



Universidad de Valladolid



ESCUELA DE INGENIERÍAS
INDUSTRIALES

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID
ESCUELA DE INGENIERIAS INDUSTRIALES

Grado en Ingeniería Mecánica

**Aplicación del Principio de los Trabajos
Virtuales (PTV) al progreso de la
plastificación por flexión de
pórticos 2D de barras esbeltas**

Autor:

Bernardo Alonso, Carlos

Tutor:

Cacho Pérez, Mariano

Departamento de Construcciones
Arquitectónicas, Ingeniería del
Terreno y Mecánica de los Medios
Continuos y Teoría de Estructuras

Valladolid, Julio, 2021.

Resumen

El objetivo de este trabajo es plantear un método sencillo para obtener el orden de formación de rótulas plásticas por flexión en pórticos planos de barras esbeltas. Para ello, se plantean ecuaciones de equilibrio (EQ) y ecuaciones de compatibilidad (EC) suficientes para determinar la estática y la cinemática de la estructura (NPR) para cada valor del nivel de carga. Se supone carga proporcional de la estructura (todas las cargas nominales se multiplican por el mismo factor de carga) y además, toda la carga se aplica de forma monótona creciente desde el valor cero hasta el valor de colapso del factor de carga.

Palabras clave

Método secuencial

Rótula plástica

Pórticos planos

Flexión

Barras esbeltas

Abstract

The objective of this work is to propose a simple method to obtain the order of formation of plastic hinges by bending in flat frames of slender bars. For this purpose, equilibrium equations (EQ) and compatibility equations (EC) are considered sufficient to determine the static and kinematics of the structure (NPR) for each value of the load level. Proportional load of the structure is assumed (all nominal loads are multiplied by the same load factor) and in addition, all load is applied in an increasing monotonic way from the zero value to the collapse value of the load factor.

Keywords

Sequential method

Plastic Hinges

Flat frames

Bending beams and columns

Slender bars

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quiero expresar mi agradecimiento a Mariano Cacho, tutor de este TFG, por su apoyo y confianza en todo momento y por su orientación, sin la cual, esto no habría salido adelante. Gracias por ser tan natural y por haber conseguido que trabajar contigo y llevar a cabo el proyecto, haya sido una tarea más fácil.

Agradecer también a mi familia, en especial a mis padres, Juan Carlos y María del Mar y a mi hermana Paula por haber confiado en mí y haberme acompañado durante mi proceso de formación, no solo en estos últimos meses de proyecto sino desde el primer día que empecé mi carrera.

A mis amigos, porque de una manera u otra me han ayudado a desconectar y han estado ahí en los momentos duros, pero sobre todo, en los momentos buenos.

A todas estas personas, muchas gracias por vuestro apoyo incondicional.

Carlos

Valladolid, España

Julio, 2021

Contenido

Resumen.....	3
Palabras clave	3
Abstract.....	3
Keywords.....	3
AGRADECIMIENTOS.....	5
Contenido.....	7
Índice de Figuras.....	11
Índice de Tablas	13
Índice de Ecuaciones	15
CAPÍTULO 1:.....	17
INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS.....	17
1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS.....	19
1.1. Objetivos	19
1.2. Justificación del trabajo.....	19
1.3. Estructura del documento	20
CAPÍTULO 2:.....	21
FORMULACIÓN Y METODOLOGÍA – MARCO TEÓRICO	21
2. FORMULACIÓN Y METODOLOGÍA – MARCO TEÓRICO	23
2.1. Fundamento histórico	23
2.2. Hipótesis fundamentales.....	23
2.3. Grado de hiperestaticidad	24
Estructura hiperestática	25
Estructura isostática	26
Mecanismo	26
2.4. Comportamiento de la sección.....	26
Ley de Hooke	27
2.5. Rótula plástica.....	28
2.6. Mecanismo de colapso	30
Teorema de Symonds-Neal.....	30
2.7. Teoremas fundamentales de análisis plástico.....	31
2.7.1. Teorema del límite superior.....	31
2.7.2. Teorema del límite inferior	32

2.7.3. Teorema de unicidad.....	32
2.8. Métodos de resolución	33
2.8.1. Método estático	33
2.8.2. Método cinemático	33
2.9. Principio Trabajos Virtuales (PTV).....	34
2.10. Metodología del Método Secuencial	35
Ejemplo aplicación Método Secuencial	36
CAPÍTULO 3:	39
VALIDACIÓN.....	39
3. VALIDACIÓN.....	41
3.1. EJEMPLO 1	42
3.2. EJEMPLO 2	48
3.3. EJEMPLO 3	55
CAPÍTULO 4:	63
RESULTADOS PROBLEMAS APLICADOS.....	63
4. RESULTADOS PROBLEMAS APLICADOS.....	65
PROBLEMA 1: Pórtico a 2 aguas	65
PROBLEMA 2: Pórtico doble.....	71
CAPÍTULO 5:	81
PRESUPUESTO – ESTUDIO ECONÓMICO.....	81
5. PRESUPUESTO – ESTUDIO ECONÓMICO.....	83
5.1. Introducción.....	83
5.2. Costes directos.....	83
5.2.1. Costes directos - mano de obra	83
5.2.2. Costes directos – material amortizable	85
5.2.3. Costes directos – material no amortizable	86
5.2.4. Costes directos totales.....	86
5.3. Costes indirectos.....	87
5.4. Costes totales.....	87
CAPÍTULO 6:	89
CONCLUSIONES – LÍNEAS FUTURAS.....	89
6. CONCLUSIONES	91

6.1. LINEAS FUTURAS	91
CAPÍTULO 7:.....	93
BIBLIOGRAFÍA.....	93
7. BIBLIOGRAFÍA.....	95
CAPÍTULO 8:.....	97
ANEXOS.....	97
8. ANEXOS.....	99
8.1. ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD – PROBLEMA 1.....	99
8.2. ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD – PROBLEMA 2.....	102
8.3. CÓDIGOS DE PROGRAMACIÓN	104
8.3.1. CÓDIGO DE PROGRAMACIÓN EJEMPLO 1.....	104
8.3.2. CÓDIGO DE PROGRAMACIÓN EJEMPLO 2.....	107
8.3.3. CÓDIGO DE PROGRAMACIÓN EJEMPLO 3.....	111
8.3.4. CÓDIGO DE PROGRAMACIÓN PROBLEMA 1.....	114
8.3.5. CÓDIGO DE PROGRAMACIÓN PROBLEMA 2.....	119

Índice de Figuras

Figura 1: Barra biempotrada	24
Figura 2: Barra empotrada con rótula en voladizo	24
Figura 3: Pórtico biempotrado con dos cargas puntuales	25
Figura 4: Estructura biapoyada con carga puntual y rótula.....	25
Figura 5: Estructura hiperestática, barra biempotrada	26
Figura 6: Estructura isostática, barra empotrada y con voladizo	26
Figura 7: Mecanismo, barra empotrada con rótula en voladizo	26
Figura 8: Diagrama Tensión - Deformación.....	27
Figura 9: Ley de Hooke	28
Figura 10: Viga biapoyada con carga uniforme	28
Figura 11: Evolución del factor de carga - deflexión, y la distribución de tensiones en la sección central.....	29
Figura 12: Mecanismo de colapso de una viga biapoyada.....	29
Figura 13: Mecanismo completo	30
Figura 14: Mecanismo incompleto	31
Figura 15: Mecanismo supercompleto.....	31
Figura 16: Cálculo límite superior - Viga biempotrada	32
Figura 17: Cálculo límite inferior - Viga biempotrada.....	32
Figura 18: Estados real y virtual para el establecimiento de una ecuación de compatibilidad por el PTV.....	35
Figura 19: Estados para establecer con el PTV una ecuación de equilibrio....	35
Figura 20: Ejemplo aplicación método secuencial	36
Figura 21: Ejemplo aplicación método secuencial - MC1	37
Figura 22: Ejemplo aplicación método secuencial - MC2.....	37
Figura 23: Ejemplo 1 - Pórtico empotrado - apoyado sometido a cargas puntuales.....	42
Figura 24: Ejemplo 1 - Mecanismo de colapso 1	43
Figura 25: Ejemplo 1 - Mecanismo de colapso 2	43
Figura 26: Ejemplo 1 - Calculo de la última rótula plástica y de los giros en el instante de colapso mediante el método cinemático.	45
Figura 27: Ejemplo 2 - Pórtico biempotrado sometido a cargas puntuales....	48
Figura 28: Ejemplo 2 - Mecanismo de colapso 1	48
Figura 29: Ejemplo 2 - Mecanismo de colapso 2	49
Figura 30: Ejemplo 2 - Combinación MC1+MC2.....	50
Figura 31: Ejemplo 2 - Calculo de la última rótula plástica y de los giros en el instante de colapso mediante el método cinemático.	51
Figura 32: Ejemplo 3 - Pórtico biempotrado sometido a carga distribuida	55
Figura 33: Ejemplo 3 - Mecanismo de colapso 1	56
Figura 34: Ejemplo 3 - Mecanismo de colapso 2	56
Figura 35: Problema 1 - Pórtico a dos aguas.....	65
Figura 36: Problema 1 - Simulación en Working Model del MC2.....	66
Figura 37: Problema 2 - Pórtico doble.....	71

Figura 38: Problema 2 - Numeración de los nodos de la estructura 71

Índice de Tablas

Tabla 1: Ejemplo aplicación método secuencial – PFV genérico	37
Tabla 2: Ejemplo aplicación método secuencial – PFV aplicado.....	37
Tabla 3: Ejemplo 1 - PFV por el método cinemático	44
Tabla 4: Ejemplo 1 - PFV por el método secuencial	45
Tabla 5: Ejemplo 1 - Cálculo de la primera rótula plástica mediante el método secuencial	46
Tabla 6: Ejemplo 1 - Cálculo de la segunda rótula plástica según método secuencial	46
Tabla 7: Ejemplo 1 - Cálculo de la tercera rótula plástica según método secuencial	47
Tabla 8: Ejemplo 2 - PFV por el método cinemático	50
Tabla 9: Ejemplo 2 - PFV por el método secuencial	52
Tabla 10: Ejemplo 2 - Cálculo de la primera rótula plástica mediante el método secuencial	52
Tabla 11: Ejemplo 2 - Cálculo de la segunda rótula plástica mediante el método secuencial	53
Tabla 12: Ejemplo 2 - Cálculo de la tercera rótula plástica mediante el método secuencial	53
Tabla 13: Ejemplo 2 - Cálculo de la cuarta rótula plástica mediante el método secuencial	54
Tabla 14: Ejemplo 3 - PFV por el método secuencial	58
Tabla 15: Ejemplo 3 - Cálculo de la primera rótula plástica mediante el método secuencial	60
Tabla 16: Ejemplo 3 - Cálculo de la segunda rótula plástica mediante el método secuencial	60
Tabla 17: Ejemplo 3 - Cálculo de la tercera rótula plástica mediante el método secuencial	61
Tabla 18: Ejemplo 3 - Cálculo de la cuarta rótula plástica mediante el método secuencial	61
Tabla 19: Problema 1 - PFV método secuencial	67
Tabla 20: Problema 1 - Cálculo de la primera rótula plástica mediante el método secuencial	69
Tabla 21: Problema 1 - Cálculo de la segunda rótula plástica mediante el método secuencial	69
Tabla 22: Problema 1 - Cálculo de la tercera rótula plástica mediante el método secuencial	70
Tabla 23: Problema 2 - PFV método secuencial	74
Tabla 24: Problema 2 - Cálculo de la primera rótula plástica mediante el método secuencial	77
Tabla 25: Problema 2 - Cálculo de la segunda rótula plástica mediante el método secuencial	77

Tabla 26: Problema 2 - Cálculo de la tercera rótula plástica mediante el método secuencial	78
Tabla 27: Problema 2 - Cálculo de la cuarta rótula plástica mediante el método secuencial	78
Tabla 28: Problema 2 - Cálculo de la quinta rótula plástica mediante el método secuencial	79
Tabla 29: Problema 2 - Cálculo de giros y momentos en el instante de colapso según el método secuencial	80
Tabla 30: Cálculo anual de los días y horas efectivas de trabajo	84
Tabla 31: Coste total del personal	84
Tabla 32: Distribución temporal del trabajo	85
Tabla 33: Costes directos - material amortizable.....	86
Tabla 34: Costes directos - material no amortizable	86
Tabla 35: Costes directos totales.....	86
Tabla 36: Costes indirectos totales.....	87
Tabla 37: Costes totales del proyecto.....	87

Índice de Ecuaciones

Ecuación 1: Cálculo del grado de hiperestaticidad un eje de dirección	24
Ecuación 2: Cálculo del grado de hiperestaticidad dos ejes de dirección.....	25
Ecuación 3: Número de rótulas necesarias para formar un mecanismo	29
Ecuación 4: Número de mecanismos independientes o número de ecuaciones de equilibrio.....	30
Ecuación 5: Principio Trabajos Virtuales	34
Ecuación 6: Principio fuerzas virtuales.....	37
Ecuación 7: Ecuación parábola	59
Ecuación 8: Cálculo de costes totales	83

CAPÍTULO 1:

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

1.1. Objetivos

Lo que se pretende con este proyecto es dar continuidad a la asignatura de Estructuras y Construcciones Industriales que se cursa en el Grado de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Valladolid. El objetivo principal es ampliar los conocimientos y desarrollar los métodos necesarios para resolver problemas de cálculo plástico más complejos cuya resolución manual no es fácil ni eficaz.

El método de combinación de mecanismos posibles, combinado con el principio de fuerzas virtuales; ambos impartidos en la asignatura del Grado de Ingeniería Mecánica, nos permite calcular manualmente el momento plástico, los diagramas de esfuerzos, la carga límite y los desplazamientos y giros en estructuras sometidas a cargas puntuales simples en el instante de colapso plástico. Pero los conocimientos y recursos adquiridos no permiten llevar a cabo la resolución de problemas más complejos y que se asemejan más a un problema real. Refiriéndome a problemas más complejos, aquellos de estructuras sometidas a cargas uniformemente distribuidas como podrían ser las cargas de viento y nieve.

La resolución de problemas de cálculo plástico manualmente no es una tarea rápida ni fácil. A la hora de estudiar cualquier estructura sometida a un sistema de cargas, es necesario ensayar cada uno de los mecanismos de colapso posibles, además, una vez obtenido el verdadero mecanismo de colapso, es necesario aplicar el Principio de Fuerzas Virtuales para obtener las incógnitas del problema como giros y desplazamientos.

Lo que puede resultar una estructura sencilla, no lo es a la hora de resolver el problema de cálculo plástico. Es un proceso largo en el que se puede cometer un error fácilmente.

1.2. Justificación del trabajo

Con el desarrollo y la aplicación del Método Secuencial en problemas de cálculo plástico, se presenta una alternativa a los métodos de cálculo existentes a día de hoy y garantizamos la rapidez y eficacia a la hora de resolver estos problemas.

La aplicación de este método permite abordar problemas más complejos, a nivel estructural o referido al conjunto de cargas que actúan sobre dicha estructura.

El método secuencial nos permite calcular la carga límite de colapso, la primera rótula plástica, el orden de formación del resto de rótulas plásticas, los giros acumulados entre barras en dichas secciones donde se han formado rótulas

plásticas, la distribución de momentos flectores (en problemas planos) en el instante de colapso...

La resolución de problemas de cálculo plástico con el método secuencial es más completa y eficaz que la resolución utilizando los métodos actuales como es el método cinemático.

1.3. Estructura del documento

El trabajo se ha estructurado de manera progresiva; en el [Capítulo 1] se establecen los objetivos y motivación del presente trabajo. Con el [Capítulo 2], se introduce la parte de investigación del trabajo, en él, se explica la formulación y metodología necesaria para llevar a cabo el Método Secuencial, así como todos los conocimientos y teoremas necesarios para desarrollar dicho método en los Capítulos 3 y 4.

En el [Capítulo 3], se valida el Método Secuencial sobre varios ejemplos vistos en la asignatura de Estructuras y Construcciones Industriales del grado de Ingeniería Mecánica en la Universidad de Valladolid. Una vez que el método está validado, en el [Capítulo 4], se aplica el Método Secuencial a dos problemas inventados que se asemejan a problemas reales en los que se estudia la resistencia de pórticos a cargas puntuales y distribuidas que simulan cargas de nieve o viento y cargas puntuales como podría ser un puente grúa. Con el fin de detallar el desarrollo y programación del Método Secuencial, se introducen en los anexos los archivos de programación y desarrollo de los ejemplos y problemas de los Capítulos 2 y 3 obtenidos mediante el programa Wolfram Mathematica y organizados mediante cuadernos de código de este programa.

CAPÍTULO 2:

FORMULACIÓN Y METODOLOGÍA – MARCO TEÓRICO

2. FORMULACIÓN Y METODOLOGÍA – MARCO TEÓRICO

2.1. Fundamento histórico

El concepto de plasticidad aparece con Parent en 1713, al establecer la distribución lineal de tensiones en un elemento recto sometido a un momento flector. (Cañas Delgado, 1986). La Teoría de la Plastificación, 1864, aparece tras enunciarse el criterio de plastificación de Tresca, una teoría a la que investigadores posteriores entre los que destacan Von Miseses, Levy y Prandtl, aportan estudios y ensayos útiles para continuar su evolución.

Aunque los primeros estudios sobre el comportamiento plástico de barras son muy anteriores, las primeras publicaciones que sugirieron la posibilidad de dimensionar utilizando la ductilidad de los metales provienen de Hungría en 1914 y de Holanda en 1917, cuando se comprobó que una viga biempotrada sólo colapsaría cuando se produjera plastificación en tres secciones, en los empotramientos y en alguna sección central. Hacia la década de los 40, tras varios tanteos en Alemania y en EEUU, Baker y sus colaboradores en Cambridge comenzaron una serie de ensayos sistemáticos sobre el análisis límite en pórticos que darían el impulso a la actual teoría del cálculo plástico, que se viene aplicando en la construcción de estructuras civiles desde los años 50. (Rus Carlborg, 2008).

El papel de investigadores como Fourier, que aplicaron la programación matemática en la resolución de problemas de cálculo plástico permitió grandes avances en el estudio de la plasticidad y de casos límites.

2.2. Hipótesis fundamentales

Se asumen ciertas hipótesis iniciales que permiten llegar a una solución única, se consideran las siguientes:

- Se asume que el material con el que se trabaja es homogéneo e isótropo y que se deforma de tal forma que a mayor carga corresponde mayor deformación (Perelli Botello, 2013).
- Se admite que en la fase elástico las estructuras se comportan de acuerdo con las leyes de la Resistencia de Materiales.
- Se suponen pequeños movimientos y deformaciones, por lo que se trabaja con las cargas aplicadas en la estructura sin deformar.
- Se acepta la hipótesis de Navier: las secciones al deformarse permanecen planas.
- Se considera que el módulo y límite elástico del material son iguales a tracción y a compresión.
- Únicamente se trabajará con cargas estáticas.
- Los fenómenos de inestabilidad como el pandeo no se tienen en cuenta. (Rodríguez Barrocal, 2020)

- Se considera un crecimiento proporcional de las cargas exteriores al pasar de un estado de cargas a otro superior (estado de cargas proporcional).
- Durante la fase elástica es válido el principio de superposición, sin embargo, durante la fase plástica no es aplicable. (Ballesteros Barranco, 2016)

Estas hipótesis se tendrán en cuenta a lo largo de todo el proyecto desarrollado en este documento.

2.3. Grado de hiperestaticidad

El grado de hiperestaticidad (GH) o grado de indeterminación estática hace referencia al número de fuerzas redundantes de la estructura, es decir, el número de fuerzas internas o reacciones desconocidas que no pueden obtenerse empleando únicamente las ecuaciones de equilibrio, debido a que el número de incógnitas excede el número total de ecuaciones de equilibrio disponibles. (Basset Salom, 2012)

Hay diferentes métodos para calcular el grado de hiperestaticidad, una de las formas más directas es mediante una ecuación que se diferencia para problemas que ocupan 1 dimensión en el espacio o en problemas que abarcan dos dimensiones en el espacio:

- Viga en un solo eje de dirección, una dimensión (1D):

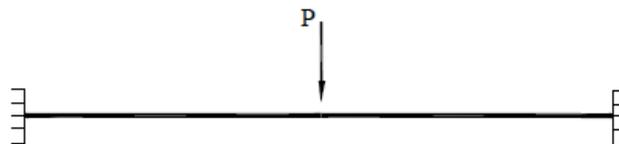


Figura 1: Barra biempotrada

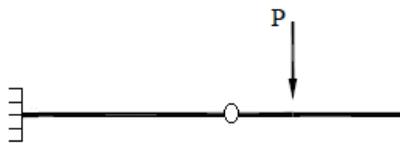


Figura 2: Barra empotrada con rótula en voladizo

La ecuación utilizada en este caso es:

$$GH = r - (2 + l)$$

Ecuación 1: Cálculo del grado de hiperestaticidad un eje de dirección

Siendo:

$$GH = \text{Grado de hiperestaticidad}$$

$r = n^{\circ}$ de reacciones en los apoyos

$l = n^{\circ}$ de libertades propias de la estructura

- Pórtico en dos ejes de dirección, dos dimensiones (2D):

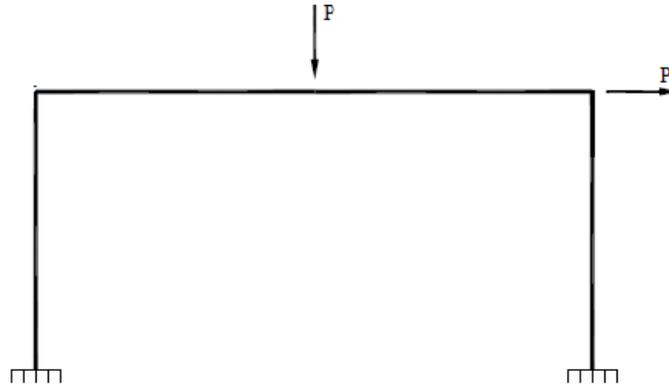


Figura 3: Pórtico biempotrado con dos cargas puntuales

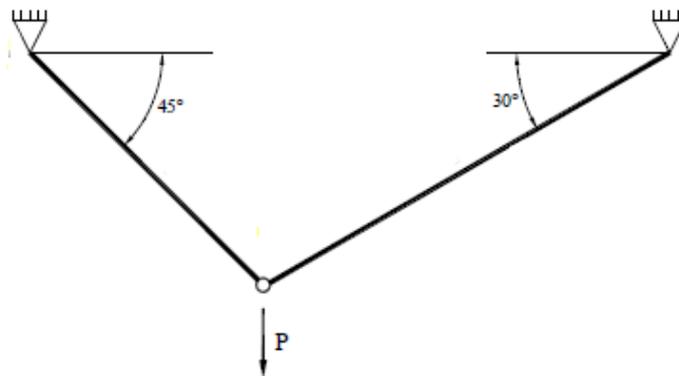


Figura 4: Estructura biapoyada con carga puntual y rótula

La ecuación utilizada en este caso es:

$$GH = r - (3 + l)$$

Ecuación 2: Cálculo del grado de hiperestaticidad dos ejes de dirección

Según el grado de hiperestaticidad, las estructuras pueden ser: isostáticas, si su grado de indeterminación es $GH = 0$, ya que es estáticamente determinada; estructuras hiperestáticas, que pueden tener distintos grados de indeterminación $GH > 0$, o mecanismo si su grado de indeterminación es $GH < 0$. (Departamento de materiales. Universidad Autónoma Metropolitana. UAM, 2013)

- $GH > 0$ Estructuras Hiperestáticas
- $GH = 0$ Estructuras Isostáticas
- $GH < 0$ Estructuras Hipostática o mecanismo

Estructura hiperestática

Una estructura es hiperestática cuando $GH > 0$, en ese caso el número de ecuaciones de equilibrio es menor que el número de incógnitas estáticas.

Una estructura hiperestática tiene infinitas configuraciones estáticamente admisibles, es estáticamente indeterminada, teniendo que considerar las condiciones de compatibilidad y las leyes de comportamiento para obtener la configuración estática real.

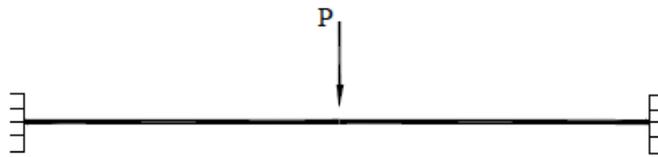


Figura 5: Estructura hiperestática, barra biempotrada

Estructura isostática

Una estructura es isostática cuando el $GH = 0$. El número de incógnitas estáticas coincide con el número de ecuaciones de equilibrio.

Tiene una única posible configuración estática admisible y esta estáticamente determinada, se obtiene aplicando las ecuaciones de equilibrio.



Figura 6: Estructura isostática, barra empotrada y con voladizo

Mecanismo

Es un mecanismo cuando el $GH < 0$. El número de ecuaciones de equilibrio es excesivo porque supera el número de incógnitas estáticas. Un mecanismo es una estructura en la que los miembros estructurales están dispuestos de tal manera que es susceptible de colapsar o derrumbarse al ser sometida a la acción de una carga. (Diccionario de Arquitectura y Construcción, s.f.)

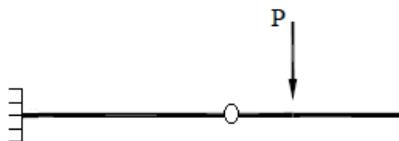


Figura 7: Mecanismo, barra empotrada con rótula en voladizo

2.4. Comportamiento de la sección

El comportamiento de una sección sometida a una tensión evoluciona desde un comportamiento elástico donde la máxima tensión que soporta no supera el límite elástico del material del que está formado, hasta un comportamiento plástico, donde la tensión máxima que soporta la sección alcanza el valor límite.

En el diagrama tensión- deformación [Figura 8], se puede diferenciar las fases por las que pasa la sección:

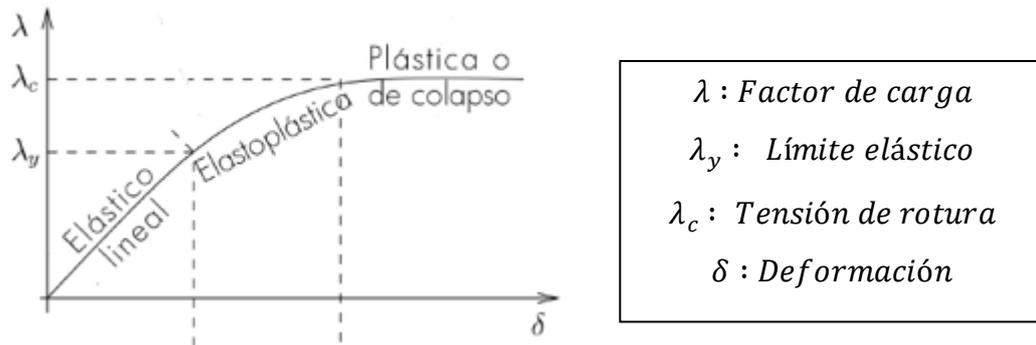


Figura 8: Diagrama Tensión - Deformación

A medida que el factor de carga aumenta, la sección sufre una evolución en su distribución de tensiones. Este proceso se puede dividir en fases: (Rus Carlborg, 2008)

- Fase elástico lineal: está definida entre el estado inicial de reposo y el punto límite de elasticidad. Se produce mientras la tensión máxima de todos los puntos de la viga no alcanza la de plastificación, se cumple que $\lambda < \lambda_y$. Durante esta fase la distribución de tensiones a lo largo de la sección es lineal, debido a que en esta fase elástico lineal la tensión es linealmente proporcional a la deformación [4] Ley de Hooke. Tiene un comportamiento elástico, recupera la forma inicial durante la descarga.
- Fase de plastificación parcial: sucede para $\lambda_y < \lambda < \lambda_c$, siendo λ_y el límite elástico y λ_c la tensión de rotura. El alargamiento unitario supera al límite elástico y comienzan las deformaciones permanentes. La tensión deja de crecer proporcionalmente y la distribución de tensiones toma la forma representada en la [Figura 11]. Es una fase de transición, hay zonas en régimen elástico y otras zonas plásticas.
- Fase plástica o de colapso: se produce en el momento que plastifican todos los puntos de la sección, pierde la capacidad de resistir/transmitir más carga y se deforma indefinidamente hasta alcanzar la rotura del material.

Ley de Hooke

Relaciona linealmente tensiones y deformaciones.

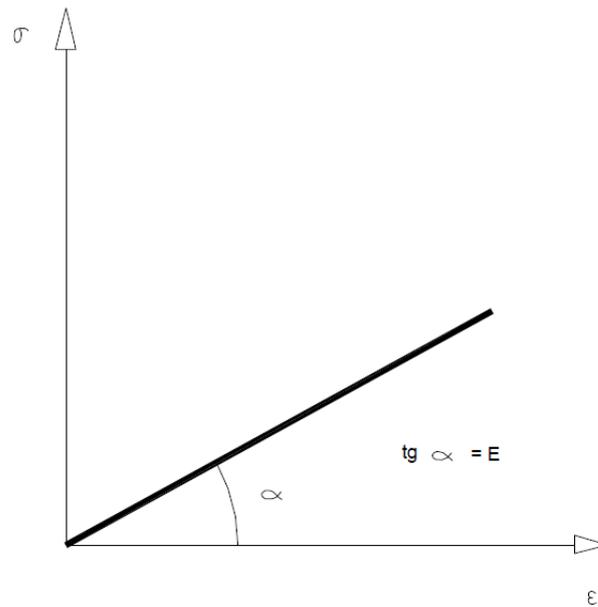


Figura 9: Ley de Hooke

Su expresión analítica es: $\sigma = E \cdot \varepsilon$

Siendo:

- σ : Tensión en *MPa* o *kN/m²*
- E : Módulo de Young (módulo de deformación longitudinal) del material en *MPa* o *kN/m²*
- ε : Deformación unitaria longitudinal (adimensional)

(Perelli Botello, 2013)

2.5. Rótula plástica

La explicación del concepto de rótula plástica y su proceso de formación, se basa en el ejemplo de una viga biapoyada sometida a una carga uniforme de valor ω y su factor de carga λ que evolucionará desde cero hasta el valor en el que se produce el momento de colapso de la viga. (Rus Carlborg, 2008)

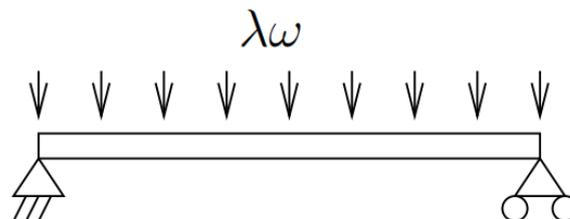


Figura 10: Viga biapoyada con carga uniforme

Acompañando al diagrama de tensión – deformación se muestra la evolución de la distribución de tensiones de la sección central a medida que el factor de carga aumenta.

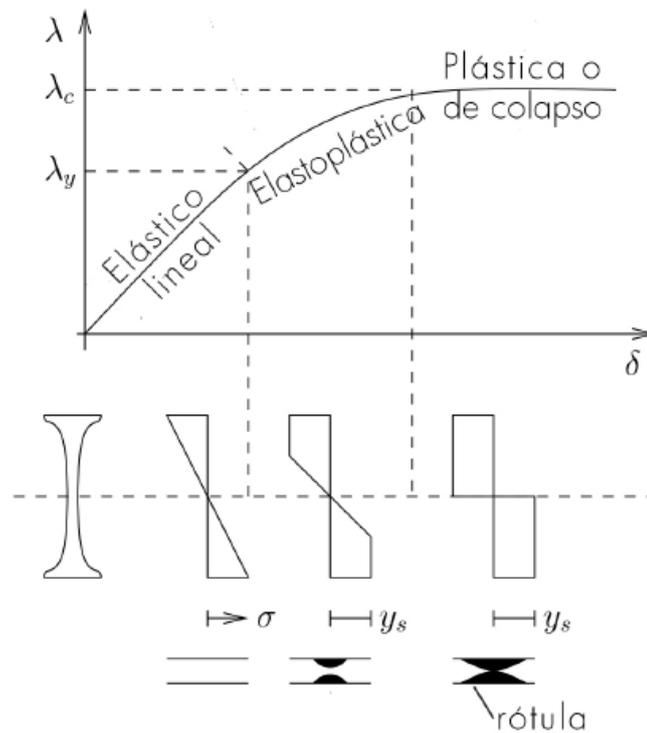


Figura 11: Evolución del factor de carga - deflexión, y la distribución de tensiones en la sección central

La formación de la rótula plástica comienza en la fase de plastificación parcial, y finaliza su proceso de formación en el instante de colapso, en la fase plástica, cuando plastifican todos los puntos de la sección de la rótula.

Cuando se ha formado la rótula plástica, la viga biapoyada se comporta como un mecanismo, denominado mecanismo de colapso.



Figura 12: Mecanismo de colapso de una viga biapoyada

Por lo general, el número de rótulas que han de formarse para que una estructura colapse es:

$$N^{\circ} \text{ Rotulas} = GH + 1$$

Ecuación 3: Número de rótulas necesarias para formar un mecanismo

Las rótulas plásticas se definen por secciones en las que se produce plastificación completa, con la consecuencia de que pueden girar indefinidamente, sin alteración del momento flector que las excita en ese instante, el cual se denomina momento plástico, M_p . (Rus Carlborg, 2008)

Las rótulas aparecen en las secciones de momento flector máximo, que en general son:

- Empotramientos
- Punto de unión entre barras, nudos, cambios de dirección, cambio de sección....
- Zona de aplicación de cargas puntuales/concentradas
- Secciones intermedias de barras con carga distribuida aplicada

Todas las posibles rotulas plásticas que pueden formarse en la estructura, se denominan NPR (número de posibles rótulas).

2.6. Mecanismo de colapso

Se pueden formar diferentes mecanismos de colapso en una estructura dependiendo de las cargas aplicadas sobre ella y la distribución de dichas cargas.

Teorema de Symonds-Neal

El número de mecanismos independientes es igual al número de ecuaciones de equilibrio que se pueden plantear independientemente. (Rus Carlborg, 2008)

$$N^{\circ} \text{ mecanismos independientes} = EQ = NPR - GH$$

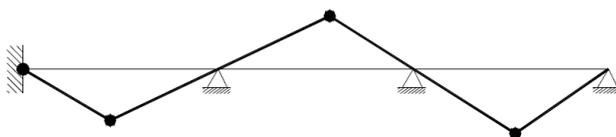
Ecuación 4: Número de mecanismos independientes o número de ecuaciones de equilibrio

Donde:

- *EQ*: Número de ecuaciones de equilibrio
- *NPR*: Número de posibles rótulas plásticas
- *GH*: Grado de hiperestaticidad

Según las rotulas plásticas que se formen, pueden darse diferentes tipos de mecanismo:

- Mecanismo completo:
Se produce cuando se cumple estrictamente la [Ecuación 3] y se forman solo $GH + 1$ rótulas.



$$GH = 3$$

$$\text{Numero rótulas} = 4$$

Figura 13: Mecanismo completo

- Mecanismo incompleto:

Se produce cuando únicamente colapsa una parte de la estructura con un número de rótulas inferior al de las que se forman en el mecanismo completo.

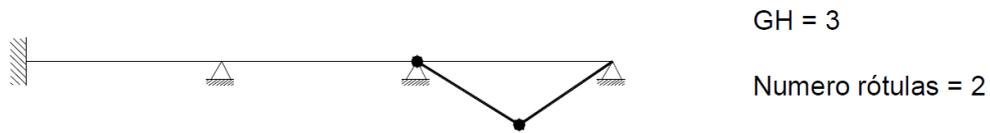


Figura 14: Mecanismo incompleto

– **Mecanismo supercompleto:**

Se da cuando se forman más rótulas de las necesarias para que se origine un mecanismo.

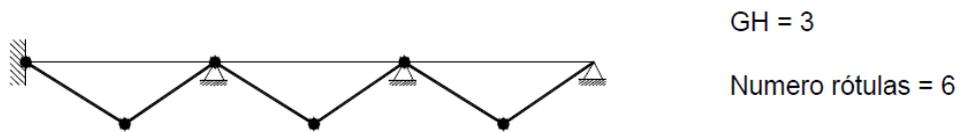


Figura 15: Mecanismo supercompleto

Para simplificar el cálculo de vigas continuas, se recomienda comprobar que no existen condiciones de compatibilidad en las rótulas, asegurando que el colapso de una parte de la estructura no afecta al resto de partes

Un mecanismo de colapso debe cumplir con ciertos requisitos:

- Equilibrio: los momentos flectores han de representar una ley en equilibrio entre las fuerzas internas de la estructura y las fuerzas aplicadas sobre esta.
- Mecanismo: en el instante de colapso, el momento flector tiene que ser igual al momento plástico, $M = M_p$ en un número suficiente de secciones como para formar un mecanismo en parte o toda la estructura.
- Plastificación: el momento flector no puede superar al momento plástico en ninguna sección.

A la hora de averiguar cuál es el mecanismo de colapso correcto se recurre a teoremas como el teorema del mínimo, el teorema del máximo y el teorema de unicidad. Para poder aplicar estos teoremas, es necesario conocer cuál será el factor de carga que provoca ese mecanismo y que nos permite conocer los diagramas de momentos flectores sobre la estructura.

2.7. Teoremas fundamentales de análisis plástico

2.7.1. Teorema del límite superior

La carga crítica P_{c_s} calculada a través de un mecanismo de colapso, siempre será mayor o igual a la carga de colapso P_c verdadera de la estructura:

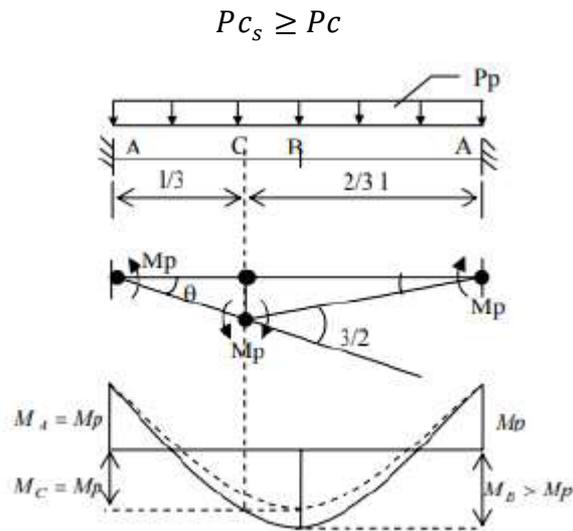


Figura 16: Cálculo límite superior - Viga biempotrada

Solo para el verdadero mecanismo de colapso, la carga calculada es igual a la verdadera carga de colapso: $Pc_s = Pc$ (Facultad de Ingeniería. UNNE)

2.7.2. Teorema del límite inferior

Una carga Pc_i calculada a basándose en un diagrama de momentos de equilibrio en el que los momentos no son superiores al momento plástico Mp , siempre será igual o inferior a la verdadera carga de colapso Pc de la estructura:

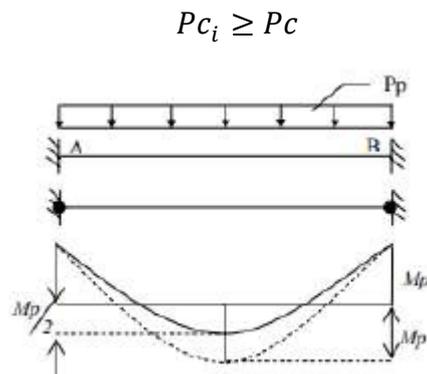


Figura 17: Cálculo límite inferior - Viga biempotrada

Únicamente se produciría el mecanismo de colapso si la carga calculada es igual a la verdadera carga de colapso: $Pc_i = Pc$ (Facultad de Ingeniería. UNNE)

2.7.3. Teorema de unicidad

Si se encuentra una distribución de momentos estáticamente en equilibrio, alcanzando en un número suficiente de secciones el momento plástico Mp , para que la estructura se convierta en un mecanismo inestable, entonces, la

carga correspondiente a esa distribución de momentos será necesariamente la carga de colapso de la estructura, ya que es el único valor de la carga que satisface los teoremas del límite superior y del límite inferior de manera simultánea. (ALACERO.ORG)

2.8. Métodos de resolución

2.8.1. Método estático

El método estático se basa en el Teorema del Límite Inferior.

Partiendo de las ecuaciones de equilibrio y de las incógnitas del problema, se suponen diferentes estados de colapso. Consiste en estudiar los diagramas de momentos flectores en equilibrio de una estructura sometida a cargas hiperestáticas y que produzcan el mayor número de rótulas plásticas posibles sin violar la condición de plasticidad: $M_i \leq M_p$, siendo M_i el momento obtenido en el diagrama para cada sección en el instante de colapso.

Los puntos de mayor momento flector son los puntos sospechosos de ser las secciones de rotura.

De cada diagrama estudiado se obtiene $P_{c_i} \leq P_c$, la carga máxima del diagrama será la de colapso P_c que produce el mecanismo de colapso. (Facultad de Ingeniería. UNNE)

2.8.2. Método cinemático

Basado en el Teorema del Límite Superior. Consiste en estudiar posibles mecanismos de rotura por la aparición de rótulas plásticas en distintos puntos y hallar en cada caso la carga crítica de equilibrio. La verdadera carga de colapso será la menor de todos los posibles mecanismos ($P_{c_s} \leq P_c$) y debe cumplir la condición de $M_i \leq M_p$.

A medida que aumenta el número de elementos y el número de cargas, también aumenta el número de posibles mecanismos de rotura. Para encontrar el verdadero mecanismo de colapso y descartar el resto que me darán límites superiores, se sigue el siguiente proceso: (Facultad de Ingeniería. UNNE)

- Determinar el número de posibles rótulas plásticas [NPR], explicado en el apartado [5] Rótula plástica.
- Seleccionar los posibles mecanismos de colapso.
- Calcular la carga de equilibrio para cada mecanismo mediante el Principio de los Trabajos Virtuales.
- Escoger la mínima de todas las cargas límite calculadas la menor de ellas, que será la que cumpla con los principios plásticos citados en el apartado [2.7.1] Teorema del límite superior.

2.9. Principio Trabajos Virtuales (PTV)

A continuación, se explicará el Principio de Trabajos Virtuales aplicado para cálculo plástico. (Rus Carlborg, 2008)

El Principio de los Trabajos Virtuales en su forma de ecuación de equilibrio, es decir, utilizando un estado real de fuerzas y esfuerzos con un estado virtual de deformaciones y desplazamientos compatible, genera una ecuación de equilibrio que puede proporcionar la ley de momentos. Recíprocamente, con un estado virtual de fuerzas y esfuerzos equilibrados, establece una ecuación de compatibilidad entre deformaciones y desplazamientos reales que permite calcular las rotaciones de la deformada.

$$\sum_i^n F_i \delta_i = \sum_i^m M_i \theta_i$$

Ecuación 5: Principio Trabajos Virtuales

En el enunciado del Principio de Trabajos Virtuales se hace referencia a desplazamientos virtuales, al tratarse de cuerpos rígidos, estos desplazamientos deben reunir las siguientes características: (Mroginiski)

- Ideal: el desplazamiento debe ser ideal o imaginario y deberse a cualquier acción, real o ficticia, independiente del sistema de fuerzas que realizan el trabajo.
- Pequeño: puede ser finito o infinitesimal, de manera que no modifique la geometría del sistema.
- Compatible: los desplazamientos virtuales pueden ser de cualquier tipo pero no pueden violar las condiciones de vínculo.

El PTV permite relacionar los momentos de las rótulas propuestas para el posible mecanismo de colapso y los ángulos de dichas rotulas con las cargas aplicadas y los desplazamientos de las secciones donde se aplican en el instante de colapso seleccionado como posible caso de plastificación.

Aplicado a un ejemplo de un pórtico sometido a una carga puntual P : (Rus Carlborg, 2008)

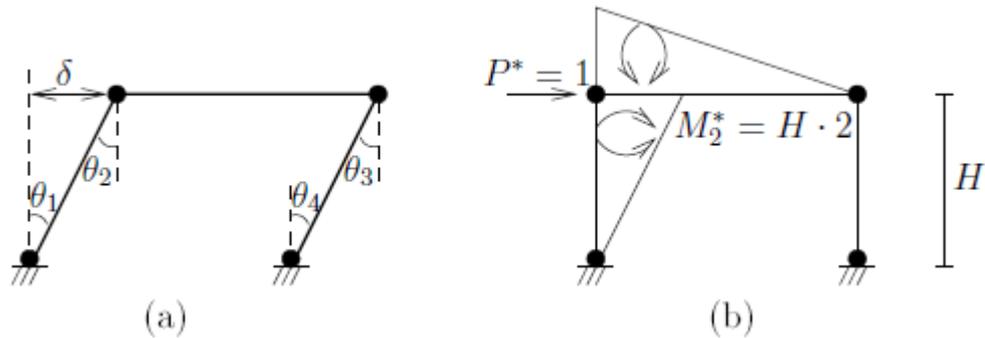


Figura 18: Estados real y virtual para el establecimiento de una ecuación de compatibilidad por el PTV

Para calcular la relación entre la deformada y la rotación de mecanismo en el nudo 2. A partir del estado real deformado [Figura 18.a] y definiendo un estado virtual [Figura 18.b]:

$$P^* \delta = M_2^* \theta_2 \rightarrow \theta_2 = \frac{\delta}{H}$$

Para calcular la relación entre la carga aplicada P y el momento plástico M_p para un mecanismo de colapso dado, a partir del estado real de esfuerzos [Figura 19.a] y el estado virtual de esfuerzos [Figura 19.b], se obtiene la ecuación:

$$\begin{cases} P^* \delta = P H \theta^* = M_1^* \theta^* + M_2^* \theta^* + M_3^* \theta^* + M_4^* \theta^* \\ M_i = M_p \end{cases} \rightarrow P = \frac{4M_p}{H}$$

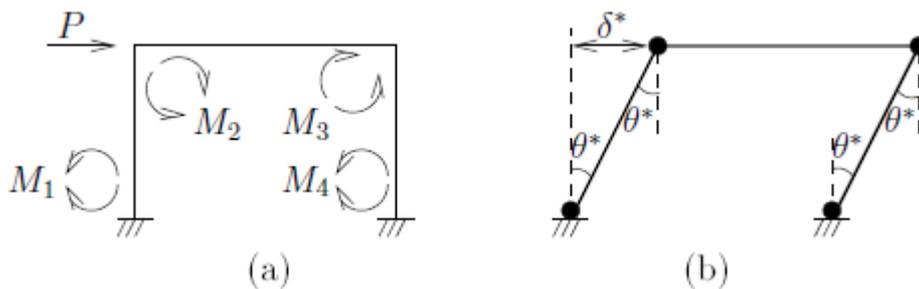


Figura 19: Estados para establecer con el PTV una ecuación de equilibrio.

2.10. Metodología del Método Secuencial

El método secuencial nos permite resolver problemas de cálculo plástico de estructuras sometidas a cargas externas.

Al igual que en el método cinemático, en el método secuencial, para abordar el problema es necesario conocer el grado de hiperestaticidad de la estructura, con las ecuaciones (Ecuación 1) y (Ecuación 2).

Otra incógnita imprescindible para la resolución del problema es el número posible de rotulas plásticas que puede llegar a formarse en la estructura. Siguiendo el criterio explicado en el apartado [Rótula plástica].

El número de ecuaciones de equilibrio [Ecuación 4] nos indicará el número de mecanismos independientes necesarios para abordar la resolución del problema.

A diferencia del método cinemático, no es necesario ensayar los posibles mecanismos de colapso, el método secuencial se aplica a partir de las ecuaciones de equilibrio obtenidas de estos mecanismos. Se trabaja con los momentos flectores como incógnitas y junto a las ecuaciones que se obtienen del PFV, se resuelve el sistema de ecuaciones (EQ+ECS).

Para obtener paso por paso el orden de formación de las rótulas plásticas hasta conseguir que la estructura se convierte en un mecanismo inestable, se parte de un análisis elástico lineal, asumiendo como nulos los giros de todas las secciones, se obtiene la sección con mayor momento flector. Para el resto de pasos, se toman como $\pm Mp$ los momentos flectores de los puntos donde se ha formado la rótula plástica y θ_i será una incógnita, siendo θ_i cada uno de los giros de dichas rótulas plásticas. El resto de las secciones candidatas a ser rótula plástica y de las cuales desconocemos cuál es el momento flector que soportan, sus momentos flectores M_j serán una incógnita y sus giros θ_j serán cero.

El número de rótulas que han de formarse será según lo explicado en el apartado [Mecanismo de colapso]. Una vez que se forme la última rótula plástica, la carga aplicada en ese instante será la carga de colapso de la estructura.

Con el método secuencial hemos podido obtener el orden de formación de las rótulas plásticas y con qué carga P se formaba cada una de ellas hasta convertir la estructura en mecanismo. Nos permite conocer también los giros y la distribución de momentos en cada instante.

Ejemplo aplicación Método Secuencial

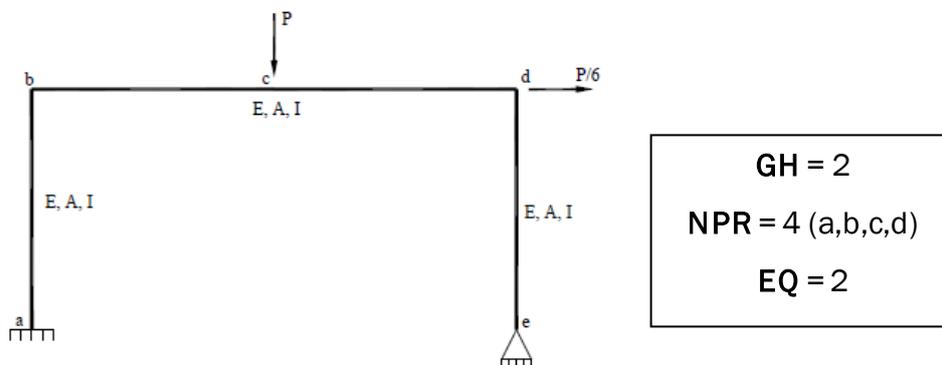
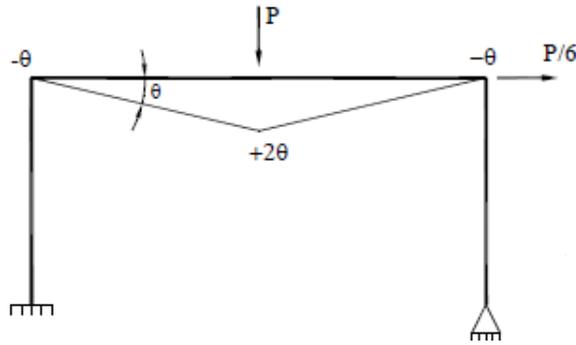


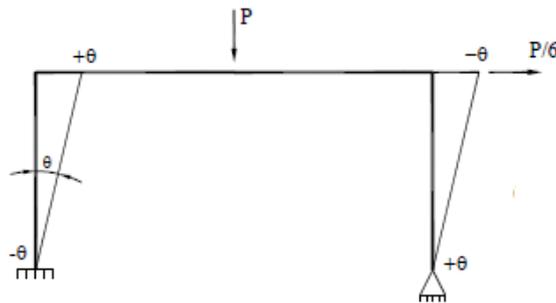
Figura 20: Ejemplo aplicación método secuencial

Son necesarios dos mecanismos independientes:



$$EQ1 = P \cdot L = -M_b + 2 \cdot M_c - M_d$$

Figura 21: Ejemplo aplicación método secuencial - MC1



$$EQ2 = P/6 \cdot L = -M_a + M_b - M_d$$

Figura 22: Ejemplo aplicación método secuencial - MC2

Se aplica el PFV para obtener las ecuaciones de compatibilidad:

Tabla 1: Ejemplo aplicación método secuencial - PFV genérico

	Secciones				
	1	2	3	4	5
M real	Ma	Mb	Mc	Md	Me
Giros	θa	θb	θc	θd	θe
ECi	m1	m2	m3	m4	m5

$$\delta \cdot F = \sum_i \left(\frac{L_i}{6 \cdot E \cdot I} \right) \left(m_1 (2 \cdot M_1 + M_2) + m_2 (M_1 + 2 \cdot M_2) + (m_1 + m_2) \frac{q_c \cdot L^2}{4} \right) + \sum m_i \cdot \theta_i$$

Ecuación 6: Principio fuerzas virtuales

Para este ejemplo:

Tabla 2: Ejemplo aplicación método secuencial - PFV aplicado

	Secciones				
	1	2	3	4	5
M real	M1	M2	M3	M4	0
Giros	0	θ2	θ3	θ4	0
EC1	0	1	1	1	0
EC2	1	0	-1/2	-1	0

Las ecuaciones de compatibilidad obtenidas en este ejemplo son:

$$EC1 \rightarrow \frac{L \cdot (M_1 + 5 \cdot M_2 + 6 \cdot M_3 + 5 \cdot M_4) + 6 \cdot E \cdot I \cdot (\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)}{E \cdot I} = 0$$

$$EC2 \rightarrow \frac{-L \cdot (4 \cdot M_1 + M_2 - 6 \cdot M_3 - 9 \cdot M_4) + 6 \cdot E \cdot I \cdot (\theta_3 + 2 \cdot \theta_4)}{E \cdot I} = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de equilibrio y las ecuaciones de compatibilidad para cada uno de los instantes en lo que se forma una rótula plástica, se obtiene el orden de formación de las rótulas plásticas.

En el primer paso, para calcular la primera rótula plástica, se aplica un análisis elástico lineal, la sección que soporte mayor momento flector, será la primera rótula plástica. Una vez formada la primera rótula plástica, el momento flector de esa sección deja de ser una incógnita, $M_x = \pm M_p$ mientras que su giro deja de ser nulo y pasa a ser una incógnita θ_x . Para obtener el resto de rótulas plásticas, se sigue el mismo procedimiento, las secciones con rótula plástica soportan un momento de valor $\pm M_p$ y tienen giro acumulado, y el resto de secciones no tienen giro y soportan un momento inferior al momento plástico.

La carga aplicada en el instante de formación de la última rótula plástica será la carga de colapso de la estructura.

CAPÍTULO 3:
VALIDACIÓN

3. VALIDACIÓN

Una vez que se han establecido las bases teóricas necesarias para hacer compatible la resolución de problemas de cálculo plástico aplicando el método secuencial, se muestran a continuación la validación de dicho método mediante 3 ejemplos.

El desarrollo del método secuencial comparte parte de la resolución con el método cinemático. El método cinemático nos permite conocer la carga de colapso en el instante que se forma el mecanismo y cuál es la última rótula plástica en formarse. Con el método secuencial somos capaces de seguir analizando paso a paso este proceso de plastificación de la estructura, calculando una a una el orden de formación de las rótulas plásticas hasta convertir la estructura en mecanismo, y las cargas de colapso, giros y momentos internos en cada uno de esos instantes de formación de las rótulas. Además, con el método secuencial podemos abordar problemas de estructuras sometidas a cargas distribuidas, siendo su resolución casi imposible con el método cinemático.

La aplicación y desarrollo de este método se ha llevado a cabo utilizando como herramienta el programa Wolfram Mathematica donde se han resuelto los distintos ejemplos.

Los ejemplos resueltos por el método cinemático han sido obtenidos de los apuntes de Estructuras y Construcciones Industriales del Grado de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Valladolid (Área de Mecánica de los Medios Continuos y Teoría de Estructuras)

El código de programación completo desarrollado en el programa Wolfram Mathematica está en [8. ANEXOS].

3.1. EJEMPLO 1

Se trata de un pórtico empotrado - apoyado sometido a dos cargas puntuales: P en el centro del dintel que actúa en dirección perpendicular a este y $P/6$ que actúa en dirección horizontal en la parte superior del pilar derecho. Véase la [Figura 23]:

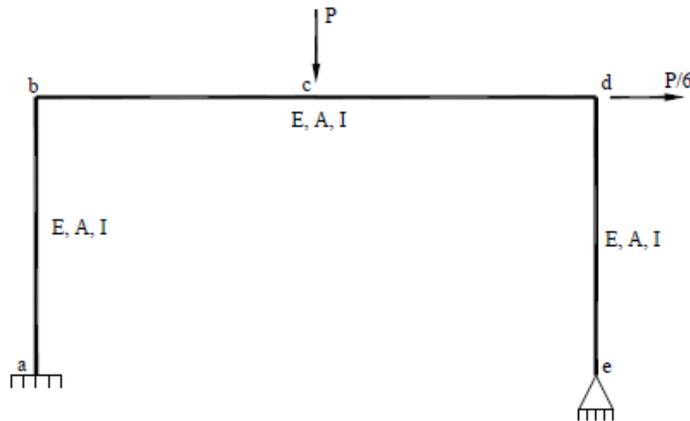


Figura 23: Ejemplo 1 - Pórtico empotrado - apoyado sometido a cargas puntuales

Datos de la estructura y del problema:

- Material de la estructura: **acero S275**
- Módulo de Young: $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$
- Inercia: $I_z = 8360 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$
- Módulo plástico: $S = 628 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$
- Longitud de las barras: $Lab = L$ y $Lbd = 2 \cdot L$ con $L = 4 \text{ m}$

Con el límite elástico (σ_e) y el módulo plástico, calculo el momento plástico de la sección:

$$M_p = S * \sigma_e = 628 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 * 275 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$$

Al igual que en el método cinemático, para resolver problemas de cálculo plástico, en el método secuencial para abordar el problema es necesario conocer el grado de hiperestaticidad de la estructura; aplicando (Ecuación 2):

$$GH = 5 - (3 + 0) = 2$$

Otra incógnita imprescindible para la resolución del problema es el número posible de rótulas plásticas que puede llegar a formarse en la estructura. Siguiendo el criterio explicado en el apartado [5] Rótula plástica, consideramos como secciones críticas para la formación de rótulas plásticas a las secciones:

$$a, b, c, d \rightarrow NPR = 4$$

El número de ecuaciones de equilibrio necesarias para abordar la resolución del problema viene dado por la ecuación (Ecuación 4):

$$EQ = NPR - GH = 4 - 2 = 2$$

Se plantean dos mecanismos de colapso independientes de los que se obtienen las 2 ecuaciones de equilibrio [EQ1] y [EQ2]:

- Mecanismo de colapso 1:

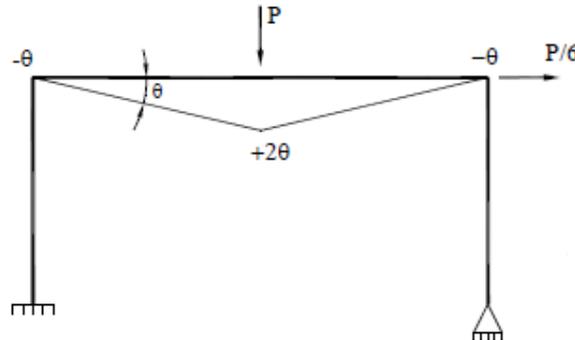


Figura 24: Ejemplo 1 - Mecanismo de colapso 1

El criterio de signos para los ángulos es el siguiente:

- Si se reduce el ángulo entre las barras unidas en ese nodo, el giro es negativo.
- Si el ángulo que forman la unión de las barras en el nodo después de la deformación ha aumentado, el giro es positivo.

Planteando el principio de trabajos virtuales obtenemos la primera ecuación de equilibrio:

$$EQ1 \rightarrow P \cdot L \cdot \theta = Mb \cdot (-\theta) + Mc \cdot (+2\theta) + Md \cdot (-\theta)$$

Simplificando de la ecuación los ángulos:

$$EQ1 \rightarrow P \cdot L = -Mb + 2 \cdot Mc - Md$$

Se lleva a cabo el mismo procedimiento para la obtención de la segunda ecuación de equilibrio. Se plantea el segundo mecanismo de colapso independiente:

- Mecanismo de colapso 2:

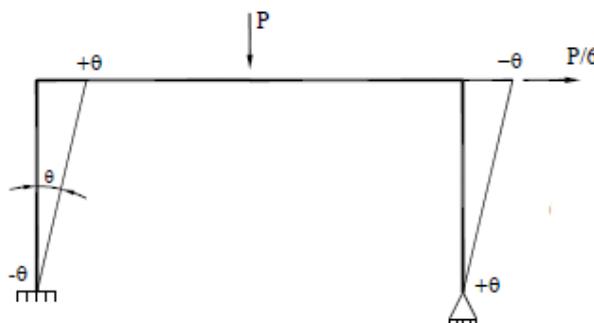


Figura 25: Ejemplo 1 - Mecanismo de colapso 2

$$EQ2 \rightarrow \frac{P}{6} \cdot L \cdot \theta = Ma(-\theta) + Mb \cdot (+\theta) + Md \cdot (-\theta)$$

$$EQ2 \rightarrow P \cdot \frac{L}{6} = -Ma + Mb - Md$$

Si supongo como mecanismo de colapso real el mecanismo 1, considerando los momentos internos correspondientes, obtengo la carga de colapso para el mecanismo 1:

$$\begin{cases} Mb = -Mp \\ Mc = +Mp \\ Md = -Mp \end{cases} \quad Pc_1 \cdot L = +Mp + 2 \cdot Mp + Mp \quad \rightarrow \quad Pc_1 = \frac{4 \cdot Mp}{L}$$

Si en cambio, se supone el mecanismo 2 como mecanismo de colapso, considerando sus respectivos momentos internos:

$$\begin{cases} Ma = -Mp \\ Mb = +Mp \\ Md = -Mp \end{cases} \quad \frac{Pc_2 \cdot L}{6} = +Mp + Mp + Mp \quad \rightarrow \quad Pc_2 = \frac{18 \cdot Mp}{L}$$

Ensayando la carga crítica mínima, $Pc_{\min} = Pc_1$, obtengo el momento de la sección en a:

$$\begin{cases} Mb = -Mp \\ Mc = +Mp \\ Md = -Mp \end{cases} \rightarrow Pc_1 = \frac{4 \cdot Mp}{L} \rightarrow \frac{4 \cdot Mp}{L} \cdot \frac{L}{6} = -Ma - Mp + Mp$$

$$Ma = -\frac{2 \cdot Mp}{3} \rightarrow |Ma| < Mp \rightarrow \text{Seguro}$$

Para calcular los giros y desplazamientos se aplica el principio de fuerzas virtuales:

$$GH = 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = -m_2 + 2 \cdot m_3 - m_4 \\ 0 = -m_1 + m_2 - m_4 \end{array} \right.$$

Tabla 3: Ejemplo 1 - PFV por el método cinemático

	Secciones				
	1	2	3	4	5
M real	- 2·Mp/3	- Mp	+ Mp	-Mp	0
Giros		θ2	θ3	θ4	
EC1	0	1	1	1	0
EC2	1	0	- 1/2	- 1	0

Tras desarrollar el PFV, se obtienen las siguientes ecuaciones de compatibilidad:

$$EC1 \rightarrow -\frac{7 \cdot Mp \cdot L}{9 \cdot E \cdot I} + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 0$$

$$EC2 \rightarrow \frac{Mp \cdot L}{18 \cdot E \cdot I} + \frac{\theta_3}{2} + \theta_4 = 0$$

El método cinemático nos permite calcular cual es la última rotula plástica y cuáles son los giros del resto de secciones en el instante de colapso:

○ **Ultima rótula plástica**

- Sección 3: $\theta_3 = 0$ $\theta_4 = -\frac{M_P \cdot L}{18EI}$

$$\theta_2 = \frac{5 \cdot M_P \cdot L}{6EI} \iff M_2 = -M_P \quad \text{NO Compatible}$$

- Sección 2:

$$\theta_2 = \frac{5 \cdot M_P \cdot L}{6EI} - \theta \quad \theta_3 = +2\theta \quad \theta_4 = -\frac{M_P \cdot L}{18EI} - \theta \quad \text{MSR}$$

$$\theta_2 = 0 \iff \theta = \frac{5 \cdot M_P \cdot L}{6EI}$$

$$\left. \begin{array}{l} \theta_3 = \frac{5 \cdot M_P \cdot L}{3EI} \iff M_3 = +M_P \\ \theta_4 = -\frac{8 \cdot M_P \cdot L}{9EI} \iff M_4 = -M_P \end{array} \right\} \text{OK}$$

Figura 26: Ejemplo 1 - Calculo de la última rótula plástica y de los giros en el instante de colapso mediante el método cinemático.

Con estos resultados daríamos por finalizada la resolución del problema de cálculo plástico con el método cinemático.

El método secuencial tiene notables diferencias en la resolución del problema. Con el método secuencial no se ensaya el mecanismo de colapso, se plantea el PFV con todas las incógnitas. Partiendo de la declaración de las ecuaciones de equilibrio, se desarrollan las ecuaciones de compatibilidad:

$$EQ1 \rightarrow P \cdot L = -M_b + 2 \cdot M_c - M_d$$

$$EQ2 \rightarrow P \cdot \frac{L}{6} = -M_a + M_b - M_d$$

Tras desarrollar el PFV, se obtienen las 2 ecuaciones de compatibilidad:

$$GH = 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = -m_2 + 2 \cdot m_3 - m_4 \\ 0 = -m_1 + m_2 - m_4 \end{array} \right.$$

Tabla 4: Ejemplo 1 - PFV por el método secuencial

	Secciones				
	1	2	3	4	5
M real	M1	M2	M3	M4	0
Giros	0	θ_2	θ_3	θ_4	0
EC1	0	1	1	1	0
EC2	1	0	-1/2	-1	0

$$EC1 \rightarrow \frac{L \cdot (M_1 + 5 \cdot M_2 + 6 \cdot M_3 + 5 \cdot M_4) + 6 \cdot E \cdot I \cdot (\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)}{E \cdot I} = 0$$

$$EC2 \rightarrow \frac{-L \cdot (4 \cdot M_1 + M_2 - 6 \cdot M_3 - 9 \cdot M_4) + 6 \cdot E \cdot I \cdot (\theta_3 + 2 \cdot \theta_4)}{E \cdot I} = 0$$

Se lleva a cabo el análisis elástico-lineal del problema haciendo cero el giro de todas las secciones. Obtengo que la sección que mayor momento soporta es la sección 3 = sección c, con lo cual, podemos asegurar que la primera rótula plástica se forma en la sección c. La carga con la que se produce esta primera rótula es inferior a la carga de colapso que habíamos calculado con el método directo para el mecanismo 1, con lo cual, el resultado es lógico.

Si $\theta_2 = 0$, $\theta_3 = 0$, $\theta_4 = 0$, entonces:

Tabla 5: Ejemplo 1 - Cálculo de la primera rótula plástica mediante el método secuencial

		Secciones				
		1	2	3	4	5
M		M1	M2	M3	M4	0
Giros		0	0	0	0	0

$$M_1 = -\frac{44 \cdot P}{237}, \quad M_2 = -\frac{118 \cdot P}{237}, \quad M_3 = \frac{299 \cdot P}{237}, \quad M_4 = -\frac{232 \cdot P}{237}$$

$$P \text{ para } M_3 = Mp \rightarrow P = \frac{3.17057 Mp}{L}$$

El siguiente paso en este método es calcular la siguiente rótula plástica. Se parte del instante anterior en el que la sección 3 (primera rótula plástica) ha alcanzado el momento plástico. Sabemos que el momento que soporta la sección c es Mp pero desconocemos el giro de esta. Con el resto de secciones, pasa lo contrario, desconocemos el momento que soportan pero calculamos el máximo para estas condiciones suponiendo su giro nulo.

Tabla 6: Ejemplo 1 - Cálculo de la segunda rótula plástica según método secuencial

		Secciones				
		1	2	3	4	5
M		M1	M2	Mp	M4	0
Giros		0	0	θ_3	0	0

$$M_1 = -34540 + \frac{1}{15} \cdot P, \quad M_2 = 155430 - \frac{49}{30} \cdot P$$

$$\theta_3 = -1.582 \cdot 10^{-10} (654878400 - 4784P), \quad M_4 = 189970 - \frac{71}{30} \cdot P$$

El mayor momento tras haber alcanzado el momento plástico en la sección c, se da en la sección 4 (sección d), que será nuestra segunda rótula plástica y se produce al aplicar una carga P menor que $P_{c1} = 4Mp/L$

$$P \text{ para } M_4 = -Mp \rightarrow P = \frac{3.5493 Mp}{L}$$

Para calcular la tercera rótula plástica, se sigue el mismo procedimiento que para calcular la segunda rótula plástica. Se conocen los momentos de las secciones c y d, que son iguales al momento plástico y se desconocen los momentos de las secciones 1 y 2. También son incógnitas los giros de las rótulas c y d.

Tabla 7: Ejemplo 1 - Cálculo de la tercera rótula plástica según método secuencial

	Secciones				
	1	2	3	4	5
M	M1	M2	Mp	-Mp	0
Giros	0	0	θ_3	θ_4	0

$$M_1 = 690800 - \frac{14}{3} \cdot P, \quad M_2 = 518100 - 4 \cdot P,$$

$$\theta_3 = -1.899 \cdot 10^{-8} \cdot (21414800 - 144P),$$

$$\theta_4 = -1.582 \cdot 10^{-9} (-174081600 + 1136P)$$

Nuestra tercera y última rótula plástica será en el nodo 2, al haberse formado las rótulas en c y d, podemos suponer que el mecanismo de colapso que se está formando es el mecanismo 1.

Para $M_2 = -Mp \rightarrow P = \frac{4 \cdot Mp}{L}$

La estructura tenía 2 grados de hiperestaticidad, con lo cual, la estructura se convierte en mecanismo inestable al formarse $GH + 1 = 3$ rótulas plásticas o menos si se forma un mecanismo incompleto.

Con el método secuencial hemos podido obtener el orden de formación de las rótulas plásticas y con qué carga P se formaba cada una de ellas hasta convertir la estructura en mecanismo. Nos permite conocer también los giros y la distribución de momentos en cada instante.

En el momento de formación de la última rótula plástica, la carga de colapso coincide con la carga crítica que habíamos calculado con el método cinemático y además con ambos métodos coincide la última rótula plástica en formarse que es la sección 2 - sección b.

3.2. EJEMPLO 2

Se trata de un pórtico biempotrado sometido a dos cargas puntuales de mismo módulo P en el centro del dintel que actúa en dirección perpendicular a este y en dirección horizontal en la parte superior del pilar derecho. Véase [Figura 27].

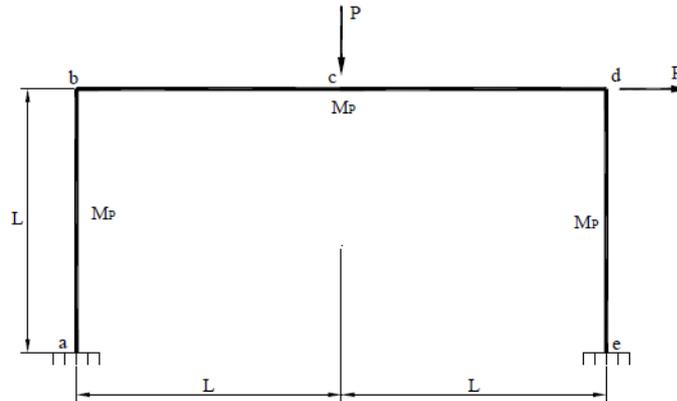


Figura 27: Ejemplo 2 - Pórtico biempotrado sometido a cargas puntuales

Datos de la estructura y del problema:

- Material de la estructura: **acero S275**
- Módulo de Young: $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$
- Inercia: $I_z = 8360 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$
- Módulo plástico: $S = 628 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$
- Longitud $L = 4 \text{ m}$

Con el límite elástico (σ_e) y el módulo plástico, calculo el momento plástico de la sección: $M_p = S * \sigma_e = 628 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 * 275 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$

Para el cálculo del grado de hiperestaticidad, (Ecuación 2): $GH = 6 - 3 = 3$

Las secciones candidatas a rótula plástica son: $a, b, c, d, e \rightarrow NPR = 5$

Por lo tanto, el número necesario de mecanismos independientes y de ecuaciones de equilibrio será: (Ecuación 4) $EQ = NPR - GH = 2$

- Mecanismo de colapso 1 (MC1 \rightarrow EQ1):

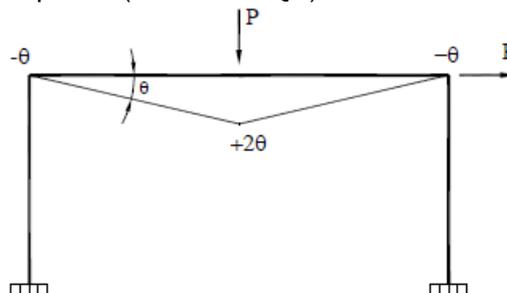


Figura 28: Ejemplo 2 - Mecanismo de colapso 1

$$EQ1 \rightarrow P \cdot L \cdot \theta = Mb \cdot (-\theta) + Mc \cdot (+2\theta) + Md \cdot (-\theta)$$

$$EQ1 \rightarrow P \cdot L = -Mb + 2 \cdot Mc - Md$$

- Mecanismo de colapso 2 (MC2 \rightarrow EQ2):

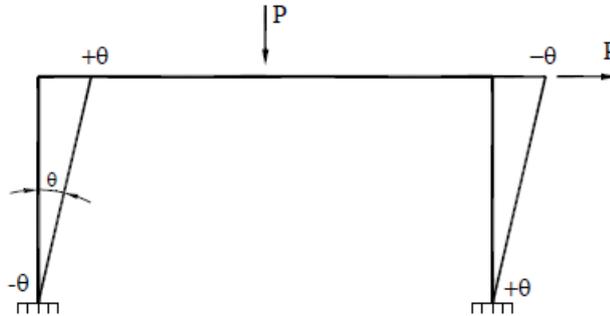


Figura 29: Ejemplo 2 - Mecanismo de colapso 2

$$EQ2 \rightarrow P \cdot L \cdot \theta = Ma \cdot (-\theta) + Mb \cdot (+\theta) + Md \cdot (-\theta) + Me \cdot (+\theta)$$

$$EQ2 \rightarrow P \cdot L = -Ma + Mb - Md + Me$$

Si se resuelve el problema según el método cinemático, es necesario ensayar los mecanismos. El mecanismo con menor carga de colapso será el verdadero mecanismo de colapso.

Si supongo el MC1 como verdadero mecanismo de colapso:

$$\begin{cases} Mb = -Mp \\ Mc = +Mp \\ Md = -Mp \end{cases} \quad Pc_1 \cdot L = +Mp + 2 \cdot Mp + Mp \quad \rightarrow \quad Pc_1 = \frac{4 \cdot Mp}{L}$$

Si fuese el mecanismo 2:

$$\begin{cases} Ma = -Mp \\ Mb = +Mp \\ Md = -Mp \\ Me = +Mp \end{cases} \quad Pc_2 \cdot L = +Mp + Mp + Mp + Mp \quad \rightarrow \quad Pc_2 = \frac{4 \cdot Mp}{L}$$

Ensayando el mecanismo 1:

$$\begin{cases} Mb = -Mp \\ Mc = +Mp \\ Md = -Mp \end{cases} \quad \rightarrow \quad Pc_1 = \frac{4 \cdot Mp}{L} \quad \rightarrow \quad EQ2: 4 \cdot Mp = Me - Ma$$

$|Ma| > Mp$, $|Me| > Mp$ \rightarrow No es seguro.

Ensayando el mecanismo 2:

$$\begin{cases} Ma = -Mp \\ Mb = +Mp \\ Md = -Mp \\ Me = +Mp \end{cases} \quad \rightarrow \quad Pc_2 = \frac{4 \cdot Mp}{L} \quad \rightarrow \quad EQ1: Mc = 2 \cdot Mp > Mp \quad \rightarrow \quad \text{No es seguro.}$$

Como ninguno de los mecanismos es seguro, se prueba a ensayar la combinación de ellos: MC1+MC2 (EQ1+EQ2)

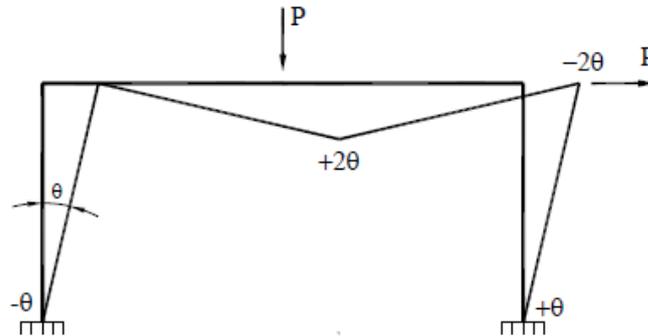


Figura 30: Ejemplo 2 - Combinación MC1+MC2

$$EQ1 + EQ2: \quad 2 \cdot (P \cdot L) = -M_b + 2 \cdot M_c - M_d - M_a + M_b - M_d + M_e$$

$$\begin{cases} M_a = -M_p \\ M_c = +M_p \\ M_d = -M_p \\ M_e = +M_p \end{cases} \quad 2 \cdot P_c \cdot L = 6 M_p \rightarrow P_c = 3 \cdot \frac{M_p}{L}; \quad M_b = 0 < M_p \rightarrow \text{Seguro}$$

Para obtener las ecuaciones de compatibilidad se aplica el PFV:

$$GH = 3 \quad \begin{cases} 0 = -m_2 + 2 \cdot m_3 - m_4 \\ 0 = -m_1 + m_2 - m_4 + m_5 \end{cases}$$

Tabla 8: Ejemplo 2 - PFV por el método cinemático

	Secciones				
	1	2	3	4	5
M real	-Mp	0	+Mp	-Mp	+Mp
Giros	θ_1	0	θ_3	θ_4	θ_5
EC1	1	1	$\frac{1}{2}$	0	0
EC2	0	0	$\frac{1}{2}$	1	1
EC3	0	1	1	1	0

$$EC1 \rightarrow -\frac{M_p \cdot L}{12 \cdot E \cdot I} + \theta_1 + \frac{\theta_3}{2} = 0$$

$$EC2 \rightarrow \frac{M_p \cdot L}{12 \cdot E \cdot I} + \frac{\theta_3}{2} + \theta_4 + \theta_5 = 0$$

$$EC3 \rightarrow \frac{M_p \cdot L}{6 \cdot E \cdot I} + \theta_3 + \theta_4 = 0$$

El método cinemático nos permite calcular cual es la última rotula plástica y cuáles son los giros del resto de secciones en el instante de colapso:

○ **Ultima rótula plástica**

- Sección 3: $\theta_3 = 0$

$$\theta_4 = -\frac{M_P \cdot L}{6EI} \quad \theta_5 = \frac{M_P \cdot L}{12EI}$$

$$\theta_1 = \frac{M_P \cdot L}{12EI} \iff M_1 = -M_P \quad \text{NO Compatible}$$

- Sección 1:

$$\theta_1 = \frac{M_P \cdot L}{12EI} - \theta \quad \theta_4 = -\frac{M_P \cdot L}{6EI} - 2 \cdot \theta \quad \theta_5 = \frac{M_P \cdot L}{12EI} + \theta \quad \text{MSR}$$

$$\theta_1 = 0 \implies \theta = \frac{M_P \cdot L}{12EI}$$

$$\left. \begin{aligned} \theta_3 = \frac{M_P \cdot L}{6EI} &\iff M_3 = +M_P \\ \theta_4 = -\frac{M_P \cdot L}{3EI} &\iff M_4 = -M_P \\ \theta_5 = \frac{M_P \cdot L}{6EI} &\iff M_5 = +M_P \end{aligned} \right\} \text{OK}$$

Figura 31: Ejemplo 2 - Calculo de la última rótula plástica y de los giros en el instante de colapso mediante el método cinemático.

Los resultados obtenidos con el método cinemático son:

- Mecanismo de colapso: Combinación MC1+MC2
- Rótulas plásticas formadas: *a, c, d, e*
- Carga de colapso: $P_c = 3 \cdot M_p/L$
- Última rótula plástica en formarse: Rótula en *a*

Para resolver este problema de cálculo plástico mediante el método secuencial, no es necesario ensayar los mecanismos de colapso; se desarrolla el PFV directamente con las ecuaciones de equilibrio:

$$EQ1 \rightarrow P \cdot L = -M_b + 2 \cdot M_c - M_d$$

$$EQ2 \rightarrow P \cdot L = -M_a + M_b - M_d + M_e$$

Al aplicar el PFV, se obtienen las ecuaciones de compatibilidad necesarias:

$$GH = 3 \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= -m_2 + 2 \cdot m_3 - m_4 \\ 0 &= -m_1 + m_2 - m_4 + m_5 \end{aligned} \right.$$

Tabla 9: Ejemplo 2 - PFV por el método secuencial

		Secciones				
		1	2	3	4	5
M real		M1	M2	M3	M4	M5
Giros		θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5
EC1		1	1	$\frac{1}{2}$	0	0
EC2		0	0	$\frac{1}{2}$	1	1
EC3		0	1	1	1	0

$$EC1 \rightarrow \frac{L \cdot (3 \cdot M_1 + 3 \cdot M_2)}{6 \cdot E \cdot I} + \frac{L \cdot \left(2 \cdot M_2 + M_3 + \frac{1}{2} \cdot (M_2 + 2 \cdot M_3) \right)}{6 \cdot E \cdot I} + \frac{L \cdot (2 \cdot M_3 + M_4)}{12 \cdot E \cdot I} + \theta_1 + \theta_2 + \frac{\theta_3}{2} = 0$$

$$EC2 \rightarrow \frac{L \cdot (M_2 + 2 \cdot M_3)}{12 \cdot E \cdot I} + \frac{L \cdot \left(M_3 + 2 \cdot M_4 + \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot M_3 + M_4) \right)}{6 \cdot E \cdot I} + \frac{L \cdot (3 \cdot M_4 + 3 \cdot M_5)}{6 \cdot E \cdot I} + \frac{\theta_3}{2} + \theta_4 + \theta_5 = 0$$

$$EC3 \rightarrow \frac{L \cdot (M_1 + 2 \cdot M_2)}{6 \cdot E \cdot I} + \frac{L \cdot (3 \cdot M_2 + 3 \cdot M_3)}{6 \cdot E \cdot I} + \frac{L \cdot (3 \cdot M_3 + 3 \cdot M_4)}{6 \cdot E \cdot I} + \frac{L \cdot (2 \cdot M_4 + M_5)}{6 \cdot E \cdot I} + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 0$$

Para obtener la primera rótula plástica en formarse, se calculan los momentos flectores de las diferentes secciones tomando su giro como nulo.

Tabla 10: Ejemplo 2 - Cálculo de la primera rótula plástica mediante el método secuencial

		Secciones				
		1	2	3	4	5
M		M1	M2	M3	M4	M5
Giros		0	0	0	0	0

$$M_1 = -\frac{17}{20} \cdot P, \quad M_2 = -\frac{P}{20}, \quad M_3 = \frac{6}{5} \cdot P, \quad M_4 = -\frac{31}{20} \cdot P, \quad M_5 = \frac{33}{20} \cdot P$$

La primera rótula plástica se forma en la sección 5 (sección *e*) ya que es la que mayor momento flector soporta.

$$\text{Cuando } M_5 = Mp \Rightarrow P = \frac{2.42424 \cdot Mp}{L} < Pc$$

Para calcular la 2ª rótula plástica, se parte del momento en el que $M_5 = Mp$, conocemos el momento flector que soporta, que es de igual valor que el momento plástico y desconocemos su giro. Para el resto de secciones, conocemos su giro, nulo debido a que no se ha formado aún rótula plástica,

pero desconocemos el momento flector que soportan. Para $M_5 = Mp$ y $\theta_5 \neq 0$:

Tabla 11: Ejemplo 2 - Cálculo de la segunda rótula plástica mediante el método secuencial

		Secciones				
		1	2	3	4	5
M		M1	M2	M3	M4	Mp
Giros		0	0	0	0	θ_5

$$M_1 = \frac{1}{79} (8462300 - 148 \cdot P) , \quad M_2 = \frac{1}{158} (-7944200 + 68 \cdot P) ,$$

$$M_3 = \frac{1}{79} (-1381600 + 108 \cdot P) , \quad M_4 = \frac{1}{158} (2417800 - 268 \cdot P)$$

$$\theta_5 = -3.6051 \cdot 10^{-10} (55264000 - 528 P)$$

Gracias a la información de los signos, se sabe que la sección 1 para que plastifique ha de alcanzar $-Mp$, aunque el momento que soporta es el más grande, no plastifica con un momento flector positivo. La segunda rótula plástica se produce en la sección 4 (sección d).

Cuando $M_4 = -Mp$, la carga $P = \frac{2.567 \cdot Mp}{L}$

Para calcular la siguiente rótula plástica, se parte de que $M_5 = Mp$ y $M_4 = -Mp$, los giros de estas secciones serán distintos a cero:

Tabla 12: Ejemplo 2 - Cálculo de la tercera rótula plástica mediante el método secuencial

		Secciones				
		1	2	3	4	5
M		M1	M2	M3	-Mp	Mp
Giros		0	0	0	θ_4	θ_5

$$M_1 = \frac{1}{20} (5526400 - 68 P) , \quad M_2 = \frac{1}{20} (-1381600 + 12P)$$

$$M_3 = \frac{1}{40} (-4835600 + 92P) , \quad \theta_4 = -4.747 \cdot 10^{-10} (-118817600 + 1072P)$$

$$\theta_5 = -4.747 \cdot 10^{-10} (52500800 - 496P)$$

La tercera rótula plástica se produce en la sección 3 (sección c)

Para el cálculo de la cuarta y última rótula plástica ($GH + 1$) se parte de las siguientes condiciones:

Tabla 13: Ejemplo 2 - Cálculo de la cuarta rótula plástica mediante el método secuencial

		Secciones				
		1	2	3	4	5
M		M1	M2	Mp	-Mp	Mp
Giros		0	0	θ_3	θ_4	θ_5

$$M_1 = 863500 - 8P, \quad M_2 = 518100 - 4P$$

$$\theta_3 = -9.493 \cdot 10^{-9}(46974400 - 368P)$$

$$\theta_4 = -1.899 \cdot 10^{-8}(-15888400 + 128P)$$

$$\theta_5 = -9.493 \cdot 10^{-9}(9671200 - 80P)$$

La última rótula plástica se produce en la sección 1 (sección *a*), cuando $M_1 = -Mp$, es ese instante, la carga que actúa sobre la estructura es $P = 3 \cdot \frac{Mp}{L} = Pc$, que es la carga crítica necesaria para provocar que la estructura se convierta en mecanismo.

En el instante de colapso, cuando $M_1 = -Mp$, el momento en la sección 2 es nulo, no plastifica.

Comparando los resultados obtenidos por ambos métodos, los resultados coinciden:

En ambos casos, la carga de colapso es $P = 3 \cdot Mp/L$

La última rótula plástica se produce en la sección *a* y en ambos mecanismos de colapso se forman rótulas plásticas en $[1, 3, 4, 5] = [a, c, d, e]$

3.3. EJEMPLO 3

A la hora de resolver problemas de cálculo plástico sobre estructuras sometidas a cargas distribuidas, aparece una nueva incógnita. Para este ejemplo, es x , que marca la distancia desde el nodo c hasta la sección b candidata a ser rótula plástica.

En este ejemplo número 3, se plantea un problema de cálculo plástico; sobre un pórtico biempotrado, actúa una carga distribuida a lo largo del pilar izquierdo de la estructura. Véase [Figura 32]:

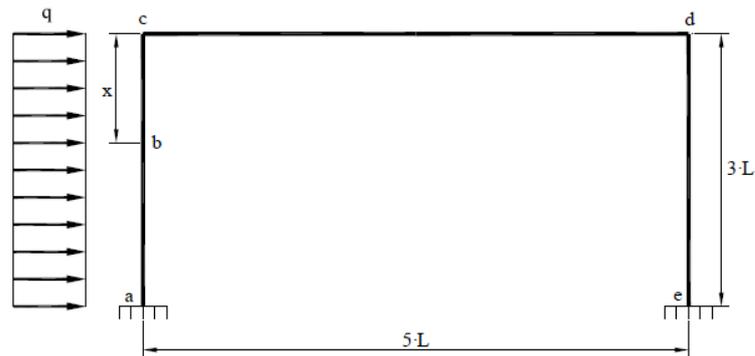


Figura 32: Ejemplo 3 - Pórtico biempotrado sometido a carga distribuida

Barras de propiedades mecánicas iguales: M_p

El grado de hiperestaticidad de la estructura es: $GH = 6 - 3 = 3$

Para la resolución del problema de carga distribuida mediante el método cinemático, se tiene en cuenta a la hora de plantear las ecuaciones de equilibrio, la sección b (candidata a ser rótula plástica por ser zona intermedia de barra con carga distribuida). En el método secuencial no la tendremos en cuenta.

Continuando con la resolución mediante el método secuencial, las secciones candidatas a ser rótula plástica serán: $a, b, c, d, e \rightarrow NPR = 5$

Por lo tanto, las ecuaciones de equilibrio necesarias para la resolución del problema son: $EQ = NPR - GH = 2$

- Mecanismo de colapso 1 (MC1):



Figura 33: Ejemplo 3 - Mecanismo de colapso 1

Planteando el principio de trabajos virtuales, se obtiene la primera ecuación de equilibrio:

$$q \cdot 3L \cdot \frac{3L}{2} \cdot \theta = M_a \cdot (-\theta) + M_c \cdot \theta + M_d \cdot (-\theta) + M_e \cdot \theta$$

$$EQ1 \rightarrow \frac{9qL^2}{2} = -M_a + M_c - M_d + M_e$$

- Mecanismo de colapso 2 (MC2):

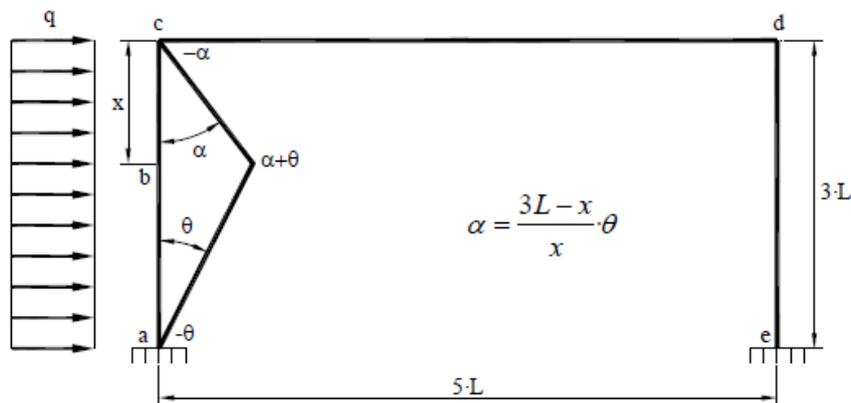


Figura 34: Ejemplo 3 - Mecanismo de colapso 2

A la hora de plantear la segunda ecuación de equilibrio, se tiene en cuenta la sección b. Aplicando el PTV se obtiene esta segunda ecuación de equilibrio:

$$q \cdot x \cdot \frac{x \cdot \alpha}{2} + q \cdot (3L - x) \cdot \frac{3L - x}{2} \cdot \theta = M_a \cdot (-\theta) + M_b \cdot (\alpha + \theta) + M_c \cdot (-\alpha)$$

$$EQ2 \rightarrow \frac{q}{2} \cdot (x \cdot (3L - x) + (3L - x)^2) = -M_a + \frac{3L}{x} \cdot M_b - \frac{3L - x}{x} \cdot M_c$$

Para obtener las cargas de colapso de cada mecanismo, se supone primero que el mecanismo 1 es el verdadero mecanismo de colapso. Entonces:

$$\begin{cases} Ma = -Mp \\ Mc = +Mp \\ Md = -Mp \\ Me = +Mp \end{cases} \rightarrow q_{c1} = \frac{8 \cdot Mp}{9 \cdot L^2}$$

Para obtener la carga crítica del mecanismo 2, suponemos este como verdadero mecanismo de colapso:

$$\begin{cases} Ma = -Mp \\ Mb = +Mp \\ Md = -Mp \end{cases} \rightarrow q_{c2} = \frac{4 \cdot Mp}{(3L - x) \cdot x}$$

Para obtener el valor de x en el instante de colapso, derivando q_{c2} e igualando a cero, se obtiene el máximo del valor de x:

$$\frac{\partial q_{c2}}{\partial x} = 0 \rightarrow x = \frac{3L}{2}$$

Por lo tanto:

$$q_{c2} = \frac{16 \cdot Mp}{9 \cdot L^2}$$

Para comprobar que la solución es segura, se ensaya el mecanismo 1:

$$\begin{cases} Ma = -Mp \\ Mc = +Mp \\ Md = -Mp \\ Me = +Mp \end{cases} \rightarrow q_{c1} = \frac{8 \cdot Mp}{9 \cdot L^2} \Rightarrow EQ2: Mb = \left(1 + \frac{2 \cdot x}{3L} - \frac{4 \cdot x^2}{9 \cdot L^2}\right) \cdot Mp$$

El valor de x será:

$$\frac{\partial Mb}{\partial x} = 0 \rightarrow x = \frac{3L}{4} \Rightarrow Mb = \frac{5 \cdot Mp}{4} > Mp \rightarrow \text{No es seguro}$$

Se ensaya la combinación de (MC1+MC2):

$$\begin{cases} Ma = -Mp \\ Mb = +Mp \\ Md = -Mp \\ Me = +Mp \end{cases} \rightarrow Mc = \frac{9}{2} \cdot q \cdot L^2 - 3 \cdot Mp \rightarrow q_{c3} = \frac{4 \cdot Mp \cdot (6L - x)}{3L \cdot (9L^2 - x^2)}$$

$$\frac{\partial q_{c3}}{\partial x} = 0 \rightarrow x = (6 - 3\sqrt{3}) \cdot L \Rightarrow Mc = (\sqrt{3} - 1) \cdot Mp < Mp \rightarrow \text{Seguro}$$

$$\text{Para } x = (6 - 3\sqrt{3}) \cdot L \Rightarrow q_{c3} = 2 \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{9L^2} \cdot Mp$$

Con el método cinemático, continuar resolviendo los problemas de cálculo plástico con carga distribuida es algo muy complejo. Con las herramientas y conocimientos adquiridos en la Universidad, la resolución de estos problemas llega hasta este punto.

A continuación, se muestra cómo se resuelven los problemas de cálculo plástico en estructuras sometidas a carga distribuida aplicando el método secuencial.

En el método secuencial no se tienen en cuenta las rótulas plásticas de las secciones intermedias de las barras sometidas a cargas distribuidas para el cálculo de NPR y de las ecuaciones de equilibrio:

Las secciones a tener en cuenta para el cálculo de las ecuaciones de equilibrio son: $a, c, d, e \rightarrow NPR = 4$

El grado de hiperestaticidad es idéntico al calculado mediante el método cinemático: $GH = 6 - 3 = 3$

Por lo tanto, el número de mecanismos independientes será: $EQ = NPR - GH = 1$

El mecanismo de colapso propuesto para la resolución de este problema de cálculo plástico mediante el método secuencial, será el mecanismo 1, [Figura 33]

Aplicando el principio de trabajos virtuales sobre el mecanismo 1, se obtiene la ecuación de equilibrio necesaria:

$$EQ1 \rightarrow \frac{9qL^2}{2} = -Ma + Mc - Md + Me$$

Se plantea el PFV:

$$\delta \cdot F = \sum_i \left(\frac{L_i}{6 \cdot E \cdot I} \right) \left(m_1 (2 \cdot M_1 + M_2) + m_2 (M_1 + 2 \cdot M_2) + (m_1 + m_2) \frac{q_c \cdot L^2}{4} \right) + \sum m_i \cdot \theta_i$$

Ecuación 6)

Tabla 14: Ejemplo 3 - PFV por el método secuencial

Secciones

	a	b	c	d	e
M real	Ma	Mb	Mc	Md	Me
Giros	θ_a	θ_b	θ_c	θ_d	θ_e
ECi	ma_i	mb_i	mc_i	md_i	me_i
EC1	1	$(mc_1 - ma_1)/(3L)x + ma_1$	1	0	0
EC2	0	$(mc_2 - ma_2)/(3L)x + ma_2$	0	1	1
EC3	1	$(mc_3 - ma_3)/(3L)x + ma_3$	0	0	1

Las ecuaciones de compatibilidad obtenidas son:

$$EC1 \rightarrow \frac{5L(2Mc + Md)}{6 \cdot E \cdot I} + \frac{(3Mb + 3Mc + \frac{1}{2}q(3L - x)^2)(3L - x)}{6 \cdot E \cdot I} + \frac{x(3Ma + 3Mb + \frac{qx^2}{2})}{6 \cdot E \cdot I} + \theta_a + \theta_b + \theta_c = 0$$

$$EC2 \rightarrow \frac{5L(Mc + 2Md)}{6 \cdot E \cdot I} + \frac{L(3Md + 3Me)}{2 \cdot E \cdot I} + \theta_d + \theta_e = 0$$

$$\begin{aligned}
 EC3 \rightarrow & \frac{L(Md + 2Me)}{2 \cdot E \cdot I} \\
 & + \frac{(3L - x)((2Mb + Mc)(1 - \frac{x}{3L}) + \frac{1}{4}q(3L - x)^2(1 - \frac{x}{3L}))}{6 \cdot E \cdot I} \\
 & + \frac{x(2Ma + Mb + (Ma + 2Mb)(1 - \frac{x}{3L}) + \frac{1}{4}qx^2(2 - \frac{x}{3L}))}{6 \cdot E \cdot I} + \theta_a \\
 & + (1 - \frac{x}{3L})\theta_b + \theta_e = 0
 \end{aligned}$$

La distribución de momentos flectores en la barra ac tiene un perfil parabólico. La ecuación que define el momento flector en función de la cota x para la barra ac es:

Ecuación 7: Ecuación parábola

$$M_z = (M_{II} - M_I)/(l)x + M_I + q(l)/2x - q \cdot \frac{x^2}{2}$$

Para nuestra barra ac :

$$\begin{aligned}
 M_z &= (Mc - Ma)/(3L)x + Ma + q(3L)/2x - qx^2/2 \\
 M_z &= Ma + \frac{(-Ma + Mc)x}{3L} + \frac{3Lqx}{2} - \frac{qx^2}{2}
 \end{aligned}$$

El momento flector máximo de la barra ac se producirá a la distancia x a la que se dé un máximo en la distribución de momentos M_z :

$$\frac{\partial M_z}{\partial x} = 0 \rightarrow x_1 = \frac{-2Ma + 2Mc + 9L^2q}{6Lq}$$

El momento M_z máximo se dará a esa distancia x_1 del nodo c de la estructura. El momento máximo será el momento que soporta la sección b :

$$\begin{aligned}
 Mb &= M_z \text{ (para } x_1) \\
 &= Ma + \frac{1}{4}(-2Ma + 2Mc + 9L^2q) \\
 &+ \frac{(-Ma + Mc)(-2Ma + 2Mc + 9L^2q)}{18L^2q} \\
 &- \frac{(-2Ma + 2Mc + 9L^2q)^2}{72L^2q}
 \end{aligned}$$

Mediante el análisis elástico lineal, se calcula el orden de formación de las rótulas. Para calcular la primera rótula plástica se anula el giro en los nodos y se calcula el momento flector que soportan:

Tabla 15: Ejemplo 3 - Cálculo de la primera rótula plástica mediante el método secuencial

		Secciones				
		a	b	c	d	e
M		Ma	Mb	Mc	Md	Me
Giros		0	0	0	0	0

$$Ma = -2.182 L^2 q ; Mc = 0.5 L^2 q ; Md = -0.6735 L^2 q ; Me = 1.144 L^2 q$$

El momento máximo de la barra ac será: $Mb = 0.684 L^2 q$

La primera rótula plástica se formará en la sección *a*, en el momento en el que $Ma = -Mp$, para ese instante, la carga *q* tiene el valor:

$$q_1 = \frac{598 \cdot Mp}{1305 \cdot L^2}$$

Para calcular la segunda rótula plástica se toma como momento en la sección *a*: $Ma = -Mp$ y como giro: $\theta_a \neq 0$. El resto de momentos seguirán siendo desconocidos, pero el giro de esas secciones en las que aún no se ha formado rótula plástica, será nulo.

Tabla 16: Ejemplo 3 - Cálculo de la segunda rótula plástica mediante el método secuencial

		Secciones				
		a	b	c	d	e
M		- Mp	Mb	Mc	Md	Me
Giros		θ_a	0	0	0	0

$$\theta_a = -\frac{-598 L Mp + 1305 L^3 q}{400 E I}, \quad Mc = \frac{1}{200} (-16 Mp + 135 L^2 q)$$

$$Md = \frac{1}{100} (31 Mp - 135 L^2 q), \quad Me = \frac{1}{200} (-122 Mp + 495 L^2 q)$$

$$Mb = 0.313 Mp$$

La sección en la que se formará la segunda rótula plástica será la sección *e*. Cuando $Me = Mp$, la carga en ese instante será:

$$q_2 = \frac{322 \cdot Mp}{495 \cdot L^2}$$

El cálculo de la tercera rótula plástica sigue el mismo procedimiento. Las secciones que han alcanzado el momento plástico continúan acumulando giro:

Tabla 17: Ejemplo 3 - Cálculo de la tercera rótula plástica mediante el método secuencial

		Secciones				
		a	b	c	d	e
M		- Mp	Mb	Mc	Md	+Mp
Giros		θ_a	0	0	0	θ_e

$$\theta_a = -\frac{-161 L Mp + 288 L^3 q}{42 E I}, \quad M_c = \frac{1}{56}(-56 Mp + 117 L^2 q),$$

$$M_d = \frac{1}{56}(56 Mp - 135 L^2 q), \quad \theta_e = -\frac{322 L Mp - 495 L^3 q}{84 E I}$$

$$M_b = 0.569 Mp$$

La tercera rótula plástica en formarse es en la sección *b*, cuando $M_b = Mp$, la carga es de valor:

$$q_3 = \frac{12544 Mp}{15129 L^2}$$

La estructura pasa a ser un mecanismo con la formación de cuatro rótulas plásticas ($GH + 1$), para la cuarta rótula plástica:

Tabla 18: Ejemplo 3 - Cálculo de la cuarta rótula plástica mediante el método secuencial

		Secciones				
		a	b	c	d	e
M		- Mp	Mp	Mc	Md	+Mp
Giros		θ_a	θ_b	0	0	θ_e

$$\theta_a = \frac{184 L Mp^{3/2} - 1152 L^2 Mp \sqrt{q} + 3960 L^3 \sqrt{Mp} q - 3321 L^4 q^{3/2}}{48 E I \sqrt{Mp}}$$

$$\theta_b = -\frac{9(112 L^3 \sqrt{Mp} q - 123 L^4 q^{3/2})}{16 E I \sqrt{Mp}}$$

$$M_c = \frac{1}{2}(-2 Mp + 12 L \sqrt{Mp} \sqrt{q} - 9 L^2 q), \quad M_d = Mp + 6L \sqrt{Mp} \sqrt{q} - 9 L^2 q,$$

$$\theta_e = \frac{-46 L Mp - 288 L^2 \sqrt{Mp} \sqrt{q} + 387 L^3 q}{12 E I}$$

La última rótula plástica se forma en la sección *d* ($M_d = -Mp$). Ese es el instante de colapso de la estructura y se produce a una carga:

$$q_c = \frac{2(2 Mp + \sqrt{3} Mp)}{9 L^2}$$

Dicha carga de colapso coincide con la calculada mediante el método cinemático.

El orden de formación de las rótulas que provocan que la estructura se convierta en un mecanismo inestable es: a, e, b, d

CAPÍTULO 4:

RESULTADOS PROBLEMAS APLICADOS

4. RESULTADOS PROBLEMAS APLICADOS

Una vez que se ha validado el método secuencial, en este capítulo se explica la resolución de dos problemas similares a la realidad aplicando el método secuencial.

Para la resolución de estos problemas de cálculo plástico y para la aplicación y desarrollo del método, también se ha utilizado como herramienta el programa Wolfram Mathematica.

El código de programación completo desarrollado en el programa Wolfram Mathematica está en los [8. ANEXOS].

PROBLEMA 1: Pórtico a 2 aguas

Este primer problema consiste en la resolución de un problema de cálculo plástico mediante el método secuencial de un pórtico biempotrado a dos aguas sometido a dos cargas puntuales y a dos cargas distribuidas. Véase [Figura 35]:

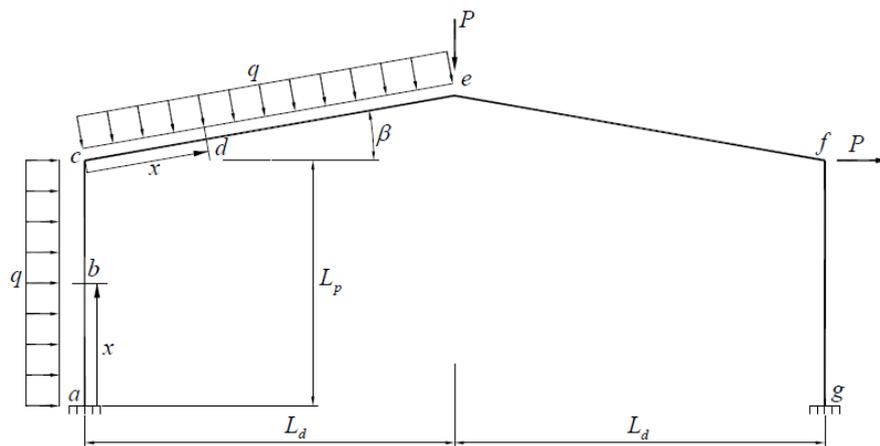


Figura 35: Problema 1 - Pórtico a dos aguas

Los datos del problema son:

- Longitudes: $L_p = 4 \text{ m}$ y $L_d = 6 \text{ m}$
- Angulo de inclinación de la cubierta: $\beta = 10^\circ$
- Cargas: $q = 1000 \text{ N/m}$ y $P = 1000 \text{ N}$
- Módulo de Young: $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$
- Inercia: $I_z = 8360 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$
- Módulo plástico: $S = 628 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$
- Limite elástico: $\sigma_e = 275 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$
- Momento plástico: $M_p = S * \sigma_e = 172700 \text{ N m}$

El método secuencial no tenía en cuenta las posibles rótulas plásticas de secciones intermedias de barras sometidas a carga distribuida para el cálculo de NPR ni para las ecuaciones de equilibrio.

El cálculo del grado de hiperestaticidad será:

(Ecuación 2: Cálculo del grado de hiperestaticidad dos ejes de dirección

$$GH = 6 - (3 + 0) = 3$$

Las secciones candidatas a formar una rótula plástica, sin tener en cuenta las secciones intermedias de las barras sometidas a carga distribuida: $a, c, e, f, g \rightarrow NPR = 5$

Con el cálculo del GH y del NPR , podemos calcular el número de ecuaciones de equilibrio necesarias para resolver el problema de cálculo plástico:

(Ecuación 4) $EQ = 2$

Se necesitan dos mecanismos de colapso independientes:

- Mecanismo de colapso 1 (MC1):

Se tienen en cuenta solo las cargas horizontales, provocando un desplazamiento del pórtico solo en dirección horizontal. De esta manera las rótulas plásticas que van a formarse son en las secciones: a, c, f, g

Sabiendo que la longitud de la barra ce y ef es: $L_{ce} = Ld / \cos\beta$

Aplicando el principio de trabajos virtuales, la ecuación de equilibrio 1 será:

$$EQ1 \rightarrow (q Lp^2/2 + q L_{ce} Lp \sin[\beta] + P Lp) \lambda = -Ma + Mc - Mf + Mg$$

Siendo λ es factor de carga que permite relacionar la carga q con la carga P .

- Mecanismo de colapso 2 (MC2):

Para el cálculo de segunda ecuación de equilibrio se plantea un mecanismo de colapso en el que se forman rótulas plásticas en las secciones: c, e, f, g

Para calcular la relación entre los ángulos que se forman entre las barras, se recurre al programa Working Model, en el que se diseña la estructura y se simula el movimiento del pórtico siendo sometido a una carga vertical en la sección e. El resultado de la simulación nos facilita el valor de los ángulos que se originan en el mecanismo de colapso 2:

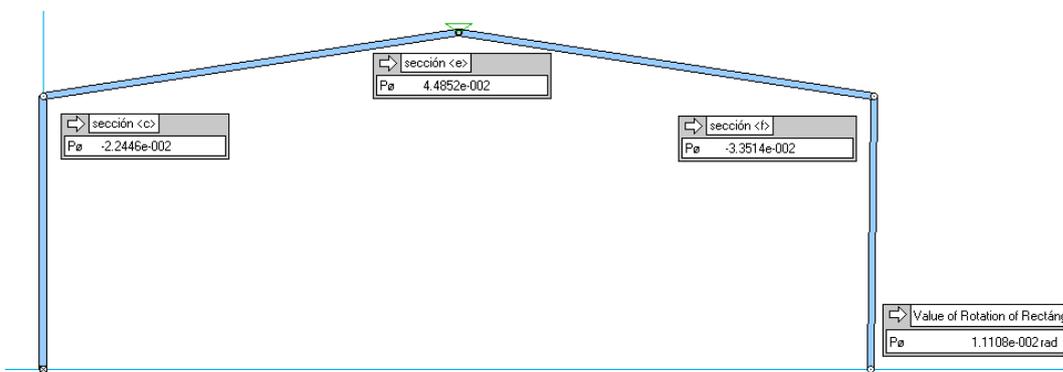


Figura 36: Problema 1 - Simulación en Working Model del MC2

El resultado de los ángulos del mecanismo de colapso es:

$$\theta_c = -2.2446, \theta_e = 4.4852, \theta_f = -3.3514, \theta_g = 1.1108$$

Aplicando el principio de trabajos virtuales, se calcula la segunda ecuación de equilibrio:

$$EQ2 \rightarrow (\lambda(-q Lce^2/2 \theta_c - P Lce \cos[\beta] \theta_c + P Lp \theta_g) = Mc(\theta_c) + Me(\theta_e) + Mf(\theta_f) + Mg(\theta_g))$$

Simplificando las ecuaciones de equilibrio e introduciendo los valores de los ángulos:

$$EQ1: \lambda \left(Lp P + \frac{Lp^2 q}{2} + Ld Lp q \tan[\beta] \right) = -Ma + Mc - Mf + Mg$$

$$EQ2: \lambda (2.2446 Ld P + 1.1108 Lp P + 1.1223 Ld^2 q \sec[\beta]^2) = -2.2446 Mc + 4.4852 Me - 3.3514 Mf + 1.1108 Mg$$

Se plantea el principio de fuerzas virtuales para obtener las 3 ecuaciones de compatibilidad:

$$\delta \cdot F = \sum_i \left(\frac{L_i}{6 \cdot E \cdot I} \right) (m_1(2 \cdot M_1 + M_2) + m_2(M_1 + 2 \cdot M_2) + (m_1 + m_2) \frac{q_c \cdot L^2}{4}) + \sum m_i \cdot \theta_i$$

[Ecuación 6]

Tabla 19: Problema 1 - PFV método secuencial

Secciones

	a	b	c
M real	Ma	Mb	Mc
Giros	θa	θb	θc
ECi	ma_i	mb_i	mc_i
EC1	1	(mc ₁ - ma ₁)/Lp x ₁ + ma ₁	1
EC2	0	(mc ₂ - ma ₂)/Lp x ₁ + ma ₂	1
EC3	1.529	(mc ₃ - ma ₃)/Lp x ₁ + ma ₃	0.528989

Secciones

	d	e	f	g
M real	Md	Me	Mf	Mg
Giros	θd	θe	θf	θg
ECi	md_i	me_i	mf_i	mg_i
EC1	(me ₁ - mc ₁)/Lp x ₂ + mc ₁	0	-1	-1
EC2	(me ₂ - mc ₂)/Lp x ₂ + mc ₂	1	0.471064	-0.528936
EC3	(me ₃ - mc ₃)/Lp x ₂ + mc ₃	0	0	1

Se obtienen las ecuaciones de compatibilidad, véase apartado el apartado de los anexos [8. ANEXOS

8.1. ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD – PROBLEMA 1].

Mediante el análisis elástico lineal, se calcula el orden de formación de las rótulas.

La distribución de momentos flectores en el pilar izquierdo ac y en el dintel izquierdo ce , tienen un perfil parabólico.

$$Mz = (M_{II} - M_I)/(l) x + M_I + q (l)/2 x - q \cdot \frac{x^2}{2} \quad (\text{Ecuación 7})$$

La distribución de momentos para la barra ac es:

$$Mz_1 = (Mc - Ma)/Lp x_1 + Ma + \lambda q Lp/2 x_1 - \lambda q x_1^2/2$$

El momento flector máximo de la barra ac se producirá a la distancia x a la que se dé un máximo en la distribución de momentos Mz_1 :

$$\frac{\partial Mz_1}{\partial x} = 0 \rightarrow x_1 = \frac{-2 Ma + 2 Mc + Lp^2 q \lambda}{2 Lp q \lambda}$$

La sección b será la sección que mayor momento flector soporte, es decir la sección a la distancia de x_1 , por lo tanto, la ecuación que define el momento en la sección b es:

$$\begin{aligned} Mb &= Mz_1 (\text{para } x_1) \\ &= Ma + \frac{1}{4} (-2 Ma + 2 Mc + Lp^2 q \lambda) \\ &\quad + \frac{(-Ma + Mc)(-2 Ma + 2 Mc + Lp^2 q \lambda)}{2 Lp^2 q \lambda} \\ &\quad - \frac{(-2 Ma + 2 Mc + Lp^2 q \lambda)^2}{8 Lp^2 q \lambda} \end{aligned}$$

Lo mismo sucede para la sección d con el dintel izquierdo; la distribución de momentos para la barra ce es:

$$Mz_2 = (Me - Mc)/Lce x_2 + Mc + \lambda q Lce/2 x_2 - \lambda q x_2^2/2$$

La sección d será la sección que soporte mayor momento flector, que será la sección a una distancia x_2 , donde haya un máximo en la distribución de momentos de la barra:

$$\frac{\partial Mz_2}{\partial x} = 0 \rightarrow x_2 = \frac{(Ld^2 q \lambda - 2 Mc \cos[\beta]^2 + 2 Me \cos[\beta]^2) \sec[\beta]}{2 Ld q \lambda}$$

$$\begin{aligned}
 Md &= Mz_2 \text{ (para } x_2) \\
 &= Mc + \frac{(-Mc + Me)(Ld^2q \lambda - 2 Mc \cos[\beta]^2 + 2 Me \cos[\beta]^2)}{2 Ld^2q \lambda} \\
 &\quad + \frac{1}{4}(Ld^2q \lambda - 2 Mc \cos[\beta]^2 + 2 Me \cos[\beta]^2) \sec[\beta]^2 \\
 &\quad - \frac{(Ld^2q \lambda - 2 Mc \cos[\beta]^2 + 2 Me \cos[\beta]^2)^2 \sec[\beta]^2}{8 Ld^2q \lambda}
 \end{aligned}$$

Mediante el análisis elástico lineal, se calcula el orden de formación de las rótulas. Para calcular la primera rótula plástica se anula el giro en los nodos y se calcula el momento flector que soportan tomando como factor de carga la unidad ($\lambda = 1$):

Tabla 20: Problema 1 - Cálculo de la primera rótula plástica mediante el método secuencial

		Secciones						
		a	b	c	d	e	f	g
M		Ma	Mb	Mc	Md	Me	Mf	Mg
Giros		0	0	0	0	0	0	0

$$Ma = -3.631 ; Mc = -4.205 ; Me = 3.448 ; Mf = -7.141 ; Mg = 9.665$$

El momento máximo de la barra *ac* será: $Mb = -1.907$

El momento máximo de la barra *ce* será: $Md = 5.05$

La primera rótula plástica se forma en la sección *g*, en el momento en el que $Mg = Mp$, para ese instante, el factor de carga tiene un valor de:

$$\lambda_1 = Mp/Mg = 17.868$$

La segunda rótula plástica se forma en la sección *f* cuando *Mf* alcanza el valor del momento plástico ($Mf = -Mp$).

Tabla 21: Problema 1 - Cálculo de la segunda rótula plástica mediante el método secuencial

		Secciones						
		a	b	c	d	e	f	g
M		Ma	Mb	Mc	Md	Me	Mf	Mp
Giros		0	0	0	0	0	0	θg

$$Ma = -95.368 ; Mb = -35.399 ; Mc = -68.958 ; Md = 137.128$$

$$Me = 97.903 ; Mf = -172.7 ; \theta g = 0.00549$$

El instante en el que se forma esta segunda rótula plástica, se produce cuando el factor de carga es $\lambda_2 = 22.906$.

La tercera rótula plástica se formará en la sección *d*, cuando el momento flector $Md = Mp$

Tabla 22: Problema 1 - Cálculo de la tercera rótula plástica mediante el método secuencial

		Secciones						
		a	b	c	d	e	f	g
M		Ma	Mb	Mc	Md	Me	-Mp	Mp
Giros		0	0	0	0	0	θf	θg

$$Ma = -147.817 ; Mb = -52.565 ; Mc = -73.877 ; Md = 172.7$$

$$Me = 134.332 ; \theta f = -0.0133 ; \theta g = 0.0122$$

La tercera rótula plástica que se forma en la sección *d*, ocurre con un factor de carga: $\lambda_3 \rightarrow = 25.834$

En la sección *a* se forma la cuarta y última rótula plástica, *GH* + 1 rótulas. En el momento en el que se forma esta rótula, la estructura se convierte en un mecanismo inestable. Ocurre cuando $Ma = -Mp$:

		Secciones						
		a	b	c	d	e	f	g
M		Ma	Mb	Mc	Mp	Me	-Mp	Mp
Giros		0	0	0	θd	0	θf	θg

$$Ma = -172.7 ; Mb = -68.785 ; Mc = -87.864 ; \theta d = 0.0096925$$

$$Me = 136.247 ; \theta f = -0.021074 ; \theta g = 0.016465$$

Este instante de colapso ocurre cuando el factor de carga es: $\lambda_4 = 26.506$, que será la carga de colapso de la estructura. $\lambda_c = \lambda_4$.

El orden de formación de las rótulas será: *g, f, d, a*

PROBLEMA 2: Pórtico doble

En el problema 2 se lleva a cabo la resolución de un problema de cálculo plástico aplicando el método secuencial a una estructura que consiste en un pórtico doble sometido a cuatro cargas distribuidas. Véase [Figura 37]:

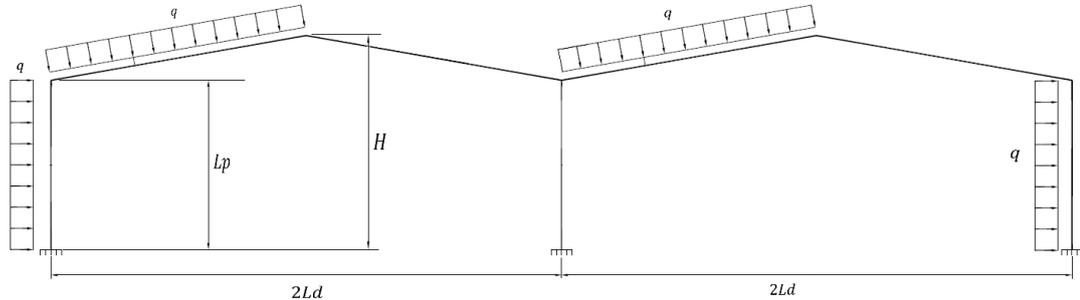


Figura 37: Problema 2 - Pórtico doble

Los datos del problema son:

- Longitudes: $Lp = 5\text{ m}$ y $Ld = 10\text{ m}$
- Altura máxima de la estructura: $H = 7\text{ m}$
- Carga: $q = 5\text{ kN/m}$
- Material de la estructura: **S 275**
- Perfil de la estructura: **IPE 300**
- Límite elástico: $\sigma_e = 275\text{ MPa}$

La numeración de los nodos será:

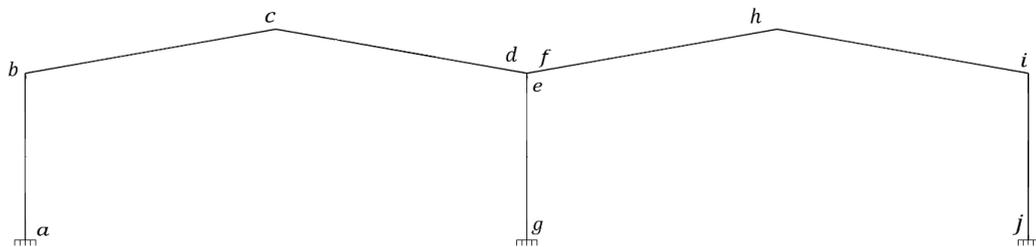


Figura 38: Problema 2 - Numeración de los nodos de la estructura

La sección k será la sección candidata a ser rótula plástica de la barra ab sometida a una carga distribuida. Del mismo modo, la sección l lo será para la barra bc , la sección m para la barra fh , y la sección n lo será para la barra ij , todas ellas sometidas a carga distribuida.

El método secuencial no tiene en cuenta las posibles rótulas plásticas de secciones intermedias de barras sometidas a carga distribuida para el cálculo de NPR ni para las ecuaciones de equilibrio.

El cálculo del grado de hiperestaticidad será:

(Ecuación 2: Cálculo del grado de hiperestaticidad dos ejes de dirección

$$GH = 9 - (3 + 0) = 6$$

Las secciones candidatas a formar una rótula plástica, sin tener en cuenta las secciones intermedias de las barras sometidas a carga distribuida: $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \rightarrow NPR = 10$

Con el cálculo del GH y del NPR , podemos calcular el número de ecuaciones de equilibrio necesarias para resolver el problema de cálculo plástico:

(Ecuación 4) $EQ = 4$

Son necesarios 4 mecanismos de colapso independientes que definirán 4 ecuaciones de equilibrio.

Tomando como longitud de las barras bc, cd, fh, hi :

$$Lbc = \frac{Ld}{\cos\beta}$$

Y siendo β el ángulo que forman las barras bc y fh con la horizontal del suelo;

$$\beta = \arctg\left(\frac{H - Lp}{Ld}\right)$$

Podemos definir las ecuaciones de equilibrio:

- Mecanismo de colapso 1 (MC1):

Se tienen en cuenta solo las cargas horizontales, provocando un desplazamiento del pórtico solo en dirección horizontal. Se forman rótulas plásticas en a, b, e, g, i, j

Aplicando el principio de trabajos virtuales, la ecuación de equilibrio 1 será:

$$EQ1 \rightarrow 2 (q Lp^2/2 + q Lbc Lp \sin[\beta]) = -Ma + Mb - Me + Mg - Mi + Mj$$

- Mecanismo de colapso 2 (MC2):

En este mecanismo se supone la formación de rótulas en los nodos: a, b, c, d

La relación de los ángulos que se forman tras la deformación en estos nodos es:

$$\begin{cases} \theta a = -1 \\ \theta b = +2.25 \\ \theta c = -2.5 \\ \theta d = +1.25 \end{cases}$$

Aplicando el principio de trabajos virtuales, la ecuación de equilibrio 2 será:

$$\begin{aligned} EQ2 \rightarrow (q Lp^2/2 + q \sin[\beta] Lbc 3.125 - q \cos[\beta] Lbc 1.25) = \\ = Ma \theta a + Mb \theta b + Mc \theta c + Md \theta d \end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$EQ2 \rightarrow -1.25 Ld q + \frac{Lp^2 q}{2} + 3.125 Ld q \tan[\beta] = -Ma + 2.25 Mb - 2.5 Mc + 1.25 Md$$

- Mecanismo de colapso 3 (MC3):

El mecanismo de colapso 3 es igual que el mecanismo de colapso 2, pero se forma en el pórtico de la derecha en vez de en el de la izquierda como sucede en el mecanismo 2. Las rótulas plásticas se forman en las secciones: j, i, h, f

La relación de los ángulos que se forman tras la deformación en estos nodos es:

$$\begin{cases} \theta_j = -1.25 \\ \theta_i = +2.5 \\ \theta_h = -2.25 \\ \theta_f = +1 \end{cases}$$

Aplicando el principio de trabajos virtuales, la ecuación de equilibrio 3 será:

$$EQ3 \rightarrow q Lp^2/2 + q \sin[\beta] Lbc 3.125 + q \cos[\beta] Lbc 1.25) = M_j \theta_j + M_i \theta_i + M_h \theta_h + M_f \theta_f$$

Sustituyendo:

$$1.25 Ld q + \frac{Lp^2 q}{2} + 3.125 Ld q \tan[\beta] = 1 M_f - 2.25 M_h + 2.5 M_i - 1.25 M_j$$

- Mecanismo de colapso 4 (MC4):

En este mecanismo se supone la formación de rótulas en los nodos: a, c, e, g, h, j

La relación de los ángulos que se forman tras la deformación en estos nodos es:

$$\begin{cases} \theta_a = -1 \\ \theta_c = +2 \\ \theta_e = +2.8 \\ \theta_g = -2.8 \\ \theta_h = -2 \\ \theta_j = 1 \end{cases}$$

Aplicando el principio de trabajos virtuales, la ecuación de equilibrio 4 será:

$$EQ4 \rightarrow (q Lp^2/2 + q \sin[\beta] Lbc 6 + q \cos[\beta] Lbc 5 + q \sin[\beta] Lbc 6 - q \cos[\beta] Lbc 5 + q Lp^2/2) = M_a \theta_a + M_c \theta_c + M_e \theta_e + M_g \theta_g + M_h \theta_h + M_j \theta_j$$

Sustituyendo:

$$EQ4 \rightarrow Lp^2q + 12 Ld q \text{ Tan}[\beta]$$

$$= -Ma + 2 Mc + 2.8 Me - 2.8 Mg - 2 Mh + Mj$$

Se plantea el principio de fuerzas virtuales para obtener las 6 ecuaciones de compatibilidad:

$$\delta \cdot F = \sum_i \left(\frac{L_i}{6 \cdot E \cdot I} \right) \left(m_1 (2 \cdot M_1 + M_2) + m_2 (M_1 + 2 \cdot M_2) + (m_1 + m_2) \frac{q_c \cdot L^2}{4} \right) + \sum m_i \cdot \theta_i$$

[Ecuación 6]

Tabla 23: Problema 2 - PFV método secuencial

Secciones					
	a	b	c	d	e
M real	Ma	Mb	Mc	Md	Me
Giros	θ_a	θ_b	θ_c	θ_d	θ_e
EC_i	ma_i	mb_i	mc_i	md_i	me_i
EC1	-0.2039	0.1199	-0.1183	-0.6155	0.5779
EC2	-0.0384	-0.2148	-0.1387	0.0785	0.0677
EC3	0.2039	0.1199	0.1183	0.6155	0.4221
EC4	-0.0744	0.4394	0.5285	0.2067	0.0151
EC5	-0.525	-0.4787	-0.1622	0.1172	-0.01871
EC6	0.5573	0.2321	-0.1194	-0.2107	0.0196

Secciones					
	f	g	h	i	j
M real	Mf	Mg	Mh	Mi	Mj
Giros	θ_f	θ_g	θ_h	θ_i	θ_j
EC_i	mf_i	mg_i	mh_i	mi_i	mj_i
EC1	0.0483	0.4221	0.1433	0.0512	-0.1168
EC2	0.9218	-0.0677	0.1293	-0.1931	0.1187
EC3	-0.0483	0.5779	-0.1433	-0.0512	0.1168
EC4	0.1738	-0.0151	0.5489	0.3654	-0.1181
EC5	-0.1502	0.0187	0.242	0.472	0.3883
EC6	0.0534	-0.0196	-0.0003	0.3212	0.6853

Secciones				
	k	l	m	n
M real	Mk	Ml	Mm	Mn
Giros	θ_k	θ_l	θ_m	θ_n
EC_i	mk_i	ml_i	mm_i	mn_i

$$\begin{aligned}
 mk_i &= (mb_i - ma_i)/Lp \ x1 + ma_i \\
 ml_i &= (mc_i - mb_i)/Lbc \ x2 + mb_i \\
 mm_i &= (mh_i - mf_i)/Lbc \ x3 + mf_i \\
 mn_i &= (mj_i - mi_i)/Lp \ x4 + mi_i
 \end{aligned}$$

Se obtienen las seis ecuaciones de compatibilidad. Véase en el apartado de los anexos [8.2. ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD – PROBLEMA 2].

Mediante el análisis elástico lineal, se calcula el orden de formación de las rótulas.

La distribución de momentos flectores en las barras ab, bc, fh, ij ; tiene un perfil parabólico.

$$Mz = (M_{II} - M_I)/(l) x + M_I + q (l)/2 x - q \cdot \frac{x^2}{2} \quad (\text{Ecuación 7})$$

La distribución de momentos para el pilar izquierdo ab es:

$$Mz_1 = (Mb - Ma)/Lp \ x_1 + Ma + q \ Lp/2 \ x_1 - q \ x_1^2/2$$

El momento flector máximo de la barra ab se producirá a la distancia x a la que se dé un máximo en la distribución de momentos Mz_1 :

$$\frac{\partial Mz_1}{\partial x} = 0 \rightarrow x_1 = \frac{-2 \ Ma + 2 \ Mb + Lp^2 q}{2 \ Lp \ q}$$

La sección k será la sección que mayor momento flector soporte, es decir la sección a la distancia de x_1 , por lo tanto, la ecuación que define el momento en la sección k es:

$$\begin{aligned}
 Mk &= Mz_1 \ (\text{para } x_1) \\
 &= Ma + \frac{1}{4} (-2 \ Ma + 2 \ Mb + Lp^2 q) \\
 &\quad + \frac{(-Ma + Mb)(-2 \ Ma + 2 \ Mb + Lp^2 q)}{2 \ Lp^2 q} \\
 &\quad - \frac{(-2 \ Ma + 2 \ Mb + Lp^2 q)^2}{8 \ Lp^2 q}
 \end{aligned}$$

La distribución de momentos para el dintel izquierdo bc es:

$$Mz_2 = (Mc - Mb)/Lbc \ x_2 + Mb + q \ Lbc/2 \ x_2 - qx_2^2/2$$

La sección l será la sección que soporte mayor momento flector, que será la sección a una distancia x_2 , donde haya un máximo en la distribución de momentos de la barra:

$$\frac{\partial Mz_2}{\partial x} = 0 \rightarrow x_2 = \frac{(Ld^2q - 2 Mb \cos[\beta]^2 + 2 Mc \cos[\beta]^2) \sec[\beta]}{2 Ld q}$$

$$\begin{aligned} Ml &= Mz_2 \text{ (para } x_2) \\ &= Mb + \frac{(-Mb + Mc)(Ld^2q - 2 Mb \cos[\beta]^2 + 2 Mc \cos[\beta]^2)}{2 Ld^2q} \\ &\quad + \frac{1}{4}(Ld^2q - 2 Mb \cos[\beta]^2 + 2 Mc \cos[\beta]^2) \sec[\beta]^2 \\ &\quad - \frac{(Ld^2q - 2 Mb \cos[\beta]^2 + 2 Mc \cos[\beta]^2)^2 \sec[\beta]^2}{8 Ld^2q} \end{aligned}$$

Lo mismo sucede para la sección m con el dintel derecho; la distribución de momentos para el dintel fh es:

$$Mz_3 = (Mh - Mf)/Lbc x_3 + Mf + q Lbc/2 x_3 - qx_3^2/2$$

El momento flector máximo de la barra fh se producirá a la distancia x a la que se dé un máximo en la distribución de momentos Mz_3 :

$$\frac{\partial Mz_3}{\partial x} = 0 \rightarrow x_3 = \frac{(Ld^2q - 2 Mf \cos[\beta]^2 + 2 Mh \cos[\beta]^2) \sec[\beta]}{2 Ld q}$$

La sección m será la sección que mayor momento flector soporte, es decir la sección a la distancia de x_3 , por lo tanto, la ecuación que define el momento en la sección m es:

$$\begin{aligned} Mm &= Mz_3 \text{ (para } x_3) \\ &= Mf + \frac{(-Mf + Mh)(Ld^2q - 2 Mf \cos[\beta]^2 + 2 Mh \cos[\beta]^2)}{2 Ld^2q} \\ &\quad + \frac{1}{4}(Ld^2q - 2 Mf \cos[\beta]^2 + 2 Mh \cos[\beta]^2) \sec[\beta]^2 \\ &\quad - \frac{(Ld^2q - 2 Mf \cos[\beta]^2 + 2 Mh \cos[\beta]^2)^2 \sec[\beta]^2}{8 Ld^2q} \end{aligned}$$

La distribución de momentos para el pilar derecho ij es:

$$Mz_4 = (Mj - Mi)/Lp x_4 + Mi + q Lp/2 x_4 - qx_4^2/2$$

El momento flector máximo de la barra ij se producirá a la distancia x a la que se dé un máximo en la distribución de momentos Mz_4 :

$$\frac{\partial Mz_4}{\partial x} = 0 \rightarrow x_4 = \frac{-2 Mi + 2 Mj + Lp^2q}{2 Lp q}$$

La sección n será la sección que soporte mayor momento flector, que será la sección a una distancia x_4 , donde haya un máximo en la distribución de momentos de la barra:

$$\begin{aligned}
 Mn &= Mz_4 \text{ (para } x_4) \\
 &= Mi + \frac{1}{4}(-2 Mi + 2 Mj + Lp^2 q) \\
 &\quad + \frac{(-Mi + Mj)(-2 Mi + 2 Mj + Lp^2 q)}{2 Lp^2 q} \\
 &\quad - \frac{(-2Mi + 2Mj + Lp^2 q)^2}{8 Lp^2 q}
 \end{aligned}$$

Mediante el análisis elástico lineal, se calcula el orden de formación de las rótulas. Para calcular la primera rótula plástica se anula el giro en los nodos y se calcula el momento flector que soportan para una carga q igual a la unidad, ($q = 1$):

Tabla 24: Problema 2 - Cálculo de la primera rótula plástica mediante el método secuencial

		Secciones						
		a	b	c	d	e	f	g
M		Ma	Mb	Mc	Md	Me	Mf	Mg
Giros		0	0	0	0	0	0	0

		Secciones						
		h	i	j	k	l	m	n
M		Mh	Mi	Mj	Mk	Ml	Mm	Mn
Giros		0	0	0	0	0	0	0

$$\begin{aligned}
 Ma &= -26.937 ; Mb = -2.98 ; Mc = 2.98 ; Md = -5.227 ; \\
 Me &= -5.603 ; Mf = 0.771 ; Mg = 5.603 ; \\
 Mh &= -17.108 ; Mi = 3.426 ; Mj = 13.263 \\
 Mk &= -0.354 ; Ml = 13.171 ; Mm = 6.368 ; Mn = 13.405
 \end{aligned}$$

La primera rótula plástica se forma en la sección a , sección que soporta mayor momento flector (en valor absoluto). En el instante en el que se forma la rótula plástica, el momento en a alcanza el valor del momento plástico ($Ma = -Mp$):

Tabla 25: Problema 2 - Cálculo de la segunda rótula plástica mediante el método secuencial

		Secciones						
		a	b	c	d	e	f	g
M		-Mp	Mb	Mc	Md	Me	Mf	Mg
Giros		0	0	0	0	0	0	0

		Secciones						
		h	i	j	k	l	m	n
M		Mh	Mi	Mj	Mk	Ml	Mm	Mn
Giros		0	0	0	0	0	0	0

La primera rótula plástica se forma para una carga $q_1 = 6.411$

$$Ma = -172.70 ; Mb = -19.103 ; Mc = 19.102 ; Md = -33.514 ;$$

$$Me = -35.92 ; Mf = 4.94 ; Mg = 35.92 ;$$

$$Mh = -109.681 ; Mi = 21.967 ; Mj = 85.032$$

$$Mk = -2.27 ; Ml = 84.439 ; Mm = 40.826 ; Mn = 85.942$$

En el instante de formación de la segunda rótula plástica, se forman simultáneamente rótulas en las secciones j y h

Tabla 26: Problema 2 - Cálculo de la tercera rótula plástica mediante el método secuencial

		Secciones						
		a	b	c	d	e	f	g
M		-Mp	Mb	Mc	Md	Me	Mf	Mg
Giros		θa	0	0	0	0	0	0

		Secciones						
		h	i	j	k	l	m	n
M		-Mp	Mi	Mp	Mk	Ml	Mm	Mn
Giros		0	0	0	0	0	0	0

Las rótulas en j y h , se forman cuando $q_2 = 9.192$

$$\theta a = -0.0160937$$

$$Ma = -172.7 ; Mb = -9.263 ; Mc = 20 ; Md = -35.53 ;$$

$$Me = -52.782 ; Mf = 27.26 ; Mg = 52.782 ;$$

$$Mh = -180.281 ; Mi = 28.086 ; Mj \rightarrow 172.7$$

$$Mk = -4.135 ; Ml = 125.305 ; Mm = 65.508$$

Al formarse rótula plástica en la sección j , la sección intermedia n del pilar derecho ij sometido a una carga distribuida, está a una distancia $x_4 = Lp$ de tal manera que la sección n es la sección j . Por lo tanto, $Mn = Mj = Mp$.

La tercera rótula plástica se formará en la sección l , cuando el momento flector $Ml = Mp$

Tabla 27: Problema 2 - Cálculo de la cuarta rótula plástica mediante el método secuencial

		Secciones						
		a	b	c	d	e	f	g
M		-Mp	Mb	Mc	Md	Me	Mf	Mg
Giros		θa	0	0	0	0	0	0

		Secciones						
		h	i	j	k	l	m	n
M		-Mp	Mi	Mp	Mk	Mp	Mm	Mj
Giros		θh	0	θj	0	0	0	0

La tercera rótula plástica se forma cuando $q_3 = 10.0568$

$$\theta a = -0.044358 ; \theta j = 0.0150097 ; \theta h = -0.042514$$

$$Ma = -172.7 ; Mb = 35.232 ; Mc = 48.523 ; Md = -54.246 ;$$

$$Me = -52.69 ; Mf = 57.933 ; Mg = 52.69 ; Mh = -172.7 ;$$

$$Mi = 33.456 ; Mj = 172.7 ; Mk = 48.676 ; Ml = 172.7 ; Mm = 98.783$$

El instante de formación de la cuarta rótula plástica (sección *m*) ocurre cuando $Mm = Mp$, a una carga $q_4 = 10.4493$.

Tabla 28: Problema 2 - Cálculo de la quinta rótula plástica mediante el método secuencial

		Secciones						
		a	b	c	d	e	f	g
M		-Mp	Mb	Mc	Md	Me	Mf	Mg
Giros		θa	0	0	0	0	0	0

		Secciones						
		h	i	j	k	l	m	n
M		-Mp	Mi	Mp	Mk	Mp	Mp	Mj
Giros		θh	0	θj	0	θl	0	0

$$\theta a = -0.11823 ; \theta j \rightarrow 0.0694003 ; \theta h \rightarrow -0.13232 ; \theta l = 0.10149$$

$$Ma = -172.7 ; Mb = 34.003 ; Mc = 39.686 ; Md = -67.747 ;$$

$$Me = -46.1 ; Mf = 150.373 ; Mg = 46.1 ; Mh = -172.7 ;$$

$$Mi = 1.3866 ; Mj = 172.7 ; Mk_{(x_1=0)} = -172.7 ; Ml_{(x_2=4.637)} = 172.7 ;$$

$$Mm_{(x_3=2.09)} = 172.7 ; Mn_{(x_4=Lp)} = 172.7$$

Cuando la carga alcanza el valor: $q_5 = 10.5082$, se forman rótulas plásticas en las secciones *d, e, g* a la vez, provocando que la estructura se convierta en un mecanismo inestable.

Tabla 29: Problema 2 - Cálculo de giros y momentos en el instante de colapso según el método secuencial

		Secciones						
		a	b	c	d	e	f	g
M		-Mp	Mb	Mc	-Mp	-Mp	Mf	Mp
Giros		θa	0	0	0	0	0	0

		Secciones						
		h	i	j	k	l	m	n
M		-Mp	Mi	Mp	Mk	Mp	Mp	Mj
Giros		θh	0	θj	0	θl	θm	0

$$\theta a = 5.1513 \times 10^{15} ; \theta j = -3.3203 \times 10^{15} ; \theta h = 6.65258 \times 10^{15} ;$$

$$\theta l = -6.66698 \times 10^{15} ; \theta m = -1.94888 \times 10^{15}$$

$$M_a = -172.7 ; M_b = 59.728 ; M_c = 10.215 ; M_d = -172.7 ;$$

$$M_e = 102.584 ; M_f = 149.748 ; M_g = 172.7 ; M_h = -172.7 ;$$

$$M_i = 2.374 ; M_j = 172.7 ; M_{k(x_1=0)} = -172.7 ; M_{l(x_2=4.637)} = 172.7 ;$$

$$M_{m(x_3=2.09)} = 172.7 ; M_{n(x_4=L_p)} = 172.7$$

La carga de colapso de la estructura es: $q_c = q_5 = 10.5082$

El orden de formación de las rótulas plásticas es: $a / j-h / l / m / d-e-g$

CAPÍTULO 5:

PRESUPUESTO – ESTUDIO ECONÓMICO

5. PRESUPUESTO – ESTUDIO ECONÓMICO

5.1. Introducción

El objetivo de este apartado es determinar cuáles son los costes teóricos necesarios para llevar a cabo este proyecto y analizar la viabilidad de este.

El proyecto consiste en el desarrollo y la aplicación de un nuevo método de resolución de problemas de cálculo plástico con la ayuda de la herramienta informática Wolfram Mathematica. Para la realización del mismo, es mucho más importante la aportación humana que la aportación material, limitada prácticamente a un ordenador y a un entorno de programación como es Wolfram Mathematica.

Los costes totales se dividen en costes indirectos y costes directos:

$$\text{Costes totales} = \text{Costes indirectos} + \text{Costes directos}$$

Ecuación 8: Cálculo de costes totales

- Costes indirectos: son aquellos que afectan al proceso de producción pero no afectan de forma directa al producto final. Entre ellos destacan costes administrativos y costes de explotación (internet, agua, electricidad, telefonía...)
- Costes directos: cuando hablamos de costes directos, hacemos referencia a aquellos que pueden ser asignados de forma directa e inequívoca al cálculo del precio final del producto o servicio que se ofrece. Los costes de mano de obra y material amortizable son costes directos.

5.2. Costes directos

En este proyecto, los costes directos engloban los costes de material amortizable y no amortizable y los costes de mano de obra.

5.2.1. Costes directos - mano de obra

Los gastos destinados a los trabajadores participantes en el proyecto son los costes de mano de obra. Para nuestro proyecto, solo es necesario el trabajo de un ingeniero.

Los costes directos de mano de obra se dividen en:

- Sueldo bruto del ingeniero.
- Coste de la seguridad social.
- Costes de formación en riesgos laborales y EPIs.

Calculando los días de trabajo efectivos en un año, sale un total de 222 días laborables. A razón de 8 horas diarias efectivas, el ingeniero trabaja un total de 1776 horas anuales.

Tabla 30: Cálculo anual de los días y horas efectivas de trabajo

Días totales de un año	365
Fines de semana	104
Días festivos reconocidos	11
Días laborables de vacaciones	22
Días para asuntos personales	6
Total días útiles de trabajo	222
A razón de 8 horas diarias, se obtienen:	1776 horas/año

En la siguiente tabla se muestran los costes anuales que supone tener un trabajador:

Tabla 31: Coste total del personal

Sueldo bruto	32.000 €/año
Prestaciones a la seguridad social (30%)	9.600 €/año
Formación en riesgos laborables y EPI	150 €/año
Total	41.750 €/año
Coste de mano de obra por hora:	23.50 €/hora

A continuación, se muestran las actividades realizadas y la distribución del tiempo empleado para llevarlas a cabo. Se muestran las horas empleadas del ingeniero y las horas de equipo que serán utilizadas para calcular los costes del material amortizable:

Tabla 32: Distribución temporal del trabajo

<i>Fase</i>	<i>Horas ingeniero</i>	<i>Horas equipo</i>
<i>Análisis previo</i>	50	---
<i>Estudios preliminares</i>	85	60
<i>Familiarización con el entorno Wolfram Mathematica</i>	15	30
<i>Análisis general del programa</i>	30	80
<i>Escritura del programa</i>	100	350
<i>Puesta a punto y correcciones</i>	30	80
<i>Validación de resultados</i>	30	60
<i>Preparación de la documentación</i>	75	75
<i>Nº total de horas empleadas en el proyecto</i>	400	735

El coste de que un ingeniero trabaje 400 horas, si sueldo es de 23,50 €/hora, supone 9.400 € de costes de mano de obra.

5.2.2. Costes directos – material amortizable

Estos costes están asociados al equipo informático y a la licencia software que se han utilizado en este proyecto. Suponiendo una amortización lineal de este material, se considera que el tiempo total de amortización lineal media sea de 3 años.

El material amortizable empleado en el proyecto es:

- Ordenador portátil ASUS-NotebookSKU-X541UV
- Perifericos: ratón y monitor
- Licencia de software Wolfram Mathematica

Partiendo de la estimación de que la vida útil de los materiales amortizables adquiridos es de 3 años, y teniendo en cuenta que cada año tiene 1776 horas laborables, los equipos y licencias tendrán un uso en vida útil de 5328 horas. A continuación se muestra el desembolso inicial de cada material, el coste de amortización, la utilización y el coste de amortización de cada uno:

Tabla 33: Costes directos - material amortizable

<i>Material</i>	<i>Desembolso inicial</i>	<i>Coste por hora</i>	<i>Horas empleadas</i>	<i>Coste de amortización</i>
Ordenador portátil	750 €	0.141 €/hora	735	103.64 €
Periféricos	300 €	0.0563 €/hora	735	41.38 €
Wolfram Mathematica	8520 €	1.6 €/hora	600	601.6 €
Total				746.62 €

Los costes de material amortizable ascienden a un valor de setecientos cuarenta y seis euros con sesenta y dos céntimos.

5.2.3. Costes directos - material no amortizable

Los gastos derivados de la realización del proyecto es lo que engloban los costes de material no amortizable:

Tabla 34: Costes directos - material no amortizable

Material de representación gráfica	100 €
Encuadernación	50 €
Total	150 €

Los costes directos de material no amortizable alcanzan el valor de ciento cincuenta euros.

5.2.4. Costes directos totales

En la siguiente tabla se resumen los costes directos totales:

Tabla 35: Costes directos totales

Mano de obra	9.400 €
Material amortizable	746.62 €
Material no amortizable	150 €
Total	10296.62 €

Los costes directos totales ascienden a diez mil doscientos noventa y seis euros con sesenta y dos céntimos.

5.3. Costes indirectos

Los costes indirectos engloban los gastos de las actividades de una empresa que no se pueden atribuir a ninguna actividad del proyecto en concreto. Se dividen en costes administrativos y de explotación, como pueden ser electricidad, internet, telefonía, servicios comunitarios...

Tabla 36: Costes indirectos totales

Costes administrativos	150 €
Costes de explotación	450 €
Total	600 €

Los costes indirectos del proyecto son *seiscientos* euros.

5.4. Costes totales

Para finalizar el apartado de coste económico, se recogen en la siguiente tabla los costes directos e indirectos, cuya suma es el resultado de los costes totales que conlleva la realización del proyecto:

Tabla 37: Costes totales del proyecto

Costes directos	10296.62 €
Costes indirectos	600 €
Costes totales	10896.62 €
+21% IVA	13184.91 €

Los costes totales del proyecto, aplicando el 21% de IVA, ascienden a *trece mil ciento ochenta y cuatro euros con noventa y uno céntimos*.

CAPÍTULO 6:
CONCLUSIONES – LÍNEAS
FUTURAS

6. CONCLUSIONES

En este apartado se recogen las conclusiones del Trabajo Fin de Grado:

El desarrollo del método secuencial para la resolución de problemas de cálculo plástico se ha llevado con éxito.

El método ha sido verificado comparando los resultados obtenidos de problemas cuya resolución se ha llevado a cabo aplicando el método secuencial, con los resultados obtenidos del mismo problema cuando se aplica el método cinemático. A la vista de los resultados:

- Es un método capaz de abordar problemas más complejos de manera más rápida y con menor riesgo de fallo.
- Permite obtener el orden de formación de las rótulas plásticas hasta convertir la estructura en un mecanismo inestable, que, a diferencia del método cinemático, solo nos permite conocer cuál ha sido la última rótula plástica en formarse.
- Permite conocer el valor de la carga desde cero hasta el valor de colapso del factor de carga, diferenciando en cada instante de formación de cada rótula plástica y no sólo en el instante de colapso de la estructura como ocurre con el método cinemático.
- Lo mismo sucede con los giros que pueden acumular las rótulas plásticas tras su formación, no solo nos permite conocer el valor en el instante de colapso de la estructura, sino que nos permite conocer el valor de estos giros/rotaciones acumulados entre barras a lo largo de todo el proceso de mecanización de la estructura.
- Con el método secuencial también podemos conocer el valor de los momentos flectores de cualquier sección en todo momento.

Tras exponer los resultados, se puede afirmar que el método de resolución desarrollado es mucho más completo que el método cinemático, permitiendo abordar problemas de cálculo plástico más complejos y cuya resolución es más rápida y eficaz que con otros métodos.

La motivación para llevar a cabo este proyecto ha sido la capacidad de poder desarrollar y mejorar los métodos de resolución de problemas de cálculo plástico, desarrollando un método más eficaz que con la ayuda de la herramienta Wolfram Mathematica permite resolver problemas más interesantes que simulan la realidad.

6.1. LINEAS FUTURAS

Este trabajo se ha centrado en la resolución de problemas de cálculo plástico en dos dimensiones. A la hora de aplicar el método secuencial no se ha tenido

en cuenta el efecto de los esfuerzos cortante y el axil en el momento flector máximo que es capaz de transmitir cada sección de la estructura.

Como posible ampliación y trabajo futuro, se podría plantear la resolución de problemas en 3 dimensiones, generalizando a pórticos 3D.

Otra línea de trabajo, podría ser aplicar el método secuencial teniendo en cuenta la reducción del momento plástico por efecto del esfuerzo axil y contemplando todos los factores que se han simplificado en el desarrollo de este proceso.

La resolución de estructuras sometidas a cargas no proporcionales y dinámicas, cuyo valor no crezca de manera lineal y varíe en el tiempo. Aunque se trata de un estudio más complicado porque requiere modelar la carga, descarga y posible recarga.

Realizar estudios sobre estructuras cuyas barras que tengan secciones diferentes y por lo tanto, nudos donde concurren barras con secciones de distintos momentos plásticos.

CAPÍTULO 7:

BIBLIOGRAFÍA

7. BIBLIOGRAFÍA

- ALACERO.ORG, C. e. (s.f.). *Construcciones en acero*. Obtenido de <http://www.construccionenacero.com/>
- Área de Mecánica de los Medios Continuos y Teoría de Estructuras. (s.f.). *Análisis límite de estructuras de barras - Cálculo plástico - Estructuras y Construcciones Industriales*. Escuela de Ingenierías Industriales - Universidad de Valladolid.
- Ballesteros Barranco, A. (2016). *Cálculo plástico: Origen, desarrollo y comparativa con el cálculo elástico*. Madrid: Escuela de Arquitectura de la Universidad de Alcalá de Henares.
- Basset Salom, L. (2012). *Clasificación estática de las estructuras*. Valencia: Escuela Técnica Superior de Arquitectura, Universitat Politècnica de València.
- Cañas Delgado, J. (1986). *Análisis y diseño elastoplástico de estructuras planas formadas por barras prismáticas*. Sevilla: Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, Universidad de Sevilla.
- Departamento de materiales. Universidad Autónoma Metropolitana. UAM. (2013). <http://materiales.azc.uam.mx>. Obtenido de <http://materiales.azc.uam.mx/gjl/Clases/ISOSTATICAS/>
- Diccionario de Arquitectura y Construcción*. (s.f.). Obtenido de <https://www.parro.com.ar/index.php>: <https://www.parro.com.ar/definicion-de-mecanismo+inestable>
- Facultad de Ingeniería. UNNE, U. N. (s.f.). *Universidad Nacional del Nordeste*. Obtenido de Estabilidad III - Capítulo III - Análisis plástico de estructuras: http://ing.unne.edu.ar/pub/e3_cap5.pdf
- Mroginski, J. L. (s.f.). *Facultad de Ingeniería. UNNE. Universidad Nacional del Nordeste*. Obtenido de Unidad 7 - Principio de Trabajos Virtuales: http://ing.unne.edu.ar/mecap/Apuntes/Estabilidad_1/TeoriaPTV.pdf
- Perelli Botello, J. (2013). *Resistencia de materiales, elasticidad y plasticidad*. RETINEO.
- Rodríguez Barrocal, I. (2020). *Cálculo plástico de pórticos. Método Directo. Caso de carga distribuida uniforme*. Valladolid: Escuela de Ingenierías Industriales, Universidad de Valladolid.
- Rus Carlborg, G. (2008). *Cálculo plástico de estructuras de barras: Teoría - Tercera edición*. Granada: Departamento de Mecánica de Estructuras e I. H., Universidad de Granada.

CAPÍTULO 8:

ANEXOS

8. ANEXOS

8.1. ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD – PROBLEMA 1

- Ecuación de compatibilidad 1:

$$\begin{aligned}
 & \frac{Lp(-3Mf - 3Mg)}{6IzvE} + \theta a + \theta b + \theta c - \theta f - \theta g + \frac{1}{6IzvE}(Lp - x1)(Ma + 3Mc + \frac{1}{2}q(Lp - x1)^2 \\
 & + \frac{1}{4}(-2Ma + 2Mc + Lp^2q\lambda) + \frac{(-Ma + Mc)(-2Ma + 2Mc + Lp^2q\lambda)}{2Lp^2q\lambda} \\
 & - \frac{(-2Ma + 2Mc + Lp^2q\lambda)^2}{8Lp^2q\lambda} + 2(Ma + \frac{1}{4}(-2Ma + 2Mc + Lp^2q\lambda) \\
 & + \frac{(-Ma + Mc)(-2Ma + 2Mc + Lp^2q\lambda)}{2Lp^2q\lambda} - \frac{(-2Ma + 2Mc + Lp^2q\lambda)^2}{8Lp^2q\lambda})) \\
 & + \frac{1}{6IzvE}x1(4Ma + \frac{qx1^2}{2} + \frac{1}{4}(-2Ma + 2Mc + Lp^2q\lambda) \\
 & + \frac{(-Ma + Mc)(-2Ma + 2Mc + Lp^2q\lambda)}{2Lp^2q\lambda} - \frac{(-2Ma + 2Mc + Lp^2q\lambda)^2}{8Lp^2q\lambda} + 2(Ma \\
 & + \frac{1}{4}(-2Ma + 2Mc + Lp^2q\lambda) + \frac{(-Ma + Mc)(-2Ma + 2Mc + Lp^2q\lambda)}{2Lp^2q\lambda} \\
 & - \frac{(-2Ma + 2Mc + Lp^2q\lambda)^2}{8Lp^2q\lambda})) + \theta d(1 - \frac{x2\cos[\beta]}{Ld}) + \frac{Ld(-Me - 2Mf)Sec[\beta]}{6IzvE} \\
 & + \frac{1}{6IzvE}x2(3Mc + \frac{1}{4}qx2^2(2 - \frac{x2\cos[\beta]}{Ld})) \\
 & + \frac{(-Mc + Me)(Ld^2q\lambda - 2Mc\cos[\beta]^2 + 2Me\cos[\beta]^2)}{2Ld^2q\lambda} + \frac{1}{4}(Ld^2q\lambda - 2Mc\cos[\beta]^2 \\
 & + 2Me\cos[\beta]^2)Sec[\beta]^2 - \frac{(Ld^2q\lambda - 2Mc\cos[\beta]^2 + 2Me\cos[\beta]^2)^2Sec[\beta]^2}{8Ld^2q\lambda} + (1 \\
 & - \frac{x2\cos[\beta]}{Ld})(Mc + 2(Mc + \frac{(-Mc + Me)(Ld^2q\lambda - 2Mc\cos[\beta]^2 + 2Me\cos[\beta]^2)}{2Ld^2q\lambda})) \\
 & + \frac{1}{4}(Ld^2q\lambda - 2Mc\cos[\beta]^2 + 2Me\cos[\beta]^2)Sec[\beta]^2 \\
 & - \frac{(Ld^2q\lambda - 2Mc\cos[\beta]^2 + 2Me\cos[\beta]^2)^2Sec[\beta]^2}{8Ld^2q\lambda}))) + \frac{1}{6IzvE}(-x2 \\
 & + LdSec[\beta])(\frac{1}{4}q(1 - \frac{x2\cos[\beta]}{Ld})(-x2 + LdSec[\beta])^2 + (1 - \frac{x2\cos[\beta]}{Ld})(Me + 2(Mc \\
 & + \frac{(-Mc + Me)(Ld^2q\lambda - 2Mc\cos[\beta]^2 + 2Me\cos[\beta]^2)}{2Ld^2q\lambda} + \frac{1}{4}(Ld^2q\lambda - 2Mc\cos[\beta]^2 \\
 & + 2Me\cos[\beta]^2)Sec[\beta]^2)EC1 - \frac{(Ld^2q\lambda - 2Mc\cos[\beta]^2 + 2Me\cos[\beta]^2)^2Sec[\beta]^2}{8Ld^2q\lambda}))) \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

- Ecuación de compatibilidad 2:

$$\begin{aligned}
& \frac{Lp(0.4711(2Mf + Mg) - 0.5289(Mf + 2Mg))}{6IzvE} + \frac{x1\theta b}{Lp} + \theta c + \theta d + \theta e + 0.4711\theta f - 0.5289\theta g \\
& + \frac{x1\left(\frac{qx1^3}{4Lp} + \frac{x1(Ma + 2(Ma + \frac{1}{4}(-2Ma + 2Mc + Lp^2q\lambda) + \frac{(-Ma + Mc)(-2Ma + 2Mc + Lp^2q\lambda) - (-2Ma + 2Mc + Lp^2q\lambda)^2)}{2Lp^2q\lambda})}{Lp}\right)}{6IzvE} \\
& + \frac{1}{6IzvE} (Lp - x1)(Ma + 2Mc + \frac{1}{4}q(Lp - x1)^2(1 + \frac{x1}{Lp}) + \frac{1}{4}(-2Ma + 2Mc + Lp^2q\lambda) \\
& + \frac{(-Ma + Mc)(-2Ma + 2Mc + Lp^2q\lambda) - (-2Ma + 2Mc + Lp^2q\lambda)^2}{2Lp^2q\lambda} - \frac{(-2Ma + 2Mc + Lp^2q\lambda)^2}{8Lp^2q\lambda} \\
& + \frac{x1(Mc + 2(Ma + \frac{1}{4}(-2Ma + 2Mc + Lp^2q\lambda) + \frac{(-Ma + Mc)(-2Ma + 2Mc + Lp^2q\lambda) - (-2Ma + 2Mc + Lp^2q\lambda)^2}{2Lp^2q\lambda})}{Lp} \\
& + \frac{Ld(2Me + Mf + 0.471064(Me + 2Mf))Sec[\beta]}{6IzvE} + \frac{1}{6IzvE} x2(4Mc + \frac{qx2^2}{2} \\
& + \frac{(-Mc + Me)(Ld^2q\lambda - 2McCos[\beta]^2 + 2MeCos[\beta]^2)}{2Ld^2q\lambda} + \frac{1}{4}(Ld^2q\lambda - 2McCos[\beta]^2 + 2MeCos[\beta]^2)Sec[\beta]^2 \\
& - \frac{(Ld^2q\lambda - 2McCos[\beta]^2 + 2MeCos[\beta]^2)^2Sec[\beta]^2}{8Ld^2q\lambda} + 2(Mc + \frac{(-Mc + Me)(Ld^2q\lambda - 2McCos[\beta]^2 + 2MeCos[\beta]^2)}{2Ld^2q\lambda} \\
& + \frac{1}{4}(Ld^2q\lambda - 2McCos[\beta]^2 + 2MeCos[\beta]^2)Sec[\beta]^2 - \frac{(Ld^2q\lambda - 2McCos[\beta]^2 + 2MeCos[\beta]^2)^2Sec[\beta]^2}{8Ld^2q\lambda} \\
& + \frac{1}{6IzvE} (-x2 + LdSec[\beta])(Mc + 3Me + \frac{(-Mc + Me)(Ld^2q\lambda - 2McCos[\beta]^2 + 2MeCos[\beta]^2)}{2Ld^2q\lambda} + \frac{1}{4}(Ld^2q\lambda \\
& - 2McCos[\beta]^2 + 2MeCos[\beta]^2)Sec[\beta]^2 - \frac{(Ld^2q\lambda - 2McCos[\beta]^2 + 2MeCos[\beta]^2)^2Sec[\beta]^2}{8Ld^2q\lambda} + \frac{1}{2}q(-x2 + LdSec[\beta])^2 \\
& + 2(Mc + \frac{(-Mc + Me)(Ld^2q\lambda - 2McCos[\beta]^2 + 2MeCos[\beta]^2)}{2Ld^2q\lambda} + \frac{1}{4}(Ld^2q\lambda - 2McCos[\beta]^2 + 2MeCos[\beta]^2)Sec[\beta]^2 \\
& - \frac{(Ld^2q\lambda - 2McCos[\beta]^2 + 2MeCos[\beta]^2)^2Sec[\beta]^2}{8Ld^2q\lambda})) = 0
\end{aligned}$$

- Ecuación de compatibilidad 3:

$$\begin{aligned}
 & \frac{Lp(Mf + 2Mg)}{6IzvE} + 1.529\theta a + (1.529 - \frac{x1}{Lp})\theta b + 0.529\theta c + \theta g + \frac{1}{6IzvE}x1(\frac{1}{4}qx1^2(3.058 - \frac{x1}{Lp}) \\
 & + 1.529(3Ma + \frac{1}{4}(-2Ma + 2Mc + Lp^2q\lambda) + \frac{(-Ma + Mc)(-2Ma + 2Mc + Lp^2q\lambda)}{2Lp^2q\lambda} \\
 & - \frac{(-2Ma + 2Mc + Lp^2q\lambda)^2}{8Lp^2q\lambda}) + (1.529 - \frac{x1}{Lp})(Ma + 2(Ma + \frac{1}{4}(-2Ma + 2Mc \\
 & + Lp^2q\lambda) + \frac{(-Ma + Mc)(-2Ma + 2Mc + Lp^2q\lambda)}{2Lp^2q\lambda} - \frac{(-2Ma + 2Mc + Lp^2q\lambda)^2}{8Lp^2q\lambda})) \\
 & + \frac{1}{6IzvE}(Lp - x1)(\frac{1}{4}q(Lp - x1)^2(2.058 - \frac{x1}{Lp}) + 0.529(Ma + 2Mc + \frac{1}{4}(-2Ma \\
 & + 2Mc + Lp^2q\lambda) + \frac{(-Ma + Mc)(-2Ma + 2Mc + Lp^2q\lambda)}{2Lp^2q\lambda} \\
 & - \frac{(-2Ma + 2Mc + Lp^2q\lambda)^2}{8Lp^2q\lambda}) + (1.529 - \frac{x1}{Lp})(Mc + 2(Ma + \frac{1}{4}(-2Ma + 2Mc \\
 & + Lp^2q\lambda) + \frac{(-Ma + Mc)(-2Ma + 2Mc + Lp^2q\lambda)}{2Lp^2q\lambda} - \frac{(-2Ma + 2Mc + Lp^2q\lambda)^2}{8Lp^2q\lambda})) \\
 & + \theta d(0.529 - \frac{0.529x2Cos[\beta]}{Ld}) + \frac{1}{6IzvE}x2(\frac{1}{4}qx2^2(1.058 - \frac{0.529x2Cos[\beta]}{Ld}) \\
 & + 0.529(3Mc + \frac{(-Mc + Me)(Ld^2q\lambda - 2McCos[\beta]^2 + 2MeCos[\beta]^2)}{2Ld^2q\lambda} + \frac{1}{4}(Ld^2q\lambda \\
 & - 2McCos[\beta]^2 + 2MeCos[\beta]^2)Sec[\beta]^2 \\
 & - \frac{(Ld^2q\lambda - 2McCos[\beta]^2 + 2MeCos[\beta]^2)^2Sec[\beta]^2}{8Ld^2q\lambda}) + (0.529 - \frac{0.529x2Cos[\beta]}{Ld})(Mc \\
 & + 2(Mc + \frac{(-Mc + Me)(Ld^2q\lambda - 2McCos[\beta]^2 + 2MeCos[\beta]^2)}{2Ld^2q\lambda} + \frac{1}{4}(Ld^2q\lambda \\
 & - 2McCos[\beta]^2 + 2MeCos[\beta]^2)Sec[\beta]^2 \\
 & - \frac{(Ld^2q\lambda - 2McCos[\beta]^2 + 2MeCos[\beta]^2)^2Sec[\beta]^2}{8Ld^2q\lambda})) + \frac{1}{6IzvE}(-x2 \\
 & + LdSec[\beta])(\frac{1}{4}q(0.529 - \frac{0.529x2Cos[\beta]}{Ld})(-x2 + LdSec[\beta])^2 + (0.529 \\
 & - \frac{0.529x2Cos[\beta]}{Ld})(Me + 2(Mc \\
 & + \frac{(-Mc + Me)(Ld^2q\lambda - 2McCos[\beta]^2 + 2MeCos[\beta]^2)}{2Ld^2q\lambda} + \frac{1}{4}(Ld^2q\lambda - 2McCos[\beta]^2 \\
 & + 2MeCos[\beta]^2)Sec[\beta]^2 - \frac{(Ld^2q\lambda - 2McCos[\beta]^2 + 2MeCos[\beta]^2)^2Sec[\beta]^2}{8Ld^2q\lambda}))) = 0
 \end{aligned}$$

8.2. ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD – PROBLEMA 2

- Ecuación de compatibilidad 1:

$$\begin{aligned}
 1. Ma + 6.8653Mc + 9.5617Md + 0.6337Mj + 14921.5734\theta a + 8659.0473\theta c \\
 + 45052.0574\theta d + 8549.7252\theta j + 14921.5734\theta k + 1709.6418x2\theta l \\
 + 2459.6721x4\theta n = \\
 = 0.9858Mb + 5.4822Me + 1.6995Mf + 4.9411Mg + 4.7657Mh \\
 + 1.6911Mi + 32.3369q + 8775.9467\theta b + 42298.06127\theta e \\
 + 3534.08082\theta f + 30898.9017\theta g + 10485.7002\theta h + 3748.6352\theta i \\
 + 4739.50401x1\theta k + 8775.9467\theta l + 3534.0808\theta m \\
 + 681.6624x3\theta m + 3748.6352\theta n
 \end{aligned}$$

- Ecuación de compatibilidad 2:

$$\begin{aligned}
 1. Ma + 5.5803Mb + 4.8351Mc + 0.232Mg + 2.714Mi + 2774.0346\theta a \\
 + 15519.1308\theta b + 10022.954\theta c + 4888.4785g + 13948.6508\theta i \\
 + 2774.0346\theta k + 2549.0193x1\theta k + 15519.1308\theta l \\
 + 5614.9530x3\theta m + 13948.6508\theta n = \\
 = 0.1274Md + 0.232Me + 13.7998Mf + 8.7138Mh + 0.1518Mj \\
 + 119.8349q + 5669.2999\theta d + 4888.4785\theta e + 66600.0142\theta f \\
 + 9338.5042\theta h + 8573.4024\theta j + 538.9445x2\theta l + 66600.0142\theta m \\
 + 4504.4106x4\theta n
 \end{aligned}$$

- Ecuación de compatibilidad 3:

$$\begin{aligned}
 1. Ma + 6.8653Mc + 9.5617Md + 4.9411Me + 5.4822Mg + 0.6337Mj \\
 + 14921.5734\theta a + 8659.04733\theta c + 45052.0574\theta d \\
 + 30898.9017\theta e + 42298.0613\theta g + 8549.7252\theta j + 14921.5734\theta k \\
 + 1709.6418x2\theta l + 2459.6721x4\theta n = \\
 = 0.9858Mb + 1.6995Mf + 4.7657Mh + 1.6910Mi + 32.3369q \\
 + 8775.9467\theta b + 3534.0808\theta f + 10485.7002\theta h + 3748.6352\theta i \\
 + 4739.5040x1\theta k + 8775.9467\theta l + 3534.0808\theta m \\
 + 681.6623x3\theta m + 3748.6352\theta n
 \end{aligned}$$

- **Ecuación de compatibilidad 4:**

$$\begin{aligned} 1. & Ma + 12.6445Mb + 19.3716Mc + 6.6103Md + 0.0519Me + 6.2918Mf \\ & + 19.1941Mh + 11.0902Mi + 0.4444Mj + 321.6629q \\ & + 31851.3421\theta b + 38314.2233\theta c + 14982.37385\theta d \\ & + 1094.1284\theta e + 12598.715\theta f + 39791.7595\theta h + 26491.0388\theta i \\ & + 7448.6826x1\theta k + 31851.3421\theta l + 633.7376x2\theta l \\ & + 12598.715\theta m + 2666.4974x3\theta m + 26491.0388\theta n = \\ & = 0.0519Mg + 5392.0711\theta a + 1094.1284\theta g + 8564.1176\theta j \\ & + 5392.0711\theta k + 7011.0313x4\theta n \end{aligned}$$

- **Ecuación de compatibilidad 5:**

$$\begin{aligned} 1. & Ma + 2.4636Mb + 1.3482Mc + 0.0122Me + 0.0777Mf + 19.6328q \\ & + 7234.9819\theta a + 6597.2362\theta b + 2235.8656\theta c + 257.8992\theta e \\ & + 2068.9165\theta f + 7234.9819\theta k + 6597.23622\theta l + 2068.9165\theta m \\ & + 230.7088x4\theta n = \\ & = 0.09631Md + 0.0122Mg + 1.7211Mh + 2.4541Mi + 0.8168Mj \\ & + 1615.3084\theta d + 257.8992\theta g + 3335.3021\theta h + 6505.1329\theta i \\ & + 5351.5889\theta j + 127.5491x1\theta k + 427.6676x2\theta l + 529.9272x3\theta m \\ & + 6505.1329\theta n \end{aligned}$$

- **Ecuación de compatibilidad 6:**

$$\begin{aligned} 1. & Ma + 1.2808Mb + 0.0146Me + 0.1615Mf + 0.5657Mh + 1.9586Mi + 1.2567Mj \\ & + 14.8695q + 8718.0398\theta a + 3631.1204\theta b + 306.9651\theta e \\ & + 835.9981\theta f + 5024.4147\theta i + 10725.2643\theta j + 8718.0398\theta k \\ & + 3631.1204\theta l + 835.9981\theta m + 5024.4147\theta n + 1140.1699x4\theta n = \\ & = 0.6907Mc + 0.8191Md + 0.0146Mg + 1867.357\theta c \\ & + 3296.2988\theta d + 306.9651\theta g + 4.2425\theta h + 1017.3839x1\theta k \\ & + 539.1701x2\theta l + 82.3923x3\theta m \} \end{aligned}$$

8.3. CÓDIGOS DE PROGRAMACIÓN

A continuación se adjuntan los códigos de programación realizados con el programa Wolfram Mathematica.

8.3.1. CÓDIGO DE PROGRAMACIÓN EJEMPLO 1

```

In[1]:= eq = Table[0, {2}];
      |
      |tabla
      |
eq[ [1] ] = P L == -M2 + 2 M3 - M4;
eq[ [2] ] = P L / 6 == -M1 + M2 - M4;

In[4]:= (* ensayar MC1 *)
M2 = -Mp;
M3 = +Mp;
M4 = -Mp;

In[7]:= sol = Solve[eq, {P, M1}][[1]]
      |
      |resuelve
      |
Out[7]= {P ->  $\frac{4 Mp}{L}$ , M1 ->  $-\frac{2 Mp}{3}$ }

In[8]:=

In[9]:= PFV1[Ma_, Mb_, ma_, mb_, L_, EI_] := L / (6 EI) (ma (2 Ma + Mb) + mb (2 Mb + Ma))

In[10]:=

In[11]:= ecs = Table[0, {2}];
      |
      |tabla
      |

In[12]:= m1 = 0; m2 = 1; m3 = 1; m4 = 1; m5 = 0;
      e1 = 0; e5 = 0; M5 = 0;
      ecs[ [1] ] =
      PFV1[M1, M2, m1, m2, L, vE Iz] + PFV1[M2, M3, m2, m3, L, vE Iz] + PFV1[M3, M4, m3, m4, L,
      vE Iz] + PFV1[M4, M5, m4, m5, L, vE Iz] + m1 e1 + m2 e2 + m3 e3 + m4 e4 + m5 e5 == 0 /. sol

Out[14]=  $-\frac{7 L Mp}{9 I_z vE} + e2 + e3 + e4 == 0$ 

In[15]:= m1 = 1; m2 = 0; m3 = -1/2; m4 = -1; m5 = 0;
      e1 = 0; e5 = 0; M5 = 0;
      ecs[ [2] ] =
      PFV1[M1, M2, m1, m2, L, vE Iz] + PFV1[M2, M3, m2, m3, L, vE Iz] + PFV1[M3, M4, m3, m4, L,
      vE Iz] + PFV1[M4, M5, m4, m5, L, vE Iz] + m1 e1 + m2 e2 + m3 e3 + m4 e4 + m5 e5 == 0 /. sol

Out[17]=  $-\frac{L Mp}{18 I_z vE} - \frac{e3}{2} - e4 == 0$ 

In[18]:=

In[19]:= sol1 = Solve[Join[ecs, {e2 == 0}], {e2, e3, e4}][[1]]
      |
      |resue...: junta
      |
Out[19]= {e2 -> 0, e3 ->  $\frac{5 L Mp}{3 I_z vE}$ , e4 ->  $-\frac{8 L Mp}{9 I_z vE}$ }

In[20]:= datos = {L -> 4, vE -> 2.1 x 10^11, Iz -> 8360 x 10^-8, Mp -> 275 x 628};

In[21]:= sol1 /. datos

Out[21]= {e2 -> 0, e3 -> 0.0655806, e4 -> -0.0349763}

In[22]:=

In[23]:=

```

```

(* analisis elastico-lineal *)

In[25]:= Clear [M2, M3, M4]
         |borra
         eq
Out[26]:= {L P == -M2 + 2 M3 - M4,  $\frac{L P}{6} == -M1 + M2 - M4$ }

In[27]:= Solve[{L P == -M2 + 2 M3 - M4,  $\frac{L P}{6} == -M1 + M2 - M4$ }, {M1, M2, Mp}]
         |resuelve

Out[27]:= {{M1 ->  $\frac{1}{6} (12 M3 - 12 M4 - 7 L P)$ , M2 -> 2 M3 - M4 - L P}}

In[28]:= ecs = Table[0, {2}];
         |tabla
         m1 = 0; m2 = 1; m3 = 1; m4 = 1; m5 = 0;
         e1 = 0; e5 = 0; M5 = 0;
         ecs[[1]] =
         Simplify[PFV1[M1, M2, m1, m2, L, vE Iz] + PFV1[M2, M3, m2, m3, L, vE Iz] + PFV1[M3, M4, m3,
         |simplifica
         m4, L, vE Iz] + PFV1[M4, M5, m4, m5, L, vE Iz] + m1 e1 + m2 e2 + m3 e3 + m4 e4 + m5 e5 == 0]
Out[31]:=  $\frac{1}{Iz vE} (L (M1 + 5 M2 + 6 M3 + 5 M4) + 6 Iz vE (e2 + e3 + e4)) == 0$ 

In[32]:= m1 = 1; m2 = 0; m3 = -1/2; m4 = -1; m5 = 0;
         ecs[[2]] =
         Simplify[PFV1[M1, M2, m1, m2, L, vE Iz] + PFV1[M2, M3, m2, m3, L, vE Iz] + PFV1[M3, M4, m3,
         |simplifica
         m4, L, vE Iz] + PFV1[M4, M5, m4, m5, L, vE Iz] + m1 e1 + m2 e3 + m3 e3 + m4 e4 + m5 e5 == 0]
Out[33]:=  $-\frac{L (4 M1 + M2 - 6 M3 - 9 M4) + 6 Iz vE (e3 + 2 e4)}{Iz vE} == 0$ 

In[34]:=

In[35]:= sol2 = Solve[Join[eq, ecs] /. {e2 -> 0, e3 -> 0, e4 -> 0}, {M1, M2, M3, M4}][[1]];
         |resue...|junta
         sol2 // N
         |valor numérico
Out[36]:= {M1 -> -0.0464135 L P, M2 -> -0.124473 L P, M3 -> 0.315401 L P, M4 -> -0.244726 L P}

In[37]:= sol2 /. datos
         Mmax = M3 /. sol2 // N (* primera RP -> seccion "3" *)
         |valor numérico
Out[37]:= {M1 ->  $-\frac{44 P}{237}$ , M2 ->  $-\frac{118 P}{237}$ , M3 ->  $\frac{299 P}{237}$ , M4 ->  $-\frac{232 P}{237}$ }
Out[38]:= 0.315401 L P

In[39]:= Solve[{M3 == Mp} /. sol2, P][[1]] // N
         |resuelve |valor numérico
Out[39]:= {P ->  $\frac{3.17057 Mp}{L}$ }

In[40]:= Mmax /. datos
Out[40]:= 1.2616 P

In[41]:= Solve[Mmax == ME, P][[1]];
         |resuelve

```

```

PE = P / . %
Out[42]=  $\frac{3.17057 ME}{L}$ 

In[43]= Pc = P / . sol
Out[43]=  $\frac{4 Mp}{L}$ 

In[44]=

In[45]= (* paso 2 *)

In[46]= M3 = Mp;

In[47]= sol3 = Solve[Join[eq, ecs] /. {θ2 → 0, θ4 → 0}, {M1, M2, θ3, M4}][[1]];
      |resuelve| |junta
sol3 // N
      |valor numérico
Out[48]= {M1 → 0.0166667 (-12. Mp + L P), M2 → 0.00833333 (108. Mp - 49. L P),
      θ3 → -  $\frac{0.00277778 (948. L Mp - 299. L^2 P)}{Iz vE}$ , M4 → 0.00833333 (132. Mp - 71. L P)}
```

```

In[49]= sol3 /. datos
Out[49]= {M1 →  $\frac{1}{60} (-2072400 + 4 P)$ , M2 →  $\frac{1}{120} (18651600 - 196 P)$ ,
      θ3 →  $-1.58224 \times 10^{-10} (654878400 - 4784 P)$ , M4 →  $\frac{1}{120} (22796400 - 284 P)$ }

In[50]= Solve[(M4 == -Mp) /. sol3, P][[1]] // N (* segunda RP → seccion "4" *)
      |resuelve| |valor numérico
Out[50]= {P →  $\frac{3.5493 Mp}{L}$ }
```

```

In[51]=

In[52]= (* paso 3 *)

In[53]= M4 = -Mp;

In[54]= sol4 = Solve[Join[eq, ecs] /. {θ2 → 0}, {M1, M2, θ3, θ4}][[1]];
      |resuelve| |junta
sol4 // N
      |valor numérico
Out[55]= {M1 → 0.166667 (24. Mp - 7. L P), M2 → 3. Mp - 1. L P,
      θ3 → -  $\frac{0.333333 (31. L Mp - 9. L^2 P)}{Iz vE}$ , θ4 → -  $\frac{0.0277778 (-252. L Mp + 71. L^2 P)}{Iz vE}$ }
```

```

In[56]= sol4 /. datos
Out[56]= {M1 →  $\frac{1}{6} (4144800 - 28 P)$ , M2 → 518100 - 4 P,
      θ3 →  $-1.89869 \times 10^{-8} (21414800 - 144 P)$ , θ4 →  $-1.58224 \times 10^{-9} (-174081600 + 1136 P)$ }
```

```

In[57]= (* ultima RP → seccion "2" *)
Pc = P /. Solve[(M2 == -Mp) /. sol4, P][[1]] (* carga de colapso *)
      |resuelve
Out[57]=  $\frac{4 Mp}{L}$ 

In[58]= P = Pc
Out[58]=  $\frac{4 Mp}{L}$ 

In[59]= sol4 /. datos
Out[59]= {M1 → -  $\frac{345400}{3}$ , M2 → -172700, θ3 → 0.0655806, θ4 → -0.0349763}
```

8.3.2. CÓDIGO DE PROGRAMACIÓN EJEMPLO 2

```

In[1]:=
  eq = Table[0, {2}];
      |tabla
  eq[[1]] = P L == -M2 + 2 M3 - M4;
  eq[[2]] = P L == -M1 + M2 - M4 + M5;

In[4]:= (*ensayar MC1+MC2*)
  M1 = -Mp;
  M3 = +Mp;
  M4 = -Mp;
  M5 = +Mp;

In[8]:= sol = Solve[eq, {P, M2}][[1]]
      |resuelve
Out[8]:= {P -> (3 Mp)/L, M2 -> 0}

In[9]:= PFV1[Ma_, Mb_, ma_, mb_, L_, EI_] := L / (6 EI) (ma (2 Ma + Mb) + mb (2 Mb + Ma))

In[10]:= ecs = Table[0, {3}];
      |tabla

In[11]:= m1 = 1; m2 = 1; m3 = 1/2; m4 = 0; m5 = 0;
  e2 = 0; M2 = 0;

In[13]:= ecs[[1]] =
  PFV1[M1, M2, m1, m2, L, vE Iz] + PFV1[M2, M3, m2, m3, L, vE Iz] + PFV1[M3, M4, m3, m4, L,
  vE Iz] + PFV1[M4, M5, m4, m5, L, vE Iz] + m1 e1 + m2 e2 + m3 e3 + m4 e4 + m5 e5 == 0 /. sol
Out[13]:= - (L Mp)/(12 Iz vE) + e1 + (e3)/2 == 0

In[14]:= m1 = 0; m2 = 0; m3 = 1/2; m4 = 1; m5 = 1;
  e2 = 0; M2 = 0;

In[16]:= ecs[[2]] =
  PFV1[M1, M2, m1, m2, L, vE Iz] + PFV1[M2, M3, m2, m3, L, vE Iz] + PFV1[M3, M4, m3, m4, L,
  vE Iz] + PFV1[M4, M5, m4, m5, L, vE Iz] + m1 e1 + m2 e2 + m3 e3 + m4 e4 + m5 e5 == 0 /. sol
Out[16]:= (L Mp)/(12 Iz vE) + (e3)/2 + e4 + e5 == 0

In[17]:= m1 = 0; m2 = 1; m3 = 1; m4 = 1; m5 = 0;
  e2 = 0; M2 = 0;

In[19]:= ecs[[3]] =
  PFV1[M1, M2, m1, m2, L, vE Iz] + PFV1[M2, M3, m2, m3, L, vE Iz] + PFV1[M3, M4, m3, m4, L,
  vE Iz] + PFV1[M4, M5, m4, m5, L, vE Iz] + m1 e1 + m2 e2 + m3 e3 + m4 e4 + m5 e5 == 0 /. sol
Out[19]:= (L Mp)/(6 Iz vE) + e3 + e4 == 0

In[20]:= sol1 = Solve[Join[eq, ecs, {e1 == 0}]/. sol, {e1, e3, e4, e5}][[1]]
      |resue...|junta
Out[20]:= {e1 -> 0, e3 -> (L Mp)/(6 Iz vE), e4 -> - (L Mp)/(3 Iz vE), e5 -> (L Mp)/(6 Iz vE)}

In[21]:= datos = {L -> 4, vE -> 2.1 x 10^11, Iz -> 8360 x 10^-8, Mp -> 275 x 628};
  sol1 /. datos
Out[22]:= {e1 -> 0, e3 -> 0.00655806, e4 -> -0.0131161, e5 -> 0.00655806}

In[23]:=

In[24]:= (* Analisis elastico-lineal *)
  Clear[M1, M2, M3, M4, M5, e2]
      |borra
  eq
Out[25]:= {L P == -M2 + 2 M3 - M4, L P == -M1 + M2 - M4 + M5}

```

```

In[26]:= ecs = Table[0, {3}];
          |
          |tabla

In[27]:= m1 = 1; m2 = 1; m3 = 1/2; m4 = 0; m5 = 0;
          ecs[[1]] = PFV1[M1, M2, m1, m2, L, vE Iz] +
              PFV1[M2, M3, m2, m3, L, vE Iz] + PFV1[M3, M4, m3, m4, L, vE Iz] +
              PFV1[M4, M5, m4, m5, L, vE Iz] + m1 e1 + m2 e2 + m3 e3 + m4 e4 + m5 e5 == 0
Out[28]:=  $\frac{L(3M1 + 3M2)}{6 Iz vE} + \frac{L(2M2 + M3 + \frac{1}{2}(M2 + 2M3))}{6 Iz vE} + \frac{L(2M3 + M4)}{12 Iz vE} + e1 + e2 + \frac{e3}{2} = 0$ 

In[29]:= m1 = 0; m2 = 0; m3 = 1/2; m4 = 1; m5 = 1;
          ecs[[2]] = PFV1[M1, M2, m1, m2, L, vE Iz] +
              PFV1[M2, M3, m2, m3, L, vE Iz] + PFV1[M3, M4, m3, m4, L, vE Iz] +
              PFV1[M4, M5, m4, m5, L, vE Iz] + m1 e1 + m2 e2 + m3 e3 + m4 e4 + m5 e5 == 0
Out[30]:=  $\frac{L(M2 + 2M3)}{12 Iz vE} + \frac{L(M3 + 2M4 + \frac{1}{2}(2M3 + M4))}{6 Iz vE} + \frac{L(3M4 + 3M5)}{6 Iz vE} + \frac{e3}{2} + e4 + e5 = 0$ 

In[31]:= m1 = 0; m2 = 1; m3 = 1; m4 = 1; m5 = 0;
          ecs[[3]] = PFV1[M1, M2, m1, m2, L, vE Iz] +
              PFV1[M2, M3, m2, m3, L, vE Iz] + PFV1[M3, M4, m3, m4, L, vE Iz] +
              PFV1[M4, M5, m4, m5, L, vE Iz] + m1 e1 + m2 e2 + m3 e3 + m4 e4 + m5 e5 == 0
Out[32]:=  $\frac{L(M1 + 2M2)}{6 Iz vE} + \frac{L(3M2 + 3M3)}{6 Iz vE} + \frac{L(3M3 + 3M4)}{6 Iz vE} + \frac{L(2M4 + M5)}{6 Iz vE} + e2 + e3 + e4 = 0$ 

In[33]:= sol2 = Solve[
          |
          |resuelve
          |
          |Join[eq, ecs] /. {e1 -> 0, e2 -> 0, e3 -> 0, e4 -> 0, e5 -> 0}, {M1, M2, M3, M4, M5}][[1]];
          |
          |junta

          sol2 //
          N
          |
          |valor numérico

Out[34]:= {M1 -> -0.2125 L P, M2 -> -0.0125 L P, M3 -> 0.3 L P, M4 -> -0.3875 L P, M5 -> 0.4125 L P}

In[35]:= sol2 /. datos
Out[35]:= {M1 -> - $\frac{17P}{20}$ , M2 -> - $\frac{P}{20}$ , M3 ->  $\frac{6P}{5}$ , M4 -> - $\frac{31P}{20}$ , M5 ->  $\frac{33P}{20}$ }

In[36]:= Mmax = M5 /. sol2 // N (* primera RP -> seccion "5" *)
          |
          |valor numérico

Out[36]:= 0.4125 L P

In[37]:= Solve[(M5 == Mp) /. sol2, P][[1]] // N
          |
          |resuelve
          |
          |vε

          Solve[Mmax == ME, P][[1]];
          |
          |resuelve

          PE = P /. %
Out[37]:= {P ->  $\frac{2.42424 Mp}{L}$ }

Out[39]=  $\frac{2.42424 ME}{L}$ 

In[40]:= Pc = P /. sol
Out[40]=  $\frac{3 Mp}{L}$ 

```

```

In[41]= (* factor de seguridad del diseño elastico-lineal *)
        φ = 1.13; (* factor de forma perfil serie IPE *)

In[42]= n = Pc / PE /. {Mp → φ ME}

Out[42]= 1.39837

In[43]= (* paso 2 *)
        M5 = Mp;

In[44]= sol3 = Solve[Join[eq, ecs] /. {θ1 → 0, θ2 → 0, θ3 → 0, θ4 → 0}, {M1, M2, M3, M4, θ5}][[1]];
        sol3 // N
        |valor numérico

Out[45]= {M1 → 0.0126582 (49. Mp - 37. L P),
        M2 → 0.00632911 (-46. Mp + 17. L P), M3 → 0.0126582 (-8. Mp + 27. L P),
        M4 → 0.00632911 (14. Mp - 67. L P), θ5 → -  $\frac{0.00632911 (80. L Mp - 33. L^2 P)}{Iz VE}$  }

In[46]= sol3 /. datos

Out[46]= {M1 →  $\frac{1}{79} (8462300 - 148 P)$ , M2 →  $\frac{1}{158} (-7944200 + 68 P)$ , M3 →  $\frac{1}{79} (-1381600 + 108 P)$ ,
        M4 →  $\frac{1}{158} (2417800 - 268 P)$ , θ5 →  $-3.6051 \times 10^{-10} (55264000 - 528 P)$  }

In[47]= Solve[{M4 == -Mp} /. sol3, P][[1]] // N (* segunda RP → seccion "4" *)
        |resuelve |valor numérico

Out[47]= {P →  $\frac{2.56716 Mp}{L}$  }

In[48]= (* paso 3 *)
        M4 = -Mp;
        sol4 = Solve[Join[eq, ecs] /. {θ1 → 0, θ2 → 0, θ3 → 0}, {M1, M2, M3, θ4, θ5}][[1]];
        sol4 // N
        |valor numérico

Out[50]= {M1 → 0.05 (32. Mp - 17. L P), M2 → 0.05 (-8. Mp + 3. L P), M3 → 0.025 (-28. Mp + 23. L P),
        θ4 → -  $\frac{0.00833333 (-172. L Mp + 67. L^2 P)}{Iz VE}$ , θ5 → -  $\frac{0.00833333 (76. L Mp - 31. L^2 P)}{Iz VE}$  }

In[51]= sol4 /. datos

Out[51]= {M1 →  $\frac{1}{20} (5526400 - 68 P)$ , M2 →  $\frac{1}{20} (-1381600 + 12 P)$ , M3 →  $\frac{1}{40} (-4835600 + 92 P)$ ,
        θ4 →  $-4.74672 \times 10^{-10} (-118817600 + 1072 P)$ , θ5 →  $-4.74672 \times 10^{-10} (52500800 - 496 P)$  }

In[52]= Solve[{M3 == Mp} /. sol4, P][[1]] // N (* tercera RP → seccion "3" *)
        |resuelve |valor numérico

Out[52]= {P →  $\frac{2.95652 Mp}{L}$  }

In[53]= (* paso 4 *)
        M3 = Mp;
        sol5 = Solve[Join[eq, ecs] /. {θ1 → 0, θ2 → 0}, {M1, M2, θ3, θ4, θ5}][[1]];
        sol5 // N
        |valor numérico

Out[55]= {M1 → 5. Mp - 2. L P, M2 → 3. Mp - 1. L P, θ3 → -  $\frac{0.166667 (68. L Mp - 23. L^2 P)}{Iz VE}$ ,
        θ4 → -  $\frac{0.333333 (-23. L Mp + 8. L^2 P)}{Iz VE}$ , θ5 → -  $\frac{0.166667 (14. L Mp - 5. L^2 P)}{Iz VE}$  }

In[56]= sol5 /. datos

Out[56]= {M1 → 863500 - 8 P, M2 → 518100 - 4 P, θ3 →  $-9.49343 \times 10^{-9} (46974400 - 368 P)$ ,
        θ4 →  $-1.89869 \times 10^{-8} (-15888400 + 128 P)$ , θ5 →  $-9.49343 \times 10^{-9} (9671200 - 80 P)$  }
    
```

In[56]= sol5 /. datos

Out[56]= {M1 → 863 500 - 8 P, M2 → 518 100 - 4 P, $\theta_3 \rightarrow -9.49343 \times 10^{-9} (46\,974\,400 - 368 P)$,
 $\theta_4 \rightarrow -1.89869 \times 10^{-8} (-15\,888\,400 + 128 P)$, $\theta_5 \rightarrow -9.49343 \times 10^{-9} (9\,671\,200 - 80 P)$ }

In[57]= (* paso 5 *)

(* ultima RP → seccion "1" *)

Pc = P /. Solve[(M1 == -Mp) /. sol5, P][[1]] (* carga de colapso *)
 |_{resuelve}

Out[57]= $\frac{3 Mp}{L}$

In[58]= M2 /. sol5 /. P → Pc (* Comprobado *)

Out[58]= 0

In[59]= P

Out[59]= P

8.3.3. CÓDIGO DE PROGRAMACIÓN EJEMPLO 3

```

In[2]:= NPR = 4; (* secciones: a, c, d y e *)
        GH = 3;
        EQ = NPR - GH
Out[4]= 1

In[5]:= eq = Table[0, {EQ}];
        [tabla
        eq[[1]] = 9 q L^2 / 2 == -Ma + Mc - Md + Me
Out[6]=  $\frac{9 L^2 q}{2} == -Ma + Mc - Md + Me$ 

In[7]:=

In[8]:= PFV1[Ma_, Mb_, ma_, mb_, L_, EI_] := L / (6 EI) (ma (2 Ma + Mb) + mb (2 Mb + Ma))
        PFV2[Ma_, Mb_, ma_, mb_, L_, EI_] :=
        L / (6 EI) ((ma (2 Ma + Mb) + mb (2 Mb + Ma)) + q L^2 / 4 (ma + mb))

In[10]:=

In[11]:= ecs = Table[0, {GH}];
        [tabla

In[12]:= ma = 1; mc = 1; md = 0; me = 0; mb = (mc - ma) / (3 L) x + ma; (* lineal *)
        ecs[[1]] = PFV2[Ma, Mb, ma, mb, x, vE Iz] +
        PFV2[Mb, Mc, mb, mc, 3 L - x, vE Iz] + PFV1[Mc, Md, mc, md, 5 L, vE Iz] +
        PFV1[Md, Me, md, me, 3 L, vE Iz] + ma ea + mb eb + mc ec + md ed + me ee == 0
Out[13]=  $\frac{5 L (2 Mc + Md)}{6 Iz vE} + \frac{(3 Mb + 3 Mc + \frac{1}{2} q (3 L - x)^2) (3 L - x)}{6 Iz vE} + \frac{x (3 Ma + 3 Mb + \frac{q x^2}{2})}{6 Iz vE} + ea + eb + ec == 0$ 

In[14]:= ma = 0; mc = 0; md = 1; me = 1; mb = (mc - ma) / (3 L) x + ma;
        ecs[[2]] = PFV2[Ma, Mb, ma, mb, x, vE Iz] +
        PFV2[Mb, Mc, mb, mc, 3 L - x, vE Iz] + PFV1[Mc, Md, mc, md, 5 L, vE Iz] +
        PFV1[Md, Me, md, me, 3 L, vE Iz] + ma ea + mb eb + mc ec + md ed + me ee == 0
Out[15]=  $\frac{5 L (Mc + 2 Md)}{6 Iz vE} + \frac{L (3 Md + 3 Me)}{2 Iz vE} + ed + ee == 0$ 

In[16]:= ma = 1; mc = 0; md = 0; me = 1; mb = (mc - ma) / (3 L) x + ma;
        ecs[[3]] = PFV2[Ma, Mb, ma, mb, x, vE Iz] +
        PFV2[Mb, Mc, mb, mc, 3 L - x, vE Iz] + PFV1[Mc, Md, mc, md, 5 L, vE Iz] +
        PFV1[Md, Me, md, me, 3 L, vE Iz] + ma ea + mb eb + mc ec + md ed + me ee == 0
Out[17]=  $\frac{L (Md + 2 Me)}{2 Iz vE} + \frac{(3 L - x) ((2 Mb + Mc) (\frac{1 - x}{3 L}) + \frac{1}{4} q (3 L - x)^2 (\frac{1 - x}{3 L}))}{6 Iz vE} +$ 
 $\frac{x (2 Ma + Mb + (Ma + 2 Mb) (\frac{1 - x}{3 L}) + \frac{1}{4} q x^2 (2 - \frac{x}{3 L}))}{6 Iz vE} + ea + (1 - \frac{x}{3 L}) eb + ee == 0$ 

In[18]:=

In[19]:= (* analisis elastico-lineal *)

In[20]:= Mz = (Mc - Ma) / (3 L) x + Ma + q (3 L) / 2 x - q x^2 / 2 (* parabolico *)
Out[20]=  $Ma + \frac{(-Ma + Mc) x}{3 L} + \frac{3 L q x}{2} - \frac{q x^2}{2}$ 

In[21]:= x1 = Solve[D[Mz, x] == 0, x][[1]]
        [resue... [deriva
Out[21]= {x ->  $\frac{-2 Ma + 2 Mc + 9 L^2 q}{6 L q}$ }
```

In[22]= **Mmax = Mz / . x1**

$$\text{Out[22]= } Ma + \frac{1}{4} (-2 Ma + 2 Mc + 9 L^2 q) + \frac{(-Ma + Mc) (-2 Ma + 2 Mc + 9 L^2 q)}{18 L^2 q} - \frac{(-2 Ma + 2 Mc + 9 L^2 q)^2}{72 L^2 q}$$

In[23]= **Mb = Mmax;**

sol = Solve[

resuelve

Join[eq, ecs] /. {ea → 0, eb → 0, ec → 0, ed → 0, ee → 0} /. x1, {Ma, Mc, Md, Me}][[1]]

junta

sol //

N

valor numérico

$$\text{Out[24]= } \{Ma \rightarrow -\frac{1305 L^2 q}{598}, Mc \rightarrow \frac{1197 L^2 q}{2392}, Md \rightarrow -\frac{1611 L^2 q}{2392}, Me \rightarrow \frac{342 L^2 q}{299}\}$$

$$\text{Out[25]= } \{Ma \rightarrow -2.18227 L^2 q, Mc \rightarrow 0.500418 L^2 q, Md \rightarrow -0.673495 L^2 q, Me \rightarrow 1.14381 L^2 q\}$$

In[26]= **Mb /. sol // N**

valor numérico

$$\text{Out[26]= } 0.683896 L^2 q$$

In[27]= **q1 = Solve[(Ma == -Mp) /. sol, q][[1]] (* primera RP, → seccion "a" *)**

resuelve

$$\text{Out[27]= } \{q \rightarrow \frac{598 Mp}{1305 L^2}\}$$

In[28]= **Mb /. sol /. q1 // N**

valor numérico

$$\text{Out[28]= } 0.313387 Mp$$

In[29]= **Ma /. sol /. q1**

$$\text{Out[29]= } -Mp$$

In[30]=

In[31]= **(* paso 2 *)**

In[32]= **sol = Solve[Join[eq, ecs] /. {eb → 0, ec → 0, ed → 0, ee → 0} /. x1 /. Ma → -Mp,**

resuelve junta

{ea, Mc, Md, Me}][[1]]

sol //

N

valor numérico

$$\text{Out[32]= } \{ea \rightarrow -\frac{598 L Mp + 1305 L^3 q}{400 Iz vE}, Mc \rightarrow \frac{1}{200} (-16 Mp + 135 L^2 q),$$

$$Md \rightarrow \frac{1}{100} (31 Mp - 135 L^2 q), Me \rightarrow \frac{1}{200} (-122 Mp + 495 L^2 q)\}$$

$$\text{Out[33]= } \{ea \rightarrow -\frac{0.0025 (-598 L Mp + 1305 L^3 q)}{Iz vE}, Mc \rightarrow 0.005 (-16 Mp + 135 L^2 q),$$

$$Md \rightarrow 0.01 (31 Mp - 135 L^2 q), Me \rightarrow 0.005 (-122 Mp + 495 L^2 q)\}$$

In[34]= **q2 = Solve[(Me == Mp) /. sol, q][[1]] (* segunda RP, → seccion "e" *)**

resuelve

$$\text{Out[34]= } \{q \rightarrow \frac{322 Mp}{495 L^2}\}$$

In[35]= **Mb /. sol /. Ma → -Mp /. q2 // N**

valor numérico

$$\text{Out[35]= } 0.569115 Mp$$

In[37]= (* paso 3 *)

In[38]= sol = Solve[Join[eq, ecs] /. {θb → 0, θc → 0, θd → 0, Me → Mp} /. x1 /. Ma → -Mp, {θa, Mc, Md, θe}][[1]]

sol // N
[valor numérico]

$$\text{Out[38]} = \left\{ \theta_a \rightarrow -\frac{-161 L Mp + 288 L^3 q}{42 Iz vE}, Mc \rightarrow \frac{1}{56} (-56 Mp + 117 L^2 q), \right. \\ \left. Md \rightarrow \frac{1}{56} (56 Mp - 135 L^2 q), \theta_e \rightarrow -\frac{322 L Mp - 495 L^3 q}{84 Iz vE} \right\}$$

$$\text{Out[39]} = \left\{ \theta_a \rightarrow -\frac{0.0238095 (-161. L Mp + 288. L^3 q)}{Iz vE}, Mc \rightarrow 0.0178571 (-56. Mp + 117. L^2 q), \right. \\ \left. Md \rightarrow 0.0178571 (56. Mp - 135. L^2 q), \theta_e \rightarrow -\frac{0.0119048 (322. L Mp - 495. L^3 q)}{Iz vE} \right\}$$

In[40]= q3 = Solve[(Mb == Mp) /. sol /. Ma → -Mp, q][[1]] (* tercera RP, → seccion "b" *)

$$\text{Out[40]} = \left\{ q \rightarrow \frac{12 544 Mp}{15 129 L^2} \right\}$$

In[41]= Md /. sol /. Ma → -Mp /. q3 // N
[valor numérico]

$$\text{Out[41]} = -0.99881 Mp$$

In[42]=

In[43]= (* paso 4 *)

In[44]= sol = Solve[Join[eq, ecs, {Mb == Mp}] /. {θc → 0, θd → 0, Me → Mp} /. x1 /. Ma → -Mp, {θa, θb, Mc, Md, θe}][[2]]

$$\text{Out[44]} = \left\{ \theta_a \rightarrow \frac{184 L Mp^{3/2} - 1152 L^2 Mp \sqrt{q} + 3960 L^3 \sqrt{Mp} q - 3321 L^4 q^{3/2}}{48 Iz \sqrt{Mp} vE}, \right. \\ \theta_b \rightarrow -\frac{9 (112 L^3 \sqrt{Mp} q - 123 L^4 q^{3/2})}{16 Iz \sqrt{Mp} vE}, Mc \rightarrow \frac{1}{2} (-2 Mp + 12 L \sqrt{Mp} \sqrt{q} - 9 L^2 q), \\ \left. Md \rightarrow Mp + 6 L \sqrt{Mp} \sqrt{q} - 9 L^2 q, \theta_e \rightarrow \frac{-46 L Mp - 288 L^2 \sqrt{Mp} \sqrt{q} + 387 L^3 q}{12 Iz vE} \right\}$$

In[45]= q4 = Solve[(Md == -Mp) /. sol /. Ma → -Mp, q][[2]] (* cuarta RP, → seccion "d" *)

$$\text{Out[45]} = \left\{ q \rightarrow \frac{2 (2 Mp + \sqrt{3} Mp)}{9 L^2} \right\}$$

In[46]= FullSimplify[Md /. sol /. Ma → -Mp /. q4, {Mp > 0, L > 0}]
[simplifica completamente]

$$\text{Out[46]} = (-1 + \sqrt{3}) Mp$$

In[47]= (* carga colapso *)
qc = q /. q4

$$\text{Out[47]} = \frac{2 (2 Mp + \sqrt{3} Mp)}{9 L^2}$$

In[48]= FullSimplify[x /. x1 /. sol /. Ma → -Mp /. q4, {Mp > 0, L > 0}]
[simplifica completamente]

$$\text{Out[48]} = 3 (-1 + \sqrt{3}) L$$

8.3.4. CÓDIGO DE PROGRAMACIÓN PROBLEMA 1

```

In[2]:= NPR = 5; (* secciones: a, c, e, f y g *)
GH = 3;
EQ = NPR - GH
Out[4]= 2

In[5]:= eq = Table[0, {EQ}];
      |
      |tabla
Lce = Ld / Cos[β];
      |
      |coseno
eq[[1]] = (q Lp^2 / 2 + q Lce Lp Sin[β] + P Lp) λ == -Ma + Mc - Mf + Mg
      |
      |seno

ec = -2.2446;
ee = 4.4852;
ef = -3.3514;
eg = 1.1108;

eq[[2]] =
  (λ (-q Lce^2 / 2 ec - P Lce Cos[β] ec + P Lp eg) == Mc (ec) + Me (ee) + Mf (ef) + Mg (eg))
      |
      |coseno

Out[7]= λ (Lp P + (Lp^2 q) / 2 + Ld Lp q Tan[β]) == -Ma + Mc - Mf + Mg

Out[12]= λ (2.2446 Ld P + 1.1108 Lp P + 1.1223 Ld^2 q Sec[β]^2) ==
  -2.2446 Mc + 4.4852 Me - 3.3514 Mf + 1.1108 Mg

In[13]:=

In[14]:= Clear[ec, ee, ef, eg]
      |
      |borra
PFV1[Ma_, Mb_, ma_, mb_, L_, EI_] := L / (6 EI) (ma (2 Ma + Mb) + mb (2 Mb + Ma))
PFV2[Ma_, Mb_, ma_, mb_, L_, EI_] :=
  L / (6 EI) ((ma (2 Ma + Mb) + mb (2 Mb + Ma)) + q L^2 / 4 (ma + mb))

In[17]:=

In[18]:= ecs = Table[0, {GH}];
      |
      |tabla

In[19]:= ma = 1; mc = 1; me = 0; mf = -1; mg = -1;
mb = (mc - ma) / Lp x1 + ma; (* lineal *)
md = (me - mc) / Lce x2 + mc;

ecs[[1]] = PFV2[Ma, Mb, ma, mb, x1, vE Iz] + PFV2[Mb, Mc, mb, mc, Lp - x1, vE Iz] +
  PFV2[Mc, Md, mc, md, x2, vE Iz] + PFV2[Md, Me, md, me, Lce - x2, vE Iz] +
  PFV1[Me, Mf, me, mf, Lce, vE Iz] +
  PFV1[Mf, Mg, mf, mg, Lp, vE Iz] + ma ea + mb eb + mc ec + md ed + me ee + mf ef + mg eg == 0

Out[22]= (Lp (-3 Mf - 3 Mg) / (6 Iz vE) + (3 Mb + 3 Mc + (1/2) q (Lp - x1)^2) (Lp - x1) / (6 Iz vE) +
  x1 (3 Ma + 3 Mb + (q x1^2) / 2) / (6 Iz vE) + ea + eb + ec - ef - eg + ed (1 - (x2 Cos[β]) / Ld) +
  x2 (2 Mc + Md + (Mc + 2 Md) (1 - (x2 Cos[β]) / Ld) + (1/4) q x2^2 (2 - (x2 Cos[β]) / Ld)) / (6 Iz vE) + Ld (-Me - 2 Mf) Sec[β] / (6 Iz vE) +
  (-x2 + Ld Sec[β]) ((2 Md + Me) (1 - (x2 Cos[β]) / Ld) + (1/4) q (1 - (x2 Cos[β]) / Ld) (-x2 + Ld Sec[β])^2) / (6 Iz vE) == 0

```

In[27]= $ma = 0; mc = 1; me = 1; mf = 0.471064; mg = -0.528936;$
 $mb = (mc - ma) / Lp x1 + ma; (* lineal *)$
 $md = (me - mc) / Lce x2 + mc;$

ecs [[2]] = PFV2[Ma, Mb, ma, mb, x1, vE Iz] + PFV2[Mb, Mc, mb, mc, Lp - x1, vE Iz] +
 PFV2[Mc, Md, mc, md, x2, vE Iz] + PFV2[Md, Me, md, me, Lce - x2, vE Iz] +
 PFV1[Me, Mf, me, mf, Lce, vE Iz] +
 PFV1[Mf, Mg, mf, mg, Lp, vE Iz] + ma ea + mb eb + mc ec + md ed + me ee + mf ef + mg eg == 0

Out[26]=
$$\frac{Lp (0.471064 (2 Mf + Mg) - 0.528936 (Mf + 2 Mg))}{6 Iz vE} + \frac{x1 \left(\frac{(Ma+2Mb)x1}{Lp} + \frac{qx1^3}{4Lp} \right)}{6 Iz vE} +$$

$$\frac{(Lp - x1) \left(Mb + 2 Mc + \frac{(2Mb+Mc)x1}{Lp} + \frac{1}{4} q (Lp - x1)^2 \left(1 + \frac{x1}{Lp} \right) \right)}{6 Iz vE} + \frac{x2 \left(3 Mc + 3 Md + \frac{qx2^2}{2} \right)}{6 Iz vE} + \frac{x1 eb}{Lp} +$$

$$ec + ed + ee + 0.471064 ef - 0.528936 eg + \frac{Ld (2 Me + Mf + 0.471064 (Me + 2 Mf)) \text{Sec}[\beta]}{6 Iz vE} +$$

$$\frac{(-x2 + Ld \text{Sec}[\beta]) \left(3 Md + 3 Me + \frac{1}{2} q (-x2 + Ld \text{Sec}[\beta])^2 \right)}{6 Iz vE} = 0$$

In[27]= $ma = 1.529; mc = 0.528989; me = 0; mf = 0; mg = 1;$
 $mb = (mc - ma) / Lp x1 + ma; (* lineal *)$
 $md = (me - mc) / Lce x2 + mc;$

ecs [[3]] = PFV2[Ma, Mb, ma, mb, x1, vE Iz] + PFV2[Mb, Mc, mb, mc, Lp - x1, vE Iz] +
 PFV2[Mc, Md, mc, md, x2, vE Iz] + PFV2[Md, Me, md, me, Lce - x2, vE Iz] +
 PFV1[Me, Mf, me, mf, Lce, vE Iz] +
 PFV1[Mf, Mg, mf, mg, Lp, vE Iz] + ma ea + mb eb + mc ec + md ed + me ee + mf ef + mg eg == 0

Out[30]=
$$\frac{Lp (Mf + 2 Mg)}{6 Iz vE} + \frac{1}{6 Iz vE} (Lp - x1) \left(0.528989 (Mb + 2 Mc) + \right.$$

$$\left. (2 Mb + Mc) \left(1.529 - \frac{1.00001 x1}{Lp} \right) + \frac{1}{4} q (Lp - x1)^2 \left(2.05799 - \frac{1.00001 x1}{Lp} \right) \right) + \frac{1}{6 Iz vE}$$

$$x1 \left(1.529 (2 Ma + Mb) + (Ma + 2 Mb) \left(1.529 - \frac{1.00001 x1}{Lp} \right) + \frac{1}{4} q x1^2 \left(3.058 - \frac{1.00001 x1}{Lp} \right) \right) +$$

$$1.529 ea + \left(1.529 - \frac{1.00001 x1}{Lp} \right) eb + 0.528989 ec + eg +$$

$$ed \left(0.528989 - \frac{0.528989 x2 \text{Cos}[\beta]}{Ld} \right) + \frac{1}{6 Iz vE} x2 \left(0.528989 (2 Mc + Md) + \right.$$

$$\left. (Mc + 2 Md) \left(0.528989 - \frac{0.528989 x2 \text{Cos}[\beta]}{Ld} \right) + \frac{1}{4} q x2^2 \left(1.05798 - \frac{0.528989 x2 \text{Cos}[\beta]}{Ld} \right) \right)$$

$$\frac{1}{6 Iz vE} (-x2 + Ld \text{Sec}[\beta]) \left((2 Md + Me) \left(0.528989 - \frac{0.528989 x2 \text{Cos}[\beta]}{Ld} \right) + \right.$$

$$\left. \frac{1}{4} q \left(0.528989 - \frac{0.528989 x2 \text{Cos}[\beta]}{Ld} \right) (-x2 + Ld \text{Sec}[\beta])^2 \right) = 0$$

In[31]=

In[32]= (* analisis elastico-lineal *)

In[33]= (* pilar izquierdo --> tramo "ac" *)

$Mz1 = (Mc - Ma) / Lp x1 + Ma + \lambda q Lp / 2 x1 - \lambda q x1^2 / 2; (* parabolico *)$

$xm1 = \text{Solve}[D[Mz1, x1] == 0, x1][[1]]$

[resue...|deriva

$Mb = Mz1 /. xm1$

Out[34]= $\left\{ x1 \rightarrow \frac{-2 Ma + 2 Mc + Lp^2 q \lambda}{2 Lp q \lambda} \right\}$

Out[35]= $Ma + \frac{1}{4} (-2 Ma + 2 Mc + Lp^2 q \lambda) + \frac{(-Ma + Mc) (-2 Ma + 2 Mc + Lp^2 q \lambda)}{2 Lp^2 q \lambda} - \frac{(-2 Ma + 2 Mc + Lp^2 q \lambda)^2}{8 Lp^2 q \lambda}$

```

In[36]:= (* dintel izquierdo -->> tramo "ce" *)
Mz2 = (Me - Mc) / Lce x2 + Mc + λ q Lce / 2 x2 - λ q x2^2 / 2 ;
xm2 = Solve[D[Mz2, x2] == 0, x2] [[1]]
      |resue...|deriva
Md = Mz2 / . xm2

Out[37]:= {x2 -> (Ld^2 q λ - 2 Mc Cos[β]^2 + 2 Me Cos[β]^2) Sec[β] /
          2 Ld q λ}

Out[38]:= Mc + (-Mc + Me) (Ld^2 q λ - 2 Mc Cos[β]^2 + 2 Me Cos[β]^2) /
          2 Ld^2 q λ +
          1/4 (Ld^2 q λ - 2 Mc Cos[β]^2 + 2 Me Cos[β]^2) Sec[β]^2 -
          (Ld^2 q λ - 2 Mc Cos[β]^2 + 2 Me Cos[β]^2)^2 Sec[β]^2 /
          8 Ld^2 q λ

In[39]:=

In[40]:= datos = {Lp -> 4.0, Ld -> 6.0, β -> 10.0 Degree, vE -> 2.1 × 10^8, Iz -> 8360.0 × 10^-8,
                  |grado
                  Mp -> 628.0 × 275 × 10^-3, q -> 1.0, P -> 1.0}; (* unidades: kN, m *)

In[41]:= sol0 =
          Solve[Join[eq, ecs] /. {θa -> 0, θb -> 0, θc -> 0, θd -> 0, θe -> 0, θf -> 0, θg -> 0} /. xm1 /.
          |resue...|junta
          xm2 /. λ -> 1.0 /. datos, {Ma, Mc, Me, Mf, Mg}] // Quiet;
          |silencioso

In[43]:= (* seleccionar solucion *)
n0 = Length[sol0];
      |longitud
valor = {};
Do[
  |repite
    If[Element[Ma /. sol0[[i]], Reals],
      |si |pertenece a |números reales
      valor = Join[valor, {{Ma /. sol0[[i]], i}}];
      |junta
    ], {i, n0}];
n0 = Length[valor];
      |longitud
vMin = 1.0 × 10^20;
vj = 0;
Do[
  |repite
    If[0 < Abs[valor[[i]][[1]]] < vMin,
      |si |valor absoluto
      vj = valor[[i]][[2]];
      vMin = valor[[i]][[1]];
    ], {i, n0}];

sol0 = sol0[[vj]]

Out[50]:= {Ma -> -3.63057, Mc -> -4.20477, Me -> 3.44771, Mf -> -7.1409, Mg -> 9.66515}

In[51]:=

In[52]:= Mb /. sol0 /. λ -> 1.0 /. datos
Md /. sol0 /. λ -> 1.0 /. datos

Out[52]:= -1.90737

Out[53]:= 5.05019

```

```

In[54]:= λ1 = Mp / Mg /. sol0 /. datos (* primera RP, → seccion "g" *)
Out[54]= 17.8683

In[56]:= (* paso 2 *)
In[57]:= sol =
  FindRoot[Join[eq, ecs, {Mf == -Mp}] /. {θa → 0, θb → 0, θc → 0, θd → 0, θe → 0, θf → 0} /.
    |encuentra...|junta
    xm1 /. xm2 /. Mg → Mp /. datos, {{Ma, Ma /. sol0}, {Mc, Mc /. sol0},
    {Me, Me /. sol0}, {θg, 0.0}, {Mf, Mf /. sol0}, {λ, λ1}}] // Quiet
    |silencioso
  λ2 = λ /. sol(* segunda RP, → seccion "f" *)
Out[57]= {Ma → -95.3684, Mc → -68.9581, Me → 97.9026, θg → 0.00549243, Mf → -172.7, λ → 22.9062}
Out[58]= 22.9062

In[60]:= Ma /. sol /. datos
Mb /. sol /. datos
Mc /. sol /. datos
Md /. sol /. datos
Me /. sol /. datos
Out[60]= -95.3684
Out[61]= -35.3992
Out[62]= -68.9581
Out[63]= 137.128
Out[64]= 97.9026

In[66]:= (* paso 3 *)
In[67]:= sol = FindRoot[
  |encuentra raíz
  Join[eq, ecs, {Md == Mp}] /. xm1 /. xm2 /. {θa → 0, θb → 0, θc → 0, θd → 0, θe → 0} /.
  |junta
  Mf → -Mp /. Mg → Mp /. datos, {{Ma, Ma /. sol}, {Mc, Mc /. sol},
  {Me, Me /. sol}, {θg, θg /. sol}, {θf, 0.0}, {λ, λ2}}] // Quiet
  |silencioso
  λ3 = λ /. sol(* tercera RP, → seccion "d" *)

Out[67]= {Ma → -147.817, Mc → -73.8769, Me → 134.332, θg → 0.0121949, θf → -0.0133063, λ → 25.8344}
Out[68]= 25.8344

In[69]:=
In[70]:= Ma /. sol /. datos
Mb /. sol /. datos
Mc /. sol /. datos
Me /. sol /. datos
Out[70]= -147.817
Out[71]= -52.565
Out[72]= -73.8769
Out[73]= 134.332

In[75]:= (* paso 4 *)

```

```

In[76]:= sol = FindRoot[
  |encuentra raíz
  Join[eq, ecs, {Md == Mp, Ma == -Mp}] /. xm1 /. xm2 /. {ea -> 0, eb -> 0, ec -> 0, ee -> 0} /.
  |junta
  {Mf -> -Mp, Mg -> Mp} /. datos, {{Ma, Ma /. sol}, {Mc, Mc /. sol},
  {Me, Me /. sol}, {eg, eg /. sol}, {ef, ef /. sol}, {ed, 0.0}, {lambda, lambda3}}] // Quiet
  |silencioso

lambda4 = lambda /. sol (* cuarta RP, -> seccion "a" *)

Out[76]:= {Ma -> -172.7, Mc -> -87.864, Me -> 136.247,
  eg -> 0.0164653, ef -> -0.0210744, ed -> 0.00969254, lambda -> 26.5057}

Out[77]:= 26.5057

In[78]:= Mb /. sol /. datos
Out[78]:= -68.7853

In[79]:=

In[80]:= (* carga de colapso *)
  lambda_c = lambda4
Out[80]:= 26.5057

```

8.3.5. CÓDIGO DE PROGRAMACIÓN PROBLEMA 2

```

In[2]:= NPR = 10; (* Secciones: a,b,c,d,e,f,g,h,i,j *)
      GH = 6;
      EQ = NPR - GH

Out[4]= 4

In[5]:= eq = Table[0, {EQ}];
      |
      |tabla
      Lbc = Ld / Cos[β];
      |
      |coseno
      eq[[1]] = 2 ( q Lp^2 / 2 + q Lbc Lp Sin[β] ) == -Ma + Mb - Me + Mg - Mi + Mj
      |
      |seno

Out[7]= 2 ( Lp^2 q / 2 + Ld Lp q Tan[β] ) == -Ma + Mb - Me + Mg - Mi + Mj

In[8]:= θa = -1;
      θb = 2.25;
      θc = -2.5;
      θd = 1.25;
      eq[[2]] = ( q Lp Lp / 2 + q Sin[β] Lbc 3.125 - q Cos[β] Lbc 1.25 ) == Ma θa + Mb θb + Mc θc + Md θd
      |
      |seno
      |
      |coseno

Out[12]= -1.25 Ld q + Lp^2 q / 2 + 3.125 Ld q Tan[β] == -Ma + 2.25 Mb - 2.5 Mc + 1.25 Md

In[13]:= θj = -1.25;
      θi = 2.5;
      θh = -2.25;
      θf = 1.0;
      eq[[3]] = ( q Lp Lp / 2 + q Sin[β] Lbc 3.125 + q Cos[β] Lbc 1.25 ) == Mj θj + Mi θi + Mh θh + Mf θf
      |
      |seno
      |
      |coseno

Out[17]= 1.25 Ld q + Lp^2 q / 2 + 3.125 Ld q Tan[β] == 1. Mf - 2.25 Mh + 2.5 Mi - 1.25 Mj

In[18]:= θa = -1;
      θc = 2;
      θe = 2.8;
      θg = -2.8;
      θh = -2;
      θj = 1;
      eq[[4]] =
      ( q Lp Lp / 2 + q Sin[β] Lbc 6 + q Cos[β] Lbc 5 + q Sin[β] Lbc 6 - q Cos[β] Lbc 5 + q Lp Lp / 2 ) ==
      |
      |seno
      |
      |coseno
      |
      |seno
      |
      |coseno
      Ma θa + Mc θc + Me θe + Mg θg + Mh θh + Mj θj

Out[24]= Lp^2 q + 12 Ld q Tan[β] == -Ma + 2 Mc + 2.8 Me - 2.8 Mg - 2 Mh + Mj

In[25]:=

In[26]:= PFV1[Ma_, Mb_, ma_, mb_, L_, EI_] := L / (6 EI) (ma (2 Ma + Mb) + mb (2 Mb + Ma))
      PFV2[Ma_, Mb_, ma_, mb_, L_, EI_] :=
      L / (6 EI) (ma (2 Ma + Mb) + mb (2 Mb + Ma) + q L^2 / 4 (ma + mb))

In[29]:= rM = {Ma, Mb, Mc, Md, Me, Mf, Mg, Mh, Mi, Mj};
      mEQ = Normal[CoefficientArrays[eq /. q -> 0, rM]][[2]];
      |
      |normal
      |
      |arreglos de coeficientes
      MatrixForm[mEQ] (*matriz de coeficientes*)
      |
      |forma de matriz

Out[31]//MatrixForm=
      ( 1.   -1.   0     0     1.   0   -1.   0   1.   -1.
        1.  -2.25 2.5  -1.25 0     0   0     0   0     0
        0     0   0     0     0   -1.  0   2.25 -2.5  1.25
        1.   0   -2.   0   -2.8  0   2.8  2.   0   -1. )
    
```

```

In[33]:= vn0 = NullSpace[mEQ];
           |espacio nulo
           MatrixForm[vn0]
           |forma de matriz
Out[34]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.203855 & 0.119895 & -0.118298 & -0.615491 & 0.577866 & 0.0482818 & 0.422134 & 0.1432 \\ -0.038396 & -0.214804 & -0.13873 & 0.07847 & 0.0676625 & 0.921825 & -0.0676625 & 0.1292 \\ 0.203855 & -0.119895 & 0.118298 & 0.615491 & 0.422134 & -0.0482818 & 0.577866 & -0.143 \\ -0.0743776 & 0.439354 & 0.528502 & 0.206665 & 0.0150923 & 0.173785 & -0.0150923 & 0.5488 \\ -0.524921 & -0.478651 & -0.162219 & 0.117196 & -0.0187114 & -0.150107 & 0.0187114 & 0.2419 \\ 0.55731 & 0.232123 & -0.119373 & -0.21072 & 0.0196231 & 0.0534421 & -0.0196231 & -0.00027 \end{pmatrix}$$

In[35]:= VM = {ma, mb, mc, md, me, mf, mg, mh, mi, mj};
In[37]:= datos = {Lp → 5.0, Ld → 10.0, H → 7.0, β → ArcTan[(H - Lp) / Ld], vE → 2.1 × 10^8,
                  |arco tangente
                  Iz → 8360.0 × 10^-8, Mp → 628.0 × 275 × 10^-3}; (* unidades: kN, m *)
In[38]:= Clear[θa, θb, θc, θd, θe, θf, θg, θh, θi, θj]
           |borra
In[40]:= (* ecuaciones de compatibilidad *)
           ecs = {};
           Do[
           |repite
           v0 = Table[VM[[j]] → vn0[[i]][[j]], {j, NPR}] //. datos;
           |tabla
           mk = (mb - ma) / Lp x1 + ma /. v0; (* lineal *)
           ml = (mc - mb) / Lbc x2 + mb /. v0;
           mm = (mh - mf) / Lbc x3 + mf /. v0;
           mn = (mj - mi) / Lp x4 + mi /. v0;
           ecs = Join[ecs, {
           |junta
           PFV2[Ma, Mb, ma, mb, Lp, vE Iz] +
           PFV2[Mb, Mc, mb, mc, Lbc, vE Iz] +
           PFV1[Mc, Md, mc, md, Lbc, vE Iz] +
           PFV1[Me, Mg, me, mg, Lp, vE Iz] +
           PFV2[Mf, Mh, mf, mh, Lbc, vE Iz] +
           PFV1[Mh, Mi, mh, mi, Lbc, vE Iz] +
           PFV2[Mi, Mj, mi, mj, Lp, vE Iz]
           + ma θa + mb θb + mc θc + md θd + me θe + mf θf +
           mg θg + mh θh + mi θi + mj θj + mk θk + ml θl + mm θm + mn θn == 0 /. v0
           }
           ]
           //. datos
           , {i, GH}]
           ecs = Simplify[ecs //. datos]
           |simplifica

```



```

In[53]= (* pilar derecho -->> tramo "ij" *)
Mz4 = (Mj - Mi) / Lp x4 + Mi + q Lp / 2 x4 - q x4^2 / 2 ; (* parabolico *)
xm4 = Solve[D[Mz4, x4] == 0, x4] [[1]]
      |resue...|deriva
Mn = Mz4 /. xm4

Out[54]= {x4 ->  $\frac{-2 Mi + 2 Mj + Lp^2 q}{2 Lp q}$ }

Out[55]=  $Mi + \frac{1}{4} (-2 Mi + 2 Mj + Lp^2 q) + \frac{(-Mi + Mj) (-2 Mi + 2 Mj + Lp^2 q)}{2 Lp^2 q} - \frac{(-2 Mi + 2 Mj + Lp^2 q)^2}{8 Lp^2 q}$ 

In[57]= (* analisis elastico-lineal *)

In[58]= ECs =
      |simplifica|
      Simplify[Join[eq, ecs] /. {theta -> 0, theta_b -> 0, theta_c -> 0, theta_d -> 0, theta_e -> 0, theta_f -> 0, theta_g -> 0, theta_h -> 0,
      |junta
      theta_i -> 0, theta_j -> 0, theta_k -> 0, theta_l -> 0, theta_m -> 0, theta_n -> 0} /. q -> 1 /. datos];
sol0 = Solve[ECs, {q, Ma, Mb, Mc, Md, Me, Mf, Mg, Mh, Mi, Mj}] [[1]]
      |resuelve

Out[59]= {Ma -> -26.9374, Mb -> -2.9797, Mc -> 2.97951, Md -> -5.22744, Me -> -5.60273,
      Mf -> 0.770487, Mg -> 5.60273, Mh -> -17.1079, Mi -> 3.42631, Mj -> 13.2632}

In[61]= (* paso 1*)

In[62]= ECs = Simplify[
      |simplifica
      Join[eq, ecs, {Ma == -Mp}] /. {theta -> 0, theta_b -> 0, theta_c -> 0, theta_d -> 0, theta_e -> 0, theta_f -> 0, theta_g -> 0,
      |junta
      theta_h -> 0, theta_i -> 0, theta_j -> 0, theta_k -> 0, theta_l -> 0, theta_m -> 0, theta_n -> 0} /. datos]

Out[62]= {Ma + Me + Mi + 45. q == Mb + Mg + Mj, theta + Ma + 2.5 Mc + 6.25 q == 2.25 Mb + 1.25 Md,
      31.25 q == 1. Mf - 2.25 Mh + 2.5 Mi - 1.25 Mj, Ma + 2.8 Mg + 2 Mh + 49. q == 2 Mc + 2.8 Me + Mj,
      1. Ma + 6.86533 Mc + 9.56169 Md + 0.633725 Mj ==
      0.985809 Mb + 5.48222 Me + 1.69947 Mf + 4.94113 Mg + 4.76574 Mh + 1.69105 Mi + 32.3369 q,
      1. Ma + 5.58029 Mb + 4.83507 Mc + 0.232042 Mg + 2.71401 Mi ==
      0.127373 Md + 0.232042 Me + 13.7998 Mf + 8.71381 Mh + 0.151807 Mj + 119.835 q,
      1. Ma + 6.86533 Mc + 9.56169 Md + 4.94113 Me + 5.48222 Mg + 0.633725 Mj ==
      0.985809 Mb + 1.69947 Mf + 4.76574 Mh + 1.69105 Mi + 32.3369 q,
      1. Ma + 12.6445 Mb + 19.3716 Mc + 6.61039 Md + 0.0519352 Me + 6.29189 Mf +
      19.1941 Mh + 11.0902 Mi + 0.444426 Mj + 321.663 q == 0.0519352 Mg,
      1. Ma + 2.46361 Mb + 1.34818 Mc + 0.0122417 Me + 0.0776965 Mf + 19.6328 q ==
      0.0963062 Md + 0.0122417 Mg + 1.72111 Mh + 2.45407 Mi + 0.81683 Mj,
      1. Ma + 1.28084 Mb + 0.0145708 Me + 0.161463 Mf + 0.565729 Mh + 1.95855 Mi +
      1.25669 Mj + 14.8694 q == 0.690732 Mc + 0.819045 Md + 0.0145708 Mg, Ma == -172.7}

In[63]= sol0 = Solve[ECs, {q, Ma, Mb, Mc, Md, Me, Mf, Mg, Mh, Mi, Mj}] [[1]]
      |resuelve

Out[63]= {q -> 6.41116, Ma -> -172.7, Mb -> -19.1033, Mc -> 19.1021, Md -> -33.514,
      Me -> -35.92, Mf -> 4.93972, Mg -> 35.92, Mh -> -109.681, Mi -> 21.9666, Mj -> 85.0323}

In[65]= Mk /. sol0 /. datos
      Ml /. sol0 /. datos
      Mm /. sol0 /. datos
      Mn /. sol0 /. datos

Out[65]= -2.27034

Out[66]= 84.4391

Out[67]= 40.8264

Out[68]= 85.9417

```

```

In[70]= (* paso 2 *)

In[71]= Ecs = Simplify[
  |simplifica
  Join[eq, ecs, {Ma == -Mp, Mj == Mp}] /. {θb → 0, θc → 0, θd → 0, θe → 0, θf → 0, θg → 0,
  |junta
  θh → 0, θi → 0, θj → 0, θk → 0, θl → 0, θm → 0, θn → 0} // . datos]

Out[71]= {Ma + Me + Mi + 45. q == Mb + Mg + Mj, 0. + Ma + 2.5 Mc + 6.25 q == 2.25 Mb + 1.25 Md,
31.25 q == 1. Mf - 2.25 Mh + 2.5 Mi - 1.25 Mj, Ma + 2.8 Mg + 2 Mh + 49. q == 2 Mc + 2.8 Me + Mj,
1. Ma + 6.86533 Mc + 9.56169 Md + 0.633725 Mj + 14.921.6 θa ==
0.985809 Mb + 5.48222 Me + 1.69947 Mf + 4.94113 Mg + 4.76574 Mh + 1.69105 Mi + 32.3369 q,
1. Ma + 5.58029 Mb + 4.83507 Mc + 0.232042 Mg + 2.71401 Mi + 2774.03 θa ==
0.127373 Md + 0.232042 Me + 13.7998 Mf + 8.71381 Mh + 0.151807 Mj + 119.835 q,
1. Ma + 6.86533 Mc + 9.56169 Md + 4.94113 Me + 5.48222 Mg + 0.633725 Mj + 14.921.6 θa ==
0.985809 Mb + 1.69947 Mf + 4.76574 Mh + 1.69105 Mi + 32.3369 q,
1. Ma + 12.6445 Mb + 19.3716 Mc + 6.61039 Md + 0.0519352 Me + 6.29189 Mf +
19.1941 Mh + 11.0902 Mi + 0.444426 Mj + 321.663 q == 0.0519352 Mg + 5392.07 θa,
1. Ma + 2.46361 Mb + 1.34818 Mc + 0.0122417 Me + 0.0776965 Mf + 19.6328 q + 7234.98 θa ==
0.0963062 Md + 0.0122417 Mg + 1.72111 Mh + 2.45407 Mi + 0.81683 Mj,
1. Ma + 1.28084 Mb + 0.0145708 Me + 0.161463 Mf + 0.565729 Mh + 1.95855 Mi + 1.25669 Mj +
14.8694 q + 8718.04 θa == 0.690732 Mc + 0.819045 Md + 0.0145708 Mg, Ma == -172.7, Mj == 172.7}

In[73]= sol1 = Solve[Ecs, {q, θa, Ma, Mb, Mc, Md, Me, Mf, Mg, Mh, Mi, Mj}] [[1]] // Quiet
|resuelve |silencio

Out[73]= {q → 9.19146, θa → -0.0160937, Ma → -172.7, Mb → -9.26274, Mc → 19.9999, Md → -35.5299,
Me → -52.7823, Mf → 27.2597, Mg → 52.7823, Mh → -180.281, Mi → 28.0862, Mj → 172.7}

In[74]= Mk /. xm1 /. sol1 // . datos
Ml /. xm2 /. sol1 // . datos
Mm /. xm3 /. sol1 // . datos
Mz4 /. x4 → Lp /. sol1 // . datos

Out[74]= -4.13511

Out[75]= 125.305

Out[76]= 65.5081

Out[77]= 172.7

In[78]= Plot[Mz4 /. sol1 // . datos, {x4, 0, Lp /. datos}]
|representación gráfica

Out[78]=


```

In[80]= (* paso 3 *)

```

In[81]= Ecs =
  Simplify[Join[eq, ecs, {Ma == -Mp, Mj == Mp, Mh == -Mp}] /. {θb → 0, θc → 0, θd → 0, θe → 0,
  |simplifica |junta
  θf → 0, θg → 0, θh → 0, θi → 0, θk → 0, θl → 0, θm → 0} /. xm4 // . datos]

```

```

Out[81]= {Ma + Me + Mi + 45. q == Mb + Mg + Mj, 0. + Ma + 2.5 Mc + 6.25 q == 2.25 Mb + 1.25 Md,
31.25 q == 1. Mf - 2.25 Mh + 2.5 Mi - 1.25 Mj, Ma + 2.8 Mg + 2 Mh + 49. q == 2 Mc + 2.8 Me + Mj,
1. Ma + 6.86533 Mc + 9.56169 Md + 0.633725 Mj + 14921.6 ̑a + 8549.73 ̑j +
2400.54 ̑n +  $\frac{491.934 Mj ̑n}{q}$  == 0.985809 Mb + 5.48222 Me + 1.69947 Mf +
4.94113 Mg + 4.76574 Mh + 1.69105 Mi + 32.3369 q +  $\frac{491.934 Mi ̑n}{q}$ ,
1. Ma + 5.58029 Mb + 4.83507 Mc + 0.232042 Mg + 2.71401 Mi + 2774.03 ̑a +
2687.62 ̑n +  $\frac{900.882 Mi ̑n}{q}$  == 0.127373 Md + 0.232042 Me + 13.7998 Mf +
8.71381 Mh + 0.151807 Mj + 119.835 q + 8573.4 ̑j +  $\frac{900.882 Mj ̑n}{q}$ ,
1. Ma + 6.86533 Mc + 9.56169 Md + 4.94113 Me + 5.48222 Mg + 0.633725 Mj +
14921.6 ̑a + 8549.73 ̑j + 2400.54 ̑n +  $\frac{491.934 Mj ̑n}{q}$  ==
0.985809 Mb + 1.69947 Mf + 4.76574 Mh + 1.69105 Mi + 32.3369 q +  $\frac{491.934 Mi ̑n}{q}$ ,
1. Ma + 12.6445 Mb + 19.3716 Mc + 6.61039 Md + 0.0519352 Me + 6.29189 Mf +
19.1941 Mh + 11.0902 Mi + 0.444426 Mj + 321.663 q + 8963.46 ̑n +  $\frac{1402.21 Mi ̑n}{q}$  ==
0.0519352 Mg + 5392.07 ̑a + 8564.12 ̑j +  $\frac{1402.21 Mj ̑n}{q}$ ,
1. Ma + 2.46361 Mb + 1.34818 Mc + 0.0122417 Me + 0.0776965 Mf + 19.6328 q +
7234.98 ̑a +  $\frac{46.1418 Mj ̑n}{q}$  == 0.0963062 Md + 0.0122417 Mg + 1.72111 Mh +
2.45407 Mi + 0.81683 Mj + 5351.59 ̑j + 5928.36 ̑n +  $\frac{46.1418 Mi ̑n}{q}$ ,
1. Ma + 1.28084 Mb + 0.0145708 Me + 0.161463 Mf + 0.565729 Mh + 1.95855 Mi +
1.25669 Mj + 14.8694 q + 8718.04 ̑a + 10725.3 ̑j + 7874.84 ̑n +  $\frac{228.034 Mj ̑n}{q}$  ==
0.690732 Mc + 0.819045 Md + 0.0145708 Mg +  $\frac{228.034 Mi ̑n}{q}$ ,
Ma == -172.7, Mj == 172.7, Mh == -172.7}

In[83]= sol2 = Solve[ECs, {q, ̑a, ̑j, Ma, Mb, Mc, Md, Me, Mf, Mg, Mh, Mi, Mj}][[1]] // Quiet
[resuelve] [silencio]

Out[83]= {q → 0., ̑a → 0., ̑j → 0., Ma → -172.7, Mb → 0., Mc → 0.,
Md → 0., Me → 0., Mf → 0., Mg → 0., Mh → -172.7, Mi → 0., Mj → 172.7}

In[84]= Mk /. sol2 //. datos
Ml /. sol2 //. datos
Mm /. sol2 //. datos
Mz4 /. x4 → Lp /. sol2 /. datos

Out[84]= Indeterminate
Out[85]= Indeterminate
Out[86]= Indeterminate
Out[87]= 172.7

In[89]= (* paso 4 *)

In[90]= ECs =
Simplify[Join[eq, ecs, {Ma == -Mp, Mj == Mp, Mh == -Mp, Ml == Mp}] /. {̑b → 0, ̑c → 0, ̑d → 0,
[simplifica] [junta]
̑e → 0, ̑f → 0, ̑g → 0, ̑i → 0, ̑k → 0, ̑l → 0, ̑m → 0, ̑n → 0} //. datos]

```

```

Out[00]= {Ma + Me + Mi + 45. q == Mb + Mg + Mj, 0. + Ma + 2.5 Mc + 6.25 q == 2.25 Mb + 1.25 Md,
31.25 q == 1. Mf - 2.25 Mh + 2.5 Mi - 1.25 Mj, Ma + 2.8 Mg + 2 Mh + 49. q == 2 Mc + 2.8 Me + Mj,
1. Ma + 6.86533 Mc + 9.56169 Md + 0.633725 Mj + 14.921.6 ̸a + 8549.73 ̸j == 0.985809 Mb +
5.48222 Me + 1.69947 Mf + 4.94113 Mg + 4.76574 Mh + 1.69105 Mi + 32.3369 q + 10.485.7 ̸h,
1. Ma + 5.58029 Mb + 4.83507 Mc + 0.232042 Mg + 2.71401 Mi + 2774.03 ̸a == 0.127373 Md +
0.232042 Me + 13.7998 Mf + 8.71381 Mh + 0.151807 Mj + 119.835 q + 9338.5 ̸h + 8573.4 ̸j,
1. Ma + 6.86533 Mc + 9.56169 Md + 4.94113 Me + 5.48222 Mg + 0.633725 Mj + 14.921.6 ̸a +
8549.73 ̸j == 0.985809 Mb + 1.69947 Mf + 4.76574 Mh + 1.69105 Mi + 32.3369 q + 10.485.7 ̸h,
1. Ma + 12.6445 Mb + 19.3716 Mc + 6.61039 Md + 0.0519352 Me + 6.29189 Mf + 19.1941 Mh +
11.0902 Mi + 0.444426 Mj + 321.663 q + 39.791.8 ̸h == 0.0519352 Mg + 5392.07 ̸a + 8564.12 ̸j,
1. Ma + 2.46361 Mb + 1.34818 Mc + 0.0122417 Me + 0.0776965 Mf + 19.6328 q + 7234.98 ̸a ==
0.0963062 Md + 0.0122417 Mg + 1.72111 Mh + 2.45407 Mi + 0.81683 Mj + 3335.3 ̸h + 5351.59 ̸j,
1. Ma + 1.28084 Mb + 0.0145708 Me + 0.161463 Mf + 0.565729 Mh + 1.95855 Mi + 1.25669 Mj +
14.8694 q + 8718.04 ̸a + 10.725.3 ̸j == 0.690732 Mc + 0.819045 Md + 0.0145708 Mg + 4.24247 ̸h,
Ma == -172.7, Mj == 172.7, Mh == -172.7,  $\frac{1}{q} (\theta. + 0.00480769 Mb^2 -$ 
0.00961538 Mb Mc + 0.00480769 Mc2 + 0.5 Mb q + 0.5 Mc q + 13. q2) == 172.7}

In[02]= sol3 = Solve[ECs, {q, ̸a, ̸j, ̸h, Ma, Mb, Mc, Md, Me, Mf, Mg, Mh, Mi, Mj}][[2]] // Quiet
|_resuelve |silencio
Out[02]= {q → 10.0568, ̸a → -0.044358, ̸j → 0.0150097, ̸h → -0.0425141,
Ma → -172.7, Mb → 35.2315, Mc → 48.5233, Md → -54.2461, Me → -52.6901,
Mf → 57.9334, Mg → 52.6901, Mh → -172.7, Mi → 33.4564, Mj → 172.7}

In[03]= Mk /. sol3 //. datos
Ml /. sol3 //. datos
Mm /. sol3 //. datos
Mz4 /. x4 → lp /. sol3 /. datos

Out[03]= 48.6759

Out[04]= 172.7

Out[05]= 98.7834

Out[06]= 172.7

In[07]= xm2 /. sol3 //. datos
Out[07]= {x2 → 5.22862}

In[08]= (* paso 5 *)

In[100]= ECs = Simplify[
|_simplifica
Join[eq, ecs, {Ma == -Mp, Mj == Mp, Mh == -Mp, Ml == Mp, Mm == Mp}] /. {̸b → 0, ̸c → 0,
|_junta
̸d → 0, ̸e → 0, ̸f → 0, ̸g → 0, ̸i → 0, ̸k → 0, ̸m → 0, ̸n → 0} /. xm2 //. datos]

```

```

Out[100]= {Ma + Me + Mi + 45. q == Mb + Mg + Mj, 0. + Ma + 2.5 Mc + 6.25 q == 2.25 Mb + 1.25 Md,
31.25 q == 1. Mf - 2.25 Mh + 2.5 Mi - 1.25 Mj, Ma + 2.8 Mg + 2 Mh + 49. q == 2 Mc + 2.8 Me + Mj,
1. Ma - 0.985809 Mb + 6.86533 Mc + 9.56169 Md - 5.48222 Me - 1.69947 Mf -
4.94113 Mg - 4.76574 Mh - 1.69105 Mi + 0.633725 Mj - 32.3369 q + 14921.6 0a -
10485.7 0h + 8549.73 0j - 58.4497 0l -  $\frac{167.644 Mb 0l}{q}$  +  $\frac{167.644 Mc 0l}{q}$  == 0,
1. Ma + 5.58029 Mb + 4.83507 Mc - 0.127373 Md - 0.232042 Me - 13.7998 Mf +
0.232042 Mg - 8.71381 Mh + 2.71401 Mi - 0.151807 Mj - 119.835 q + 2774.03 0a -
9338.5 0h - 8573.4 0j + 12771. 0l +  $\frac{52.8479 Mb 0l}{q}$  -  $\frac{52.8479 Mc 0l}{q}$  == 0,
1. Ma - 0.985809 Mb + 6.86533 Mc + 9.56169 Md + 4.94113 Me - 1.69947 Mf +
5.48222 Mg - 4.76574 Mh - 1.69105 Mi + 0.633725 Mj - 32.3369 q + 14921.6 0a -
10485.7 0h + 8549.73 0j - 58.4497 0l -  $\frac{167.644 Mb 0l}{q}$  +  $\frac{167.644 Mc 0l}{q}$  == 0,
1. Ma + 12.6445 Mb + 19.3716 Mc + 6.61039 Md + 0.0519352 Me + 6.29189 Mf -
0.0519352 Mg + 19.1941 Mh + 11.0902 Mi + 0.444426 Mj + 321.663 q - 5392.07 0a -
39791.8 0h - 8564.12 0j + 35082.8 0l -  $\frac{62.1431 Mb 0l}{q}$  +  $\frac{62.1431 Mc 0l}{q}$  == 0,
1. Ma + 2.46361 Mb + 1.34818 Mc - 0.0963062 Md + 0.0122417 Me + 0.0776965 Mf -
0.0122417 Mg - 1.72111 Mh - 2.45407 Mi - 0.81683 Mj + 19.6328 q + 7234.98 0a -
3335.3 0h - 5351.59 0j + 4416.55 0l +  $\frac{41.9363 Mb 0l}{q}$  -  $\frac{41.9363 Mc 0l}{q}$  == 0,
1. Ma + 1.28084 Mb - 0.690732 Mc - 0.819045 Md + 0.0145708 Me + 0.161463 Mf - 0.0145708 Mg +
0.565729 Mh + 1.95855 Mi + 1.25669 Mj + 14.8694 q + 8718.04 0a - 4.24247 0h + 10725.3 0j +
881.882 0l +  $\frac{52.87 Mb 0l}{q}$  -  $\frac{52.87 Mc 0l}{q}$  == 0, Ma == -172.7, Mj == 172.7, Mh == -172.7,  $\frac{1}{q}$ 
(0. + 0.00480769 Mb2 - 0.00961538 Mb Mc + 0.00480769 Mc2 + 0.5 Mb q + 0.5 Mc q + 13. q2) == 172.7,
 $\frac{1}{q}$  (0. + 0.00480769 Mf2 - 0.00961538 Mf Mh + 0.00480769 Mh2 + 0.5 Mf q + 0.5 Mh q + 13. q2) ==
172.7}

In[101]= sol4 = Solve[ECs, {q, 0a, 0j, 0h, 0l, Ma, Mb, Mc, Md, Me, Mf, Mg, Mh, Mi, Mj}][[6]] // Quiet
|_resuelve |silencio

Out[101]= {q -> 10.4493, 0a -> -0.118234, 0j -> 0.0694003, 0h -> -0.132319, 0l -> 0.101492,
Ma -> -172.7, Mb -> 34.0033, Mc -> 39.6864, Md -> -67.7469, Me -> -46.0999,
Mf -> 150.373, Mg -> 46.0999, Mh -> -172.7, Mi -> 1.38657, Mj -> 172.7}

In[102]= Mz1 /. x1 -> 0 /. sol4 //. datos
Ml /. sol4 //. datos
Mm /. sol4 //. datos
Mz4 /. x4 -> Lp /. sol4 /. datos

Out[102]= -172.7

Out[103]= 172.7

Out[104]= 172.7

Out[105]= 172.7

In[106]= xm2 /. sol4 //. datos

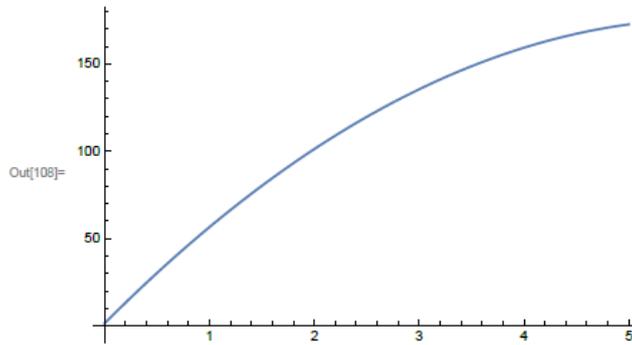
Out[106]= {x2 -> 5.15235}

In[107]= xm3 /. sol4 //. datos

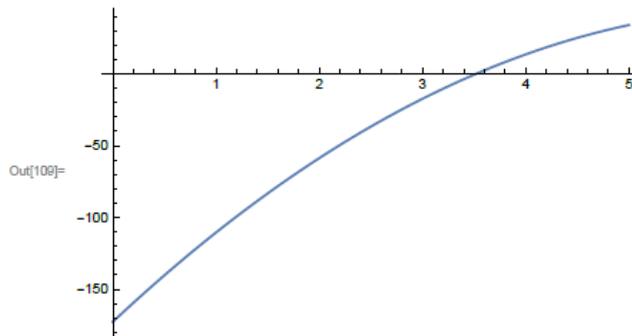
Out[107]= {x3 -> 2.06723}

In[108]= Plot[Mz4 /. sol4 //. datos, {x4, 0, Lp /. datos}]
|_representación gráfica

```



In[108]= Plot[Mz1 /. sol4 //. datos, {x1, theta, Lp /. datos}]
 representación gráfica



In[111]= (* paso 6 *)

In[112]= ECs = Simplify[
 simplifica

Join[eq, ecs, {Ma == -Mp, Mj == Mp, Mh == -Mp, Ml == Mp, Mm == Mp, Md == -Mp}] /. {theta -> theta, theta_c -> theta, theta_d -> theta, theta_e -> theta, theta_f -> theta, theta_g -> theta, theta_i -> theta, theta_k -> theta, theta_n -> theta} /. xm2 /. xm3 //. datos]

Out[112]= {Ma + Me + Mi + 45. q == Mb + Mg + Mj, theta. + Ma + 2.5 Mc + 6.25 q == 2.25 Mb + 1.25 Md, 31.25 q == 1. Mf - 2.25 Mh + 2.5 Mi - 1.25 Mj, Ma + 2.8 Mg + 2 Mh + 49. q == 2 Mc + 2.8 Me + Mj, 1. Ma - 0.985809 Mb + 6.86533 Mc + 9.56169 Md - 5.48222 Me - 1.69947 Mf - 4.94113 Mg - 4.76574 Mh - 1.69105 Mi + 0.633725 Mj - 32.3369 q + 14921.6 theta_a - 10485.7 theta_h + 8549.73 theta_j - 58.4497 theta_l - 167.644 Mb theta_l / q + 167.644 Mc theta_l / q - 7009.89 theta_m + 66.8425 Mf theta_m / q - 66.8425 Mh theta_m / q == 0, 1. Ma + 5.58029 Mb + 4.83507 Mc - 0.127373 Md - 0.232042 Me - 13.7998 Mf + 0.232042 Mg - 8.71381 Mh + 2.71401 Mi - 0.151807 Mj - 119.835 q + 2774.03 theta_a - 9338.5 theta_h - 8573.4 theta_j + 12771. theta_l + 52.8479 Mb theta_l / q - 52.8479 Mc theta_l / q - 37969.3 theta_m - 550.591 Mf theta_m / q + 550.591 Mh theta_m / q == 0, 1. Ma - 0.985809 Mb + 6.86533 Mc + 9.56169 Md + 4.94113 Me - 1.69947 Mf + 5.48222 Mg - 4.76574 Mh - 1.69105 Mi + 0.633725 Mj - 32.3369 q + 14921.6 theta_a - 10485.7 theta_h + 8549.73 theta_j - 58.4497 theta_l - 167.644 Mb theta_l / q + 167.644 Mc theta_l / q - 7009.89 theta_m + 66.8425 Mf theta_m / q - 66.8425 Mh theta_m / q == 0, 1. Ma + 12.6445 Mb + 19.3716 Mc + 6.61039 Md + 0.0519352 Me + 6.29189 Mf - 0.0519352 Mg + 19.1941 Mh + 11.0902 Mi + 0.444426 Mj + 321.663 q - 5392.07 theta_a + 39791.8 theta_h - 8564.12 theta_j + 35082.8 theta_l - 62.1431 Mb theta_l / q + 62.1431 Mc theta_l / q + 26195.2 theta_m - 261.472 Mf theta_m / q + 261.472 Mh theta_m / q == 0, theta, 1. Ma + 2.46361 Mb + 1.34818 Mc - 0.0963062 Md + 0.0122417 Me + 0.0776965 Mf - 0.0122417 Mg - 1.72111 Mh - 2.45407 Mi - 0.81683 Mj + 19.6328 q + 7234.98 theta_a - 3335.3 theta_h - 5351.59 theta_j + 4416.55 theta_l + 41.9363 Mb theta_l / q - 41.9363 Mc theta_l / q - 633.193 theta_m + 51.9636 Mf theta_m / q - 51.9636 Mh theta_m / q == 0, 1. Ma + 1.28084 Mb - 0.690732 Mc - 0.819045 Md + 0.0145708 Me + 0.161463 Mf - 0.0145708 Mg + 0.565729 Mh + 1.95855 Mi + 1.25669 Mj + 14.8694 q + 8718.04 theta_a - 4.24247 theta_h + 10725.3 theta_j + 881.882 theta_l + 52.87 Mb theta_l / q - 52.87 Mc theta_l / q + 415.878 theta_m + 8.07924 Mf theta_m / q - 8.07924 Mh theta_m / q == 0, Ma == -172.7, Mj == 172.7, Mh == -172.7, 1/q (theta. + 0.00480769 Mb^2 - 0.00961538 Mb Mc + 0.00480769 Mc^2 + 0.5 Mb q + 0.5 Mc q + 13. q^2) == 172.7, 1/q (theta. + 0.00480769 Mf^2 - 0.00961538 Mf Mh + 0.00480769 Mh^2 + 0.5 Mf q + 0.5 Mh q + 13. q^2) == 172.7, Md == -172.7}

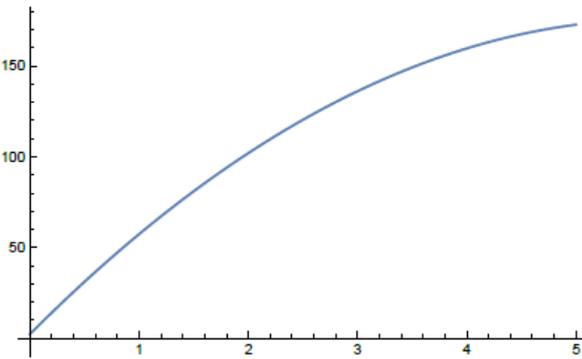
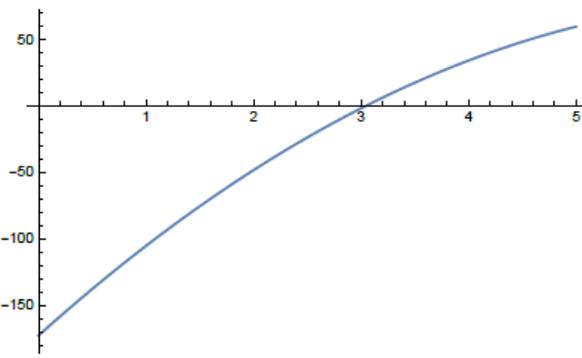
```

In[113]:= sol5 =
  Solve[ECs, {q,  $\theta_a$ ,  $\theta_j$ ,  $\theta_h$ ,  $\theta_l$ ,  $\theta_m$ , Ma, Mb, Mc, Md, Me, Mf, Mg, Mh, Mi, Mj}][[4]] // Quiet
  |resuelve |silencio
Out[113]:= {q  $\rightarrow$  10.5082,  $\theta_a \rightarrow$  -1.39301,  $\theta_j \rightarrow$  0.885305,  $\theta_h \rightarrow$  -1.768,  $\theta_l \rightarrow$  1.75257,
   $\theta_m \rightarrow$  0.479042, Ma  $\rightarrow$  -172.7, Mb  $\rightarrow$  59.728, Mc  $\rightarrow$  10.2146, Md  $\rightarrow$  -172.7,
  Me  $\rightarrow$  -35.0582, Mf  $\rightarrow$  149.748, Mg  $\rightarrow$  35.0582, Mh  $\rightarrow$  -172.7, Mi  $\rightarrow$  2.37387, Mj  $\rightarrow$  172.7}

In[114]:= Mz1 /. x1  $\rightarrow$  0 /. sol5 //. datos
M1 /. sol5 //. datos
Mm /. sol5 //. datos
Mz4 /. x4  $\rightarrow$  Lp /. sol5 /. datos
Out[114]:= -172.7
Out[115]:= 172.7
Out[116]:= 172.7
Out[117]:= 172.7

In[118]:= xm2 /. sol5 //. datos
Out[118]:= {x2  $\rightarrow$  4.63698}

In[119]:= xm3 /. sol5 //. datos
Out[119]:= {x3  $\rightarrow$  2.09008}

In[120]:= Plot[Mz4 /. sol5 //. datos, {x4, 0, Lp /. datos}]
  |representación gráfica

Out[120]=
In[121]:= Plot[Mz1 /. sol5 //. datos, {x1, 0, Lp /. datos}]
  |representación gráfica

Out[121]=
In[122]:= qc = q /. sol5
Out[122]:= 10.5082

In[124]:= (* paso 7 *)

```

```

In[125]= Ecs = Simplify[
  |simplifica
  Join[eq, ecs, {Ma == -Mp, Mj == Mp, Mh == -Mp, Ml == Mp, Mm == Mp, Md == -Mp, Me == -Mp}] /.
  |junta
  {θb → 0, θc → 0, θe → 0, θf → 0, θg → 0,
   θi → 0, θk → 0, θn → 0} /. xm2 /. xm3 //. datos]

Out[125]= {Ma + Me + Mi + 45. q == Mb + Mg + Mj, θ. + Ma + 2.5 Mc + 6.25 q == 2.25 Mb + 1.25 Md,
31.25 q == 1. Mf - 2.25 Mh + 2.5 Mi - 1.25 Mj, Ma + 2.8 Mg + 2 Mh + 49. q == 2 Mc + 2.8 Me + Mj,
1. Ma - 0.985809 Mb + 6.86533 Mc + 9.56169 Md - 5.48222 Me - 1.69947 Mf -
4.94113 Mg - 4.76574 Mh - 1.69105 Mi + 0.633725 Mj - 32.3369 q + 14921.6 θa +
45052.1 θd - 10485.7 θh + 8549.73 θj - 58.4497 θl -  $\frac{167.644 Mb \theta l}{q}$  +
 $\frac{167.644 Mc \theta l}{q}$  - 7009.89 θm +  $\frac{66.8425 Mf \theta m}{q}$  -  $\frac{66.8425 Mh \theta m}{q}$  == 0,
1. Ma + 5.58029 Mb + 4.83507 Mc - 0.127373 Md - 0.232042 Me - 13.7998 Mf +
0.232042 Mg - 8.71381 Mh + 2.71401 Mi - 0.151807 Mj - 119.835 q +
2774.03 θa - 5669.3 θd - 9338.5 θh - 8573.4 θj + 12771. θl +  $\frac{52.8479 Mb \theta l}{q}$  -
 $\frac{52.8479 Mc \theta l}{q}$  - 37969.3 θm -  $\frac{550.591 Mf \theta m}{q}$  +  $\frac{550.591 Mh \theta m}{q}$  == 0,
1. Ma - 0.985809 Mb + 6.86533 Mc + 9.56169 Md + 4.94113 Me - 1.69947 Mf +
5.48222 Mg - 4.76574 Mh - 1.69105 Mi + 0.633725 Mj - 32.3369 q + 14921.6 θa +
45052.1 θd - 10485.7 θh + 8549.73 θj - 58.4497 θl -  $\frac{167.644 Mb \theta l}{q}$  +
 $\frac{167.644 Mc \theta l}{q}$  - 7009.89 θm +  $\frac{66.8425 Mf \theta m}{q}$  -  $\frac{66.8425 Mh \theta m}{q}$  == 0,
1. Ma + 12.6445 Mb + 19.3716 Mc + 6.61039 Md + 0.0519352 Me + 6.29189 Mf -
0.0519352 Mg + 19.1941 Mh + 11.0902 Mi + 0.444426 Mj + 321.663 q - 5392.07 θa +
14982.4 θd + 39791.8 θh - 8564.12 θj + 35082.8 θl -  $\frac{62.1431 Mb \theta l}{q}$  +
 $\frac{62.1431 Mc \theta l}{q}$  + 26195.2 θm -  $\frac{261.472 Mf \theta m}{q}$  +  $\frac{261.472 Mh \theta m}{q}$  == 0,
1. Ma + 2.46361 Mb + 1.34818 Mc - 0.0963062 Md + 0.0122417 Me + 0.0776965 Mf -
0.0122417 Mg - 1.72111 Mh - 2.45407 Mi - 0.81683 Mj + 19.6328 q + 7234.98 θa -
1615.31 θd - 3335.3 θh - 5351.59 θj + 4416.55 θl +  $\frac{41.9363 Mb \theta l}{q}$  -
 $\frac{41.9363 Mc \theta l}{q}$  - 633.193 θm +  $\frac{51.9636 Mf \theta m}{q}$  -  $\frac{51.9636 Mh \theta m}{q}$  == 0,
1. Ma + 1.28084 Mb - 0.690732 Mc - 0.819045 Md + 0.0145708 Me + 0.161463 Mf - 0.0145708 Mg +
0.565729 Mh + 1.95855 Mi + 1.25669 Mj + 14.8694 q + 8718.04 θa - 3296.3 θd -
4.24247 θh + 10725.3 θj + 881.882 θl +  $\frac{52.87 Mb \theta l}{q}$  -  $\frac{52.87 Mc \theta l}{q}$  + 415.878 θm +
 $\frac{8.07924 Mf \theta m}{q}$  -  $\frac{8.07924 Mh \theta m}{q}$  == 0, Ma == -172.7, Mj == 172.7, Mh == -172.7,  $\frac{1}{q}$ 
(θ. + 0.00480769 Mb2 - 0.00961538 Mb Mc + 0.00480769 Mc2 + 0.5 Mb q + 0.5 Mc q + 13. q2) == 172.7,
 $\frac{1}{q}$  (θ. + 0.00480769 Mf2 - 0.00961538 Mf Mh + 0.00480769 Mh2 + 0.5 Mf q + 0.5 Mh q + 13. q2) ==
172.7, Md == -172.7, Me == -172.7}

In[126]= sol6 =
  |resuelve
  Quiet
  |silencioso
Out[126]= {q → 10.5082, θa → -5.15126 × 1015, θj → 3.32026 × 1015, θh → -6.65258 × 1015,
θl → 6.66698 × 1015, θm → 1.94888 × 1015, θd → -1.32274 × 1014,
Ma → -172.7, Mb → 59.728, Mc → 10.2146, Md → -172.7, Me → -172.7,
Mf → 149.748, Mg → -102.584, Mh → -172.7, Mi → 2.37387, Mj → 172.7}

In[127]= Mz1 /. x1 → 0 /. sol6 //. datos
Ml /. sol6 //. datos
Mm /. sol6 //. datos
Mz4 /. x4 → Lp /. sol6 /. datos

Out[127]= -172.7

Out[128]= 172.7

Out[129]= 172.7

Out[130]= 172.7

```

```
In[131]= xm2 /. sol6 //. datos
```

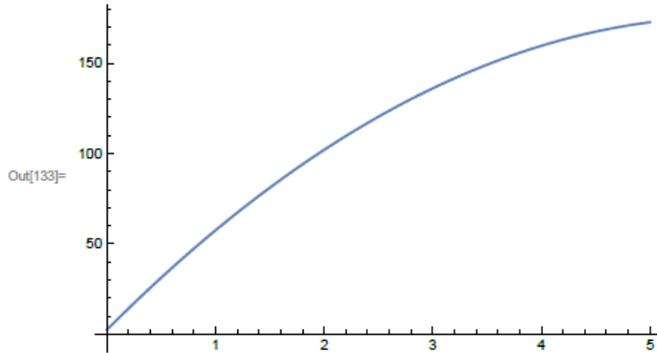
```
Out[131]= {x2 → 4.63698}
```

```
In[132]= xm3 /. sol6 //. datos
```

```
Out[132]= {x3 → 2.09008}
```

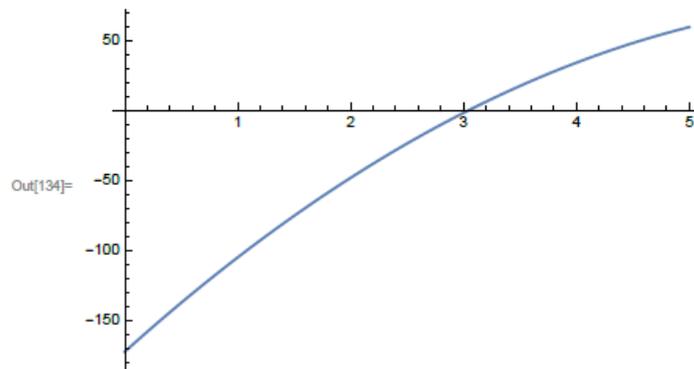
```
In[133]= Plot[Mz4 /. sol6 //. datos, {x4, 0, Lp /. datos}]
```

[representación gráfica]



```
In[134]= Plot[Mz1 /. sol6 //. datos, {x1, 0, Lp /. datos}]
```

[representación gráfica]



```
In[135]= qc = q /. sol6
```

```
Out[135]= 10.5082
```

```
In[136]= (* RPs -->> a, j, h, l, m, d, e *)
```

```
In[138]= (* paso 8 *)
```

```
In[139]= ECs = Simplify[
```

[simplifica

```
Join[eq, ecs, {Ma == -Mp, Mj == Mp, Mh == -Mp, Ml == Mp, Mm == Mp, Md == -Mp, Mg == Mp}] /.
```

[junta

```
{θb → 0, θc → 0, θe → 0, θf → 0, θg → 0,
```

```
θi → 0, θk → 0, θn → 0} /. xm2 /. xm3 //. datos]
```

```

Out[130]= {Ma + Me + Mi + 45. q == Mb + Mg + Mj, 0. + Ma + 2.5 Mc + 6.25 q == 2.25 Mb + 1.25 Md,
31.25 q == 1. Mf - 2.25 Mh + 2.5 Mi - 1.25 Mj, Ma + 2.8 Mg + 2 Mh + 49. q == 2 Mc + 2.8 Me + Mj,
1. Ma - 0.985809 Mb + 6.86533 Mc + 9.56169 Md - 5.48222 Me - 1.69947 Mf -
4.94113 Mg - 4.76574 Mh - 1.69105 Mi + 0.633725 Mj - 32.3369 q + 14921.6 0a +
45052.1 0d - 10485.7 0h + 8549.73 0j - 58.4497 0l -  $\frac{167.644 Mb 0l}{q}$  +
 $\frac{167.644 Mc 0l}{q}$  - 7009.89 0m +  $\frac{66.8425 Mf 0m}{q}$  -  $\frac{66.8425 Mh 0m}{q}$  == 0,
1. Ma + 5.58029 Mb + 4.83507 Mc - 0.127373 Md - 0.232042 Me - 13.7998 Mf +
0.232042 Mg - 8.71381 Mh + 2.71401 Mi - 0.151807 Mj - 119.835 q +
2774.03 0a - 5669.3 0d - 9338.5 0h - 8573.4 0j + 12771. 0l +  $\frac{52.8479 Mb 0l}{q}$  -
 $\frac{52.8479 Mc 0l}{q}$  - 37969.3 0m -  $\frac{550.591 Mf 0m}{q}$  +  $\frac{550.591 Mh 0m}{q}$  == 0,
1. Ma - 0.985809 Mb + 6.86533 Mc + 9.56169 Md + 4.94113 Me - 1.69947 Mf +
5.48222 Mg - 4.76574 Mh - 1.69105 Mi + 0.633725 Mj - 32.3369 q + 14921.6 0a +
45052.1 0d - 10485.7 0h + 8549.73 0j - 58.4497 0l -  $\frac{167.644 Mb 0l}{q}$  +
 $\frac{167.644 Mc 0l}{q}$  - 7009.89 0m +  $\frac{66.8425 Mf 0m}{q}$  -  $\frac{66.8425 Mh 0m}{q}$  == 0,
1. Ma + 12.6445 Mb + 19.3716 Mc + 6.61039 Md + 0.0519352 Me + 6.29189 Mf -
0.0519352 Mg + 19.1941 Mh + 11.0902 Mi + 0.444426 Mj + 321.663 q - 5392.07 0a +
14982.4 0d + 39791.8 0h - 8564.12 0j + 35082.8 0l -  $\frac{62.1431 Mb 0l}{q}$  +
 $\frac{62.1431 Mc 0l}{q}$  + 26195.2 0m -  $\frac{261.472 Mf 0m}{q}$  +  $\frac{261.472 Mh 0m}{q}$  == 0,
1. Ma + 2.46361 Mb + 1.34818 Mc - 0.0963062 Md + 0.0122417 Me + 0.0776965 Mf -
0.0122417 Mg - 1.72111 Mh - 2.45407 Mi - 0.81683 Mj + 19.6328 q + 7234.98 0a -
1615.31 0d - 3335.3 0h - 5351.59 0j + 4416.55 0l +  $\frac{41.9363 Mb 0l}{q}$  -
 $\frac{41.9363 Mc 0l}{q}$  - 633.193 0m +  $\frac{51.9636 Mf 0m}{q}$  -  $\frac{51.9636 Mh 0m}{q}$  == 0,
1. Ma + 1.28084 Mb - 0.690732 Mc - 0.819045 Md + 0.0145708 Me + 0.161463 Mf - 0.0145708 Mg +
0.565729 Mh + 1.95855 Mi + 1.25669 Mj + 14.8694 q + 8718.04 0a - 3296.3 0d -
4.24247 0h + 10725.3 0j + 881.882 0l +  $\frac{52.87 Mb 0l}{q}$  -  $\frac{52.87 Mc 0l}{q}$  + 415.878 0m +
 $\frac{8.07924 Mf 0m}{q}$  -  $\frac{8.07924 Mh 0m}{q}$  == 0, Ma == -172.7, Mj == 172.7, Mh == -172.7,  $\frac{1}{q}$ 
(0. + 0.00480769 Mb2 - 0.00961538 Mb Mc + 0.00480769 Mc2 + 0.5 Mb q + 0.5 Mc q + 13. q2) == 172.7,
 $\frac{1}{q}$  (0. + 0.00480769 Mf2 - 0.00961538 Mf Mh + 0.00480769 Mh2 + 0.5 Mf q + 0.5 Mh q + 13. q2) ==
172.7, Md == -172.7, Mg == 172.7}

In[140]= sol6 =
Solve[ECs, {q, 0a, 0j, 0h, 0l, 0m, 0d, Ma, Mb, Mc, Md, Me, Mf, Mg, Mh, Mi, Mj}][[4]] //
resuelve
Quiet
silencioso

Out[140]= {q -> 10.5082, 0a -> 5.15126 x 1015, 0j -> -3.32026 x 1015, 0h -> 6.65258 x 1015,
0l -> -6.66698 x 1015, 0m -> -1.94888 x 1015, 0d -> 1.32274 x 1014,
Ma -> -172.7, Mb -> 59.728, Mc -> 10.2146, Md -> -172.7, Me -> 102.584,
Mf -> 149.748, Mg -> 172.7, Mh -> -172.7, Mi -> 2.37387, Mj -> 172.7}

In[141]= Mz1 /. x1 -> 0 /. sol6 //. datos
M1 /. sol6 //. datos
Mm /. sol6 //. datos
Mz4 /. x4 -> Lp /. sol6 /. datos

Out[141]= -172.7

Out[142]= 172.7

Out[143]= 172.7

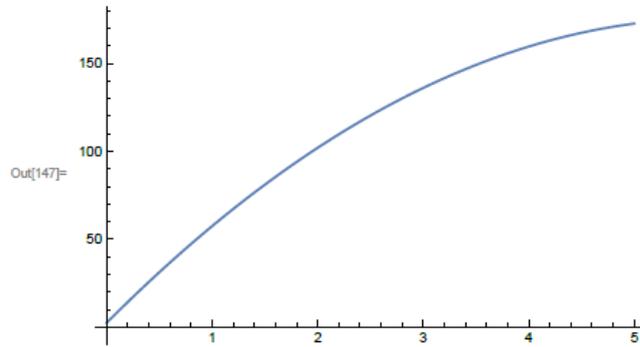
Out[144]= 172.7

In[145]= xm2 /. sol6 //. datos
Out[145]= {x2 -> 4.63698}

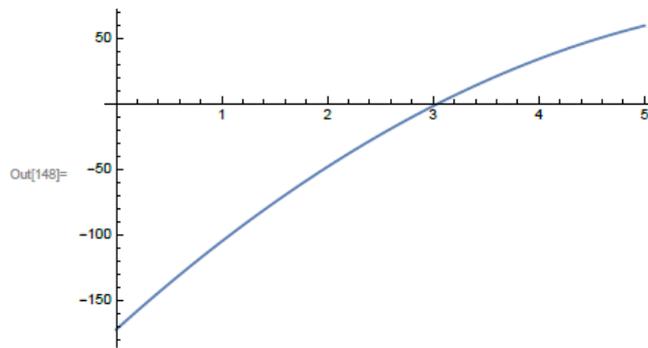
In[146]= xm3 /. sol6 //. datos
Out[146]= {x3 -> 2.09008}

```

```
In[147]= Plot[Mz4 /. sol6 //. datos, {x4, 0, Lp /. datos}]
[representación gráfica]
```



```
In[148]= Plot[Mz1 /. sol6 //. datos, {x1, 0, Lp /. datos}]
[representación gráfica]
```



```
In[149]= qc = q /. sol6
```

Out[149]= 10.5082

```
In[150]= (* RPs -->> a, j, h, l, m, d, e, g *)
```