo1.3.

En los restantes espacios de trabajo actuaron como voluntarios tres alumnos de primero de Bachillerato del propio centro.

En la Figura 5.5 se pueden ver tres cajitas Liro con las que se trabajó, aunque solo se aprecia la cajita para problemas de transformación.

Figura 5.5: Mesa de trabajo con cajitas Liro (la que se distingue mejor es la de transformación) y ejemplos de problemas (se pueden ver los de Tipo 2.1 y 4.1)

En general la sesión funcionó muy bien, a los alumnos les gustó mucho y trabajaron de forma organizada. Sobró tiempo en casi todas las actividades en todos los turnos. Los alumnos encontraron especialmente atractiva la actividad en la que disponían de las cajitas Liro. De hecho, en muchos de los casos, después de resolver los problemas en grupo, algunos de ellos cogieron las cajitas para resolverlos de forma individual.

El principal inconveniente detectado en el desarrollo de esta sesión fue que, en aquellos espacios de trabajo en los que se proporcionaron los dos tipos de materiales manipulativos (cajitas Liro y lápices de colores), los alumnos apenas tomaron ninguna nota escrita ni del proceso ni de la solución de los problemas.

5.2.2.3. Tercera sesión

La tercera sesión tuvo lugar el día 17 de mayo de 2017. Volvimos a trabajar con grupos interactivos juntando el grupo 2º B matemáticas con el grupo 2ª B matemáticas compensatoria. Por ello coordinamos la actividad con la profesora de compensatoria.

Teniendo en cuenta el número de alumnos, estos se dividieron en los mismos cuatro grupos heterogéneos. Se establecieron cuatro espacios en la clase y se realizaron cuatro actividades. Para ello hubo cuatro turnos, cada grupo realizó una actividad diferente en cada turno. En este segundo día de GI trabajamos los problemas con fracciones en tres de las actividades, la cuarta actividad fue un famoso problema a resolver con álgebra propuesto por la profesora de compensatoria (los alumnos de compensatoria estaban en este momento en la unidad de álgebra). En cada grupo se pidió un secretario para que tomara nota de los procesos de resolución de los problemas.

La actividad funcionó algo peor que la primera vez porque tres alumnas se negaban a ponerse en el grupo asignado y eso retrasó el comienzo de la actividad.

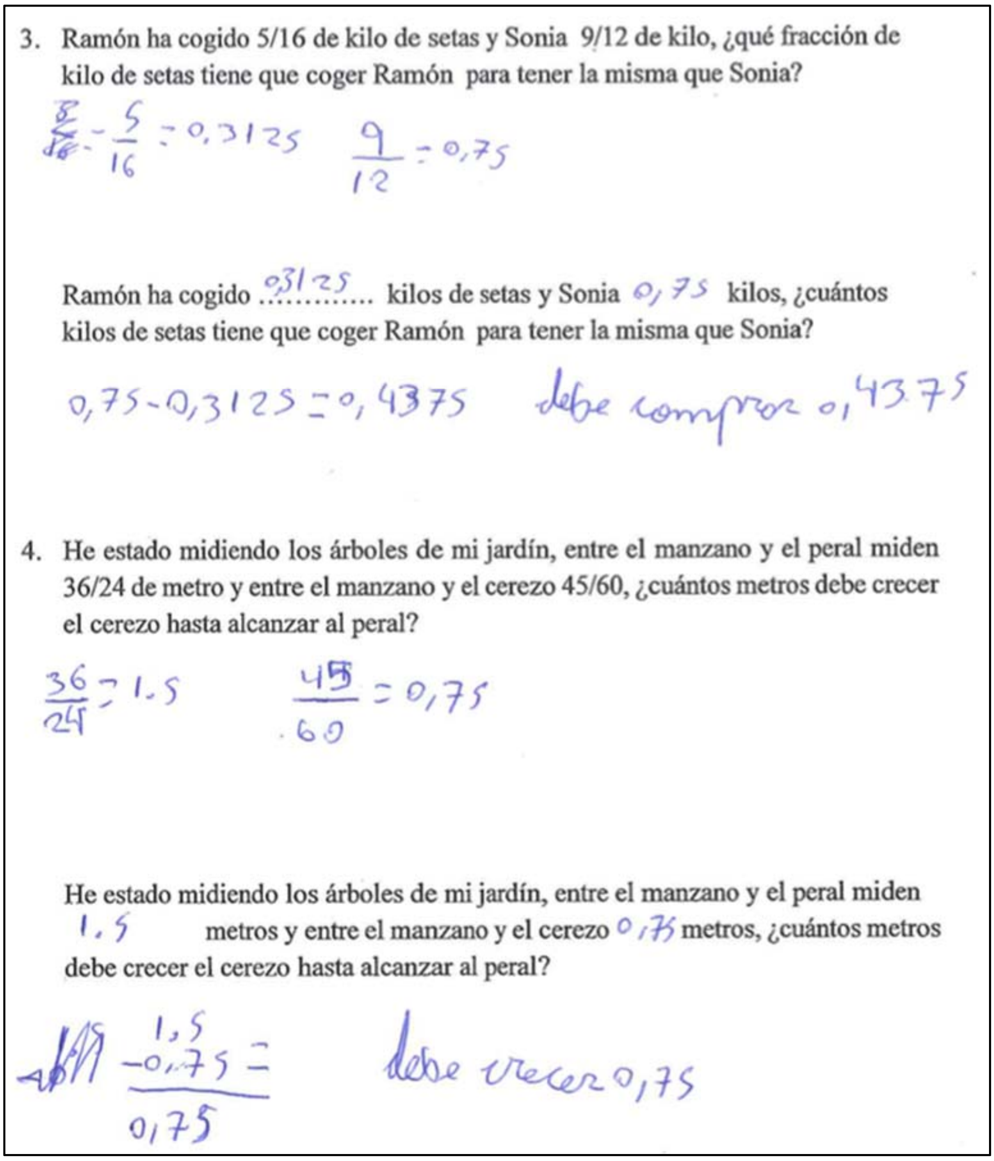
En el primer espacio estuvo de voluntaria una madre de alumnos del instituto, realizando la primera actividad. En el segundo espacio la animadora sociocultural del instituto realizando la segunda actividad: es el problema de álgebra que no tiene interés para nuestro estudio. En el tercer espacio estuvo de voluntario el animador sociocultural del instituto realizando la tercera actividad. En el cuarto espacio estuvo la profesora de compensatoria realizando la cuarta actividad.

A pesar de haber nombrado un secretario para cada grupo, la actividad sólo quedó reflejada someramente sobre el papel. La dificultad de los problemas aumentó de forma considerable y eso desanimó a muchos alumnos. Al presentar cuatro actividades en lugar de tres el tiempo se quedó corto.

5.2.2.4. Cuarta sesión

La cuarta sesión tuvo lugar el día 29 de mayo de 2017. Ese día acudieron a clase 17 alumnos.

Se plantearon dos problemas aditivos, uno de Tipo 1.3 y otro de Tipo 5.2. Los alumnos trabajaron individualmente en ellos. Nos parece muy destacable que no cometieron ningún error ni en estructura ni en operación (Figura 5.6).



3. Ramón ha cogido 5/16 de kilo de setas y Sonia 9/12 de kilo, ¿qué fracción de kilo de setas tiene que coger Ramón para tener la misma que Sonia?

$\frac{5}{16} = 0,3125 \quad \frac{9}{12} = 0,75$

Ramón ha cogido 0,3125 kilos de setas y Sonia 0,75 kilos, ¿cuántos kilos de setas tiene que coger Ramón para tener la misma que Sonia?

0,75 - 0,3125 = 0,4375 debe comprar 0,4375

4. He estado midiendo los árboles de mi jardín, entre el manzano y el peral miden 36/24 de metro y entre el manzano y el cerezo 45/60, ¿cuántos metros debe crecer el cerezo hasta alcanzar al peral?

$\frac{36}{24} = 1.5 \quad \frac{45}{60} = 0,75$

He estado midiendo los árboles de mi jardín, entre el manzano y el peral miden 1,5 metros y entre el manzano y el cerezo 0,75 metros, ¿cuántos metros debe crecer el cerezo hasta alcanzar al peral?

1,5 − 0,75 = 0,75 debe crecer 0,75

Figura 5.6. Prueba individual de un alumno correspondiente a los ejercicios Tipo 1.3 y 5.2.

En la Tabla 5.3 se muestran los resultados (en porcentaje de acierto) de cada uno de los dos problemas planteados en esta sesión.

	Estructura		**Operación**		**Algoritmo**		**Blanco**
	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	
Tipo 1.3	71	0	71	0	59	12	29
Tipo 5.2	71	0	71	0	47	24	29

Tabla 5.3. Porcentaje de aciertos y errores en los problemas de la cuarta sesión.

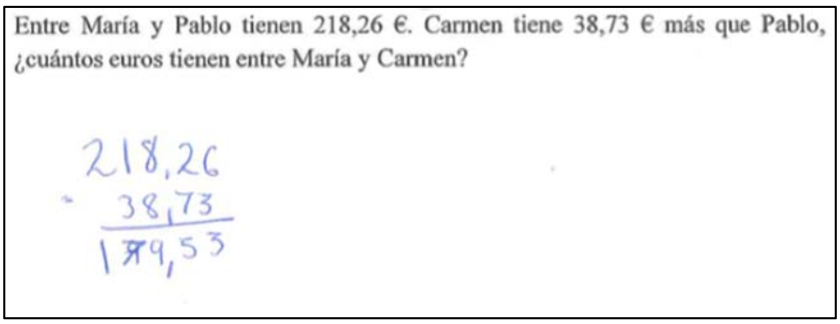
El 29% de ejercicios en blanco corresponde a cinco alumnos que dejaron en blanco toda la prueba. El resto, como ya hemos comentado, acertaron tanto estructura como operación, sí aparecieron dos fallos en algoritmo en el primer problema y cuatro en el segundo.

5.2.2.5. Quinta sesión

La quinta sesión tuvo lugar el día 31 de mayo de 2017. Volvimos a juntar 2º B y 2º B compensatoria para trabajar con grupos interactivos. Los alumnos se dividieron en los mismos cuatro grupos heterogéneos que en las sesiones anteriores. Se establecieron cuatro espacios en la clase y se realizaron cuatro actividades. Para ello hubo cuatro turnos, cada grupo realizó una actividad diferente en cada turno. En este tercer día de grupos interactivos trabajamos los problemas con fracciones en una de las actividades, con números decimales en dos y con naturales en otra. En cada grupo se pidió un secretario para que tomara nota de los procesos de resolución de los problemas. Para facilitar esto en cada grupo se les dio una hoja con el enunciado y hueco para su resolución.

En el primer espacio actuó como voluntaria una madre de alumnos del instituto, realizando la primera actividad (Figura 5.7). Se plantearon las actividades 1.3, 6.1 y 6.2 con números decimales , podemos leer sus enunciados y la resolución de algún grupo en las figuras 5.8, 5.9 y 5.10.

Figura 5.7. Voluntaria de grupos interactivos con alumnos trabajando con una representación de billetes y monedas de euro.



Entre María y Pablo tienen 218,26 €. Carmen tiene 38,73 € más que Pablo, ¿cuántos euros tienen entre María y Carmen?

218,26
- 38,73
179,53

Figura 5.8. Ejemplo de ejercicio Tipo 6.1 resulto en grupo.

Luis tiene 8,7 m de cable y Manuel tiene 6,84m, ¿cuántos metros de cable comprará Manuel para tener los mismos metros de cable que Luis?

$$\begin{array}{r} 8{,}7 \\ -\ 6{,}84 \\ \hline 1{,}86 \end{array}$$

Figura 5.9. Ejemplo de ejercicio Tipo 1.3 resulto en grupo.

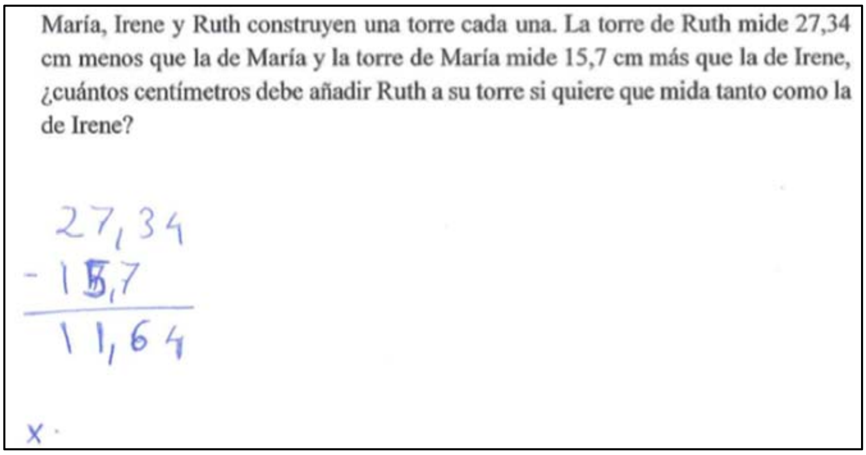
Hoy he visto cuatro capítulos de Bob Esponja, entre los dos primeros han durado 22,7 minutos, el tercero ha durado 2,06 minutos más que el cuarto. ¿Cuántos minutos menos que entre los tres primeros ha durado el cuarto?

$$\begin{array}{r} 22{,}7 \\ 2{,}06 \\ \hline 20{,}64 \end{array}$$

Figura 5.10. Ejemplo de ejercicio Tipo 6.2 resulto en grupo.

En el segundo espacio estuvo de voluntaria una profesora jubilada de instituto de la rama de peluquería y estética. Sobre la mesa había bloques tipo Lego para que los alumnos compararan las alturas de las torres (Figura 5.11). Se practicaron los problemas 8.2 y 8.3 con números decimales (En las Figuras 5.12 y 5.13 encontramos los enunciados y un ejemplo de resolución de cada uno).

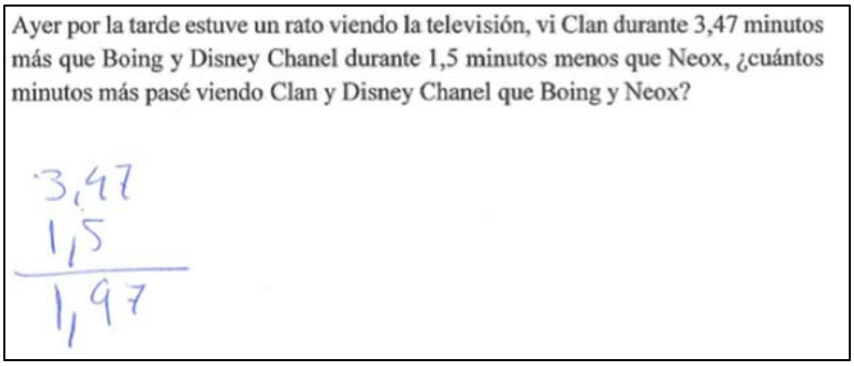
Figura 5.11. Voluntaria de grupos interactivos con alumnos trabajando con bloques de Lego.


María, Irene y Ruth construyen una torre cada una. La torre de Ruth mide 27,34 cm menos que la de María y la torre de María mide 15,7 cm más que la de Irene, ¿cuántos centímetros debe añadir Ruth a su torre si quiere que mida tanto como la de Irene?

27,34
- 15,7
11,64

x

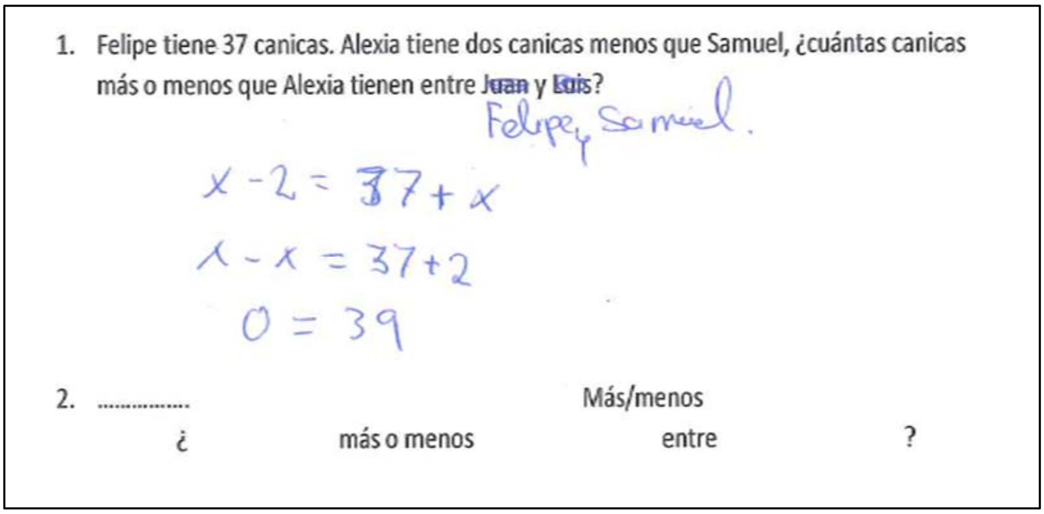
Figura 5.12. Ejemplo de ejercicio Tipo 8.2 resulto en grupo.


Ayer por la tarde estuve un rato viendo la televisión, vi Clan durante 3,47 minutos más que Boing y Disney Chanel durante 1,5 minutos menos que Neox, ¿cuántos minutos más pasé viendo Clan y Disney Chanel que Boing y Neox?

3,47
1,5
1,97

Figura 5.13. Ejemplo de ejercicio Tipo 8.3 resulto en grupo.

En el tercer espacio estuvo de voluntario el PTSC del instituto. La idea original era que tras plantear al primer grupo el problema 3.2 con números naturales, estos dejaran planteado un problema similar para el siguiente grupo que resolvería y dejaría planteado otro problema del mismo tipo para el siguiente y así con cada grupo. Pero este problema les costaba mucho rato resolverlo y no les daba tiempo a plantear otro a ningún grupo (Figura 5.14).


1. Felipe tiene 37 canicas. Alexia tiene dos canicas menos que Samuel, ¿cuántas canicas más o menos que Alexia tienen entre ~~Juan y Luis~~? Felipe y Samuel.

$x - 2 = 37 + x$

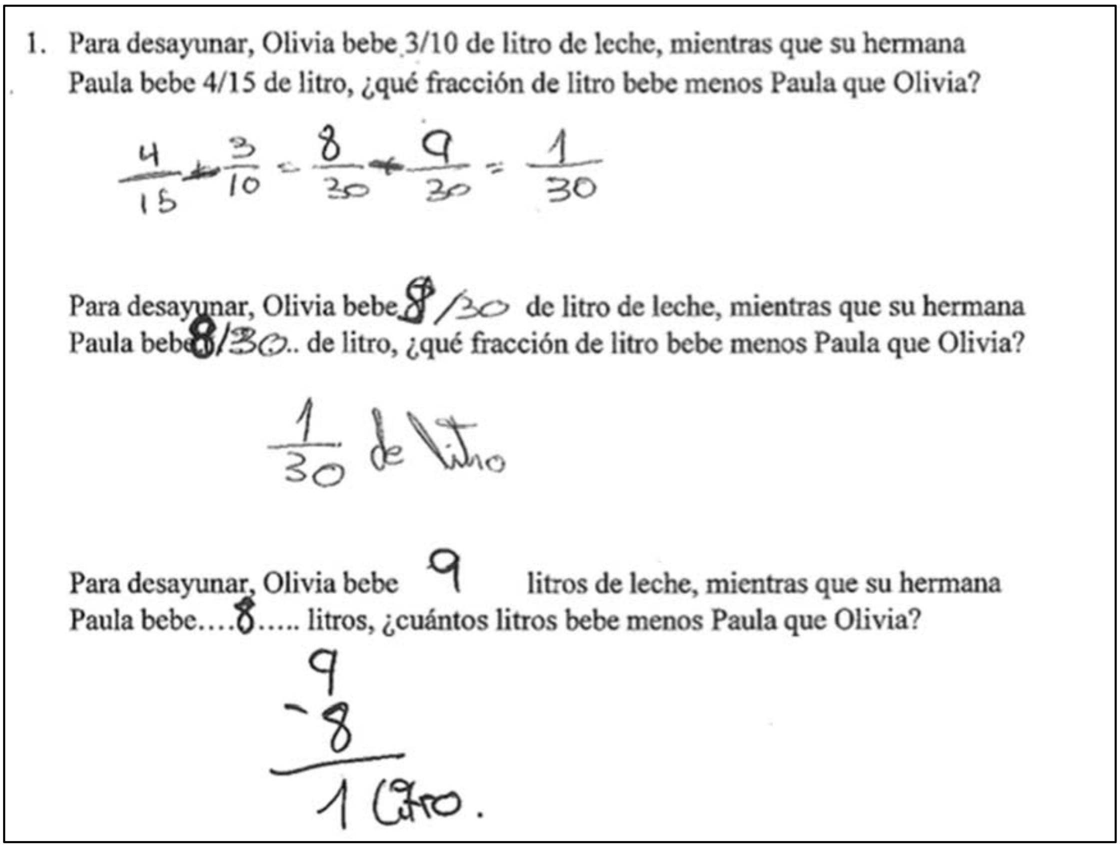
$x - x = 37 + 2$

$0 = 39$

2. .... Más/menos ¿ más o menos entre ?

Figura 5.14: Ejemplo de problema Tipo 3.2 con números naturales y el espacio preparado para que plantearan ellos otro problema del mismo tipo.

En el cuarto espacio estuvo de voluntaria una profesora jubilada del departamento de lengua. En la Figura 5.15 se puede ver la hoja para la resolución de problemas con fracciones reduciendo a común denominador para trabajar con numeradores que se dio a cada grupo.


1. Para desayunar, Olivia bebe 3/10 de litro de leche, mientras que su hermana Paula bebe 4/15 de litro, ¿qué fracción de litro bebe menos Paula que Olivia?

$\frac{4}{15} - \frac{3}{10} = \frac{8}{30} - \frac{9}{30} = \frac{1}{30}$

Para desayunar, Olivia bebe 9/30 de litro de leche, mientras que su hermana Paula bebe 8/30.. de litro, ¿qué fracción de litro bebe menos Paula que Olivia?

$\frac{1}{30}$ de litro

Para desayunar, Olivia bebe 9 litros de leche, mientras que su hermana Paula bebe….8….. litros, ¿cuántos litros bebe menos Paula que Olivia?

$9 - 8 = 1$ litro.

Figura 5.15: Ejemplo de resolución problema Tipo 1.2 quitando denominadores trabajado en GI.

La actividad funcionó muy bien. Los alumnos estuvieron muy motivados aunque el tiempo para cada actividad quedó algo escaso. Esta vez, al darles una hoja a cada grupo para reflejar los desarrollos, estos sí quedaron por escrito.

5.2.2.6. Sexta sesión

La sexta sesión tuvo lugar el día 1 de junio de 2017. En ella se realizó una prueba final que transcurrió sin ninguna incidencia. La prueba la realizaron los 12 alumnos que acudieron a clase ese día. En la Tabla 5.4 se muestran los resultados (en porcentaje de acierto) de cada uno de los tres problemas planteados en esta sesión.

	Estructura		**Operación**		**Algoritmo**		**Blanco**
	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	
Tipo 3.3	83	0	75	8	58	17	17
Tipo 6.2	83	17	75	8	75	0	0
Tipo 10.7	92	0	75	17	58	17	8

Tabla 5.4. Porcentaje de aciertos y errores en los problemas de la sexta sesión.

Como se puede observar apenas quedaron ejercicios en blanco (2 en el primer tipo, ninguno en el segundo y uno en el tercero), solo hubo dos fallos en estructura en el segundo ejercicio y uno o dos fallos en operación en cada uno.

5.2.3. Reflexiones sobre el primer ciclo

Como hemos apuntado con anterioridad, este diseño e implementación se trata de un primer ciclo de nuestra propuesta y, en consecuencia, actúa a modo de pilotaje. A partir de la observación de la profesora-investigadora, de las producciones de los alumnos y de los resultados de las pruebas individuales que se realizaron, podremos extraer conclusiones e implicaciones para mejorar dicha propuesta.

En la cuarta sesión, en la que individualmente tuvieron que realizar los ejercicios 1.3 y 5.2 con fracciones y se les proporcionó la estrategia de resolución de reescribir las fracciones como números decimales, los resultados mejoraron de forma notable respecto de las pruebas diagnósticas, pasando los aciertos en algoritmos de un 27% a un 59% en el primer caso y de un 0% a un 47% en el segundo.

En la prueba final de la sexta sesión se planteó un tipo de problema que ya se había trabajado en clase, problema 6.2, y dos que no se habían trabajado, Tipos 3.3 y 10.7.

	Estructura		**Operación**		**Algoritmo**		**Blanco**
Ejercicio	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	
Prueba diagnóstica	33,33	0	13,33	20	13,33	0	60
Prueba final	83	0	75	8	58	17	17

Tabla 5.5. Resultados en porcentaje del problema Tipo 3.3 fracciones en la prueba diagnóstica y en la control.

En el problema 3.3 fracciones (Tabla 5.5) los ejercicios en blanco pasaron de un 60% a un 17%. Aunque este ejercicio no se había trabajado previamente, el trabajo previo con otros problemas aditivos animó a los alumnos a enfrentarse a un problema que en las pruebas diagnósticas habían considerado muy difícil como para abordarlo.

	Estructura		**Operación**		**Algoritmo**		**Blanco**
Ejercicio	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	
Prueba diagnóstica	5,88	11,76	0	5,88	0	0	82,35
Prueba final	83	17	75	8	75	0	0

Tabla 5.6. Resultados en porcentaje del problema Tipo 6.2 decimales en la prueba control.

En el problema 6.2 decimales (Tabla 5.6) no quedó ningún ejercicio en blanco en la prueba control, en la prueba previa quedaron un 82% de problemas en blanco. El haberlo trabajado previamente, y el que el problema sea con números decimales, animó a enfrentarse a él a todos nuestros alumnos, y aunque hubo un 17% de fallos en estructura y un 8% en operación, un 75% resolvió completamente bien el problema (en la prueba diagnóstica ninguno)

	Estructura		**Operación**		**Algoritmo**		**Blanco**
Ejercicio	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	
Prueba diagnóstica	94,74	0	89,47	5,26	10,53	78,95	5,26
Prueba final	92	0	75	17	58	17	8

Tabla 5.7. Resultados en porcentaje del problema Tipo 10.7 fracciones en la prueba control.

En el problema 10.7 fracciones (Tabla 5.7) los resultados entre las dos pruebas fueron muy similares en ejercicios en blanco. En operación fueron ligeramente peores tras la propuesta. Sin embargo, en algoritmo encontramos una notable mejoría.

En general a los alumnos el trabajo con grupos interactivos les gusta y les motiva. Por otro lado, la parte manipulativa les anima mucho, sobre todo a alumnos con grandes dificultades. No tuvimos ningún problema a la hora de juntar la clase de referencia con la de compensatoria y en términos generales los alumnos estuvieron contentos de trabajar juntos, sobre todo a los alumnos del grupo de compensatoria les motivó mucho compartir clase con el resto de sus compañeros. Los problemas de convivencia que hubo fueron ocasionados por problemas personales previos de los alumnos que no querían trabajar juntos, pero esto solo dificultó la actividad en una de las sesiones.

Para el siguiente ciclo de implementación, descartaremos el planteamiento por parte de los alumnos de problemas, que aunque es un ejercicio muy interesante, les cuesta mucho. Por otro lado, hemos observado que darles una hoja con los ejercicios escritos y con pautas sobre el trabajo les ayuda a realizar su trabajo y a dejarlo plasmado por escrito. En esta propuesta en un principio no les dábamos dicho guión y perdimos mucha información por este motivo, posteriormente con las hojas grupales pudimos recabar más datos. En el siguiente ciclo daremos a cada alumno un ejemplar de ese guion para que todos puedan plasmar por escrito sus desarrollos y conclusiones.

5.3. Desarrollo del segundo ciclo

En base a los resultados obtenidos en las diferentes pruebas diagnósticas y, sobre todo, teniendo en cuenta las reflexiones realizadas tras la implementación del primer ciclo, se ha rediseñado la propuesta didáctica de forma completa.

5.3.1. Diseño de las sesiones de trabajo

Esta nueva propuesta se realizará de forma seguida y pasará a ser una unidad didáctica más para 2º de ESO. Esto impone ciertas restricciones en cuanto al número de sesiones que pueden dedicarse, no obstante, se amplía el número de sesiones de las 6 sesiones del primer ciclo a un total de 9. Se mantiene la importancia del trabajo según la metodología de los grupos interactivos que se alterna con el trabajo de refuerzo en el aula.

Las sesiones de refuerzo en el aula se utilizarán también para poner en común el trabajo realizado en grupos interactivos la clase anterior. La última sesión, al igual que en el ciclo anterior, se dedica a realizar una pequeña prueba escrita que necesitaremos, por un lado para disponer de información "académica". En relación con la metodología, esto se relaciona con el hecho de estar realizando "practice-based" research. Por otro lado, la prueba final nos sirve como instrumento de recogida de datos (como se dice también en la metodología) tanto para observar los resultados de la experimentación como para comparar con las pruebas previas, lo cual nos sirve para evaluar el funcionamiento global de la actuación realizada.

En esta propuesta intentaremos que los enunciados de los problemas pertenezcan a contextos cercanos para nuestros alumnos. Para ello, además de buscar los enunciados en situaciones que ellos puedan encontrar, los haremos protagonistas de los problemas, usando sus nombres en ellos.

5.3.1.1. Primera sesión

El objetivo de esta primera sesión consiste en que los alumnos se familiaricen con los problemas aditivos de una etapa y con cierto material manipulativo para su resolución y lleguen a resolver problemas de los Tipos 2.1, 2.2, 3.1 y 4.1, . Se trabajará según la metodología de los grupos interactivos en el aula, para lo que se plantean cuatro mesas de actividades.

En cada mesa se plantearán dos problemas del mismo tipo, uno con números naturales y el otro con decimales o con fracciones. En cada una de ellas habrá un voluntario y se proporcionarán a los alumnos materiales para la resolución de los problemas. Finalmente, cada alumno deberá rellenar una ficha con la resolución de cada uno de los problemas y entregarla al terminar la clase.

En la Tabla 5.8 se recoge la información más relevante correspondiente a cada una de las cuatro mesas que forman parte de esa primera sesión.

Sesión 1 - Mesa 1	
Tipo de problema	Tipo 2.1: Los datos son S_1 y $U_1=U(S_1,S_2)$. La incógnita es S_2.
Enunciados	Aitana tiene 8 libros, entre Jorge y Aitana tienen 13 libros. ¿Cuántos libros tiene Jorge? Entre Arancha y Diego han comprado 7/4 de kilo de naranjas, Si Arancha ha comprado3/8 de kilo, ¿cuánto ha comprado Diego?
Materiales	Cajitas Liro, garbanzos y piezas de fracciones pintadas y recortadas poniendo la fracción que representan (medios, cuartos, octavos, etc.)
Estrategia de resolución	Uso de las cajitas Liro.

Sesión 1 - Mesa 2	
Tipo de problema	Tipo 4.1: Los datos son S_1 y $T_1=T(S_1,S_2)$. La incógnita es S_2.
Enunciados	Alexia tiene 18 flores en su jardín y le regala 4 a Natalia, ¿cuántas flores le quedan? Marlon tiene 1/6 de kilo de frambuesas, si compra 3/4 de kilo de frambuesas más, ¿cuántos kilos de frambuesas tiene ahora?
Materiales	Cajitas Liro, garbanzos y piezas de fracciones pintadas y recortadas poniendo la fracción que representan (medios, cuartos, octavos, etc.)
Estrategia de resolución	Uso de las cajitas Liro.
Sesión 1 - Mesa 3	
Tipo de problema	Tipo 3.1: Los datos son S_1 y $C_1=C(S_1,S_2)$. La incógnita es S_2.
Enunciados	En 2°A hay 27 alumnos, 2º B tiene 3 alumnos menos que 2ºA. ¿Cuántos alumnos hay en 2ºB? Un anillo pesa 9,37g, otro anillo similar pesa 1,4g más, ¿cuánto pesa este segundo anillo?
Materiales	Cajitas Liro, garbanzos (parte entera), lentejas (décimas) y arroz (centésimas).
Estrategia de resolución	Uso de las cajitas Liro.
Sesión 1 - Mesa 4	
Tipo de problema	Tipo 2.2. Los datos son S_1 y $U_1=U(s,s')$ donde s y s' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $U_2=U(S_1,U_1)$.
Enunciados	En la casa de Lorena hay 6 sillas, entre las casas de Danna y Carolina hay 14 sillas. ¿Cuántas sillas hay entre las tres casas. Hay que pintar una pared. Antonio ha pintado 37/4 de metro cuadrado, mientras que entre Danes y Jeremy han pintado 15/2 de metro cuadrado. ¿Cuánto han pintado entre los tres?
Materiales	Cajitas Liro, garbanzos (parte entera), lentejas (décimas) y arroz (centésimas). Calculadoras.
Estrategia de resolución	Uso de las cajitas Liro. Paso de fracción a decimal.

Tabla 5.8. Información de las mesas de trabajo de la primera sesión

5.3.1.2. Segunda sesión

Esta segunda sesión se dedicará, por un lado, a poner en común el trabajo realizado por los alumnos en la sesión anterior y, por otro, a reforzar dicho trabajo mediante la resolución en pequeños grupos de problemas del mismo tipo. Para la resolución de estos nuevos problemas, los alumnos no dispondrán de materiales, pero sí de calculadoras.

Esquema de la sesión

- Puesta en común de las soluciones de los problemas de la sesión anterior (20 min).
- Trabajo de los alumnos en pequeños grupos resolviendo nuevos problemas (20 min). Los problemas planteados son:
  - Laura pesa 63,7 kilos, entre Laura y Manuel pesan 130 kilos. ¿Cuántos kilos pesa Manuel? (Tipo 2.1)
  - Elsa pesaba 57,6 kg, si gana 1,72kg, ¿cuántos pesa ahora? (Tipo 4.1)
  - La receta de un bizcocho indica que tengo que poner 1/4 kilo de harina de trigo. De harina de maíz tengo que poner 1/6 de kilo menos que de harina de trigo. ¿Qué cantidad de harina de maíz tengo que poner? (Tipo 3.1)
  - Noelia tiene 23,64 €, entre Óscar y Pablo tienen 31,79 €. ¿Cuánto dinero tienen entre los tres? (Tipo 2.2)
- Puesta en común e institucionalización de las soluciones de los problemas resueltos en el aula (15 min).

5.3.1.3. Tercera sesión

El objetivo de esta tercera sesión consiste en que los alumnos se familiaricen con los problemas aditivos de una etapa y con cierto material manipulativo para su resolución y lleguen a resolver problemas de los Tipos 5.1, 6.1, 7.1 y 8.1, . Se trabajará según la metodología de los grupos interactivos en el aula, para lo que se plantean cuatro mesas de actividades.

En cada mesa se plantearán dos problemas del mismo tipo, uno con números naturales y el otro con decimales o con fracciones. En cada una de ellas habrá un voluntario y se proporcionarán a los alumnos materiales para la resolución de los problemas. Finalmente, cada alumno deberá rellenar una ficha con la resolución de cada uno de los problemas y entregarla al terminar la clase.

En la Tabla 5.9 se recoge la información más relevante correspondiente a cada una de las cuatro mesas que forman parte de esa tercera sesión.

Sesión 3 - Mesa 1	
Tipo de problema	Tipo 5.1: Los datos son $U_1=U(s,s')$ y $U_2=U(s,s'')$ donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $C_1=C(s',s'')$.
Enunciados	Entre Elisabeth y Camila tienen 5 canicas y entre Elisabeth y Enmarie tienen 7. ¿Quién tiene más canicas, Camila o Enmarie? ¿Cuántas? Un refresco y un hamburguesa me cuestan 3,7€, a mi amigo un refresco y un perrito caliente le cuestan 2,9€, ¿Cuál es la diferencia de precio entre un perrito y una hamburguesa?
Materiales	Lápices de colores y billetes y monedas de euro.

Estrategia de resolución	Material manipulable.
Sesión 3 - Mesa 2	
Tipo de problema	Tipo 6.1: Los datos son $U_1=U(s,s')$ y $C_1=C(s,s'')$ donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $U_2=U(s',s'')$.
Enunciados	Entre Junior y Saúl tienen 15 lápices de colores. Roberto tiene 2 lápices de colores menos que Junior. ¿Cuántos lápices de colores tienen entre Roberto y Saúl?, ¿cuántos lápices de colores tiene Junior? Entre Marlon y Juan trabajan 49/6 de hora, Aarón trabaja 3/4 de hora menos que Marlon, ¿cuántas horas trabajan entre Aarón y Juan?
Materiales	Lápices de colores, billetes y monedas de euro y calculadoras.
Estrategia de resolución	Material manipulable. Paso de fracción a decimal.
Sesión 3 - Mesa 3	
Tipo de problema	Tipo 7.1. Los datos U_1 =U(s,s') y T_1 =T(s,s'') donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $U_2=U(s',s'')$.
Enunciados	Entre Alex y Aroa tienen 5 peces de colores. Los padres de Alex le regalan 3 peces más por su cumpleaños. ¿Cuántos peces tienen ahora entre los dos? Esta mañana en el mercado he comprado 5/3 de kilo entre uvas y peras. Si antes de llegar a casa me como 1/15 de kilo de uvas, ¿cuánto pesa la fruta que llevo al llegar a casa?
Materiales	Lápices de colores, billetes y monedas de euro y calculadoras.
Estrategia de resolución	Material manipulable. Paso de fracción a decimal.
Sesión 3 - Mesa 4	
Tipo de problema	Tipo 8.1. Los datos son $C_1=C(s,s')$ y $C_2=C(s,s'')$ donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $C_3=C(s',s'')$.
Enunciados	David tiene 2 canicas más que Henry y Henry tiene 4 canicas menos que Abu. ¿Cuál es la diferencia entre el número de canicas de David y el de Abu? Shiam tiene 38,7€ más que Nana y Nana tiene 9,83€ más que Jeremhy ¿Cuál es la diferencia entre la cantidad de euros de Jeremhy y de Shiam?
Materiales	Lápices de colores y billetes y monedas de euro.
Estrategia de resolución	Material manipulable.

Tabla 5.9. Información de las mesas de trabajo de la tercera sesión.

5.3.1.4. Cuarta sesión

Esta cuarta sesión se dedicará, por un lado, a poner en común el trabajo realizado por los alumnos en la sesión anterior y, por otro, a reforzar dicho trabajo mediante la resolución en pequeños grupos de problemas del mismo tipo. Para la resolución de estos nuevos problemas, los alumnos no dispondrán de materiales, pero sí de calculadoras.

Esquema de la sesión

- Puesta en común de las soluciones de los problemas de la sesión anterior (20 min).
- Trabajo de los alumnos en pequeños grupos resolviendo nuevos problemas (20 min). Los problemas planteados son:
  - Entre Irene y Ruth trabajan 53/6 de hora, entre Irene y María 31/4, ¿Quién trabaja más, Ruth o María? ¿Cuánto? (Tipo 5.1)
  - Entre María y Pablo tienen 218,26 €. Carmen tiene 38,73 € más que Pablo, ¿cuántos euros tienen entre María y Carmen? (Tipo 6.1)
  - Entre Raúl y Paula tienen 125,34 €, Raúl se gasta 35,8 € en un libro, ¿cuánto dinero tienen ahora entre los dos?, ¿cuánto dinero tiene Paula? (Tipo 7.1)
  - Lucía trabaja ¾ de hora menos que Arancha y Arancha trabaja ½ hora más que Belén, ¿cuántas horas más o menos que Belén trabaja Lucía? (Tipo 8.1)
- Puesta en común e institucionalización de las soluciones de los problemas resueltos en el aula (15 min).

5.3.1.5. Quinta sesión

El objetivo de esta quinta sesión consiste en que los alumnos lleguen a resolver problemas de los Tipos 5.3, 9.2, 8.2 y 8.3, también se ofrecerán materiales manipulables, unos ya conocidos para ellos y otros nuevos. Se trabajará según la metodología de los grupos interactivos en el aula, para lo que se plantean cuatro mesas de actividades.

En cada mesa se plantearán dos problemas del mismo tipo, uno con números naturales y el otro con decimales o con fracciones. En cada una de ellas habrá un voluntario y se proporcionarán a los alumnos materiales para la resolución de los problemas. Finalmente, cada alumno deberá rellenar una ficha con la resolución de cada uno de los problemas y entregarla al terminar la clase.

En la Tabla 5.10 se recoge la información más relevante correspondiente a cada una de las cuatro mesas que forman parte de esa quinta sesión.

Sesión 3 - Mesa 1	
Tipo de problema	Tipo 5.1: Los datos son $U_1=U(s,s')$ y $U_2=U(s,s'')$ donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $C_1=C(s',s'')$.

Enunciados	Entre Elisabeth y Camila tienen 5 canicas y entre Elisabeth y Enmarie tienen 7. ¿Quién tiene más canicas, Camila o Enmarie? ¿Cuántas? Un refresco y un hamburguesa me cuestan 3,7€, a mi amigo un refresco y un perrito caliente le cuestan 2,9€, ¿Cuál es la diferencia de precio entre un perrito y una hamburguesa?
Materiales	Lápices de colores y billetes y monedas de euro.
Estrategia de resolución	Material manipulable.
Sesión 3 - Mesa 2	
Tipo de problema	Tipo 6.1: Los datos son $U_1=U(s,s')$ y $C_1=C(s,s'')$ donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $U_2=U(s',s'')$.
Enunciados	Entre Junior y Saúl tienen 15 lápices de colores. Roberto tiene 2 lápices de colores menos que Junior. ¿Cuántos lápices de colores tienen entre Roberto y Saúl?, ¿cuántos lápices de colores tiene Junior? Entre Marlon y Juan trabajan 49/6 de hora, Aarón trabaja 3/4 de hora menos que Marlon, ¿cuántas horas trabajan entre Aarón y Juan?
Materiales	Lápices de colores, billetes y monedas de euro y calculadoras.
Estrategia de resolución	Material manipulable. Paso de fracción a decimal.
Sesión 3 - Mesa 3	
Tipo de problema	Tipo 7.1. Los datos U_1 =U(s,s') y T_1 =T(s,s'') donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $U_2=U(s',s'')$.
Enunciados	Entre Alex y Aroa tienen 5 peces de colores. Los padres de Alex le regalan 3 peces más por su cumpleaños. ¿Cuántos peces tienen ahora entre los dos? Esta mañana en el mercado he comprado 5/3 de kilo entre uvas y peras. Si antes de llegar a casa me como 1/15 de kilo de uvas, ¿cuánto pesa la fruta que llevo al llegar a casa?
Materiales	Lápices de colores, billetes y monedas de euro y calculadoras.
Estrategia de resolución	Material manipulable. Paso de fracción a decimal.
Sesión 3 - Mesa 4	
Tipo de problema	Tipo 8.1. Los datos son $C_1=C(s,s')$ y $C_2=C(s,s'')$ donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $C_3=C(s',s'')$.
Enunciados	David tiene 2 canicas más que Henry y Henry tiene 4 canicas menos que Abu. ¿Cuál es la diferencia entre el número de canicas de David y el de Abu? Shiam tiene 38,7€ más que Nana y Nana tiene 9,83€ más que Jeremhy ¿Cuál es la diferencia entre la cantidad de euros de Jeremhy y de Shiam?
Materiales	Lápices de colores y billetes y monedas de euro.

Estrategia de resolución	Material manipulable.

Tabla 5.10. Información de las mesas de trabajo de la tercera sesión

5.3.1.6. Sexta sesión

Esta sexta sesión se dedicará, por un lado, a poner en común el trabajo realizado por los alumnos en la sesión anterior y, por otro, a reforzar dicho trabajo mediante la resolución en pequeños grupos de problemas del mismo tipo. Para la resolución de estos nuevos problemas, los alumnos no dispondrán de materiales ni de calculadoras.

Esquema de la sesión

- Puesta en común de las soluciones de los problemas de la sesión anterior (20 min).
- Trabajo de los alumnos en pequeños grupos resolviendo nuevos problemas (20 min). Los problemas planteados son:
    - Cuatro amigos se reparten un trabajo. Los dos primeros hacen su parte en 7,4 minutos y los otros dos hacen la suya en 6,32. ¿Cuánto han tardado en total en hacer el trabajo? (Tipo 5.3)
    - Teresa tiene 145,64€ más que David, si Teresa se gasta 34,85€ en dos libros, ¿cuánto dinero tienen que ganar David para tener la misma cantidad que Teresa? (Tipo 9.2)
    - Lorena pesa 12/5 kilos más que Carlos y 23/10 menos que Mario, ¿cuántos kilos debería adelgazar Mario para pesar lo mismo que Carlos? (Tipo 8.2)
    - Volvemos a los músicos de Bremen, si el gallo mide 23/100 de metro menos que el perro, y el gato 21/25 de metro menos que el burro, ¿qué torre será más alta la formada por el perro y el gato o la formada por el burro y el gallo?, ¿cuánto? (Tipo 8.3)
- Puesta en común e institucionalización de las soluciones de los problemas resueltos en el aula (15 min).

5.3.1.7. Séptima sesión

El objetivo de esta séptima sesión es que los alumnos lleguen a resolver problemas de los Tipos 3.2, 6.3, 10.2 y 10.6, sin materiales manipulables. Se trabajará según la metodología de los grupos interactivos en el aula, para lo que se plantean cuatro mesas de actividades.

En cada mesa se plantearán dos problemas del mismo tipo, uno con números naturales y el otro con decimales o con fracciones. En cada una de ellas habrá un voluntario. Se animará a los alumnos a hacer representaciones gráficas si se considera necesario. Finalmente, cada alumno deberá rellenar una ficha con la resolución de cada uno de los problemas y entregarla al terminar la clase.

En la Tabla 5.11 se recoge la información más relevante correspondiente a cada una de las cuatro mesas que forman parte de esa séptima sesión.

Sesión 3 - Mesa 1	
Tipo de problema	Tipo 5.1: Los datos son $U_1=U(s,s')$ y $U_2=U(s,s'')$ donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $C_1=C(s',s'')$.
Enunciados	Entre Elisabeth y Camila tienen 5 canicas y entre Elisabeth y Enmarie tienen 7. ¿Quién tiene más canicas, Camila o Enmarie? ¿Cuántas? Un refresco y un hamburguesa me cuestan 3,7€, a mi amigo un refresco y un perrito caliente le cuestan 2,9€, ¿Cuál es la diferencia de precio entre un perrito y una hamburguesa?
Materiales	Lápices de colores y billetes y monedas de euro.
Estrategia de resolución	Material manipulable.
Sesión 3 - Mesa 2	
Tipo de problema	Tipo 6.1: Los datos son $U_1=U(s,s')$ y $C_1=C(s,s'')$ donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $U_2=U(s',s'')$.
Enunciados	Entre Junior y Saúl tienen 15 lápices de colores. Roberto tiene 2 lápices de colores menos que Junior. ¿Cuántos lápices de colores tienen entre Roberto y Saúl?, ¿cuántos lápices de colores tiene Junior? Entre Marlon y Juan trabajan 49/6 de hora, Aarón trabaja 3/4 de hora menos que Marlon, ¿cuántas horas trabajan entre Aarón y Juan?
Materiales	Lápices de colores, billetes y monedas de euro y calculadoras.
Estrategia de resolución	Material manipulable. Paso de fracción a decimal.
Sesión 3 - Mesa 3	
Tipo de problema	Tipo 7.1. Los datos U_1 =U(s,s') y T_1 =T(s,s'') donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $U_2=U(s',s'')$.
Enunciados	Entre Alex y Aroa tienen 5 peces de colores. Los padres de Alex le regalan 3 peces más por su cumpleaños. ¿Cuántos peces tienen ahora entre los dos? Esta mañana en el mercado he comprado 5/3 de kilo entre uvas y peras. Si antes de llegar a casa me como 1/15 de kilo de uvas, ¿cuánto pesa la fruta que llevo al llegar a casa?
Materiales	Lápices de colores, billetes y monedas de euro y calculadoras.
Estrategia de resolución	Material manipulable. Paso de fracción a decimal.
Sesión 3 - Mesa 4	
Tipo de problema	Tipo 8.1. Los datos son $C_1=C(s,s')$ y $C_2=C(s,s'')$ donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $C_3=C(s',s'')$.
Enunciados	David tiene 2 canicas más que Henry y Henry tiene 4 canicas menos que Abu. ¿Cuál es la diferencia entre el número de canicas de David y el de Abu?

	Shiam tiene 38,7€ más que Nana y Nana tiene 9,83€ más que Jeremhy ¿Cuál es la diferencia entre la cantidad de euros de Jeremhy y de Shiam?
Materiales	Lápices de colores y billetes y monedas de euro.
Estrategia de resolución	Material manipulable.

Tabla 5.11. Información de las mesas de trabajo de la tercera sesión

5.3.1.8. Octava sesión

Esta octava sesión se dedicará, por un lado, a poner en común el trabajo realizado por los alumnos en la sesión anterior y, por otro, a reforzar dicho trabajo mediante la resolución en pequeños grupos de problemas del mismo tipo. Para la resolución de estos nuevos problemas, los alumnos no dispondrán de materiales ni de calculadoras.

Esquema de la sesión

- Puesta en común de las soluciones de los problemas de la sesión anterior (20 min).
- Trabajo de los alumnos en pequeños grupos resolviendo nuevos problemas (20 min). Los problemas planteados son:
    - Mi perro Blas pesa 25,7 kg. Mi gata Rita pesa 11,23 kg más que mi periquito Curro. ¿Cuántos kilos más o menos que Rita pesan entre Blas y Curro? (Tipo 3.2)
    - Entre Eva y Marta han recorrido 25/80 de kilómetro, Silvia ha recorrido 2/7 menos que Mónica, ¿cuánto tienen que recorrer Silvia para haber recorrido los mismos kilómetros que entre las otras tres chicas juntas? (Tipo 6.3)
    - Arturo el lunes compra 3/4 de kilo de fresas y el martes cierta cantidad más. Si entre los dos días ha comprado 15/8 de kilo de fresas, ¿cuántas compró el martes? (Tipo 10.2)
    - Elisa y Raquel tienen una empresa, la última operación de Elisa conlleva unas pérdidas de 1875,45€ y la de Raquel unos beneficios de 3564,12€. ¿Cuánto dinero más o menos tiene la empresa tras estas dos operaciones? (Tipo 10.6)
- Puesta en común e institucionalización de las soluciones de los problemas resueltos en el aula (15 min).

5.3.1.9. Novena sesión

La novena y última sesión se dedicará a realizar una prueba que nos permita evaluar el funcionamiento de la propuesta. Los alumnos deberán realizarla individualmente, sin ayuda de materiales (ni siquiera calculadora) y sin ninguna indicación sobre posibles estrategias a aplicar.

Tipo	Tipo de número	Enunciado
2.1	fracciones	Natalia compra un abeto de navidad que mide 3/4 de metro, entre el abeto de Natalia y el de Diego miden 7/6 de metro. ¿Cuánto mide el abeto de Diego?
3.2	decimales	Camila, Arantxa y Jeremy se van de excursión. Camila anda 3,4 km. Arantxa anda 0,6 km más que Jeremy. ¿Cuántos kilómetros más o menos que Arantxa andan entre Camila y Jeremy?
5.1	naturales	Entre Marlon y Lorena tienen 15 adornos para el árbol de navidad y entre Aarón y Lorena tienen 11. ¿Quién tiene más adornos, Marlon o Aarón?, ¿Cuántos?
6.1	decimales	Entre Siham y Saúl tienen 62,35€. Aitana tiene 5,46€ más que Saúl. ¿Cuánto dinero tienen entre Siham y Aitana?
6.3	fracciones	Sebastián compra 2/6 de kilo entre turrón de Jijona y turrón de Alicante. Compra también 1/4 de kilo más de turrón de chocolate que de turrón de naranja. ¿Cuánto turrón de chocolate más tiene que comprar Sebastián si quiere tener tanto turrón de chocolate como entre los otros tres juntos?
7.1	decimales	Entre Jorge y Alexia tienen 82,34€. Jorge gasta 15,29€. ¿Cuánto dinero tienen ahora entre los dos?
8.2	fracciones	Danna, Antonio y Alex se están tejiendo bufandas para este invierno. La bufanda de Danna mide 2/5 de metro más que la de Antonio y la bufanda de Antonio mide 3/10 de metro más que la de Alex, ¿cuántos metros deberá tejer Alex si quiere que su bufanda mida tanto como la de Danna?
8.3	naturales	Aroa, Enmarie, Nana y Carolina piden maquillajes a Papa Noel, si a Aroa le trae 2 maquillajes más que a Enmarie y a Carolina 3 maquillajes menos que a Nana, ¿cuántos maquillajes más o menos que entre Aroa y Carolina les trae a Enmarie y Nana?
9.2	fracciones	En un maratón Roberto lleva recorridos 13/6 de kilómetro menos que Daniel. Sabemos que si Roberto recorre 15/4 de kilómetro más llegará a la meta, ¿cuántos kilómetros debe recorrer todavía Daniel para llegar a la meta?
10.6	decimales	Estas Navidades Junior engorda 0,450 kg y Elizabeth pierde 0,345 Kg. Al finalizar la Navidad, ¿cuántos kilos más o menos que a principio de fiestas pesan los dos juntos?

Tabla 5.12. Composición de la Prueba control.

La prueba consta de diez problemas cuyas características (tipo de problema, tipos de números implicados y enunciado) se muestran en la Tabla 5.12. El tiempo disponible para la realización de los mismos será de 55 minutos. Todos los problemas que se propusieron en la prueba habían sido trabajados en la propuesta didáctica.

5.3.2. Resultados de la implementación

En este apartado presentamos los resultados de la implementación de las nueve sesiones diseñadas. Este segundo ciclo de la propuesta se desarrolló durante el curso 2017-2018. En concreto, a lo largo de los meses de noviembre y diciembre de 2017. A pesar de haber 30 alumnos en listas, tres de ellos llevan más de un mes sin venir a clase por lo que se trabajó en principio con 27 alumnos a lo largo de las 9 sesiones de clase.

El trabajo se comenzó en la clase siguiente al examen del tema de fracciones, que consistió solo en operaciones básicas, operaciones combinadas y fracciones semejantes. Este examen fue superado únicamente por 10 de los alumnos de la clase y además 5 alumnos no se presentan al examen. Por tanto, hemos de tener en cuenta que es posible asumir que al menos 15 alumnos de la clase no dominan las operaciones básicas con fracciones.

A continuación, vamos a presentar los resultados del trabajo realizado en el aula durante los días de la propuesta. Para mantener el anonimato de los alumnos, a cada uno de los alumnos se le ha asociado de forma aleatoria un código entre los números 1 y 30.

5.3.2.1. Primera sesión

La primera sesión tuvo lugar el día 21 de noviembre de 2017. Ese día no acudieron a clase seis alumnos: 2, 6, 15, 16, 29 y 30. Como ya se ha señalado con anterioridad, en esta sesión trabajamos en grupos interactivos problemas de Tipo 2.1, 2.2, 3.1 y 4.1 con la ayuda de distintos materiales: Cajitas Liro, material manipulable (garbanzos, lentejas y arroz) y piezas de fracciones (ver Figuras 5.16 y 5.17).

Figura 5.16. Materiales utilizados el primer día en GI. Se pueden apreciar cajitas Liro y tarjetas de fracciones.

Figura 5.17. Materiales utilizados el primer día en GI. Se pueden apreciar cajitas Liro, tarjetas de fracciones y material manipulable para trabajar con números decimales (garbanzos, lentejas y arroz).

Aspectos organizativos

Los voluntarios en esta sesión fueron un profesor de Didáctica de las Matemáticas, una estudiante de doctorado y un alumno del Máster de Educación todos de la Universidad Complutense de Madrid. Los alumnos estaban ya muy acostumbrados a trabajar en grupos interactivos por lo que para su agrupación utilizamos, salvo pequeñas variaciones, los mismos grupos que ya habíamos utilizado tanto en lengua como en matemáticas. La composición de los grupos quedó como sigue:

- Primer grupo: alumnos 1, 3, 10, 11, 18, 28.
- Segundo grupo: alumnos 5, 7, 17, 23, 24.
- Tercer grupo: alumnos 4, 14, 20, 22, 26, 27.
- Cuarto grupo: alumnos 8, 9, 12, 13, 19, 21, 25.

Comentarios generales sobre el funcionamiento de los grupos

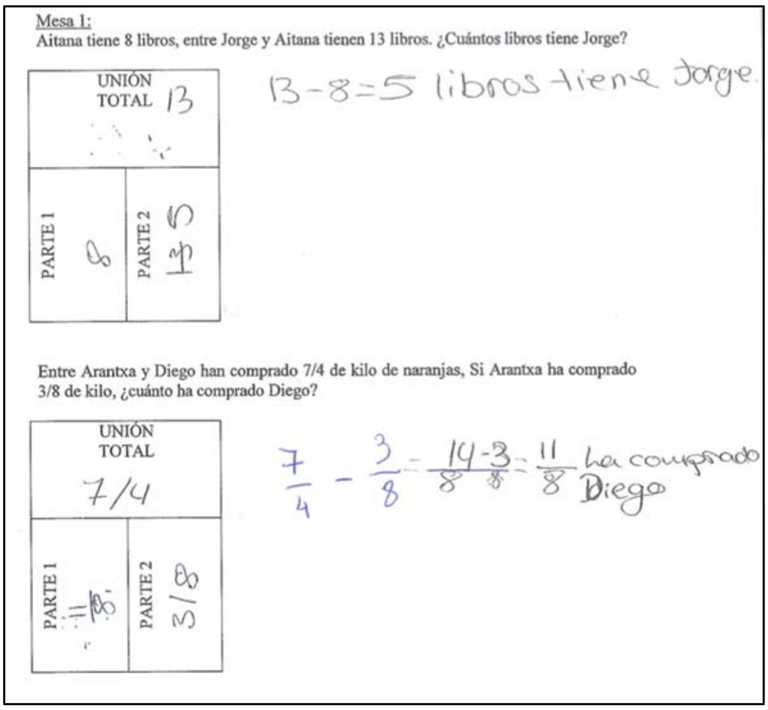
El trabajo de los alumnos dentro de cada grupo fue diverso. Por ejemplo, en el primer grupo se observó que todos los alumnos trabajaron a la vez de forma muy coordinada. El alumno 10 explicó a sus compañeros como pasar de fracciones a decimales mediante la división. En el segundo grupo solo trabajaron adecuadamente las alumnas 5 y 23. La alumna 17 no participó en ninguna de las actividades (dijo encontrarse mal) y el alumno 24 solo trabajó las dos primeras mesas que le correspondieron. De hecho, cuando la ayuda del voluntario no era para él en exclusiva, no realizaba el problema. En el tercer grupo el alumno 26 se quedó a parte porque dijo estar mareado por haber recibido un golpe en el recreo. El resto del alumnado trabajó muy bien y de forma muy coordinada. Por último, en el cuarto grupo cada problema lo iba leyendo uno de los alumnos en voz alta, ninguno de los alumnos se quedó atrás.

En líneas generales, a los alumnos les encantó verse e los enunciados y los que no estaban se extrañaban. A algunos alumnos los problemas de este primer día les parecieron demasiado fáciles. Para otros, resultaron muy motivadores. En general, trabajaron bien en grupos y se repartieron algunos trabajos como dividir, contar garbanzos, etc. (Figura 5.18)

Figura 5.18. Imagen de alumnos trabajando en GI con tarjetas de fracciones.

Comentarios sobre el trabajo en la Mesa 1

En la mesa 1 se propusieron a los alumnos dos problemas de Tipo 2.1 con números naturales y con fracciones. Los alumnos disponían de materiales y, en particular, de cajitas Liro con las que trabajar. En la ficha que debían rellenar aparecía una representación pictórica de la cajita Liro correspondiente (ver Figura 5.19).



Mesa 1:
Aitana tiene 8 libros, entre Jorge y Aitana tienen 13 libros. ¿Cuántos libros tiene Jorge?

UNIÓN TOTAL 13
PARTE 1 8
PARTE 2 5

13-8=5 libros tiene Jorge.

Entre Arantxa y Diego han comprado 7/4 de kilo de naranjas, Si Arantxa ha comprado 3/8 de kilo, ¿cuánto ha comprado Diego?

UNIÓN TOTAL 7/4
PARTE 1 8
PARTE 2 3/8

$\frac{7}{4} - \frac{3}{8} = \frac{14-3}{8} = \frac{11}{8}$ ha comprado Diego

Figura 5.19. Escaneo de la hoja de respuestas de la alumna 22. Resolución de problemas Tipo 2.1 con cajitas Liro.

El uso que los alumnos hicieron de esta representación pictórica fue variado. Por ejemplo, algunos alumnos (ver Figura 5.20) personalizaron el diagrama para entenderlo mejor, haciendo así más suyo el ejercicio y asimilándolo mejor. Así, el alumno de la figura ubicó los nombres del enunciado (Aitana y Jorge) en la ficha posiblemente para facilitarse la labor de ubicar los datos.

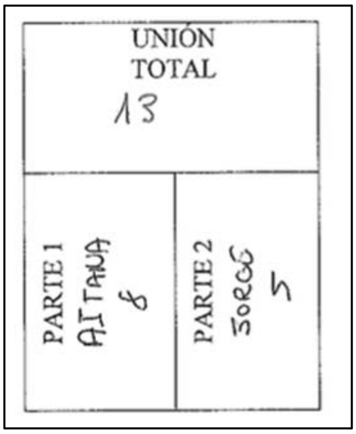


Figura 5.20. Escaneo de la hoja de respuestas del alumno 19. Resolución del problema Tipo 2.1 para naturales con cajitas Liro.

Otros, sin embargo, no la utilizaron en absoluto (Figura 5.21) y fueron capaces de resolver el problema directamente, aunque no tenemos constancia de un posible uso de la versión física de la cajita.

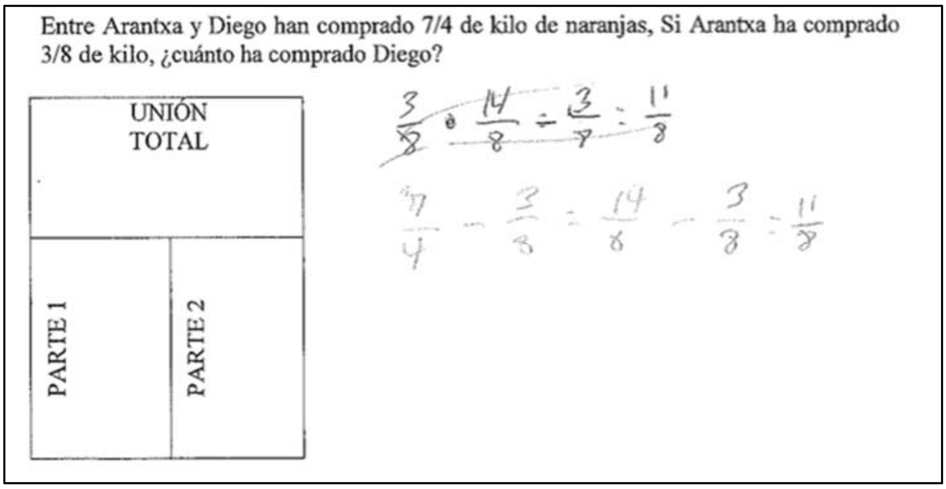


Figura 5.21. Escaneo de la hoja de respuestas del alumno 12. Resolución del problema Tipo 2.1 de fracciones con cajitas Liro.

Se pudo apreciar algunas de las ventajas de la metodología de trabajo como, por ejemplo, un cierto reparto de tareas. Generalmente, en cada grupo leía algún alumno o alumna en voz alta el problema (Figura 5.22).

Figura 5.22. Alumnos trabajando en GI con cajitas Liro con tarjetas de fracciones.

Los alumnos se ayudaban unos a otros. Por ejemplo, en la Figura 5.23 se observa como la alumna corrigió su error inicial en la disposición de los datos.

Figura 5.23. Escaneo de la hoja de respuestas de la alumna 18. Resolución del problema Tipo 2.1 para naturales con cajitas Liro.

También podemos ejemplificar el apoyo de los voluntarios. Por ejemplo, en la Figura 5.24 (parte izquierda) vemos que un grupo intentó resolver el primer problema con fracciones (siendo el enunciado con números enteros). Tras el apoyo del voluntario vemos que en la parte derecha se reescribieron los datos adecuadamente.

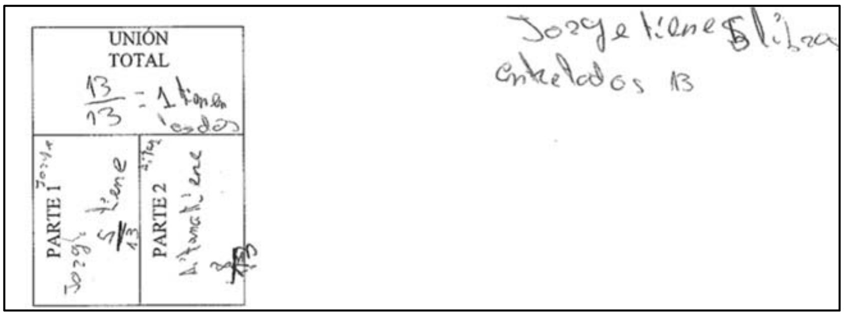


Figura 5.24. Escaneo de la hoja de respuestas del alumno 20. Resolución de problemas Tipo 2.1 con cajitas Liro.

A pesar de la ayuda de sus compañeros hay alumnos que arrastraban muchas dificultades y, de hecho, algunos alumnos aún tenían problemas con los algoritmos de cálculo (Figura 5.25):

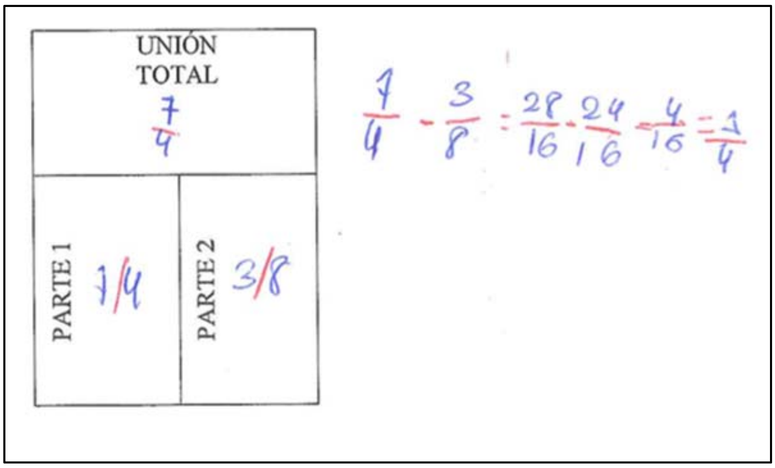


Figura 5.25. Escaneo de la hoja de respuestas del alumno 10. Resolución del problema Tipo 2.1 para fracciones con cajitas Liro.

Comentarios sobre el trabajo en la Mesa 2

En la mesa 2 se propusieron dos problemas de Tipo 4.1 con números naturales y con fracciones. Los alumnos disponían de materiales y, en particular, de cajitas Liro con las que trabajar. En la ficha que debían rellenar, aparecía una representación pictórica de la cajita Liro correspondiente (ver Figura 5.26).

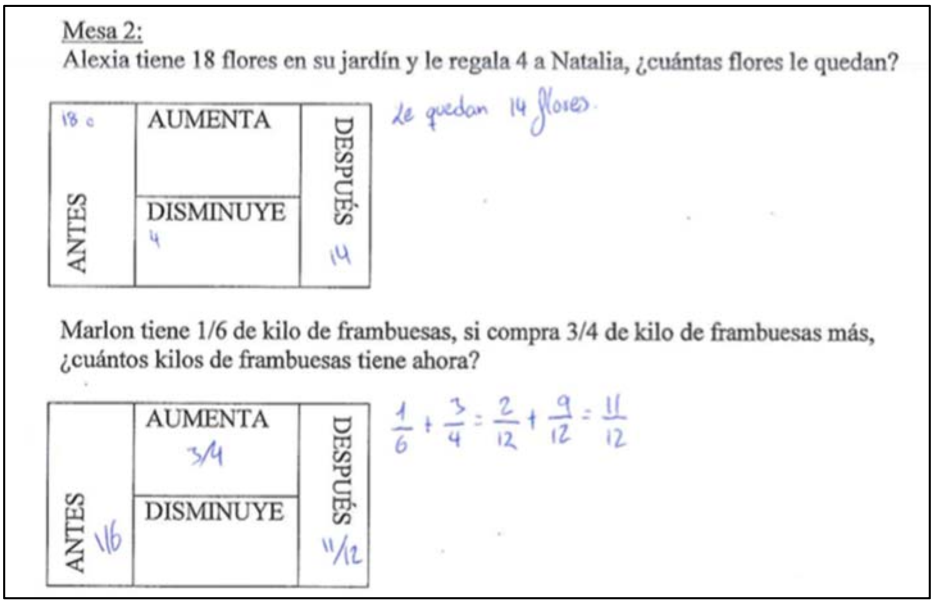


Figura 5.26. Escaneo de la hoja de respuestas de la alumna 28. Resolución del problema Tipo 4.1 para naturales y fracciones con cajitas Liro.

Usaron las tarjetas de fracciones para reducir a común denominador las fracciones y poder sumarlas. En la figura se aprecia como sobre tres tarjetas de 1/4 pusieron nueve doceavos (Figura 5.27).

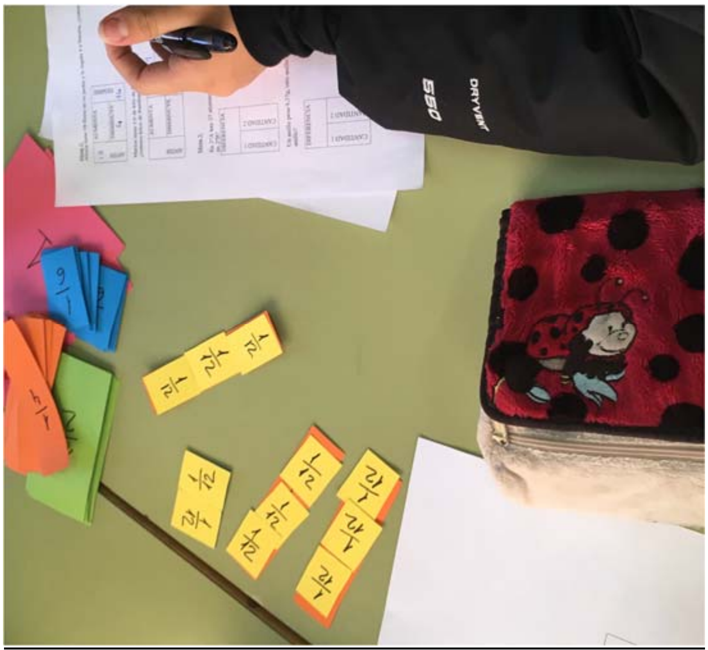


Figura 5.27. Alumnos trabajando en GI (mesa 2) con tarjetas de fracciones.

En general se manejaron bien con las fracciones y las cajitas y plasmaron los procesos que iban realizando en las hojas de respuesta (Figura 5.28).

Figura 5.28. Alumnos trabajando en GI (mesa 2) con cajitas Liro y tarjetas de fracciones.

A algunos alumnos les costaba más resolver este tipo de problemas, pero con la ayuda de sus compañeros corrigieron sus errores y lograron resolverlos (Figura 5.29).

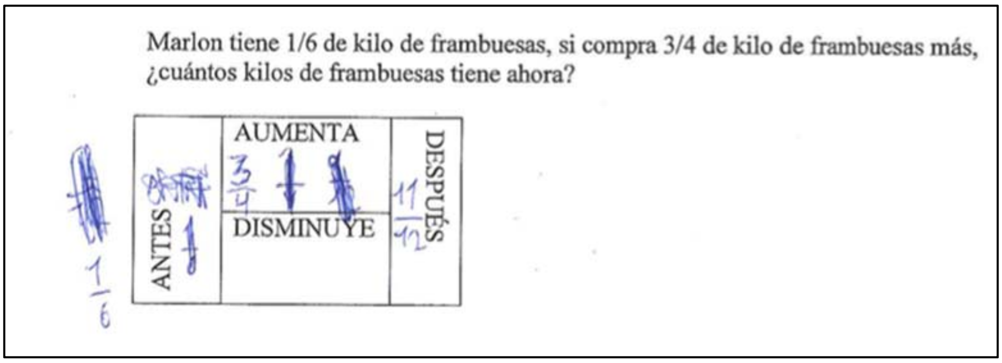


Figura 5.29. Escaneo de la hoja de respuestas del alumno 25. Resolución del problema Tipo 4.1 para fracciones con cajitas Liro.

Al igual que en la mesa 1 encontramos alumnos que tuvieron muchas dificultades para llegar al resultado, pero consideramos positivamente los avances que fueron realizando (Figura 5.30).

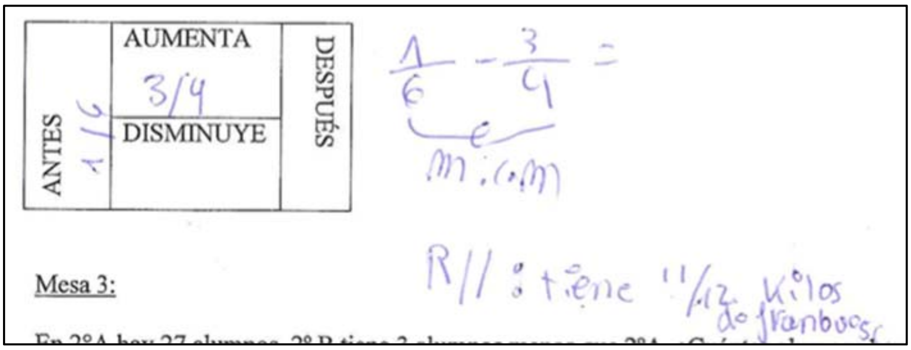
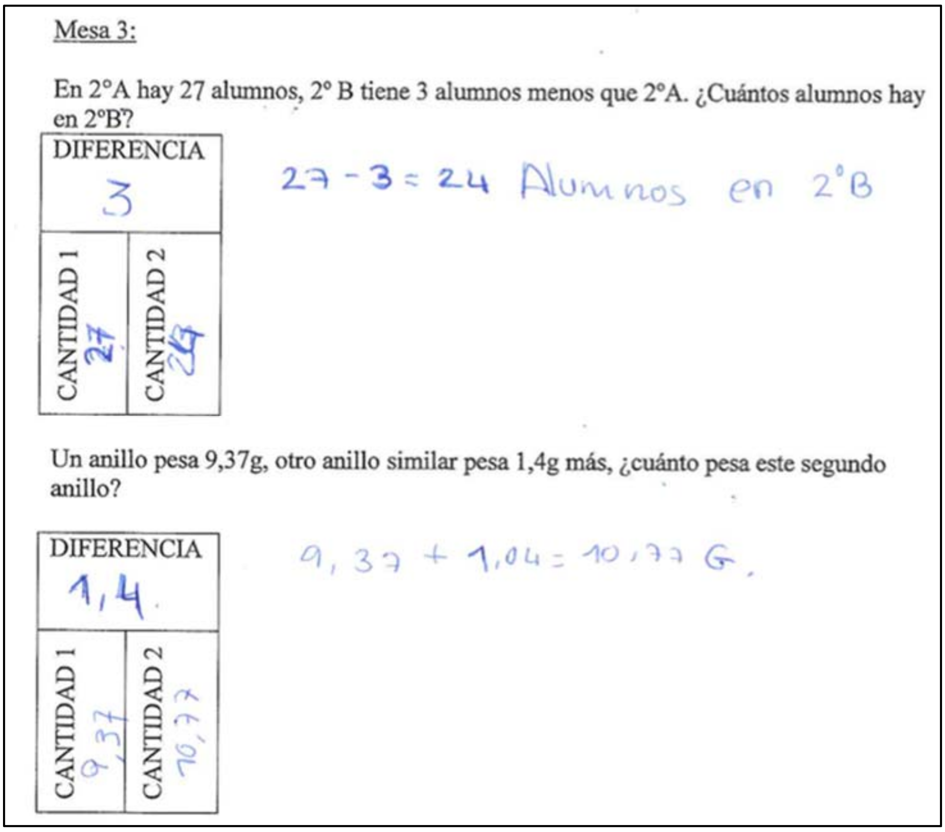


Figura 5.30. Escaneo de la hoja de respuestas del alumno 27. Resolución del problema Tipo 4.1 para fracciones con cajitas Liro.

Comentarios sobre el trabajo en la Mesa 3

En la mesa 3 se propusieron a los alumnos dos problemas de Tipo 3.1 con números naturales y con números decimales. Los alumnos disponían de materiales y, en particular, de cajitas Liro con las que trabajar. En la ficha que debían rellenar, aparecía una representación pictórica de la cajita Liro correspondiente (ver Figura 5.31).



Mesa 3:

En 2°A hay 27 alumnos, 2° B tiene 3 alumnos menos que 2°A. ¿Cuántos alumnos hay en 2°B?

DIFERENCIA 3	
CANTIDAD 1 27	CANTIDAD 2 24

27 - 3 = 24 Alumnos en 2°B

Un anillo pesa 9,37g, otro anillo similar pesa 1,4g más, ¿cuánto pesa este segundo anillo?

DIFERENCIA 1,4.	
CANTIDAD 1 9,37	CANTIDAD 2 10,77

9,37 + 1,04 = 10,77 G.

Figura 5.31. Escaneo de la hoja de respuestas de la alumna 4. Resolución del problema Tipo 3.1 para naturales y decimales con cajitas Liro.

En este caso para trabajar con las cajitas Liro con decimales utilizaron garbanzos para representar las unidades, lentejas para las décimas y arroz para las centésimas. En la figura 5.32 se aprecia como un alumno estaba representando un número decimal para utilizarlo en una cajita Liro de comparación.

Figura 5.32. Imagen de alumnos trabajando en GI (mesa 3) con material manipulable.

Aunque la gran mayoría de los alumnos resolvió correctamente el problema, encontramos algún fallo de algoritmo, no sabemos si debido al uso del material (Figura 5.33).

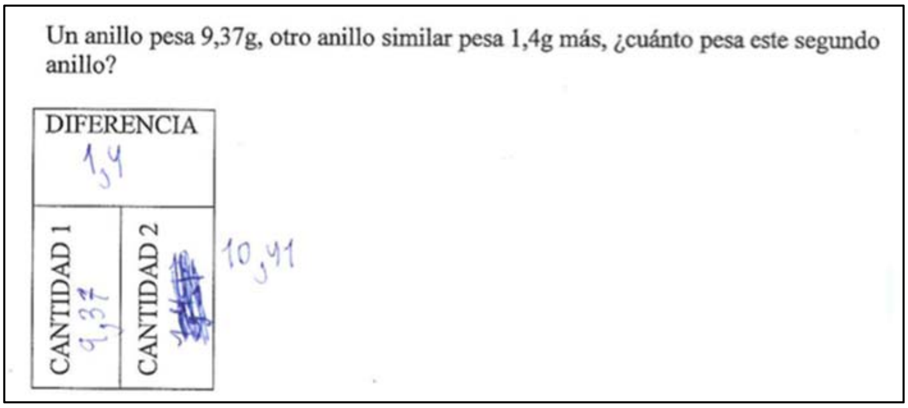


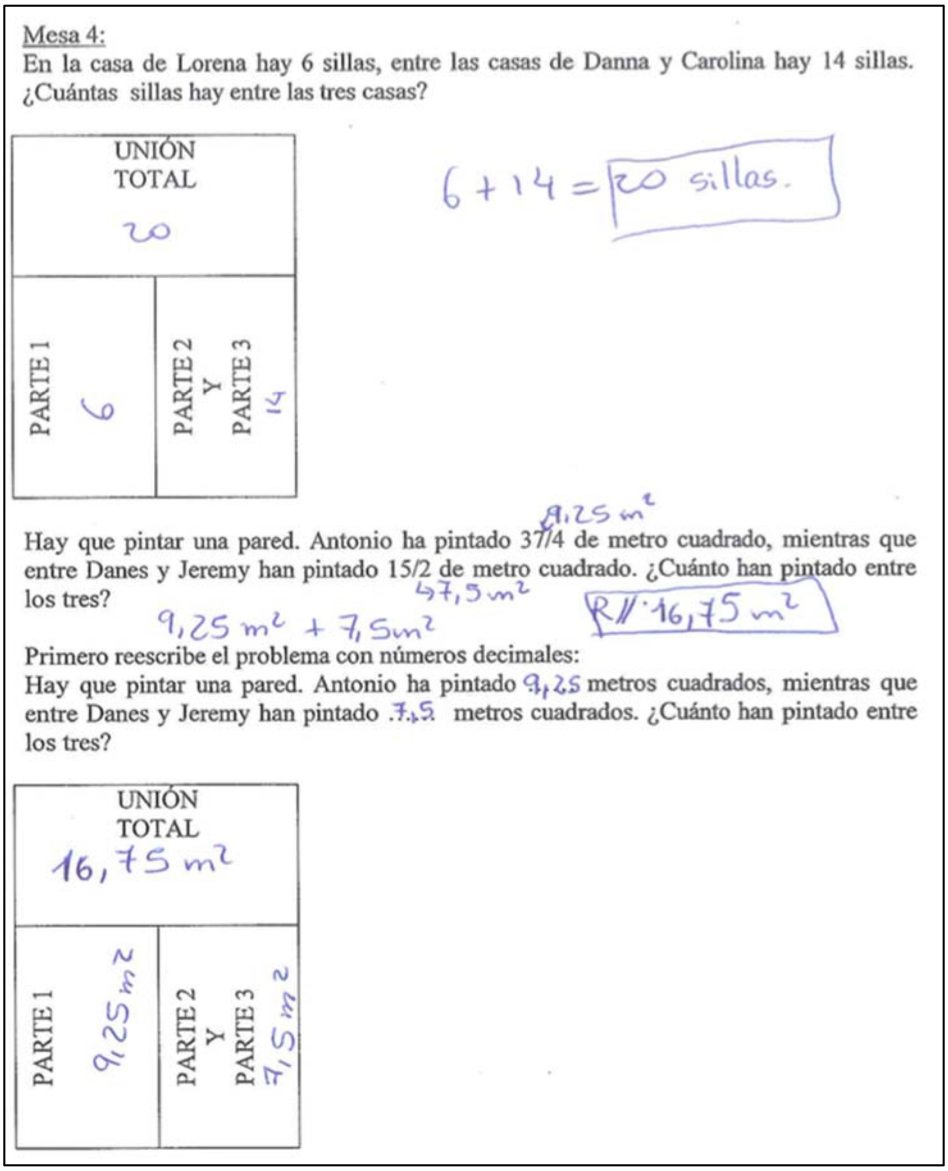
Figura 5.33. Escaneo de la hoja de respuestas del alumno 25. Resolución del problema Tipo 3.1 para decimales con cajitas Liro.

Al indicar la diferencia algunos alumnos distinguían entre positiva o negativa (Figura 5.34), esto les solía llevar a resolver el problema de forma correcta.

Figura 5.34. Escaneos de la hoja de respuestas del alumno 13. Resolución del problema Tipo 3.1 para naturales y decimales con cajitas Liro.

Comentarios sobre el trabajo en la Mesa 4

En la mesa 4 se propusieron a los alumnos dos problemas de Tipo 2.2 con números naturales y con fracciones. Los alumnos disponían de materiales y, en particular, de cajitas Liro con las que trabajar. En la ficha que debían rellenar, aparecía una representación pictórica de la cajita Liro correspondiente (ver Figura 5.35). En el problema con fracciones se les planteaba la estrategia de resolución de convertir las fracciones en números decimales.


Mesa 4:
En la casa de Lorena hay 6 sillas, entre las casas de Danna y Carolina hay 14 sillas. ¿Cuántas sillas hay entre las tres casas?

UNIÓN TOTAL 20	
PARTE 1 6	PARTE 2 Y PARTE 3 14

6 + 14 = $\boxed{20 \text{ sillas.}}$

Hay que pintar una pared. Antonio ha pintado 37/4 (9,25 m²) de metro cuadrado, mientras que entre Danes y Jeremy han pintado 15/2 (7,5 m²) de metro cuadrado. ¿Cuánto han pintado entre los tres?

9,25 m² + 7,5m²

R// 16,75 m²

Primero reescribe el problema con números decimales:
Hay que pintar una pared. Antonio ha pintado 9,25 metros cuadrados, mientras que entre Danes y Jeremy han pintado 7,5 metros cuadrados. ¿Cuánto han pintado entre los tres?

UNIÓN TOTAL 16,75 m²	
PARTE 1 9,25 m²	PARTE 2 Y PARTE 3 7,5 m²

Figura 5.35. Escaneo de la hoja de respuestas de la alumna 14. Resolución del problema Tipo 2.2 para naturales y fracciones con cajitas Liro.

Trabajando en grupo algún alumno explicó el paso de facción a número decimal. Algunos alumnos que se liaban un poco con las lentejas y los granos de arroz porque no acababan de distinguir décimas y centésimas. En general trabajaron en grupo separando los elementos necesarios para resolver cada problema con las cajitas (Figura 5.36).

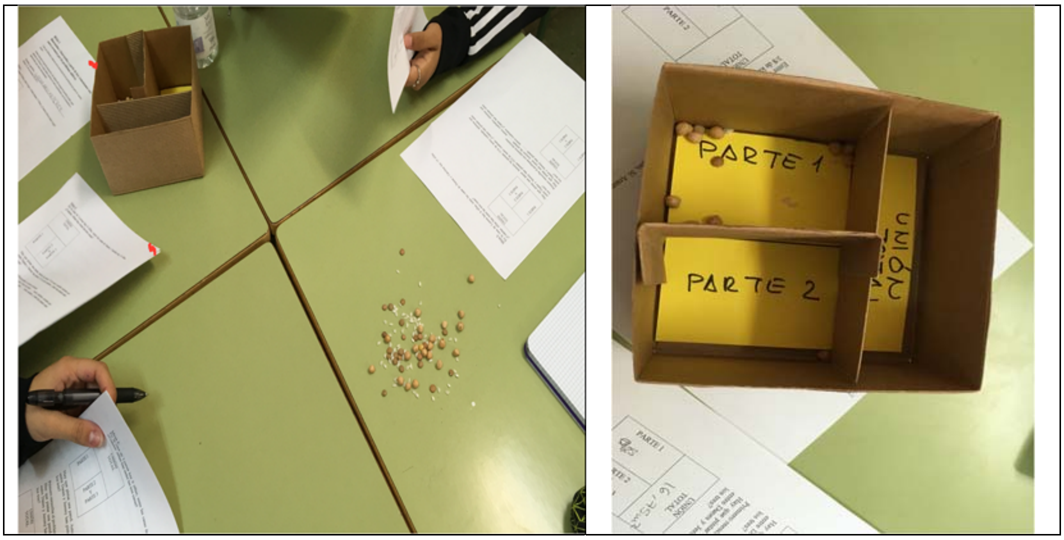


Figura 5.36. Imágenes de trabajo en GI (mesa 4) con material manipulable para decimales y cajitas Liro.

En el aula pudimos observar que algunos alumnos primero resolvían mentalmente y luego usaban el material.

Este alumno necesitó dar casos particulares para trabajar con uniones, en estos problemas tan sencillos no nos hemos encontrado muchos casos, pero en las pruebas previas sí que apareció en numerosas ocasiones esta práctica (Figura 5.37):

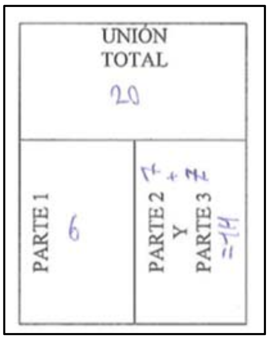


Figura 5.37. Escaneo de la hoja de respuestas del alumno 27. Resolución del problema Tipo 2.2 para naturales con cajitas Liro.

Encontramos un alumno que trabajó con fracciones el ejercicio de naturales (Figura 5.38).

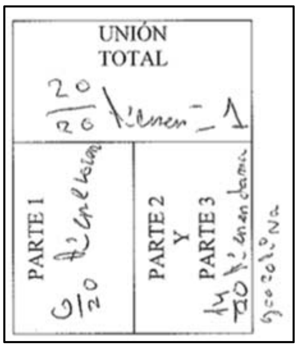
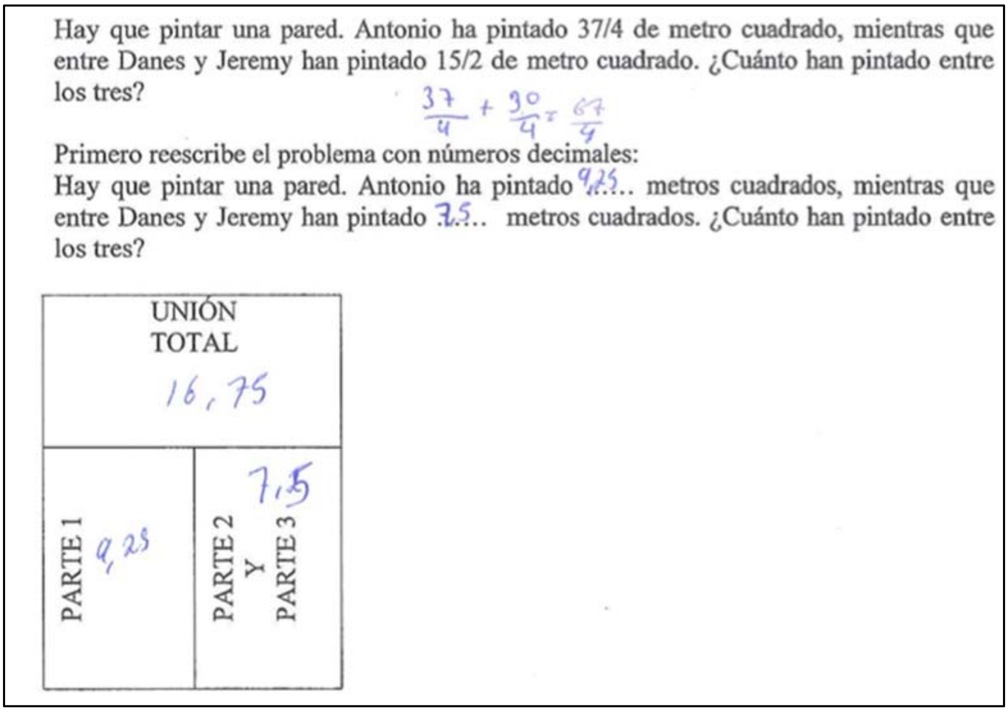


Figura 5.38. Escaneo de la hoja de respuestas del alumno 20. Resolución del problema Tipo 2.2 para naturales con cajitas Liro.

Para algunos alumnos estos problemas no supusieron ninguna dificultad y no necesitaron estrategias de resolución para resolverlos. El siguiente alumno resolvió el problema primero con fracciones y luego con decimales; no vio necesario el paso a decimales (Figura 5.39). Aunque la mayoría de los alumnos se sentían más cómodos trabajando con decimales que con fracciones


Hay que pintar una pared. Antonio ha pintado 37/4 de metro cuadrado, mientras que entre Danes y Jeremy han pintado 15/2 de metro cuadrado. ¿Cuánto han pintado entre los tres?

$\frac{37}{4} + \frac{30}{4} = \frac{67}{4}$

Primero reescribe el problema con números decimales:
Hay que pintar una pared. Antonio ha pintado 9,25... metros cuadrados, mientras que entre Danes y Jeremy han pintado 7,5... metros cuadrados. ¿Cuánto han pintado entre los tres?

Figura 5.39. Escaneo de la hoja de respuestas del alumno 13. Resolución del problema Tipo 2.2 para fracciones con cajitas Liro.

A pesar del trabajo en equipo y de las estrategias ofrecidas, no todos los alumnos completaron los ejercicios (Figura 5.40).

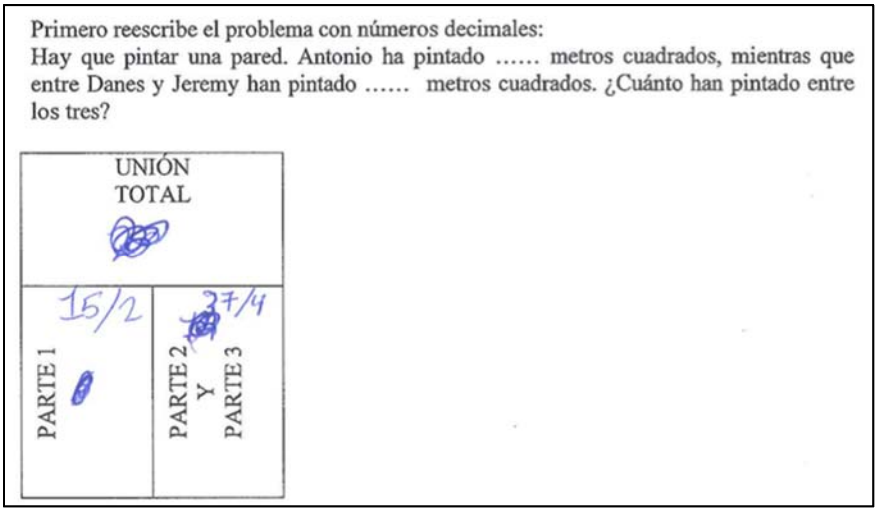

Primero reescribe el problema con números decimales:
Hay que pintar una pared. Antonio ha pintado ...... metros cuadrados, mientras que entre Danes y Jeremy han pintado ...... metros cuadrados. ¿Cuánto han pintado entre los tres?

Figura 5.40. Escaneo de la hoja de respuestas del alumno 24. Resolución del problema Tipo 2.2 para fracciones con cajitas Liro.

Al finalizar la sesión los alumnos entregaron las hojas a la profesora para su escaneo.

Los alumnos usaron la calculadora para obtener la representación decimal de una fracción y para operar con números decimales. Con calculadora o sin ella, varios se confundieron sumando decimales. No todos los alumnos trabajaban bien en grupo, algunos alumnos porque simplemente no trabajaban, y otros porque lo hacían de manera individualizadas (alumno 20). En general los alumnos no pusieron unidades en las soluciones.

Algunas estrategias eran demasiado fáciles para algunos alumnos, eran manipulativas y ellos estaban en un estadio más abstracto. Las estrategias que facilitan la resolución a alumnos con dificultades, aquellos que no las tienen las van a rechazar. La obligación del profesor será ofrecer estrategias que ellos, en algún momento, puedan utilizar (Ramos, Castro & Castro—Rodríguez, 2016). No todas les van a servir a todos; pero con que sirvan para alguno ya sería un progreso.

5.3.2.2. Segunda sesión

La segunda sesión tuvo lugar el día 22 de noviembre de 2017. Ese día faltaron a clase seis alumnos, los números: 6, 7, 15, 16, 28 y 30. En primer lugar se puso en común el trabajo en grupos interactivos de la sesión anterior. Después los alumnos trabajaron en pequeños grupos problemas similares, pero sin ayuda de materiales.

Puesta en común del trabajo de la sesión anterior

Se comenzó entregando su hoja de respuestas a cada alumno y realizamos los ejercicios en la pizarra en gran grupo. Cada uno aportó sus sensaciones y soluciones del día anterior.

Algunos alumnos no veían demasiado sentido a las cajitas Liro, puesto que los problemas planteados les parecían muy sencillos y no necesitaban ayuda extra. Sin embargo, a la mayoría les gustaron mucho y les pareció mucho más fácil realizar así los problemas.

Un buen número de alumnos participó en la puesta en común aportando su resolución de los problemas y corrigiendo los errores cometidos en la sesión anterior. Destacamos una alumna que corrigió sus problemas con rojo, lo que nos permitió distinguir claramente sus correcciones (Figura 5.41):

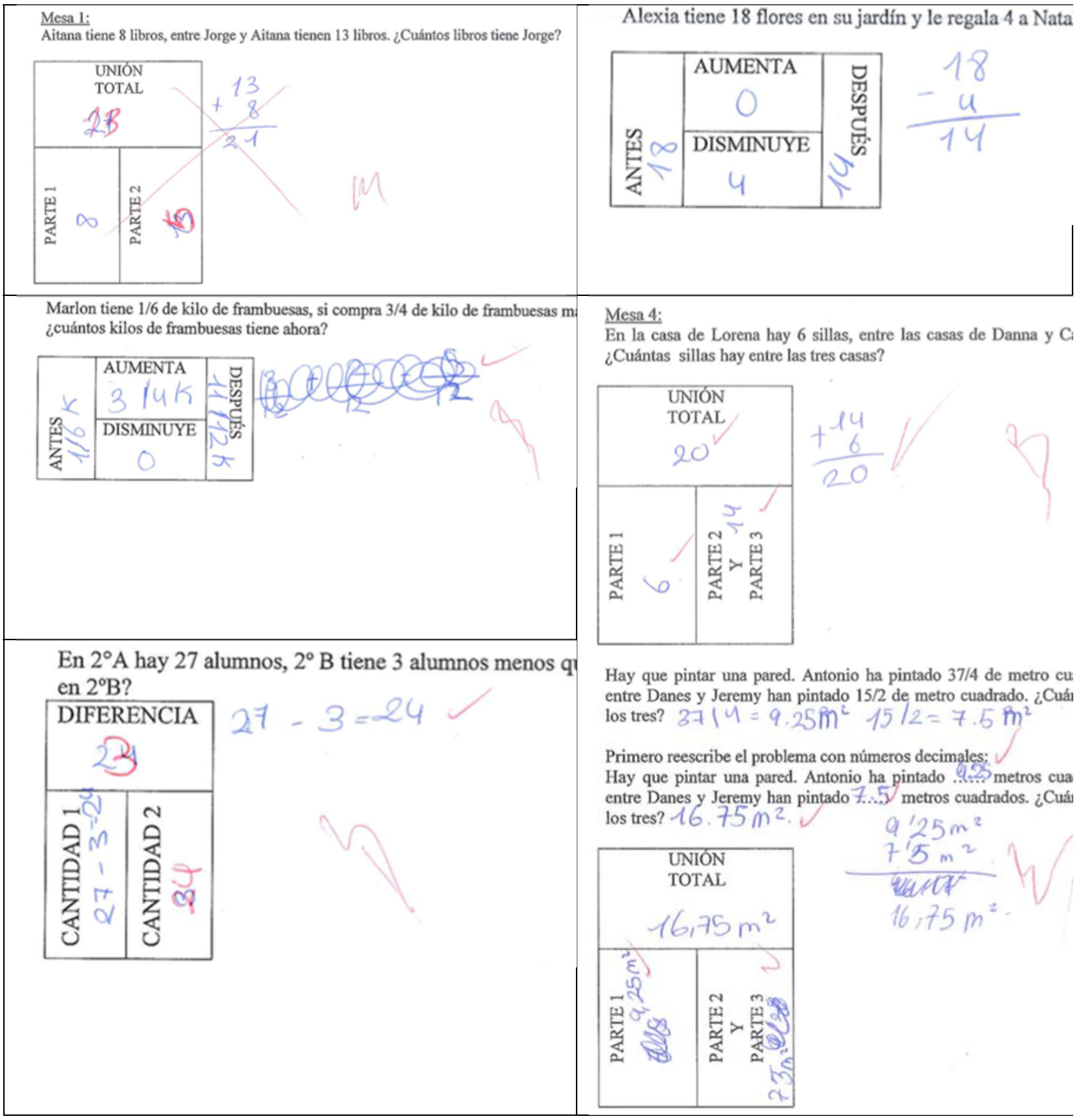


Figura 5.41. Escaneos de la hoja 1 de respuestas de la alumna 23 con correcciones.

Trabajo en pequeños grupos

Tras la puesta en común anterior, se propusieron nuevos problemas que se trabajaron en pequeños grupos de dos o tres alumnos y que después se resolvieron en la pizarra. Los problemas que el día anterior se hicieron con naturales y decimales, se planteaban con fracciones y los que se hicieron con naturales y fracciones, se planteaban con decimales. Algunos alumnos acabaron en unos cinco minutos, el resto siguió trabajando.

En general se puede decir que ninguno de los problemas supuso una dificultad excesiva. En las Figuras 5.42 y 5.43 se muestran dos respuestas correctas a dos de los problemas planteados.

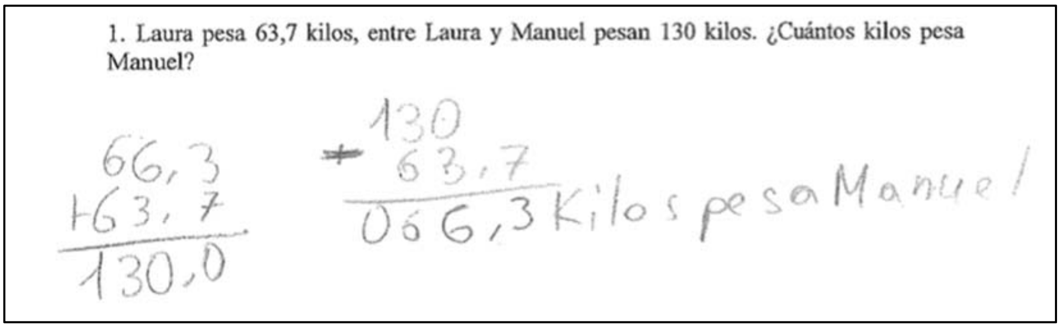


Figura 5.42. Escaneo de la hoja 2 de respuestas de la alumna 18. Resolución del problema Tipo 2.1 para decimales.

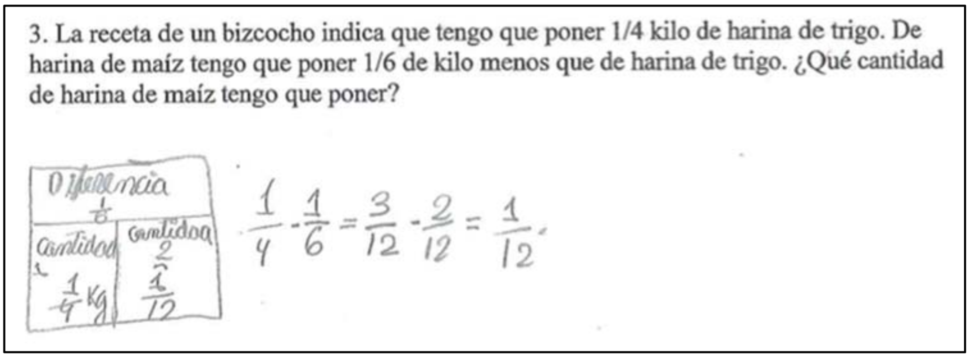


Figura 5.43. Escaneo de la hoja 2 de respuestas del alumno 10. Resolución del problema Tipo 3.1 para fracciones. La cajita Liro no se aportaba y es el alumno el que la dibuja.

Entre los alumnos con dificultades destacan los alumnos 21, 24 y 29; que dejaron la hoja en blanco. Esta última alumna faltó el día anterior, el alumno 24 trabajó poco y guiado siempre por los voluntarios y el alumno 21 dio muestras de no enterarse mucho de los ejercicios.

Aunque no se proporcionaba material para resolver los problemas, es interesante observar que varios alumnos representaron las cajitas Liro para la resolución de los problemas. Un ejemplo de este fenómeno, que muestra que el uso de este tipo de diagramas ayuda a algunos alumnos, puede verse en la Figura 5.44.

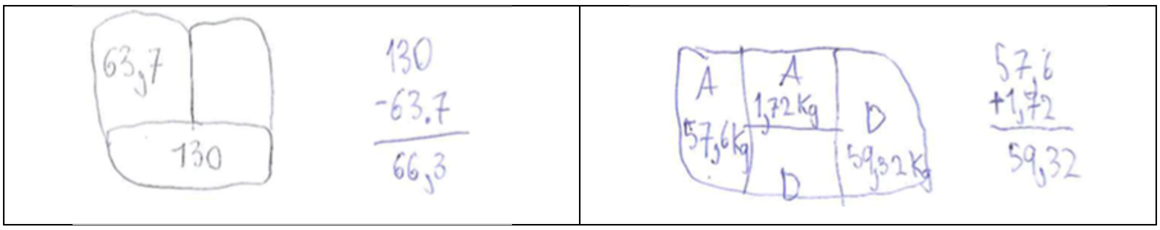


Figura 5.44 Escaneos de la hoja 2 de respuestas del alumno 25.

En otros casos, los alumnos no reprodujeron exactamente los diagramas utilizados en la sesión anterior, pero sí que hicieron uso de algún tipo de representación. Tal es el caso de la alumna cuyas respuestas se presentan en la Figura 5.45.

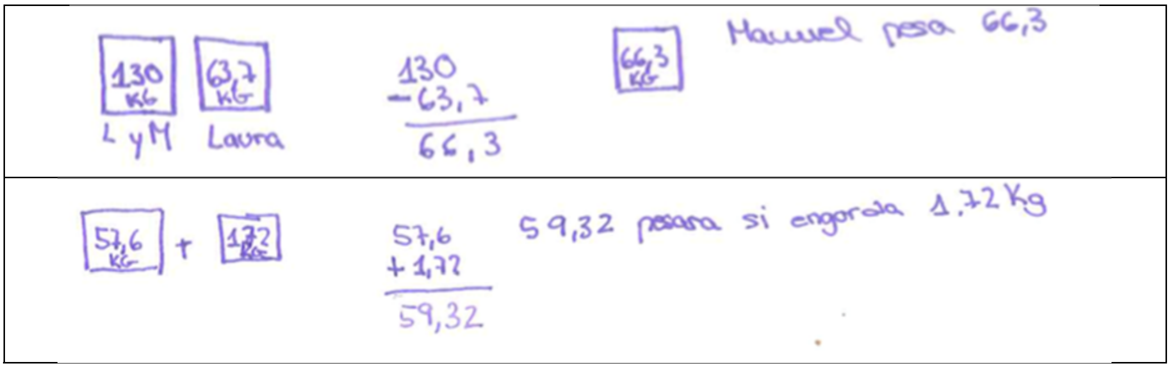


Figura 5.45. Escaneos de la hoja 2 de respuestas de la alumna 17.

Otro fenómeno reseñable, aunque no le asignaremos demasiada importancia consiste en que muchos alumnos no hicieron mención a la unidad de medida ni a la hora de plasmar los datos, ni de realizar las operaciones, ni de resolver el problema (ver Figura 5.46).

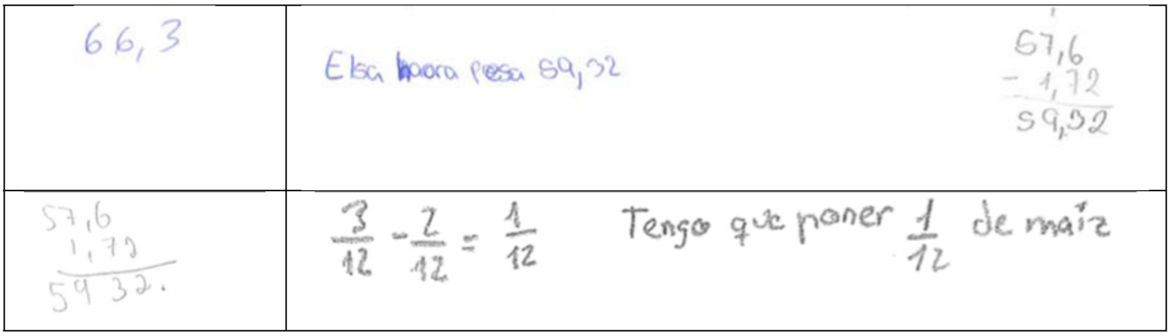


Figura 5.46. Escaneos de la hoja 2 de respuestas de varios alumnos.

La sesión concluyó con una nueva puesta en común de las soluciones a los problemas realizados durante la clase. Muchos alumnos realizaron el ejercicio y luego aprovecharon la corrección en la pizarra para corregirlo (Figura 5.47). Además, de este modo, tanto los alumnos que dejaron la hoja en blanco, como los que entregaron ejercicios incorrectos, antes de entregar las hojas a la profesora, vieron los ejercicios resueltos en la pizarra.

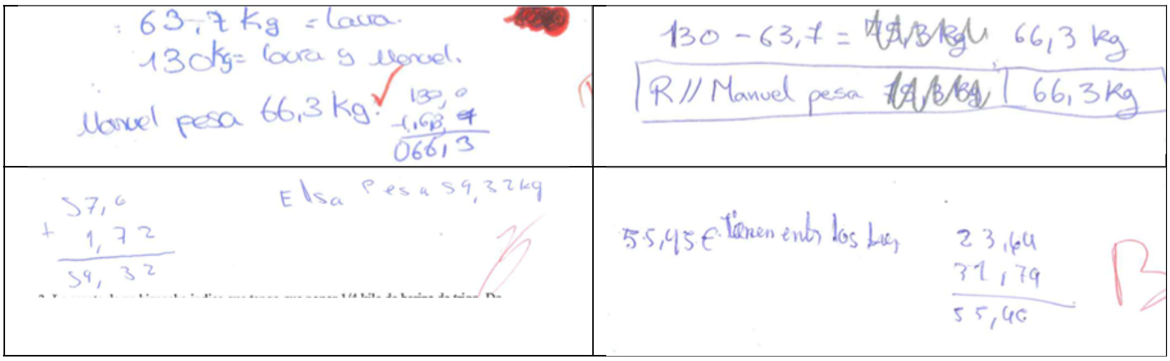


Figura 5.47. Escaneos de la hoja 2 de respuestas de varios alumnos con ejercicios corregidos por ellos mismos.

5.3.2.3. Tercera sesión

La tercera sesión tuvo lugar el día 23 de noviembre de 2017. Asistieron a clase 25 alumnos, faltaron los alumnos 6, 7, 15, 16 y 29. Como ya se ha señalado anteriormente, en esta sesión trabajamos en grupos interactivos problemas de Tipo 5.1, 6.1, 7.1 y 8.1 con la ayuda de materiales manipulables: lápices de colores y billetes y monedas de euros (Figura 5.48).

Figura 5.48. Imagen de alumnos trabajando en GI.

Aspectos organizativos

Este día contamos con cinco voluntarios por lo que dividimos a los alumnos en cinco grupos. Al ser los grupos menos numerosos los alumnos pudieron interactuar más entre ellos y con el voluntario. Los voluntarios fueron un profesor, dos profesoras y una estudiante de doctorado todos de la Universidad Complutense de Madrid y una exalumna del instituto. La composición de los grupos quedó como sigue:

- Primer grupo: alumnos 3, 13, 18, 20 y 21.
- Segundo grupo: alumnos 1, 5, 17, 23 y 24.
- Tercer grupo: alumnos 2, 4, 14, 22 y 30.
- Cuarto grupo: alumnos 8, 9, 12, 19 y 25.
- Quinto grupo: alumnos 10, 11, 26, 27 y 28.

Se plantearon cuatro actividades. Como hay cinco grupos y solo cuatro actividades en una mesa se iba cambiando de actividad en cada turno.

Comentarios generales sobre el funcionamiento de los grupos

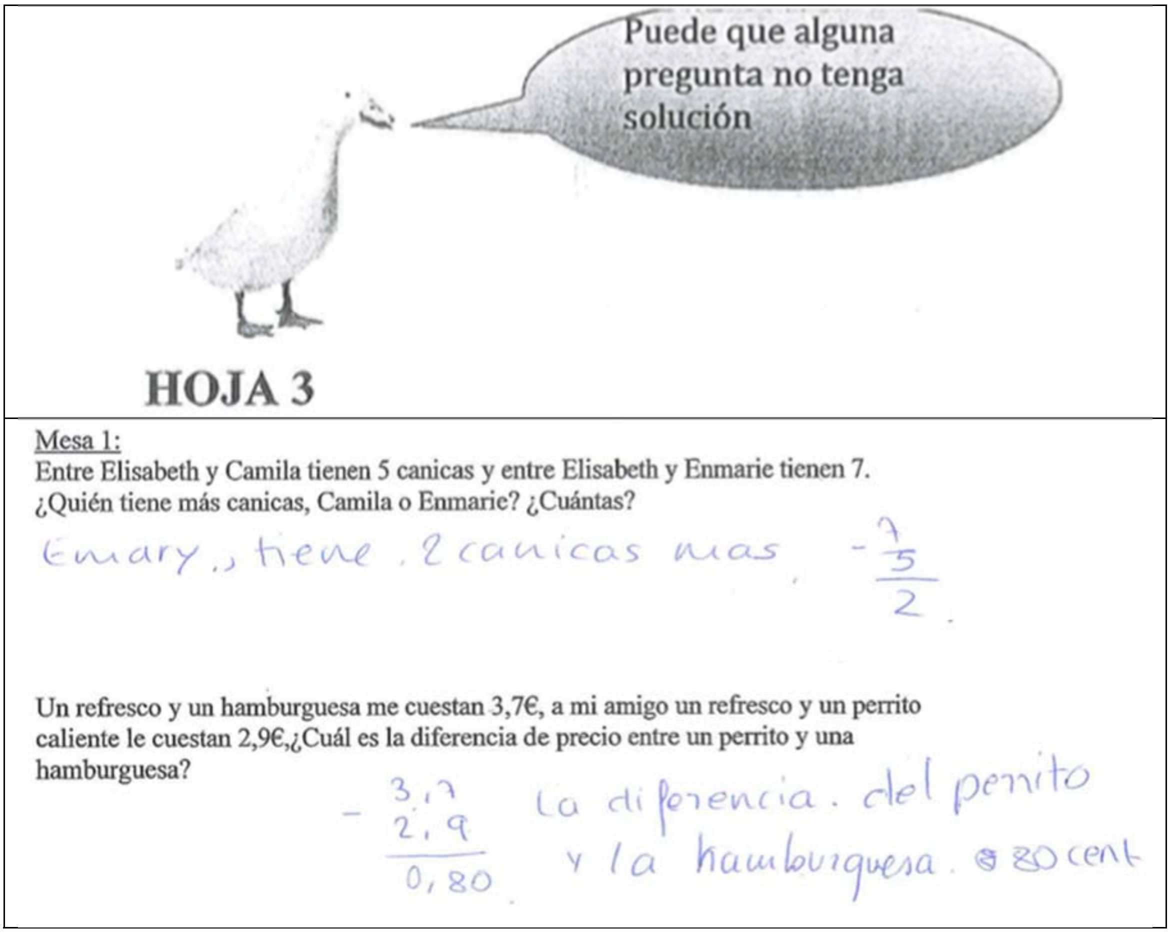
La exalumna del instituto había participado en su tiempo como estudiante en grupos interactivos en el instituto por ello ya sabía cómo funcionan. Esta exalumna cuando llegaba un grupo nuevo les preguntaba a cada alumno su nombre, se presentaba y les motivaba mucho.

Los problemas supusieron bastante más dificultad que los del día anterior.

No todos los alumnos trabajaron de igual manera. Los alumnos 1, 17 y 24 prácticamente no trabajaron nada. El alumno 11 tuvo que salir por indisposición, le acompañó la alumna 28.

Comentarios sobre el trabajo en la Mesa 1

En la mesa 1 se propusieron a los alumnos dos problemas de Tipo 5.1 con números naturales y decimales. Los alumnos disponían de materiales manipulativos: lápices de colores y billetes y monedas de euros. En la ficha que debían rellenar se informaba de que podría haber preguntas sin solución (ver figura 5.49).


Puede que alguna pregunta no tenga solución

HOJA 3

Mesa 1:
Entre Elisabeth y Camila tienen 5 canicas y entre Elisabeth y Enmarie tienen 7.
¿Quién tiene más canicas, Camila o Enmarie? ¿Cuántas?

Emary, tiene 2 canicas mas

$$\begin{array}{r} -7 \\ 5 \\ \hline 2 \end{array}$$

Un refresco y un hamburguesa me cuestan 3,7€, a mi amigo un refresco y un perrito caliente le cuestan 2,9€,¿Cuál es la diferencia de precio entre un perrito y una hamburguesa?

$$\begin{array}{r} -3,7 \\ 2,9 \\ \hline 0,80 \end{array}$$

La diferencia del perrito y la hamburguesa 80 cent

Figura 5.49. Escaneo de la hoja 3 de respuestas de la alumna 4. Resolución del problema Tipo 5.1 para naturales y decimales.

En todos los grupos resolvieron la primera actividad, aunque no en todos respondieron a las dos preguntas. Al haberles avisado de que podía haber algún problema sin solución, algunos alumnos creyeron que este problema no tenía solución (Figura 5.50):

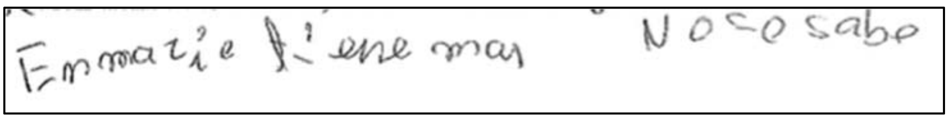
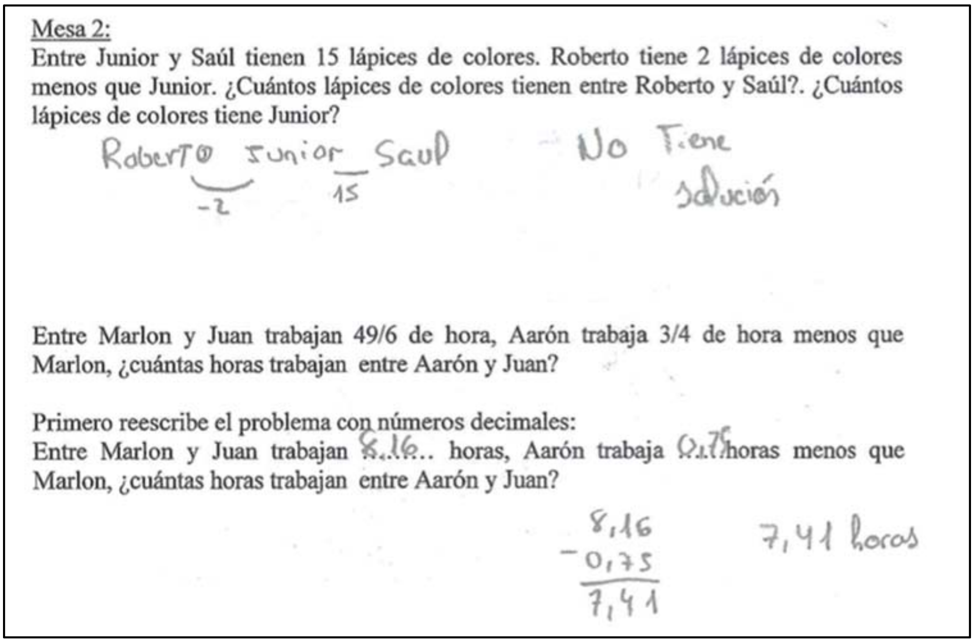

Enmarie tiene mas   No lo sabo

Figura 5.50. Escaneo de la hoja 3 de respuestas del alumno 20. Resolución del problema Tipo 5.1 para naturales.

En la segunda actividad de la mesa, aunque tenían monedas de euro para trabajar con ellas los problemas, no todos los grupos las usaron. A algunos esas monedas les sirvieron de distracción y se dedicaban a contar monedas y billetes. Para algunos grupos, sí que fueron de mucha utilidad en la resolución de los problemas. El grupo uno intentó acordarse de los precios en McDonalds y Burger King para resolver el problema. El alumno 26 entendió que la hamburguesa costaba más "a no ser que el refresco sea extragrande". La mayoría lo resolvió correctamente. La alumna 18 entendió los problemas de esta mesa y se los explicó a sus compañeros.

Comentarios sobre el trabajo en la Mesa 2

En la mesa 2 se propusieron a los alumnos dos problemas de Tipo 6.1 con números naturales y fracciones. Los alumnos disponían de materiales manipulables: lápices de colores y billetes y monedas de euros. En el problema con fracciones se les propuso la estrategia de paso de fracción a decimal. En la hoja de respuestas tenían huecos para que reescriban el enunciado usando decimales en vez de fracciones (Figura 5.51).


Mesa 2:
Entre Junior y Saúl tienen 15 lápices de colores. Roberto tiene 2 lápices de colores menos que Junior. ¿Cuántos lápices de colores tienen entre Roberto y Saúl?. ¿Cuántos lápices de colores tiene Junior?

Roberto Junior Saul
-2 15

No Tiene solución

Entre Marlon y Juan trabajan 49/6 de hora, Aarón trabaja 3/4 de hora menos que Marlon, ¿cuántas horas trabajan entre Aarón y Juan?

Primero reescribe el problema con números decimales:
Entre Marlon y Juan trabajan 8,16 horas, Aarón trabaja 0,75 horas menos que Marlon, ¿cuántas horas trabajan entre Aarón y Juan?

8,16
−0,75
7,41

7,41 horas

Figura 5.51. Escaneo de la hoja 3 de respuestas del alumno 19. Resolución del problema Tipo 6.1 para naturales y fracciones.

En el primer problema, la primera idea para muchos alumnos era que si entre Junior y Saúl tenían 15 lápices tuvieran 7,5 lápices cada uno. La voluntaria preguntaba si había más opciones: "sí, que yo tenga 15 y tú cero, yo 6 y tú 9, ... " En la Figura 5.52 se ve como los alumnos hacían montones con distintas posibilidades. Los alumnos comentaban: "No puede ser, no puede haber medios lápices". La mayoría intentaba averiguar cuántos lápices tenía cada uno. La voluntaria les puso muchos ejemplos paralelos y en general, consiguieron entender el problema.

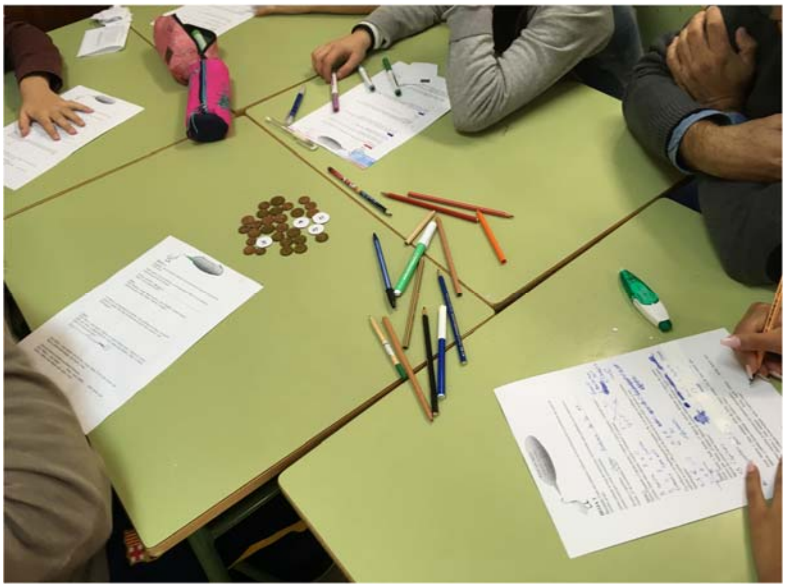
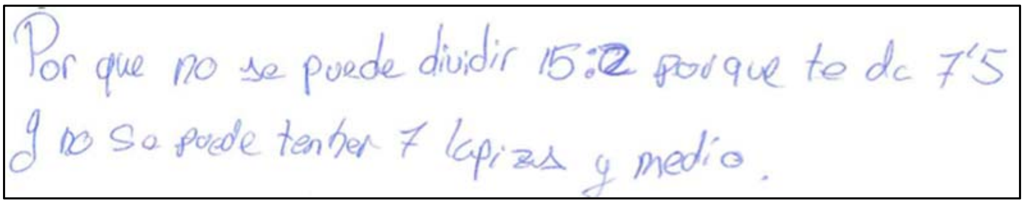


Figura 5.52. Imagen de alumnos trabajando en GI en la mesa 2.

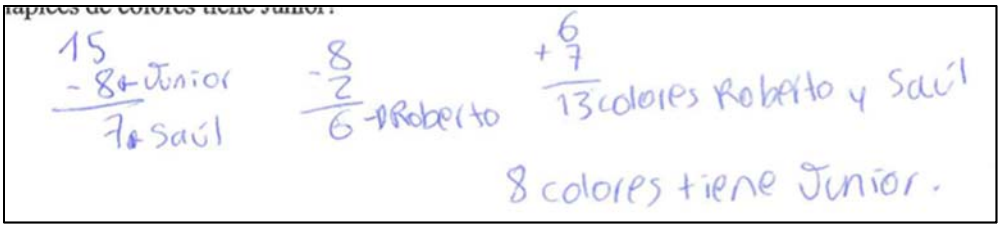
A pesar de los esfuerzos de la voluntaria, no todos los alumnos llegaron a entender el problema. En el quinto grupo todos sus integrantes concluyeron que “el problema es ilógico” porque “no se pueden tener 7 lápices y medio” (Figura 5.53)



Por que no se puede dividir 15:2 porque te da 7'5
y no se puede tener 7 lapizes y medio.

Figura 5.53. Escaneo de la hoja 3 de respuestas del alumno 26. Resolución del problema Tipo 6.1 para naturales.

En el primer grupo sí que llegaron a la solución correcta del problema, pero dando un caso particular que no consideraron como tal e inventaron que Junior tenía ocho lápices (Figura 5.54).



lápices de colores tiene Junior?

15
\- 8 → Junior
7 → Saúl

8
\- 2
6 → Roberto

6
\+ 7
13 colores Roberto y Saúl

8 colores tiene Junior.

Figura 5.54. Escaneo de la hoja 3 de respuestas de la alumna 3. Resolución del problema Tipo 6.1 para naturales.

También hubo alumnos y grupos que resolvieron correctamente el problema.

En el ejercicio con fracciones, en general, no presentaron problemas para pasar de fracción a decimal; pero volvieron a intentar saber las horas que trabajaba cada uno (Figura 5.55), interpretando que Marlon y Juan trabajaban las mismas horas:

Primero reescribe el problema con números decimales:
Entre Marlon y Juan trabajan 8,16… horas, Aarón trabaja 0,75 horas menos que Marlon, ¿cuántas horas trabajan entre Aarón y Juan?

8,16:2=4,8
4,8 -0,75=4,05
4,05+4,8=8,85

8,85 Pasada a horas 9,25

Figura 5.55. Escaneo de la hoja 3 de respuestas del alumno 11. Resolución del problema Tipo 6.1 para fracciones.

Entre los alumnos que lo resolvieron correctamente, algunos alumnos del grupo uno no usaron la estrategia propuesta de paso a decimales y prefirieron trabajar con fracciones (Figura 5.56).

Primero reescribe el problema con números decimales:
Entre Marlon y Juan trabajan 8..16. horas, Aarón trabaja 0,75 horas menos que Marlon, ¿cuántas horas trabajan entre Aarón y Juan?

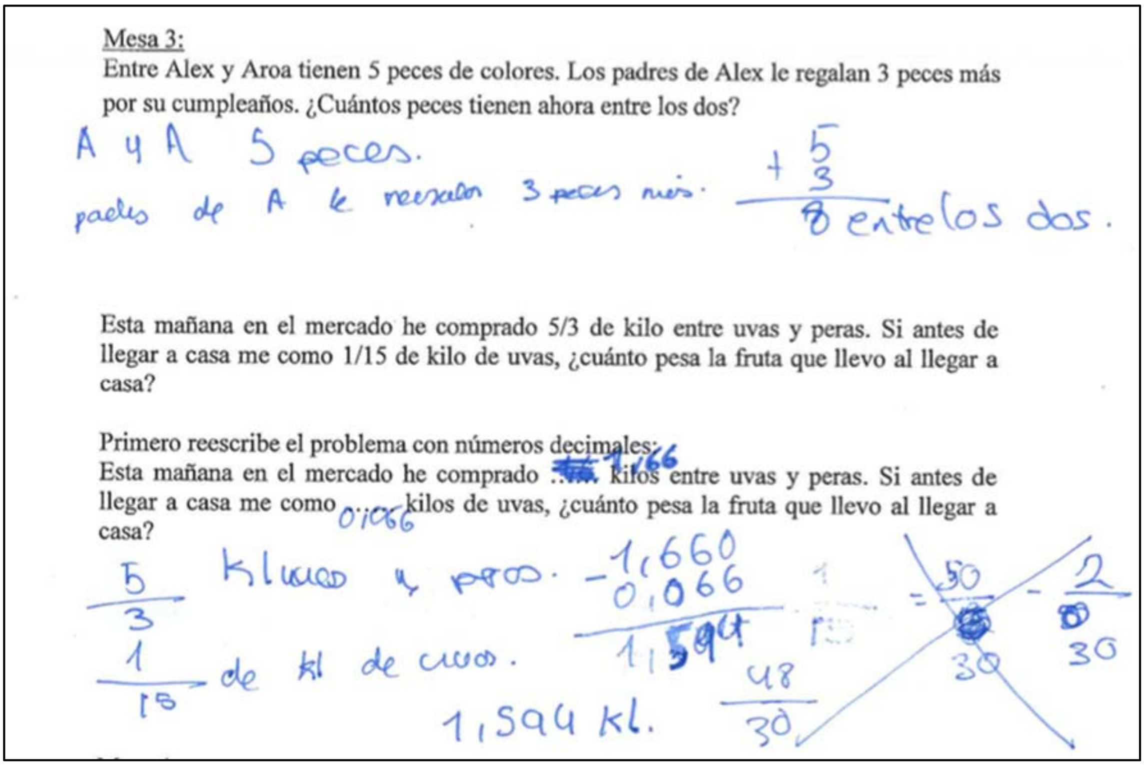
49:6=8,16
3:4=0,75

$$\frac{49}{6}-\frac{3}{4}=\frac{98}{12}-\frac{9}{12}=\frac{89}{12}$$

Figura 5.56. Escaneo de la hoja 3 de respuestas de la alumna 3. Resolución del problema Tipo 6.1 para fracciones.

Comentarios sobre el trabajo en la Mesa 3

En la mesa 3 se propusieron a los alumnos dos problemas de Tipo 7.1 con números naturales y fracciones. Los alumnos disponían de materiales manipulables: lápices de colores y billetes y monedas de euros. En el problema con fracciones se les propuso la estrategia de paso de fracción a decimal. En la hoja de respuestas tenían huecos para reescribir el enunciado usando decimales en vez de fracciones (Figura 5.57).


Mesa 3:
Entre Alex y Aroa tienen 5 peces de colores. Los padres de Alex le regalan 3 peces más por su cumpleaños. ¿Cuántos peces tienen ahora entre los dos?

A y A 5 peces.
padres de A le regalan 3 peces más. $+\begin{array}{r}5\\3\\\hline 8\end{array}$ entre los dos.

Esta mañana en el mercado he comprado 5/3 de kilo entre uvas y peras. Si antes de llegar a casa me como 1/15 de kilo de uvas, ¿cuánto pesa la fruta que llevo al llegar a casa?

Primero reescribe el problema con números decimales:
Esta mañana en el mercado he comprado 1,66 kilos entre uvas y peras. Si antes de llegar a casa me como 0,066 kilos de uvas, ¿cuánto pesa la fruta que llevo al llegar a casa?

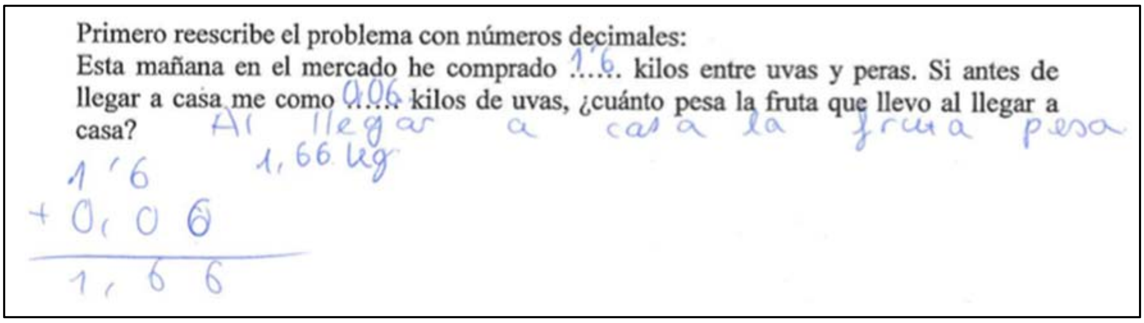
$\frac{5}{3}$ kilos y peras. $-\begin{array}{r}1,660\\0,066\\\hline 1,594\end{array}$

$\frac{1}{15}$ de kl de uvas.

1,594 kl. $\frac{48}{30}$ $=\frac{50}{30}-\frac{2}{30}$

Figura 5.57. Escaneo de la hoja 3 de respuestas de la alumna 23. Resolución del problema Tipo 7.1 para naturales y para fracciones.

El primer problema de la mesa no presentaba ninguna dificultad y todos los alumnos lo resolvieron correctamente. El segundo ejercicio también funcionó muy bien, aunque hubo algún fallo de algoritmo y alguno de operación (Figura 5.58).


Primero reescribe el problema con números decimales:
Esta mañana en el mercado he comprado 1'6 kilos entre uvas y peras. Si antes de llegar a casa me como 0,06 kilos de uvas, ¿cuánto pesa la fruta que llevo al llegar a casa? Al llegar a casa la fruta pesa 1,66 kg

$+\begin{array}{r}1'6\\0,06\\\hline 1,66\end{array}$

Figura 5.58. Escaneo de la hoja 3 de respuestas de la alumna 8. Resolución del problema Tipo 7.1 para fracciones.

Como ocurría en la mesa anterior, hubo alumnos necesitaban conocer la cantidad de cada fruta por separado (Figura 5.59).

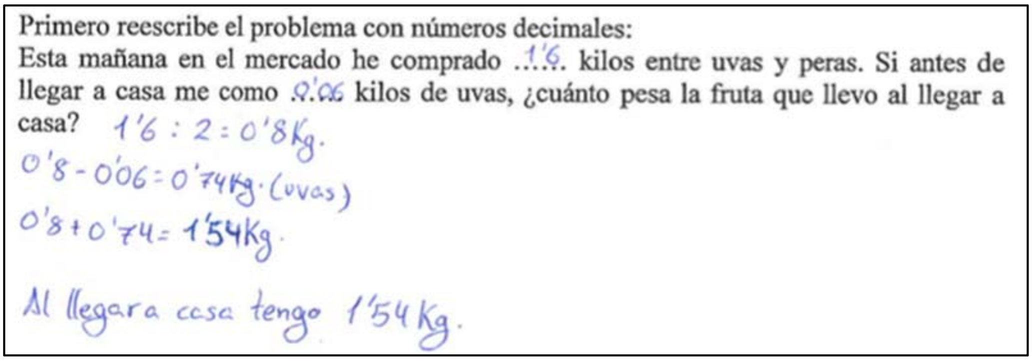
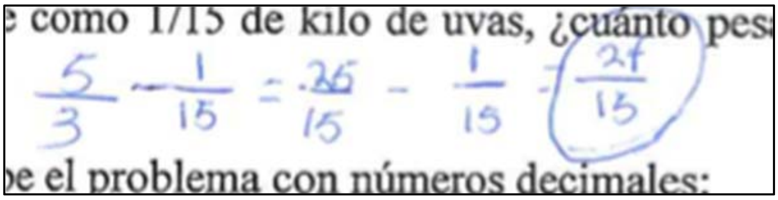

Primero reescribe el problema con números decimales:
Esta mañana en el mercado he comprado ..1'6.. kilos entre uvas y peras. Si antes de llegar a casa me como 0'06 kilos de uvas, ¿cuánto pesa la fruta que llevo al llegar a casa? 1'6 : 2 = 0'8Kg.
0'8 - 0'06 = 0'74Kg. (uvas)
0'8 + 0'74 = 1'54Kg.
Al llegara casa tengo 1'54 Kg.

Figura 5.59. Escaneo de la hoja 3 de respuestas de la alumna 28. Resolución del problema Tipo 7.1 para fracciones.

Hubo alumnas que en vez de seguir la estrategia ofrecida optaron por trabajar con fracciones (Figura 5.60). Como ya había ocurrido antes algunos alumnos no precisaban de estrategias de resolución, a veces incluso aportaron las suyas propias.


e como 1/15 de kilo de uvas, ¿cuánto pes

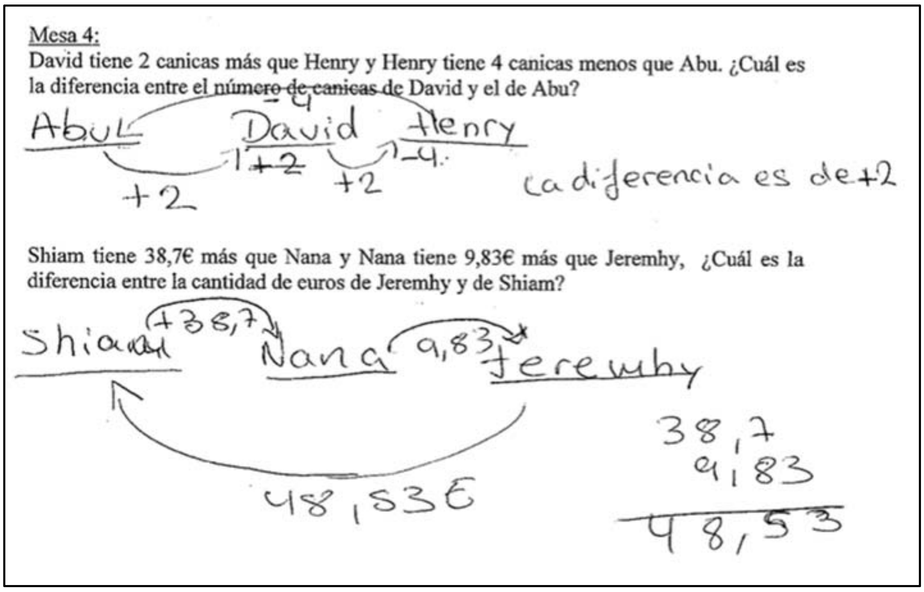
$\frac{5}{3} - \frac{1}{15} = \frac{25}{15} - \frac{1}{15} = \frac{24}{15}$

be el problema con números decimales:

Figura 5.60. Escaneo de la hoja 3 de respuestas de la alumna 5. Resolución del problema tipo 7.1 para fracciones.

Comentarios sobre el trabajo en la Mesa 4

En la mesa 4 se propuso a los alumnos dos problemas de tipo 8.1 con números naturales y con decimales. Los alumnos disponían de materiales manipulables: lápices de colores y billetes y monedas de euros. La voluntaria les sugirió que reflejaran mediante flechas las diferencias entre los sujetos y así lo hicieron en todos los grupos (Figura 5.61).


Mesa 4:
David tiene 2 canicas más que Henry y Henry tiene 4 canicas menos que Abu. ¿Cuál es la diferencia entre el ~~número de canicas de~~ David y el de Abu?

Shiam tiene 38,7€ más que Nana y Nana tiene 9,83€ más que Jeremhy, ¿Cuál es la diferencia entre la cantidad de euros de Jeremhy y de Shiam?

Figura 5.61. Escaneo de la hoja 3 de respuestas de la alumna 22. Resolución del problema Tipo 8.1 para naturales y para decimales.

En la Figura 5.62 podemos ver como los alumnos representan dos montones, uno con cada una de las cantidades del problema con decimales para después sumarlas.

Figura 5.62. Imagen de alumnos trabajando en GI en la mesa 4.

Todos los grupos llegaron a preparar los dos montones de 38,7 y 9,83 euros, sin embargo, una vez los tuvieron, algunos grupos necesitaron mucha ayuda para llegar a la solución y hubo alumnos que no llegaron a ella.

En general, las actividades de este tercer día funcionaron bien. Los voluntarios les tuvieron que insistir para que transcribieran a las hojas los resultados. Cuando los sujetos del problema estaban en el grupo lo entendían antes. En otro caso tenían que ponerse el lugar del otro para entenderlo.

5.3.2.4. Cuarta sesión

La cuarta sesión tuvo lugar el día 24 de noviembre de 2017. Asistieron a clase 19 alumnos. Faltaron los alumnos 6, 7, 8, 15, 16, 20, 21, 22, 28, 29 y 30. En primer lugar se puso en común el trabajo en grupos interactivos de la sesión anterior. Después los alumnos trabajaron en pequeños grupos problemas similares, sin ayuda de materiales, pero con calculadoras.

Puesta en común del trabajo de la sesión anterior

Se comenzó entregando su hoja de respuestas a cada alumno y realizamos los ejercicios en la pizarra en gran grupo. Cada uno aportó sus sensaciones y soluciones del día anterior.

Solo la alumna 23 había realizado de forma correcta todos los ejercicios de la hoja 3, a pesar de ello el día 24 cuando se corrigen los ejercicios únicamente 7 alumnos corrigieron sus ejercicios, y no todos los ejercicios.

Trabajo en pequeños grupos

Tras la puesta en común anterior, se propusieron nuevos problemas que se trabajaron en pequeños grupos de dos o tres alumnos y que después se resolvieron en la pizarra. Los problemas que el día anterior se hicieron con naturales y decimales, se plantearon con fracciones y los que se hicieron con naturales y fracciones, se plantearon con decimales.

El alumno 24 deja la prueba en blanco. En los problemas con fracciones pudieron elegir si trabajar con fracciones o con decimales. Dos alumnos eligieron las fracciones (Figuras 5.63). El resto trabajó con decimales.

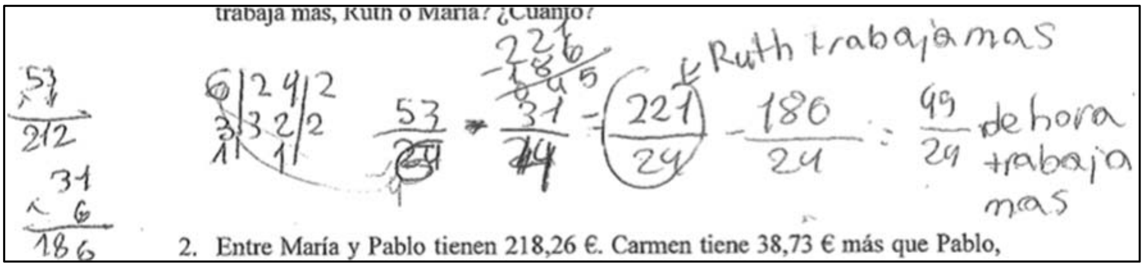


Figura 5.63. Escaneo de la hoja 4 de respuestas de la alumna 18. Resolución del problema Tipo 5.1 para fracciones.

En el problema tres se planteaban dos preguntas, la primera la respondieron correctamente 13 alumnos de 19, la segunda solo la respondieron cuatro alumnos, de ellos, una de forma correcta (Figura 5.64).

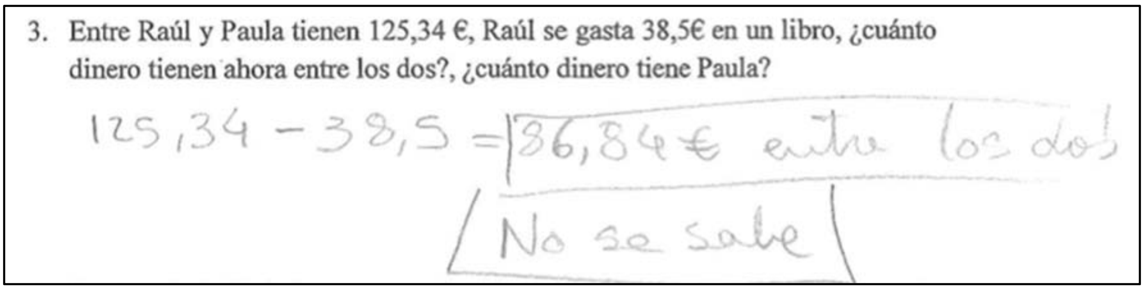
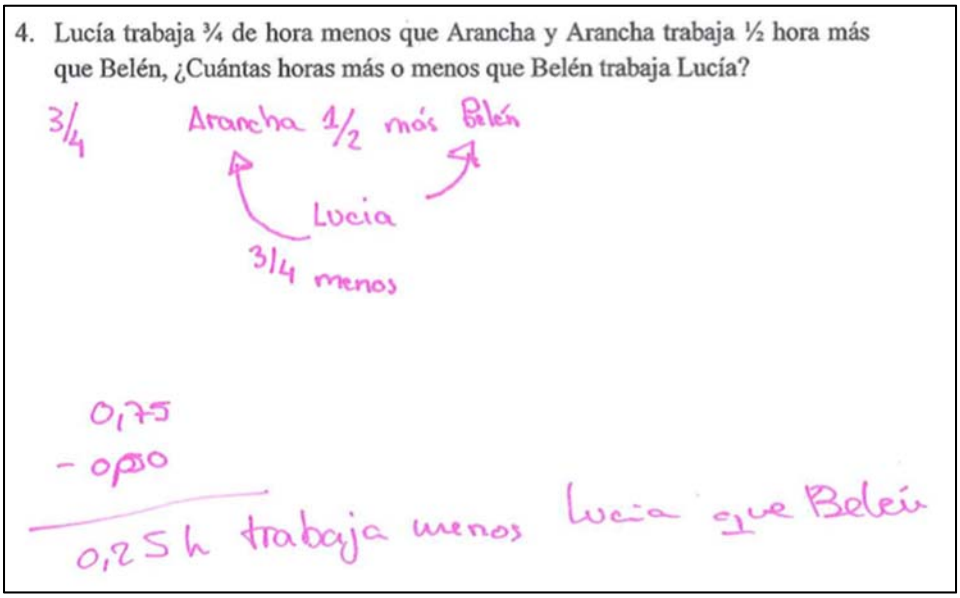


Figura 5.64. Escaneo de la hoja 4 de respuestas de la alumna 14. Resolución del problema Tipo 7.1 para decimales.

El problema cuatro lo respondieron de forma correcta seis alumnos (Figura 5.65), uno mal, cuatro no llegaron a ninguna solución y ocho lo dejaron en blanco (recordemos que antes de entregar los ejercicios, los vieron resueltos correctamente en la pizarra).


4. Lucía trabaja ¾ de hora menos que Arancha y Arancha trabaja ½ hora más que Belén, ¿Cuántas horas más o menos que Belén trabaja Lucía?

3/4

Arancha 1/2 más Belén

Lucia

3/4 menos

0,75

- 0,50

0,25 h trabaja menos Lucia que Belén

Figura 5.65. Escaneo de la hoja 4 de respuestas de la alumna 17. Resolución del problema Tipo 8.1 para fracciones.

La sesión concluyó con una nueva puesta en común de las soluciones a los problemas realizados durante la clase. A pesar de haber visto los ejercicios resueltos en la pizarra, de los 4 problemas por 19 alumnos entregados, 33 estaban correctamente resueltos, quedando 43 problemas en blanco o con fallos.

5.3.2.5. Quinta sesión

La quinta sesión tuvo lugar el día 28 de noviembre de 2017. Ese día no acudieron a clase los alumnos 2, 6, 7, 15, 16, 17 y 29. Como ya se ha señalado con anterioridad, en esta sesión trabajamos en grupos interactivos problemas de Tipo 5.3, 8.2, 8.3 y 9.2 con la ayuda de distintos materiales: Cajitas Liro, material manipulable y torres de Lego.

Aspectos organizativos

Se trabajó en grupos interactivos en el aula planteando cuatro mesas de actividades para cinco grupos, es decir, una mesa iba cambiando de actividad en cada turno. Hubo 4 voluntarios para 5 mesas. Los voluntarios en esta sesión fueron dos profesores de Didáctica de las Matemáticas y una estudiante de doctorado todos de la Universidad Complutense de Madrid y una profesora jubilada del departamento de lengua. Al haber cuatro voluntarios para cinco mesas, un voluntario atendía dos de las mesas.

La composición de los grupos quedó como sigue:

- Primer grupo: alumnos 3, 13, 18 y 26.
- Segundo grupo: alumnos 1, 5, 12, 23 y 24.
- Tercer grupo: alumnos 4, 14, 20, 22 y 27.
- Cuarto grupo: alumnos 8, 9, 19, 21 y 25.
- Quinto grupo: alumnos 10, 11, 28 y 30.

Comentarios generales sobre el funcionamiento de los grupos

La alumna 14 explicó a varias de sus compañeras como reducir a común denominador. Algunos alumnos trabajaban mucho más despacio que el resto (por ejemplo el alumno 9).

En general en esta sesión los problemas supusieron una gran dificultad para la mayoría de nuestros alumnos.

Al terminar la sesión, la alumna 30 afirmó "qué bien, ya entiendo más".

Comentarios sobre el trabajo en la Mesa 1

En la mesa 1 se propuso a los alumnos dos problemas de Tipo 5.3 con números naturales y con fracciones. Los alumnos disponían de materiales y, en particular, de cajitas Liro con las que trabajar. En la ficha que debían rellenar, para el problema con fracciones, se ofrecía la estrategia de resolución de reducir las fracciones a común denominador, para después trabajar solo con los numeradores y por último volver a poner los denominadores (ver Figura 5.66).

Mesa 1:

Entre Hasan y Gloria tienen 59 libros y entre Abigail y Nelson tienen 46. ¿Cuántos libros tienen todos juntos?

105 libros

$$\begin{array}{r} 59 \\ +46 \\ \hline 105 \end{array}$$

Vamos a realizar un pastel, la leche junto a la harina pesan 1/5 de kilo, el azúcar con los huevos pesan 1/6 de kilo, si el pastel no tiene más ingredientes, ¿cuánto pesará?

$\frac{5}{30}$ $\frac{6}{30}$

Primero reescribe el problema reduciendo las fracciones a común denominador:
Vamos a realizar un pastel, la leche junto a la harina pesan ..$\frac{5}{30}$.. de kilo, el azúcar con los huevos pesan ..$\frac{6}{30}$.... de kilo, si el pastel no tiene más ingredientes, ¿cuánto pesará?

Vuelve a reescribir el problema tomando SÓLO los numeradores del problema que acabas de escribir:
Vamos a realizar un pastel, la leche junto a la harina pesan ..5.. kilos, el azúcar con los huevos pesan ..6... de kilos, si el pastel no tiene más ingredientes, ¿cuánto pesará?

Cuando termines de resolver el problema, antes de dar la solución, acuérdate volver a poner los denominadores

$\frac{5}{30} + \frac{6}{30} = \frac{11}{30}$ de kg

Figura 5.66. Escaneo de la hoja 5 de respuestas del alumno 19. Resolución del problema Tipo 5.3 para naturales y fracciones.

Algunos alumnos preferían resolver el problema directamente con fracciones sin utilizar la estrategia de resolución propuesta (Figura 5.67).

Vamos a realizar un pastel, la leche junto a la harina pesan 1/5 de kilo, el azúcar con los huevos pesan 1/6 de kilo, si el pastel no tiene más ingredientes, ¿cuánto pesará?

$\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$

$\frac{6}{30}$ $\frac{5}{30}$

Primero reescribe el problema reduciendo las fracciones a común denominador:
Vamos a realizar un pastel, la leche junto a la harina pesan 6/30. de kilo, el azúcar con los huevos pesan .5/30 de kilo, si el pastel no tiene más ingredientes, ¿cuánto pesará?

Vuelve a reescribir el problema tomando SÓLO los numeradores del problema que acabas de escribir:
Vamos a realizar un pastel, la leche junto a la harina pesan …… kilos, el azúcar con los huevos pesan ……. de kilos, si el pastel no tiene más ingredientes, ¿cuánto pesará?

$$\frac{6}{30} + \frac{5}{30} = \frac{11}{30}$$

Figura 5.67. Escaneo de la hoja 5 de respuestas del alumno 12. Resolución del problema Tipo 5.3 para fracciones.

En esta ocasión los alumnos apenas utilizaron el material facilitado para la resolución del problema.

Comentarios sobre el trabajo en la Mesa 2

En la mesa 2 se propusieron dos problemas de Tipo 9.2 con números naturales y con fracciones. Los alumnos disponían de lápices de colores, en cantidad inferior a la necesaria para resolver el segundo problema. En la ficha que debían rellenar, se vuelve a plantear la estrategia de resolución de trabajar con numeradores tras reducir a común denominador (ver Figura 5.68) convirtiendo así la resolución de un problema con fracciones en un problema con números naturales.

Mesa 2:

Carolina le lleva 5 medallas de ventaja a Melvin. Melvin gana dos medallas. ¿cuántas medallas tiene que ganar Melvin todavía para alcanzar a Carolina?

5+2=7.

7-5.

Melvin = 2.

Caro= Melvin+5.

Aún tiene que ganar 3 medallas.

En un maratón Bentony lleva recorridos 13/4 de kilómetro más que Fernando. Sabemos que si Bentonyrecorre 11/12 de kilómetro más llegará a la meta, ¿cuántos kilómetros debe recorrer todavía Fernando para llegar a la meta?

Primero reescribe el problema reduciendo las fracciones a común denominador:

En un maratón Bentony lleva recorridos 39/12 de kilómetro más que Fernando. Sabemos que si Bentony recorre 11/12 de kilómetro más llegará a la meta, ¿cuántos kilómetros debe recorrer todavía Fernando para llegar a la meta?

Vuelve a reescribir el problema tomando SÓLO los numeradores del problema que acabas de escribir:

En un maratón Bentony lleva recorridos ..39.. kilómetros más que Fernando. Sabemos que si Bentony recorre ..11.. kilómetros más llegará a la meta, ¿cuántos kilómetros debe recorrer todavía Fernando para llegar a la meta?

39+11=50

$\frac{50}{12}$ Km.

Fernando tiene que correr aún $\frac{50}{12}$ Km.

Cuando termines de resolver el problema, antes de dar la solución, acuérdate volver a poner los denominadores

Figura 5.68. Escaneo de la hoja 5 de respuestas de la alumna 28. Resolución del problema Tipo 9.2 para naturales y fracciones.

El voluntario ayudó a algún grupo a resolver el primer problema con los lápices de colores que había sobre la mesa.

La estrategia de trabajo propuesta en el segundo problema les facilitó mucho el ejercicio, ya que en vez de tener que trabajar con fracciones, que siempre implica más dificultad, podían hacerlo con naturales. Pero tanto en este ejercicio como en anterior, no son pocos los alumnos que se olvidaban de poner al final los denominadores (Figuras 5.69). Esto nos hace replantearnos la conveniencia del método.

En un maratón Bentony lleva recorridos 39,12 de kilómetro más que Fernando. Sabemos que si Bentony recorre 11,12. de kilómetro más llegará a la meta, ¿cuántos kilómetros debe recorrer todavía Fernando para llegar a la meta?

Vuelve a reescribir el problema tomando SÓLO los numeradores del problema que acabas de escribir:

En un maratón Bentony lleva recorridos 39... kilómetros más que Fernando. Sabemos que si Bentony recorre 11... kilómetros más llegará a la meta, ¿cuántos kilómetros debe recorrer todavía Fernando para llegar a la meta?

F ——— B ——— Meta
39k. 11k.

50 Kilometros

Cuando termines de resolver el problema, antes de dar la solución, acuérdate volver a poner los denominadores

Figura 5.69. Escaneo de la hoja 5 de respuestas del alumno 9. Resolución del problema Tipo 9.2 para fracciones.

Igual que ocurría en la mesa 1, hay alumnos que prefirieron no utilizar la estrategia propuesta (Figura 5.70).

debe recorrer todavía Fernando para llegar a la meta?

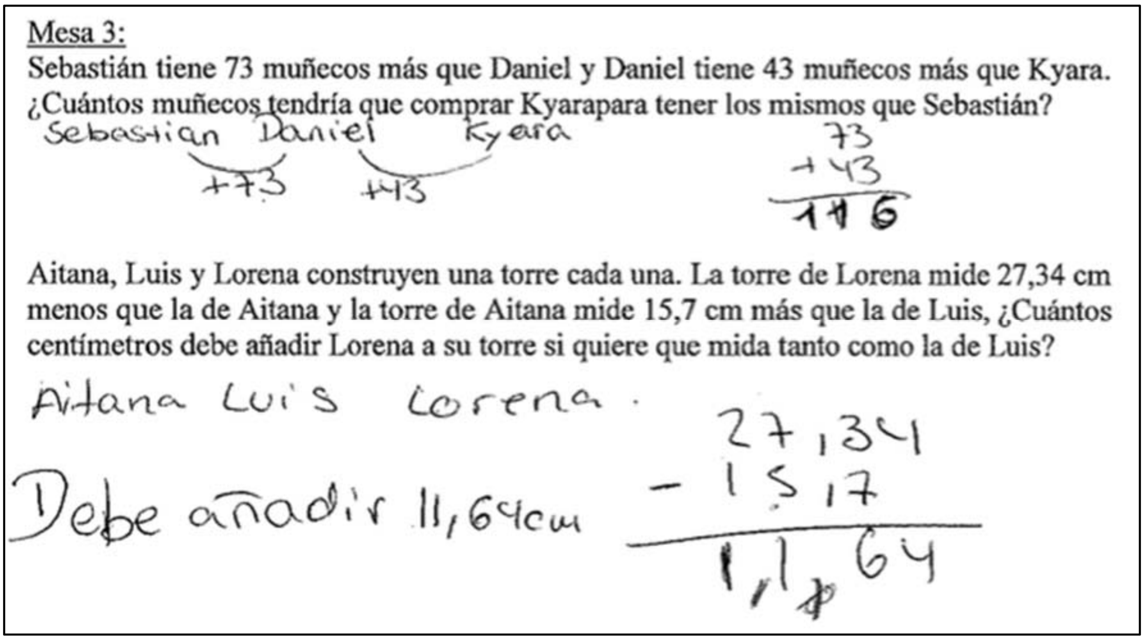
$\frac{43 \cdot 3}{39}$

$\frac{13}{4} + \frac{11}{12} = \frac{39 + 11 = 50}{12} = \frac{}{12}$ Km

Figura 5.70. Escaneo de la hoja 5 de respuestas de la alumna 5. Resolución del problema Tipo 9.2 para fracciones.

Comentarios sobre el trabajo en la Mesa 3

En la mesa 3 se propusieron dos problemas de Tipo 8.2 con números naturales y decimales. Los alumnos disponían de piezas de Lego: dos torres de distintos tamaños con los números escritos 73 y 43 y otros dos con 27,34 cm y 15,7 cm, además había más bloques sueltos. En la ficha que debían rellenar, no aparecía nada relativo a la estrategia de resolución planteada (ver Figura 5.71). La estrategia de resolución era presentada por la voluntaria.


Mesa 3:

Sebastián tiene 73 muñecos más que Daniel y Daniel tiene 43 muñecos más que Kyara. ¿Cuántos muñecos tendría que comprar Kyarapara tener los mismos que Sebastián?

Sebastian Daniel Kyara

+73 +43

73
+43
116

Aitana, Luis y Lorena construyen una torre cada una. La torre de Lorena mide 27,34 cm menos que la de Aitana y la torre de Aitana mide 15,7 cm más que la de Luis, ¿Cuántos centímetros debe añadir Lorena a su torre si quiere que mida tanto como la de Luis?

Aitana Luis Lorena.

27,34
− 15,7
11,64

Debe añadir 11,64cm

Figura 5.71. Escaneo de la hoja 5 de respuestas de la alumna 22. Resolución del problema Tipo 8.2 para naturales y decimales.

Les costaba mucho comparar a Luis con Lorena. No tenían claro cual era mayor de los dos. Este tipo de comparaciones supuso una gran dificultad. El alumno 19 consiguió plantearlo con flechas y la voluntaria de la mesa le animó a explicárselo a los demás. Tras su explicación, todo su equipo consiguió resolver el problema. El alumno 19 afirmó: “tenemos que pensar por los demás”

La voluntaria se sentía bastante insegura con la actividad y no resultaba intuitivo la colocación de las torres. Cuando veían colocadas las torres, la mayoría de los alumnos empezaban a entender la actividad.

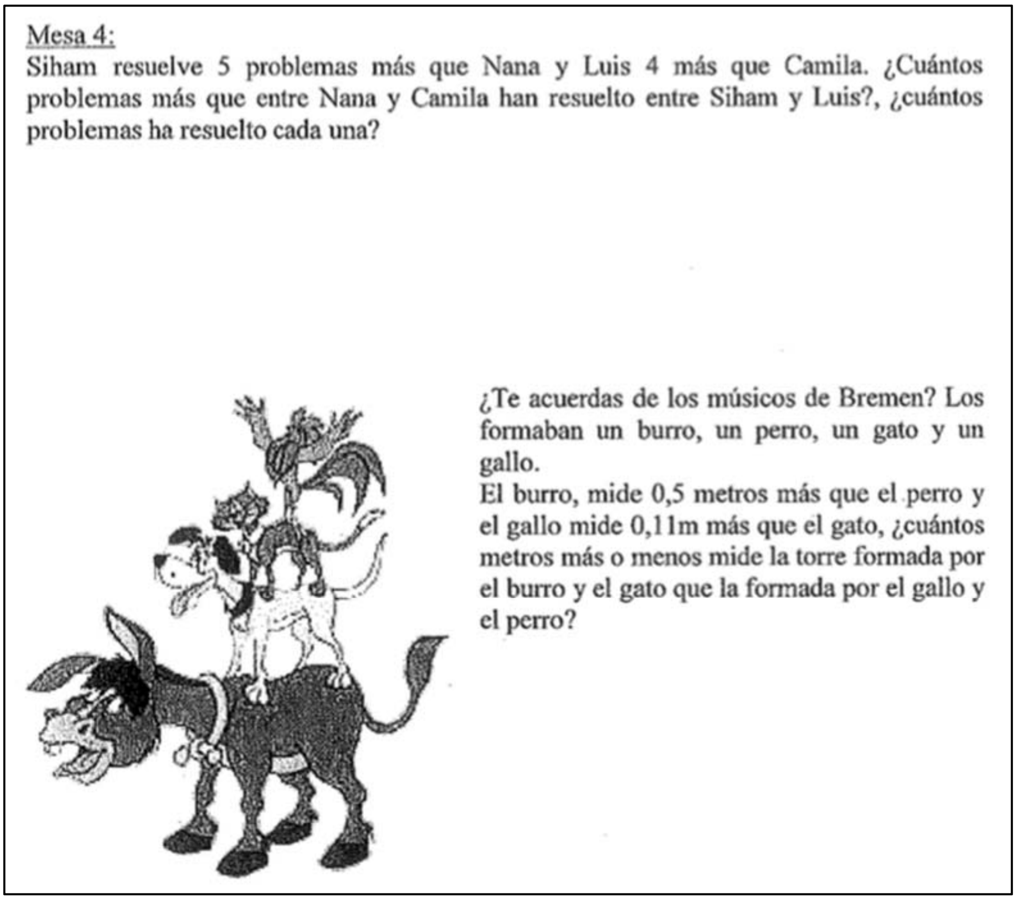
El alumno 13 tomó la iniciativa e intentó explicar a sus compañeros el uso de las torres, los demás miembros del grupo no recibieron con agrado la propuesta y jugaban con el material. La alumna 23 cuando llegó a la mesa preguntó si podía usarse el material. La voluntaria le invitó a ello.

Comentarios sobre el trabajo en la Mesa 4

En la mesa 4 se propusieron dos problemas de Tipo 8.3 con números naturales y con decimales. Como se aprecia en la Figura 5.72, se les facilitaban torres de Lego. En el caso de los números decimales, con el nombre de cada animal y las comparaciones indicadas en el enunciado del problema para poder comparar las uniones de las alturas de dos animales.

Figura 5.72. Torres Lego para comparar las alturas de los diferentes animales.

En la ficha que debían rellenar, no aparecía la estrategia de resolución, esta era indicada por el voluntario (ver Figura 5.73).



Mesa 4:

Siham resuelve 5 problemas más que Nana y Luis 4 más que Camila. ¿Cuántos problemas más que entre Nana y Camila han resuelto entre Siham y Luis?, ¿cuántos problemas ha resuelto cada una?

¿Te acuerdas de los músicos de Bremen? Los formaban un burro, un perro, un gato y un gallo.

El burro, mide 0,5 metros más que el perro y el gallo mide 0,11m más que el gato, ¿cuántos metros más o menos mide la torre formada por el burro y el gato que la formada por el gallo y el perro?

Figura 5.73. Escaneo de la hoja 5 de respuestas. Resolución del problema Tipo 8.3 para naturales y decimales.

En la Figura 5.74 se observa como debían colocar las torres para poder hacer la comparación

Figura 5.74. Imagen de dos bloques de torres (uniones) para hacer la comparación.

Siempre al presentar un ejercicio ponemos un ejemplo de un alumno que lo resuelve correctamente, y a partir de ahí presentamos otras resoluciones. En este ejercicio, si bien hubo alguna solución correcta en el primer apartado, no hubo ninguna correcta en el segundo. De 23 alumnos que acudieron este día a clase, 5 intentaron algo en los dos apartados, 10 intentaron el primer apartado, pero no el segundo y 8 dejaron ambos apartados en blanco.

El voluntario de la mesa 4 les insistió varias veces: “No os dejéis llevar por lo que habéis visto antes”

Tres alumnos confundieron la operación. Los alumnos del grupo tres, tras una puesta en común, concluyeron que faltaban datos para resolver la segunda pregunta del problema, el alumno 20, de este grupo, explicó la resolución de la primera pregunta a los demás (Figura 5.75). El voluntario les puso ejemplos con otras cantidades.

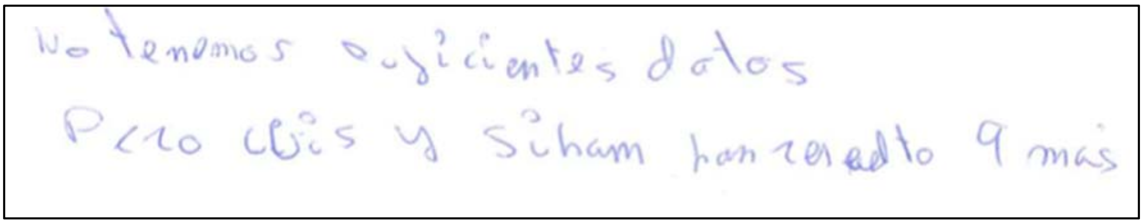
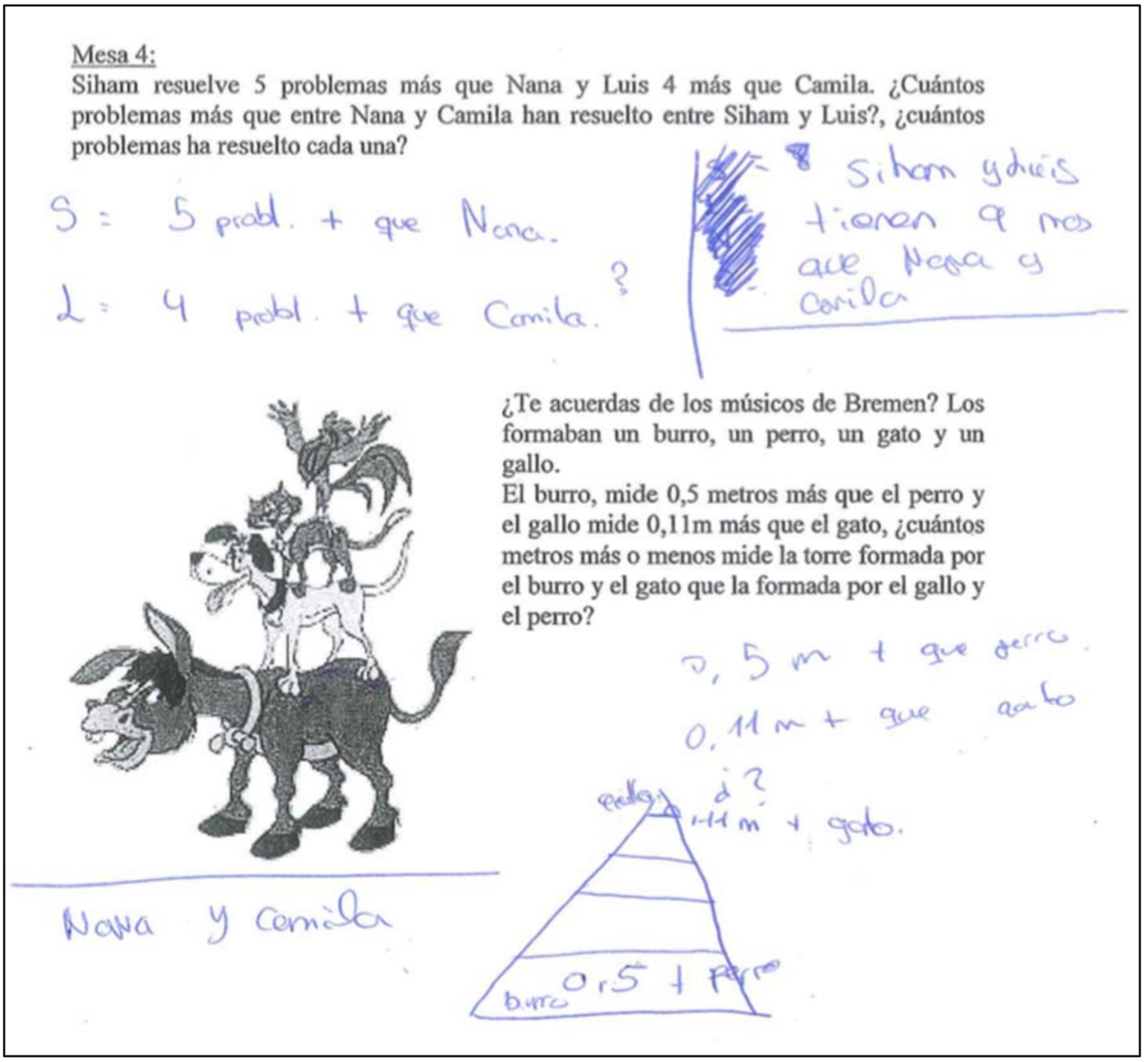

No tenemos sujicientes datos
Pero Luis y Siham han resuelto 9 más

Figura 5.75. Escaneo de la hoja 5 de respuestas del alumno 20. Resolución del problema Tipo 8.3 para naturales.

La alumna 23 buscó sus propias estrategias de resolución (Figura 5.76) En el primer apartado con las torres, y muy posiblemente también sin ellas, esta alumna fue capaz de resolver el problema, en el segundo apartado, la dificultad del problema aumentaba por el tipo de número y porque de las uniones se hacían con el elemento más alto de una pareja y el más bajo de la otra, así esta alumna necesitó buscar otras estrategias de resolución e intentó una representación gráfica.


Mesa 4:
Siham resuelve 5 problemas más que Nana y Luis 4 más que Camila. ¿Cuántos problemas más que entre Nana y Camila han resuelto entre Siham y Luis?, ¿cuántos problemas ha resuelto cada una?

S = 5 probl. + que Nana.
L = 4 probl. + que Camila. ?

Siham y Luis tienen 9 mas que Nana y Camila

¿Te acuerdas de los músicos de Bremen? Los formaban un burro, un perro, un gato y un gallo.
El burro, mide 0,5 metros más que el perro y el gallo mide 0,11m más que el gato, ¿cuántos metros más o menos mide la torre formada por el burro y el gato que la formada por el gallo y el perro?

0,5 m + que perro.
0,11 m + que gato
¿?
gallo 0,11 m + gato.
burro 0,5 + perro

Nana y Camila

Figura 5.76 Escaneo de la hoja 5 de respuestas de la alumna 23. Resolución del problema Tipo 8.3 para naturales y decimales.

El voluntario de la mesa 4 observó que algunos alumnos prefirieron usar pensamiento abstracto antes que materiales como las torres. A los alumnos que suelen ser más dispersos, las torres Lego les distrajeron mucho, se dedicaron a jugar con ellas sin atender al problema.

Los problemas 3 y 4 ya resultaron entre los más difíciles en la prueba inicial. Problema 3, Tipo 8.2 18% de aciertos, problema 4, Tipo 8.3 2% de aciertos. Habría que analizar si presentando otra estrategia de resolución los resultados mejoran más.

Los problemas resultaron largos para el tiempo previsto. Tardaron bastante más que otros días.

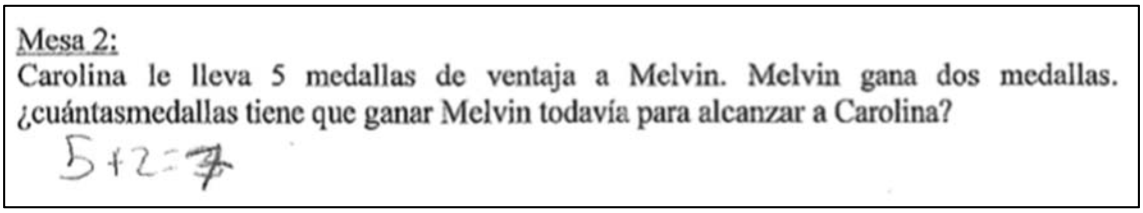
5.3.2.6. Sexta sesión

La sexta sesión tuvo lugar el día 29 de noviembre de 2017. Asistieron a clase 23 alumnos. Faltaron los alumnos 6, 7, 8, 15, 16, 17 y 20. En primer lugar se puso en común el trabajo en grupos interactivos de la sesión anterior. Después los alumnos trabajaron en pequeños grupos problemas similares, pero sin ayuda de materiales.

Puesta en común del trabajo de la sesión anterior

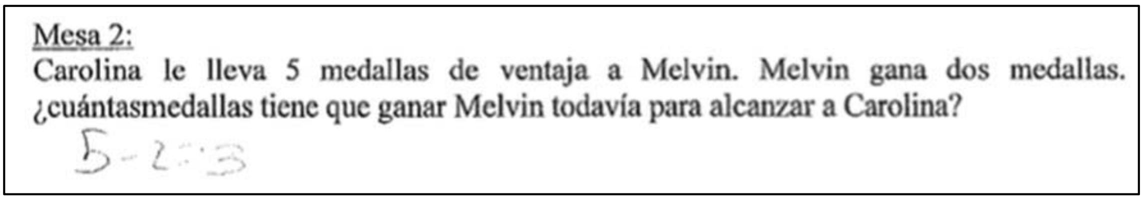
Se comenzó entregando su hoja de respuestas a cada alumno; en gran grupo se debatió sobre la solución de cada uno de los problemas.

Sólo 7 alumnos corrigieron fallos o ejercicios en blanco del día anterior. Las Figuras 5.77 y 5.78 muestran los escaneos de los días 28 y 29 de noviembre del primer ejercicio de la mesa 2 de la alumna 30, y en ellos podemos comprobar como la alumna corrigió el ejercicio al verlo resuelto en la pizarra. Nos parece reseñable que 14 alumnos volvieran a entregar la hoja con errores o ejercicios en blanco a pesar de ver los ejercicios corregidos en la pizarra.



Mesa 2:
Carolina le lleva 5 medallas de ventaja a Melvin. Melvin gana dos medallas. ¿cuántasmedallas tiene que ganar Melvin todavía para alcanzar a Carolina?
5+2=7

Figura 5.77. Escaneo de la hoja 5 de respuestas de la alumna 30 día 28 de noviembre. Resolución del problema Tipo 9.2 para naturales.



Mesa 2:
Carolina le lleva 5 medallas de ventaja a Melvin. Melvin gana dos medallas. ¿cuántasmedallas tiene que ganar Melvin todavía para alcanzar a Carolina?
5-2=3

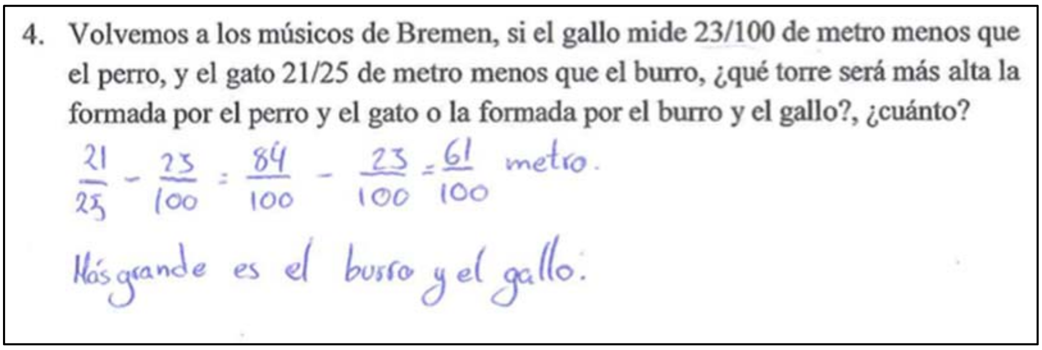
Figura 5.78. Escaneo de la hoja 5 de respuestas de la alumna 30 día 29 de noviembre. Resolución del problema Tipo 9.2 para naturales.

Trabajo en pequeños grupos

Tras la puesta en común anterior, se propusieron nuevos problemas que se trabajaron en pequeños grupos de dos o tres alumnos y que después se resolvieron en la pizarra. Los problemas que el día anterior se hicieron con naturales y decimales, se planteaban con fracciones y los que se hicieron con naturales y fracciones, se planteaban con decimales. En la clase no había calculadoras.

Los problemas se escanearon tras su corrección en la pizarra. Esta vez, sí que parece que los alumnos estuvieron pendientes de la resolución en gran grupo porque la gran mayoría de los problemas se entregaron correctamente resueltos. A pesar de ello, dos alumnos dejaron su hoja en blanco.

El problema 8.3 en este caso con fracciones presentó una notable mejoría; 12 alumnos lo resolvieron de forma correcta (Figuras 5.79 y 5.80).


4. Volvemos a los músicos de Bremen, si el gallo mide 23/100 de metro menos que el perro, y el gato 21/25 de metro menos que el burro, ¿qué torre será más alta la formada por el perro y el gato o la formada por el burro y el gallo?, ¿cuánto?

$\frac{21}{25} - \frac{23}{100} = \frac{84}{100} - \frac{23}{100} = \frac{61}{100}$ metro.

Más grande es el burro y el gallo.

Figura 5.79. Escaneo de la hoja 6 de respuestas de la alumna 28. Resolución del problema Tipo 8.3 para fracciones.

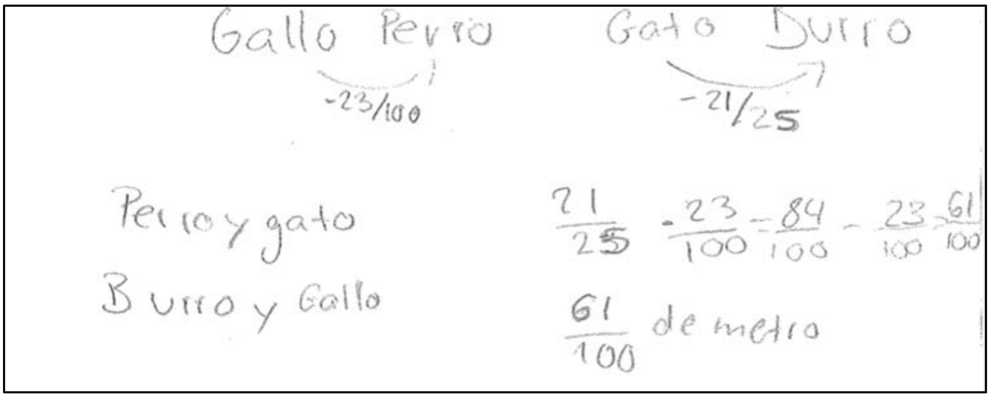


Figura 5.80. Escaneo de la hoja 6 de respuestas de la alumna 22. Resolución del problema Tipo 8.3 para fracciones.

5.3.2.7. Séptima sesión

La asignatura de lengua preparó una actividad para el 30 de noviembre que afectaba a la hora de clase de matemáticas por lo que tuvieron que cancelarse los grupos para ese día. Al día siguiente no se pudo preparar la logística necesaria para los grupos, debido a que los voluntarios tenían otras obligaciones que no les permitían venir en viernes. Así que el día 1 de diciembre lo dedicamos a repasar operaciones con fracciones, para continuar el día 5 de diciembre con la propuesta didáctica.

En la séptima sesión faltaron a clase los alumnos 6, 7, 13, 15, 16, 17, 20, 21, 26, 28, 29 y 30. Trabajamos en grupos interactivos problemas de Tipo 3.2, 6.3, 10.2 y 10.6. No se facilitó material de apoyo.

Aspectos organizativos

Los voluntarios en esta sesión fueron dos profesoras de Didáctica de las Matemáticas, una de la Universidad Complutense de Madrid y otra del Centro Universitario de La Salle de Aravaca (Madrid), así como una estudiante de doctorado y un alumno del Máster de Educación de la Universidad Complutense de Madrid. La composición de los grupos quedó como sigue:

- Primer grupo: alumnos 1, 8, 10, 11 y 18.
- Segundo grupo: alumnos 5, 12, 23 y 24.
- Tercer grupo: alumnos 4, 14, 22, 25 y 27.
- Cuarto grupo: alumnos 2, 3, 9 y 19.

Comentarios generales sobre el funcionamiento de los grupos

En algunas ocasiones, un alumno llegaba a la solución antes que el resto y luego se la explicaba a sus compañeros, en otras, llegaban a la solución entre varios alumnos y el voluntario que hacía de guía.

La alumna 8 explicó al resto de integrantes de su grupo la importancia de poner la operación realizada.

En el cuarto grupo, en la mesa 3, hicieron el problema por separado y comprobaron resultados. La alumna 3 se aseguró de que los demás lo entendieran y les explicaba lo que necesitaban.

En la mesa 3 la alumna 4 afirmó: “profe, yo lo he resuelto sola” contentísima. La alumna 14 se dio cuenta de que en la mesa 2 en el problema de decimales había que sumar y se lo explicó a los demás aprovechando el tiempo que les sobró en la mesa 3.La alumna 4 explicó el problema al alumno 25.

Los alumnos del cuarto grupo terminaron todos los ejercicios a tiempo.

El alumno 27 afirmó que los problemas habían sido más difíciles que los otros días, todo su grupo asintió. Los alumnos realizaban las operaciones cada uno por su cuenta y comparaban resultados.

Tercer grupo alumna 14: “claro, la perra pesaba más este mes y la gata menos”; alumna 4: “claro, ha adelgazado”, “la perra ha engordado y la gata ha adelgazado”- Trabajaron en grupo.

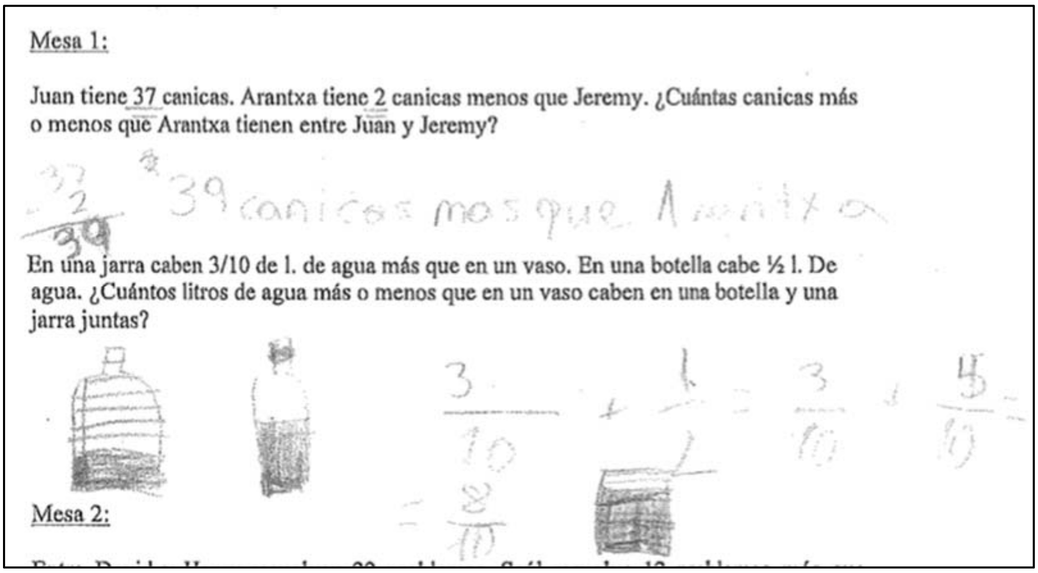
El alumno 11 tuvo que salir fuera de clase porque se sentía muy agobiado.

El alumno 24 comenzó trabajando muy bien, pero poco a poco fue dejando de trabajar.

Este día estaban muy motivados. La alumna 8 aprovechó que había terminado una actividad antes de tiempo para terminar otra que le había quedado pendiente.

Comentarios sobre el trabajo en la Mesa 1

En la mesa 1 se propusieron a los alumnos dos problemas de Tipo 3.2 con números naturales y con fracciones. No se facilitó ningún material de apoyo y en la ficha que debían rellenar no se ofrecía ninguna estrategia de resolución (figura 5.81). La voluntaria animaba a los alumnos a dibujar aquello que necesitaban.


Mesa 1:

Juan tiene 37 canicas. Arantxa tiene 2 canicas menos que Jeremy. ¿Cuántas canicas más o menos que Arantxa tienen entre Juan y Jeremy?

37
+2
39

39 canicas mas que Arantxa

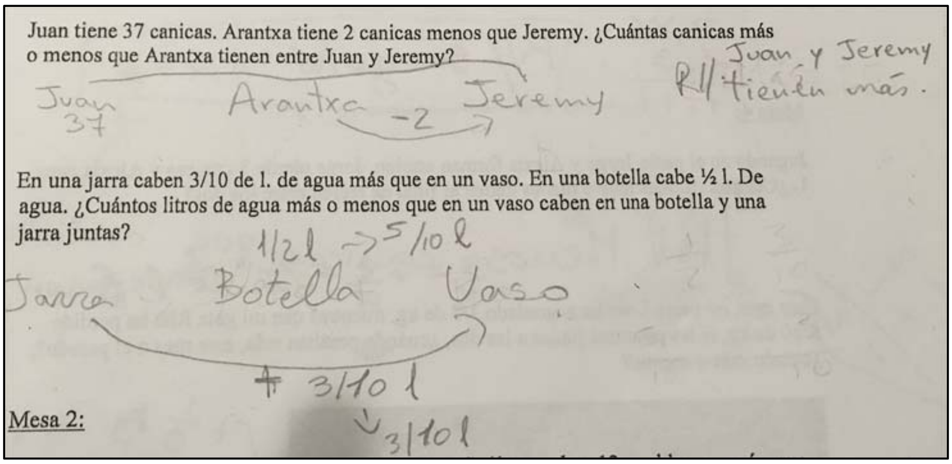
En una jarra caben 3/10 de l. de agua más que en un vaso. En una botella cabe ½ l. De agua. ¿Cuántos litros de agua más o menos que en un vaso caben en una botella y una jarra juntas?

$\frac{3}{10} + \frac{1}{2} = \frac{3}{10} + \frac{5}{10} = \frac{8}{10}$

Mesa 2:

Figura 5.81. Escaneo de la hoja 7 de respuestas de la alumna 18. Resolución del problema Tipo 3.2 para naturales y fracciones.

Aparecieron fallos en operación. Como estrategia de resolución los alumnos realizaron representaciones gráficas, como hemos podido ver en la figura 5.81 o más esquemáticos como en la Figura 5.82.


Juan tiene 37 canicas. Arantxa tiene 2 canicas menos que Jeremy. ¿Cuántas canicas más o menos que Arantxa tienen entre Juan y Jeremy?

Juan 37 Arantxa -2 Jeremy

R// Juan y Jeremy tienen más.

En una jarra caben 3/10 de l. de agua más que en un vaso. En una botella cabe ½ l. De agua. ¿Cuántos litros de agua más o menos que en un vaso caben en una botella y una jarra juntas?

1/2 l -> 5/10 l

Jarra Botella Vaso

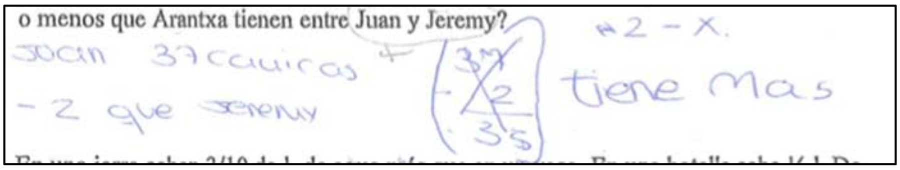
+ 3/10 l

3/10 l

Mesa 2:

Figura 5.82. Escaneo de la hoja 7 de respuestas de la alumna 14. Resolución del problema Tipo 3.2 para naturales y fracciones.

Apareció el álgebra como estrategia (Figura 5.83), que como ocurría en las pruebas previas, no solía ir acompañada de éxito en la resolución del problema.


o menos que Arantxa tienen entre Juan y Jeremy?

Juan 37 canicas

-2 que Jeremy

tiene mas

Figura 5.83. Escaneo de la hoja 7 de respuestas de la alumna 4. Resolución del problema Tipo 3.2 para naturales.

La voluntaria les animaba a hacer dibujos y a ordenar por tamaños.

En el tercer grupo, como no se les facilitaba material, sacaron rotuladores de su estuche y empezaron a trabajar. Como necesitaban más rotuladores juntaron los de todos ellos: “Profe, estamos creando material” (Figura 5.84). Otros grupos les imitaron.

Figura 5.84. Alumnos trabajando en GI con materiales manipulables buscados por los propios alumnos.

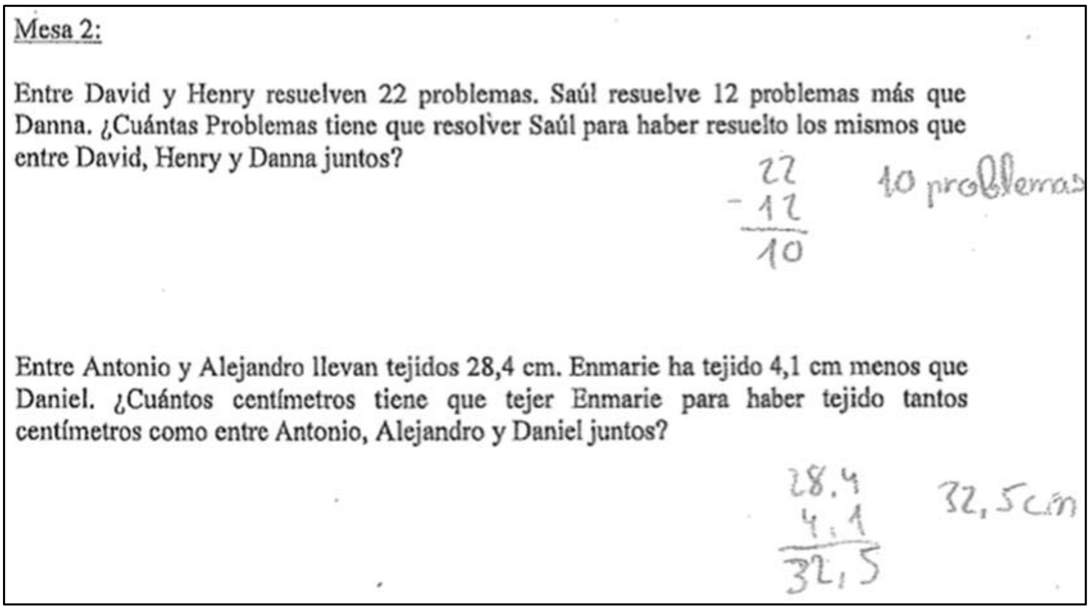
En este tercer grupo para representar la jarra sacaron un bote de tippex mientras dialogaban (Figura 5.85).

Figura 5.85. Alumnos trabajando en GI con materiales manipulables buscados por los propios alumnos.

Nos parece importante señalar que algunos grupos de alumnos se habían acostumbrado a trabajar con materiales y fueron capaces de improvisarlos; aunque en general seguían usando pocas estrategias de resolución.

Comentarios sobre el trabajo en la Mesa 2

En la mesa 2 se propusieron dos problemas de Tipo 6.3 con números naturales y decimales. No se facilitaba ningún material de apoyo y en la ficha que debían rellenar no se ofrecía ninguna estrategia de resolución (ver Figura 5.86). La voluntaria animaba a los alumnos a dibujar aquello que necesitaban.



Mesa 2:

Entre David y Henry resuelven 22 problemas. Saúl resuelve 12 problemas más que Danna. ¿Cuántas Problemas tiene que resolver Saúl para haber resuelto los mismos que entre David, Henry y Danna juntos?

22
- 12
10

10 problemas

Entre Antonio y Alejandro llevan tejidos 28,4 cm. Enmarie ha tejido 4,1 cm menos que Daniel. ¿Cuántos centímetros tiene que tejer Enmarie para haber tejido tantos centímetros como entre Antonio, Alejandro y Daniel juntos?

28.4
4.1
32,5

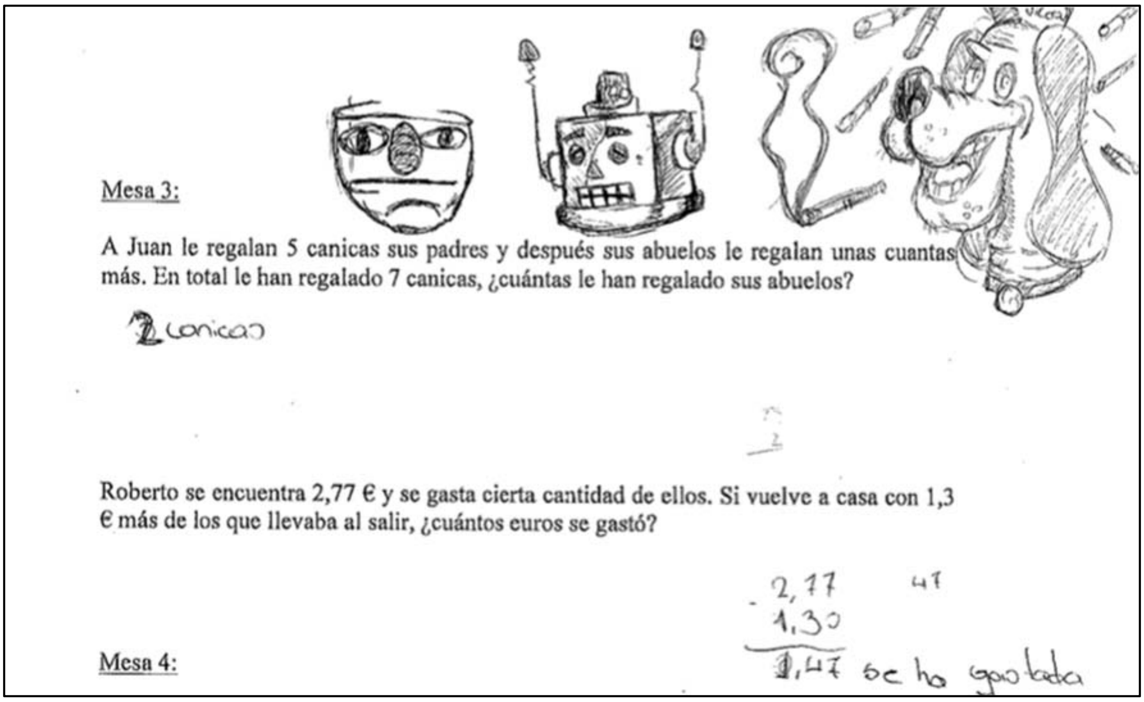
32,5cm

Figura 5.86. Escaneo de la hoja 7 de respuestas del alumno 19. Resolución del problema Tipo 6.3 para naturales y decimales.

Estos dos problemas no presentaron grandes dificultades para nuestros alumnos. En la mayor parte de los casos, no utilizaron ninguna estrategia de resolución. Se encontraron representaciones gráficas y uso de casos particulares: “A Danna le puedo poner cualquier número” afirmó la alumna 5 y empezó a inventarse casos particulares. Esta última estrategia la usaron en clase varios grupos animados por el voluntario, pero no dejaron constancia en el papel.

Comentarios sobre el trabajo en la Mesa 3

En la mesa 3 se propusieron dos problemas de Tipo 10.2 con números naturales y decimales. No se facilitaba ningún material de apoyo y en la ficha que debían rellenar no se ofrecía ninguna estrategia de resolución (ver Figura 5.87). La voluntaria animaba a los alumnos a dibujar aquello que necesitaban.


Mesa 3:

A Juan le regalan 5 canicas sus padres y después sus abuelos le regalan unas cuantas más. En total le han regalado 7 canicas, ¿cuántas le han regalado sus abuelos?

2 canicas

Roberto se encuentra 2,77 € y se gasta cierta cantidad de ellos. Si vuelve a casa con 1,3 € más de los que llevaba al salir, ¿cuántos euros se gastó?

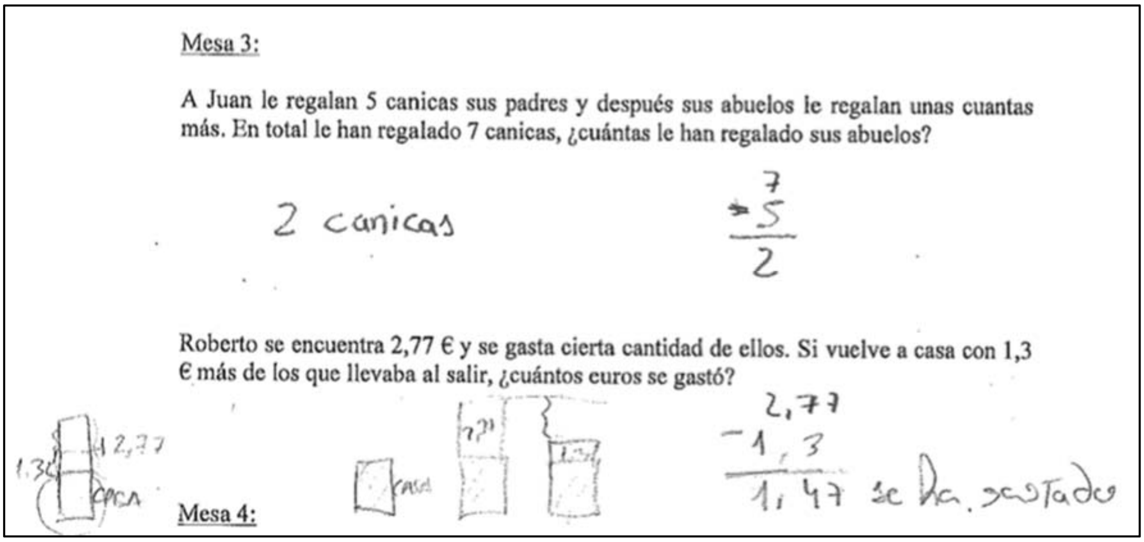
$$\begin{array}{r} 2,77 \\ -\ 1,30 \\ \hline 1,47 \end{array}$$ se ha gastado

Mesa 4:

Figura 5.87. Escaneo de la hoja 7 de respuestas del alumno 2. Resolución del problema Tipo 10.2 para naturales y decimales.

Todos los alumnos, menos uno que dejó el segundo apartado en blanco, resolvieron correctamente ambos apartados. La mayoría no utilizaban ninguna estrategia de resolución, y en el primer apartado, son muchos los que no planteaban ni la operación a realizar, como ya hemos visto en la Figura 5.87.

En la Figura 5.88 podemos ver como un alumno hace una representación gráfica similar a las torres de Lego utilizadas en sesiones anteriores.


Mesa 3:

A Juan le regalan 5 canicas sus padres y después sus abuelos le regalan unas cuantas más. En total le han regalado 7 canicas, ¿cuántas le han regalado sus abuelos?

2 canicas

$$\begin{array}{r} 7 \\ -\ 5 \\ \hline 2 \end{array}$$

Roberto se encuentra 2,77 € y se gasta cierta cantidad de ellos. Si vuelve a casa con 1,3 € más de los que llevaba al salir, ¿cuántos euros se gastó?

$$\begin{array}{r} 2,77 \\ -\ 1,3 \\ \hline 1,47 \end{array}$$ se ha gastado

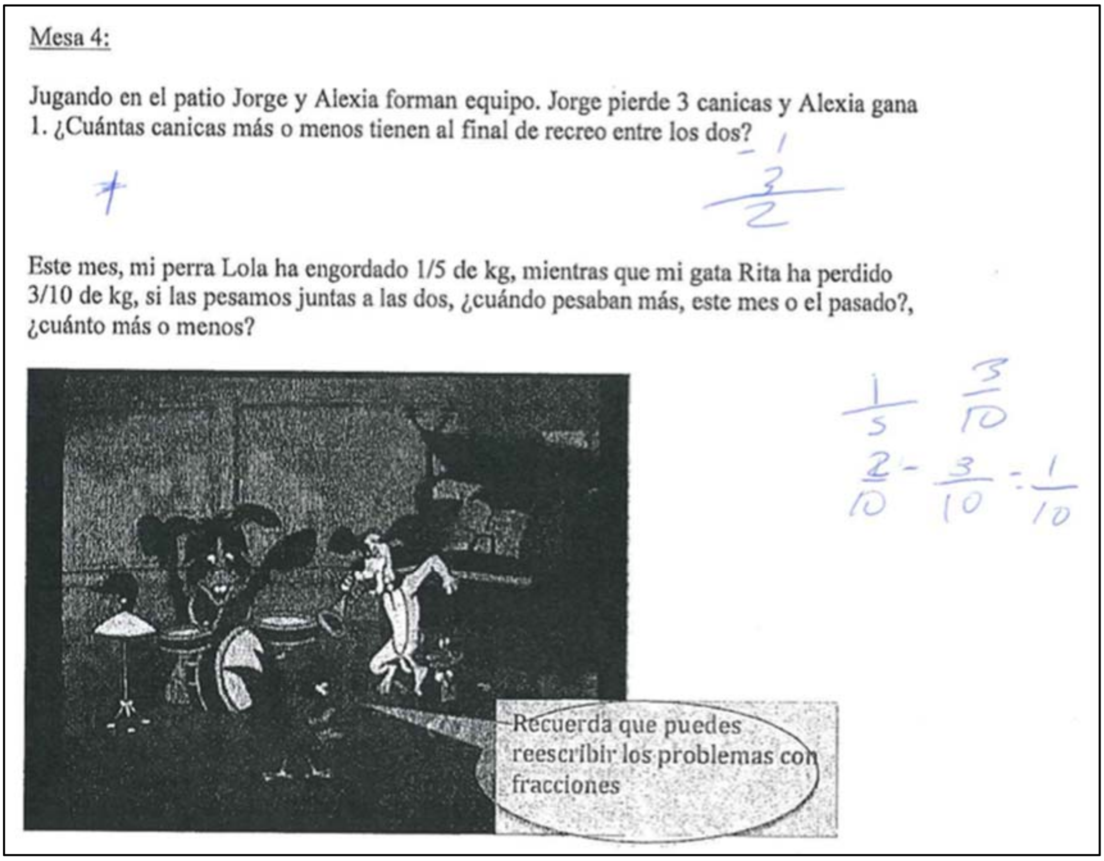
Mesa 4:

Figura 5.88. Escaneo de la hoja 7 de respuestas del alumno 19. Resolución del problema Tipo 10.2 para naturales y decimales.

Ambos apartados les resultaron muy fáciles. Apenas utilizaron estrategias de resolución.

Comentarios sobre el trabajo en la Mesa 4

En la mesa 4 se propusieron a dos problemas de Tipo 10.6 con números naturales y fracciones. No se facilitaba ningún material de apoyo y en la ficha que debían rellenar no se ofrecía ninguna estrategia de resolución (ver Figura 5.89). La voluntaria animó a los alumnos a dibujar aquello que necesitaban. Se les recordó a los alumnos que podían reescribir los problemas con fracciones, pero esta vez no había calculadoras.



Mesa 4:

Jugando en el patio Jorge y Alexia forman equipo. Jorge pierde 3 canicas y Alexia gana 1. ¿Cuántas canicas más o menos tienen al final de recreo entre los dos?

+

-1
$\frac{3}{2}$

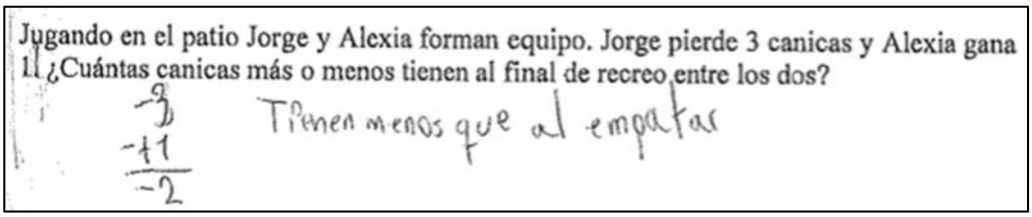
Este mes, mi perra Lola ha engordado 1/5 de kg, mientras que mi gata Rita ha perdido 3/10 de kg, si las pesamos juntas a las dos, ¿cuándo pesaban más, este mes o el pasado?, ¿cuánto más o menos?

$\frac{1}{5}$ $\frac{3}{10}$

$\frac{2}{10} - \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$

Figura 5.89. Escaneo de la hoja 7 de respuestas del alumno 12. Resolución del problema Tipo 10.6 para naturales y fracciones.

Se observa que utilizar números enteros, en vez de naturales les ayudaba a interpretar bien el resultado (Figura 5.90).



Jugando en el patio Jorge y Alexia forman equipo. Jorge pierde 3 canicas y Alexia gana 1. ¿Cuántas canicas más o menos tienen al final de recreo entre los dos?

-3
$-+1$
-2

Tienen menos que al empatar

Figura 5.90. Escaneo de la hoja 7 de respuestas del alumno 25. Resolución del problema Tipo 10.6 para naturales.

Sólo un alumno llegó a la solución correcta de los dos apartados (Figura 5.89). En el resto o no llegaron a plantear ninguna operación o aparecieron fallos tanto en operación como en algoritmo. Algunos grupos terminaron antes de tiempo, pero a otros les faltó tiempo.

5.3.2.8. Octava sesión

La octava sesión tuvo lugar el día 12 de diciembre de 2017. Asistieron a clase 17 alumnos. Faltaron los alumnos 1, 5, 6, 7, 8, 11, 15, 16, 17, 21, 24, 26, y 30. En primer lugar se puso en común el trabajo en grupos interactivos de la sesión anterior. Después los alumnos trabajaron en pequeños grupos problemas similares.

Puesta en común del trabajo de la sesión anterior

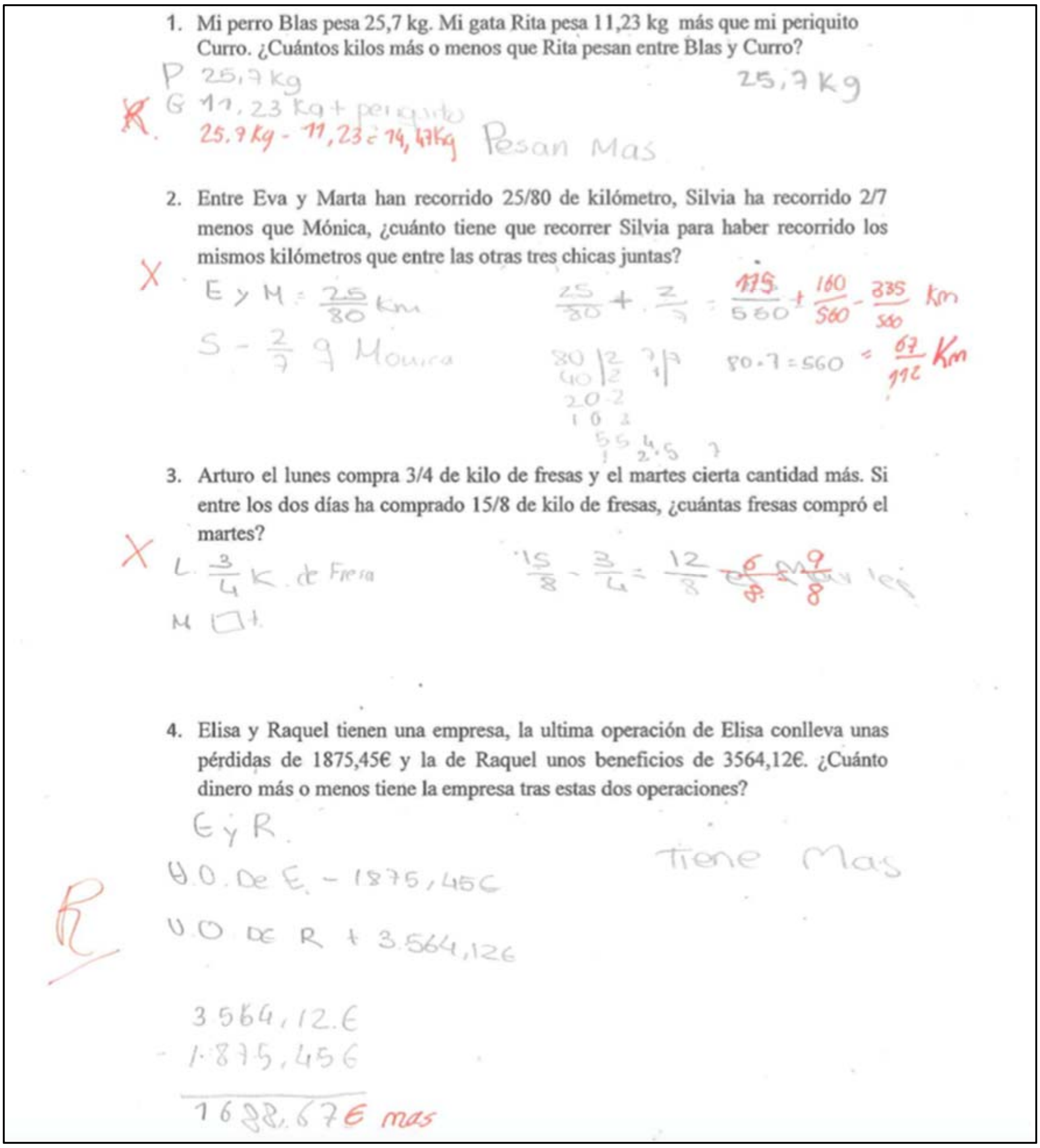
Se comenzó entregando su hoja de respuestas a cada alumno y realizando los ejercicios en la pizarra en gran grupo. El parón por la actividad de lengua y el siguiente por el puente de diciembre (en una primera planificación la propuesta terminaba antes del puente) y la baja asistencia de ese día hicieron que nuestros alumnos estuvieran muy dispersos. Sólo 5 alumnos corrigieron fallos o ejercicios en blanco del día anterior, y no todos los ejercicios. Ninguna prueba quedó completamente corregida.

Trabajo en pequeños grupos

Tras la puesta en común anterior, se propusieron nuevos problemas que se trabajaron en pequeños grupos de dos o tres alumnos y que después se resolvieron en la pizarra. Los problemas que el día anterior se hicieron con naturales y decimales, se plantearon con fracciones y los que se hicieron con naturales y fracciones, se plantearon con decimales. En la clase no había calculadoras.

Los problemas se escanearon tras su corrección en la pizarra. Los alumnos estuvieron pendientes de la resolución en gran grupo y la gran mayoría de los problemas se entregaron correctamente resueltos.

En la Figura 5.91 se pueden ver las correcciones de una alumna en color rojo.



1. Mi perro Blas pesa 25,7 kg. Mi gata Rita pesa 11,23 kg más que mi periquito Curro. ¿Cuántos kilos más o menos que Rita pesan entre Blas y Curro?

P 25,7 kg
G 11,23 kg + periquito
25.7 kg - 11,23 = 14,47 kg Pesan Mas
25,7 kg

2. Entre Eva y Marta han recorrido 25/80 de kilómetro, Silvia ha recorrido 2/7 menos que Mónica, ¿cuánto tiene que recorrer Silvia para haber recorrido los mismos kilómetros que entre las otras tres chicas juntas?

E y M = $\frac{25}{80}$ km
S - $\frac{2}{7}$ q Monica
$\frac{25}{80} + \frac{2}{7} = \frac{175}{560} + \frac{160}{560} = \frac{335}{560}$ km $= \frac{67}{112}$ km
80 · 7 = 560

3. Arturo el lunes compra 3/4 de kilo de fresas y el martes cierta cantidad más. Si entre los dos días ha comprado 15/8 de kilo de fresas, ¿cuántas fresas compró el martes?

L. $\frac{3}{4}$ K. de Fresa
M □ +
$\frac{15}{8} - \frac{3}{4} = \frac{12}{8}$ ~~$\frac{6}{8}$~~ $\frac{9}{8}$

4. Elisa y Raquel tienen una empresa, la ultima operación de Elisa conlleva unas pérdidas de 1875,45€ y la de Raquel unos beneficios de 3564,12€. ¿Cuánto dinero más o menos tiene la empresa tras estas dos operaciones?

E y R.
U.O. De E. - 1875,45€
U O DE R + 3.564,12€
Tiene Mas
3.564,12 €
- 1.875,45 €
1688,67 € mas

Figura 5.91. Escaneo de la hoja 8 de respuestas de la alumna 4. Resolución de los problemas Tipo 3.2 para decimales, 6.3 para fracciones, 10.2. para fracciones y 10.6 para decimales.

La alumna 29 dejó su hoja completamente en blanco. En clase trabajaron muy bien en pequeño grupo, algunos no tan pequeños, ya que se llegaron a juntar desde grupos de 2 hasta de 5 alumnos. La puesta en común de toda la clase fue muy dinámica y participativa.

No se apreciaron apenas estrategias de resolución.

5.3.2.9. Novena sesión

La novena, y última sesión, dedicada a realizar una prueba de evaluación tuvo lugar el 13 de diciembre de 2017. Consistió en la resolución individual de 10 problemas sin la ayuda de materiales ni de calculadoras. Asistieron a clase 25 alumnos, faltaron los alumnos 6, 15, 16, 21 y 29.

En general a la mayor parte de los alumnos les sobró bastante tiempo (disponían de un total de 55 min). Durante la realización de la prueba, el alumno 13 pidió ayuda en varias ocasiones El alumno 9 borró todas las operaciones por lo que se le pidió que las volviera a escribir. Los alumnos 7, 24 y 26 fueron enviados al aula de expulsados al terminar su examen.

Análisis de los resultados del Problema 1

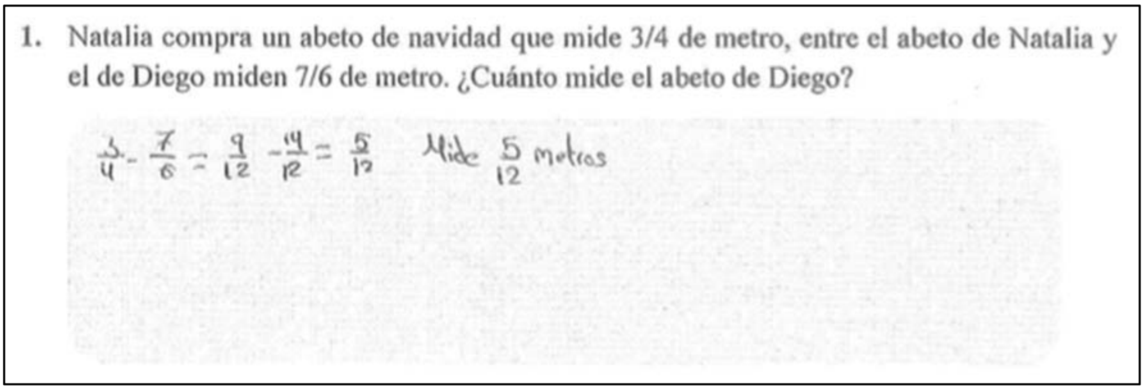
El Problema 1 se trataba de un problema de Tipo 2.1 (los datos son S_1 y $U_1=U(S_1,S_2)$ y la incógnita es S_2). El enunciado era: “Natalia compra un abeto de navidad que mide 3/4 de metro, entre el abeto de Natalia y el de Diego miden 7/6 de metro. ¿Cuánto mide el abeto de Diego?”

En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos, desde un punto de vista cuantitativo (Tabla 5.13).

Blanco	**Estructura**	**Operación**	**Algoritmo**	**Interpretación**
3 (12%)	22 (88%)	21 (84%)	13 (52%)	10 (40%)

Tabla 5.13. Aciertos obtenidos en el Problema 1 de la Sesión 9.

Como se puede ver, un 40% de los alumnos dio una respuesta totalmente satisfactoria al problema. En la figura 5.92 vemos un ejemplo. Este porcentaje aumenta mucho, hasta el 84%, si nos centramos en la determinación de la estructura y de la operación adecuadas para resolver el problema.


1. Natalia compra un abeto de navidad que mide 3/4 de metro, entre el abeto de Natalia y el de Diego miden 7/6 de metro. ¿Cuánto mide el abeto de Diego?

$\frac{3}{4} - \frac{7}{6} = \frac{9}{12} - \frac{14}{12} = \frac{5}{12}$ Mide $\frac{5}{12}$ metros

Figura 5.92. Escaneo parcial de la prueba del alumno 11. Resolución del problema Tipo 2.1 para fracciones.

Por ejemplo, la respuesta de la Figura 5.93 es esencialmente correcta, pero no se consideró que la interpretación lo fuera ya que el alumno no señaló la unidad de medida correspondiente.

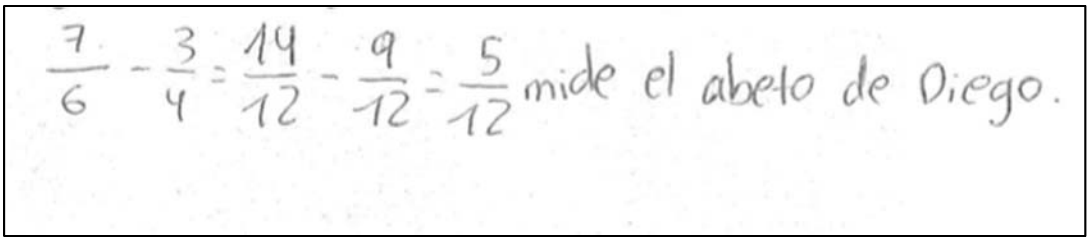


Figura 5.93. Escaneo parcial de la prueba de la alumna 3. Resolución del problema Tipo 2.1 para fracciones.

En algunos casos se apreciaron errores relativos al manejo de distintos sistemas de representación. Por ejemplo, en la Figura 5.94 se observó un error en la conversión de las fracciones en números decimales.

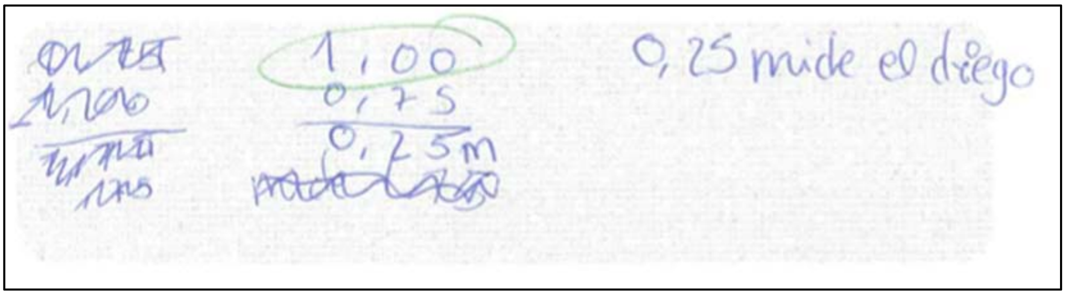


Figura 5.94. Escaneo parcial de la prueba de la alumna 30. Resolución del problema Tipo 2.1 para fracciones.

En varios casos el error se debió a que algunos alumnos todavía no dominaban los algoritmos de las operaciones con fracciones. La Figura 5.95, que presenta un error usual en las operaciones con fracciones, muestra un ejemplo de este tipo.

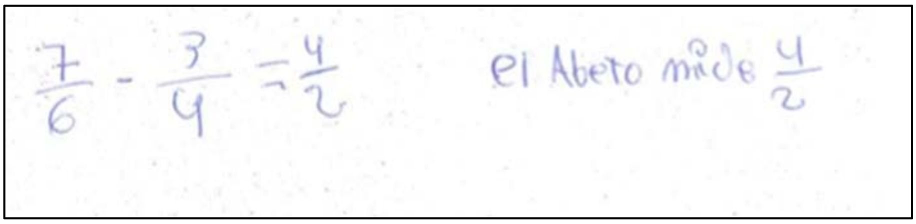


Figura 5.95. Escaneo parcial de la prueba del alumno 27. Resolución del problema Tipo 2.1 para fracciones.

En cuanto a las estrategias de resolución utilizadas por los alumnos, ya hemos mencionado el paso de fracciones a decimales (aunque en ocasiones fue fuente de error). En otras ocasiones encontramos alumnos que pasaban las fracciones a común denominador y trabajaban con los numeradores para añadir el denominador común en el último paso. Esta estrategia dio lugar a errores (ver Figura 5.96) tanto por un mal cálculo de la fracción equivalente como por la omisión del denominador (o por ambos).

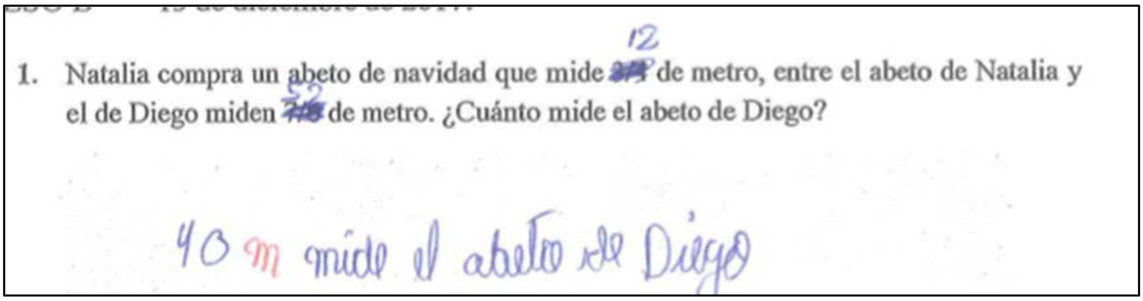


Figura 5.96. Escaneo parcial de la prueba del alumno 10. Resolución del problema Tipo 2.1 para fracciones.

Las estrategias anteriores son ejemplos de lo que podríamos llamar "estrategias numéricas". También hubo "estrategias gráficas" que implicaban el uso de representaciones pictóricas o de los diagramas correspondientes a las cajitas Liro. En la Figura 5.97 se ve un ejemplo en el que aparecen ambos elementos, si bien el elemento realmente relevante es el diagrama de la cajita.

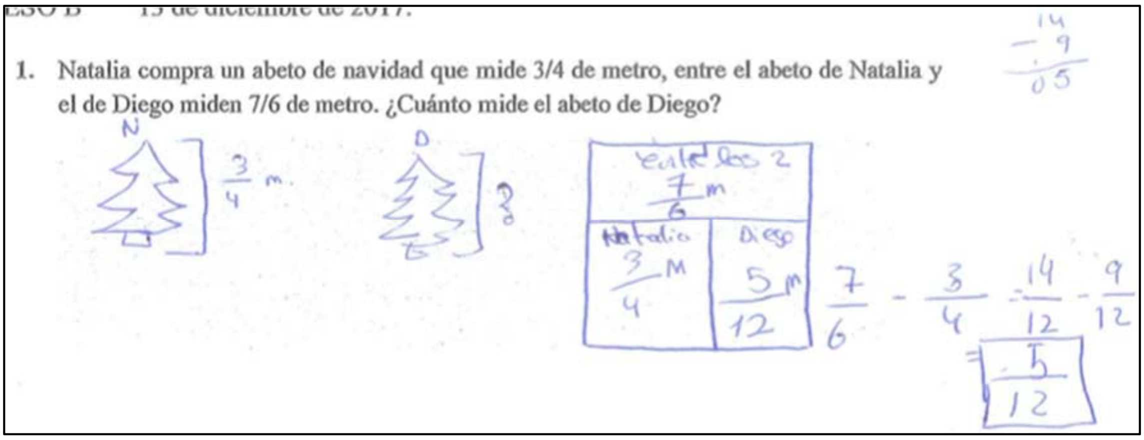


Figura 5.97. Escaneo parcial de la prueba de la alumna 23. Resolución del problema Tipo 2.1 para fracciones.

Análisis de los resultados del Problema 2

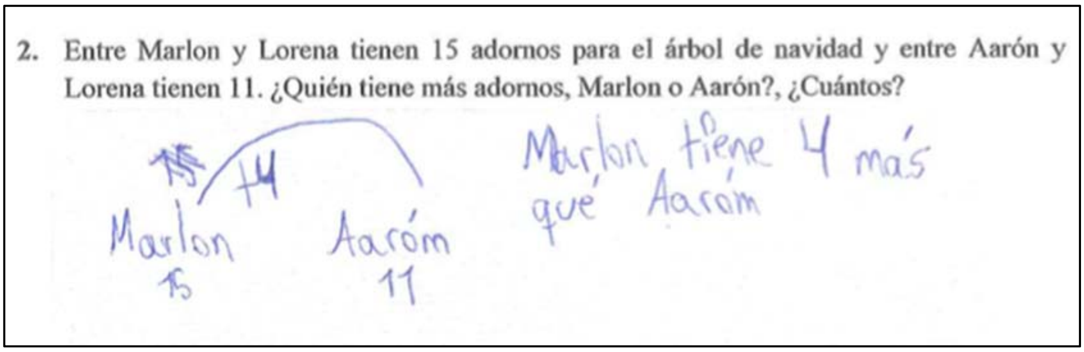
El Problema 2 se trataba de un problema de Tipo 5.1 (los datos son $U_1=U(s,s')$ y $U_2=U(s,s'')$ donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas y la incógnita es $C_1=C(s',s'')$).. El enunciado era: "Entre Marlon y Lorena tienen 15 adornos para el árbol de navidad y entre Aarón y Lorena tienen 11. ¿Quién tiene más adornos, Marlon o Aarón?, ¿Cuántos?"

En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos, desde un punto de vista cuantitativo (Tabla 5.14).

Blanco	**Estructura**	**Operación**	**Algoritmo**	**Interpretación**
2 (8%)	21 (84%)	21 (84%)	20 (80%)	17 (68%)

Tabla 5.14. Aciertos obtenidos en el Problema 2 de la Sesión 9.

Como podemos ver, un 68% de los alumnos dio una respuesta totalmente satisfactoria al problema. En la Figura 5.98 vemos un ejemplo. Este porcentaje aumenta hasta el 84%, si nos centramos en la determinación de la estructura y de la operación adecuadas para resolver el problema.


2. Entre Marlon y Lorena tienen 15 adornos para el árbol de navidad y entre Aarón y Lorena tienen 11. ¿Quién tiene más adornos, Marlon o Aarón?, ¿Cuántos?

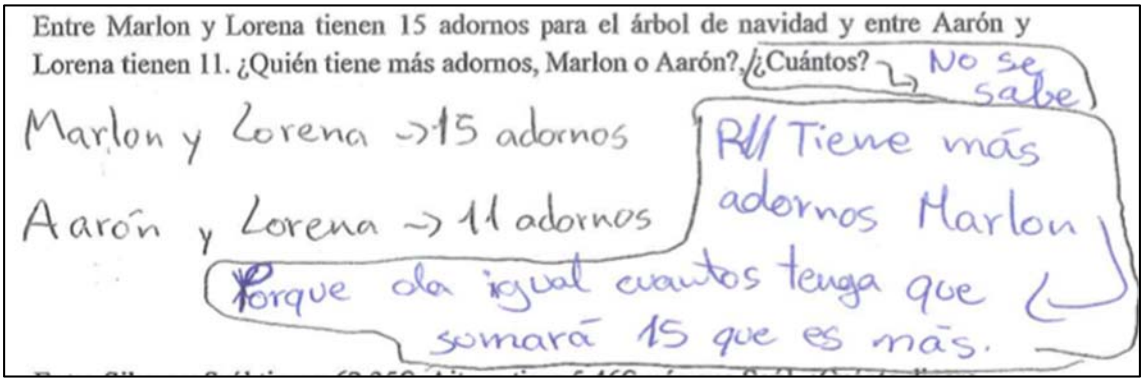
~~15~~ +4

Marlon 15 Aarón 11

Marlon tiene 4 más que Aarón

Figura 5.98. Escaneo parcial de la prueba del alumno 25. Resolución del problema Tipo 5.1 para naturales.

En la figura 5.99 se encuentra un problema que se ha contabilizado como fallo en interpretación, aunque se podría considerar como fallo en otros apartados, porque no llegó a dar la respuesta correcta, aunque sí fue capaz de intuirla.


Entre Marlon y Lorena tienen 15 adornos para el árbol de navidad y entre Aarón y Lorena tienen 11. ¿Quién tiene más adornos, Marlon o Aarón?, ¿Cuántos? No se sabe

Marlon y Lorena → 15 adornos

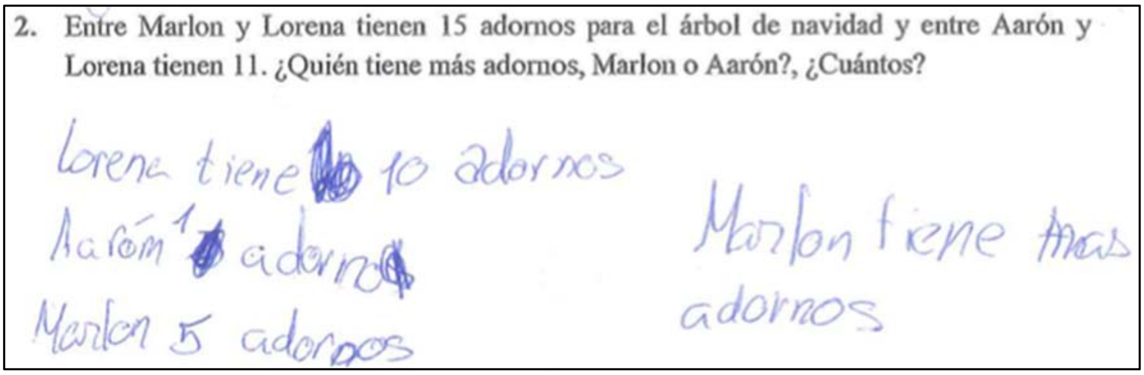
Aarón y Lorena → 11 adornos

R// Tiene más adornos Marlon

Porque da igual cuantos tenga que sumará 15 que es más.

Figura 5.99. Escaneo parcial de la prueba de la alumna 14. Resolución del problema Tipo 5.1 para naturales.

En la resolución de este problema aparecieron ejemplos del uso de la estrategia de dar un caso particular (Figura 5.100).


2. Entre Marlon y Lorena tienen 15 adornos para el árbol de navidad y entre Aarón y Lorena tienen 11. ¿Quién tiene más adornos, Marlon o Aarón?, ¿Cuántos?

Lorena tiene 10 adornos

Aarón 1 adorno

Marlon 5 adornos

Marlon tiene más adornos

Figura 5.100 Escaneo parcial de la prueba del alumno 26. Resolución del problema Tipo 5.1 para naturales.

Análisis de los resultados del Problema 3

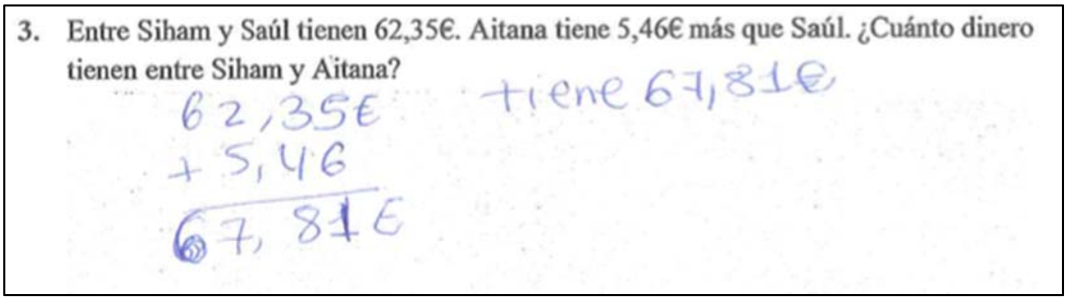
El Problema 3 se trataba de un problema de Tipo 6.1 (los datos son $U_1=U(s,s')$ y $C_1=C(s,s'')$ donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas y la incógnita es $U_2=U(s',s'')$). El enunciado era: “Entre Siham y Saúl tienen 62,35€. Aitana tiene 5,46€ más que Saúl. ¿Cuánto dinero tienen entre Siham y Aitana?”

En la Tabla 5.15 se muestran los resultados obtenidos, desde un punto de vista cuantitativo.

Blanco	Estructura	Operación	Algoritmo	Interpretación
3 (12%)	21 (84%)	15 (60%)	13 (52%)	11 (44%)

Tabla 5.15. Aciertos obtenidos en el Problema 3 de la Sesión 9.

Un 44% de los alumnos dio una respuesta totalmente satisfactoria al problema. En la Figura 5.101 se ve un ejemplo. Este porcentaje aumentó hasta el 60%, si nos centramos en la determinación de la operación y hasta el 84% en la elección de la estructura.

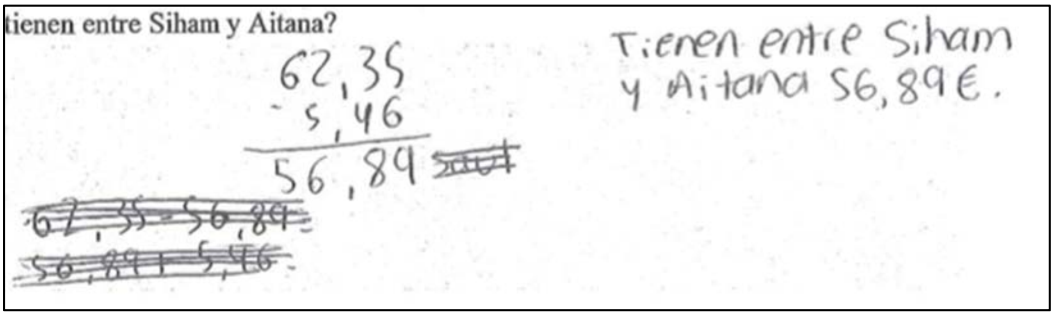

3. Entre Siham y Saúl tienen 62,35€. Aitana tiene 5,46€ más que Saúl. ¿Cuánto dinero tienen entre Siham y Aitana?

62,35€
+ 5,46
67,81€

tiene 67,81€

Figura 5.101. Escaneo parcial de la prueba de la alumna 22. Resolución del problema Tipo 6.1 para decimales.

En la figura 5.102 se presenta uno de los seis fallos en operación de este problema.


tienen entre Siham y Aitana?

62,35
- 5,46
56,89

Tienen entre Siham y Aitana 56,89€.

Figura 5.102. Escaneo parcial de la prueba de la alumna 3. Resolución del problema Tipo 6.1 para decimales.

Los fallos en interpretación volvieron a venir de la falta de unidades. En este problema no aparecieron estrategias de resolución destacables.

Análisis de los resultados del Problema 4

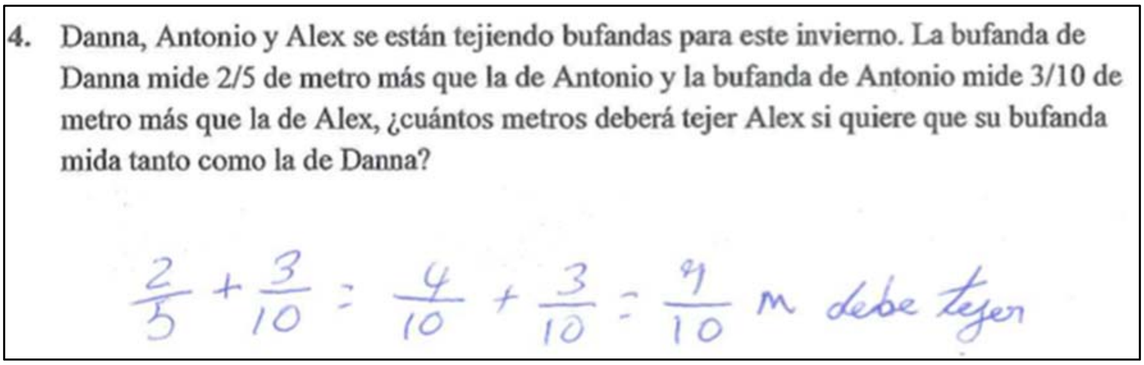
El Problema 4 se trataba de un problema de Tipo 8.2 (los datos son $C_1=C(s,s')$ y $C_2=C(s,s'')$ donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas y la incógnita es $T_1=T(s',s'')$). El enunciado era: “Danna, Antonio y Alex se están tejiendo bufandas para este invierno. La bufanda de Danna mide 2/5 de metro más que la de Antonio y la bufanda de Antonio mide 3/10 de metro más que la de Alex, ¿cuántos metros deberá tejer Alex si quiere que su bufanda mida tanto como la de Danna?”

En la Tabla 5.16 se muestran los resultados obtenidos, desde un punto de vista cuantitativo.

Blanco	Estructura	Operación	Algoritmo	Interpretación
7 (28%)	18 (72%)	14 (56%)	10 (40%)	7 (28%)

Tabla 5.16. Aciertos obtenidos en el Problema 4 de la Sesión 9.

Siete alumnos (un 28%) resolvieron e interpretaron el problema de forma correcta (Figura 5.103). En operación y estructura las respuestas adecuadas aumentaron hasta un 56% y un 72% respectivamente.


4. Danna, Antonio y Alex se están tejiendo bufandas para este invierno. La bufanda de Danna mide 2/5 de metro más que la de Antonio y la bufanda de Antonio mide 3/10 de metro más que la de Alex, ¿cuántos metros deberá tejer Alex si quiere que su bufanda mida tanto como la de Danna?

$\frac{2}{5} + \frac{3}{10} = \frac{4}{10} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$ m debe tejer

Figura 5.103. Escaneo parcial de la prueba del alumno 12. Resolución del problema Tipo 8.2 para fracciones.

En cuanto a las estrategias de resolución utilizadas por los alumnos, encontramos el paso de fracciones a decimales (ver Figura 5.104) dentro de las denominadas “estrategias numéricas”.

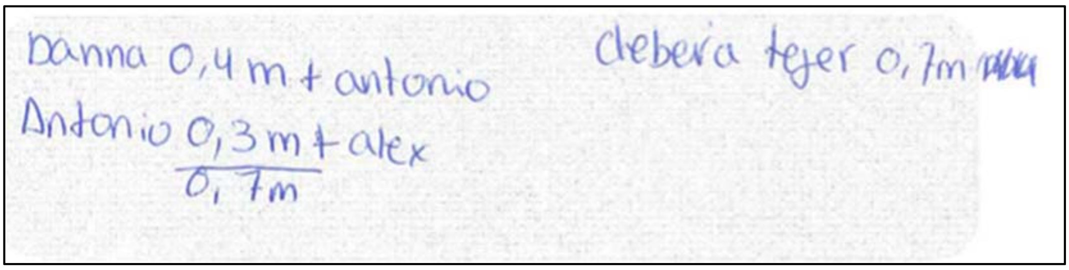

Danna 0,4 m + antonio
Antonio 0,3 m + alex
0,7m
debera tejer 0,7m

Figura 5.104. Escaneo parcial de la prueba de la alumna 30. Resolución del problema Tipo 8.2 para fracciones.

Dentro de las “estrategias gráficas” se encontraron representaciones gráficas de los datos. El uso de estas estrategias suelen ir acompañado del éxito en la resolución de los problemas. La respuesta de la Figura 5.105 es esencialmente correcta, aunque no se consideró que la interpretación lo fuera ya que el alumno no señaló la unidad de medida correspondiente.

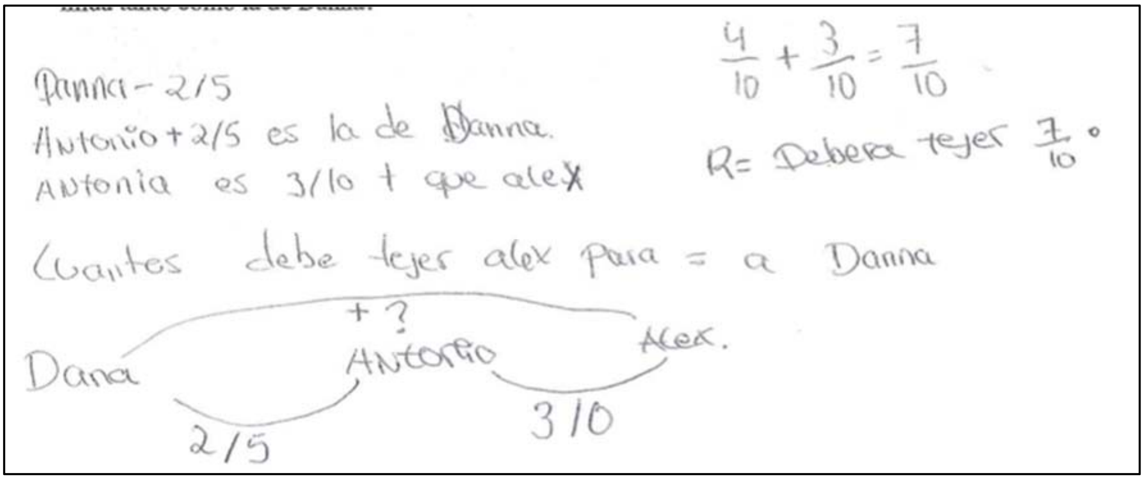


Figura 5.105. Escaneo parcial de la prueba del alumno 13. Resolución del problema Tipo 8.2 para fracciones.

Análisis de los resultados del Problema 5

El Problema 5 se trataba de un problema de Tipo 8.3 (los datos son $C_1=C(s,s')$ y $C_2=C(s'',s''')$ donde s, s', s'' y s''' son cantidades simples desconocidas y la incógnita es $C_3=C(U(s,s''),U(s',s''')))$. El enunciado era: "Aroa, Enmarie, Nana y Carolina piden maquillajes a Papa Noel, si a Aroa le trae 2 maquillajes más que a Enmarie y a Carolina 3 maquillajes menos que a Nana, ¿cuántos maquillajes más o menos que entre Aroa y Carolina les trae a Enmarie y Nana?"

En la Tabla 5.17 se muestran los resultados obtenidos, desde un punto de vista cuantitativo.

Blanco	Estructura	Operación	Algoritmo	Interpretación
5 (20%)	20 (80%)	15 (60%)	15 (60%)	9 (36%)

Tabla 5.17. Aciertos obtenidos en el Problema 5 de la Sesión 9.

Nueve alumnos (un 36%) resolvieron e interpretaron el problema correctamente (Figura 5.106). Si se consideran los aciertos en operación se llegó hasta un 60% (en este caso al tratarse de un problema con números naturales, los aciertos en la operación y en algoritmo coincidieron). Un 20% de los alumnos dejó el problema en blanco. De los que sí se enfrentaron a él, todos acertaron la estructura.

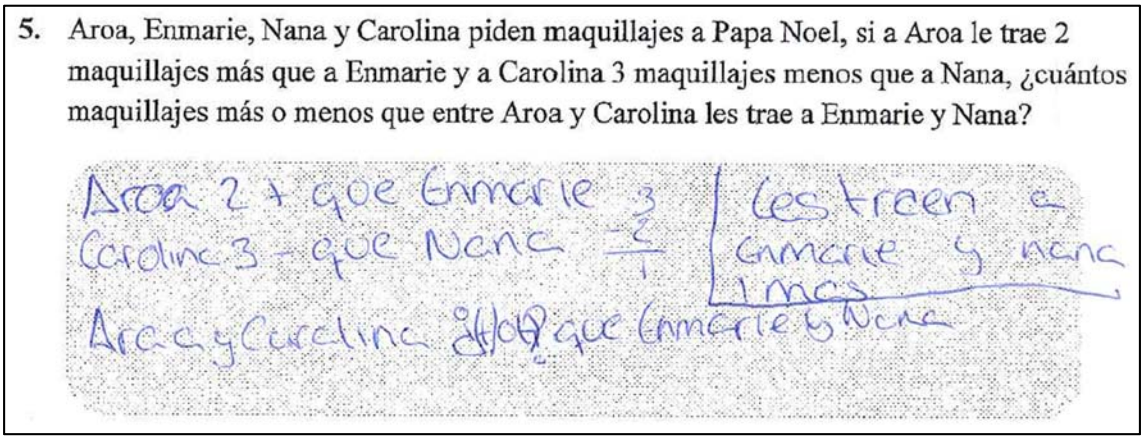


Figura 5.106. Escaneo parcial de la prueba del alumno 7. Resolución del problema Tipo 8.3 para naturales.

En este caso se consideraron como fallos en interpretación los problemas en los que no se indicaba si a Aroa y Carolina les traían más o menos maquillajes que a Enmarie y Nana (Figura 5.107) y aquellos en los se indicaba que eran Aroa y Carolina las que más maquillajes recibían (Figura 5.108).

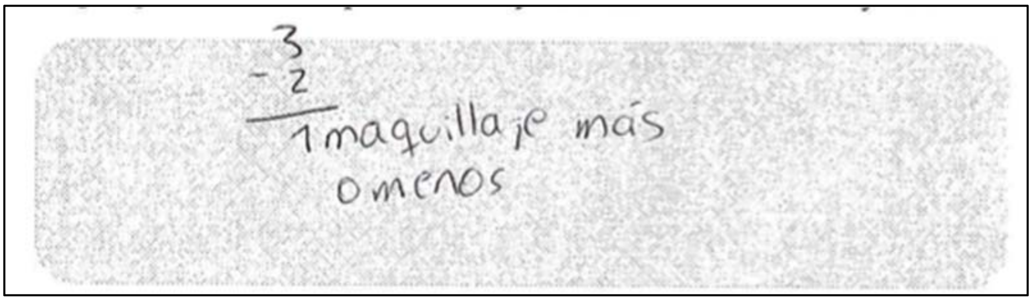


Figura 5.107. Escaneo parcial de la prueba de la alumna 3. Resolución del problema Tipo 8.3 para naturales.

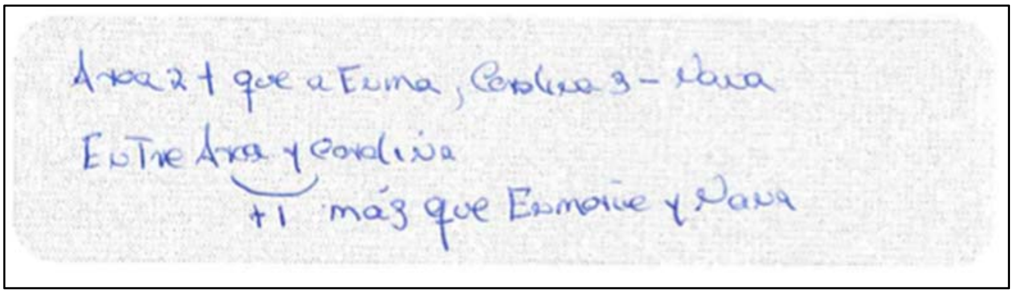


Figura 5.108. Escaneo parcial de la prueba de la alumna 5. Resolución del problema Tipo 8.3 para naturales.

En cuanto a las estrategias de resolución utilizadas por los alumnos, en este problema se encontraron principalmente "estrategias gráficas". En la figura 5.109 se observa una representación gráfica de los datos. En la figura 5.110 se halla una aplicación de las torres Lego. Aunque en ninguna de las dos representaciones se ha interpretó bien el sentido de la respuesta.

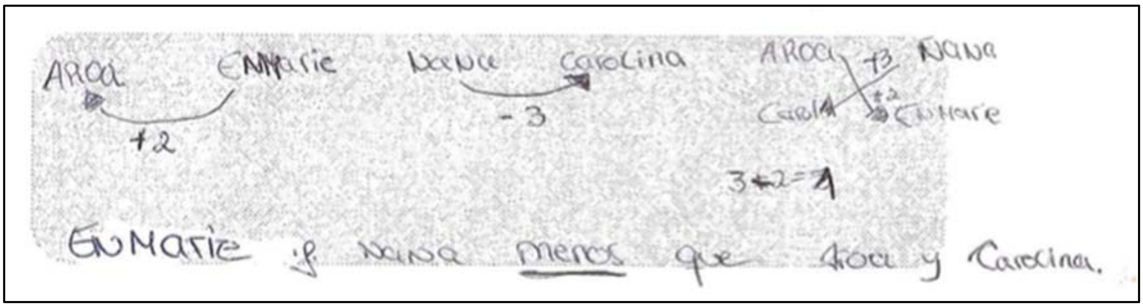


Figura 5.109. Escaneo parcial de la prueba del alumno 13. Resolución del problema Tipo 8.3 para naturales.

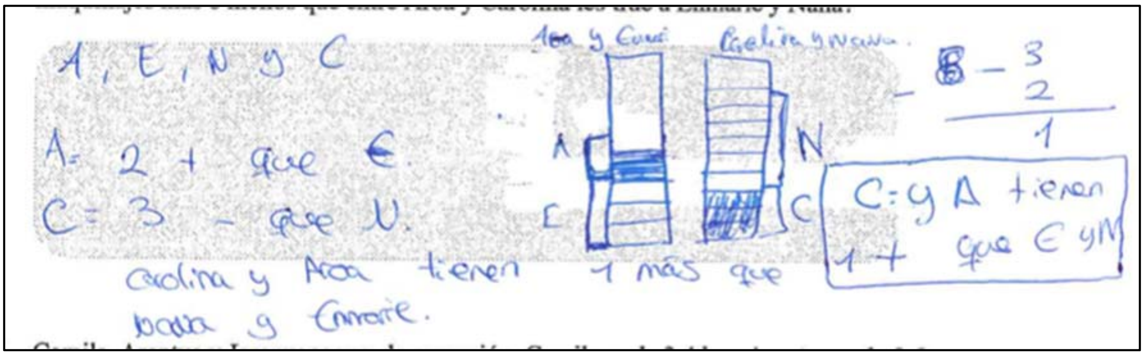


Figura 5.110. Escaneo parcial de la prueba de la alumna 23. Resolución del problema Tipo 8.3 para naturales.

Análisis de los resultados del Problema 6

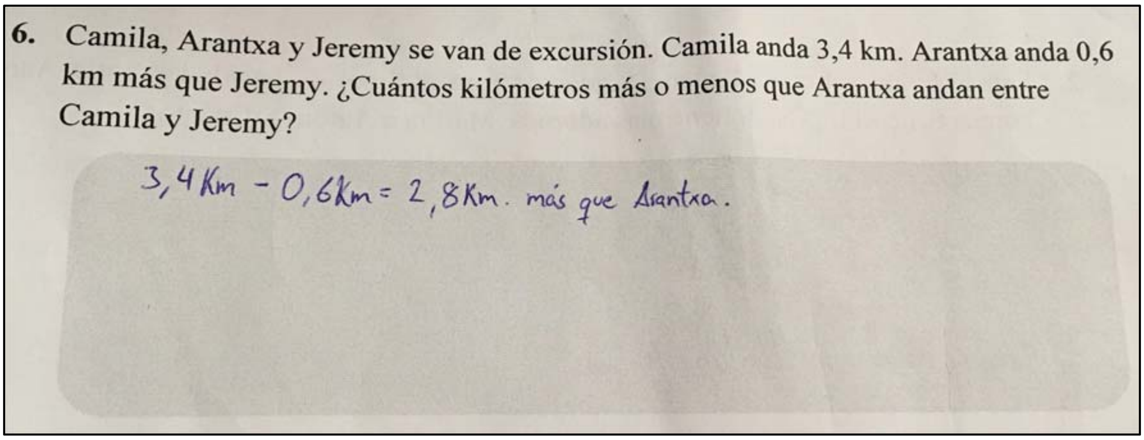
El Problema 6 es del Tipo 3.2 (los datos son S_1 y $C_1=C(s,s')$ donde s y s' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $C_2=C(U(S_1,s),s')$). El enunciado era: "Camila, Arantxa y Jeremy se van de excursión. Camila anda 3,4 km. Arantxa anda 0,6 km más que Jeremy. ¿Cuántos kilómetros más o menos que Arantxa andan entre Camila y Jeremy?"

En la Tabla 5.18 se muestran los resultados obtenidos, desde un punto de vista cuantitativo.

Blanco	Estructura	Operación	Algoritmo	Interpretación
6 (24%)	19 (76%)	4 (16%)	4 (16%)	1 (4%)

Tabla 5.18. Aciertos obtenidos en el Problema 6 de la Sesión 9.

Solo una alumna resolvió e interpretó el problema correctamente (Figura 5.111). De los 19 alumnos que se enfrentaron al problema, todos acertaron la estructura, pero 15 de ellos fallaron en la operación.

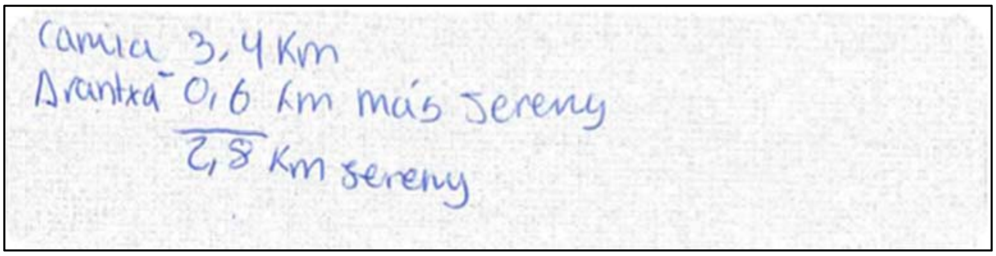


6. Camila, Arantxa y Jeremy se van de excursión. Camila anda 3,4 km. Arantxa anda 0,6 km más que Jeremy. ¿Cuántos kilómetros más o menos que Arantxa andan entre Camila y Jeremy?

3,4Km - 0,6Km = 2,8Km. más que Arantxa.

Figura 5.111. Escaneo parcial de la prueba de la alumna 28. Resolución del problema Tipo 3.2 para decimales.

En este caso los fallos en interpretación, más que por no poner unidades, vinieron de no interpretar bien el resultado. Por ejemplo en la figura 5.112 la alumna interpretó como kilómetros que andaba Jeremy la diferencia de Camila y Jeremy con Arancha:



Camila 3,4 Km
Arantxa 0,6 km más Jeremy
2,8 Km Jeremy

Figura 5.112. Escaneo parcial de la prueba de la alumna 30. Resolución del problema Tipo 3.2 para decimales.

Como estrategia de resolución solo se encontró el uso de alguna representación gráfica.

Análisis de los resultados del Problema 7

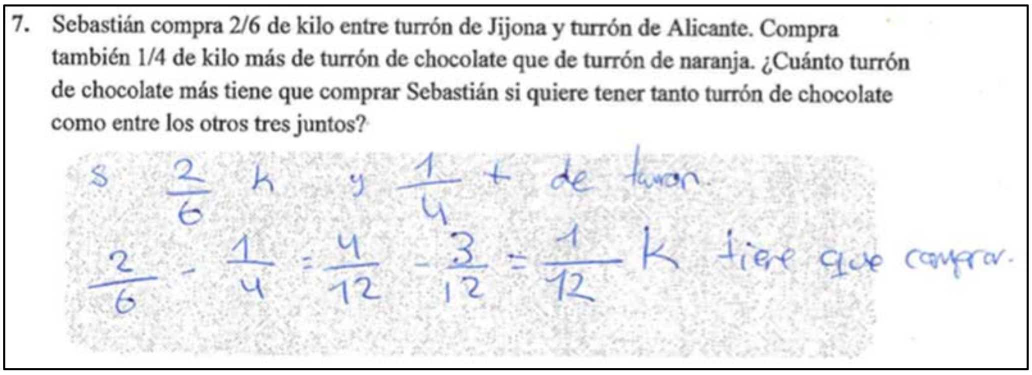
El Problema 7 se trataba de un problema de Tipo 6.3 (los datos son $U_1=U(s,s')$ y $C_1=C(s'',s''')$ donde s, s' y s'' y s''' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $T_2=T(s'',U(s''',U_1))$). El enunciado era: “Sebastián compra 2/6 de kilo entre turrón de Jijona y turrón de Alicante. Compra también 1/4 de kilo más de turrón de chocolate que de turrón de naranja. ¿Cuánto turrón de chocolate más tiene que comprar Sebastián si quiere tener tanto turrón de chocolate como entre los otros tres juntos?”

En la Tabla 5.19 se muestran los resultados obtenidos, desde un punto de vista cuantitativo.

Blanco	Estructura	Operación	Algoritmo	Interpretación
9 (36%)	16 (64%)	9 (36%)	6 (24%)	3 (12%)

Tabla 5.19. Aciertos obtenidos en el Problema 7 de la Sesión 9.

Un 64 % de los alumnos se enfrentó al problema y todos ellos acertaron la estructura. En el caso de la operación el porcentaje de aciertos cayó a un 36% y en el algoritmo a un 24%. Tres alumnos resolvieron e interpretaron el problema correctamente (Figura 5.113).

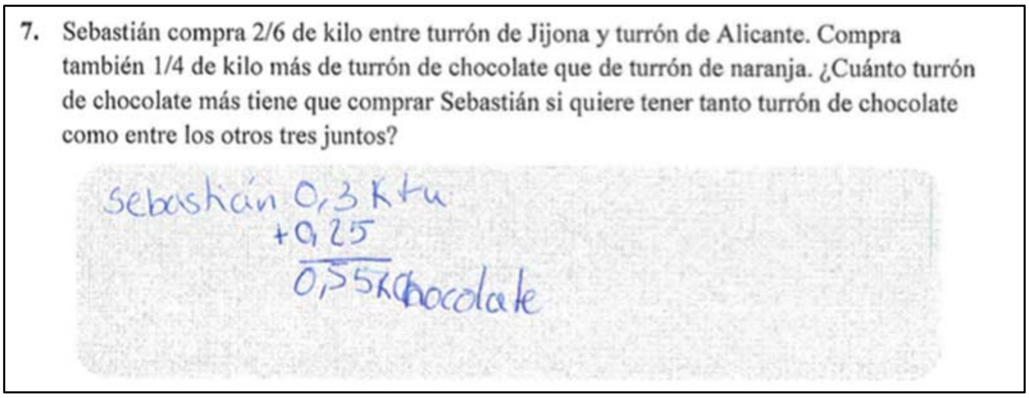

7. Sebastián compra 2/6 de kilo entre turrón de Jijona y turrón de Alicante. Compra también 1/4 de kilo más de turrón de chocolate que de turrón de naranja. ¿Cuánto turrón de chocolate más tiene que comprar Sebastián si quiere tener tanto turrón de chocolate como entre los otros tres juntos?

s $\frac{2}{6}$ k y $\frac{1}{4}$ + de turon.

$\frac{2}{6} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}$ K tiere que comprar.

Figura 5.113. Escaneo parcial de la prueba de la alumna 23. Resolución del problema Tipo 6.3 para fracciones.

La única estrategia de resolución encontrada fue de "tipo numérico", en concreto el paso de fracción a decimal. Se puede ver un ejemplo en la Figura 5.114. En este caso se observa además un fallo en operación.


7. Sebastián compra 2/6 de kilo entre turrón de Jijona y turrón de Alicante. Compra también 1/4 de kilo más de turrón de chocolate que de turrón de naranja. ¿Cuánto turrón de chocolate más tiene que comprar Sebastián si quiere tener tanto turrón de chocolate como entre los otros tres juntos?

Sebastián 0,3 K tu.
+0,25
0,55 K chocolate

Figura 5.114. Escaneo parcial de la prueba de la alumna 30. Resolución del problema Tipo 6.3 para fracciones.

Análisis de los resultados del Problema 8

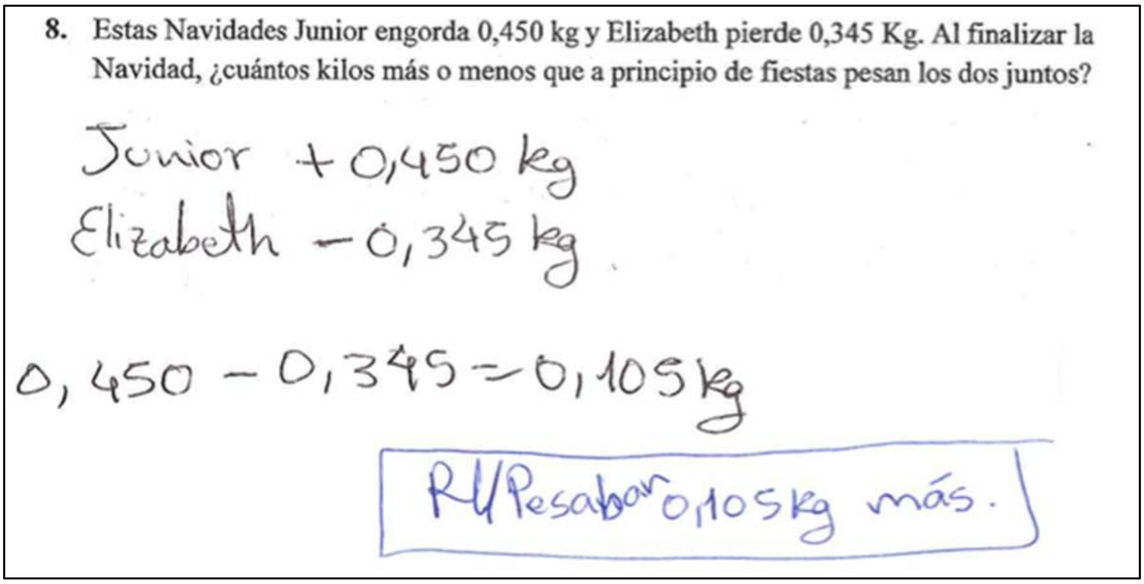
El Problema 8 se trataba de un problema de Tipo 10.6 (los datos son $T_1=T(s,s')$ y $T_2=T(s'',s''')$ donde s, s', s'' y s''' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $C_1=C(U(s,s''),U(s',s''')).$). El enunciado era: "Estas Navidades Junior engorda 0,450 kg y Elizabeth pierde 0,345 Kg. Al finalizar la Navidad, ¿cuántos kilos más o menos que a principio de fiestas pesan los dos juntos?"

En la Tabla 5.20 se muestran los resultados obtenidos, desde un punto de vista cuantitativo.

Blanco	Estructura	Operación	Algoritmo	Interpretación
5 (20%)	20 (80%)	13 (52%)	8 (40%)	6 (24%)

Tabla 5.20. Aciertos obtenidos en el Problema 8 de la Sesión 9.

Un 24% de los alumnos dio una respuesta totalmente satisfactoria al problema. En la Figura 5.115 se ve un ejemplo. Este porcentaje aumentó hasta el 80%, si nos centramos en la determinación de la estructura adecuada. En el caso de la operación acertaron un 52% de alumnos.


8. Estas Navidades Junior engorda 0,450 kg y Elizabeth pierde 0,345 Kg. Al finalizar la Navidad, ¿cuántos kilos más o menos que a principio de fiestas pesan los dos juntos?

Junior +0,450 kg
Elizabeth −0,345 kg

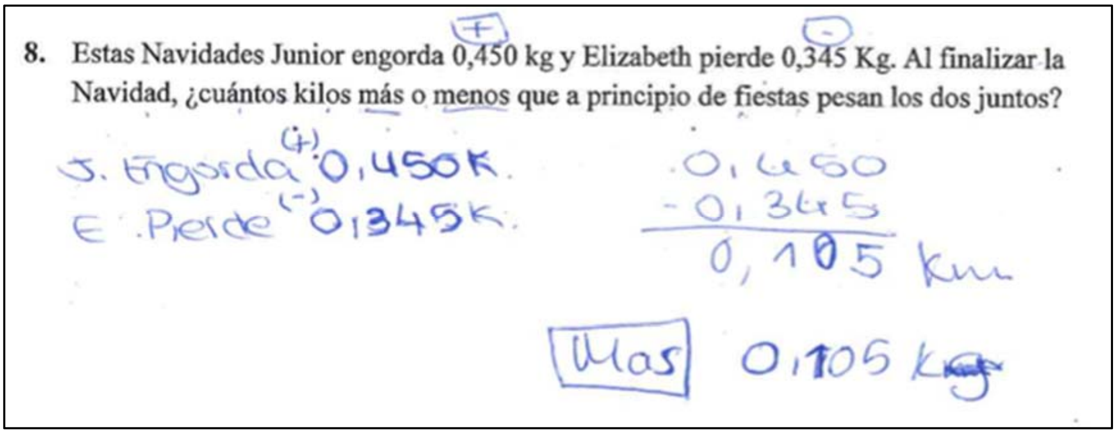
0,450 − 0,345 = 0,105 kg

R/ Pesaban 0,105 kg más.

Figura 5.115. Escaneo parcial de la prueba de la alumna 14. Resolución del problema Tipo 10.6 para decimales.

Hubo cinco fallos de algoritmo y dos de interpretación.

La única estrategia de resolución encontrada consistió en señalar en el enunciado los datos importantes. Además a estos datos les puso signo, lo que le ayudó a encontrar la solución del problema (Figura 5.116).


8. Estas Navidades Junior engorda (+) 0,450 kg y Elizabeth pierde (−) 0,345 Kg. Al finalizar la Navidad, ¿cuántos kilos más o menos que a principio de fiestas pesan los dos juntos?

J. Engorda (+) 0,450 K.
E. Pierde (−) 0,345 K.

0,450
−0,345
0,105 Km

Mas 0,105 kg

Figura 5.116. Escaneo parcial de la prueba de la alumna 4. Resolución del problema Tipo 10.6 para decimales.

Análisis de los resultados del Problema 9

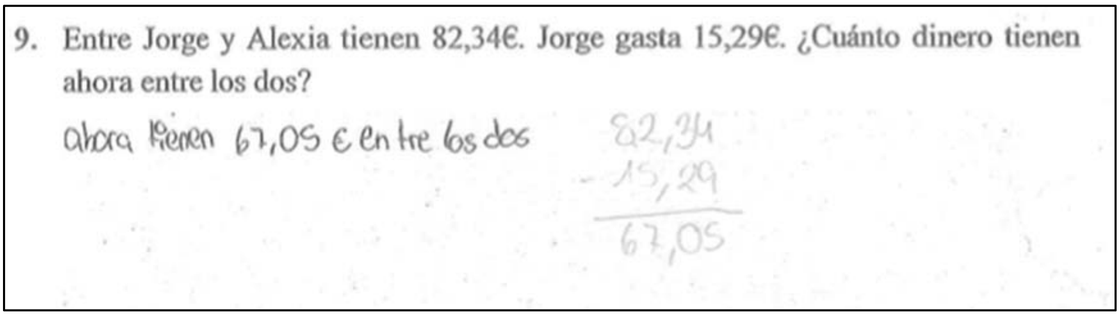
El Problema 9 se trataba de un problema de Tipo 7.1 (los datos U_1 =U(*s*,*s*') y T_1 =T(*s*,*s*'') donde *s*, *s*' y *s*'' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es U_2=*U*(*s*',*s*'')). El enunciado era: "Entre Jorge y Alexia tienen 82,34€. Jorge gasta 15,29€. ¿Cuánto dinero tienen ahora entre los dos?"

En la Tabla 5.21 se muestran los resultados obtenidos, desde un punto de vista cuantitativo.

Blanco	Estructura	Operación	Algoritmo	Interpretación
0 (0%)	25 (100%)	23 (92%)	20 (80%)	18 (72%)

Tabla 5.21. Aciertos obtenidos en el Problema 9 de la Sesión 9.

Como podemos ver, un 72% de los alumnos dio una respuesta totalmente satisfactoria al problema. En la Figura 5.117 se ve un ejemplo. Este porcentaje aumentaba hasta el 92%, si nos centramos en la determinación de la operación y hasta el 100% en la estructura adecuada para resolver el problema.


9. Entre Jorge y Alexia tienen 82,34€. Jorge gasta 15,29€. ¿Cuánto dinero tienen ahora entre los dos?

ahora tienen 67,05 € entre los dos

$$\begin{array}{r} 82,34 \\ -\ 15,29 \\ \hline 67,05 \end{array}$$

Figura 5.117. Escaneo parcial de la prueba del alumno 9. Resolución del problema Tipo 7.1 para decimales.

No hubo estrategias de resolución reseñables.

Análisis de los resultados del Problema 10

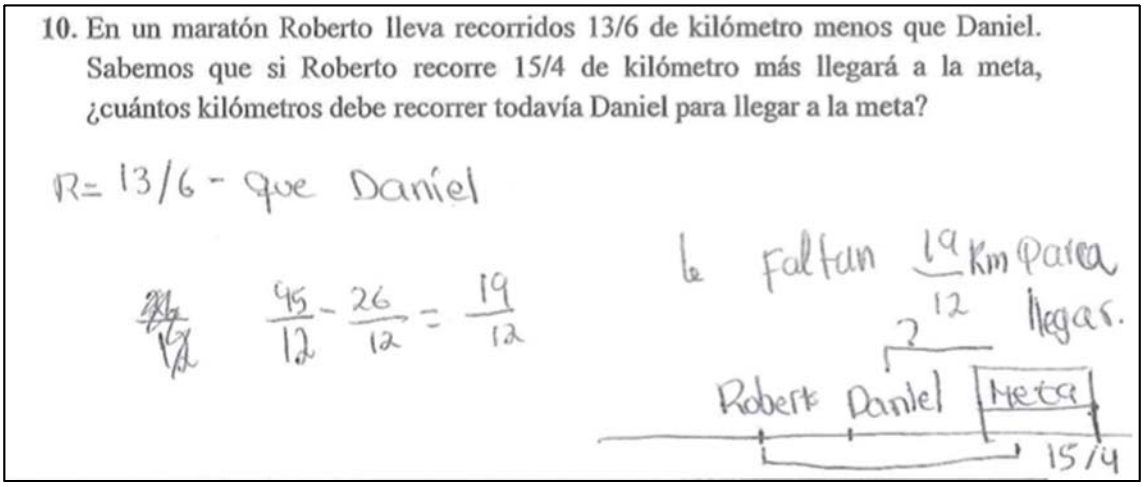
El Problema 10 se trataba de un problema de Tipo 9.2 (los datos son $C_1=C(s,s')$ y $T_1=T(s',s'')$ donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $T_2=T(s,s'')$). El enunciado era: “En un maratón Roberto lleva recorridos 13/6 de kilómetro menos que Daniel. Sabemos que si Roberto recorre 15/4 de kilómetro más llegará a la meta, ¿cuántos kilómetros debe recorrer todavía Daniel para llegar a la meta?”

En la Tabla 5.22 se muestran los resultados obtenidos, desde un punto de vista cuantitativo.

Blanco	Estructura	Operación	Algoritmo	Interpretación
5 (20%)	20 (80%)	18 (72%)	8 (32%)	8 (32%)

Tabla 5.22. Aciertos obtenidos en el Problema 10 de la Sesión 9.

Un 32% de alumnos resolvió e interpretó el problema de forma correcta. Se observa un ejemplo en la Figura 5.118.


10. En un maratón Roberto lleva recorridos 13/6 de kilómetro menos que Daniel. Sabemos que si Roberto recorre 15/4 de kilómetro más llegará a la meta, ¿cuántos kilómetros debe recorrer todavía Daniel para llegar a la meta?

R= 13/6 - que Daniel

$\frac{95}{12} - \frac{26}{12} = \frac{19}{12}$

le Faltan $\frac{19}{12}$ Km para llegar.

?

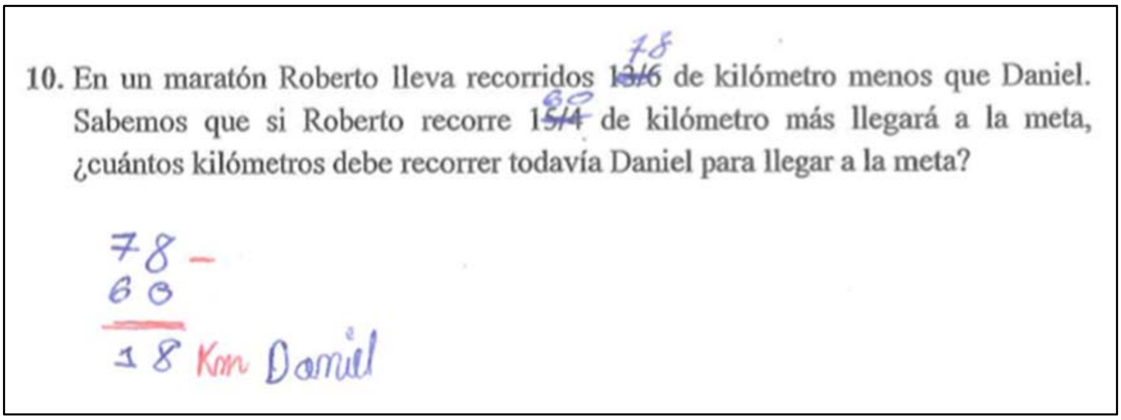
Robert Daniel Meta

15/4

Figura 5.118. Escaneo parcial de la prueba del alumno 13. Resolución del problema Tipo 9.2 para fracciones.

Cinco alumnos dejaron el ejercicio en blanco. No hubo fallos en estructura. Hubo dos fallos en operación. Es decir un 72% del alumnado fueron capaces de determinar correctamente estructura y operación.

Aunque la aplicación de los algoritmos no sea nuestro principal objetivo en esta propuesta, nos sorprende el 40% de errores en este apartado. Algunos alumnos seguían sin dominar el algoritmo de suma y resta de fracciones; pero en otros casos el fallo vino de la aplicación de la estrategia de resolución de trabajar con denominadores como en la Figura 5.119 (aunque en este caso tampoco estaban las fracciones bien reducidas a común denominador) lo que nos volvió a hacer replantearnos el uso de esta estrategia de resolución.


10. En un maratón Roberto lleva recorridos ~~13/6~~ 78 de kilómetro menos que Daniel. Sabemos que si Roberto recorre ~~15/4~~ 60 de kilómetro más llegará a la meta, ¿cuántos kilómetros debe recorrer todavía Daniel para llegar a la meta?

78 -
60
18 Km Daniel

Figura 5.119. Escaneo parcial de la prueba del alumno 10. Resolución del problema Tipo 9.2 para fracciones.

Además de la “estrategia numérica” que acabamos de ver de reducir a común denominador y trabajar con los numeradores, encontramos la del paso de fracción a decimal (Figura 5.120).

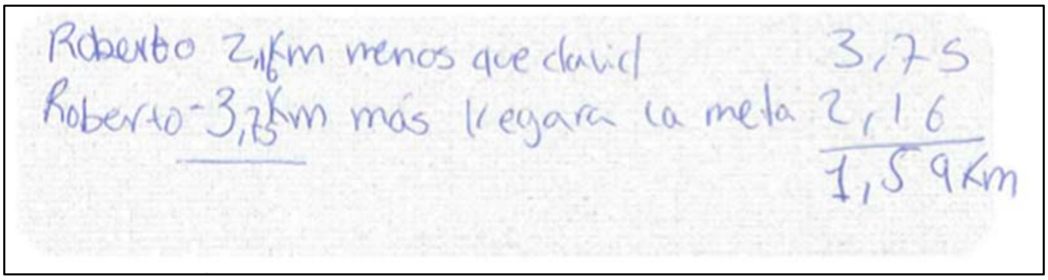


Figura 5.120. Escaneo parcial de la prueba de la alumna 30. Resolución del problema Tipo 9.2 para fracciones.

Entre las "estrategias gráficas" se encontraron varias representaciones gráficas (Figura 5.121).

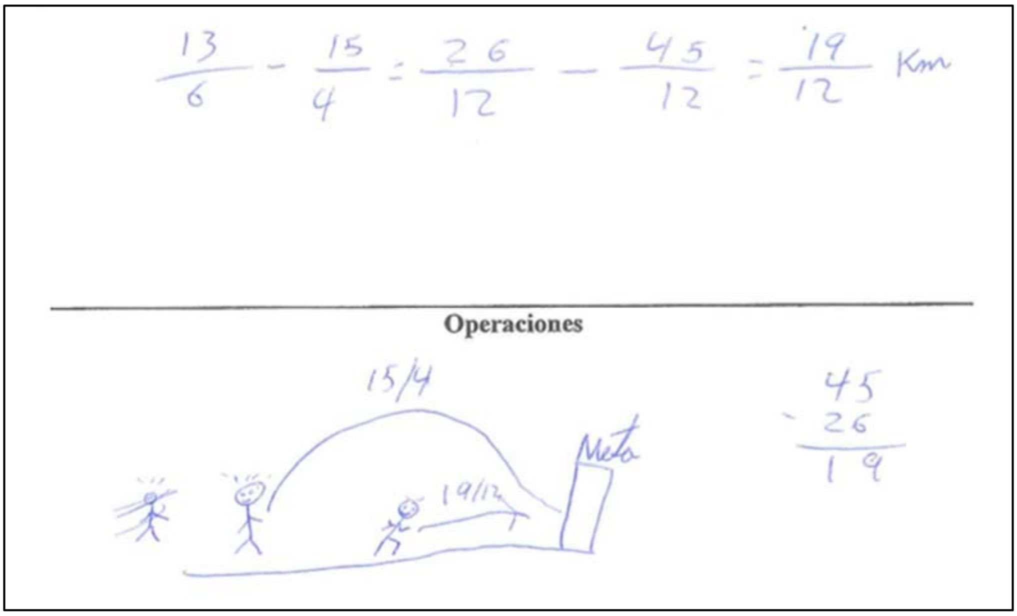


Figura 5.121. Escaneo parcial de la prueba del alumno 12. Resolución del problema Tipo 9.2 para fracciones.

5.4. Evaluación de la metodología de aula por parte de los alumnos

Tras la experiencia de la propuesta didáctica y tras haber trabajado con GI el resto del curso una vez cada dos semanas, pasamos a nuestros alumnos un cuestionario sobre su experiencia con los GI (ver Anexo IV). El cuestionario fue completado por 13 alumnos y se realizó en junio de 2018 entre las convocatorias ordinaria y extraordinaria. Al realizar el cuestionario con el curso tan avanzado contamos con muy pocas encuestas. Por un lado, dos de los alumnos que no habían venido durante la realización de los grupos continuaron sin venir en todo el curso, en el otro caso la alumna apareció por el aula en escasas ocasiones, otros tres de los alumnos tuvieron un absentismo muy elevado; además dos alumnos se dieron de baja del instituto. Por otro lado, alumnos que durante el curso presentaron un absentismo moderado, entre las dos convocatorias del mes de junio aumentaron alarmantemente su absentismo. En la Comunidad de Madrid en el curso 2017-2018 fue el primero en el que la convocatoria extraordinaria se adelantó a junio y no intuimos este absentismo.

En primer lugar (ver Figura 5.122) destacamos que a una gran mayoría de los alumnos (85%) les pareció bien o muy bien el trabajo en grupos interactivos.

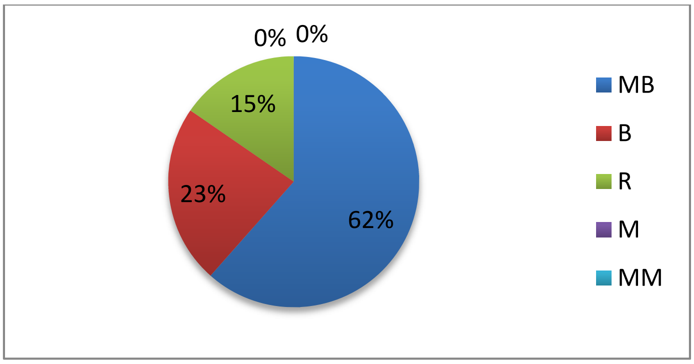


Figura 5.122. Opinión sobre la forma de trabajo por GI (MB: Muy Bien, B: Bien, R: Regular, M: Mal, MM: Muy mal).

Las razones esgrimidas por los alumnos (Figura 5.123) tienen que ver principalmente con la posibilidad de interactuar con los compañeros, así como con aspectos emocionales y afectivos.

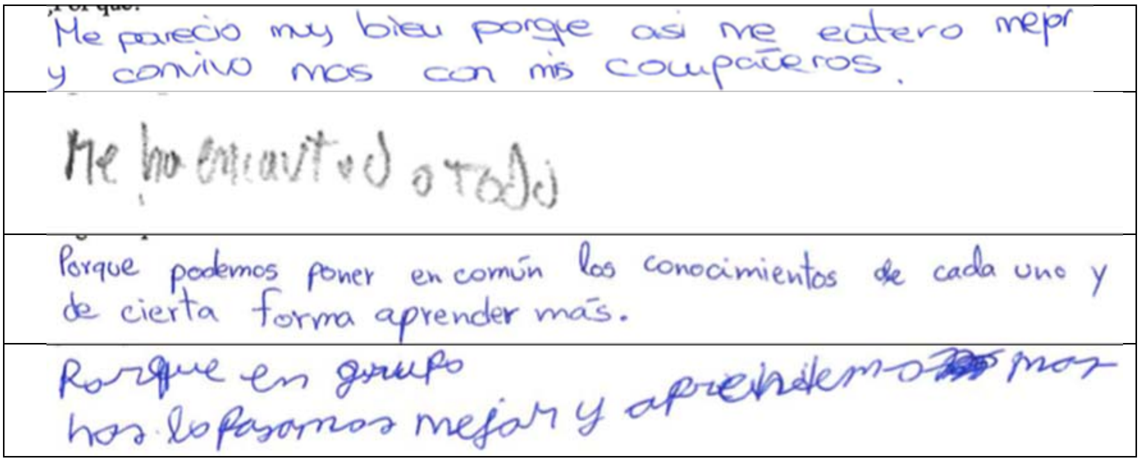


Figura 5.123. Respuestas de nuestros alumnos a la pregunta de por qué les había parecido muy bien, bien, regular, mal o muy mal el trabajo con GI.

Todos los alumnos respondieron que habían sido ayudados por los voluntarios y, como vemos en la Figura 5.124, estas ayudas tienen especialmente relación con aspectos anímicos y de atención más que con ayudas de carácter conceptual.

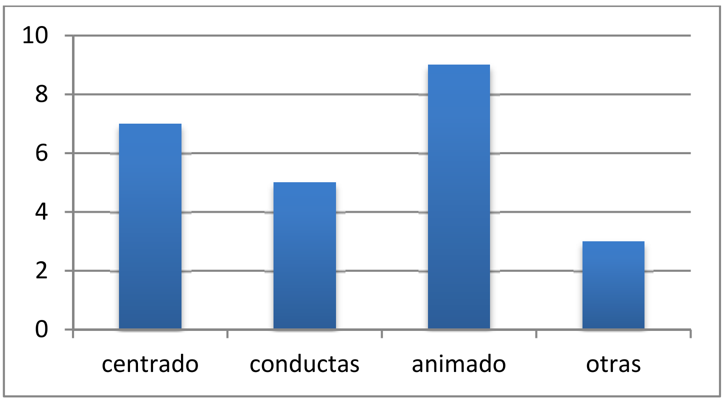


Figura 5.124. Respuestas de los alumnos sobre en qué les han ayudado los voluntarios.

No obstante, hay que señalar que este tipo de ayudas también existieron pese a no ser la tarea de los voluntarios (Figura 5.125).

☒Otras: y me han explicado cuando no sabía hacer lo
☒Otras: Cuando no entendía algo, me lo explicaban.

Figura 5.125. Respuestas de dos alumnos sobre en qué les habían ayudado los voluntarios.

Todos los alumnos sienten que han colaborado con el grupo. Los alumnos se sienten útiles, tanto por poder ayudar a sus compañeros explicándoles lo que ellos entienden y sus compañeros no, como por otros valores más ajenos a la clase, como hacer reír a los demás (Figura 5.126).

¿En qué? En todo en lo que podía
¿En qué? Ayudando e intentando resolver dudas de los demás integrantes del grupo.
En preguntar y realizar alguna que otra actividad y explicar lo que yo entendía.
¿En qué? En hacer reír a todos y a algunos problemas
¿En qué? En ayudar a los compañeros que no entendían mucho y mejorar como compañera

Figura 5.126. Respuestas de los alumnos sobre en qué habían colaborado con el grupo.

También ellos se han sentido ayudados. Solamente un alumno afirma que no le han ayudado sus compañeros y otro que "regular". El sentir que ayudan y que a su vez les ayudan despierta en ello sentimientos de solidaridad hacia sus compañeros. En la Figura 5.127 percibimos el agradecimiento que sienten unos por otros.

¿En qué? Resolviéndome dudas de cosas que no sabía.
En todo lo que necesitaba
¿En qué? En casi todo.

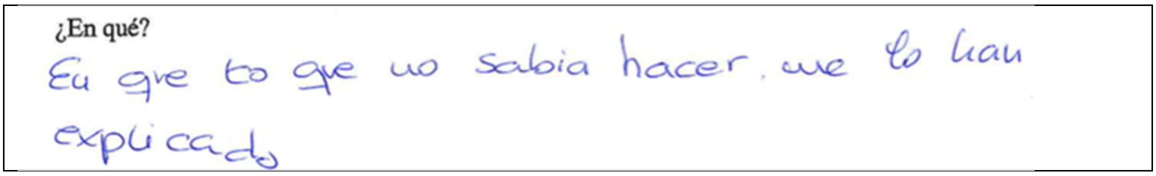

¿En qué?
En que lo que no sabia hacer. me lo han explicado

Figura 5.127. Respuestas de los alumnos sobre en qué les habían ayudado sus compañeros en los GI.

Al entrar a valorar los materiales utilizados (Figura 5.128), el trabajo con cajitas Liro y con euros les pareció fácil y útil a la mayoría de los encuestados. No así el trabajo con torres Lego que les pareció difícil a la mayoría y que varios afirmaron que no llegaron a entender

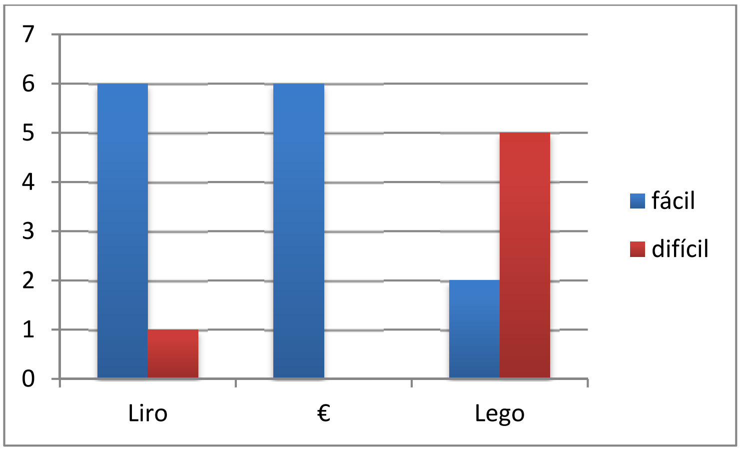


Figura 5.128. respuestas de los alumnos sobre con qué les pareció más fácil (en azul) o más difícil (en rojo) trabajar.

Después pedimos a nuestros alumnos que valoraran esta forma de trabajo, sólo un 8% de los alumnos considera esta forma de trabajo "Regular", el resto, buena, muy buena o excelente. (prácticamente la mitad de nuestros alumnos la consideran excelente) (Figura 5.129).

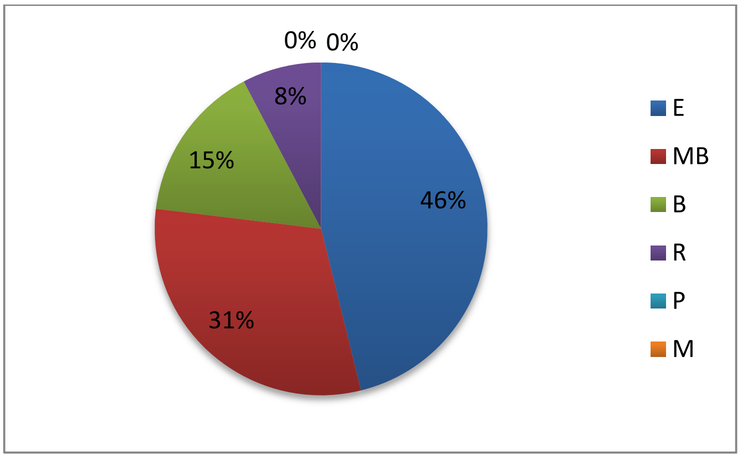


Figura 5.129 Nota que nuestros alumnos pondrían a esta forma de trabajo (E: excelente, MB: Muy Buena, B: Buena, R: Regular, P: Poco, M: Mala).

Por último, les pedimos *alguna idea o sugerencia para próximas sesiones*. Nos dieron sugerencias sobre la frecuencia de los GI (Figura 5.130):

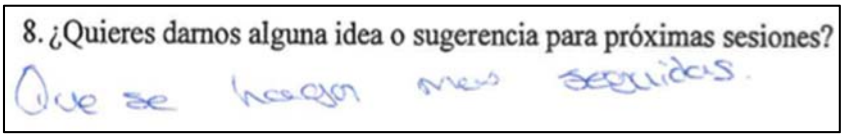

8. ¿Quieres darnos alguna idea o sugerencia para próximas sesiones?
Que se hagan mas seguidas.

Figura 5.130. sugerencia de un alumno sobre GI.

Recordamos que esta encuesta se realizó en junio y la propuesta se hizo entre noviembre y diciembre. Aunque durante la propuesta los GI se realizaban dos veces por semana, en lo que restó de curso se realizaron una vez cada 15 días.

También hubo sugerencias sobre su ubicación (Figuras 5.131 y 5.132):

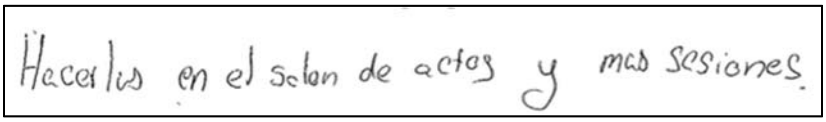

Hacerlos en el salon de actos y mas sesiones.

Figura 5.131. sugerencia de un alumno sobre GI.

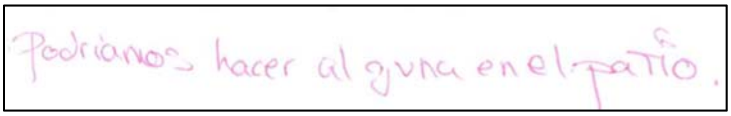

Podriamos hacer alguna en el patio.

Figura 5.132. sugerencia de un alumno sobre GI.

Y sobre la distribución de los alumnos, este alumno (Figura 5.133) nos recuerda que para que los grupos funcionen correctamente, es muy importante que sean lo más heterogéneos posible. también nos recuerda lo importantes que pueden ser los grupos en la mejora de la convivencia.

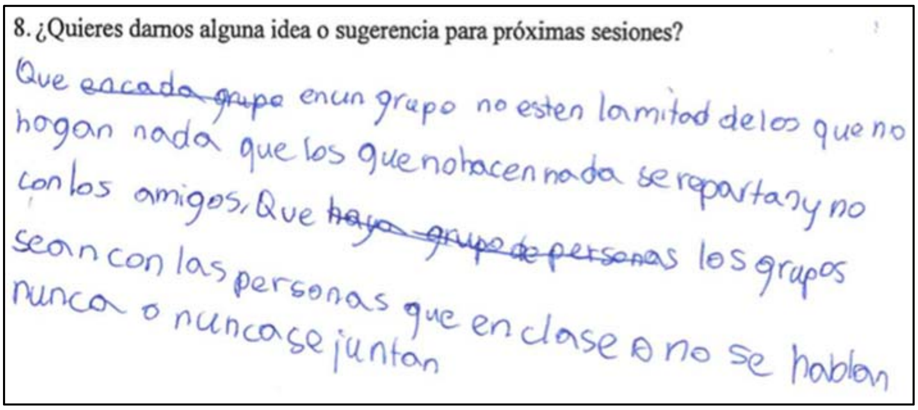

8. ¿Quieres darnos alguna idea o sugerencia para próximas sesiones?
Que ~~encada grupo~~ encun grupo no esten lamitad delos que no
hagan nada que los que nohacen nada se repartan y no
con los amigos, Que ~~haya grupo de personas~~ los grupos
sean con las personas
nunca o nunca se juntan que en clase o no se hablan

Figura 5.133. sugerencia de un alumno sobre GI.

Pero la mayoría no sugiere cambios (Figura 5.134):

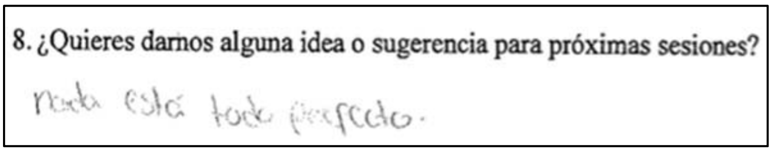

8. ¿Quieres darnos alguna idea o sugerencia para próximas sesiones?
nada está todo perfecto.

Figura 5.134. sugerencia de un alumno sobre GI.

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES

En este último capítulo se van a presentar algunas conclusiones finales en relación con el trabajo realizado. Se redactarán siguiendo la estructura de los objetivos específicos que se fijaron inicialmente, y, para facilitar la lectura de las mismas, se vuelven a escribir cada uno de los objetivos y seguidamente las conclusiones asociadas a este. Además se hace una discusión de las mismas considerando las aportaciones de estas en relación con los antecedentes que se han tenido en cuenta en esta investigación. Así, en cada uno de ellos, se confirman las afirmaciones efectuadas en investigaciones pretéritas y se detallan los hallazgos que se han producido en el desarrollo de la investigación y que se han confirmado en el análisis de los datos que se ha llevado cabo en la misma.

Tras la redacción de las conclusiones se presenta un apartado en el que se resumen de forma descriptiva las opiniones de los alumnos sobre la metodología que se ha desarrollado en el aula. Asimismo se destacan las aportaciones de esta investigación y se finaliza esta memoria haciendo una sucinta exposición de las perspectivas de futuro que quedan abiertas con este trabajo.

6.1. Conclusiones en relación al primer objetivo de investigación

El primer objetivo específico fijado fue el siguiente:

> O1. *Desarrollar una clasificación de problemas aditivos de una etapa que extienda a las clasificaciones clásicas considerando la presencia de cantidades desconocidas que juegan un papel aunque no puedan calcularse.*

En relación con este objetivo, se puede señalar que la principal aportación teórica de esta tesis doctoral ha consistido en el desarrollo de una clasificación de problemas aditivos de una etapa.

Si bien nuestra clasificación, como no podría ser de otra forma, se basa, en multitud de trabajos previos (Carpenter y Moser, 1982; Socas, Hernández y Noda, 1998, entre otros), —consideramos las mismas categorías semánticas, nos fijamos en la posición de la incógnita, etc.—, en esta investigación se aprecian importantes elementos diferenciadores. El principal consiste en considerar como una variable esencial los diferentes significados que pueden tener las cantidades implicadas y, además, tomar en consideración la existencia de cantidades desconocidas que no pueden calcularse y que intervienen en el problema.

Estos dos aspectos dan lugar a una clasificación mucho más amplia que las presentes en la literatura y permite la consideración de problemas que, pese a requerir una única operación para su resolución, tienen una mayor demanda cognitiva. De hecho, consideramos que estos problemas tienen interés en sí mismos, pues permiten consolidar la parte aritmética antes de introducir conceptos más abstractos como el álgebra o el análisis matemático.

A la luz de nuestra clasificación, y pese al interés formativo que tienen los problemas aditivos de una etapa de carácter más complejo, observamos que tanto en el currículo actual de la Comunidad de Madrid como en los libros de texto sólo aparecen problemas de los tipos más sencillos (de hecho esencialmente solo en Primaria). Constatamos así que se dejan de lado múltiples tipos de problemas cuyo trabajo en el aula puede resultar de gran valor tanto en Primaria como también en Secundaria.

En consecuencia, pensamos que la clasificación que hemos desarrollado es valiosa no solo desde un punto de vista teórico, sino que puede resultar de utilidad para detectar problemas especialmente interesantes y trabajarlos de manera específica en el aula.

6.2. Conclusiones en relación al segundo objetivo de investigación

El segundo objetivo específico fijado previamente en esta investigación fue el siguiente:

> O2. *Determinar empíricamente el grado de dificultad de los distintos tipos de problemas y conocer las estrategias puestas en juego espontáneamente por los alumnos al enfrentarse a ellos.*

En relación con este objetivo, se llevaron a cabo una serie de pruebas en las que se plantearon problemas de los 33 tipos identificados y en los que los datos eran bien números naturales o bien racionales (tanto en representación decimal como fraccionaria).

Se ha obtenido un 50,51% de acierto medio entre todos los tipos de problemas y todos los tipos de números lo cual corrobora la conclusión de Orrantia et al. (2012) de que los alumnos con dificultades muestran un uso poco eficiente de estrategias relacionados con propiedades aditivas.

En el Apartado 1.3.1 nos planteábamos la discontinuidad en el paso de naturales a fracciones y decimales (Gómez, 2011) y nos propusimos cuantificar dicha dificultad. El porcentaje de acierto, como vimos en el Capítulo 4, eran generalmente inferior cuando los problemas planteados involucraban números decimales o fraccionarios. El acierto en números naturales alcanzaba, de media de todos los tipos de problemas, un 64% en el caso de los números decimales descendía al 52% y en el caso de las fracciones al 33%. Sin embargo, en muchas ocasiones, este descenso en el porcentaje de acierto se debía a problemas de los alumnos al aplicar los algoritmos de las operaciones. Si dejamos de lado la influencia de esa variable podemos pensar que un buen indicador de la dificultad propia de cada tipo de problema viene dado por los resultados obtenidos con números naturales. En la Tabla 6.1 recogemos el porcentaje de acierto en cada tipo de problema en el caso de números naturales.

Tipo	Acierto	Tipo	Acierto
T1	96,97	**T6**	25,49
1.1	100	**6.1**	41,18
1.2	90,91	**6.2**	17,65
1.3	100	**6.3**	17,65
T2	84,72	**T7**	82,35
2.1	83,33	**7.1**	82,35
2.2	94,44	**T8**	26,22
2.3	77,78	**8.1**	16,67
2.4	83,33	**8.2**	43,75
T3	48,89	**8.3**	5,56
3.1	100	**8.4**	38,89
3.2	20	**T9**	67,69
3.3	26,67	**9.1**	72,22
T4	72,22	**9.2**	63,16
4.1	72,22	**T10**	90,18
T5	48,57	**10.1**	89,47
5.1	35,71	**10.2**	100
5.2	35,71	**10.3**	100
5.3	64,29	**10.4**	100
5.4	42,86	**10.5**	89,47
5.5	64,29	**10.6**	68,42
		10.7	78,95

Tabla 6.1. Porcentaje de acierto en las pruebas diagnósticas en los problemas con números naturales.

Como podemos ver, los problemas con una mayor dificultad fueron, por orden, los de Tipo 6 (los datos son una unión y una comparación de cantidades simples) con un 25,5% de acierto global, los de Tipo 8 (los datos son dos comparaciones de cantidades simples) con un 26,2%, los de Tipo 5 (los datos son dos uniones de cantidades simples) con un 48,6%, los de Tipo 3 (los datos son una cantidad simple y una comparación entre cantidades simples) con un 48,9% y los de Tipo 9 (los datos son una comparación entre cantidades simples y una transformación de cantidades simples) con un 67,7%. El resto de problemas tienen un porcentaje de acierto superior al 80%.

Si concretamos en subtipos, llaman la atención los problemas de Tipo 6.2 (los datos son $U_1=U(s, s')$ y $C_1=C(s'', s''')$ donde s, s' y s'' y s''' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $C_2=C(s'', U(s''', U_1))$) y 6.3 (los datos son $U_1=U(s, s')$ y $C_1=C(s'', s''')$ donde s, s' y s'' y s''' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $T_2=T(s'', U(s''', U_1))$), ambos por debajo del 18% de acierto y los de Tipo 3.2 (los datos son S_1 y $C_1=C(s, s')$ donde s y s' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $C_2=C(U(S_1, s), s')$) con un 20%. Un ejemplo de problema de Tipo 6.2 sería el siguiente: "Entre Juan y Luis tienen 6 canicas. Ana tiene 2 canicas más que María. ¿Cuántas canicas más que María tienen entre Juan, Luis y Ana?". Del mismo modo, un ejemplo de problema de Tipo 3.2 sería el siguiente: "Juan tiene 3 canicas. Ana tiene 2 canicas menos que Luis. ¿Cuántas canicas más o menos que Ana tienen entre Juan y Luis?".

En el caso de los problemas de Tipo 6.2, por ejemplo, pensamos que el bajo porcentaje de acierto puede deberse a que todas las cantidades implicadas son relacionales y existen muchas cantidades simples desconocidas que no pueden determinarse. Así, en el ejemplo que hemos dado, no se conoce el número de canicas que tiene ninguno de los actores del problema lo que puede ocasionar dificultades que, unidas a un enunciado relativamente complejo, quizás expliquen el bajo porcentaje de acierto. En este sentido, en el Problema 3.2, que tiene un porcentaje ligeramente superior de acierto, sí se conoce la cantidad de canicas de uno de los actores. Así coincidimos con Castillo y Ramírez (2013) que ya concluían que los alumnos presentaban dificultades cuando no podían descubrir las relaciones entre los datos y la incógnita y que en estos casos operaban de manera irreflexiva. No obstante, esta es solo una de las posibles variables explicativas ya que los problemas de Tipo 9 comparten estos rasgos y en ellos se ha obtenido un porcentaje de acierto razonablemente aceptable.

Por último, en cuanto a las estrategias utilizadas espontáneamente por los alumnos, podemos señalar que son prácticamente inexistentes. Esto pone de manifiesto un cierto abandono de los procesos de resolución de problemas. Cabe destacar que durante la investigación detectamos que apenas aparecen representaciones gráficas, que en algunos casos podrían ayudar a abordar el problema. Algunos alumnos recurren al lenguaje algebraico de forma automática, mostrando el impacto, en cierto modo negativo, que tiene la introducción del lenguaje algebraico para alumnos que no se encuentran cómodos resolviendo problemas aritméticos de cierta dificultad. Como ya hemos indicado, si se motiva a los estudiantes a utilizar métodos aritméticos en lugar de algebraicos se pueden lograr mejores resultados y mejores modos de actuación hacia el aprendizaje de las matemáticas, hecho que corrobora la apreciación ya observada por Pérez et al. (2018).

6.3. Conclusiones en relación al tercer objetivo de investigación

El tercer objetivo marcado para esta tesis fue el siguiente:

> O3. *Diseñar una experiencia didáctica para trabajar problemas aditivos de una etapa "complejos" con alumnos de especial dificultad de 2º de E.S.O. haciendo uso de una metodología basada en los grupos interactivos.*

Desde el punto de vista de la práctica educativa, el segundo aporte principal de esta tesis consiste precisamente en el diseño de una propuesta didáctica con problemas aditivos de una etapa en 2º de la ESO. En la bibliografía consultada los problemas aditivos de una etapa suelen ir vinculados a la Educación Primaria (García & Blanco, 2016). Este trabajo los lleva hasta la Educación Secundaria.

Decidimos trabajar, además, en un centro de especial dificultad. Más allá de tratarse del centro de trabajo de la autora de esta memoria, pensamos que es muy importante el trabajo con este tipo de alumnos ya que uno de los objetivos fundamentales, si no el principal, de la Educación Matemática es contribuir a la formación integral de todos los ciudadanos.

Por otro lado, otro aspecto importante que se ha tenido en cuenta al diseñar la propuesta ha sido que su duración no fuera excesiva. Pensamos que este es un elemento decisivo a la hora de que la propuesta pueda ser efectivamente implementada en un contexto de aula. En definitiva, no hemos pretendido llevar a cabo una investigación en una situación experimental, sino en una situación real.

Para facilitar el trabajo con este tipo de alumnos, hemos optado por adoptar una metodología de trabajo, los grupos interactivos, que contribuye al trabajo inclusivo. Esta metodología, que está ampliamente validada, no ha sido utilizada con demasiada frecuencia en trabajos dentro del ámbito específico de la Educación Matemática. Pero sí que ha sido empleada en numerosas ocasiones en centros de especial dificultad (Iglesias et al., 2013).

Pensamos que la propuesta diseñada junto con la metodología de trabajo en el aula que hemos adoptado, contribuyen a que nuestros alumnos aborden problemas de una demanda cognitiva elevada para algunos de ellos (en comparación con los problemas aditivos de una etapa que se encuentran en el currículo o en los libros de texto) sin necesidad de recurrir al lenguaje algebraico o de introducir problemas complejos con más de una etapa.

6.4. Conclusiones en relación al cuarto objetivo de investigación

El cuarto objetivo específico fijado previamente en esta investigación fue el siguiente:

> O4. *Implementar la secuencia didáctica anterior y analizar su impacto sobre el éxito de los alumnos al resolver problemas aditivos de una etapa "complejos" y sobre las estrategias utilizadas por éstos.*

En primer lugar, cabe señalar que la implementación de la secuencia didáctica ha supuesto una mejora en el porcentaje de acierto de los alumnos al abordar los problemas con los he se ha trabajado. García y Blanco (2016) ya adelantaron que la realización de intervenciones didácticas mejora los resultados obtenidos por los alumnos y lo corrobora esta investigación con una intervención completamente original. Para poder llevar a cabo la comparativa, en la Tabla 6.2 se presentan los porcentajes de acierto total (es decir, en cuanto a la identificación de la estructura, la selección de la operación adecuada y la aplicación correcta del algoritmo correspondiente) en los tipos de problemas que formaron parte de la prueba final del segundo ciclo y los mismos tipos de problemas en las pruebas diagnósticas previas.

Como podemos apreciar, salvo en los problemas de Tipo 2.1 con fracciones (en lo que se ha mantenido la misma tasa de éxito), en todos los demás se ha producido un claro aumento. Es remarcable el hecho de que, en las pruebas diagnósticas, algunos de estos problemas no fueron resueltos correctamente de forma completa por ningún alumno; mientras que en la prueba que se realizó tras la implementación de la propuesta en todos los casos hubo alumnos capaces de resolver esos problemas.

Problema	Previo	Post propuesta
2.1 fracciones	50 %	52 %
5.1 naturales	36 %	80 %
6.1 decimales	12 %	52 %
8.2 fracciones	0 %	40 %
8.3 naturales	6 %	60 %
3.2 decimales	0 %	16 %
6.3 fracciones	0 %	24 %
10.6 decimales	0 %	20 %
7.1 decimales	41 %	80 %
9.2 fracciones	17 %	32 %

Tabla 6.2. Porcentaje de acierto en algoritmo en las pruebas previas a la propuesta didáctica y en la prueba tras la propuesta.

Como hemos dicho, estos porcentajes son de acierto completo. No obstante, resulta conveniente realizar un análisis más detallado; sobre todo en aquellos casos en los que la mejora no ha sido demasiado elevada. De este modo, podremos determinar en qué punto se han producido los errores. Así pues, vamos a realizar una comparativa de cada uno de los problemas que aparecen en la prueba tras la propuesta y esos mismos problemas en las pruebas diagnósticas:

El Problema 1 se trataba de un problema de Tipo 2.1 (Los datos son S_1 y $U_1=U(S_1,S_2)$ y la incógnita es S_2) con fracciones.

En la Tabla 6.2 encontramos los resultados de este problema en la prueba previa y en la Tabla 6.3 se presentan estos mismos resultados tras la propuesta. Si realizamos una comparativa (Figura 6.1) vemos que los problemas en blanco bajan del 39% al 12% y suben los aciertos en los tres apartados, estructura, operación y algoritmo. Mejora notable en estructura y operación. Ligera mejoría en algoritmo.

Blanco	Estructura	Operación	Algoritmo
39%	61%	61%	50%

Tabla 6.2. Aciertos obtenidos en el problema 2.1 en la prueba previa (en porcentaje).

Blanco	Estructura	Operación	Algoritmo
12%	88%	84%	52%

Tabla 6.3. Aciertos obtenidos en el problema 2.1 tras la propuesta didáctica (en porcentaje).

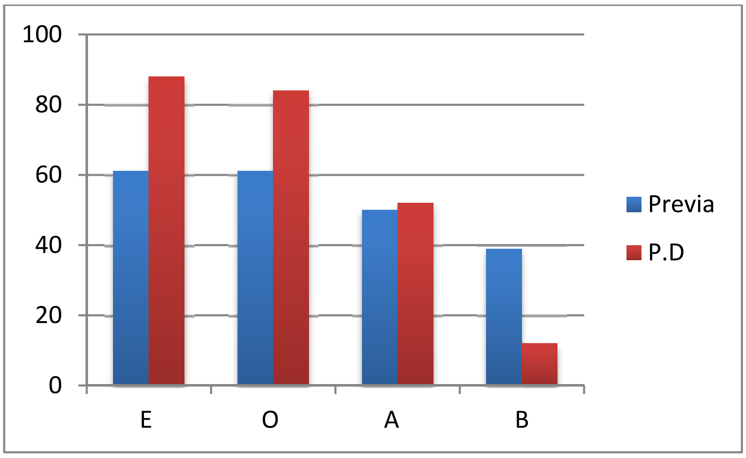


Figura 6.1. Gráfica comparativa de los aciertos en estructura (E), operación (O), algoritmo (A) y ejercicios en blanco (B) entre la prueba previa y la prueba tras la propuesta didáctica en el problema Tipo 2.1.

El Problema 2 se trataba de un problema de Tipo 5.1 (los datos son $U_1=U(s,s')$ y $U_2=U(s,s'')$ donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas y la incógnita es $C_1=C(s',s'')$) con números naturales.

Al comparar la prueba previa (Tabla 6.4) con la prueba post propuesta (Tabla 6.5) vemos que bajan los problemas en blanco y mejoran los resultados tanto en estructura, como en operación, como en algoritmo. Nos parece reseñable que los aciertos en algoritmo hayan pasado de un 36% a un 80% (Figura 6.2).

Blanco	Estructura	Operación	Algoritmo
21%	71%	50%	36%

Tabla 6.4. Aciertos obtenidos en el problema 5.1 en la prueba previa (en porcentaje).

Blanco	Estructura	Operación	Algoritmo
8%	84%	84%	80%

Tabla 6.5. Aciertos obtenidos en el problema 5.1 tras la propuesta didáctica (en porcentaje)..

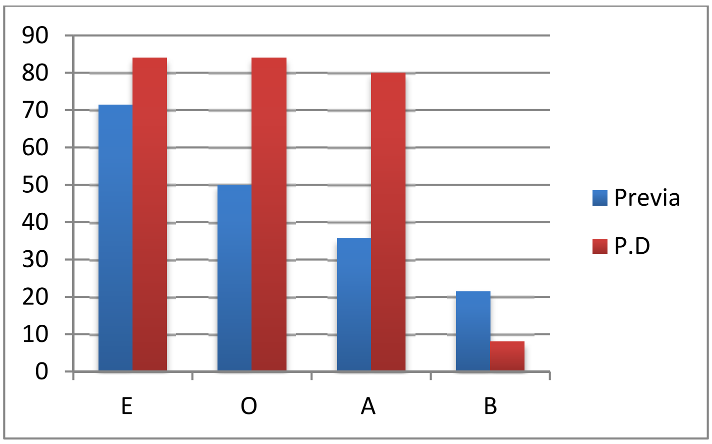


Figura 6.2. Comparativa de los aciertos en estructura (E), operación (O), algoritmo (A) y ejercicios en blanco (B) entre la prueba previa y la prueba tras la propuesta didáctica en el problema Tipo 5.1.

El Problema 3 se trataba de un problema de Tipo 6.1 (los datos son $U_1=U(s,s')$ y $C_1=C(s,s'')$ donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas y la incógnita es $U_2=U(s',s'')$) con números decimales.

Si comparamos los resultados de la prueba previa (Tabla 6.6) con los de la prueba tras la propuesta (Tabla 6.7) observamos que los ejercicios en blanco caen de un 41% a un 12% y que el acierto en estructura sube de un 24% a un 84%. En consecuencia, en operación y algoritmo también aumentan notablemente los resultados (Figura 6.3).

Blanco	**Estructura**	**Operación**	**Algoritmo**
41%	24%	12%	12%

Tabla 6.6. Aciertos obtenidos en el problema 6.1 en la prueba previa (en porcentaje).

Blanco	**Estructura**	**Operación**	**Algoritmo**
12%	84%	60%	52%

Tabla 6.7. Aciertos obtenidos en el problema 6.1 tras la propuesta didáctica (en porcentaje).

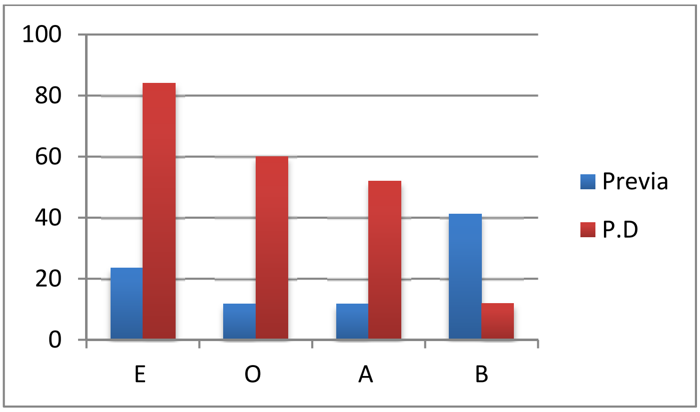


Figura 6.3. Comparativa de los aciertos en estructura (E), operación (O), algoritmo (A) y ejercicios en blanco (B) entre la prueba previa y la prueba tras la propuesta didáctica en el problema Tipo 6.1.

El Problema 4 se trataba de un problema de Tipo 8.2 (Los datos son $C_1=C(s,s')$ y $C_2=C(s,s'')$ donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas y la incógnita es $T_1=T(s',s'')$) con fracciones.

Si comparamos la prueba previa (tabla 6.8) con la prueba tras la propuesta (tabla 6.9) observamos mejoras en todos los apartados; pero sobre todo nos gustaría señalar que en la prueba previa ningún alumno completó correctamente el ejercicio y tras la propuesta un 40% de ellos sí lo hicieron (Figura 6.4).

Blanco	**Estructura**	**Operación**	**Algoritmo**
44%	56%	11%	0%

Tabla 6.8. Aciertos obtenidos en el problema 8.2 en la prueba previa (en porcentaje).

Blanco	Estructura	Operación	Algoritmo
28%	72%	56%	40%

Tabla 6.9. Aciertos obtenidos en el problema 8.2 tras la propuesta didáctica (en porcentaje).

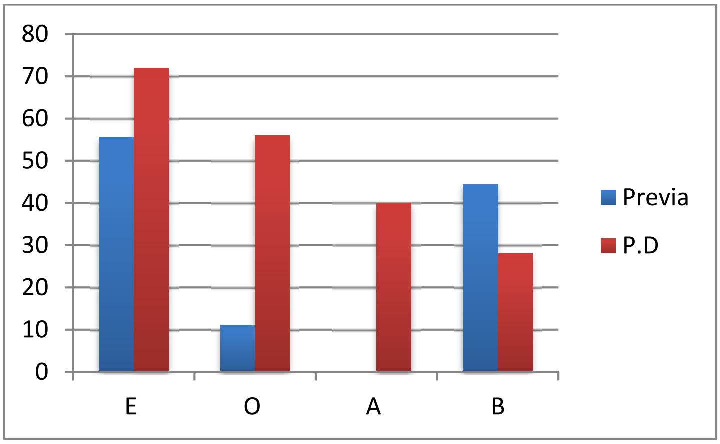


Figura 6.4. Comparativa de los aciertos en estructura (E), operación (O), algoritmo (A) y ejercicios en blanco (B) entre la prueba previa y la prueba tras la propuesta didáctica en el problema Tipo 8.2.

El Problema 5 se trataba de un problema de Tipo 8.3 (Los datos son $C_1=C(s,s')$ y $C_2=C(s'',s''')$ donde s, s', s'' y s''' son cantidades simples desconocidas y la incógnita es $C_3=C(U(s,s''),U(s',s''')))$ con números naturales.

En la tabla 6.10 podemos ver los resultados del problema Tipo 8.3 para números naturales en la prueba previa, y en la Tabla 6.11 los resultados de ese mismo tipo de problema tras la propuesta. Como se puede apreciar comparando las tablas, y el la Figura 6.5 este los resultados mejoraron en todos los apartados de forma muy considerable.

Blanco	Estructura	Operación	Algoritmo
61%	33%	11%	6%

Tabla 6.10. Aciertos obtenidos en el problema 8.3 en la prueba previa (en porcentaje).

Blanco	Estructura	Operación	Algoritmo
20%	80%	60%	60%

Tabla 6.11. Aciertos obtenidos en el problema 8.3 tras la propuesta didáctica (en porcentaje).

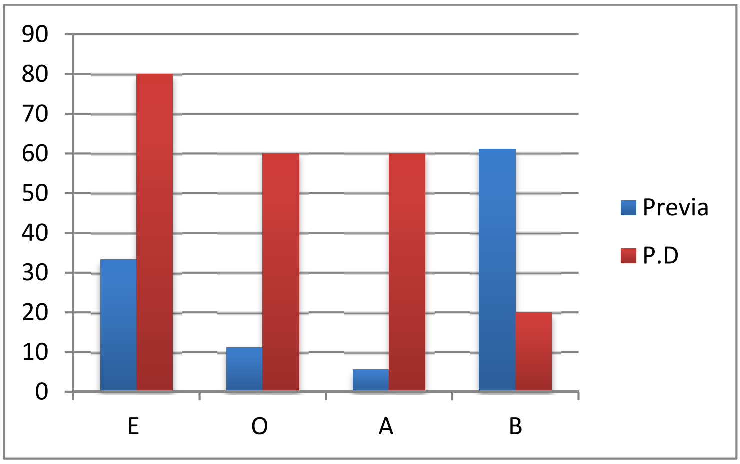


Figura 6.5. Comparativa de los aciertos en estructura (E), operación (O), algoritmo (A) y ejercicios en blanco (B) entre la prueba previa y la prueba tras la propuesta didáctica en el problema Tipo 8.3.

El Problema 6 se trataba de un problema de Tipo 3.2 (Los datos son S_1 y $C_1=C(s,s')$ donde s y s' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $C_2=C(U(S_1,s),s'))$ con números decimales.

En la Figura 6.6 podemos ver que los resultados no han sido buenos ni en la prueba previa (Tabla 6.12) ni tras la propuesta (Tabla 6.13); pero dentro de estos resultados observamos bastante mejoría en estructura. En operación y algoritmo pasamos de ningún acierto a un 16% de ellos.

Blanco	**Estructura**	**Operación**	**Algoritmo**
86%	14%	0%	0%

Tabla 6.12. Aciertos obtenidos en el problema 3.2 en la prueba previa (en porcentaje).

Blanco	**Estructura**	**Operación**	**Algoritmo**
24%	76%	16%	16%

Tabla 6.13. Aciertos obtenidos en el problema 3.2 tras la propuesta didáctica (en porcentaje).

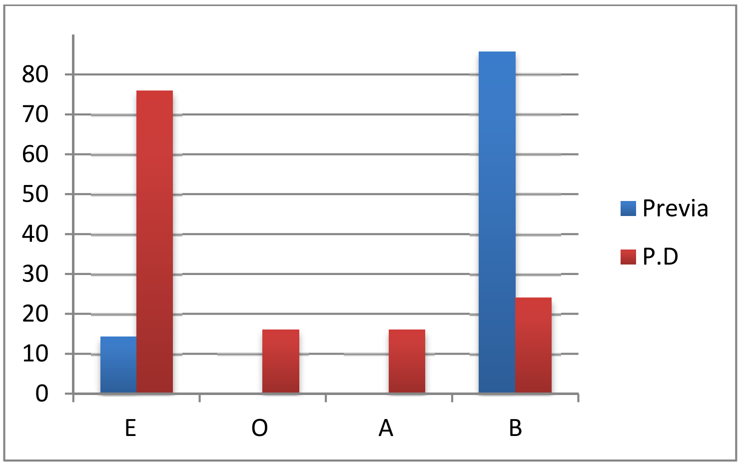


Figura 6.6. Comparativa de los aciertos en estructura (E), operación (O), algoritmo (A) y ejercicios en blanco (B) entre la prueba previa y la prueba tras la propuesta didáctica en el problema Tipo 3.2.

El Problema 7 se trataba de un problema de Tipo 6.3 (Los datos son $U_1=U(s,s')$ y $C_1=C(s'',s''')$ donde s, s' y s'' y s''' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $T_2=T(s'',U(s''',U_1)))$ con fracciones.

Entre los resultados de la prueba previa (Tabla 6.14) y la prueba post propuesta (Tabla 6.15) encontramos una amplia mejora en estructura, operación y algoritmo; aunque sólo un 24 % de alumnos resuelve correctamente el algoritmo (Figura 6.7).

Blanco	Estructura	Operación	Algoritmo
78%	22%	0%	0%

Tabla 6.14. Aciertos obtenidos en el problema 6.3 en la prueba previa (en porcentaje).

Blanco	Estructura	Operación	Algoritmo
36%	64%	36%	24%

Tabla 6.15. Aciertos obtenidos en el problema 6.3 tras la propuesta didáctica (en porcentaje).

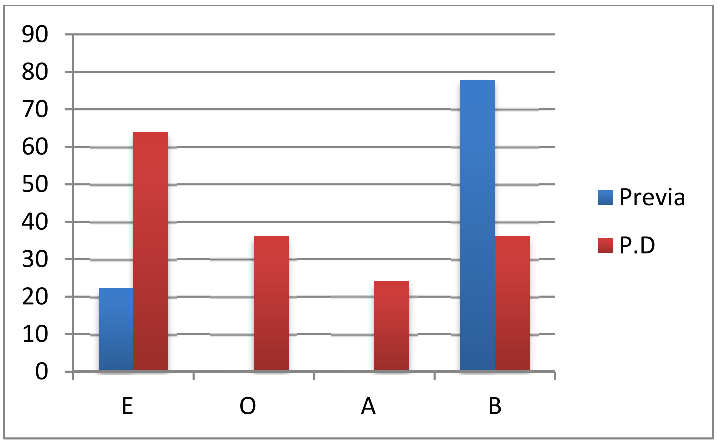


Figura 6.7. Comparativa de los aciertos en estructura (E), operación (O), algoritmo (A) y ejercicios en blanco (B) entre la prueba previa y la prueba tras la propuesta didáctica en el problema Tipo 6.3.

El Problema 8 se trataba de un problema de Tipo 10.6 (Los datos son $T_1=T(s,s')$ y $T_2=T(s'',s''')$ donde s, s', s'' y s''' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $C_1=C(U(s,s''),U(s',s''')).)$ con números decimales.

Entre los resultados de la prueba previa y la prueba post propuesta (Tablas 6.16 y 6.17) encontramos una amplia mejora en estructura, operación y algoritmo; pero los resultados siguen siendo bastante mediocres. Solo un 20 % de alumnos resuelve correctamente el algoritmo (Figura 6.8).

Blanco	Estructura	Operación	Algoritmo
78%	22%	0%	0%

Tabla 6.16. Aciertos obtenidos en el problema 10.6 en la prueba previa (en porcentaje).

Blanco	Estructura	Operación	Algoritmo
36%	56%	32%	20%

Tabla 6.17. Aciertos obtenidos en el problema 10.6 tras la propuesta didáctica (en porcentaje).

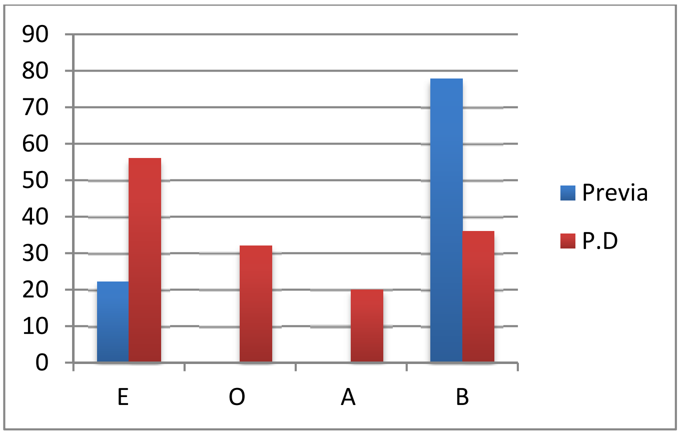


Figura 6.8. Comparativa de los aciertos en estructura (E), operación (O), algoritmo (A) y ejercicios en blanco (B) entre la prueba previa y la prueba tras la propuesta didáctica en el problema Tipo 10.6.

El Problema 9 se trataba de un problema de Tipo 7.1 (Los datos U_1 =U(s,s') y T_1 =T(s,s'') donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es U_2=U(s',s'')) con números decimales.

En este problema podemos observar una amplísima mejoría entre la prueba previa (se pueden ver los datos en la Tabla 6.18) y la post prueba (datos en la tabla 6.19). Los aciertos en estructura han pasado del 53% al 100% (Figura 6.9).

Blanco	Estructura	Operación	Algoritmo
41%	53%	53%	41%

Tabla 6.18. Aciertos obtenidos en el problema 7.1 en la prueba previa (en porcentaje).

Blanco	Estructura	Operación	Algoritmo
0%	100%	92%	80%

Tabla 6.19. Aciertos obtenidos en el problema 7.1 tras la propuesta didáctica (en porcentaje).

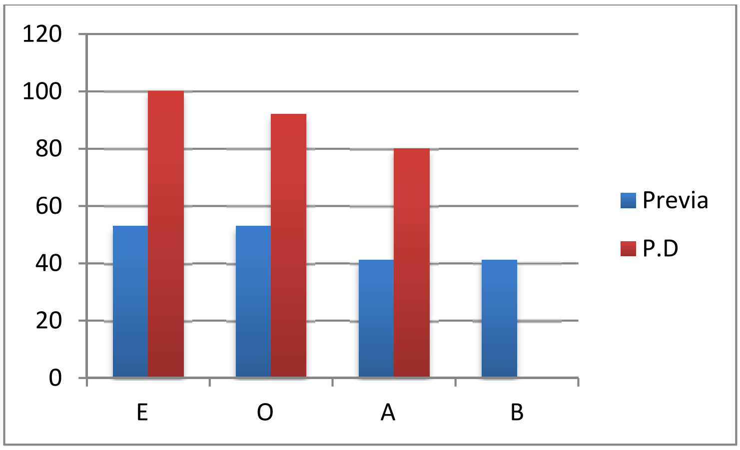


Figura 6.9 Comparativa de los aciertos en estructura (E), operación (O), algoritmo (A) y ejercicios en blanco (B) entre la prueba previa y la prueba tras la propuesta didáctica en el problema Tipo 7.1.

El Problema 10 se trataba de un problema de Tipo 9.2 (Los datos son $C_1=C(s,s')$ y $T_1=T(s',s'')$ donde s, s' y s'' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $T_2=T(s,s'')$) con fracciones.

Si observamos los datos obtenidos en la prueba previa (Tabla 6.20) y en la prueba tras la propuesta (Tabla 6.21) podemos observar que en esta ocasión dejan un porcentaje mayor de alumnos el ejercicio en blanco respecto a la prueba previa, por lo que hay menos porcentaje de acierto en estructura. En operación y algoritmos hay mejores resultados en la prueba tras la propuesta didáctica (Figura 6.10).

Blanco	**Estructura**	**Operación**	**Algoritmo**
17%	83%	39%	17%

Tabla 6.20. Aciertos obtenidos en el problema 9.2 en la prueba previa (en porcentaje).

Blanco	**Estructura**	**Operación**	**Algoritmo**
20%	80%	72%	32%

Tabla 6.21. Aciertos obtenidos en el problema 9.2 tras la propuesta didáctica (en porcentaje).

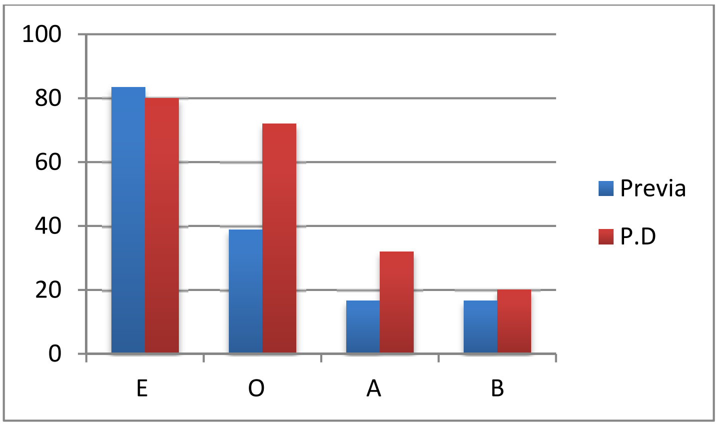


Figura 6.10. Comparativa de los aciertos en estructura (E), operación (O), algoritmo (A) y ejercicios en blanco (B) entre la prueba previa y la prueba tras la propuesta didáctica en el problema Tipo 9.2.

Por otro lado, también estamos interesados en determinar el posible impacto que la propuesta didáctica implementada ha podido tener sobre el uso de estrategias para abordar la resolución de los problemas por parte de los alumnos. A este respecto, recordamos que antes de la propuesta, durante las pruebas diagnósticas, los alumnos apenas usaban estrategias de resolución de problemas.

La propuesta implementada ha contribuido al aumento de las estrategias utilizadas, si bien hemos de decir que no todo lo deseado y no en todos los problemas. En la Tabla 6.22 resumimos las estrategias encontradas en cada uno de los problemas planteados en la prueba de evaluación final.

		2.1 frac	5.1 N	6.1 dec	8.2 frac	8.3 N	3.2 dec	6.3 frac	10.6 dec	7.1 dec	9.2 frac
Numéricas	Paso de fracción a decimal	■			■			■			■
	Trabajar solo con numeradores	■									■
Gráficas	Representación gráfica				■	■	■				■
	Dibujo	■									
	Cajita Liro	■									
	Torres Lego					■					
Caso particular			■								
Marcar datos importantes									■		

Tabla 6.22. estrategias utilizadas en la prueba post propuesta (frac: fracción, N: naturales, dec: decimales).

Especialmente destacable, aunque no excesivamente utilizado, resulta el hecho de que algunos alumnos reproducen gráficamente algunos de los materiales manipulativos utilizados. Corroboramos aquí las hipótesis de Willis y Fuson (1988) que mantenía que el uso de diagramas adecuados mejoran la capacidad de los estudiantes de resolver este tipo de problemas, en particular los diagramas correspondientes a las cajitas Liro (Tavares, 2012), lo que les aporta estrategias de resolución de problemas. Coincidimos con Barrantes & Zapata (2010) al señalar que el objetivo de enseñanza es que un alumno que se enfrenta a un problema tenga suficientes estrategias para resolverlo y suficiente flexibilidad para buscar otras si las primeras le fallan. Y llegamos a las mismas conclusiones que Alba & Quintero (2016) en cuanto a que el uso de materiales ayuda al alumnado en su capacidad de abstracción.

Por último, resulta interesante valorar el impacto que la propuesta implementada ha tenido en comparación con la situación previa a su realización y con los resultados finales de los alumnos. En la Tabla 6.23 se muestran, en escala decimal, para cada alumno, la puntuación alcanzada en el examen de fracciones que se realizó justo antes de la propuesta (que constaba únicamente de ejercicios de operaciones con fracciones), la puntuación en la prueba de evaluación realizada en la última sesión de la propuesta y la puntuación final de matemáticas (media obtenida ponderando las puntuaciones alcanzadas en todos los exámenes realizados, junto con las puntuaciones del trabajo en casa y en clase). La puntuación media de la clase en el examen de fracciones es de 3,45 y la puntuación final de matemáticas de 3,78 (esencialmente iguales, no llega al 10% de variación). Sin embargo, la puntuación media de la prueba de evaluación tras el desarrollo de la propuesta didáctica es de 5,74; casi dos puntos superior.

Como vemos, hay en general un aumento en el rendimiento de casi todos los alumnos. Algunos casos son llamativos, como el de los alumnos 18 o 27, por ejemplo. Llama la atención, no obstante, que aquellos alumnos con una nota final más alta rinden algo peor durante nuestra propuesta. De hecho, durante el desarrollo de las sesiones, algunos de estos alumnos ya manifestaron que “en los grupos estamos más pendientes de que aprendan los demás que de aprender nosotros”. Este es un fenómeno al que se debe prestar atención para tratar de que no se produzca.

Código fijo	Nota examen fracciones	Prueba de evaluación	Nota final matemáticas
1	5,8	5,2	5
2	0	3,8	1
3	8,1	6,4	8
4	2,4	7,8	5
5	7,8	7	
7	0,8	3,6	1
8	2,4	3,6	2
9	4,2	7,4	5
10	0,6	3,2	3
11	1,7	3,8	3
12	5,6	7,8	6
13	9,4	7	7
14	8,6	7,9	10
16			1
17	1,4	2,6	3
18	0,5	5,6	4
19	5,3	7,2	5
20	2,3	7,4	2
21	0		
22	3,5	8	7
23	5	7	3
24	0	3,2	2
25	0,6	3,4	2
26	1,8	2,8	2
27	0,5	5,6	3
28	8,9	7,6	6
29	1		1
30	5	8,6	5
Media	**3,45**	**5,74**	**3,78**

Tabla 6.23. Puntuaciones obtenidas por los alumnos en el examen de fracciones, en la prueba tras la propuesta y la nota final de matemáticas.

En cualquier caso, y en líneas generales, pensamos que los resultados obtenidos, que son razonablemente buenos, son debidos a la aplicación de la secuencia didáctica y nos animan a seguir trabajando en este camino.

6.5. Conclusiones en relación al quinto objetivo de investigación

El quinto objetivo específico fijado fue el siguiente:

O5. *Evaluar el grado de satisfacción y de implicación de los alumnos participantes con respecto a la metodología docente utilizada.*

A este respecto, nuestros alumnos valoraron de forma muy positiva esta metodología. Destacamos que:

- A un 85% de los alumnos les pareció muy bien o bien esta forma de trabajo.
- El 100% de los alumnos respondió que le habían ayudado los voluntarios.
- Casi un 70% de nuestros alumnos dice que los voluntarios le han animado y cerca de un 54% que le han centrado en la tarea.
- El 100% de los alumnos respondió que sí habían colaborado con el grupo.
- Los alumnos se sienten útiles, tanto por poder ayudar a sus compañeros explicándoles lo que ellos entienden y sus compañeros no, como por otros valores más ajenos a la clase, como hacer reír a los demás.
- Solamente un alumno dice que no le han ayudado sus compañeros y otro que "regular". El resto de los alumnos se han sentido ayudados por sus compañeros.
- Sólo un 8% de los alumnos considera esta forma de trabajo "Regular", el resto, buena, muy buena o excelente. Prácticamente la mitad de nuestros alumnos la consideran excelente.

El uso de esta metodología ya respaldada por muchos autores (Arostegui er al., 2013 entre muchos otros) y de la agrupación inclusión (Torrego, 2010) ha conducido a alumnos más motivados (a prácticamente todos les ha gustado esta metodología) y a menor conflictividad en el aula. Este punto es más difícil de medir de manera cuantitativa, pero nos parece muy reseñable que todos consideren que han colaborado con sus compañeros, y que la gran mayoría también se hayan sentido ayudados.

Corroboramos la conclusión de Iglesias et al.(2013) de que los grupos interactivos obtienen unos resultados muy satisfactorios sobre todo entre el alumnado más alejado del sistema educativo

La mayor desventaja que hemos encontrado en esta metodología es la cantidad de trabajo extra para el profesorado. Este problema ya lo destacó García Olivares (2008) quien utilizó una metodología de educación en la diversidad para la que tuvo que elaborar el material didáctico que utilizó en la experimentación. En un sistema educativo en el que el profesorado ha visto aumentada su carga horaria y que, al menos en la Comunidad de Madrid, todavía no se ha revertido, la realización de grupos interactivos supone mucho trabajo extra para el profesorado, que, aunque de forma personal y en resultados compense, no tiene ningún otro reconocimiento por parte de la administración.

Otro de los inconvenientes es la dificultad para encontrar voluntarios. Si, como indica la metodología, los voluntarios deben ser personas del entorno de nuestros alumnos, Ortega et al. (2015) ya señalaron la dificultad de encontrarlos en algunos ambientes; sobre todo en aquellos en los que las personas de ese entorno tienen miedo de encontrarse con situaciones que no saben resolver. En nuestro trabajo ese ha sido uno de los principales escollos, no sólo en esta ocasión, si no en prácticamente todas. Apenas encontramos voluntarios del entorno de nuestros alumnos. Esto nos ha llevado, en este estudio en particular, a buscar voluntariado en la Universidad Complutense de Madrid, tanto entre el profesorado como en el alumnado. En general tenemos muchas dificultades para encontrar voluntarios y eso nos lleva a retrasar la realización de grupos interactivos o a realizarlos con menos voluntarios de los que sería aconsejable. Sin embargo, existen ejemplos cercanos en los que la escasez de voluntarios ha sido resuelta desde las instituciones. Por ejemplo, en la población madrileña de Rivas Vaciamadrid, el ayuntamiento ha creado una bolsa de voluntarios para participar en grupos interactivos tanto en primaria como en secundaria que les está dando muy buenos resultados.

Durante el resto del curso se siguieron usando los GI, pero, por las dificultades ya citadas, se realizaron cada 15 días en vez de cada dos días. Aunque los resultados obtenidos no han sido tan positivos como los referidos en esta memoria, pensamos que la realización de grupos interactivos cada dos semanas, es una forma asequible de mantener esta estrategia motivadora.

Así pues, se concluye que el trabajo con grupos interactivos en el aula de matemáticas supone un aporte extra de motivación para el alumnado; pero además consigue afianzar los conocimientos de los alumnos y volver a situar dentro de la clase a alumnos que podían llevar mucho tiempo “perdidos”, hecho ya observado por García Olivares (2008), que utilizó una metodología similar.

Por último, un pilar fundamental de la propuesta consistía en el uso de materiales manipulativos como ayuda en la resolución de los problemas durante las sesiones de grupos interactivos. La utilidad e impacto de dichos materiales ha sido desigual, destacando:

- Cajitas Liro: Fueron, probablemente, el material manipulativo más motivador para nuestros alumnos. Un 85% de ellos las consideraron útiles.
- Monedas y billetes: A los alumnos les resulta muy fácil su utilización, aunque a veces, les sirven de distracción.
- Torres LEGO: Fue el material que peor funcionó. En general, no ayudó a nuestros alumnos a entender mejor los problemas y les sirvió de distracción.
- Fracciones en cartulina: Han servido para que algunos alumnos entiendan mejor; sería una buena actividad que las realizaran ellos mismos.

En conjunto, estos materiales manipulativos, aunque en ocasiones puedan suponer una fuente de distracción, ayudan a nuestros alumnos a mejorar en el uso de estrategias de resolución de problemas, como ya avanzaron Ramírez y De Castro (2016) y a pasar de un estadio más manual a un estadio más abstracto en la resolución de problemas, constatando los resultados obtenidos por Alba y Quintero (2016).

6.6. Aportaciones

En este apartado se realiza una sucinta descripción de las aportaciones de este trabajo de investigación.

- Revisión de la bibliografía relacionada con la investigación que aquí se ha realizado. En la que destacan los trabajos de: Socas, Hernández y Noda (1998), en clasificación de problemas aditivos; Gairín, (1999) y Escolano, (2007), en dificultades asociadas al uso de números racionales; Flecha et al. (2002), Aubert et al., (2013) e Iglesias et al. (2013) en grupos interactivos
- Clasificación de los problemas aditivos de una etapa, incluyendo en esta los problemas con cantidades desconocidas, que juegan un papel aunque no puedan calcularse.
- Colección de enunciados de problemas. En la clasificación realizada han aparecido 10 tipos con un total de 33 subtipos de problemas. De cada uno de estos problemas se ha propuesto un problema para números naturales, uno para racionales y otro para fracciones. Con un total de 99 enunciados.
- Metodología llevada a cabo en la fase de experimentación: nuestra experimentación se realizó en el aula alternando cuatro sesiones de grupos interactivos, en las que se trabajaban cuatro subtipos de problemas en cada sesión, con cuatro sesiones de clase ordinaria, en las que se volvían a tratar los mismos subtipos del día anterior para asentar los conocimientos adquiridos. La experimentación terminó con una prueba objetiva. Se considera que es aportación porque puede constituir un modelo de enseñanza.
- Utilización de las Cajitas Liro: hemos utilizado las cajitas Liro que diseñó Tavares (2012) para problemas de unión transformación y comparación de cantidades simples con números naturales. Además hemos diseñado una cajita para unión de cantidad simple con unión de dos cantidades y hemos ideado la manera de trabajar con las cajitas con números decimales y con fracciones. En suma estas tres vertientes puedes resultar interesantes para la docencia de este tipo de problemas en otros centros educativos.

6.7. Perspectivas de futuro

Es importante tener en cuenta el entorno socio económico que rodea este estudio. Los alumnos que han participado en él son alumnos de perfil socio económico bajo o muy bajo, con escasas expectativas hacia el mundo académico y, en un alto porcentaje, con desfase curricular de dos o más años (alumnos de compensatoria educativa). Sería muy interesante poder continuar el estudio en otro tipo de centro educativo para comprobar si es tan necesaria esta propuesta didáctica y si los resultados mejoran tanto al utilizar la metodología elegida.

Los fallos en la aplicación del algoritmo suponen el 14% de los errores. Aunque estos algoritmos también son una parte del currículo de matemáticas que no debemos desestimar, nuestro interés fundamental es que los alumnos entiendan los problemas y sepan plantearlos. En este sentido, permitir el uso de la calculadora durante todo el desarrollo de la propuesta podría reducir ese porcentaje de errores y quizás mejorar la motivación de los alumnos.

Para las próximas realizaciones de la propuesta, creemos que se debería insistir en la necesidad de manejar cuidadosamente las unidades de medida. Además, resulta necesario buscar mecanismos para que los días en que se trabaje en gran grupo, todos los alumnos trabajen. También nos parece interesante proponer a los alumnos realizar las correcciones en un color determinado para comprobar si son capaces de corregir sus errores o incluso incluir elementos de coevaluación en el aula.

Algunos de los problemas planteados en la propuesta y algunas de las estrategias sugeridas para su resolución resultan demasiado fáciles para algunos alumnos, son manipulativas y ellos están en un estadio más abstracto. Uno de los elementos a mejorar consiste en atender de manera más adecuada a estos alumnos. Esto se relaciona con el fenómeno observado de que los mejores alumnos acaban rindiendo ligeramente peor en nuestra propuesta. Es necesario abordar estos aspectos en futuros ciclos de implementación. También se requiere una revisión de los materiales manipulativos utilizados y el uso dado a cada uno de ellos.

Por último, creemos que resultaría de gran interés realizar una prueba muy posterior en el tiempo a los alumnos participantes en esta experimentación para ver el grado de consolidación de los conocimientos y si la propuesta ha tenido algún impacto sobre su competencia matemática.

En todo caso, esperamos y deseamos que el trabajo realizado a lo largo de esta investigación ayude a incrementar la formación matemática general de los alumnos y les proporcione herramientas útiles para abordar situaciones de su vida cotidiana.

ANEXOS

Se incluyen en el CD adjunto

Bibliografía

Adetula, L. O. (1989). Solutions of simple word problems by Nigerian children: Language and schooling factors. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(5), 489-497.

Alba, J. A. & Quintero, A. L. (2016). ¿Cómo cuentan los niños al momento de resolver problemas? *Infancias Imágenes*, *15*(1), 129-138.

Almeida, R. & Bruno, A. (2013). Estrategias de futuros profesores de primaria en la resolución de problemas aditivos con números negativos. En Berciano, Ainhoa; Gutiérrez, Guadalupe; Estepa, Antonio; Climent, Nuria (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 127-136). Bilbao, España: SEIEM.

Anghileri, J. (1989). An investigation of young children's understanding of multiplication. *Educational Studies in Mathematics*, *20*, pp. 367-385.

Arnaiz, P. (2003). *Educación inclusiva: Una escuela para todos*. Málaga: ALJIBE

Arostegui, I.: Darretxe,L.; Beloki, N. (2013). La participación de las familias y de otros miembros de la comunidad como estrategia de éxito en las escuelas. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa, 6*(2), pp. 187-200.

Aubert,A. ; Duque,E. ; Fisas, M.;Valls, R. (2004). *Dialogar y transformar. Pedagogía crítica del siglo XXI.* Barcelona: Graó.

Aubert, A., Flecha, A., Flecha, R., García, C., Racionero, S. (2013). *Aprendizaje dialógico en la Sociedad de la Información.* Barcelona: Hipatia Editorial.

Aubert, A., García, C., Racionero, S. (2009). El aprendizaje dialógico. *Cultura y Educación, 21*(2), *129-139*

Barrantes, M. &· Zapata, M. A. (2010) La resolución de problemas aritméticos y su tratamiento didáctico en la Educación Primaria. *Campo Abierto, 29*(1), pp. 77-95.

Bell, A., Fischbein, E. & Greer, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: The effects of number size, problem structure and context. *Educational Studies in Mathematics*, *15*, pp. 129-147.

Beltrán, P. & Cárdenas, J. (2016). Incorporando el plano afectivo en el aula de matemáticas. En F. España (Ed.). *Actas del XVI Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas* (pp. 264-272). Jerez de la Frontera: SAEM Thales.

Bonell, L. (2006). *Calidad y equidad en educación: hacia una escuela inclusiva, dialogante y democrática.* Pages 1-47 | Published online: 2006

Bonell, L. & Ríos, O. (2016). Participation and family education in school. Successful educational actions. Pages 177-191 | Published online: 21 Jan 2016

Candy, L., & Edmonds, E. (2018). Practice-based research in the creative arts: Foundations and futures from the front line. *Leonardo*, *51*(1), 63-69.

Carpenter, T.P. & Moser, J.M. (1982). The Development of Addition and Subtraction Problem-Solving Skills, en T.P. Carpenter, J.M. Moser y T.A. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction: a Cognitive Perspective* (pp. 9-24). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Carralero, C. & Rubio, R. (2006). Experiencia de aprendizaje mediante grupos interactivos en un contexto de desventaja sociocultural como medida para prevenir el fracaso escolar y la violencia. *Comunicación presentada en las Jornadas Provinciales de Orientación Educativa.* Sevilla.

Castillo, D., Paz, K. & Marmolejo, G. (2017). Estructuras Aditivas. *Revista Sigma*, *13*(1). pp 27-32.

Castillo, M. & Ramírez, A. (2013) Dificultades asociadas al enunciado de problemas aditivos verbales que presentan los estudiantes de los tres primeros grados de educación primaria. *Revista de Investigación Nº 79 Vol. 37*

Castro, E., & Molina, M. (2007). Desarrollo de pensamiento relacional mediante trabajo con igualdades numéricas en aritmética básica. *Educación matemática*, *19*(2), pp. 67-94.

Castro, E., Rico, L., Batanero, C. & Castro, E. (1991). Dificultad en problemas de estructura multiplicativa de comparación. En F. Furinghetti (Ed.) *Proceedings of the XV PME Conference*, Assisi. Italy.

Chocarro de Luis, E. & Saénz de Jubera, M. (2016). Grupos interactivos: estrategia para la mejora de la convivencia, la participación y el aprendizaje. *Revista Complutense de Educación*

Cifuentes García, A., Torrego Egidio, L., Siles Molina, G., (2012) Presencia del streaming, mixture e inclusión en los centros educativos españoles de primaria y secundaria. Resultados de la encuesta nacional del proyecto I+D MIXTRIN. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado. 26*(1) pp. 88-104

Collins, A., Joseph, D. & Bielaczyc, K. (2004). Design research: theoretical and methodological issues. *Journal of the Learning Sciences*, *13*(1), pp. 15-42.

Cummins, J. (2002): *Lenguaje, poder y pedagogía*. Madrid: Ediciones Morata

Delval, J. (2013). La escuela para el siglo XXI. *Sinéctica*, *40*, 1-18.

Dubet, F. (2005). Exclusión Social, Exclusión Escolar. En Luengo, J. (Ed.), *Paradigmas de gobernación y de exclusión social en educación*. México. Pomares.

Elia, I., Gagatsis, A., & Demetriou, A. (2007). The effects of different modes of representation on the solution of one-step additive problems. *Learning and Instruction*, *17*(6), 658-672.

Escolano, R. (2007) *Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde los modelos de medida y cociente.* Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza.

Flecha García, R., Puigvert, L. (2002) Las Comunidades de Aprendizaje: una apuesta por la igualdad educativa. REXE: *Revista de estudios y experiencias en educación,* Vol. 1, Nº. 1, pp. 11-20.

Gagatsis, A., & Elia, I. (2004). The effects of different modes of representations on mathematical problem solving. In M. Johnsen Hoines, & A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, Vol. 2 (pp. 447-454). Bergen, Norway: Bergen University College.

Gairín, J.M. (1999) *Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación.* Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza.

García, J.R., Mena, J.J. & Sánchez, E. (2011). Investigación-reflexión-acción y asesoramiento: análisis de las reflexiones de dos orientadoras en su contexto de trabajo. *Revista de Educación*, *356*, pp. 253-278.

García, M. & Blanco, R. (2016) Resolución de problemas aritméticos en Educación Primaria. *Suma, 82*, pp. 27-34

García Olivares, M. A. (2008). *Educación matemática atendiendo a la diversidad*. Tesis doctoral, Universidad de Valladolid.

Gil, N., Blanco, L., & Guerrero, E. (2005). El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. *Unión. Revista iberoamericana de educación matemática*, *2*(1), 15-32.

Gómez, B. (2011). Discontinuidad de los modelos de situación de las operaciones multiplicativas. *Educatio Siglo XXI*, *29*(2), pp. 41-66.

González Marí, J.L., (1995). *El campo conceptual de los números naturales relativos*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

González Marí, J.L. (1998). Clasificación de problemas aditivos por sus estructuras numérica y semántica global, En Sierra, Modesto; Rico, Luis (Eds.), *Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 78-106). Zamora: Universidad de Granada.

Guzmán, M. (1984) Juegos matemáticos en la enseñanza. *Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas.* Santa Cruz de Tenerife.

Herrera, I., Flores, P., Rifo, E., Garcés, J., Vargas, L., Abello, R., Martín, S., Cid, J. (2018) El modelo interactivo en la comprensión lectora, resolución de problemas aritméticos y algunos factores socioafectivos. *Paideia, 62, 17-41*

Iglesias, B.; de la Madrid, L.; Ramos, A.; Robles, C; Serrano, A; (2013) Metodologías innovadoras e inclusivas en educación secundaria: los grupos interactivos y la asamblea. *Tendencias Pedagógicas*, *21*, 63-78.

Lortie-Forgues, H., Tian, J., & Siegler, R. S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult?. *Developmental Review*, *38*, 201-221.

Marco-Buzunáriz, M. A., Muñoz-Escolano, J. M., & Oller-Marcén, A. M. (2016). Investigaciones sobre libros de texto en los Simposios de la SEIEM (1997-2015). En J. A. Macías et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 325-334). Málaga: SEIEM.

Mena, J. (2007). *La Investigación-Reflexión-Acción (IRA) 25 años después. Una comparación entre lo que se sabe, se divulga y se hace a partir del análisis de documentos.* Tesis doctoral, Universidad de Salamanca.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *29*(1), pp.75-88.

Muñoz, J. F., Quintero, J. & Munévar, R. A. (2002). Experiencias en investigación-acción-reflexión con educadores en proceso de formación. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 4*(1), pp.

Nesher, P., (1982). Levels of Description in the Analysis of Addition and Subtraction Word Problems. En: T.P. Carpenter, J.M. Moser y T.A. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction: a Cognitive Perspective,* pp. 25-38. (Lawrence Erlbaum: Hillsdale, New Jersey).

Nesher, P. & Katriel, T., (1977). A Semantic Analysis of Addition and Subtraction Word Problems in Arithmetic, *Educational Studies in Mathematics*, *8*, pp. 251-269.

Orrantia, J., Múlez, D., Fernández, M., Matilla, L., (2012). Resolución de problemas aritméticos: Conocimiento conceptual y nivel de competencia en matemáticas. *Aula Abierta*, *40*(3), pp. 23-32

Ortega Palacios, I., Álvarez Álvarez, C. (2015). Cuatro años de grupos interactivos: estudio de caso de un centro educativo pionero. *Educatio Siglo XXI*, *33*, pp. 105-122.

Oyarzún, C., Salvo, S., (2010). Conocimiento conceptual y dificultades en la resolución de problemas verbales aritméticos en el nivel inicial. *REXE: Revista de Estudios y Experiencias en Educación*, *9*(18), pp. 13-33

Padrós, M., Duque, E., Molina, S. (2011). Aportaciones de la investigación europea INCLUD-ED para la reducción del abandono escolar prematuro. *Avances en supervisión educativa: Revista de la Asociación de Inspectores de Educación de España*, Nº. 14.

Peake, C., Jiménez, J., Rodríguez, C., Villarroel, R., Bisschop, E. (2014). Evaluación del rendimiento en cálculo aritmético y resolución de problemas verbales: estandarización del PCA y PVA *Revista de Psicología y Educación* , *8*(2), 51-66

Pérez, E. M., Pérez, E. E., Lago, I. M. (2018). La resolución de problemas aritméticos, por el método de determinación de casos extremos. *ROCA Revista científico—educacional de la provincia de Granma,* Vol. 14 Nº 4

Prieto, O., Duque, E., (2009) El aprendizaje dialógico y sus aportaciones a la teoría de la educación. *Education in the knowledge society (EKS),* Vol. 10, Nº. 3, (Ejemplar dedicado a: Pedagogía Crítica del S. XXI), págs. 7-30

Puig, L., & Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Síntesis. Madrid.

Ramírez, M., & De Castro, C. (2016) Caminos de aprendizaje para problemas aritméticos de estructura aditiva de sustracción. *Indivisa, 16*, pp.167-192

Ramis, M., & Krastrina, L. (2010). Cultural intelligence in the school. *Revista De Psicodidáctica,* 15(2), 239-252.

Ramos, L., Castro, E., & Castro-Rodríguez, E. (2016). Instrucción en el uso de esquemas para la resolución de problemas aditivos a estudiantes con necesidades educativas especiales. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *34*(1), 173-192.

Rico, L. (1991). Diseño curricular en Educación Matemática. Una perspectiva cultural. En: S. Llinares y V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 17-62). Sevilla, España: Alfar.

Rico, L., Sierra, M. y Castro, E. (2002). El área de conocimiento de «Didáctica de la Matemática». *Revista de Educación*, *328*, pp. 35-58.

Ritacco Real, M. (2012). La enseñanza de las matemáticas en contextos de riesgo de exclusión social. Buenas prácticas educativas. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *79*, pp. 17-46.

Rodríguez-Nieto, C. A., Navarro, C., Castro, A. N., & García, M. S. (2019) Estructuras semánticas de problemas aditivos de enunciado verbal en libros de texto mexicanos. *Educación Matemática*, *31*(2), pp. 75-104.

Sánchez, M. R. & Vicente, S. (2015) Models and processes for solving arithmetic word problems proposed by Spanish mathematics textbooks. *Cultura y Educación*, *27*(4), pp. 695-725

Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook author. *For the Learning of Mathematics*, *7*(3), 41-51.

Singh, K. (2007). *Quantitative social research methods*. Londres: SAGE.

Smith, H., & Dean, R. (2009). *Practice-led Research, Research-led Practice in the Creative Arts*. Edinburgh: Edinburgh University Press.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *NUMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *77*, 5-34.

Socas, M.M., Hernández, J. & Noda, A., (1998). Modelo de competencias para el campo conceptual aditivo de las magnitudes relativas. *Enseñanza de las Ciencias*, *16*(2), pp. 261-269.

Tavares, L. R. (2012). *Las cajitas LIRO para la resolución de problemas aditivos. Una propuesta de trabajo con material didáctico concreto para el área de matemática en el nivel de primaria bajo el enfoque de las rutas de aprendizaje.* Publicación electrónica.

Torrego Seijo, J. C. (2010). La mejora de la convivencia en un instituto de educación secundaria de la Comunidad de Madrid. *Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, *14*(1), pp. 251-274,

Valls Carol, R., Prados Gallardo, M. M., Aguilera Jiménez, A (2014): El proyecto INCLUD—ED: estrategias para la inclusión y la cohesión social en Europa desde la educación. *Revista Investigación en la Escuela, 82, pp. 31-43*

Valls Carol, M.R., Siles Molina, G., Molina Roldán, S. (2011). *XII Congreso Internacional de Teoría de la Educación*. Universidad de Barcelona

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.) *Number concepts and operations in the middle grades*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics; Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Vergnaud, G. (1982). A Classification of Cognitive Tasks and Operation of Thought Involved in Addition and Subtraction Problems, en T.P. Carpenter, J.M. Moser y T.A. Romberg (eds.), *Addition and Subtraction: a Cognitive Perspective*, pp. 39-59. (Lawrence Erlbaum: Hillsdale, New Jersey).

Vergnaud, G. & Duran, C., (1976). Structures additives et complexité psychogénétique, Revue Française de Pédagogie, 36, pp.28-43. (Traducción al español: Estructura aditiva y complejidad psicogenética. En: C. Coll (Ed.), *Psicología genética y aprendizajes escolares*, pp. 105-128. Madrid: Siglo XXI.

Verschaffel, L., & De Corte, E. (1997). Word problems: a vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school? En: T. Nunes & P. Bryant (Eds.). *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 69-97). Hove, UK: Psychology Press.

Vicente, S., & Manchado, E. (2017). Dominios de contenido y autenticidad: un análisis de los problemas aritméticos verbales incluidos en los libros de texto españoles. *PNA, 11*(4), pp. 253-279

Vieira, L., & Puigdellívol, I. (2013). ¿Voluntarios dentro del aula? El rol del voluntariado en Comunidades de Aprendizaje. *Revista de Estudios y Experiencias en Educación*, *12*(24), pp. 37-55.

Vondrová, N., Novotná, J., & Havlíčková, R. (2019). The influence of situational information on pupils' achievement in additive word problems with several states and transformations. *ZDM*, *51*(1), pp. 183-197.

Willis, G. B., & Fuson, K. C. (1988). Teaching children to use schematic drawings to solve addition and subtraction word problems. *Journal of Educational Psychology*, *80*(2), pp. 192-201.

Zarzar, C. B. & Martínez, C. (2012) Abordaje basado en competencias: La resolución de problemas aditivos en el nivel básico. *Revista de la Unidad de Educación de Ciencias Humanas y Sociales, Horizontes Pedagógicos 14* (1), pp. 30-42.

LIBROS DE TEXTO CONSULTADOS

Alcaide, F.; Hernández, J.; Serrano, E.; Moreno, M.; Pérez, A. (2015). Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas 3º E.S.O. Savia. Madrid: SM.

Alcaide, F.; Hernández, J.; Serrano, E.; Moreno, M.; Pérez, A. (2015). Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 3º E.S.O. Savia. Madrid: SM.

Alcaide, F.; Hernández, J.; Serrano, E.; Moreno, M.; Pérez, A.; Donaire, J. (2016). Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas 4º E.S.O. Savia. Madrid: SM.

Alcaide, F.; Hernández, J.; Serrano, E.; Moreno, M.; Pérez, A.; Donaire, J. (2016). Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º E.S.O. Savia. Madrid: SM.

Andrada, J.; Zaplana, R; Sánchez, L. (2018) Matemáticas 3º Primaria. Más Savia. Madrid: SM.

Andrada, J.; Navarro, D; Rocafort, J. A. (2018). Matemáticas 5º Primaria. Más Savia. Madrid: SM.

Díaz, A.; Salomó, X; Montero, D. (2019). Matemáticas 4º Primaria. Más Savia. Madrid: SM.

Farré, L.; López, J.; Mark, A. (2018) Matemáticas 1º Primaria. Más Savia. Madrid: SM.

López, A. E.; Mark, A; Rocafort, J. A. (2018). Matemáticas 2º Primaria. Más Savia. Madrid: SM.

Navarro, D; Rocafort, J. A.; Druzhininskaya, A. (2019). Matemáticas 6º Primaria. Más Savia. Madrid: SM.

Nieto, M.; Moreno, A.; Pérez, A. (2015). Matemáticas 1º E.S.O. Savia. Madrid: SM.

Nieto, M.; Pérez, A.; Alcaide, F. (2016). Matemáticas 2º E.S.O. Savia. Madrid: SM.

OTRAS FUENTES

B.O.C.M. 89/2014 de 24 de julio de 2014.

B.O.C.M. 48/2015 de 14 de mayo de 2015.

B.O.E. 8/2013, de 9 de diciembre de 2013.

B.O.E. 126/2014, de 28 de febrero de 2014.

Prueba externa de Evaluación de 4º de ESO de la Comunidad de Madrid 2018

www. utopiadream.info