

BIBLIOTECA
DE LA UNIVERSIDAD DE VALLADOLID.
Estante n.º 72
Tabla 2
Número 482

5980

ARTES Y OFICIOS
DE LA ESCUELA
PRÁCTICA
DE LOS PLANOS, Y SÓLIDOS.

DEL M. R. P. Joseph Zaragoza de la Compañía
de Jesús, Calificador del Santo Oficio, Catedrático
de Teología Filosófica en el Real Colegio de San
Juan de los Rios de Granada, y de Matemáticas
en el Real Colegio de San Juan de los Rios de Granada.

En la Imprenta
de Madrid.

IMPRESA
DE ORDEN DEL EXCELENTÍSSIMO
señor Marqués de Leganes, y del Sr. D. Juan
de Sotomayor por Joseph Ponce de León
Caudero, Secretario del
Sr. Marqués.

COMPRARSE EN LA
Librería de D. Juan de Sotomayor, en la Calle de San
Juan de los Rios de Granada.

En el Reino de España, en la Ciudad de Villagrá,
el día M. DC. LXXI.

GEOMETRIA
ESPECVLATIVA,
Y PRATICA
DE LOS PLANOS, Y SOLIDOS.

AUTHOR

El M.R.P. Ioseph Zaragoza, de la Compañia
de Iesus, Calificador del Santo Oficio, Cathe-
dratico de Theologia Escolastica en los Co-
legios de Mallorca, Barcelona, y Valencia, y
agora de Mathematicas en los Estudios
Reales del Imperial de
Madrid.

IMPRESSA

DE ORDEN DEL EXCELENTISSI-
mo señor Marques de Leganes, y dedicada a su
Excelencia por Ioseph Vicente del Olmo
Cavallero, Secretario del
Santo Oficio.

~~Missionis Augustiniana~~

Societatis Iesu

CON LICENCIA,

Es del Coll. de S. Ignacio de la Compañia de Ihy de Valladolid

En Valencia, Por Geronimo Villagrassa,
Año M.DC.LXXI.

GEOMETRIA
ESPECULATIVA
Y PRÁCTICA
DE LOS PLANOS, Y SÓLIDOS.

LICENCIA.

El M. R. P. Joseph Zaragoza, de la Compañía de Jesús, Catedrático del Santo Oficio, Catedrático de Matemáticas en los Estudios Reales del Imperial de Madrid.

Imprimatur. *Imprimatur.*
D. Gregorio, y Antillon V. G. I. Gilart. F. A.

Madrid.

IMPRESA
DE ORDEN DEL EXCELENTE
Sr. Don Juan Manuel de Lara, y de la Compañía de Jesús
Excelencia por Joseph Vicente del Olmo
Canciller, Secretario del
Santo Oficio.

Josef Vicente del Olmo

Antillon V. G. I. Gilart. F. A.

CON LICENCIA
del Sr. Don Juan Manuel de Lara, y de la Compañía de Jesús

En Valencia, Por Geronimo Villagrasa,
Año M. DC. LXXI.

ALEXCELENTISSIMO SENOR
Don Diego Phelipez de Guzman, Duque de
Sanlucar, Marques de Leganès, y Morata, &c.
Virrey, y Capitan General que fue del
del Reyno de Valencia, &c.

LA Geometria especulativa, y practica, que
en los Estudios Reales dictò el M. R. P.
Joseph Zaragoza, de la Compañia de IESVS, im-
pressa de orden de V. Exc. buelue al centro de don-
de salio, creyendo hallar en el todo el amparo que
ofrece la estimacion, que haze V. Exc. de su Au-
tor, tan conocida, como llorada en esta Ciudad, de
los que gozauamos la enseñanza de tan gran
Maestro, antes que V. Exc. le trasladasse a Ma-
drid, y enriqueciesse con su Magisterio la Corte.

Quiera Dios se mueuan con este exemplo otros
muchos a comunicar los escritos que han atesora-
do de tan fecunda mina, para que los aficionados
escusen el gustoso trabajo de solicitar las copias, tal
vez menos ajustadas al original, y goze el mundo
de un tesoro tanto mas admirable, quanto mas re-
cogido, pues el ingenio de su Autor ha sido siempre
tan singular en la brevedad, como sutilissimo en la
inuencion, en la disposicion claro, y en la materia
difuso.

Nadie tiene mejor conocida esta verdad, que
V. Exc. como quien mas de cerca beviò las crista-
linas corrientes de su doctrina con tan feliz progres-
so, que en pocos meses pudo V. Exc. escurecer a los
muy versados en la Geometria, Arithmetica, Al-
gebra, Esphera, Trigonometria, y Architectura
militar, no con pequeña admiracion de los que mi-
ravamos a V. Exc. tan ocupado en el gobierno de
Valencia en edad de diez y siete años; pero el pro-
gresso en las Mathematicas, y humanidad, el
acierto, felicidad, y prudencia en el gobierno ma-
nifestaron, que tan superiores virtudes en los As-
tros de Magnitud primera, no se han de vincular
a los años; aunque estos prodigios son mas singula-
res en cada siglo, que el Fenix, pues no a todas las
edades se conceden un Chiron, y Achilles, un
Aristoteles, y Alexandro.
Pudiera en este lugar esplayarme en los altos
Progenitores de V. Exc. y sin recurrir a Guz-
man el Bueno, al Gran Capitan, a los Davilas, ni a
los Espinolas, rayos todos de Marte, hallara mas
vezino a Don Diego de Guzman, abuelo de V.
Exc. que en España, Italia, y Flandes hizo in-
mortal su gloria militar; pero mayor la promete el
gran espíritu de que dotò a V. Exc. el Cielo, pues
quan-

quantos sin passion le miran, reconocen en el va-
lor, robustez, y generosidad otro Achilles, Hercu-
cules, y Alexandro, sin temer que les defmienta el
tiempo, que le desean solo para que en la dilatada
vida de V. Exc. que Dios guarde, puedan las flo-
res de tanto espiritu llegar a sazonzarse en los fru-
tos que toda esta Monarquia espera. Valencia, y
Febrero 24. de 1671.

Exc. Señor.

B. su M. de V. Exc.

Su mas cierto seruidor,

Joseph Vicente del Olmo.

IN-

INTRODUCCION DEL AVTOR.

LA dificultad de las Mathematicas pide toda la industria del Maestro en facilitar sus demonstraciones. El estilo mas breue no es el mejor, si peca en confuso; ni el mas prolijo afiança en la difusion la claridad, que se pide. El buen orden tiene, a mi juicio, el primer lugar en todo: las premissas disponen para la conclusion; esta sale nada violenta, si aquellas están dispuestas. En vn medio, y dos extremos bien ordenados estriua toda la eficacia de la razon. Estas consideraciones alentadas con la experiencia de lo que cuesta aprēder sin Maestro vna ciencia tan noble, pudieron motiuarme, diez años ha, el intentar nuevo methodo en la Geometria. Las tareas Escolasticas no dexaron por entonces perficionar mi idea, porque el primer empeño es el de la obligacion; pero luego q̄ la Theologica se conmutò en Mathematica, fue mi primer cuidado la perfeccion de este assumpto, que oy consagro a la primera Nobleza de España, que en los Estudios Reales concurre. Trato primero de la
Geo-

Geometria Espèculatiua, que de la Pratica-
porque esta depende de aquella, y no al contra-
rio. He reducido las materias a classes, juntan-
do en vna todas las que son de vna especie: con
que son las propoficiones, y figuras menos. Pu-
dofe mudar el orden tambien de los libros que
nos dexò Euclides, pero tuue por mejor con-
feruarle, pues no se gana tanto en la facilidad,
quanto se pierde en la inteligencia de los Au-
tores, que citan los libros de tan gran Maef-
tro. Las definiciones se hallaràn juntas en los
Proemiales comunes a la Geometria Pratica,
y Espèculatiua. Con este artificio he procura-
do confeguir tres cosas. La primera, foy correr
la memoria de lo que cada libro contiene, re-
ducidos los indiuiduos a sus especies. La fe-
gunda, facilitar la enseñanza con la breuedad,
y claridad que de esta reduccion se sigue. La
tercera, no confundir la inteligencia de los Au-
tores, que citan a Euclides, pues vn libro cor-
responde a otro, y aunque el numero de las pro-
poficiones es diferente, si se atiende a la espe-
cie, luego se encontrará la correspondien-
te. Esta ha sido mi idea; si confegui el intento,
serà el prouecho de los discipulos, y de Dio-
la

la gloria; sino llenè el assunto, espero no auer malogrado por lo menos el tiempo, ni quedar frustrado de la estimacion que en tan arduas empreſſas el buen deſeò merece.

EXPLICACION DE LAS CITAS.

Las citas van cerradas dentro vn parenteſis. La P. ſignifica los proemiales. La L. el libro. La N. el numero en que ſe diuide la propoſicion. La p. el problema de la Geometria practica, como (3.P.) es la propoſicion, ò numero 8. de los proemiales (6. 1.1.) la propoſicion 6. del libro primero (3.N.) el numero 3. de la propoſicion preſente (4.p.3.) el 4. problema, y practica tercera de la Geometria practica.

| Pag. | Lin. | Erratas. | Lee. |
|-----------|----------|-------------|------------|
| Pag. 43. | lin. 23. | e.o. | g.b. |
| pag. 62. | lin. 19. | mayormente, | mayor que; |
| pag. 89. | lin. 1. | a vna, | ò vna. |
| pag. 98. | lin. 8. | CD. | CB. |
| pag. 110. | lin. 24. | FD. | FB. |
| pag. 127. | lin. 12. | AF.BG. | AG.BF. |
| pag. 135. | lin. 20. | FDC. | FDB. |
| pag. 142. | lin. 3. | O. | AO. |
| pag. 154. | lin. 10. | NRP. | MRP. |
| pag. 156. | lin. 6. | BH. | GH. |

En la pagina 148 lin. 3. ſe añadirà *el arco XP. de 24. gr. es la decima quinta parte del circulo.*

PROEMIALES.



A Mathematica es ciencia de la cantidad inteligible, y precinde de toda materia. Diuidese en Geometria, y Arithmetica, y cada vna en sus partes. La Arithmetica es ciencia de la cantidad discreta, cuyos terminos no tienen vnion, como son los numeros. La Geometria es ciencia de la cantidad continua, cuyos terminos estàn continuados, y vnidos, aunque sea con imaginaria vnion en las partes del espacio imaginario.

1. P. *Axioma.*

VNa cantidad se ajusta al lugar de otra, quando puesta en su lugar le ocupa enteramente; y assi las cantidades ajustadas, ò que se ajustan son iguales; pero por ser iguales, no se ajustan, sino quando son semejantes, como vn circulo igual a otro, y vn arco a otro de vn mesmo, ò igual circulo, &c.

Proem.
Lib. 1.

A

2, P.

2. P.

Axioma.

EL todo compuesto de muchas partes es igual a todas sus partes juntas, porque se compone de ellas: y es mayor que cada parte sola, porque incluye por lo menos otra parte mas. Las partes de vna denominacion son iguales entre si, como vna mitad a otra, vn tercio a otro, &c. pero si dos todos son desiguales, el mayor tiene mayores partes, y al contrario.

3. P.

Axioma.

LAs quantidades que son iguales a otra, ò que la contienen, ò son contenidas de ella iguales vezes, son tambien iguales entre si: lo mesmo es respeto de otras dos iguales. Las que tienen vn mesmo, ò igual exceso a otra, y a dos iguales: y las que son igualmente excedidas de otra, y de dos iguales, son tambien iguales entre si.

Lo que se dize de vna cantidad respeto de otra mayor, menor, ò igual: dupla, tripla, &c. mitad, tercio, quarto, &c. se dize tambien de qualquiera otra su igual.

4. P.

4. P.

Axioma.

S Las cantidades iguales se añaden, ò quitan cantidades iguales, ò vna comun a las dos, resultan cantidades iguales. Si a cantidades iguales se añaden, ò quitan desiguales, quedaràn desiguales, y ferà mayor aquella a quien se añadió ò mas, ò quitò ò menos.

Si a desiguales se añaden, ò quitan iguales, ò vna comun, quedaràn desiguales, y ferà mayor la mesma que antes lo era.

Si de tres cantidades la primera es mayor que la segunda, y la segunda que la tercera; tambien la primera ferà mayor que la tercera, y al contrario.

5. P.

De la Magnitud

Magnitud, ò grandeza es vna cantidad continua mensurable: si es finita, y terminada, sus terminos son los extremos de la magnitud. El punto Mathematico no se toma como parte, que componga la magnitud, porque solo es vn signo, ò señal indiuisible sin partes, que se nota en la cantidad, sin que la Mathematica examine si ay, ò no puntos indiuisibles en la composicion del continuo physico, y real: porque

todas sus demonstraciones son independētes de vna, y otra sentencia, y assi estas son las que se han de ajustar, y componer con las demonstraciones Mathematicas.

6. P. De la Linea.

Linea es vna magnitud larga sin anchura, ni profundidad, porque se imagina formada con el mouimiento de vn punto indiuisible. Linea recta es la que directamente procede sin jamás torcer a vna, ni otra parte: y si es finita, procede igualmente entre los dos puntos, que son sus terminos; y es la mas breue distancia entre ellos: con que de vn punto a otro solo se puede tirar vna linea recta, pero esta se puede continuar infinitamente.

Linea curva es la que no procede directamente, y tuerce a vna, ò otra parte, como es la circular, y otras innumerables, que no pertenecen a este lugar.

7. P. De la superficie, y cuerpo.

Superficie es vna magnitud larga, y ancha sin profundidad: imagínase compuesta de lineas, y si todas las lineas por todas partes son rectas; ò si vna regla bien rec-

ta

ta dādo vna buelta por todas partes se ajusta con la superficie, serà superficie plana; sino serà curva, ò mixta de plana, y curva.

Cuerpo es vna magnitud ancha, larga, y profunda: llamase *solido*. El solido physico, y Mathematico se distinguen en esto, que el physico dize la vnion de sus partes consistente, y firme, y se opone al fluido: el Mathematico todo lo comprehende, y aun se estiende al espacio imaginario, porque solo es vna extension, ò cantidad que admite las tres dimensiones de largueza, anchura, y profundidad.

8. P. *Del circulo, y su diametro, fig. 1.*

Linea circular, es vna linea obliqua, distante igualmente de vn punto, que està en medio del espacio comprehendido. *Circulo* es el espacio, que la linea circular comprehende: su *centro* es aquel punto medio: su ambito, perimetro, peripheria, ò circunferencia, es la linea circular, que le comprehende, ò ciñe. Descríuese el circulo si la linea EB. dà vna buelta entera sin que el punto E. se mueua: y el punto E. serà el centro. De donde se infiere, que todas las rectas del

cen-

centro a la circunferencia son iguales entre si, porque todas son iguales a la recta EB. con que se descriuiò el circulo: llamanse *radios, ò rayos, ò semidiametros.*

Diametro es la recta que passa por el centro, y se termina en la circunferencia por vna, y otra parte. Todos los diametros son iguales, como AB. CD. porque cada vno se compone de dos radios iguales. Qualquier diametro diuide al circulo en dos partes iguales: porque si la parte ADB. se dobla sobre el plano ACB. tirando infinitos radios, como EC. EF. todos por ser iguales, se terminaran en las dos circunferencias: luego qualquier punto del arco ADB. caerà sobre otro de ACB. y assi vn arco se ajustará sobre otro: luego serán iguales (1. P.) y cada vno será la mitad del circulo, ò *semicirculo.*

9. P. *Division, y partes del circulo. fig. 1.*

Qualquiera circulo se imagina diuidido en 360. partes, que se llaman *grados*: cada grado en 60. minutos primeros: cada minuto en 60. segundos: cada segundo en 60. terceros, y assi infinitamente.

tc.

te. El semicirculo, pues, contiene 180. grados, y el quadrante, ò quarta parte contiene 90. que es la mitad del semicirculo.

Arco es parte de la circunferencia, como el arco DA. ò AC. &c.

Cuerda, ò subtensa es la recta, que termina vn arco: como AB. es cuerda del arco ADB. ò BCA. y CB. es cuerda del arco CFB. y tambien del arco CADB.

Segmento es el espacio comprehendido entre la cuerda CB. y arco CFB. ò entre la cuerda CB. y arco CADB: y porque qualquiera cuerda diuide la circunferencia, y circulo en dos arcos, y segmentos, que entre los dos llenan toda la circunferencia, y circulo: se dize el vn arco complemento del otro, y el vn segmento complemento del otro. *Sector* es el espacio comprehendido de vn arco, y los dos radios, que le terminan: como el espacio ECFBE. que està comprehendido del arco CFB. y de los radios CE. BE.

Arcos semejantes, aunque sean de circulos desiguales, son los que contienen tantos grados el vno como el otro, respeto de su

circ-

circulo: afsimifmo segmentos entre fi semejantes, y sectores entre fi semejantes, son los que constan de arcos semejantes.

10.P. *Del angulo, y su medida, fig. 1.*

Angulo es la inclinacion de dos lineas, que se juntan en vn punto: como ABC. quando solas dos lineas concurren, se puede nombrar el angulo con la letra sola del concurso, como el angulo B. pero quando concurren tres, ò mas lineas en vn punto, se deue nombrar con tres letras, y la del concurso deue ponerse en medio: como el angulo FEB. es el mismo que BEF. y el angulo FEC. el mismo que CEF. y CEB. que BEC. Que las lineas sean cortas, ò largas, no muda el angulo, porque no haze variar la inclinacion de las lineas, y afsi el Angulo ABC. es el mesmo que EBO.

La Medida del angulo es el arco, que se imagina descrito del punto del concurso como centro, y se comprehende entre las dos lineas, que forman el angulo: como si del punto E. se descriue qualquier circulo, el arco CB. serà medida del angulo CEB. con que si dos angulos CEB. AED. son
 igua-

iguales, serán los arcos de vno, ò iguales circu-
 los *CB. AD.* tambien iguales; y los de circu-
 los desiguales serán semejantes; y si los arcos
 son iguales, ò semejantes, serán los angulos
 iguales. Si el arco *AC.* es de 90. grados, será el
 angulo *AEC.* de 90. grados, &c. De dõde se in-
 fiere, que por el punto *E.* àzia la mesma parte,
 sola vna recta *EA.* puede formar el mesmo
 angulo, porque conio ha de cortar el arco
AC. y passar por *A.* necessariamente será la
 mesma linea *EA.*

II. *Del angulo recto, y obliquo, y de la linea
 perpendicular, fig. 1.*

A Ngulo recto es el que comprehende la
 quarta parte de vn circulo, ò mitad del
 semicirculo, que son 90. grados. Todos los
 angulos rectos son iguales entre si, porque ca-
 da vno es la quarta parte de vn mesmo circu-
 lo, y dos angulos rectos son 180. grados, que
 es el semicirculo.

La linea perpendicular a otra es la que con
 ella haze dos angulos rectos, y parte al semi-
 circulo en dos partes iguales: como si del cen-
 tro *E.* sube la linea *EC.* y los arcos *CB. CA.*
 son iguales, serán los angulos *AEC. CEB.*

B

rec-

rectos iguales, y la recta EC. será perpendicular sobre AB. porque no se inclina mas a vna parte que a otra: y del punto E. no puede salir otra perpendicular, porque solo el punto C. parte al semicirculo en dos partes iguales; y assi la perpendicular de vn punto es vnica.

Angulo obliquo se dize el que no es recto. Si es menos de 90. grados, es menor que recto, y se llama *Agudo*, como FEB. porque el arco BF. es menos que el quadrante BC. Si es mas de 90. grados, es mayor que recto, y se llama *Obtuso*, como FEA. porque el arco FA. es mas que el quadrante AC.

12. P. *De los Triangulos. fig. 1.*

Triangulo es vna figura de tres angulos, y porque tiene tambien tres lados, se llama figura trilatera.

Triangulo rectangulo es el que tiene vn angulo recto, como el triangulo CEB.

Triangulo obliquangulo es el que no es rectangulo, y tiene tres angulos obliquos, como son CEO. OEB.

Triangulo obtusangulo, ò ambligonio es el que tiene vn angulo obtuso, como EOC.

Triangulo acutangulo, y oxygonio es el que tie-

tiene tres angulos agudos, como AEG. y BEO.

Triangulo equilatero, ò isopleur o el que tiene tres lados iguales, como AEG.

Triangulo isocetes el que tiene por lo menos dos lados iguales, como CEB. y GEA.

Triangulo escaleno el que tiene tres lados desiguales, como CEO. y OEB.

13. P. *De las Paralelas. fig. 2.*

Lineas rectas paralelas son las que infinitamente continuadas siempre distan igualmente, y assi jamàs pueden concurrir, como si el triangulo rectangulo ABC. se mueue sobre la linea AD. formará la linea CCC. siempre equidistante de AD. y los lados BC. BC. BC. siempre serán equidistantes, como tambien los lados AC. AC. AC. pues aunque estas lineas se continuen infinitamente, en qualquiera parte, que se tome el punto C. siempre CC. caminò tanto como BB.

Consectarios 1. Si vna linea DA. corta las paralelas BC. BC. BC. ò CA. CA. CA. entra en ellas con iguales angulos: A. A. A. porque son vn mesmo angulo del triangulo ABC. que solo mudò lugar con el mouimiento: y si

B 2

el

el primer angulo B. es recto, todos los angulos B. B. B. seràn rectos: luego las paralelas tienen el perpendicular comun: y las que tienen el perpendicular comun, son paralelas.

2 Si vna recta DA. entra en otras con iguales angulos A. A. A. seràn AC. AC. AC. paralelas: porque como las paralelas han de formar los meismos angulos, si estas les forman; pues ningunas otras les pueden formar (10. P.) estas son las paralelas.

3 Si dos lineas BC. BC. son paralelas a otra BC. son tambien entre si paralelas: porque si a igual distancia se añade, ò quita distancia igual, resultará igual distancia.

14. P. *De los Paralelogramos, fig. 3.*

Paralelogramo es figura de quatro lados, y angulos, cuyos lados opuestos son entre si paralelos, como OSHR. y GFBD.

Rectangulo es paralelogramo de quatro angulos rectos, como OSHR. GEC D.

Quadrado es rectangulo de quatro lados iguales, como ONMR. y GEC D.

Rhombo es paralelogramo, que tiene quatro lados iguales, y dos angulos desiguales, como QPXL.

Rhom-

Rhomboides es paralelogramo, que tiene dos lados, y dos angulos desiguales, como AZPQ.

Diametro del paralelogramo, es la recta, que junta los angulos opuestos, como LP. llamasetambien *diagono*, ò *diagonal*.

Centro es el punto comun de los diametros, donde mutuamente se cortan como V.

Los paralelogramos ya hechos se pueden nombrar con las quatro letras de los angulos, y para mas compendio se nombran con las dos letras de los angulos opuestos, como el paralelogramo OSHR. se dize OH. ò RS.

Las otras figuras de quatro lados, que no son paralelogramos, se llaman *Trapezios*, y se nombran con todas las quatro letras de sus angulos.

15. P. *Potencia de las lineas.* fig. 3.

Potencia de vna linea se dize el espacio que ella puede comprehender tomada quatro vezes, y formando vn quadrado, como el quadrado GC. es la potencia de la recta DC. y aunque el quadrado GC. consta de quatro lineas, se dize formado de sola vna, por ser todas quatro iguales.

Proem.
lib. 2.

Las

Las potencias de dos lineas son sus dos quadrados: las potencias de tres son sus tres quadrados, &c. *Si dos lineas son iguales, son sus potencias, ò quadrados iguales, porque se ajustan; y si las dos potencias son iguales, son las dos lineas iguales:* si el quadrado de vna linea DF. es tanto como los quadrados de otras dos DB. BF. se dize que DF. puede tanto como DB. y BF.

La potencia de dos es el espacio que entre las dos lineas pueden comprehender, formando vn paralelogramo rectangulo, como el rectangulo GB. es la potencia de las dos rectas GF. FB. pues aunque tiene quatro lados, se dize formado de dos, porque los opuestos GF. DB. son iguales, y tambien GD. FB.

Quando los quadrados, y rectangulos no están formados, se nombran por las mesmas lineas de que se pueden formar, como el quadrado DC. es el que se puede formar de DC. El rectangulo BF. FG. es el que puede formar la recta BF. con FG.

Quando las dos rectas tienen vn punto comun, se nombran para nias compendio con solas tres letras, como el rectangulo GEF. es el que se puede formar de las rectas GE. EF.

El

El rectangulo GFE. es el de GF.FE. Estos modos de hablar importan mucho para la inteligencia de los Autores.

Todo lo dicho se puede aplicar a los paralelogramos, que no son rectangulos, substituyendo en lugar del quadrado al Rhombo, y en lugar del oblongo, ò rectangulo prolongado al rhomboide.

16.P.

De los Polygonos.

Las figuras q̄ tienen mas de quatro lados y angulos, se llamã Polygonos. Si todos los lados, y angulos son iguales, son los Polygonos ordenados, ò regulares. Sino son todos los lados, y angulos iguales, serã Polygonos irregulares.

Pentagono es Poligono de cinco angulos, y lados. *Hexagono* de seis. *Heptagono* de siete. *Octagono* de ocho. *Eneagono*, ò *nonagono* de nueve. *Dezagono* de diez. *Onzagono* de onze. *Dozagono* de doze, &c. Tãbien las suelen llamar vulgarmente *cincauado*, *seisauado*, *sietauado*, *ochauado*, *nonauado*, &c. ò *cincauo*, *seisauo*, *sietauo*, &c. En todos los Polygonos la recta que junta dos angulos opuestos, se dize *diagonal*, ò *diagonio*.

17.P.

17. P. *Del contacto inscripcion, y circunscrip-*
-cion. fig. 4.

V Na cantidad toca a otra quando solo tiene con ella vn punto comun; y no pueden tener mas, aunque se continuen en ambas: y aquel punto comun es el del *contacto*. Sucede esto entre dos lineas, vna recta, y otra curva, ò entre dos curvas, ò entre vn angulo, y vna linea recta, ò curva.

Dos circulos se tocan interiormente, quando el vno està dentro del otro, y tienen vn punto comun, como A R S. A M N. se tocan en A. interiormente, si el punto A. es comun.

Dos circulos se tocan exteriormente, si el vno està fuera del otro, y tienen vn punto comun, como H A D. M A N. se tocan si A. es comun.

Tangente del circulo es la recta que tiene con el circulo vn punto comun, como B C. es tangente de los circulos H A D. M A N. R A S. y les toca a todos, si el punto A. es comun a la recta, y a los tres circulos.

Vn angulo toca a la recta, ò la recta al angulo, si tienen vn punto comun, como el angulo H A D. toca a la recta B C. en A. y la recta
 al

al angulo: lo mesmo es de las lineas circulares, y qualesquiera otras curvas.

Figura inscripta en otra, es la que con sus angulos toca los lados de la otra, y aquella se llama *circunscripta*, como el quadrado HD. esta inscripto en BE. y BE. circunscripto a HD. asimismo HD. esta inscripto en el circulo HFDA. y el circulo circunscripto, y BE. esta circunscripto al circulo, y el circulo inscripto en BE. lo mesmo es de qualesquiera otras figuras, así respeto del circulo, como de vnas con otras.

18.P. *De la razon de las quantidades,*

La *Razon* es el respeto, ò relacion de vna cantidad a otra del mesmo genero, como si se compara linea con linea, superficie con superficie, cuerpo con cuerpo. Pide la razon dos terminos. El primero que se compara es *antecedente*. El segundo a quien se compara, es *consequente*.

Vna cantidad respeto de otra, ò es igual, mayor, ò menor. Si se compara igual a igual, se dize *razon de igualdad*, como 4. a 4. Si se compara la mayor a la menor, se dize *razon de mayor desigualdad*, como 4. a 2. Si menor a

C

ma-

mayor, es *razon* de menor desigualdad, como 2. a 4.

Si la cantidad mayor contiene algunas vezes justamente a la menor, se dize *multiplice*: y la menor se dize *parte aliquota*, porque tomada algunas vezes, compone enteramente a la otra, como 6. es multiplice de 2. porque justamente le contiene tres vezes: y 2. es parte aliquota de 6. porque el 2. tomado tres vezes, compone enteramente al 6. y assi es vn tercio. Las otras partes, que no se pueden ajustar, se llaman *aliquantas*, como 2. es parte aliquanta de 5. y 5. de 7. &c.

La *razon multiplice* toma el nombre de las vezes, que la mayor contiene a la menor: si la contiene dos vezes, como 4. a 2. es *dupla*: si tres vezes, como 6. a 2. es *tripla*, &c.

Submultiplice es quando la parte aliquota se compara a la cantidad multiplice: y si se contiene dos vezes, es *subdupla*, como la razon de 2. a 4. si tres vezes es *subtripla*, como 2. a 6. &c. Otras especies de razon no son aqui tan necessarias, pueden se ver en mi Arithmetica, lib. 1. cap. 11.

19. P. *Delas razones semejantes, y proporcion.*

Vna razon es igual, ò semejante a otra siempre que el *antecedente* de la vna igualmente contiene, ò es contenido de su *consequente*, q̄ el antecedente de la otra contiene, ò es contenido de su *consequente*, como la razon de 4. a 2. es igual, ò semejante a la de 6. a 3. porque como el 4. es duplo de 2. assi 6. es duplo de 3. La razon de 2. a 4. es igual, ò semejante a la de 3. a 6. porque como 2. es mitad de 4. assi 3. es mitad de 6. La razon de 3. a 2. es semejante a la de 6. a 4. porque como 3. contiene vez y media al 2. assi el 6. contiene vez y media al 4.

Proporcion es la igualdad, ò semejança de dos razones: llamase en Griego *Analogia*; y como vna razon tiene dos terminos, la proporcion, que pide dos razones, tiene quatro terminos, dos *antecedentes*, y dos *consequentes*, que se llaman *terminos proporcionales*; y pues la razón de 4. a 2. es como la de 6. a 3. hazē las dos razones vna proporcion: y los quatro terminos son proporcionales, 4. a 2. como 6. a 3.

Proporcion racional es la que se puede explicar por numeros, como la precedente. *Irra-*

ciencia la que no se puede explicar por números, como la que tienen los lados de los cuadrados con sus diámetros.

Proporcion continua es quando el termino 1.º al 2.º tiene la misma razon que el 2.º al 3.º y que el 3.º al 4.º y el 4.º al 5.º &c. de suerte que siempre se va continuando la mesma razon; y se dicen los terminos, tres, quatro, ò cinco *proporcionales continuos*, conforme el numero de los terminos, como los siguientes 1. 2. 4. 8. 16. &c. porque 1. es mitad de 2. y 2. de 4. y 4. de 8. &c.

20.P. *Comparacion de los terminos proporcionales.*

Los terminos proporcionales se pueden comparar *directamente*, *alternando*, *invertiendo*, *componiendo*, *dividiendo*, y *convirtiendo*. Todo esto se explicará en los quatro terminos proporcionales siguientes.

| | | | |
|--------------------|-------------------|------------------|-------------------|
| <i>Razon 1.</i> | | <i>Razon 2.</i> | |
| <i>Anteced. 1.</i> | <i>Conseq. 1.</i> | <i>Antec. 2.</i> | <i>Conseq. 2.</i> |
| 1. term. | 2. term. | 3. term. | 4. term. |
| B. 4. | a C. 2. | D. 6. | a E. 3. |

Comparacion directa es quando se compara el antecedente 1.º a su conseqüente 1.º y el 2.º al 2.º

como B. a C. así D. a E.

Alterna es quando se toman los terminos alternatiuamente: B. a D. como C. a E.

Inuersa es quando se compara el conseqüente a su antecedente. C. a B. como E a D.

Componer es comparar la suma, ò agregado del antecedente, y conseqüente al mismo conseqüente: explicase la suma con este signo + que quiere dezir *Mas*: como B + C. a C. es como D. + E. a E. esto es B. y C. a C. son como D. y E. a E. ò B. mas C. a C. como D. mas E. a E.

Dividir es: comparar la diferencia del antecedente, y conseqüente al mismo conseqüente: explicase con este signo - que quiere dezir *Menos*. B - C. a C. como D. - E. a E. esto es B. menos C. a C. es como D. menos E. a E.

Conuertir es inuertir la composicion, y diuision: componiendo es B. + C. a C. como D. + E. a E. luego conuertiendo fera C. a B. + C. como E. a D. + E. Item diuidiendo, es B. - C. a C. como D. - E. a E. luego conuertiendo C. a B. - C. como E. a D. - E.

De los quatro proporcionales el 1.º y 4.º son los *estremos*: el 2.º y 3.º son los *medios*. En la propo-

por

porcion continua los medios siempre son dos menos que el numero de los terminos: con que si los terminos continuos son tres, ay vn medio: si quatro, ay dos medios: si cinco, ay tres medios, &c.

21. P. *De la razon compuesta, duplicada, y triplicada, &c.*

Razon compuesta es la que se compone de otras, como vn numero de otros. Si huuiere pues muchas cantidades de vna especie, la primera a la vltima se dize, que tiene la razon compuesta de las razones intermedias, como en el exemplo siguiente.

| | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 1 ^o | 2 ^o | 3 ^o | 4 ^o |
| B. 27. | C. 9. | D. 3. | E. 1. |

Si fueren tres quantidades continuas, ò no continuas, B. C. D. ferà la razon de B. a D. compuesta de la razon de B. a C. y de C. a D. assi como la distancia de B. a D. es cõpuesta de B. a C. y de C. a D. Assimismo si son quatro B. C. D. E. la razon de B. a E. se compone de B. a C. de C. a D. y de D. a E. &c.:

Razon duplicada es vna razon compuesta de dos razones semejantes continuas, ò razon compuesta dos vezes de otra, como si

B.

B. C. D. son proporcionales continuos, porque la razón de B. a C. es la mesma que C. a D. y la de B. a D. es compuesta de las dos iguales, se dize compuesta dos vezes de vna mesma, y assi duplicada de la razón de B. a C. *Esto quiere sumo cuydado.*

La razón, pues, *dupla*, y *duplicada* se diferencian en esto, que la *dupla* es quando vn termino es duplo del otro, como 4. a 2. La *duplicada* es quando vna razón (sea la que fuere dupla, tripla, ò quadrupla) se toma dos vezes, como la razón de B. a C. es tripla: la de C. a D. es tambien tripla; pero la de B. a D. es compuesta de dos razones triplas continuadas; y assi es *duplicada* de B. a C. esto es, compuesta dos vezes de la razón tripla de B. a C. &c.

Razón triplicada de otra, es tres vezes compuesta de la otra, y se diferencia de la tripla, como la *duplicada* de la dupla: de fuerte, que si B. C. D. E. son quatro proporcionales continuos: la razón de B. a E. q̄ es compuesta de las tres iguales B. a C. : C. a D. : D. a E. es *triplicada* de B. a C. porque se compone della tres vezes, de donde infiero esta conclusión general.

Si huviere muchos terminos proporcionales

con-

continuos en qualquiera especie de razon, el 1° al 3° tiene la razon duplicada del 1° al 2° el 1° al 4° triplicada: el 1° al 5° quadruplicada, y assi infinitamente.

22.P. De la division, y composicion proporcional, fig. 3.

Las cantidades se diuiden, y componen proporcionalmente entre si, quando las partes de la vna se hazen proporcionales a las de la otra, como las rectas R H. D B. están diuididas proporcionalmente entre si; porque R M. a M H. es como D C. a C B. y los rectangulos O H. G B. están diuididos proporcionalmente si R N. a N H. es como D E. a E B. lo mismo es en qualesquiera otras cantidades.

Vna cantidad está diuidida proporcionalmente, ò segun media, y extrema razon, quando la parte menor a la mayor tiene la mesma razon, que la mayor a toda la cantidad, como si B C. a C D. es como C D. a B D. estará B D. diuidida proporcionalmente: lo mismo es del paralelogramo B G. si B E. a E D. es como E D. a B G. llamase media, y extrema razón, porque de tres proporcionales continuos se hallan alli el medio, y los extremos; pues la par-

partē mayor es media proporcional entre la menor, y toda.

Figuras semejantes son las que se componen de iguales angulos comprehendidos de lados proporcionales, como el rectangulo OH. Si es equiangulo a GB. y OS. es a SH. como GF. a FB. serà OH. semejante a GB. lo mismo es de los triangulos RSH. y DFB. y de otras figuras.

Los lados proporcionales, que se oponen a iguales angulos, se llaman lados *Homologos*.

Reciprocas figuras son las que tienen los lados *reciprocicos*, esto es, que de quatro proporcionales, los dos extremos estàn en vna figura, y los dos medios en otra: como si en los triangulos R HS. y FBC. son proporcionales RH. a FB. como BC. a HS. seràn los lados *reciprocicos*, y las figuras *reciprocas*. Lo mismo es de los rectangulos OH. EB.

L *Inea perpendicular a vn plano*, es la que corta al plano en vn punto, y es perpendicular a todas las rectas del plano, que passan por aquel punto.

2 *Comun seccion de dos planos* es la linea comun, ò que se halla en dos planos, que se cortan.

3 *Vn Plano es perpendicular a otro*, quando todas las rectas, que estàn en él, perpendiculares a la comun seccion, son tambien perpendiculares a otro plano.

4 *Plano inclinado al otro* es el que no es perpendicular. *La inclinacion* se mide por el angulo agudo, que hazen dos perpendiculares a la comun seccion, y salen de vn punto comun, cada vna por su plano. *Inclinacion semejante* es la que tiene igual angulo, ò medida.

5 *Planos paralelos* son los que siempre distan igualmente, aunque infinitamente se continuen.

6 *Solidos semejantes* son los que se terminan de superficies semejantes, tantas en vno, como en otro.

7 *Angulo solido rectilineo* es el que se con-

tie-

tiene de muchos angulos rectilineos, que estàn en diferentes planos, y solo tienen vn punto comun: y feràn semejantes, ò iguales, quando los angulos planos de que se componen son iguales, y dispuestos con el mesmo orden.

24. P. *De los solidos en particular.*

1 **P**risma es vn solido, que tiene por lo menos dos planos opuestos paralelos, iguales, y semejantes.

2 *Paralelepipedo* es vn solido, que consta de seis planos paralelogramos, que cada dos opuestos son paralelos.

3 *Cubo* es vn solido que consta de seis planos quadrados, como vna piedra por todas partes quadrada.

4 *Piramide* es vn solido comprehendido de tres, ò mas triangulos, que se terminan en vn punto. *Base* de la piramide es el plano en que infiste, ò estriua, y puede ser triangulo, ò quadrilatero, &c. *Vertice* es el punto en que la piramide fenece.

5 *Piramide Conica* (en Latin *Conus*) es la que tiene por base vn circulo, y fenece en vn punto alto: *su Exe* es la recta del vertice al centro de la base: *su Lado* es la recta del vertice a la

circunferencia de la base. Si el *Exe* es perpendicular a la base, se dize esta piramide *recta*: sino, es *obliqua*, ò *escalena*.

6 *Cilindro* es vn solido, cuyos dos planos opuestos son dos circulos iguales, y paralelos: sus bases son los dos circulos: su *Exe* la recta q̄ junta los centtos de las bases. Si el *Exe* es perpendicular a las dos bases, es el cilindro *recto*; sino, es *obliquo*, ò *escaleno*. *Laao* es la recta de vna circunferencia a otra. *Cilindros semejantes* son los que tienen los exes, y diametros de las bases proporcionales, y lo mesmo es de las *Piramides Conicas*.

7 *Esfera, Globo, ò Bola* es vn solido comprehendido de vna superficie, de cuyo centro todas las lineas a la superficie son iguales, y se llaman *radios*, ò *semidiametros*. El *diametro* es la recta, que passa por el centro, y se termina a vna, y otra parte de la superficie.

Fin de los Proemiales.

LIBRO I.

De las líneas, triangulos, y paralelogramos.



L que deseare aprouechar en la Geometria, ha de aplicar su primer cuydado en saber la materia de cada libro, el numero de sus proposiciones, y lo que cada vna contiene, por ser de sumia conueniencia para la inteligencia de las demostraciones.

Este libro contiene ocho proposiciones.

Prop. 1. De las líneas que concurren.

Prop. 2. De las paralelas.

Prop. 3. De los angulos de las figuras.

Prop. 4. De la igualdad de los triangulos.

Prop. 5. De la igualdad, ò desigualdad en un triangulo.

Prop. 6. De la igualdad, y desigualdad en dos triangulos.

Prop. 7. De los Paralelogramos en si mesmos.

Prop. 8. De los triangulos, y paralelogramos de igual base, y altura.

PRO-

PROPOSICION I.

Delas lineas que concurren.

- 1 **L** Os angulos, que en un punto se forman sobre una linea, son tanto como dos rectos.
- 2 Si los angulos de un punto son tanto como dos rectos, se forman sobre una linea.
- 3 Si son mas, o menos que dos rectos, no se forman sobre una linea.
- 4 Los angulos que se pueden formar en un punto, son tanto como quatro rectos.
- 5 Si dos lineas se cortan, los verticales opuestos son iguales entre si,

Demonstracion. fig. 1.

1 **S** Obre la linea AB. se forman los angulos AEC. CEB. Si del punto E. se imagina descrito el circulo ACBD. siendo los arcos AC. CB. iguales, seràn los angulos AEC. CEB. rectos iguales (11. P.) y si la linea EF. corta los arcos BF. FA. desiguales, los dos juntos seràn tanto como el semicirculo ACB. luego los dos angulos BEF. FEA. son tanto como dos rectos (11. P.) y porque los tres arcos BF. FC. CA. son vn semicirculo, son

son los tres angulos BEF. FEC. CEA. tanto como dos rectos, &c.

2 Si los dos Angulos AEF. FEB. ò los tres AEC. CEF. FEB. son tanto como dos rectos, seràn los arcos AC. CF. FB. vn femicirculo (11.P.) luego AEB. serà vn diametro (8.P.) y asì serà vna recta linea (8.P.)

3 Porque los angulos que se forman sobre vna linea, ni son mas, ni menos que dos rectos (1.N.) luego los que son mas, ò menos que dos rectos, no se forman sobre vna linea.

4 Porque todos los angulos del punto E. comprehenden enteramente al circulo en los arcos AC. CF. FB. BD. DG. GA. luego comprehenden las quatro quartas partes del circulo, q̄ son quatro angulos rectos (11.P.) luego todos los angulos AEC. CEF. FEB. BED. DEG. GEA. son tanto como quatro rectos.

5 AB. FG. se cortan en E. luego porque los femicirculos GAF. AFB. son iguales (8.P.) quitando el arco comun AF. quedaràn iguales arcos GA. FB. (4.P.) luego los angulos verticales opuestos GEA. FEB. tienen iguales medidas, y asì son iguales (10.P.) como

mo tambien AEF. GEB. por la misma razon.

PROPOSICION II.

De las Paralelas.

1 Si otra recta las corta, entra en la una, y sale de la otra con iguales angulos.

2 Hazen los angulos alternos, que son los internos opuestos, iguales.

3 Los internos de una parte son tanto como dos rectos.

4 Al contrario: si una recta hazen con otras todos los angulos dichos, son paralelas.

5 Si las dos lineas no son paralelas, no hazen dichos angulos; y sino hazen dichos angulos, no son paralelas.

Demonstracion. fig. 2.

1 AB. CD. son paralelas, y EF. las corta: luego porque entra con iguales angulos (1. 3. P.) son el 1° y 4° iguales: y pues el 4° y 6° son tambien iguales, por ser verticales (1. l. 1.) luego tambien el 1° y 6° son iguales (3. P.) luego entra, y sale con iguales angulos.

2 El angulo 1° y 2° son iguales por ser verticales (1. l. 1.) Tambien el 1° y 4° son igua-

les

les (1.3.P.) luego el 2° y 4° son iguales (3.P.) que son los alternos, o internos opuestos.

3 Porque el 4° y 5° son tanto como dos rectos (1.1.1.) fiendo el 4° igual al 2° (2.N) será el 2° y 5° tanto como dos rectos, que son los internos a vna parte.

4 Si EF. haze con CD. y AB. los angulos iguales 1° y 6° item 2° y 4° item 2° y 5° tanto como dos rectos, será AB. paralela a CD. porque la paralela que ha de passar por G. ha de hazer dichos angulos (1.N.) y pues por el punto G. no puede otra recta que AB. formar los mismos angulos (10.P.) será la recta AB. paralela a CD.

5 Porque si fueran paralelas, formàran dichos angulos (1.N.) y si formàran dichos angulos, fueran paralelas (4.N.) &c.

PROPOSICION III.

De los angulos de las figuras.

1 **L**os angulos de un triangulo son iguales a dos rectos.

2 Si un lado se continua, el angulo externo es igual a los dos internos opuestos.

3 Los angulos de qualquier rectilineo son doblados rectos, menos 4. que los lados.

E

4 Los

4 Los externos todos de un rectilíneo son iguales a quatro rectos.

Consecutarios.

5 Si un angulo de un triangulo es recto, los otros dos hazen otro recto, y cada uno es agudo menor que recto.

6 Los angulos de un rectilíneo son iguales a los de otro de tantos lados.

7 Si un angulo es igual a otro, las sumas de los otros son tambien iguales; y al contrario.

Demonstracion. fig. 3.

1 **E**N el triangulo ABC. considere se FBD. paralela a la base AC. luego los angulos alternos *a.* y *d.* son iguales; y tambien *c.* y *e.* (2. l. 1.) luego los tres angulos *a. b. c.* son iguales a los tres *d. b. e.* y pues los tres *a. b. c.* hazen tanto como dos rectos (1. l. 1.) los tres del triangulo *d. b. e.* seràn iguales a dos rectos.

2 Continuese el lado AC G. El angulo BCG. con el angulo *e.* haze dos rectos (1. l. 1.) los angulos *d. b.* con *e.* tambien hazen dos rectos (1. N.) luego el angulo externo BCG. es igual a los dos internos opuestos *d. b. & c.*

3 Sea qualquier rectilíneo ACDEF. to-
man-

mando dentro qualquier punto B. si se tiran BA. BC. BD. BE. BF. se formaràn tantos triangulos como lados: y pues cada triangulo tiene tanto como dos angulos rectos (1. N.) todos los angulos seràn doblados rectos, q̄ los lados: y quitando los angulos, que se forman en el punto B. iguales a quatro rectos (1. l. 1.) quedaràn los angulos de la figura doblados rectos menos 4. que los lados, &c.

4. Continuados todos los lados, se formaràn los angulos externos: luego el externo DCG. con su inmediato interno DCA. es tanto como dos rectos (1. l. 1.) y cada externo con su interno es dos rectos: luego todos los externos con todos los internos son doblados rectos, que los lados de la figura: luego porque los internos son doblados rectos menos 4. que los lados, suplen los externos estos 4. rectos, y assi son iguales a 4. rectos.

Los Confectarios son tan claros, que no necesitan de explicacion.

PROPOSICION III.

De la total igualdad de dos triangulos.

1 **S**i los tres lados de uno son iguales a los tres del otro.

2 **S**i dos lados son iguales a dos del otro, y comprehenden iguales angulos.

3 **S**i dos angulos, y un lado de un triangulo, son iguales a los de otro.

4 **S**i dos lados son iguales a los de otro; y un angulo opuesto igual, y el otro opuesto es de una especie, todo es igual.

Demonstracion. fig. 4

1 **L**os triangulos ABC. ADC. tienen los lados AB. AD. iguales, y CB. CD. y AC. comun: luego doblando el triangulo ABC. sobre ADC. porque las rectas CB. AB. son radios de los circulos BFD. BGD. no se podrán juntar fino en el punto D. donde se cortan los circulos: luego todo el triangulo ABC. se ajustará sobre ADC. y serán iguales los angulos B. D. y CAB. CAD. y ACB. ACD. (1. P.) &c.

2 **S**i los lados AB. AD. son iguales, y AC. comun, y los angulos CAB. CAD: luego tambien los arcos BG. GD. que son sus medidas

(10. P.) luego doblando ABC . sobre ADC . se ajustará el arco BG . sobre GD . y el punto B . caerá sobre D . y CB . sobre CD . luego los ángulos B . D . son iguales, y BCA . DCA . y los lados CB . CD . (1. P.)

3 Si dos ángulos de vn triángulo son iguales a dos del otro, el 3° será igual al 3° (3. l. 1.) luego los ángulos sobre el lado comun AC . son iguales a los otros: BAC . BCA . iguales a DAC . DCA . luego tambien los arcos, que son sus medidas (10. P.) BF . a FD . y BG . a GD . luego doblando el triángulo BAC . sobre DAC . caerá FB . sobre FD . y GB . sobre GD . y el punto B . sobre D . luego el lado BA . es igual a DA . y BC . a DC . (1. P.)

4 Si AB . AD . son iguales, y AC . comun, y los ángulos ACD . ACB . opuestos a los lados AD . AB . y los ángulos B . D . de vna especie, doblando ABC . caerá el punto B . sobre D . ó sobre E . donde la recta CDE . corta al círculo; porque solas EA . DA . son iguales a BA . y considerando AH . perpendicular, serán los ángulos ADH . AEH . agudos (3. l. 1.) luego ADC . será obtuso (1. l. 1.) luego porque los ángulos D . y B . se suponen de vna especie obtu-

tu-

tufos, caerà B. sobre D. y se ajustará el lado BC. con CD. el angulo B. con D. y CAB. con CAD. &c.

En todos quatro casos es lo mesmo, aunque el lado CA. no sea comun, porque ajustando dos lados iguales, se formará vn lado comun.

PROPOSICION V.

De la igualdad, ò desigualdad en un triangulo.

1 **L**ados iguales se oponen a iguales angulos.

2 Angulos iguales se oponen a iguales lados.

3 El lado mayor se opone a mayor angulo, y el angulo mayor a mayor lado.

4 Dos lados son mayores que el otro.

Consecutarios.

5 El triangulo equilatero es equiangulo, y el equiangulo es equilatero.

6 En el triangulo isocel es la recta, que parte igualmente la base, tambien el angulo; y si el angulo, tambien la base. y es perpendicular; y al contrario.

7 Si la perpendicular parte igualmente la base de un triangulo, tambien el angulo: y si el angulo,

ángulo, también la base: y la recta que parte igualmente base, y ángulo, es perpendicular, y siempre el triángulo será isóceles.

8 Si dos rectas iguales caen de un punto sobre otra, se apartan igualmente del perpendicular, y forman con él iguales ángulos; y al contrario.

9 La menor línea que de un punto puede caer sobre otra, es la perpendicular, y es única.

Demonstracion. fig. 5.

1 AB. AC. son iguales: considere se Ae. que parta igualmente el ángulo A. luego porque los lados BA. Ae. son iguales a CA. Ae. y comprehenden iguales ángulos B Ae. CAe. todo será igual (4. l. 1.) esto es, los ángulos b. c los segmentos be. oc. los ángulos e. o. luego son rectos, y Ao. perpendicular (11. P.) De aqui nacen los conseqt, 5° 6° 7° y 8°

2 Si los ángulos b. c. son iguales, considere se iguales BAe. CAe. y el lado Ae. común: luego todo el triángulo AeB. es igual a AeC. (4. l. 1.) luego AB. AC. son lados iguales opuestos a iguales ángulos b. c.

3 Siendo AB. AC. iguales, son iguales ángulos b. c. (1. N) luego si AD. es mayor que AC. ò AB. crece el ángulo C. y mengua D.

(3. l. 1.) luego el lado mayor AD. se opone al mayor angulo C. y al contrario, creciendo el angulo C. y menguando D. es AD. mayor que AB. ò AC. luego el angulo mayor C. se opone al mayor lado AD.

4 La recta AD. es la mas breue distancia entre los puntos A. D. (6. P.) luego es menor que AC. CD.

Los consec. 5° 6° 7° 8° nacen del numero 1°

9 Siendo recto e. qualquier angulo b. será menor (3. l. 1.) luego la perpendicular Ae. es vnica, y qualquiera otra AB. es mayor que Ae.

(3. N.)

PROPOSICION VI

De la igualdad, y desigualdad en los triangulos.

1 Si dos triangulos tienen dos lados iguales, el que tiene mayor angulo, tiene mayor base.

2 El que tiene mayor base, tiene mayor angulo.

3 Si dos triangulos tienen una mesma, ò igual base, el que tuviere sobre ella un angulo menor, y el otro, ò igual, ò menor, tendrá menores lados.

4 Pe-

4 Pero los lados comprehenderàn mayor angulo.

5 Si de un punto dentro del triangulo se tiran lineas a la base, serà lo mesmo.

Demonstracion. fig. 6.

1 **E**N los triangulos BAD . BAC . es BA . lado comun, ò igual: y AD . AC . iguales: y el angulo BAC . mayor que BAD . digo que BC . serà mayor que BD . porque AE . EC . son mayores que AC . (5. l. 1.) son tambien mayores que su igual AD . luego quitando de AED . y AEC . el pedaço comun AE . quedará EC . mayor que ED . (4. P.) y añadiendo BE . a cada parte, serà CEB . mayor que DEB . (4. P.) luego porque BED . son mayores que BD . (5. l. 1.) serà BEC . mucho mayor que BD . (4. P.)

2 Si los angulos BAC . BAD . fueran iguales, siendo iguales los lados BA . AC . a BA . AD . fueran iguales las bases BC . BD . (4. l. 1.) luego si BC . se supone mayor que BD . seràn los angulos BAC . BAD . desiguales: y pues el mayor angulo tiene mayor base (1. N.) si BC . es base mayor que BD . serà BAC . angulo mayor que BAD .

E

3. Los

3 Los triangulos BAC. BAF. tienen la base AB. igual, ò comun; y el angulo ABE. igual, ò comun: y BAE. es menor que BAC. feràn los lados AE. EB. menores que ACB. porq̄ AC. CE. son mayores que AE. (5. l. 1.) luego añadiendo la porcion comun EB. feràn AC. CEB. mayores que AEB. (4. P.) Si el angulo ABF. es menor tambien que ABC. continuando AFE. feràn FE. EB. mayores que FB. (5. l. 1.) luego añadiendo el comun AF. feràn AFE. mayores que AFB. (4. P.) y pues ACB. aun son mayores que AEB. (3. N.) feràn tambien mayores que AFB. (4. P.)

4 Los tres angulos de vn triangulo son iguales a los tres del otro (3. l. 1.) luego si la suma de los dos sobre la base es menor, el 3.^o BEA. ò BFA. ferà mayor que C. (4. P.)

5 Si dentro del triangulo ABC. se toma el punto E. ò F. es lo mesmo que antes.

PROPOSICION VII.

Del paralelogramo en si mesmo

1 **S**us angulos, y lados opuestos son iguales.

2 Los diametros le parten, y se parten igualmente.

3 Lo

3 Lo mismo es qualquiera recta que passa por el centro, ò concurso de los diametros.

4 Un quadrilatero será paralelogramo, si tiene dos lados paralelos iguales.

5 Tambien si los lados opuestos son iguales.

6 Tambien si los angulos opuestos son iguales.

Demonstracion. fig. 7.

1 DB. es paralelogramo, y AC. su diametro, porque AB. DC. son paralelas, los angulos alternos $f.a.$ son iguales (2. l. 1.) y tambien $e.o.$ porque AD. BC. son paralelas: luego siendo AC. lado comun a los dos triangulos ABC. ADC. y los angulos sobre la base $a.e.$ iguales a $f.o.$ todo es igual (4. l. 1.) AB. a DC. y CB. a DA. y el angulo ABC. a CDA: y el angulo A. que es $a.o.$ a $f.e.$ luego los lados, y angulos opuestos son iguales.

2 El triangulo ADC. es igual a CBA. (1. N.) luego el diametro AC. parte al paralelogramo igualmente: lo mismo es DB. Tambien porque los lados DC. AB. son iguales en los triangulos DGC. AGB. y los angulos alternos $f.a.$ y $b.o.$ (2. l. 1.) luego todo es igual (4. l. 1.) DG. a GB. y CG. a GA. luego los diametros AC. DB. se parten igualmente.

F 2

3. Qual-

3 Qualquiera otra recta EGF . pafle por el centro; porque $GC.GA$. fon iguales (2.N.) y los angulos alternos $e.o.$ y $b.d.$ (2.l.1.) todo el triangulo AEG . es igual a GFC . y EG . a GF . (4.l.1.) luego EF . fe parte igualmente : y porque ABC . es la mitad del paralelogramo (2.N.) fi le quitamos GFC . y en fu lugar fubtituimos EGA . fu igual , ferà el trapezio $EABF$. igual al triangulo ABC . ò medio paralelogramo.

4 Si $DC.AB$. fon paralelas iguales, feràn los angulos alternos $f.a.$ iguales (2.l.1.) y AC . lado comun: luego porque $DC.CA$. iguales a $BA.AC$. comprehenden iguales angulos $f.a.$ todo es igual (4.l.1.) $DA.CB$. y los angulos alternos $e.o.$ iguales : luego $CB.DA$. fon paralelas iguales: y AC . es paralelogramo.

5 Si $DC.AB$. fon iguales , y tambien $DA.BC$. fiendo AC . comun , todo el triangulo ADC . es igual a CBA . (4.l.1.) luego los angulos alternos $e.o.$ fon iguales : luego $CB.AD$. fon paralelas: y porque $f.a.$ fon iguales, feràn $DC.AB$. paralelas (4.l.1.) luego AC . es paralelogramo.

6 Si los angulos $C.A$. fon iguales, y tambien

bien

bien D. B. serán C. B. tanto como D. A. luego porque los quatro C. B. A. D. son tanto como quatro rectos (3. l. 1.) serán C. B. tanto como dos rectos: luego por ser internos iguales a dos rectos, serán DC. AB. paralelas (2. l. 1.) y asimesmo porque D. C. son iguales a C. B. y tanto como dos rectos serán DA. CB. paralelas, y AC. paralelogramo.

PROPOSICION VIII.

De los triangulos, y paralelogramos.

de igual base, y altura.

- 1 **S**i tienen igual altura, están, ò pueden estar entre dos paralelas.
- 2 *Vn triangulo es medio paralelogramo.*
- 3 *Los paralelogramos que tienen una mesma, ò igual base con igual altura, son iguales.*
- 5 *Los iguales, si tienen igual base, tienen igual altura; y al contrario.*
- 5 *Lo mesmo se dize de los triangulos.*
- 6 *El que tuviere doblada base, ò altura, será doblado mayor.*

Demonstracion. fig. 8.

1 **L**as alturas de las figuras se miden por los perpendiculos CO. FH. luego si los perpendiculos son iguales, serán OH,

OH. CF. paralelas, por ser equidistantes: luego las figuras que tienen igual altura, si tienen las bases en la recta OH. fenecerán en la recta CF. y sino tienen las bases en OH. como se pueden poner sobre ella, podrán estar entre dos paralelas: y al contrario, si las figuras están entre dos paralelas, tienen igual altura, porque las paralelas OH. CF. siempre tienen igual perpendicular CO. FH. &c.

2 Sea qualquier triangulo Z. si AC. se considera paralela a BD. y DC. a BA. será BC. paralelogramo, y el triangulo Z. su mitad (7. l. 1.) Otra vez, si BF. se considera paralela a DA. y DF. a BA. será AF. paralelogramo, y el triangulo Z. será su mitad (7. l. 1.)

3 En todos tres casos los paralelogramos BC. AF. tienen vna mesma, ò igual base (que es lo mesmo, porque si es igual, se puede ajustar) y porque tienen igual altura están, ò se pueden poner entre dos paralelas (1. N.) digo que son iguales: porque los lados CA. DB. son paralelos iguales, y tambien AE. BF. (7. l. 1.) y los angulos HBD. HAC. y también HBF. HAE. (2. l. 1.) luego si de los iguales HBD. HAC. quitamos los iguales HBF. HAE. queda-

HO

darán iguales FBD . EAC . (4. P.) luego porque los lados AC . AE . iguales a BD . BF . comprehenden iguales angulos todo el triangulo ACE . será igual a BDF . (4. l. 1.) luego si en el caso 1° y 2° añadimos a cada parte el espacio $BDEA$. resultará el paralelogramo AF . igual a BC . y si en el caso 3° de los triangulos iguales CAE . DBF . quitamos el comun DGE . y añadimos el comun AGB . resultarán paralelogramos AF . BC . iguales.

4 Si BC . y AF . son iguales, continuando la paralela CD . cortará el paralelogramo AF . igual a BC . (3. N.) luego CD . passará por EF . y así BC . AF . están entre dos paralelas, &c.

5 Lo mismo es de los triangulos, por ser medios paralelogramos (2. N.)

6 CN . es doblado que CB . porque su altura, ò base CM . es doblada que CA . &c,

Proposicion 47. de Euclides.

Tiene su lugar en el lib. 2. Prop. 4.

LIBRO II.

DE LA POTENCIA DE LAS
lineas.

LA potencia de las lineas se explicò en el Proemial 15. Todo lo que se demostrarà en este libro del Quadrado, y rectangulos, conuiene tambien al rhombo, y rhomboides, y a los triangulos, que son sus mitades (8.l.1.) Aduerto esto en comun, por que no sea necessario repetirlo despues en cada proposicion.

Tiene este libro quatro Proposiciones.

Prop. 1. De la diuision de una linea recta en qualquiera dos partes.

Prop. 2. De la diuision de una linea recta en dos partes desiguales.

Prop. 3. Diuision de una recta en dos partes iguales, y en dos desiguales.

Prop. 4. De la potencia de los lados de los triangulos, rectangulo, obtusangulo, y acutangulo.

PROPOSICION I.

*Division de una recta en qualesquiera
dos partes.*

1. **E**l quadrado de toda es igual a los
rectangulos de toda, y de las mes-
mas partes.

2. *Tambien a los quadrados de las partes, y
a dos rectangulos de las mismas*

3. *El quadrado de toda con el quadrado de
un segmento, es igual a dos rectangulos de toda, y
del mismo segmento con el quadrado del otro seg-
mento.*

4. *El rectangulo de toda, y un segmento, es
igual al quadrado del mismo segmento, y al rectan-
gulo de los segmentos.*

Demonstracion. fig. 1.

1. **L**a recta AB. se diuide en E. El
quadrado de AB. es BC. con
que AC. es igual a AB. El rectangulo de toda
AC. y del segmento AE. es CE. el rectangulo
de toda BD. que es AB. y del segmento BE. es
ED. luego el quadrado BC. es igual a los rec-
tangulos CE. ED. porque se compone dellos
(2.P.) lo mismo es aunque AB. se diuida en
tres, ò mas partes.

2 Si AF.BG.CR. se toman iguales a EA. feràn AH. quadrado de AE. y HD. quadrado de HG. ò EB. y HB. HC. dos rectangulos de las partes AE. EB. luego el quadrado AD. de toda la linea AB. es igual a los quadrados de las partes AH. HD. y a los dos rectangulos de las mesmas BH. HC. porque se compone de ellos (2. P.)

3 Los rectangulos AG. AR. son de toda la linea AB. ò AC. y del vn segmento AE. ò AF: luego porque AG. AR. incluyen los dos rectangulos HB. HC. y dos vezes al quadrado AH. Si les añadimos el quadrado HD. del otro segmento EB. excederàn a todo el quadrado AD. en vn quadrado AH. luego el quadrado AD. con el quadrado AH. es igual a los dos rectangulos AG. AR. con el quadrado HD.

4 El rectangulo AG. de toda la recta AB. y del segmento AE. ò AF. es igual al quadrado AH. del segmento AE. y al rectangulo HB. de de los dos segmentos, porque se compone de ellos (2. P.) Asimismo el rectangulo FD. es igual al quadrado HD. y al rectangulo HC. &c. De los rhombos, y rhomboides se demueftra lo mesmo en su figura.

PROPOSICION II.

Division de la recta en dos partes desiguales.

1 El quadrado de toda es igual a quatro rectangulos de las partes con el quadrado de su diferencia.

2 Los quadrados de las partes son iguales a dos rectangulos de las mismas con el quadrado de su diferencia.

3 Y son la mitad del quadrado de toda con el quadrado de la diferencia.

4 El quadrado de la parte mayor es igual al de la menor con el rectangulo de toda la linea, y de la diferencia de las partes.

Demonstracion. fig. 2.

1 La recta es AB. las partes desiguales AE. EB. tomense BN. BG. DM. DL. CR. CO. AF. iguales à AE. porque NB. y AE. son iguales, ferà EN. la diferencia de EB. y NB. ò EB. y AE. y ferà HZ. el quadrado de la diferencia EN. ò HS. luego el quadrado AD. de toda la recta ferà igual a los quatro rectangulos EG. GL. LO. OE. con el quadrado HZ. porque se compone dellos (2. P.)

2 Los quadrados de las partes son AH. ò NG. y HD. estos dos NG. HD. se componen

de los rectangulos NM. MR. y del quadrado HZ. luego los quadrados de las partes NG. HD. son iguales a los dos rectangulos NM. MR. con el quadrado de la diferencia HZ. (2. P.)

3 Sea MP. el mesmo quadrado HZ. y pues los rectangulos NM. MR. con el quadrado HZ. contienen vna vez a los quadrados NG. HD. (2. N.) luego los rectangulos RF. FN. con el quadrado MP. contienen otra vez a los mesmos quadrados NG. HD. luego todo el quadrado AD. (que se cõpone de NM. MR. RF. FN. y HZ.) con el quadrado MP. contiene dos vezes a los quadrados NG. HD. luego estos son la mitad de aquellos, y aquellos duplos de estos, &c.

4 Los rectangulos AS. SD. son iguales: luego si les añadimos el espacio comun SR. feràn iguales los rectangulos SD. SR. a SA. SR. luego porque SD. SR. es el quadrado HD y SA. SR. es el quadrado FE. y rectangulo EL. ferà el quadrado HD. de la parte mayor igual al quadrado FE. de la parte menor, y al rectangulo EL. de toda la linea ER. y de la diferencia EN.

PROPOSICION III.

Division de la recta en dos partes iguales,

y en dos desiguales.

1 EL quadrado de la mitad de la linea es igual al rectangulo de las partes desiguales con el quadrado del segmento intermedio.

2 Los quadrados de las partes desiguales exceden a los de las iguales en dos quadrados del segmento intermedio.

3 El quadrado de toda es igual a dos rectangulos de las partes desiguales mas dos quadrados de las iguales, mas dos quadrados del segmento intermedio.

4 Y es quadruplo del quadrado de la mitad.

Demonstracion. fig. 3.

1 AE. EB. son partes iguales. y AN. NB. desiguales: su rectangulo EN. y SX. es quadrado del segmento intermedio EN. y EO. quadrado de la mitad de AB. que es EB. luego porque FE. es igual a NO. añadido el comun XN. será XB. igual a FE. NX. esto es, a EN. SX. luego el quadrado XB. de la mitad de la linea EB. es igual al rectángulo de las partes desiguales AS. y al quadrado de la seccion intermedia SX. &c.

2 EL

2 El quadrado de la parte mayor AN. es AZ. el de la parte menor NB. es NG. dos quadrados de la seccion intermedia EN. son SX. XZ. El rectangulo pues QR. es igual a EG. luego añadido el comun QE. serán QE. EG. tanto como EC. que es dos quadrados de las partes iguales ET. TR. luego porque los quadrados desiguales AZ. NG. exceden a QE. EG. en dos quadrados SX. XZ. excederán también AZ. NG. a los dos quadrados iguales ET. TR. en dos quadrados de la seccion intermedia SX. XZ. &c.

3 Porque FE. es igual a NO. añadido el comun HN. será el rectangulo FN. de las partes desiguales tanto como HN. NO. y así mismo OL. LP. serán tanto como otro rectangulo FN. luego añadidos los dos quadrados iguales ET. TR. y los dos de la seccion intermedia SX. XZ. será el quadrado todo AD. igual a todos, porque se compone dellos.

4 Porque el quadrado AD. es igual a los quatro quadrados iguales XA. XB. XD. XC. luego es quadruplo de cada vno.

PROPOSICION IIII.

Potencia de los lados de los triangulos.

1 **L** a base opuesta al angulo recto, puede tanto como los dos lados.

2 La opuesta al obtuso, puede mas dos rectangulos de un lado, y su continuacion hasta el perpendicular.

3 La opuesta al agudo puede menos dos rectangulos de un lado, y de su segmento entre el perpendicular, y dicho angulo agudo.

4 Si una base puede tanto como los lados, su angulo opuesto es recto.

Demonstracion. fig. 4.

1 **E** L triangulo ABC. tiene el angulo ABC. recto: digo, que AC. puede tanto como AB. BC. esto es, que el quadrado de AC. es igual a los quadrados de AB. BC. Continuese AD. igual a BC. y DH. sea quadrado de BD. y tomando FH. GE. iguales a BC. AD. seràn AB. CH. FG. ED. iguales (4. P.) y por ser los quatro angulos rectos B. H. G. D. del quadrado DH. (14. P.) seràn los quatro triangulos a. c. e. g. iguales (4. l. 1.) y tambien b. b. d. f. (7. l. 1.) luego los quatro lados AC. CF. FE. EA. son iguales, y los angulos

los A.C.F.E. rectos; y así AF. es cuadrado de AC. (14.P.) y por ser iguales BR. DA. y ser AR. comun, será DR. igual a BA. y DL. cuadrado de AB. ò RD.

Demonstracion 1. El cuadrado DH. excede a los cuadrados RC. DL. en los quatro triangulos iguales *a. b. c. d.* el mismo cuadrado DH. excede al cuadrado AF. en los quatro triangulos iguales *a. c. e. g.* luego el cuadrado AF. es igual a los cuadrados RC. DL. (3.P.)

Demonstracion 2. El cuadrado AF. es igual a los quatro triangulos *b. d. f. h.* y al cuadrado ML. los cuadrados RC. DL. son tambien iguales a los quatro triangulos *e. f. g. h.* y al cuadrado ML. luego el cuadrado AF. es igual a los dos RC. DL. (3.P.)

Demonstracion 3. Los triangulos *e. g.* son iguales *a b. d.* luego añadido el espacio comun EL O C A E. resultará de vna parte el cuadrado AF. igual a los cuadrados RC. DL. de otra parte. (4.P.)

2 El triangulo ARC. tiene el angulo ARC. obtuso, y continuado AR. es CB. perpendicular: luego el cuadrado RC. es igual a RB. BC. (1.N.) luego los cuadrados AR. RC. son iguales

les

les a los tres $AR.RB.BC.$ y pues el quadrado $AC.$ es igual a $CB.BA.$ (1.N.) y el quadrado $BA.$ es igual a $BR.RA.$ mas dos rectangulos $AR.RB.$ (1.1.2.) luego sera el quadrado $AC.$ igual a los tres quadrados $CB.BR.RA.$ mas dos rectangulos $ARB.$ luego excede a los tres quadrados $CB.BR.RA.$ (que son los dos $CR.RA.$) en dos rectangulos $ARB.$ del lado $AR.$ y del segmento $RB.$

3 $ASC.$ es angulo agudo: y $CB.$ perpendicular. Digo, que el quadrado $AC.$ es menor que los quadrados $AS.SC.$ en dos rectangulos $ASB.$

El quadrado $AC.$ es igual al quadrado $BC.BA.$ (1.N.) el quadrado $SC.$ es igual a $CB.BS.$ (1.N.) y el quadrado $AS.$ es igual a $SB.BA.$ mas dos rectangulos $ABS.$ (1.1.2.) luego los quadrados $AS.SC.$ son iguales a $BA.BC.$ mas dos quadrados $BS.$ mas dos rectangulos $ABS.$ luego exceden a $BA.BC.$ que son $AC.$ en dos quadrados $BS.$ y dos rectangulos $ABS.$ y porq̄ vn rectangulo $ABS.$ con vn quadrado $BS.$ es tanto como vn rectangulo $ASB.$ (1.1.2.) seràn dos rectangulos $ABS.$ con dos quadrados $BS.$ tan-

H to

to como dos rectangulos ASB. que es ex-
cesso.

4 Porque si el angulo fuera obtuso, la
base pudiera mas que los lados (2. N.) y si el
angulo fuera agudo, pudiera menos que los la-
dos (3. N.) luego si puede tanto como los la-
dos, serà el angulo recto.



LIBRO III.

DEL CIRCULO.



Ratafe en este libro de las propiedades del círculo, menos lo que pertenece a la proporción, que tiene su lugar en el libro sexto.

Contiene todo el libro siete proposiciones.

- Prop. 1. *De un punto fuera del centro.*
 Prop. 2. *De las cuerdas, arcos, y segmentos.*
 Prop. 3. *De los angulos.*
 Prop. 4. *De los círculos concentricos.*
 Prop. 5. *De los círculos que se cortan.*
 Prop. 6. *De los círculos que se tocan.*
 Prop. 7. *De la tangente, y recta que toca los círculos.*

PROPOSICION I.

De un punto fuera del centro.

1 **Q**ue el punto este dentro, ò fuera del circulo, las rectas que de alli se tiraren a la circunferencia conuexa, son desiguales; y la que passa por el centro. es mayor; y la que mas se aparta, menor.

2 Solas dos lineas opuestas pueden ser iguales; y si de un punto salen tres iguales a la circunferencia, será el centro.

3 Si el punto está fuera del circulo, y las lineas se tiraren a la circunferencia conuexa, la que passa por el centro, es menor; y la que mas se aparta, mayor; y solas dos opuestas pueden ser iguales.

Demonstracion. fig. 1.

1 **D**el punto A. dentro, ò fuera del circulo salen AOG. AF. AE. &c. juntamente OF. OE. porque OF. OG. son iguales radios, serán AOF. AOG. iguales (4. P.) luego porque AOF. es mayor que qualquiera AF. (5. l. 1.) será AOG. mayor que qualquiera AF. y tambien porque AOF. y AOE. son iguales: y el angulo AOF. es mayor que AOE. será AF. mayor que AE. (6. l. 1.) luego la que mas se aparta, es menor.

2 Si

2 Si los arcos GF. GH. son iguales, son iguales angulos FOG. HOG. luego tambien AOF. AOH. (1. l. 1.) y pues los lados HOA. iguales a FOA. comprehenden iguales angulos, todo será igual: AF. y AH. (4. l. 1.) luego las que igualmente se apartan, son iguales: y no puede auer otra igual, porque solos dos puntos F. H. pueden igualmente distar de G. luego si de vn punto salen tres lineas iguales a la circunferencia, no estará el punto fuera del centro, y será el mismo.

3 El punto A. está fuera del circulo, y pues ONA. son mayores que OLA. (5. l. 1.) quitando los iguales radios ON. OL. quedará NA. mayor que LA. (4. P.) y porque POA. son iguales a NOA. y el angulo POA. mayor que NOA. será PA. mayor que NA. (6. l. 1.) y por ser el angulo NOA. igual a MOA. y los lados iguales serán AN. AM. iguales (4. l. 1.) luego la que mas se aparta es mayor, y la que igualmente se aparta, es igual, &c. y la menor es AL. que continuada passa por el centro.

PROPOSICION II.

De las cuerdas, arcos, y segmentos.

1 **T**oda la cuerda cae dentro del círculo.

2 (El diametro perpendicular a la cuerda parte igualmente cuerda, arco, y segmento, y al contrario.

3 Los diametros solos se pueden partir igualmente,

4 Las cuerdas que igualmente distan del centro, son iguales, y cortan iguales arcos, y segmentos, y al contrario.

5 La que menos dista del centro, es mayor, y corta mayor arco, y segmento; y al contrario.

6 Lo mismo que en un círculo, es en círculos iguales.

Demonstracion. fig. 2.

1 **E**N la cuerda MN. tomando qualquier punto Z. fera el angulo externo BZM. mayor ^{que} ~~mente~~ el recto BOZ. (3.l.1.) luego mayor que el agudo BMO. luego el radio BM. o BE. es mayor que el lado BZ. (5.l.1.) luego el punto Z. cae dentro del círculo.

2 Tirados los radios iguales BM. BN. fera

serà MBN. triangulo isocetes : luego la perpendicular BOS. parte igualmente la base, ò cuerda MN. en O. y tambien el angulo MBN. (5. l. 1.) luego doblando SBN. sobre SBM. se ajustará: y serà el arco SN. igual a SM. y el espacio SON. a SOM. luego la cuerda MN. y el arco MSN. y el segmento MSNM. quedan igualmente partidos. Al contrario, si MO. ON. son iguales, por ser MBN. isocetes, serà BO. perpendicular: y los angulos MBS. SBN. iguales (5. l. 1.) luego tambien los arcos, que son sus medidas MS. SN. (10. P.) y si los arcos son iguales, tambien los angulos, y assi BO. serà perpendicular (5. l. 1.)

3 Los diametros EH. CS. se parten en radios iguales en el centro: y fuera del centro no se pueden partir igualmente dos rectas; porq̄ si PF. MN. se partiessen igualmente en O. fueran perpendiculares al radio BOS. (2. N.) que es imposible, por ser la perpendicular OM. vnica (11. P.)

4 Si EF. CR. distan igualmente del centro, son los perpendiculos BD. BG. iguales, y tambien los radios BC. BE. y los angulos D. G. y los otros C. E. de vna especie agudos

(3. l. 1.) luego todo el triángulo BDC . es igual a BGE . (4. l. 1.) CD . a GE . y asimismo DR . a GF . y CR . a FE . y los arcos CHR . ESF . &c. Al contrario, si CR . EF . son iguales, se ajustará el triángulo CBR . con EBF . (4. l. 1.) y el perpendicular BD . con BG . luego distan igualmente: y tambien son los arcos, y segmentos CHR . ESF . iguales, &c.

5. Si la distancia BO . es menor que BG . cae MN . mas proxima al centro que EF . luego porque el angulo MBN . es mayor que EBF . será MN . mayor (6. l. 1.) y el arco MSN . mayor que ESF . y al contrario, si MN . es mayor, es mayor el angulo MBN . que EBF . (6. l. 1.) luego tambien el arco MSN . es mayor que ESF . y MN . cae superior a EF . y mas proxima al centro.

6. Porque los circulos iguales se pueden ajustar, y formar vn mismo circulo.

PROPOSICION III.

De los angulos en el circulo.

1 El angulo en la circunferencia es la mitad del angulo en el centro, y del arco en que insiste, y será igual al del centro, si tiene el arco duplo.

2 Los angulos de uno, ò iguales segmentos son iguales; y si son iguales, cortan iguales arcos de circulos iguales, ò semejantes de desiguales.

3 Si un quadrilatero está en el circulo, sus angulos opuestos son iguales a dos rectos; y al contrario.

4 El angulo en el semicirculo es recto: en el segmento mayor, es agudo: en el menor, obtuso.

Demonstracion. fig. 3.

1 Sobre el arco FG. se forma en la circunferencia el angulo FCG. y en el centro GOF. por ser iguales OC. OF. son iguales angulos OCF. OFC. (5. l. 1.) luego porque el externo FOG. es igual a los dos (3. l. 1.) será duplo de cada vno, y FCG. es mitad de FOG. y del arco FG. su medida. Tambien ECG. será mitad del arco EFG. luego quitando GCF. mitad de GF. queda FCE. mitad de EF., ò añadiendo a ECG. el angulo

I

GCB.

GCB. mitad de GB. resultará ECB. mitad de EGB. &c. (4.P.)

2 En el segmento FCB. están los ángulos FEB. FCB. luego porque cada vno es la mitad del arco en que insiste FGB. (1.N.) serán iguales (3.P.) y si son iguales, serán la mitad de iguales ángulos en el centro (1.N.) luego si los círculos son iguales, serán los arcos en que los ángulos insisten iguales (10.P.) y si los círculos son desiguales, serán los arcos semejantes, por ser de iguales grados (9.P.)

3 En el cuadrilatero ECBF. el ángulo ECB. es la mitad del arco opuesto EGB. y el ángulo EFB. es la mitad del arco opuesto ECB. (1.N.) luego porque los dos arcos ECB. EGB. son todo el círculo, los dos ángulos ECB. EFB. serán la mitad del círculo, que es tanto como dos rectos (11.P.) Asimismo los ángulos CBF. CEF. son tanto como dos rectos. Al contrario, si los ángulos ECB. EFB. son tanto como dos rectos el círculo, que pasará por E. C. B. pasará por F.

4 El ángulo ECB. es la mitad del semicírculo opuesto EGB. (1.N.) luego es ángulo recto (11.P.) Item el ángulo FBC. que está

en

el segmento mayor CBF. es la mitad del arco opuesto FEC. (I. N.) luego porque el arco FEC. es menos que el semicirculo, será el ángulo FBC. menos que la mitad del semicirculo; luego es agudo menor que recto (I I. P.) Item porque FEC. esta en el segmento menor será la mitad del arco opuesto FGG. (I. N.) luego es mas que la mitad del semicirculo; luego es obtuso. (I I. P.)

PROPOSICION IIII.

De los circulos concentricos.

- 1 **D**istan igualmente; y al contrario.
 2 El ángulo del centro corta arcos semejantes; y el de la circunferencia, desemejantes.
 3 Si una recta les corta fuera del centro, corta segmentos desemejantes.
 4 Pero los intersegmentos de qualquiera recta son iguales.

Demonstracion. fig. 4.

1 **P**orque OB. ON. OF. OG. son iguales radios: luego quitados radios iguales OC. OM. OE. OH. quedarán iguales distancias CB. MN. EF. HG. y al contrario, si el punto O. es centro del circulo mayor, y las distancias CB. MN. EF. HG. son

iguales, quitadas de los radios iguales OB . ON . OF . OG . quedarán iguales OC . OM . OE . OH . luego O . es tambien centro del circulo menor (1. l. 3.)

2 El angulo GOS . corta los arcos HEP . GFS . que son medida de vn mesmo angulo GOS . luego son semejantes (10. P.) pero el angulo NGS . de la circunferencia corta los arcos MR . NS . y porque el angulo MOR . es mayor que NOS . los arcos MR . NS . sus medidas son desemejantes (10. P.)

3 La recta GS . corta los dos circulos fuera del centro: luego porque los angulos GOS . LOR . son desiguales, serán los arcos GFS . LER . desemejantes, y GFS . de mas grados que LER . (10. P.)

4 Si el radio OF . es perpendicular a GS . serán partes iguales GZ . ZS . y tambien EZ . ZR . (2. l. 3.) luego quitando iguales ZL . ZR . quedarán iguales intersegmentos GL . RS . y añadiendoles LR . resultarán iguales intersegmentos GR . LS . (4. P.) Asimismo BE . CF . serán iguales, &c. Lo mismo es de la recta que corta dos circulos eccentricos si es perpendicular al diametro que passa por los dos centros. PRO-

PROPOSICION V.

De los circulos que se cortan.

1 **N**O tienen vn mesmo centro.

2 La interseccion es en solos dos puntos.

3 La recta que junta los centros es perpendicular a la cuerda comun, y parte igualmente la cuerda segmentos, y arcos; y al contrario.

4 Todas las rectas de la interseccion cortan arcos semejantes en vno, y otro circulo.

Demonstracion. fig. 5.

1 **S**I tuvierã vn mismo centro, fueran equidistantes, y no se cortarã (4. l. 3.) luego si se cortan, no tienen vn mesmo centro.2 Los circulos $nqb. ngh.$ se cortan en $h.$ $n.$ sus centros son $O. C.$ luego porque el punto $O.$ està fuera del centro $C.$ solo se podrã tirar dos lineas opuestas iguales a la circunferencia conuexa $ngh.$ que son $On. Ob.$ (1. l. 3.) luego solos dos puntos $n. h.$ pueden ser comunes, y assi la interseccion es en solos dos puntos.3 La cuerda comun es $nh.$ la q̄ junta los centros es $OC.$ y doblãdo el triangulo $OnC.$ se ajustarã con $OhC.$ por ser $On. nC. CO.$ iguales

les

les a $Ob.bC.CO.$ (4.l.1.) luego se ajustará $yn.$ con $yh.$ los arcos tambien $qn.qh.$ y $gn.gb.$ y los angulos $gyn.$ $gyh.$ luego $OC.$ es perpendicular a $nb.$ (11.P.) y todo lo parte igualmente (2.l.3.) Al contrario, si $Oy.$ es perpendicular a la cuerda $nb.$ la parte igualmente, y continuada passará $OyC.$ por el centro $C.$ (2.l.3.) y si $Oy.$ parte igualmente a $nb.$ es su perpendicular, y passa por $C.$ (2.l.3.)

4 Si de la interseccion $b.$ se tiran lineas $hn.$ $hp.$ $hm.$ porque el punto $b.$ está en las dos circunferencias, ferá el angulo $nbp.$ la mitad del arco $dn.$ y la mitad de $pn.$ luego $dn.$ $pn.$ son arcos semejantes (3.l.3.) y así mesmo $gd.mp.$ con que si $nd.dg.$ son iguales, tambien serán iguales $np.pm.$ & c.

PROPOSICION VI.

De los circulos que se tocan.

1 **N**O tienen un mesmo centro.
2 La recta que junta a los centros passa por el contacto, que es en un solo punto.

3 La que passa por el contacto, y un centro, passa por todos los centros.

4 La que por el contacto corra un circulo, corta de todos arcos, y segmentos semejantes.

De

Demonstracion. fig. 6.

1 Si tuvieran vn mesmo centro, fueran equidistantes, y no se tocaran (4. l. 3.) luego si se tocan, no tienen vn centro.

2 Sean los circulos ANG. ASg. sus centros E. C. y CE. les junta; digo, que el contacto està en A. Tomese en la circunferencia ANG. qualquier punto R. ferà CR. mayor que CA. (1. l. 3.) luego mayor que CS. que es radio igual a CA. luego el punto R. no es comun a los circulos; y afsi no es el contacto: lo mismo es de qualquiera otro punto que no sea A. luego solo A. es el contacto. Si los circulos son APX. ASg. tomando en el interior qualquier punto P. porque C. està fuera del centro B. ferà CP. menor que CA. y CS (1. l. 3.) luego P. no es punto comun: luego solo puede ser A. el contacto, y punto comun.

3 La linea CBE. que và por los centros C. B. E. passa por el contacto A. (2. N.) luego la linea AE. que passa por el contacto, y centro E. continuada, passará por los centros BC. porque es la misma linea CBAE.

4 La recta FAZf. corta todos los circulos por el contacto A. Los angulos FAG. fAg.

fAg. verticales son iguales (2.1.1.) luego los arcos FG.XZ. fg. (que son duplos de los angulos en la circunferencia) seràn semejantes (3.1.3.) luego quitados cada vno de su semicirculo, quedaràn semejantes los arcos, y segmentos ANF. APZ. ASf. y asimesmo ARGF. AXZ. Angf. &c.

PROPOSICION VII.

De la tangente.

1 *ES la perpendicular al extremo del radio, y en aquel solo punto està el contacto.*

2 *La recta del centro al contacto es perpendicular a la tangente; y la perpendicular del centro passa por el contacto; y la del contacto passa por el centro.*

3 *Si muchos circulos se tocan en un punto, la que en èl toca a un circulo, les toca a todos.*

4 *Qualquiera otra recta que passa por el contacto, corta al circulo, y haze con la tangente angulos iguales a los que caben en los segmentos alternos.*

Demenstracion. fig. 7.

1 *Sea DAL. perpendicular al extremo del radio EA. tomando en ella qual-*

qualquier punto L. porque EAL. es angulo recto, ferà ELA. menor (3. l. 1.) luego el lado EL. opuesto al mayor angulo, ferà mayor que el radio EA. ò EN. (5. l. 1.) luego qualquier punto L. que no sea A. cae fuera del circulo: luego solo el punto A. es comun a la recta DAL. y al circulo, y assi DA. es tangente en aquel solo punto, &c.

2 Siendo la tangente DA. perpendicular al radio EA. luego la recta EA. del centro E. al contacto A. es perpendicular a DA. y si AG. es perpendicular, passará por E. y si BE. es perpendicular, passará por A. porque siempre es la mesma AE. ò EA.

3 Si los tres circulos se tocan en A. la recta EABC. passa por todos los centros (6. l. 3.) luego la recta DA. que toca al circulo ANF. y es perpendicular al extremo del radio EA. (1. N.) ferà también perpendicular al extremo de los radios CA. BA. que son la mesma recta CBAE. luego toca todos los circulos en A. (1. N.)

4 Qualquiera otra AF. que no sea la tangente LA. haze el angulo FAE. menor que el recto LAE. luego considerando EHN. perpendicular, ferà el angulo recto EHA. mayor que EAH. luego el lado EA. ò EN. es mayor

que

que EH. (5.1.1.) luego el punto H. está dentro del círculo, y así AF. le corta, y juntando FG. por ser el ángulo del semicírculo AFG. recto (3.1.3.) hará GAF. con FGA. un recto (3.1.1.) y pues GAF. con FAL. hace también un recto LAG. serán AGF. FAL. iguales: luego porque todos los ángulos del segmento ARF. son iguales a FGA. (3.1.3.) todos son iguales a FAL. y tomando en el segmento ANF. qualquier punto N. el ángulo AGF. con FNA. será tanto como dos rectos, por ser ANFG. cuadrilatero (3.1.3.) También LAF. FAD. son tanto como dos rectos (1.1.1.) luego quitando iguales AGF. FAL. quedarán iguales DAF. FNA. luego la recta AF. hace con la tangente LAD. ángulos iguales a los que caben en los segmentos alternos opuestos, esto es, el ángulo LAF. igual al que cabe en el segmento ARF. y el ángulo FAD. al del segmento ANF. &c.

Proposición 35. 36. 37. de Euclides.

(Son de la proporción de las líneas del círculo, y tienen su lugar en el fin del lib. 6. prop. 6.)

LIBRO IV. DE EUCLIDES.

Todas sus proposiciones son problemas, que tienen su lugar en la Geometría práctica.

II.

LIBRO V.

DE LA RAZON, Y PROPORCION
en comun.

A razon, y proporción, y las cosas concernientes a la inteligencia de este libro se explicaron en los Proemiales 18. 19. 20. 21.

Todas las proposiciones de este libro son puros axiomas, que solo necesitan de explicacion, como lo advierte Pedro Ramo en sus Escuelas Mathematicas, y el P. Andres Tacquet en su Geometria. Reducense todas a cinco.

Prop. 1. *De las razones entre si.*

Prop. 2. *De las cantidades iguales.*

Prop. 3. *De las cantidades desiguales.*

Prop. 4. *De los terminos proporcionales.*

Prop. 5. *Del todo, y sus partes.*

PROPOSICION I.

De las razones entre si.

1 Las iguales a otra, son iguales entre si.

2 Las duplicadas, ò triplicadas a otra, ò a otras dos iguales, son iguales entre si; y al contrario.

3 Si una razones duplicada, ò triplicada a otras dos, son estas iguales; y al contrario.

4 Las compuestas de iguales, son iguales.

Explicacion.

I Sean las tres razones BaC. y DaE.
y FaG.

B 2. a C. 1. D. 6. a E 3.

F. 8 a G. 4.

Si BaC. es como FaG. y DaE. es como FaG. luego BaC. es como DaE. porque si FaG. es dupla; será BaC. dupla, y DaE. dupla: luego la razon de BaC. y DaE. son semejantes duplas, &c. Esto es general en toda especie de cantidad, substituyendo en lugar de las letras, ò numeros, ò lineas, ò superficies, ò cuerpos.

2 Sean tres continuos proporcionales B. C. D. y otros tres en la mesma razon EFG.

B. 9. C. 3. D. 1.

E. 18. F. 6. G. 2.

La razon de BaD. es duplicada de CaD. (21.

P.

P.) la de E a G. se supone también duplicada de C a D. luego la razón de B a D. es la misma que de E a G. como se vé en los números. Item, la razón de B a D. es duplicada de C a D. la de E a G. es duplicada de F a G. la de C a D. es como F a G. luego la de B a D. es como E a G. Al contrario, si B a D. es como E a G. y la razón de B a D. es duplicada de C a D. luego la de E a G. también será duplicada de C a D. Item, si B a D. es como E a G. y B a D. es razón duplicada de C a D. y E a G. es duplicada de F a G. luego C a D. será también como F a G.

3 La razón de B a D. es duplicada de E a F. la misma de B a D. es también duplicada de F a G. luego E a F. es como F a G. &c. Al contrario, si E a F. es como F a G. y la razón de B a D. es duplicada de E a F. luego la misma B a D. será también duplicada de F a G.

4 La razón de B a D. es compuesta de B a C. y C a D. (21. P.) la de E a G. es compuesta de E a F. y F a G. siendo B a C. como E a F. y C a D. como F a G. luego B a D. es como E a G. llámese *ex æquo, vel æqualitate* por la igualdad de composición. En fin una razón se compara a otra, como una cantidad a otra.

PRO-

PROPOSICION II.

Delas cantidades iguales.

1 **L**as cantidades iguales tienen una misma razon con otra, ò con otras iguales.

2 Si dos cantidades tienen una misma razon con otra, ò con otras iguales, son ellas iguales.

3 Una cantidad tiene la misma razon a dos otras iguales.

4 Si una, ò muchas cantidades iguales tienen la misma razon a otras, son estas iguales.

Explicacion.

1 Sean iguales cantidades B. C. y tambien D. E.

B. 3. C. 3. D. 9. E. 9.
Si B. y C. son iguales, la misma razon tendrá B a D. que C a D. y si D. y E. son iguales, ferà B a D. como C a E.

2 Si B a D. es como C a D. luego B. y C. son iguales. Item, si B a D. es como C a E. siendo D. y E. iguales: luego B. y C. son iguales.

3 Si D. E. son iguales, ferà B a D. como B a E. porque D. y E. son como vna mesma.

4 Si B a D. es como B a E. luego D. y E. son iguales; y si B. C. son iguales, y B a D. es como C a E. feràn D. y E. tambien iguales.

PRO

PROPOSICION III.

De las cantidades desiguales.

1 **L**A mayor tiene mayor razon a otra tercera; y la que tiene mayor razon, es mayor.

2 Si otra se les compara, tiene mayor razon a la menor; y a la que tiene mayor razon, es menor.

3 Si dos tienen una razon a dos desiguales, son ellas tambien desiguales; y al contrario.

4 El mayor antecedente tiene mayor conseqüente, si la razon es la mesma; y al contrario.

Explicacion.

1 Sean B. C. D. E. quatro cantidades;
B. 8. C. 6. D. 4. E. 3.

Si B. es mayor que C. la razon de B a D. ferà mayor que la de C a D. y si B a D. tiene mayor razon que C a D. es B. mayor que C.

2 Si B. es mayor que C. la razón de D a C. es mayor que de D a B. y si la razon es mayor, es C. menor que B.

3 Si B. y C. tienen vna misma razon con D. y E. luego si D. y E. son desiguales, tambien lo feràn B. y C. y si B. y C. lo son, tãbien D. y E.

4 Si B a D. es como C a E. y B. es mayor que C. tambien D. ferà mayor que E. y si D. es

ma-

mayor que E. tambien B. es mayor que C.

PROPOSICION IV.

De los terminos proporcionales.

I Si quatro terminos son proporcionales directos, seràn tambien proporcionales alternando, inuertiendo, componiendo, diuidiendo, y conuertiendo.

2 La suma de los antecedentes a la suma de los conseqüentes, es como un antecedente a su conseqüente.

3 Si los terminos compuestos son proporcionales, tambien lo seràn diuididos; y al contrario.

4 Si muchos terminos son continuos proporcionales, sus diferencias guardan la mesma proporcion, y al contrario.

Explicacion.

I Eñ los quatro terminos B. C. D. E.
B. 6. C. 3. D. 4. E. 2.

Directamente: como B a C. afsi D a E: luego

Alternando: como B a D: afsi C a E: luego

Inuertiendo: como C. a B. afsi E a D: luego

Cõponiẽdo como $B + CaC$. afsi $D + EaE$. luego.

Diuiẽdo: como $B - CaC$. afsi $D - EaE$. luego

Conuertiendo: como $CaB + C$. afsi $EaD + E$. y

como $CaB - C$. afsi $EaD - E$.

2 Como $B \div D$. suma de los antecedentes a $C \div E$. suma de los conseqüentes, así B a C . ò así D a E .

3 Si $B \div C$ a C . es como $D \div E$ a E . luego diuididos B a C . será como D a E . y al contrario si B a C . es como D a E . compuestos serán $B \div C$ a C . como $D \div E$ a E .

4 Sean continuos B . C . D . E . y las diferencias F . G . H . digo que tienen la mesma razón.

B . 27. C . 18. D . 12. E . 8.

F . 9. G . 6. H . 4.

Porq̃ son proporcionales B a C . como C a D . luego diuidiendo serán $B - C$ a C . como $C - D$ a D . (1. N.) y pues $B - C$. es lo mesmo que F . y $C - D$. q̃ G . serán F . a C . como G a D . luego alternando F a G . como C a D . (1. N.) así mismo será G a H . como D a E . &c. luego F . G . H . son diferencias que tienen la mesma razón continua.

Al contrario si F . a G . es como C a D . luego alternando F . a C . como G a D . y componiendo $F \div C$ a C . como $G \div D$ a D . esto es B a C . como C a D . luego B . C . D . son continuos proporcionales, &c.

L

PRO

PROPOSICION V.

Del todo, y sus partes.

- 1 **C**omo un todo a otro, assi la parte a la parte semejante del otro.
- 2 Como la parte de un todo a la parte semejante de otro: assi un todo a otro.
- 3 Si una parte a otra semejante fuere, como el todo al todo, serà tambien el residuo al residuo, como el todo al todo, ò como la parte a la parte semejante.
- 4 Si el residuo al residuo es como la parte a la parte; el todo al todo tendrà la mesma razon: y al contrario.

Explicacion.

- 1 **S**ea el un todo $B + C$. y el otro $D + E$.
 $B 8 + C 4.$ $D 2 + E 1.$
 Como $B + C$ a $D + E$. assi B a D .
- 2 Como B a D . assi $B + C$ a $D + E$.
- 3 Si B a D . es como $B + C$ a $D + E$. tambien C a E . serà como B a D . ò $B + C$ a $D + E$.
- 4 Si B a D . es como C a E . luego alternando B a C . como D a E . y componiendo $B + C$ a $D + E$. assi B a D . como se vè en los numeros.

LIBRO VI.

DE LA RAZON, Y PROPORCION
en particular.

Este libro se dize de Oro con mucha razon, por la nobleza, y fecundidad de sus proposiciones: pues apenas se hallarà en toda la Mathematica problema, ò theorema illustre, que no tenga dependencia de este libro: y assi deue el estudioso aplicar su principal industria, y trabajo en la perfecta inteligencia, y entera comprehension de sus theoremas, que todos se reducen a seis.

Prop. 1. *De los triangulos, y paralelogramos de igual base, altura, ò angulo.*

Prop. 2. *De los triangulos equiangulos.*

Prop. 3. *De la seccion de los angulos.*

Prop. 4. *De las figuras semejantes.*

Prop. 5. *De los circulos, y sus partes.*

Prop. 6. *De las rectas del circulo.*

PROPOSICION I.

De los triangulos, y paralelogramos de igual base,
altura, ò angulo.

- 1 **S**i tienen igual altura, tienen la razón que las bases, y al contrario.
- 2 Si tienen igual angulo, tienen la razón compuesta de los lados.
- 3 Si los lados del angulo igual son reciprocos, seràn iguales figuras, y al contrario.
- 4 Si tres, ò quatro rectas son proporcionales el triangulo, ò paralelogramo de la media, ò medias es igual al de las extremas con igual angulo.

Demonstracion. fig. 1.

Los triangulos BEN, NED. tienen vna mesma altura, y afsi están, ò pueden estar entre dos paralelas BD, EH. luego si las bases fueran iguales, fueran ellos iguales (8. l. 1.) si BN. es dupla de ND. es el triangulo BEN. duplo de NED. si tripla tripla, &c. luego tantas vezes contiene vn triangulo a otro, como vna base a otra: luego el triangulo BEN. a NED. tiene la mesma razón, que la base BN. a ND. (19. P.) el mesmo argumento se haze de las alturas, quando las bases son iguales (8. l. 1.) y lo mesmo es de los

paralelogramos, que son duplos de los triangulos. (8. l. 1.)

2 Los triangulos b . y g . tienen iguales angulos BNE . DNC . juntese DE . y el triangulo b . a g . tendra la razon compuesta de b . a d . y d . a g . (2. 1. P.) y pues b . a d . es como BN . a ND . y d . a g . es como EN . a NC . (1. N.) luego b . a g . tiene la razon compuesta de los lados, de BN a ND . y de EN . a NC . &c.

3 Si los lados son reciprocos DN . a NB . como EN . a NC . seràn b . y g . iguales: porque d . a b . es como DN . a NB . y el mesmo d . a g . es como EN . a NC . (1. N.) luego porque DN . a NB . se supone como EN a NC . serà d . a b . como d . a g . (1. l. 5.) luego b . y g . son iguales (2. l. 5.) Si b . y g . son iguales: serà d a b . como d a g (2. l. 5.) luego porque d a b es como DN . a NB . y d a g . es como EN a NC . (1. N.) seràn lados reciprocos DN . a NB . como EN a NC .

4 Si son quatro proporcionales DN . a NB . como EN . a NC . seràn b . y g . iguales (3. N.) si las proporcionales son tres DN . a NB . como NB a NC . tomando EN . igual a BN . seràn como quatro: DN a NB . como EN a NC . luego b . y g . son iguales (3. N.) lo mesmo es de los

los paralelogramos, que son duplos de los triangulos (8. l. 1.)

PROPOSICION II.

De los triangulos equiangulos.

I *A paralela a la base, forma triangulos equiangulos con lados, bases, e intersegmentos proporcionales, y al contrario.*

2 *Si los tres lados de uno son proporcionales a los tres de otro, son equiangulos, y al contrario.*

3 *Si tienen un angulo igual, y sus lados proporcionales; o los lados del otro proporcionales, y el tercero de una especie, son equiangulos.*

4 *Los equiangulos tienen los lados proporcionales; y si son paralelos, tendran las bases paralelas, o en una recta: y al contrario.*

Demonstracion. fig. 2.

I **E**N el triangulo BNC. continuados los lados a vna, y otra parte, son ED. FG. paralelas a la base BC. los angulos alternos CBN. NDE. son iguales, y tambien BCN. NED (2. l. 1.) y los opuestos N. verticales (1. l. 1.) luego los triangulos BCN. NDE. son equiangulos, y asimesmo DEN. NFG. BCN. Luego si se juntan las rectas BE. CD. seran los triangulos BCE. BCD. iguales,

sobre vna base BC. y entre paralelas BC. ED. (8. l. 1.) y quitando el comun BNC. quedaràn iguales BNE. CND. y por tener iguales angulos BNE. CND. seràn los lados reciprocos (1. l. 6.) luego FN a ND. es como NC. a NB. asimesmo se demostrarà que NE a ND. es como NG. a NF. luego NG a NF. es como NC. a NB. (1. l. 5.) luego el residuo CG a BF. es como NC a NB. (5. l. 5.) y considerando BH. paralela a NG. serà NF a FG. como BN a HG. que es BC. (7. l. 1.) luego lados, intersegmentos, y bases, todo es proporcional.

2 FNG. GMO. tienen los lados proporcionales: tomando FB. igual a GM. sea BH. paralela a NG. luego FB a BH. es como FN a NG. (1. N.) y pues GM a MO. se supone como FN. a NG. serà FB a BH. como GM a MO. (1. l. 5.) luego porque FB. se tomò igual a GM. serà BH. igual a MO. (2. l. 5.) tambien FB a FH. es como FN a FG. ò GM a GO. luego FH. y GO. son iguales (2. l. 5.) luego el triangulo GMO. es el mesmo FBH. (4. l. 1.) y pues FBH. es equiangulo a FNG. por las paralelas BH. NG. (1. N.) serà GMO. equiangulo a FNG. y al contrario si
GMO.

GMO. es equiangulo con FNG. ajustando el angulo MGO. sobre F. caerà MO. sobre BH. ferà paralela a NG. luego todo ferà proporcional lados, y base, &c. (1. N.)

3 Si el angulo MGO. es igual a F. y los lados MG a MO. como NF. a NG. y el angulo O. de vna especie con NGF. tomese FB. igual a GM. y siendo BH. paralela a NG. ferà FB a BH. como FN a NG. (1. N.) y como GM a MO. (1. l. 5.) y pues FB. se tomò igual a GM. ferà BH. igual a MO. (2. l. 5.) luego porque FB. BH. son iguales a GM. MO. y el angulo MGO. igual a F. y O. de vna especie con FHB. que es FGN. ferà todo el triangulo GMO. igual a FBH. (4. l. 1.) luego GMO. que es FBH. es equiangulo a FNG. y los lados, y bases proporcionales (1. N.)

4 Si GMO. BNC. son equiangulos son los lados, y bases proporcionales (2. N.) y si MG. NF. son paralelas, y MO. NG. continuãdo la base OG. ferà el angulo MGO. igual a F. (2. l. 1.) y pues MGO. se supone igual a NBC. ferà NBC. igual a F. luego BC. y FGO. son paralelas (2. l. 1.) y en los triangulos GMO. FNG. seràn FG. GO. vna recta : y al contrario

fi

si las bases BC. y FGO. son paralelas, a vna recta se demostraràn los angulos G.B.F. iguales, y los triangulos equiangulos, &c.

PROPOSICION III.

De la seccion de los angulos.

I **L** A recta que parte el angulo igualmente, parte la base con proporcion a los lados, y al contrario.

2 La recta que haze con vn lado vn angulo igual al opuesto, forma vn triangulo semejante al todo: y el lado es medio proporcional entre la base, y segmento con termino: y al contrario.

3 La perpendicular del angulo recto haze dos triangulos semejantes al todo: es media entre los segmentos: y cada lado es medio entre la base, y segmento con termino.

4 Los perpendiculos de dos angulos hazen con el otro dos triangulos semejantes, y segmentos proporcionales con los lados opuestos.

5 Si dos rectas de los angulos parten proporcionalmente los lados, se parten ellas proporcionalmente, y al contrario.

Demonstracion. fig. 3.

I **E** N el triangulo NFG. la recta NH. haze iguales angulos FNH. HNG.
M

HNG. siendo HB. paralela a GN. son los angulos alternos iguales GNH. NHB. (2. l. 1.) luego tambien son iguales NHB. BNH. (3. P.) luego se oponen a iguales lados BH. BN. (5. l. 1) y pues FH. a HG. es como FB a BN. que es BH. y FB a BH. es como FN. a NG. (2. l. 6.) luego FH. a HG. es como FN a NG. (1. l. 5.) al contrario si FH. a HG. es como FN a NG. sera tambien FH a HG. como FB a BH. y como FB a BN. (2. l. 6.) luego BH. y BN. son iguales (2. l. 5.) luego los angulos HNB. BHN. son iguales (5. l. 1.) y pues BHN. HNG. son alternos iguales (2. l. 1.) seran FNH. HNG. tambien iguales.

2 Si la recta NH. haze el angulo HNG. igual al opuesto F. porque el angulo NGF. es comun a los dos triangulos FGN. NGH. sera NHG. igual a GNF. (3. l. 1.) luego los triangulos GHN. NGF. son equiangulos: luego tienen los lados proporcionales FG. a GN. como GN a GH. y el lado GN. medio entre FG. GH. &c.

3 Si el angulo *bdc* es recto, y *dr* perpendicular, el angulo *c. con b.* hara vn recto (3. l. 1.) y pues *bdr* con *rdc* haze vn recto, sera *rdc* igual

ac. luego el triangulo *brd* es equiangulo al todo *bdc* (2. N.) asimismo *crd* es equiangulo a *bdc.* y a *brd.* luego son proporcionales *br* a *rd.* como *dr* a *rc.* y *dr* es media entre *br.* *rc* (2. l. 6.) y tambien *br* a *bd.* como *bd* a *bc.* y *cr* a *cd* como *cd* a *cb.*

4 En el triangulo *END.* son los dos perpendiculos *DX.* *EZ.* y por ser los angulos *X.* *Z.* rectos iguales, y *N.* comun seràn *NEZ.* *NDX.* iguales (3. l. 1.) luego son equiangulos: y son proporcionales *EN.* a *NZ.* como *DN.* a *NX.* (2. l. 6.) y el rectangulo *ENX.* igual a *DNZ.* (1. l. 6.)

5 Si en el triangulo *bdc.* las rectas *ca.* *dr.* parten proporcionalmente los lados *bd.* *bc.* luego los triangulos *abc.* *rbd.* que tienen el angulo *b.* comun, tienen los lados reciprocos: como *ba.* a *br.* asì *bd.* a *bc.* luego son los triangulos *abc.* *rbd.* iguales (1. l. 6.) luego quitado el espacio comùn *banr.* quedaràn iguales *and.* *rnc.* y porque los angulos verticales *and.* *rnc.* son iguales (1. l. 1.) seràn los lados reciprocos *an.* a *nc.* como *rn.* a *nd.* (1. l. 6.) luego las rectas *ca.* *dr.* que cortan proporcionalmente los lados, se cortan ellas proporcionalmente.

PROPOSICION IV.

De las figuras semejantes.

1 **L**as semejantes a otra son semejantes entre si; resueluense todas en triangulos semejantes, y al contrario.

2 Tienen la razon duplicada de los lados homologos, y al contrario.

3 Descritas sobre rectas proporcionales son proporcionales: y sobre un triangulo rectangulo, la de la base es igual a las de los lados, y al contrario.

4 Las que están dentro de otra con un angulo comun, tienen los lados paralelos, y comun diagonal, y al contrario.

5 La diagonal por el angulo comun haze segmentos semejantes, y los complementos proporcionales a los segmentos: Cōsectario En los paralelogramos, y figuras que se parten igualmente por la diagonal son los complementos iguales.

Demonstracion. fig. 4.

1 **P**orque las semejantes a otra, tienen con ella iguales angulos, y lados proporcionales: luego tambien entre si (1. l. 5.) y assi serán semejantes. Las figuras BFMNE. BDRSC. semejantes, tienen angulos iguales, y lados proporcionales (22. P.) ti-

ra-

radas FE. FN. DC. DS. siendo los angulos
 EBF. CBD. iguales, y EB a BF. como CB. a
 BD. serán los triangulos *b. q.* semejantes (2. l.
 6.) y asimismo *x. z.* luego quitando iguales
 angulos de iguales, quedan los triangulos *b. y*
g. equiangulos, y semejantes: luego las figuras
 semejantes se refuelven en triangulos seme-
 jantes: y al contrario si se refuelven en trian-
 gu'os semejantes con la mesma disposicion
 tendrán todos los angulos iguales, y los lados
 proporcionales: luego las figuras compuestas
 serán semejantes (2 2. P.)
 (2 4) Juntas las figuras en los angulos igua-
 les EBF. CBD. continuese CH. que sean tres
 continuas EB. a BC. como BC a CH. y será la
 razon de EB a CH. duplicada de EB a BC.
 (2 1. P.) luego porque EB a BC. se supone co-
 mo FB a BD. será BC a CH. como FB a BD.
 (1. l. 5.) y pues el triangulo *d. a q.* es como FB a
 BD. (1. l. 6.) y *d a r* es como BC a CH. que es
 FB a BD. serán *q. r.* iguales (2. l. 5.) luego *b. a q.*
 tiene la mesma razon que *b. a r.* y pues *b a r* tie-
 ne la razon que EB a CH. (1. l. 6.) que es du-
 plicada de EB a BC. tendrá *b a q.* la razon du-
 plicada de EB a BC. que son lados homolo-
 gos:

gos : lo mismo se demostrará de b a g . y de z a x . luego la suma de b . h . z . que es la figura $BFMNE$. a la suma de q . g . x . que es la figura $BDRSC$. tiene la misma razón que b . a q . (4. l. 5.) que es duplicada de EB a BC .

3 Siendo EB a BC . como NF . a DS . el trapecio hb a su semejante qg . tendrá la razón duplicada de EB a BC . y el triángulo z . a x . tendrá la razón duplicada de NF . a DS . (2. N.) luego porque la razón duplicada de EB a BC . es la misma que de NF . a DS . (1. l. 5.) el trapecio hb a qg . tiene la razón que el triángulo z . a x . y alternado hb a z . como qg . a x . (4. l. 5.)

Sea el triángulo EBD . rectángulo : los cuadrados de EB . BD . DE . porque son semejantes tendrán la razón duplicada de los lados (2. N.) y cualesquiera otras figuras semejantes tendrán la misma razón duplicada de los lados (2. N.) luego porque los cuadrados de EB . BD . son iguales al cuadrado de ED . (4. l. 2.) también cualesquiera figuras semejantes descritas sobre EB . BD . serán iguales a la de ED . &c. (1. l. 1.)

4 Las figuras qd . rh . semejantes tienen el ángulo z . comun. Digo que la diagonal za . pas-

a Ta por b . y Zb por i . porque se diuiden en
 rian gulos femejantes (1. N.) luego los angu-
 los m, n . son iguales: luego $mh. nd$. son parale-
 las (2. l. 1.) tambien los angulos $mzh. nzd$. son
 iguales: luego Zhd es vna recta: y assimefmo
 $Zib. Zil$. y los lados paralelos $bd. ih$. &c. Assi-
 mefmo se demostrarà que la figura fc . feme-
 jante a qd si tiene el angulo b . comun serà la
 diagonal biz comun, y los lados $cu. dn$ parale-
 los, &c. Al contrario si los lados $mh. nd$ son pa-
 ralelos, &c. y las diagonales $Zhd. Zib$ &c. co-
 munes, seràn los triangulos $Zhm. Zdn$. feme-
 jantes (2. l. 6.) luego diuidiendose las figuras
 en triangulos femejantes, seràn femejantes
 (1. N.) y siendo $fc. rh$. femejantes a qd . seràn en-
 tre si femejantes. (1. N.)

5 La diagonal Zb haze los segmentos
 $bdnz. bcui. ihmz$: que constan de triangulos fe-
 mejantes (4. N.) luego son segmentos feme-
 jantes (1. N.) assimefmo son femejantes $blqz.$
 $befi. iorZ$. luego el segmento $blqz$ a $bdnz$ es co-
 mo $befi$ a $bcui$. y como $iorZ$. a $ihmz$. (3. N.) lue-
 go el residuo que es el complemento $elqroife$.
 al complemento $cdnmbiuc$. tiene la mesma ra-
 zon (5. l. 5.) De donde nace que en el paralelo-
 gra-

gramo qd . siendo los segmentos iguales son los complementos iq . id iguales: y lo mismo es en los complementos $elqroife$. $cdmbiuc$. si zb . haze iguales segmentos.

PROPOSICION V.

De los circulos, y sus partes.

1 Los angulos, y sectores de uno, o iguales circulos tienen la razon que los arcos, y al contrario.

2 Las circunferencias, cuerdas, y arcos semejantes tienen la razon que los radios.

3 Los arcos, segmentos, y cuerdas semejantes de circulos iguales; son iguales: y de mayor circulo, mayores: y si son iguales en desiguales circulos, son desemejantes, y de mas valor el de menor circulo.

4 Las figuras inscriptas, y circunscriptas, sectores, y segmentos semejantes, y los circulos entre si tienen la razon duplicada de los radios.

Demonstracion. fig. 5.

1 Si el arco CG . es igual a GD . es el angulo CBG . igual a GBD . (10. P.) luego todo el sector CBG . se ajustará con GBD . y será igual: asimismo si CG . es duplo de CP . será el angulo, y sector CBG . duplo de CBP .

CBP. y CBM. triplo: y CBD. quadruplo, &c. luego siempre los ángulos, y sectores tienen la razón que los arcos en vno, ò iguales círculos.

21 Sean los arcos CD. FE. semejantes, y la sexta parte de dos círculos, por ser el ángulo FBE. igual a CBD. (10. P.) y los lados CB. igual a BD. como FB. igual a BE.

Serán los triángulos semejantes (2. l. 6.) luego la cuerda CD. a FE. como el radio CB. a FB. (2. l. 6.) Diuidiendo igualmente los arcos en H. y G. será CG. a FH. como CB. a FB. y continuando la bisección, será CP. a FR. como CB. a FB. y pues corresponden infinitamente a iguales cuerdas iguales arcos en cada círculo: luego los arcos semejantes tienen la razón que las cuerdas, que es la razón de los radios, &c.

31 Porque las cuerdas, y arcos semejantes son como los radios (2. N.) luego si los radios son iguales, serán cuerdas, y arcos, y segmentos iguales; y si el radio es mayor, será la cuerda, arco, y segmento mayor: y si las cuerdas, ò arcos son iguales siendo los radios desiguales, serán desemejantes, porque si fueran

Ni se

sejantes al mayor radio, le correspondiera mayor cuerda, y arco, &c. (3. l. 5.)

4 Sean FE. CD. lados homologos de las figuras semejantes inscriptas : estas tienen la razon duplicada de FE. a CD. (4. l. 6.) luego porque FE. a CD. es como FB. a CB. (2. N.) tendrán las figuras la razon duplicada de los radios FB. a CB. (1. l. 5.) lo mesmo se demuestra de las circunscriptas.

Diuidiendo igualmente los arcos CD. FE. tendrá el triangulo CGD. a FHE. la razon duplicada de las cuerdas CD. FE. ò radios CB. FB. (4. l. 6.) y continuando la bisección tendrá la mesma razon el triangulo CPG. a FRH. y assi infinitamente : luego la suma de todos los triangulos que componen al sector, segmento, ò circulo; tendrá a la otra suma la mesma razon duplicada de los radios : luego porque los sectores, segmentos, y circulos son iguales a la suma de todos los triangulos continuada infinitamente la biseccion; tendrá vn sector a otro, y vn segmento, ò circulo a otro la mesma razon duplicada de los radios (2. l. 5.) con que todo lo que se ha dicho (4. l. 6.) de las figuras semejantes se entiende de los segmentos, sectores, y circulos semejantes. PRO-

PROPOSICION VI.

De las rectas del círculo.

- 1 **S**i dos rectas se cortan en el círculo, el rectángulo de la una es igual al de la otra.
- 2 La perpendicular al diámetro es media proporcional entre los segmentos, &c.
- 3 La tangente de un punto es media proporcional entre la secante, y su exterior segmento: y al contrario, y dos tangentes de un punto son iguales.
- 4 Las secantes forman triángulos semejantes, y son reciprocas con sus exteriores segmentos, y el un rectángulo igual al otro.

Demonstracion. fig. 6.

1 **L**as rectas DE. CF. se cortan en H. juntas CD. EF. los angulos DCE. y DEF. son la mitad del arco DF. y son iguales, y también CDE. CFE. (3. l. 3.) y los verticales CHD. EHF. (1. l. 1.) luego CHD. EHF. son equiangulos, y los lados proporcionales (2. l. 6.) CH. a HD. como EH. a HF. luego el rectángulo CHF. es igual a DHE. (1. l. 6.)

2 La recta CO. es perpendicular al diámetro DE; el angulo DCE. en el semicírculo es recto (3. l. 3.) luego el perpendículo CO. es medio entre los segmentos DO. OE.

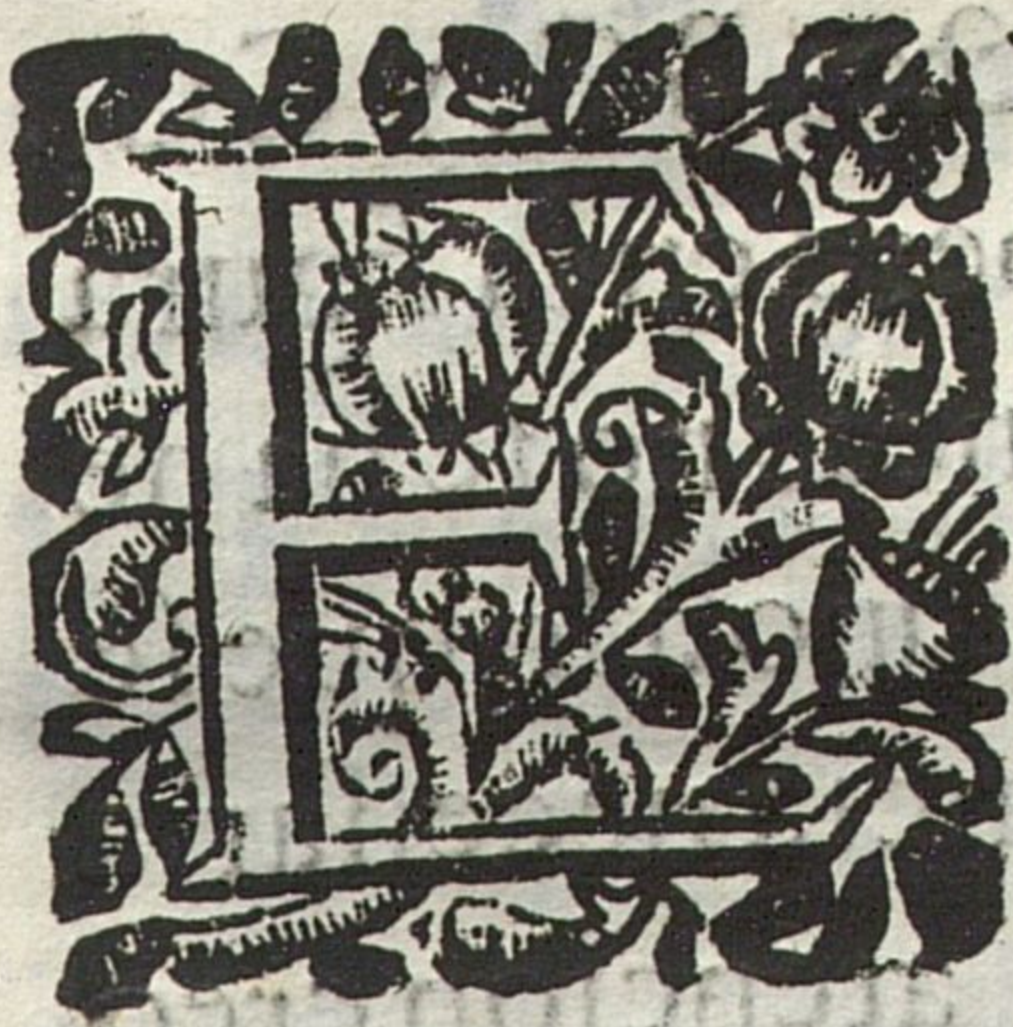
(3. l. 6.) y el quadrado CO . igual al rectangulo DOE . (1. l. 6.) asimismo CD . es media entre ED . DO . y CE . entre DE . EO . (3. l. 6.).

3 La recta BC . toca al circulo en C . y qualquiera otra BE . le corta: juntas CD . CE . harà DC . el angulo DCB . igual a CED . del segmento alterno $CEFD$. (7. l. 3.) luego porq̃ en el triangulo BCE . la recta CD . haze el angulo BCD . igual al opuesto CED . es la tangente BC . media entre CB . BD . (3. l. 6.) luego el quadrado BC . es igual al rectangulo EBD . (1. l. 6.) Al contrario, si BC . es media entre DB . BE . serà BC . tangente; porque la tangente ha de ser media, y la media es vnica. Tambien las tangentes BC . BZ . son iguales, porque cada vna es media entre EB . BD .

4 BE . BF . son secantes de vn punto que cortan el circulo: juntando DG . EF . en el quadrilatero $DEFG$. el angulo DEF . con FGD . haze dos rectos (3. l. 3.) y pues FGD . con DGB . haze dos rectos (1. l. 1.) serà DEF . igual a DGB . asimismo EFG . es igual a CDB . y DGB . a FEB . luego los triangulos DBG . FBE . son equiangulos: luego EB . a BF . es como GB . a BD . (2. l. 6.) y el rectangulo EBD . igual a FBG . (1. l. 6.) &c. LI.

LIBRO XI.

DE LOS SOLIDOS.



Neste libro se resume lo que trata Euclides en el 11. y 12. de los *Solidos*, y es todo lo que en la practica, y especulatiua puede ser de prouecho, porque lo concerniente a los cuerpos regulares es mas curioso, que necesario.

La mayor dificultad de los solidos està en que las figuras, como se forman en vna superficie plana, no pueden representar perfectamente la solidez de los cuerpos. El estudioso, pues, que entra de nuevo en esta materia, ha de considerar, que los cuerpos se descriuen en perspectiua, como si fueran transparentes, para que se puedan ver los lados, y angulos opuestos.

Si uade exemplo la figura primera, en que FC. representa vn *cuubo*, que se termina con seis superficies quadradas. La de enfrente, y su opuesta son BD. AE. las de los lados FB, EC.

la

la inferior, y superior $ACFD$. la base es AC . en que el cubo estriua.

Los angulos, y las lineas no se pueden representar como son, porq̄ DCB . y DCH . son angulos rectos iguales, y las rectas BC . y CG . son también iguales en el cubo, pero en la figura no; y así en los angulos, y lineas no se ha de atender a lo que se vé descrito, sino a lo que se supone, ò infiere por consecuencia necesaria de lo ya demostrado. Con esta atención creo no se ha de hallar mas dificultad en los solidos que en los planos.

Contiene este libro seis proposiciones.

Prop. 1. *Del concurso en los solidos.*

Prop. 2. *Del paralelismo en los solidos.*

Prop. 3. *De los planos en los solidos.*

Prop. 4. *De las partes de los solidos.*

Prop. 5. *De los solidos desemejantes.*

Prop. 6. *De los solidos semejantes.*

PROPOSICION I.

Del concurso en los solidos.

1. **S** I dos planos concurren, la comun seccion es linea recta.

2. **V** na recta està toda en un plano, y un triangulo, y dos rectas que se cortan.

3. **L** a perpendicular de un punto a un plano es unica.

4. **S** i una recta es perpendicular a otras dos, ò tres en un mismo punto, todas estas son de un plano perpendicular a la recta.

Demonstracion. fig. I.

E L plano triangular ABG . tiene por termino la recta BG . luego la recta BG . se puede ajustar a qualquiera superficie plana BE . (7. P.) y serà entonces BG . linea comun, ò comun seccion de los planos AC . y BE . aunque infinitamente se continuen.

(1. 2.) **L** a recta BG . està toda en el plano AC . porque se ajusta al plano por todas partes (7. P.) y afsi no puede estar parte en el plano, y parte superior, ò inferior a él.

Tambien un triangulo BCG . està todo en un plano, porque qualquier triangulo rectilí-

neo

neo es vna superficie plana, comprehendida de tres rectas.

Tambien dos rectas BC . CG . que se cortan en C . estàn en vn plano, porque si qualquiera otra BG . las corta, forman vn triangulo BCG . que es superficie plana.

3 Del punto sublime D . al plano inferior AC . no puede caer otra perpendicular, que DC . porque tirada qualquiera otra DH . y junta HC . serà HCD . vn plano (2. N.) y por ser el angulo DCH . recto (23. P.) serà DHC . agudo (3. l. 1.) luego sola DC . puede ser perpendicular.

Si el punto A està en el mesmo plano, AC . y AF . es perpendicular, serà tambien vnica, porque tirada qualquiera otra AR . si se junta FR . serà FRA . vn plano (2. N.) que si se imagina continuado, serà la comun seccion AB . linea recta (1. N.) luego porque el angulo FAB . es recto (23. P.) serà RAB . agudo (3. l. 1.) luego AF . es vnica perpendicular.

4 Si AG . GC . concurren en C . y GE . es perpendicular en el punto G . serà GE . perpendicular al plano AC . porque del punto G . la perpendicular al plano es vnica (3. N.) esta ha

de

de ser perpendicular a las rectas AG . GC .
(23. P.) luego si GE . es perpendicular a GA .
 GC . será GE . perpendicular del plano AC . en
que están las rectas AG . GC .

Si por el punto G . passa qualquier otra GB .
perpendicular a GE . estará GB . en el mesmo
plano que AG . GC . porque todas las rectas
que passan por G . perpendiculares a GE . for-
man vna superficie, a quien es perpendicular
 GE . luego porque GE . es perpendicular al pla-
no en que están AG . GC . (4. N.) estará BG . en
la mesma superficie plana que AG . GC .

PROPOSICION II.

Del paralelismo en los solidos.

DOs paralelas están en un mesmo
plano con qualquiera otra que las
corta.

2 Si dos rectas son perpendiculares a un pla-
no, serán paralelas.

3 Si dos rectas son paralelas, y la vna es per-
pendicular a un plano, tambien la otra.

4 Si dos rectas son paralelas a otra, serán
paralelas entre si, aunque no estén las tres en un
plano.

Q

De

Demonstracion. fig. 1.

1 **S**I a las paralelas $BL.CD.$ las corta qualquiera otra $BC.$ y la recta $BC.$ se considera mouer igualmente, passando $B.$ hasta $L.$ y $C.$ hasta $D.$ se formará la superficie plana, ò paralelogramo $BD.$ luego sus terminos, que son las paralelas $BL.CD.$ y las rectas $BC.LD.$ están en vn mesmo plano $BD.$

2 $BL.$ y $GE.$ son perpendiculares al plano $AC.$ juntando $GB.$ si se considera que por $GE.$ passa el plano $BE.$ perpendicular a $AC.$ y del punto $B.$ fale $NB.$ perpendicular a la comun seccion $GB.$ ferá $BN.$ paralela a $GE.$ (2. l. 1.) y perpendicular al plano $AC.$ (2 3. P.) y por ser la perpendicular vnica (1. l. 11.) ferá $BN.$ la mesma $BL.$ luego $BL.$ y $GE.$ son paralelas.

3 Si $GE.$ y $BL.$ son paralelas, y $EG.$ es perpendicular al plano $AC.$ tambien lo ferá $BL.$ porque considerando por $EGB.$ vn plano $BE.$ perpendicular a $AC.$ y $BN.$ perpendicular a la comun seccion $BG.$ ferá $BN.$ perpendicular al plano $AC.$ (2 3. P.) luego ferá paralela a $GE.$ (2. N.) y por ser $BN.$ $BL.$ paralelas a $GE.$ y porque $GB.$ las corta a todas, estarán todas en

en vn plano EGB. (1. N.) y ferà el angulo LB
G. el mesmo NBG. (2. l. 1.) luego LB. es la
mesma NB. (10. P.) y perpendicular al plano
AC.

4 Si BL. y CD. son paralelas a GE. tam-
bien lo feràn entre si, porque considerando el
plano AC. perpendicular a GE. tambien lo fe-
rà a BL. por ser paralelas BL. GE. y tambien a
CD. por ser paralelas CD. GE. (3. N.) luego
CD. BL. por ser perpendiculares al plano AC.
son entre si paralelas. (2. N.)

PROPOSICION III.

De los planos en los solidos.

1 **S**I una recta es perpendicular a un
plano, todos los planos que passan por
ella, son perpendiculares al otro.

2 Si la comun seccion de los p planos es perpen-
dicular a otro, tambien los planos son perpendicu-
lares; y al contrario.

3 Si dos angulos son paralelos, seràn igua-
les, y estàn en un plano, ò en planos paralelos.

4 Si dos planos son paralelos, tienen comun
perpendicular; y al contrario.

5 Si un plano corta dos planos paralelos, las
comunes secciones son paralelas.

O 2

6 Si

6 Si muchos angulos planos comprehenden un angulo solido, el mayor de todos es menor que todos los otros juntos, y todos menores que quatro rectos.

7 Si muchos planos paralelos comprehenden un solido paralelepipedo, los planos opuestos son paralelogramos iguales, y semejantes.

Demonstracion. fig. 1.

1 **L**A recta GE. es perpendicular al plano AC. y por GE. passa qualquier plano BE. digo que es perpendicular a AC. De qualquier punto L. en el plano BE. confiderefe LB. perpendicular a la seccion BG. luego porque los Angulos LBG. EGB. de vn plano son dos rectos, seràn LB. EG. paralelas (2.1.1.) y porque GE. es perpendicular al plano AC. tambien lo serà LB. (2.1.11.) luego todas las perpendiculares a la seccion seràn perpendiculares al plano AC. luego el plano BE. es perpendicular a AC. (23 P.)

2 GE. es comun seccion de los planos BE. CE. digo, que si GE. es perpendicular al plano AC. tambien los planos BE. EC. seràn perpendiculares al mesmo AC. porque BE. CE. passan por la perpendicular GE. luego ellos

ellos son perpendiculares al plano AC. (1. N.) Al contrario, si BE. CE. son perpendiculares a AC. del punto G. comun, confiderefe vna perpendicular en cada plano BE. CE. luego porque la perpendicular es vnica (1. l. 11.) será GE. comun a los dos planos, y será la comunfeccion perpendicular a AC.

3. Los angulos LED. BGC. sean paralelos, esto es, la recta LE. a BG. y ED. a GC. digo que son iguales, aunque están en diferentes planos; y si los planos son diferentes, serán paralelos.

Tomense EL. ED. GB. GC. iguales; y porque EL. BG. son paralelas iguales, serán LB. EG. paralelas iguales, y tambien DC. EG. (7. l. 1.) luego BE. CD. son paralelas iguales a GE. y entre si (2. l. 11.) luego LD. BC. son paralelas iguales (7. l. 1.) luego los tres lados LE. ED. DL. son iguales a los tres BG. GC. CB. y así el angulo LED. es igual a BGC. (4. l. 1.) y si los planos LED. BGC. son diferentes, porque los lados de los triangulos que comprehenden los planos LED. BGC. son paralelos, serán los planos paralelos.

4. Los planos ED. AC. son paralelos; digo,

go,

go, que si BL . es perpendicular a AC . tambien lo serà a FD . porque tomando qualesquiera puntos G . C . y considerando perpendiculares GE . CD . seràn paralelas a BL . y estaràn en vn plano (2.l.11.) y seràn iguales las distancias BL . GE . CD . de los planos paralelos AC . FD . (23.P.) luego LC . LG . son paralelogramos, y el angulo BLD . es recto igual a BCD . y BLE recto igual a EGB . (7.l.1.) luego porque BL . es perpendicular a LE . LD . serà tambien perpendicular a lplano FD . (1.l.11.) luego BL . es perpendicular comun a los planos paralelos AC . FD . Asimismo el plano BE . porque passa por el perpendicular comun BL . serà perpendicular a los dos planos AC . FD . &c. Al contrario, si BL . es perpendicular comun a los planos AC . FD . considerando GE . ò CD , paralela a BL . serà CD . perpendicular a los dos, y estaràn BL . CD . en vn plano (2.l.11.) luego por ser los angulos BD . y LC . rectos iguales, es BD . paralelogramo, y BL . CD . iguales distancias; y asimismo GE . (7.l.1.) luego AC . FD . son equidistantes.

5 FD . EC . son dos planos paralelos, y BE . les corta: digo, que las secciones BL . GE .
son

son paralelas, considerando AC. perpendicular a la comun seccion BL. seràn los planos BF. BE. perpendiculares a AC. (2. N.) y tambien BF. CE. por ser paralelos (4. N.) luego porque BE. CE. son perpendiculares a AC. serà la comun seccion GE. perpendicular a AC. (2. N.) luego porque las dos secciones BL. GE. son perpendiculares al plano AC. seràn paralelas (2. l. 11.)

6 Si el angulo PXQ. es igual a los dos QXS. SXZ. se ajustará con ellos, y formará vna superficie plana: luego no podrán comprehender espacio folido. Assimesmo si los angulos X. son iguales a quatro rectos, forman vna plana superficie (1. l. 1.) luego no comprehenderàn espacio folido. Pero si los angulos QXS. SXZ. son mayores que PXQ. y los tres, menores que quatro rectos, imaginando cortado el espacio PXZ. si se juntan XZ. XP. se releuará el punto X. y formará el angulo folido X.

7 En el folido FC. los planos FD. AC. paralelos se cortan con el plano EC. luego las secciones ED. GC. son paralelas (3. l. 11.) assimesmo seràn EG. DC. paralelas, por ser los

los planos FG.LC. paralelos, y cortarles EC. luego EC. es paralelogramo; lo mismo se demostrarà de FB. &c. luego los planos opuestos son paralelogramos.

La igualdad se prueba, porque los angulos EDC.FLB. son paralelos, luego s̄n iguales (3. l. 11.) y asimismo AFL.GED. &c. Tambien los lados CD.BL. por ser lados opuestos del paralelogramo BD. (7. l. 1.) y asimismo GE.AF. como tambien ED.FL. y GC. AB. luego los paralelogramos FB. EC. porque tienen iguales lados, y angulos, se ajusteràn: luego son iguales, y semejantes (1. P.) lo mismo es de qualesquiera dos opuestos.

PROPOSICION IV.

De los segmentos solidos.

1 Si un paralelepipedo, prisma, cilindro, ò piramide, se parte con un plano paralelo a la base, la seccion es semejante a la base.

2 Y los segmentos solidos del paralelepipedo, prisma, ò cilindro son proporcionales a los segmentos de los lados.

3 Si un paralelepipedo se parte con un plano por los angulos opuestos, seràn los segmentos dos prismas iguales.

4 Qual-

4 *Qualquier prisma poligono se divide en prismas triangulares, que son dos menos que sus lados, y lo mismo es de las piramides poligonas.*

5 *Si una piramide tiene la base paralelograma, se parte por el vertice, y angulos opuestos igualmente.*

Demonstracion. fig. 3.

EN el paralelepipedo AG . el plano KM . es paralelo a la base BD . luego AL . será paralelepipedo (24. P.) y el plano KM . igual, y semejante a BD . (3. l. 11.)

En el prisma $BADHEF$. se demostrarán iguales, y paralelas BA . KL . y AD . IM . y DB . MK . como en la prop. 3. N. 7. luego por ser los tres lados KI . IM . MK . iguales a BA . AD . DB . serán en todo iguales, y semejantes los triangulos BAD . KIM . (4. l. 1.) lo mismo es en qualesquiera otros prismas de bases poligonas, &c.

En la piramide $VXZD$. fig. 2. siendo el plano QRT . paralelo a VXZ . son VX . QR . paralelas, y VZ . QT . y ZX . TR . (3. l. 11.) luego como DR . a DX . así RQ . a XV . y QT . a VZ . y RT . a XZ . (2. l. 6.) luego porque los tres lados del triangulo QRT . son proporcionales

P a

a los tres de VXZ . serán los triangulos semejantes (2. l. 6.) lo mesmo se demostrarà de los triangulos RST . XYZ . y de los quadrilateros SQ . YV . y en todas las piramides de bases poligonas, &c. *fig. 3.*

2 En el paralelepipedo AG . es el plano PN . paralelo a la base CA . y son CP . PG . iguales: luego en el solido AP . son iguales, y semejantes los planos CA . PN . y tambien PN . GE . (3. l. 11.) y todos los planos del solido AP . iguales, y semejantes a los del solido NG . luego NG . se ajustará con AP . y así son iguales. (1. P.) así mismo será AG . duplo de AP . y si CP . se divide igualmente en L . y se considera el plano LI . será AL . igual a IP . luego IG . será triplo de AL . y AG . quadruplo de AL . luego si los lados CP . PG . son iguales tambien los solidos AP . NG . y si el lado CG . es duplo de CP . tambien el solido AG . de AP . si el lado LG . es triplo de CL . tambien el solido IG . de AL . si el lado CG . es quadruplo de CL . tambien AG . de AL . luego los segmentos solidos tienen entre si la razon que los segmentos de los lados.

La mesma induccion se haze en el prisma $ABDHEE$. cortado con los planos paralelos NOQ . IKM . y lo mesmo es en los prismas de

ba

bases poligonas, y en los cilindros.

3 El paralelepipedo AG . se parte igualmente con el plano BH . por los angulos opuestos BH . y DF . porque si se considera qualquier plano IL . paralelo a la base AC . serà IL . igual a CA . (1.N.) y KMI . igual a KML . (7.l.1.) lo mesmo es en el plano NP . y en qualquiera parte que se considere vn plano paralelo a CA . luego todo el prisma $ABDHFE$. es igual a $BCDHF$. porque se componen de iguales planos siempre.

4 El plano $PQRST$. fig. 2. es base de vn prisma: considerando los planos QH . QG . quedará el prisma poligono diuidido en tres prismas triangulares, &c. Lo mismo es de las Piramides poligonas.

5 La base de la piramide $VXYZD$. es vn paralelogramo; digo, que el plano DXZ . la parte igualmente, porque considerando qualquier plano SQ . paralelo a la base YV . en qualquiera parte que se considere, serà la seccion SQ . paralelograma, semejante a YV . (1.N.) y los triangulos QRT . RST . iguales, (7.l.1.) luego la piramide triangular $XYZD$. es igual a $VXZD$. porq̄ se cõponen de planos iguales siempre.

PROPOSICION V.

De los Solidos desemejantes.

1. **Q**ualquiera prisma triangular es medio paralelepipedo.

2. **Q**ualquiera piramide es la tercera parte de un prisma de la misma base, y altura, y la piramide conica de un cilindro.

3. Los paralelepipedos, prismas, y cilindros de igual altura tienen la razon que las bases; tambien las piramides entre si.

4. Los mismos si tienen igual base, tienen la razon que sus alturas.

5. Los mismos si tienen la base, y altura reciprocas, son iguales, y al contrario.

6. Si de tres rectas proporcionales se forma un paralelepipedo, será à igual al que se formare de la media proporcional con igual angulo.

CONSECTARIO.

Lo mesmo es de los prismas triangulares, ò piramides trilateras, ò quadrilateras.

Demonstracion.

1. **S**I vn piramide triangular BCE ED . fig. 1. y su base BCG . si continuado el plano, se considera BA . paralela a CG . y GA . a CB . y AE . paralela a BL . y GE .

(2.)

(2. l. 11.) será FC . paralelepipedo, y el plano BE . le parte igualmente (4. l. 11.) luego el prisma $BCGELD$. es medio paralelepipedo.

2. Sea vna piramide triangular $ABCE$. fig. 2. y considerando CD . AF . paralelas a BE . y el plano FED . paralelo a BCA . se formará vn prisma: y el solido añadido es la piramide $FDCAE$. que por ser la base FC . paralelograma la parte igualmente el plano ADE . (4. l. 11.) luego las piramides $FADE$. $ACDE$. son iguales: asimesmo, porque $BCDEA$. es piramide, y su base BD . paralelograma la parte igualmente el plano ECA . (4. l. 11.) luego las piramides $CDEA$. $CBEA$. son iguales: luego tambien son iguales entre si $CBAE$. FD AE . (3. P.) luego la piramide $CBAE$. es la tercera parte del prisma $BCAFED$.

Lo mesmo es de las piramides poligonas, porque assi ellas, como los prismas se diuiden en triangulares (4. l. 11.) y como la base circular se considera como poligono de infinitos lados, milita lo mismo en la piramide conica, y en el cilindro, y se demostrará otra vez

(3. N.)

3. En la fig. 3. los paralelepipedos RZ . AP .

AP. están en vn mesmo plano RC. y tienen igual altura, esto es, se terminan en un mesmo plano XP. digo, que AP. a RZ. tiene la mesma razon que las bases AC. a RT. porque considerando qualquier plano SL. paralelo a las bases, que corte por qualquiera parte a los dos solidos el plano IL. será igual a AC. y SV. a RT. (4. l. 11.) luego IL. a SV. tendrá la mesma razon que AC. a RT. (2. l. 5.) lo mesmo se demostrará de qualesquiera secciones que nacen de qualquier plano paralelo a las bases: luego la suma de todas las secciones del solido AP. a las del solido RZ. (que por estar entre dos planos paralelos, no pueden ser mas en vno que en otro) tendrá la mesma razon que la base CA. a RT. (4. l. 5.) luego los paralelepipedos de igual altura tienen la razon que las bases.

Esta demonstracion es general, aunque los solidos no sean semejantes, ni de vna especie, pues en lugar de RZ. se puede substituir vn prisma, ò cilindro de igual base.

De las piramides entre si se demostrará lo mesmo, porque siempre las secciones se demostrarán semejantes, y proporcionales a las ba-

bases (4. l. 11.) luego siendo las bases iguales, serán ellas siempre iguales (2. l. 5.)

De donde se infiere, que como vn prisma, y cilindro, que tienen igual base, y altura son iguales; y tambien las piramides que tienen iguales bases, y alturas, siendo la piramide poligona, la tercera parte del prisma (2. N.) lo será tambien del cilindro: luego la piramide circular que es igual a la poligona, será tambien la tercera parte así del prisma, como del cilindro.

4 Si las bases RT . AC . son iguales, tendrá el solido RZ . a AG . la razon que la altura RX . a AE . porque considerando el plano XP . paralelo a RC . serán RZ . AP . iguales (3. N.) luego RZ . a AG . será como AP . a AG . (2. l. 5.) luego porque AP . a AG . es como la altura AN . ó RX . a AE . (4. l. 11.) será RZ . a AG . como RX . a AE .

5 Si las bases, y alturas son reciprocas, esto es, YT . a AC . como CG . a TZ . serán los solidos YZ . AG . iguales, pues continuando el plano pZ . que pP . sea vn mesmo plano paralelo a las bases, tendrá YZ . a AP . la razon que YT . a AC . (3. N.) esto es, que CG . a TZ , ó CP .

y

y pues AG . a AP . tiene tambien la razon que CG . a CP . ò TZ . (4. l. 11.) luego porque YZ . y AG . tienen vna misma razon con AP . son iguales entre si (2. l. 5.)

Al contrario, si YZ . y AG . son iguales, ferà YZ . a AP . como AG . a AP . (2. l. 5.) esto es, como CG . a CP . (4. l. 11.) y pues YZ . a AP . es como YT . a AC . (3. N.) ferà YT . a AC . como CG . a CP . ò TZ . (1. l. 5.) luego las bases, y alturas son reciprocas. Lo mismo es en los prismas, y cilindros, y en las piramides, que son sus terceras partes.

6 Sean tres continuas AB . BC . CG . y Yq . qT . TZ . iguales a la media BC . y los paralelepipedos AG . YZ . con todos sus planos tengan iguales angulos planos, y solidos; digo, que son iguales, porque AC . a YT . es como AB . a Yq . (1. l. 6.) que es AB . a BC . tambien TZ . (que es BC .) a CG . es como AB . a BC . pues son continuas AB . BC . CG . luego por ser reciprocas las bases, y alturas AC . a YT . como TZ . a CG . son iguales YZ . AG . (5. N.)

El *Confectario* es claro, porque los prismas triangulares son medios paralelepipedos (1. N.) y las piramides vn tercio de los prismas

mas

mas (2. N.) luego como el todo al todo, así la parte a la parte (5. l. 5.)

PROPOSICION VI.

De los solidos semejantes.

1 **L**os semejantes a otro, io son entre si, y se resuelven en partes semejantes.

2 Tienen la razon triplicada de los lados homologos, y las esferas de los radios.

3 Formados sobre rectas proporcionales, son proporcionales, y al contrario.

4 Los que están dentro de otro con un angulo comun tienen los lados, y planos paralelos, y comun diagonal, y al contrario.

5 El plano que passa por los angulos, y lados comunes haze segmentos semejantes, y los complementos proporcionales a los segmentos.

Demonstracion. fig. 4.

1 **L**a primera parte puede passar por Axioma; pero quien quisiere, la podrá demostrar como en el lib. 6. prop. 4. n. 1.

2 Sean dos paralelepipedos AH. RC. semejantes. Considerense juntos los angulos iguales en B. de suerte que AB. BC. formen vna recta linea, y tambien EB. BD. y los planos AD. EC. formen vn mesmo plano, y los otros

Q

pla-

planos continuados, como se vé en la figura, y seran quatro paralelepipedos RC. BM. CH. HA. la razon de RC. a AH. es compuesta de RC. a BM. y de BM. a CH. y de CH. a HA. (21. P.) la razon de RC. a BM. es como GB. a BF. la de BM. a CH. es como EB. a BD. y la de CH. a HA. como CB. a BA. (4. l. 11.) luego porque la razon de GB. a BF. y EB. a BD. y CB. a BA. es vna mesma, por ser lados de los solidos semejantes RC. HA. (23. P.) será la razon de RC. a HA. compuesta tres vezes de vna mesma razon GB. a BF. luego es triplicada de GB. a BF. (21. P.) que son los lados homologos.

De los prismas, y cilindros, se concluye lo mesmo, porque son iguales a los paralelepipedos de igual base, y altura.

De las piramides, porque son la tercera parte de los prismas, y cilindros.

De los solidos regulares, ò irregulares, porque se resueluen en piramides semejantes.

De las esferas, porque se haze induccion de los solidos inscritos, como de los planos inscritos en el circulo, lib. 6. p. 5.

De donde se infiere, q̄ si fueren quatro con-

tinuas P. Q. X. Z. el solido descrito sobre P. al semejante descrito sobre Q. tendrá la razón q̄ P. a Z. que es triplicada de P. a Q. (21. P.)

3 Si son proporcionales P. a Q. como X. a Z. y sobre P. Q. se descriuen dos solidos semejantes, y sobre XZ. otros dos semejantes entre si, aunque no sean semejātes a los otros, serán proporcionales; porque el 1.º al 2.º tiene la razón triplicada de P. a Q. y el 3.º al 4.º triplicada la de X. a Z. (2. N.) luego porque la razón de P. a Q. se supone ser la mesma que de X. a Z. será el 1.º al 2.º como el 3.º al 4.º (1. l. 5.) y al contrario, si el 1.º al 2.º es como el 3.º al 4.º porque el 1.º al 2.º tiene la razón triplicada de P. a Q. y el 3.º al 4.º triplicada la de X. a Z. luego P. a Q. será como X. a Z. (1. l. 5.) y si P. Q. X. Z. son continuas, tambien los quatro solidos, si todos son entre si semejantes, serán cōtinuos; pues por tener la razón triplicada de vna mesma, tendrán vna mesma razón (1. l. 5.)

4. y 5. La demonstracion es con el mismo estilo que la del lib. 6. p. 4. y la dexo por ser facil la aplicacion, y el theorema menos necessario que los otros.

Fin de la Geometria especulativa.

Q2

GEO.

GEOMETRIA

PRACTICA.



Geometria practica es ciencia practica de la quãtidad continua. Las propficiones puramente especulatiuas se llaman *Theoremas*: las que enseñan el modo de poner algo en execucion, se dizen *Problemas*. Con la inteligencia de las especulaciones antecedentes serã facil la execucion de las siguientes practicas. Para mas claridad se reduce todo el tratado a ocho especies de Problemas.

- Prob. 1. *De las rectas angulares, y paralelas.*
- Prob. 2. *Diuision, y proporcion de las rectas.*
- Prob. 3. *De los triangulos, y paralelogramos.*
- Prob. 4. *Del circulo.*
- Prob. 5. *De las figuras inscritas, y circunscritas.*
- Prob. 6. *De la proporcion, suma, diferencia, y transformacion de las figuras.*
- Prob. 7. *De las superficies, y solidos, y sus medidas.*
- Prob. 8. *De los problemas no resueltos.*

PROBLEMA II.

De las rectas angulares, y paralelas.

1. **P**Or un punto dado en un recta, tirar otra que haga un angulo dado.

2. Dividir qualquier angulo en dos partes iguales con una recta.

3. Hallar el valor de un angulo, y formante de qualesquiera grados.

4. Tirar una paralela a otra recta, dado el punto, o la distancia.

5. Por un punto dado fuera de una recta, tirar otra que haga un angulo dado.

6. De un punto dado, tirar una perpendicular, y con ella partir una recta igualmente.

7. Instrumento para los angulos rectos. Vea-se de los Angulos el Problem. 4. p. 2. y 6.

Pratica I.

Sea la recta dada AB. el punto A. y el angulo dado EDE. puesta la punta del compàs en D. con qualquiera abertura formese el arco EF. y con la mesma abertura formese el arco BC. tomando por centro el punto dado A. luego tomando con el compàs el arco EF. se cortará BC. su igual; y tirando la recta AC. será el angulo CAB. igual a EDE. porque sus me-

di.

didadas $CB.FE.$ son iguales (10. P.)

Pratica 2.

Sea el angulo que se ha de diuir $BAC.$ puesto el compàs en $A.$ descriuase qualquier arco $BC.$ y con la mesma abertura desde los puntos $B.$ y $C.$ descriuanse dos arcos, que se crucen en $D.$ y la recta $DA.$ partirà igualmente el angulo, porque los tres lados $DB. BA. AD.$ son iguales a los tres $DC. CA. AD.$ luego el angulo $BAD.$ es igual a $CAD.$ (4. l. 1.)

Pratica 3.

Con vn semicirculo de alaton, carton, ò talco diuidido en 180. grados $BOC.$ se hallarà facilmente el valor de los angulos. Sea el angulo dado $BAD.$ puesto el centro en el punto $A.$ y el radio sobre la recta $AB.$ Si la recta $AD.$ corta 60. grados. serà el angulo $BAD.$ de 60. grados; y $BAF.$ de 120. &c. Para formar el angulo $BAD.$ de 60. grados, puesto el semicirculo, se tirarà la recta $AD.$ por los 60. grados, &c. Este instrumento es muy vtil para la practica.

Pratica 4.

Sea la recta dada $AB.$ y el punto $C.$ desde el punto $C.$ tirese qualquiera recta $CB.$ que cor-

te a BA. y del punto B. formese vn arco AH. y con la mesma abertura del punto C. formese DE. tomando el arco AH. y cortando DE. su igual, serà CE. paralela a AB. porque los angulos alternos ABC. BCE. son iguales (2. l. 1.) por ser iguales medidas AH. DE. (10. P.)

Si la distancia dada es XZ. tomando en la recta AB. qualquier punto A. se descriuirà desde A. el arco G. y del punto B. el arco F. con la mesma distancia XZ. y aplicando la regla a los arcos, se tira la recta FG. que serà paralela a BA. porque las distancias AG. BF. son iguales, y son la mesma distancia XZ. Quanto mas apartados se tomaràn los puntos A. B. saldrà la operacion mas exacta.

AG. BF.

Pratica 5.

Sea la recta dada BA. y el punto fuera D. se ha de tirar DA. que el angulo DAB. sea igual al dado G. Tomese en la recta BA. qualquier punto C. y hagase el angulo BCE. igual a G. (p. 1.) y por el punto D. tirese DAF. paralela a EC. (p. 4.) y serà el angulo DAB. igual a ECB. (13. P.) luego tambien a G.

Pratica 6.

Si el punto C. està en la recta AB. tomense

CA.

CA. CB. iguales: y de los puntos A. y B. con qualquiera distancia formense dos arcos, que se crucen en E. junta EC. será perpendicular, y los angulos ACE. ECB. rectos, porque los lados EC. CA. AE. son iguales a EC. CB. BE. luego los angulos ECA. ECB. son iguales (4. l. 1.) y rectos (11. P.)

Si el punto D. está fuera de la recta AB. puesto el compàs en D. con qualquiera distancia, se descriue el arco BA. que corte a la recta AB. puesto el compàs en A. y B. con la mesma distancia, ò con qualquiera otra se descriuen dos arcos, que se crucen en G. y será DG. perpendicular, porque parte el angulo ADB. igualmente (2. p.) luego por ser ADB. isocetes, será DC. perpendicular (5. l. 1.)

Si la recta AB. se ha de partir igualmente, puesto el compàs en A. y B. se descriuen con qualquiera distancia dos arcos arriba, y dos abaxo que se crucen en E. y G. y luego EG. será perpendicular como antes: y los segmentos AC. CB. iguales (5. l. 1.)

Si el punto B. está en el extremo de la linea, puesto el compàs en B. se tomará qualquiera distancia BD. con que D. este fuera de la linea, y def-

descrito el arco ABF . se tirará ADF . y será FB . perpendicular, porque el ángulo FBA . en el semicirculo ABF . es recto (3. l. 3.)

Si el punto F . está fuera de AB . tirese qualquiera recta FA . y diuidida igualmente en D . se descriuirá de allí el semicirculo ABF . y la recta BF . será perpendicular, porque el ángulo FBA . del semicirculo es recto (3. l. 3.)

Pratica 7.

El instrumento mas comodo para los ángulos rectos, y lineas perpendiculares, es la esquadra ABC . de bronze, madera, ò carton; porque formado vna vez el ángulo recto ABC . aplicando el lado AB . a la linea, el lado CB . sirve de regla para tirar la perpendicular CB . y conuiene que el ángulo interior tambien sea recto para muchas operaciones.

PROBLEMA II.

Division, y proporcion de las rectas.

1 **D**iuidir una recta en qualesquiera partes.

2 Regla para la division igual.

3 Diuidir una recta en partes semejantes a otra.

4 Dada una recta, añadirle otra, que la da-

R

da

da sea media entre la añadida, y la compuesta, y dividir una dada en media, y extrema razon.

Confectario, dada la media, y la diferencia de las extremas, hallar las tres proporcionales continuas.

5 Dadas dos lineas, hallar la media proporcional.

6 Dadas dos lineas, hallar la tercera proporcional.

7 Dadas tres lineas, hallar la quarta proporcional.

Pratica 1.

Si se ha de diuidir la linea AB. en cinco, ò mas partes, tirese AC. perpendicular (1. p. 6.) y tambien BD. tomense en AC infinita, qualesquiera cinco partes iguales, y las mesmas en BD. y tirando las paralelas CD. OH. &c. como CO es la quinta parte de CA. assi OZ. es la quinta parte de AB. (2. l. 6.) luego quedará AB. diuidida en cinco partes. Assimismo qualquiera recta que se tire CB. quedará diuidida en otras cinco partes, y ferá CZ. la quinta parte de CB. &c.

Pratica 2.

Tomese vna regla AB. de bronze, ò box, ò

mar-

marfil, y diuidida en 100. partes, ò en 1000. con el artificio precedente, seruirà para la diuision de qualquiera otra linea, como si de la linea MN. se huieren de tomar de 100. partes las 60. tirese CD. igual a AB. y del punto C. descriuase el arco DE. tomese MN. y hagase su igual DE. tirese luego CE. y tomando de la regla AB. las 60. partes, se cortarà CE. su igual y descriuirà el arco EG. luego como CE. es las 60. partes de CD. assi EG. serà las 60. partes de DE. ò MN. (2.l.6.) Esta regla siue en lugar de Pantometra.

Pratica 3.

3 La linea CD. està diuidida en E. G. y se ha de diuir AB. en la mesma razon. Del punto C. tirese CE. que forme qualquier angulo, y sea igual a BA. juntando DE. se tirarán GO. FH. paralelas a DE. (1.p.4.) luego por ser paralelas DE. GO. FH. quedarà CE. que es AB. diuidida como CD. (2.l.6.)

Pratica 4.

4 Sea la recta dada AB. tirese AC. perpendicular su igual: diuidida AC. igualmente en E. (1.p.6.) descriuase el circulo AGCD. y tirese BED. y del punto B. el arco GF. y estarà

todo hecho; porque siendo EAB . angulo recto, es BA . tangente (7.1.3.) y media proporcional entre BG . BD . (6.1.6.) luego porque DG . es igual a CA . que es AB . será DG . media entre BG . y BD . luego DG . que es la dada AB . es media entre la añadida GB . y la compuesta BD .

Mas: porque AF . es diferencia entre BF . ò BG . y BA . y tambien BF . ò BG . es diferencia entre BD . y DG . ò AB . siendo BG . ò BF . BA . BD . tres continuas tendrán las diferencias AF . FB . la mesma razon (4.1.5.) luego AF . a FB . es como BF . a BA . luego BA . está diuidida en F . en media, y extrema razon (21.P.)

Dada la media AB . y la diferencia de las extremas AC . forme esta vn angulo recto con AB . y diuidida igualmente en E . descriuase el circulo AGC . tirada la recta BED . serán tres proporcionales GB . BA . BD . (6.1.6.) y DG . que es AC . es la diferencia de las extremas CB . y BD .

Pratica 5.

Sean dadas AB . EF . continuese AB . que BC . y EF . sean iguales: diuida AC . igualmente en O . (1.p.6.) del centro O . se descriue el semicirculo ADC . y tirada la perpendicular BD .

BD. serà media proporcional entre AB. y BC. que es EF. (6.1.6.)

Otro modo, sean las dadas AC. EF. y tomese CB. igual a EF. tirado el circulo ADC. y la perpendicular BD. se juntarà DC. y serà media entre AC. CB. porque el angulo del semicirculo ADC. es recto (3.1.3.) luego DC. es media entre BC. CA. (3.1.6.)

Practica 6.

Sean dadas BC. y BA. buscase la mayor BD. del punto B. se descriue el arco CF. tirese AO. perpendicular, y con qualquiera distàcia AO. se descriue el circulo EAF. que corte al arco CF. y serà BFE. la tercera proporcional, porque BC. que es BF. BA. BE. son continuas (6.1.6.)

Si se dà la mayor DB. se descriue el arco DE. y tirando BE. serà la menor BF.

Otro modo. Sean dadas la menor GH. y la media HM. formen qualquier angulo MGH. tirando MG. se harà el angulo HMN. igual a MGH. y serà HN. la tercera, y mayor, porque son continuas GH. HM. HN. (3.1.6.) Si se dà NH. HM. tirada MN. se harà el angulo HMG. igual a MNH. y serà HG. la tercera menor (3.1.6.)

Pra-

Pratica 7.

Sean dadas AB. CB. BE. formen qualquiera angulo ABD. juntese CE. y tirese AD. paralela a CE. (1. p. 4.) luego seràn como BC. a BA. afsi BE. a BD. que es la quarta (2. l. 6.) Si fuere dada BD. se junta AD. y tirada CE. paralela, serà BE. la quarta proporcional.

PROBLEMA III.

De los triangulos, y paralelogramos.

- 1 **H**Azer un triangulo equilatero de una recta.
- 2 Hazer un triangulo isocetes de dos rectas.
- 3 Hazer un triangulo isocetes, que cada angulo sobre la base sea duplo del vertical, o un tercio
- 4 Hazer un triangulo rectangulo de dos rectas.
- 5 Hazer un triangulo escaleno de tres rectas.
- 6 Hazer un paralelogramo dados los lados, y el angulo.
- 7 Hazer un triangulo, ò paralelogramo, ò qualquiera figura semejante a otra.

Pratica 1.

1 Sea la recta dada AB. con esta distancia desde A. y B. se forman dos arcos, que se cruzan

zan en C. el triangulo ABC. serà equilatero, porque AB. BC. CA. tienen vna mesma medida, y abertura de compàs.

Pratica 2.

Sean las rectas AB. DE. del punto A. descriuase el arco BC. y tomando con el compàs DE. se pasiarà desde B. hasta C. y el triangulo BAC. serà isocetes, porque los lados AB. AC. son radios iguales: y BC. es igual a DE. &c.

Pratica 3.

Dada la recta BD. ò tomada al arbitrio, añadasele DC. que sean continuas CD. DB. BC. (2. p. 4.) sobre BC. formese el triangulo isocetes, que BF. FC. sean iguales a BD. y tirada FD. serà FBD. el triángulo primero, y BFC. el segundo. *Demonstracion.* Porque BD, ò BF. es media entre DC. CB. es el angulo DEC. igual a B. (3. l. 6.) y pues B. y C. son iguales por ser BFC. isocetes (5. l. 1.) serà DEC. igual a C. luego porque el externo FDB. es igual a DEC. y C. (3. l. 1.) serà duplo de C. esto es, de B. luego FDB. BFD. que son iguales (5. l. 1.) son duplos de B. luego si a BFD. le añadimos DEC. igual a B. serà todo BFC. triplo de B. y tambien de C. que es igual a B.

B.

Prac.

Pratica 4.

Sean las dos rectas dadas AC . DE . que han de comprehender el angulo recto. Hagase CB . perpendicular a CA . y sea igual a DE . junta BA . fera ABC . el triangulo.

Si se dà la base AB . y el vn lado DE . diuidida AB . igualmente en O . descriuase el semicirculo ACB . y tomando BC . igual a DE . juntense BC . CA . el triangulo ABC . fera rectangulo en el semicirculo (3.1.3.

Pratica 5.

Sean las tres lineas dadas AB . C . D . y del punto A . con la distancia C . descriuase el arco EG . luego del punto B . con la distancia D . se descriua el arco FG . que se crucen en G . y juntas AG . BG . seràn iguales a C . y D . y BA . la mesma.

Pratica 6.

Dada la recta GH . para formar vn quadrado, que deue tener el angulo recto, tirese HM . perpendicular (1. p. 6.) igual a GH . y con la mesma distancia de M . y G . se descriuen dos arcos, que se crucen en O . tiradas OM . OG . fera OH . quadrado, porque todos los lados son iguales a GH . y los angulos rectos.

El

El rhombo se describe de la misma suerte, con que el angulo H. sea obliquo igual al angulo dado.

El rectangulo oblongo dadas AB. BC. hagase BC. perpendicular (1. p. 6.) y del punto A. con la distancia BC. se describe vn arco, y del punto C. con la distancia AB. otro, que se cruzan en F. tiradas FC. AF. serà BF. el rectangulo.

El rhomboide se forma de la misma suerte, con que el angulo ABE. sea obliquo, igual al dado, y EA. serà el rhomboide de AB. BE. &c.

Pratica 7.

Dado el triangulo ABE. se ha de formar otro semejante sobre vna recta igual a XZ. Tomese AC. igual a XZ. continuando si fuere menester a AB. y tirese CD. paralela a BE. (1. p. 4.) y serà el triangulo ACD. semejante a ABE. (2. l. 6.)

Si es el trapezio dado BF. tirese el diametro AED. y CD. paralela como antes: y DH. paralela a EF. y continuando si fuere menester el lado AFH. serà CH. trapezio semejante a BF. (4. l. 6.) lo mesmo es del paralelogramo.

Si la figura es ABEO. tirense las diagonales AED. AFH. y tomando AC. igual a la da-

S da

dada XZ. se harà CD. paralela a BE. y DH. a EF. y HG. a FO. con q̄ ferà la figura ACDHG. semejante a ABEO. (4. l. 6.) y tendrá el lado AC. igual al lado XZ.

PROBLEMA IV.

Del círculo.

1 **D** Escribir un círculo por dos, ò tres puntos, hallar el centro, y valor de un arco, y dividirlo en dos partes iguales.

2 Sobre una recta, ò dado el círculo, hallar un arco capaz de un ángulo dado.

Confectario. Describir un ángulo dado sobre una recta, que toque a otra línea dada.

3 Cortar de un círculo un arco semejante a otro dado.

4 De un punto dado tirar una tangente a un círculo dado, ò describir un círculo que toque a una recta dada.

5 De un punto dado interior, ò exterior describir un círculo que toque a otro.

6 Sobre una recta finita describir un arco, que toque a otra infinita dada.

Confectario. Sobre una recta formar el ángulo mayor que puede tocar otra recta infinita.

7 Por un punto dado tirar una recta dentro del círculo igual a otra dada.

Pra-

Pratica 1.

Los dos puntos dados son M. S. abriendo el compàs a la distancia que ha de seruir de radio, desde M. y S. se formaràn dos arcos, que se crucen en O. y serà el centro de donde se descriuirà el circulo AMS.

Los tres puntos dados son A. B. C. cõ qualquiera distancia desde A. y B. se descriuen dos arcos q se crucen en E. y otros dos en G. ò Q. luego desde B. y C. se hazen otros dos en D. y F. con la mesma, ò qualquiera otra distancia: tirando las rectas DEO. MOG. que se crucen en O. serà O. centro del circulo, y alargado el compàs hasta C. se descriua CBARC. Porque DO. EO. son perpendiculares a las cuerdas CB. BA. y las parten por medio (1. p. 6.) luego pasan por el centro (2. l. 3.) y assi el punto comun O. serà el centro.

El arco dado es ABC. tomense tres qualesquiera puntos A. B. C. y se hallarà el centro O. como antes, y se acabará el circulo.

Si el arco dado es AB. y se ha de partir por medio, tirese la recta EG. como antes, y porque es perpendicular, y parte igualmente a BA. (1. p. 6.) partirà tambien igualmente el arco
(2. l. 3.)

Para el valor del arco MS . se hallará primero el centro O . y pues el arco MS . es medida del angulo MOS . (10. P.) se hallará el valor del angulo MOS . (1. p. 3. que es el arco MS .

Pratica 2.

Dada la recta AB . y el angulo CDE . del centro D . descriuase qualquier arco CEF . y tomando EF . igual a CE . se juntarán CF . FD . Hagan se los angulos ABG . GAB . iguales a CFD . (1. p. 1.) y del concurso G . se descriue el arco ANB . digo que tomando en la circunferencia a qualquier punto N . será el angulo ANB . igual al dado CDE . porque el angulo ANB . es la mitad del angulo AGB . (3. l. 3.) luego es la mitad de CFD . ò igual a CDE .

Dado el circulo, de qualquier punto N . tirese qualquiera recta NB . y hagase el angulo BNA igual a CDE . el arco ANB . es capaz del angulo dado, porque todos serán iguales a BNA . (3. l. 3.) que es CDE .

Confectario. La otra recta dada sea MN . descrito el arco ANB . capaz del angulo CDE . el angulo ANB . toca a la recta MN . (17. P.) y es igual a CDE . lo mesmo será del angulo AMB . si se tiran las rectas AM . MB . si el circulo no

corta a la recta MN. serà imposible el caso. Lo mesmo es de la curua PN.

Pratica 3.

El circulo es FGH. y el arco AB. busquense sus centros C. O. sino estan dados (4. p. 1.) tirada CF. se cortará CE. igual a OB. y descrito el arco ED. se tomará igual a BA. tirada CDG. serán semejantes los arcos GF. DE. AB. porque son medida de vn mesmo angulo GCF. (10. P.)

Pratica 4.

Dado el circulo BFG. y el punto B. en la circunferencia: tirese el radio CB. y su perpendicular BA. (1. p. 6.) y serà tangente (7. l. 3.)

Si el punto A. está fuera, pasc AC. por el centro, y diuidida CA. igualmente en D. se descriua el semicirculo CBA. y serà el angulo CBA. recto (3. l. 3.) luego AB. tangente (7. l. 3.)

Si la recta es dada AB. y en ella el punto B. tirese BG. perpendicular (1. p. 6.) y tomando BC. igual al radio, que se desea, se descriuirá el circulo GFB. que tocará a la recta BA. en B. (7. l. 3.)

Si el centro C. está dado, tirese CB. perpendicular (1. p. 6.) y el circulo BFG. tocará a la recta BA. en B. (7. l. 3.)

Pra-

Pratica 5.

Dado el circulo MOH. y el punto A. fuera, passe AC. por el centro C. y con el radio A.O. se descriua el circulo OGD. y tocara a MOH. en O. Si el punto dado es B. passe BC. por el centro, y descriuase el circulo OLS. Si es dado el punto del contacto O. passe OC. por el centro, y los circulos DGO. y OLS. tocaràn a MOH. en O. (6.l. 3.)

Pratica 6.

Sea dada la recta AB. y la infinita CD. continuada AB. Si corta a CD. en D. hagase DC. media entre BD. DA. (2.p. 5.) y por los tres puntos A. B. C. descriuase vn circulo (4.p. 1.) que tocarà a CD. en C. porque siendo DC. media entre la secante AD. y su exterior segmento DC. (erà DC. tangente (6.l. 6.)

Si la finita dada es EF. paralela a CD. partase igualmente con el perpendicular AGC. y por los tres puntos ECF. descriuase el circulo (4.p. 1.) y tocarà a la recta CD. por ser el radio OC. perpendicular (7.l. 3.)

Consectario. Dada la recta AB. ò EF. finita, descriuase el circulo como antes: el angulo ACB. ferà el mayor que puede tocar a CD. por.

porque si el circulo fuera menor, no tocara a la recta CD. Si fuera mayor, la cortara, y el arco AFB. fuera de menos valor sobre la mesma cuerda AB. (5.1.6.)

Pratica 7.

Dado el circulo BDC. y el punto A. dentro, ò fuera, se ha de tirar ABC. que BC. sea igual a XZ. tomando qualquier punto D. hagase DE. igual a XZ. y del centro O. descriuase el circulo GHR. que toque a DE. (4.p.4.) y del punto A. tirese ABC. que toque al circulo GHR. y serà BC. igual a XZ. ò ED. porque las distancias del centro OG. OH. son iguales (2.1.3.)

PROBLEMA V.

De las figuras inscritas, y circunscritas.

1 **C**ircunscriuir vn circulo a vn triangulo, è inscriuir vn triangulo en vn circulo.

2 Inscriuir vn circulo en vn triangulo, y circunscriuir vn triangulo a vn circulo.

3 Inscriuir vn hexagono, y triangulo regular en vn circulo, y las figuras de doblados lados.

4 Inf-

- 4 Inscrivir un quadrado, y octagono, &c.
 5 Inscrivir un pentagono, quincezagono, y las de doblados lados.
 6 Circunscriuir al circulo todas las figuras regulares; y al contrario, ò inscrivir el circulo en ellas.
 7 Dividir el circulo en 360. grados.

Pratica 1.

1 Dado el triangulo ABC . descriuase por los tres puntos $A. B. C.$ el circulo (4.p.1.) y quedará circunscrito al triangulo.

Dado el triangulo ABC . y el circulo GDE . circunscriuase el circulo ABC . como antes, y tomando qualquier punto G . cortense los arcos $GD. DE$. semejantes a $AB. BC$. (4.p.3.) y será DEG . el triangulo inscrito equian-gulo a BCA . (3.l.3.)

Pratica 2.

Sea el triangulo ABC . partan $CO. BO$. igualmente los angulos $C. y B$. (1.p.2.) sea OF . perpendicular, y cortese BG . igual a BF . y CE a CF . y con el radio OF . descriuase el circulo EFG . porque $EC. CO$. son iguales a FC, CO . y comprehende iguales angulos $ECO. OCF$.
 será

ferà OE. igual a OF. y el angulo E. recto, como F. (4. l. 1.) y asimesmo OG. perpendicular igual a OF. luego el circulo passa por E. y G. y por ser los angulos E. G. F. rectos toca a los lados (7. l. 3.) y está inscrito en el triangulo. (17. P.)

Sea el triangulo ABC. y el circulo PMN. inscriuase el circulo EGF. como antes, y tomando qualquier punto P. haganse los arcos PM. PN. semejantes a GE. GF. tirados los radios HP. HM. HN. tirense perpendiculares SMZ. ZNR. RPS. y tocará el triangulo SRZ. al circulo PMN. (7. l. 3.) y ferà semejante a ABC. porq̄ los quatro angulos M. H. N. Z. son iguales a E. O. F. C. (3. l. 1.) luego porque M. H. N. se han hecho iguales a E. O. F. ferà Z. igual a C. (3. l. 1.) asimesmo S. igual a A. y R. a B. luego son equiangulos, y semejante ZSR. CAB. &c.

Pratica 3.

Sea el circulo ADF. con el mesmo radio CA. tomense las distancias AB. BD. DE. EF. FG. y fenecerà en GA. Porque el triangulo ABC. es equilatero: son sus tres angulos iguales (5. l. 1. luego el angulo C. es de 60. grados,

T que

que es vn tercio de dos rectos, ò semicirculo
180. y vn sexto de todo el circulo, y assi el ar-
co AB. su medida (10.P.) es la sexta parte de
todo el circulo: y los angulos A. B. D. todos son
iguales, que constan de 120. grados, ò dos sex-
tas partes del circulo.

*El triangulo BGE. es equilatero, porque los
arcos BG. GE. EB. son iguales de dos sextas
partes, luego tambien las cuerdas (3.l.3.)*

*Si todos los arcos, como AB. se diuiden igual-
mente (4.p.1.) se descriuirà el dodezagono, y
assi infinitamente las figuras de doblados la-
dos.*

Pratica 4.

*Para el quadrado, sea qualquier diametro
CD. y EAB. su perpendicular, juntas AD. DB.
BC. CA. formaran el quadrado, pues por ser
los quatro angulos E. rectos, son los quatro
arcos iguales (11.P.) luego las quatro cuerdas
iguales (2.l.3.) y los quatro angulos A. D. B.
C. que insisten en los semicirculos, son rectos
(3.l.3.)*

*Para el octagono, se partiràn igualmente los
arcos en F. G. &c. (4.p.1.) y quedarà el circulo
diuidido en 8. partes: luego juntando las cuer-
das*

das AF. FD. &c. se formará el octágono.

Pratica 5.

El pentágono se describe, tirando qualquier diametro BDE. formase el triangulo isocetes BDF. que los angulos D. y F. sean duplos de FBD. (3.p.3.) continuada DFG. es el arco BG. la quinta parte del circulo: y tomando sus iguales GH. HO. OL. se describe el pentágono, porque los tres angulos D.F.B. son dos rectos (3.l.1.) luego porque D.F. son iguales, y cada vno duplo de B. será B. vn quinto de dos rectos: luego D. es dos quintos de dos rectos, y del semicirculo: luego D. ò su medida GB. es vn quinto de todo el circulo, que es 72. grados.

El dezágono, partase HO. en E. igualmente, y será HE. la decima parte del circulo.

El veintágono se hallará partiendo igualmente el arco HE. (4.p.1.) ò tomando el quadrante BN. de 90. grados, y pues BL. es de 72. quedará LN. de 18. que es la vigesima parte del circulo.

El treintágono, tomese BX. la sexta parte del circulo, ò 60. grados (5.p.3.) quitado de BL. 72. queda XL. de 12. que es la trigesima parte

de 360. y de todo el circulo, y tomando LP. iguala LX. de 12. gr. queda PN. de 6. gr. la sexagesima parte del circulo, &c.

el arco x. p. de 24 grados es la decima quinta parte del circulo.

Pratica 6.

Dado el circulo $ABCD$. inscriuase la figura, q̄ se ha de circunscriuir (5. p. 3. 4. 5.) y tirando a los angulos los radios EA. EB. &c. haganse perpendiculares LAF. FBG. &c. y quedará circunscrita la figura regular.

Dada la figura $ABCD$. si se ha de circunscriuir el circulo, partanse igualmente los lados AD. DC. con las perpendiculares OE. ZE. y con la distancia ED. se circunscriuirá el circulo $DABC$. &c.

Si el circulo se ha de inscriuir en la figura EGH. partiendo igualmente los lados LF. LH. con los perpendiculos AE. DE. (1. p. 6.) cō el radio EA. se inscriuirá el circulo $ABCD$. la mesma practica trae a los ojos la demonstracion.

Pratica 7.

Para diuidir el circulo en 360. gr. sobre la recta AB. descriuase el semicirculo AOB. y con la mesma abertura de compàs se tomará Ad. y Bc. de 60. gr. y desde d. y c. con la mesma dif-

tan-

tancia se descriuan dos arcos que se cruzen en
 D. y fera DC. perpendicular, y Ao. quadrante,
 y con el mismo radio de A.o. se descriuiràn
 dos arcos, que se cruzen en n. y Cn. partirà el
 quadrante Ao. igualmente, y ferà Ab. y bo. de
 45. grados; y tomando con el mismo radio las
 distancias or. o z. quedará todo el semicirculo
 diuidido en seis partes iguales, que cada vna
 vale 30. grados: diuidiendo cada vna en tres,
 tentando, quedará el quadrante Bo. diuidido
 en nueue partes, que cada vna vale diez gr. y
 pues bo. es 45, y do. es 30. ferà db. 15. gr. luego
 tomando esta distancia, y passandola de B. en-
 tre 1. y 2. tendremos los cinco grados, con
 que todo el quadrante Bo. puede quedar diui-
 dido de 5. en 5. grados: luego se halla el lado
 del pentagono (5.p.5.) y sea Ab. 72. gr. quedará
 bo. de 18. y pues do. es de 30. quedará db. de 12.
 y partiēdo bo. igualmente en c. ferà co. de 9. gr.
 y pues db. y rh. son de 15. si quitamos dx. y rz.
 iguales a db. 12. quedará bx. y bz. de 3. gr. y
 zx. de 6. y quitando co. 9. gr. de 08. quedará 1.
 gr. que quitado de los 5. quedaràn 4. gr. y qui-
 tando bo. 18. de 07. que es 20. quedaràn 2. gr.
 con que teniendo ya 1. 2. 3. 4. y 5. gr. se acaba-

rà

ra de diuidir todo el quadrante *Bo.* en 90. y todo el semicirculo en 180. &c.

Vn semicirculo de bronze bien diuidido, es de suma importancia para formar los angulos, y hallar su valor.

PROBLEMA VI.

De la proporcion, suma, diferencia, y transformacion de las figuras.

1 **A**umentar, o disminuir las figuras semejantes en qualquiera proporcion, y hallar la proporcion de las semejantes.

2 Hallar la suma, o diferencia de qualesquiera figuras semejantes.

3 Formar un anillo, o marco regular, igual a qualquiera, o qualesquiera figuras de la misma especie, y al contrario.

4 Transformar un triangulo en otro, o un paralelogramo en otro, dado un angulo, y la base.

5 Transformar un triangulo en un paralelogramo, dado un angulo, y la base, y al contrario

6 Transformar qualquiera figura en un paralelogramo, dado un angulo, y la base.

7 Transformar qualquiera figura en otra especie dada, o en un quadrado, y hallar su proporcion.

Pra-

Pratica 1.

Sobre la recta AB. està qualquiera figura ABF. pidefe otra menor, que la mayor a la menor tenga la razon que G. a H. entre G. H. hallefe la media proporcional M. (2.p.5.) conocidas las tres G. M. y AB. hallefe la quarta proporcional BC. (2.p.7.) luego sobre BC. descriuase la figura CBE. semejante a la dada ABF. (3.p.7.) y ferà CBE. la que se pide.

Demostr. La figura ABF. a CBE. tiene duplicada la razon de AB. a CB. (4.l.6.) esto es de G a M. la razon de G. a H. es tambien duplicada de G. a M. (21.P.) luego la razon de ABF. a CBE. es como la de G. a H. (1.l.5.)

Si la figura CBE. se ha de aumentar en razon de H. a G. hallada la media M. se harà como H. a M. assi BC. a BA. (2.p.7.) y la figura BAF. ferà la que se pide, la demostracion es la mesma.

La proporcion de ABF a CBE. se hallarà si conocidas AB. CB. se halla la tercera proporcional DB. (2.p.6.) porque AB a DB. tiene la razon duplicada de AB a CB. (21.P.) como vna figura a otra semejante (4.l.6.)

Pratica 2.

Considerense descritas sobre las rectas $a.c.$ $m.n.$ qualesquiera figuras semejantes, circulos, ò triangulos, ò poligonos regulares, ò irregulares: pide se la suma de los quatro, formese el triangulo rectangulo, que $CA. AB.$ sean iguales a $a.$ y $c.$ (1. p. 4.) la figura de $BC.$ será la suma de $CA.$ y $AB.$ que son $a.$ y $c.$ (4. l. 6.) y tirando $CD.$ perpendicular a $CB.$ (1. p. 6.) igual a $m.$ será $BD.$ suma de $DC.$ y $CB.$ esto es de $a.c.m.$ y si $DE.$ se tira perpendicular a $BD.$ y igual a $n.$ será $BE.$ suma de $BD.$ y $DE.$ esto es de $a.c.m.n.$ (4. l. 6.)

La diferencia de las figuras que se pueden descriuir sobre $BC.$ y $a.$ se hallará si sobre la mayor $CB.$ se haze vn semicirculo $CAB.$ y tomando $CA.$ igual a $a.$ será $AB.$ la diferencia, porque siendo recto el angulo $A.$ del semicirculo (3. l. 3.) la figura de $BC.$ es igual a la de $CA.$ y $AB.$ (4. l. 6.) luego la de $CB.$ excede a la de $CA.$ en toda la de $AB.$ Mas, si la de $r.$ excede a las de $a.c.$ primero se sumarán $a.$ y $c.$ y será $BC.$ y sobre la base $BD.$ igual a $r.$ se formará el triangulo $DBC.$ (3. p. 4.) y será $CD.$ el exceso en que $r.$ excede a $c.a.$ & c.

Pra-

Pratica 3.

Sea dado el circulo menor GZX . y el mayor AFE . pidefe el intermedio *arn.* que el anillo, ò espacio comprehendido entre los dos AFE . *arn.* sea igual al circulo GZX . Tomese la diferencia entre los circulos OA . OG . (6.p.2.) y se hallarà Oa . que se pide, porque siendo el circulo del radio OA . igual a los de los radios OG . Oa . ferà el circulo GZX . la diferencia entre los circulos AFE . *arn.* (6.p.2.) y pues el anillo entre los dos circulos AFE . *arn.* es tambien la diferencia de los dos, porque es lo que excede AFE . a *arn.* ferà el anillo igual al circulo dado GZX . (3.P.)

Si se dà el circulo GZX . y el interior del anillo *arn.* y se busca el exterior AFE . se hallarà la suma de los circulos OG . Oa . (6.p.2.) que ferà OA . y el anillo comprehendido de los circulos AFE . *arn.* ferà igual al circulo GZX .

Dado el anillo entre AFE . *arn.* si se toma la diferencia entre los circulos OA . Oa . (6.p.2.) se hallarà el circulo OG . que es GZX . igual al anillo dado.

Lo mesmo que del anillo, se dize del marco entre los exagonos AFE . *arn.* respeto del

exagono GZX. y lo mesmo es de qualesquiera figuras regulares que se pueden inscriuir en los circulos.

Pratica 4.

Sea el triangulo dado MNS. la nueva base MR. y el nuevo angulo sobre la base sea G. Hagase el angulo RMP. igual a G. y SQ. paralela a MN. que cortará a MP. en O. juntese oculta RO. y NP. paralela a RO. el triangulo **M**NRP. es igual a MNS. y tiene la base, y angulo dado. *Demonstr.* Por ser paralelas RO. NP. son proporcionales RM. a MO. como MN. a MP. luego porque los triangulos PMR. OCN. tienen los lados reciprocos, y el angulo OMN. comun, serán iguales (1. l. 6.) luego porque MON. es igual a MSN. sobre vna base, y entre dos paralelas (8. l. 1.) será MPR. igual a MSN. (3. P.)

Otra vez. Sea dado el triangulo MRP. la nueva base MN. y el angulo opuesto a la base ha de ser igual a L. Tirese NP. y hagase RO. paralela a NP. y OSQ. paralela a MN. luego sobre MN. descriuase vn arco capaz del angulo L. (4. p. 2.) que cortará a OQ. en S. será el triangulo MSN. el que se pide; pero si el circulo

lo no corta a la paralela OQ . serà el caso imposible. *Demonstr.* El triangulo MON . es igual a MPR . como antes (1. l. 6.) MON . es igual a MSN . (8. l. 1.) luego MNS . es igual a MPR . y tiene el angulo S . igual a L . (3. l. 3.) opuesto a la base dada MN . como se deseaua.

Lo mismo es en los paralelogramos MX . MQ . por ser duplos de los triangulos (8. l. 1.) pero en el segundo caso el angulo S . opuesto a la base, es el que haze el diametro NS . con el lado SM . La practica es la mesma.

Practica 5.

Dado el triangulo ABE . la base AC . y el angulo CAD . se pide el paralelogramo AG . igual a BEA . formese el triangulo ADC . igual a BEA . (6. p. 4.) y partiendo igualmente AD . en F . sean FG . CG . paralelas a CA . AF . y serà AG . el que se pide; porque AF . es la mitad de AD . es el paralelogramo AG . igual al triangulo DAC . (8. l. 1.) esto es a BEA . como se deseaua.

Dado el paralelogramo AG . la base AB . y el angulo BAE . ò AEB . tomese FD . igual a FA . y serà DCA . igual a GA . (8. l. 1.) haràse despues el triangulo AEB . con la base, y angulo dado, igual a DCA . (6. p. 4.) y serà tambien igual a GA . (3. P.)

Pratica 6.

El rectilíneo ABCDE. se ha de transformar en vn paralelogramo GS. que la base sea dada GH. y el ángulo dado H. diuidase el rectilíneo en los triangulos FAD. ADC. ACB. y sobre BH. hagase el paralelogramo GH. igual al triangulo AED. sobre MN. el paralelogramo MQ. igual a DCA. y sobre PQ. el paralelogramo PS. igual a CBA. (6. p. 4.) luego todo GS. será igual a los triangulos del rectilíneo, que son el mismo rectilíneo (2. P.)

Pratica 7.

Dados los rectilíneos Z. y X. pide se vno semejante a X. que sea igual a Z. tomando qualquiera recta FC. y qualquier ángulo C. hagase el paralelogramo CB. igual a Z. y sobre BD. el paralelogramo BE. igual a X. (6. p. 6.) tome se *nr.* quarta proporcional, como ED. a DC. así *nm.* a *nr.* (2. p. 7.) y hallada la media *ns.* que sea tres continuas *nr. ns. nm.* (2. p. 5.) se descriuirá sobre *ns.* vn rectilíneo semejante a X. (3. p. 7.) y será igual a Z. como se pide.

Demonstr. X. a Z. es como EB a BC. sus iguales: EB. a BC. es como ED. a DC. (1. l. 6.) luego X a Z. es como ED. a DC. (1. l. 5.) y por ser tres.

tres continuas $nm.nr.es X.$ a $x.$ como nm a $nr.$ (4.l.6.) y pues $nm.$ a $nr.$ se hizo como $ED.$ a $DC.$ (1.l.5.) esto es como $X.$ a $Z.$ luego $Z.$ y $x.$ son iguales entre si (2.l.5.) y $x.$ semejante a $X.$ &c.

La reduccion al quadrado se puede hazer de la mesma suerte ; pero mas facil serà tomar qualquiera recta $FC.$ y el angulo $C.$ recto, y hazer el rectangulo $BC.$ igual a $Z.$ (6.p.6.) y hallando entre $CD.$ $DB.$ la media $b.$ (2.p.5.) el quadrado de $b.$ serà igual al rectangulo $BC.$ (1.l.6.) y al rectilineo $Z.$ &c.

La razon de X a $Z.$ se hallarà si se forma el rectangulo $FD.$ igual a $Z.$ y sobre $BD.$ el rectangulo $BE.$ igual a $X.$ (6.p.6.) y serà X a $Z.$ como EB a $DF.$ esto es como $DE.$ a $DC.$ (1.l.6.)

PROBLEMA VII.

De la superficie, y solidez.

- 1 **H** Hallar la superficie de un paralelogramo, y triangulo.
- 2 Hallar las superficies planas rectilneas de todas las figuras, y cuerpos.
- 3 Hallar la altura de los solidos.
- 4 Hallar la solidez de los paralelepipedos, y prismas.

5 Ha-

5 Hallar la solidez de las piramides, y cuerpos regulares.

6 Describir un solido semejante a otro sobre un lado dado, y hallar la razón de dos solidos semejantes

7 Transformar un paralelepipedo, prisma, ò piramide en otro dada, su base rectilinea, ò su altura.

Explicacion de la superficie.

LA superficie se mide por quadrados de aquella recta, que es medida de los lados de la figura, como si vn triangulo equilatero tiene diez pies de lado, la superficie se medirà por pies quadrados, ò por quadrados que tienen vn pie de lado: y lo mesmo es de qualquiera otra medida, en que se consideran diuididos los lados de la figura.

Explicacion de la solidez.

La solidez de los cuerpos se mide por cubos de aquella recta que es medida de los lados del solido, como si los lados del solido se miden por pies, la solidez se medirà por pies cubicos, ò por cubos, que tienen vn pie de lado: y lo mesmo es de qualesquiera otras medidas.

Pratica I.

El producto de la base, y altura es la superficie del paralelogramo.

Exem-

Exemplo 1. Si el paralelogramo es rectángulo, como E B. y la base A B. tiene 3. pies, y el lado A E. tiene 5. se multiplicará vno por otro, y el producto será 15. pies quadrados, y es toda la superficie de E B. como se vé en el rectángulo Z. que se compone de 15. quadrados.

Exemplo 2. Si el paralelogramo no es rectángulo, como A D. se tira la perpendicular A E. al lado opuesto, y si hallo que A B. tiene 3. pies, y A E. 5. multiplicando el lado por el perpendicular, que es 3. por 5. salen 15. pies quadrados la superficie de A D. porque considerando B E. tambien perpendicular, será el rectángulo B E. igual al rhomboide A D. (8. l. 1.)

El producto de la base, y mitad de la altura, ó de la altura, y mitad de la base es la superficie del triangulo: porque el triangulo es medio paralelogramo. (8. l. 1.)

Exemplo 1. Si el triangulo P R O. es rectángulo, será P R. perpendicular, y la altura del triangulo: pues si P R. es de 4. pies, y la base R O. de 9. multiplicando 9. pies por 2. que es la mitad de la altura, sale la superficie 18. pies quadrados: tambien si multiplico la altura 4. por la mitad de la base, que será 4. y medio, sale 18.

Exem-

Exemplo 2. En el triangulo HLP. el perpendiculo PR. cae dentro, y es 4. pies, su mitad 2. y HL. la base es 5. multiplicando 5. por 2. sale la superficie 10. pies quadrados.

Exemplo 3. En el triangulo LOP. cae el perpendiculo PR. fuera del triangulo en la base OL. continuada: la base es 6. el perpendiculo 4. su mitad 2. multiplicando 6. por 2. sale la superficie 12. pies quadrados.

Pratica 2.

Qualquiera figura ABCDEF. se resuelve en triangulos: luego hallada la superficie de todos los triangulos (7. p. 1.) constará la superficie de toda la figura. Lo mismo es en todas las superficies planas rectilneas de los cuerpos.

En las figuras regulares, multiplicando el perimetro, ò suma de todos los lados, por la mitad del perpendiculo del centro a uno de los lados, sale la superficie. Lo mismo es si se multiplica el perpendiculo por la mitad del perimetro. De donde se infiere, que en el circulo que se considera como poligono de infinitos lados, y su perpendiculo es el radio, si se multiplica este por la mitad de la circunferencia, ò perimetro, el producto, ò rectangulo será la superficie, ò area de todo el cir-

circulo. El modo de hallar la circunferencia se dirà (8.p.4.) Otra regla hallarà el curioso en mi Arithmetica lib. 4. cap. 9. para hallar las superficies por los lados, y los lados por las superficies, y transformar vnas figuras en otras, &c.

Pratica 3.

En los prismas, piramides, y paralelepipedos, que tienen vn lado BC perpendicular a la base, el mesmo lado es su altura.

Si los lados están inclinados, como en la piramide ADXE. del punto E. se arrojarà el perpendicularo EZ. sobre el plano de la base continuado, y ferà la altura del solido.

Si el perpendicularo huuiere de caer dentro del solido, como en la piramide carb. por el vertice h. se acomodará vna regla, ò linea recta bg. y paralela a la base del solido, y de qualquiera punto g. se arrojarà el perpendicularo go. que ferà la altura del solido.

Pratica 4.

Multiplicando la superficie de la base por la altura del paralelepipedo, ò prisma sale su solidez. En el paralelepipedo rectangulo DC. la base es el paralelogramo AC. sus lados AB. de 4. pies, y BC. de 3. luego multiplicando 4. por 3.

X

sa-

sale la superficie AC. 12 .pies quadrados (7. p. 1.) multiplicando esta superficie por la altura AD. 10. pies, que es el perpendicular comun a los planos inferior, y superior, salen 120. pies cubicos la solidez del paralelepipedo DC.

En los prismas es lo mesmo, como en el prisma pentagono Z. por la *Practica* 2. Si hallo que la superficie de la base tiene 20. pies quadrados, y su altura 10. multiplicando 20. por 10. salen 200. pies cubicos, que es toda la solidez del prisma; porque los prismas, y paralelepipedos de igual base, y altura son iguales (5. l. 11.)

Practica 5.

Multiplicando la superficie de la base por un tercio de la altura de la piramide sale su solidez. Porque la piramide es vn tercio del prisma que tiene igual base, y altura (5. l. 11.) como en la piramide ABCD. la superficie del triangulo ABC. que es su base, se hallarà por la *practica* 1. supongamos sea 20. pies quadrados: su altura, que es la perpendicular DO. del vertice al plano de la base, sea 9. pies, su tercio serà tres pies: y multiplicando la superficie 20. por 3. sale la solidez 60. pies cubicos. Lo mesmo es

es en todas, aunque la base sea quadrada, pentagona, &c.

Si la piramide está rompida, como HLFQIP. y le falta el pedaço superior PQIR. aplicando dos reglas a los lados HP. FQ. se hallará el vertice R. y serán dos piramides HFLR. PQIR. y tomadas las alturas del punto R. sobre los planos HFL. PQI. (7.p.3.) y halladas las superficies destes (7.p.2.) se hallará primero la solidez de HFLR. y despues la de PQIR. como antes: y quitando esta de aquella, quedará la solidez del pedaço HFLPQI. &c.

La solidez de los cuerpos regulares se hallará explicada con facilidad en mi Arithmetica lib. 4. cap. 9. con que escuso el repetirla en este lugar.

Pratica 6.

Sobre la recta dada ED. se ha de hazer un solido semejante a RH. Formese primero sobre ED. la base DC. semejante a BA. (3.p.7.) y sobre EC. el plano CG. semejante a OA. y sobre ED. el plano DG. semejante a BO. &c. Formados todos los planos semejantes, y dispuestos con el mesmo orden, serán los solidos RH. EF. semejantes, porque todos los angu-

los serán iguales, y los lados proporcionales (23.P.)

La razon del folido RH. a EF. se hallará, si dados los lados homologos RB. y ED. se halla la tercera proporcional M. (2.p.6.) y conocidas RB. ED. y M. se halla la quarta N. (2.p.7.) con que serán quatro continuas RB. ED. M. N. y RB a N. tiene la razon triplicada de RB a ED. (21.P.) y pues RH a EF. tambien tiene la razon triplicada de RB a ED. (6.l.11.) la razon de RH. a EF. será la mesma que la de RB a N. (1.l.5.)

Pratica 7.

Sea vna piramide ABCD. quierese otra igual sobre la base dada EFGHI. Lo primero se hallará la razon de la base EFGHI. a la base ABC. (6.p.7.) y sea como $b. a d.$ y tomando la recta $a.$ igual a la altura de la piramide ABCD. conocidas $b. d. a.$ se hallará la quarta proporcional $c.$ (2.p.7.) que si se toma por altura de la piramide EFGHI O. será igual a ABCD. porq̄ son reciprocas como la base EFGHI. a la base ABC. assi la altura $a.$ a la altura $c.$ luego son las piramide iguales (5.l.11.)

Si se huviere de hazer piramide igual a vn prisma, se tomará el triplo de la altura hallada.

da. Si vñ prisma igual a vna piramide, se tomara el tercio de la altura hallada, porque el prisma es triplo de la piramide (5. l. 11.)

Quando la altura es dada, como c . tomando la altura de la piramide dada $ABCD$. que es a . la razon de c . a a . sera la de las bases: luego formando otra base semejante a ABC . en razon de c . a a . (6. p. 1.) y transformandola despues en qualquiera especie de figura (6. p. 7.) saldra siempre la piramide igual, porque siempre seran las bases, y alturas reciprocas. Lo mesmo es en los prismas, &c. Entre prismas, y piramides se toma el triplo, o tercio como antes.

PROBLEMA VIII.

De los problemas no resueltos.

1 **D** E la triseccion del angulo, o arco, &c.

2 *De la inscripcion del heptagono. &c.*

3 *De las dos medias proporcionales, &c.*

4 *De la quadratura del circulo.*

Aduertencia.

P Roblemas no resueltos llamo a los que no estan sin controuersia demostrados: y asi pongo entre ellos la quadratura del circulo, sin negar por esso la gloria que merece al P.

Gre-

Gregorio de San Vincencio, de la Compañia de Iesus (Mathematico insigne, y a mi juicio en solo el tiempo inferior a los maximos Apolonio, y Archimedes) hasta que su quadratura esté sin controuersia admitida de todos.

I DE LA TRISECCION, &c.

El angulo recto facilmente se diuide en tres partes iguales, porque el angulo de vn triangulo equilatero es vn tercio de dos rectos (5. l. 1. luego su mitad será vn tercio de vn recto. Metodo general para todos los angulos, hasta oy no se ha visto.

Caramuel en su Mathematica nueua, que acaba de salir a luz este año de 1670. dice, que carecieron desta demonstracion Ptolomeo, y los antiguos; y en la pag. 330. num. 270. nos la propone desta suerte.

Sea el angulo FCB . ò el arco FB . su medida, juntando FB . tirese CI . con tal arte que FI . FG . sean iguales, y será el arco FG . vn tercio de FB . porque los triangulos FCG . GFI . son isocetes, y siendo el angulo G . comun serán iguales angulos FCG . GFI . (3. l. 1.) luego FG . es la mitad de GB . (3. l. 3.) ò el tercio de FB . Inmortales gracias diéramos a Caramuel si nos demostr-

mostrara el arte con que se ha de tirar la linea CIG. pues sin esto queda por resolver el problema. No carecieron los antiguos de medios para la resolucion.

Papo Alexandrino propone este *lib. 4. p. 32.* sea el angulo dado MLN. y de qualquier punto M. caiga el perpendicular MN. tirada LP. que OP. sea dupla de LM. serà el angulo NLP. la mitad de PLM. ò vn tercio de NLM. y aunque le trae para el angulo agudo, es tambien general para los obtusos.

Francisco Vieta en el suplemento p. 9. propone otro medio. Sea el angulo HIK. ò su medida el arco KH. cõtinuado el diametro KZA. si se tira HA. que EA. se igual al radio IK. serà ZE. vn tercio de KH.

Añado otro medio. Sea el arco TV. y el diametro TR. si se tira VY. que ZY. ZS. sean iguales, serà RY. ò TX. vn tercio de TV. porque es isocetes ZYS. luego los angulos ZYS. ZSY. iguales (5. l. 1.) luego YR. ò TX. es la mitad de VX. (3. l. 3.) ò vn tercio de TV. todas estas no son demostraciones, porque el medio que se toma, incluye la misma dificultad, y no se demuestra.

An-

Antonio Sanctinio, Professor Romano, publicò el año 1648. vn libro, que intitulò *Inclinationum appendix*, donde trae varias resoluciones, pero llenas de paralogismos. Su censura merece especial tratado, y en él tendrá su lugar la que mereciere otra triseccion, que en esta Corte aguardamos.

Concluyo en que hasta oy solo se puede partir el angulo, ò arco igualmente en 2. 4. 8. 16. partes iguales, &c. procediendo por continua biseccion (1. p. 2.)

2. DEL HEPTAGONO.

No ay arte para inscriuir en el circulo otras figuras regulares, que las explicadas en el Problema 5. y las que se pueden continuar por biseccion de los arcos. Las de 7. 9. 11. 13. 17. 19. lados, &c. se podian inscriuir geometricamente, si se hallasse arte para formar vn triangulo isocetes, que qualquier angulo sobre la base fuera triplo, quadruplo, &c. del vertical, como el triangulo isocetes del angulo duplo (5. p. 5.) siue para el pentagono, el triplo siuiera para el *Heptagono*, el quadruplo para el *Nonagono*, &c. Antonio Sanctinio trae vna practica general, y aunque tengo demostrado su error,

error, con la advertencia que añadiré, se aproxima tanto a la verdad, que es la operacion segura, y facilissima.

Pratica para todas las figuras regulares.

Del centro H. descriuase qualquier circulo ARB. y tomando qualquier punto A. sea AHB. su diametro. Tomense luego tantas partes iguales, como lados ha de tener la figura, y sea en el exemplo de 7. lados; de suerte, que el vltimo punto 7. cayga cerca del punto B. poco antes, ò despues, y tirada la linea AE. se partirá igualmente en O. y con el radio OA. se descriuirá el circulo ADEF. y siendo OC. perpendicular a AE. desde el punto C. se tirará por el segundo punto C 2. que determinará el punto D. y será AD. la septima parte del circulo ADEF. y si se tira ED. que corte al primer circulo en 4. será A 4. la septima parte del circulo ABC. (5. l. 3.) Quanto el punto E. fuere mas proximo a B. es mas segura la operacion. Lo mesmo es en las figuras de 9. y 11. lados &c.

3 DE LAS DOS MEDIAS.

Varios medios han tentado los Antiguos, y Modernos para hallar las dos medias proporcionales, q̄ les podrá ver el curioso en la Geo-

Y me-

metria del P. Claudio Ricardo, Maestro que fue de Mathematicas en estos Reales Estudios. Propongo solo vno, que me parece de los mas inteligibles, y claros.

Sean dadas E. D. y se buscan las dos medias B. C. que sean quatro continuas E. B. C. D. En vn angulo recto PFG. tomese FG. igual a E. y FP. igual a D. y hecho el rectangulo FK. de su centro A. se descriuirà el circulo FGKP. que passará por los 4. angulos rectos (3. l. 3.) continuados los lados KGH. KPR. si del punto F. se tira la recta FRH. que sean iguales RF. LH. serán las dos medias HG. RP. y las quatro continuas FG. GH. RP. PF.

Para tirar la recta FR. no ay arte cierta, practicamente se puede hazer desta suerte. Del centro E. tirese vn circulo pq . de suerte, que Pp . sea mayor que PE. y GH. menor que FG. y aplicãdo la regla a los puntos $p. q$. fino passa por F. se hará otro circulo RH. mayor, ò menor que la recta RH. passe por F. y serán RF. LH. iguales, y tambien RL. HF. (4. l. 3.)

Demonstr. El rectangulo KFG. es igual a FHL. (6. l. 6.) esto es a LRF. ò KRP. luego son los lados reciprocos (1. l. 6.) como HK. a KR.

así

afsi RP. a HG. y pues FP. a PR. es como HK. a KR. (2.1.6.) serà como FP. a PR. afsi RP. a HG. (1.1.5.) y son tres continuas FP. PR. HG. y por ser proporcionales FP. a PR. como HG. a GF. (2.1.6.) seràn quatro continuas, como FP. a PR. afsi PR. a HG. y afsi HG. a GF. luego RP. HG. son dos medias entre FP. FG. que son E. y D. &c.

Tambien es cierto, que si se resoluiesse este Problema. *Dado un angulo RPF. y un punto H. dentro, ò fuera, tirar la recta HR. que FR. sea igual a una dada,* se resoluerian las dos medias, como lo demostrò Vieta en el Suplemento, *prop. 5.* y tambien la triseccion del angulo, como vimos en la construccion de Papo Alexandrino.

De las dos medias depende la construccion de los Solidos semejantes en qualquiera razõ, y proporcion dada. Como si la recta D. fuere lado de vn solido cubo, prisma, ò piramide, &c. y se pide otro semejante duplo, triplo, &c. si se toma E. dupla, ò tripla de D. ò que E. a D. tenga la razon dada, y se hallan dos medias B. y C. los solidos de C. y D. semejantes tendràn entre si la razon que E. a D. porque vn solido a

Otro semejante tiene la razon triplicada de los lados (6.l.11.) y por ser quatro continuas E.B.C.D. tiene tambien E.a D. la razon triplicada de E.a B. ò C.a D. (21.P.) luego el solido C. al solido D. tendrá la razon que la recta E.a D. (1.l.5.)

A mas del aumento, ò diminucion de los solidos semejantes, penden de las dos medias innumerables Problemas; de fuerte, que con solo este quedaria la Geometria enriquecida, y sus terminos notablemente dilatados, y con nombre inmortal quien le resoluiesse.

4 DE LA QVADRATURA.

Lo que se pide en la Quadratura, es formar vn quadrado, que su area, superficie, ò capacidad sea igual al espacio que la linea circular comprehende. Otro Problema es, *hallar la proporcion del diametro con la circunferencia.*

Estos dos Problemas tienen tal connexion, que hallado el vno, queda resuelto el otro; pero ninguno de su naturaleza pide que el otro se halle primero, porque admitida esta mutua dependencia, fuera imposible la resolucio de entrambos, como es imposible que los dos sean mutuamente primeros. La quadratura, pues,

pues, se puede hallar sin que sirva de medio la proporcion del diametro, y circunferencia, como en la *Lunula* que quadrò Hipocrates Chio; y al contrario.

Demostrò Archimedes, que el circulo es igual a vn triangulo que tiene la base igual a la circunferencia, y la altura, ò perpendiculo igual al radio; porque qualquiera figura regular inscrita en el circulo ABCD. se resuelve en tantos triangulos iguales, y semejantes, como lados; y pues todos tienen igual perpendiculo GO. es toda la figura igual a vn triangulo que tiene la base igual a todos los lados AB. BC. CD. &c. y la altura igual al perpendiculo GO. (1. l. 6.) Considerando, pues, al circulo como poligono de infinitos lados, que su perpendiculo es el mesmo radio, será todo el circulo igual tambien al triangulo, que tiene por base vna recta igual a toda la circunferencia, y al radio por altura, ò perpendiculo.

De donde se infiere, que conocida la proporcion del diametro a la circunferencia, y dado el diametro, es dado el radio, y se pudiera hallar vna recta igual a la circunferencia (2. p. 7.) y con esta base formando qualquier

trian-

gulo que tenga por altura el radio, ferà igual al circulo, y despues facilmente se pudiera transformar en quadrado (6.p.7.)

Proporcion de Archimedes.

El diametro a la circunferencia tiene la proporcion proxima que 7. a 22. pero sale la circunferencia mayor de lo justo. Dado, pues, el diametro, se hallarà la circunferencia por vna regla de tres. Si vn circulo tiene de diametro 35. pies, dirè si 7. dan 22. que daràn 35. salen 110. pies. Si se diere la circunferencia de 110. para hallar el diametro, dirè si 22. dan 7. que daràn 110. salen 35. pies de diametro.

Proporcion de Adriano Mecio.

El diametro 113. la circunferencia 355. esta proporcion es la mas ajusta de quantas se han hallado en numeros pequeños, pues no excede la circunferencia a lo justo en tres particillas de diez mil, en que se puede considerar el diametro diuidido.

Proporcion de Ceulen.

Diametro. 100.000.000.000.000.000.000.

Circunfer. 314.159.265.358.979.323.847

Esta no excede en vna particilla de cien tricuentos. El vfo destas es el mesmo que antes

por

por regla de tres, como se hizo antes.

Confectarios.

1 *La superficie del círculo es el producto del radio en la mitad de la circunferencia, como si el diametro es 14. será el radio 7. la circunferencia 44. su mitad 22. multiplicando 22. por 7. salen 154. pies quadrados la superficie del círculo.*

2 *La superficie conuexa del cilindro recto es el producto del lado en la circunferencia del círculo, que es su base: y añadidas las dos superficies del círculo superior, é inferior, será toda la superficie del cilindro, como si la base tiene de diametro 14. pies, será su circunferencia 44. multiplicada por la altura 10. pies, será la superficie conuexa 440. pies quadrados, y añadidas las dos superficies circulares de 154. será toda la superficie 748. pies quadrados. En los siguientes Confectarios se obra de la mesma suerte.*

3 *La superficie conica conuexa es el producto del lado en la mitad de la circunferencia de la base circular: y añadida la superficie del círculo, será toda la superficie conica.*

4 *La superficie de una esfera es el producto de*

de su diametro en la circunferencia del circulo que tiene el mismo diametro; tambien es el quadruplo de la superficie del dicho circulo.

5 *La solidez de la esfera* es el producto del radio en vn tercio de su superficie.

6 *La solidez del cilindro* es el producto de su altura en la superficie de su base.

7 *La solidez conica* es el producto de vn tercio de su altura en la superficie de su base circular.

Todos estos Consectarios demostrò Archimedes, y quedan resueltos hallada la quadratura, pero basta para la pratica hallar la circunferencia, y superficie por las proporciones de Archimedes, ò Meccio; y en caso que se desee mayor precision, se puede tomar la que Ceulen propuso.

F I N.

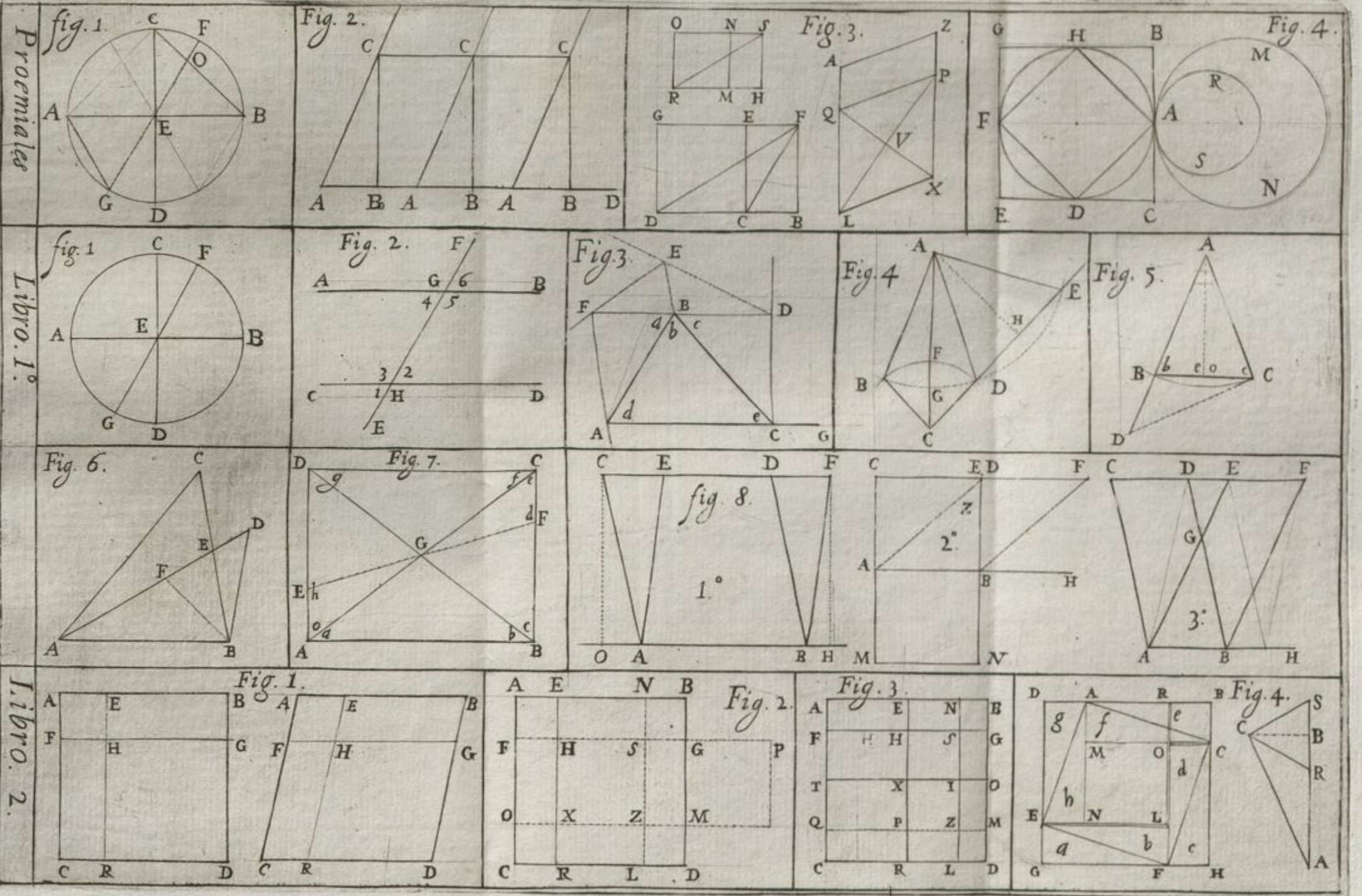
de su diametro en la circunferencia del circulo que tiene el mismo diametro; tambien es el quadruplo de la superficie del dicho circulo.

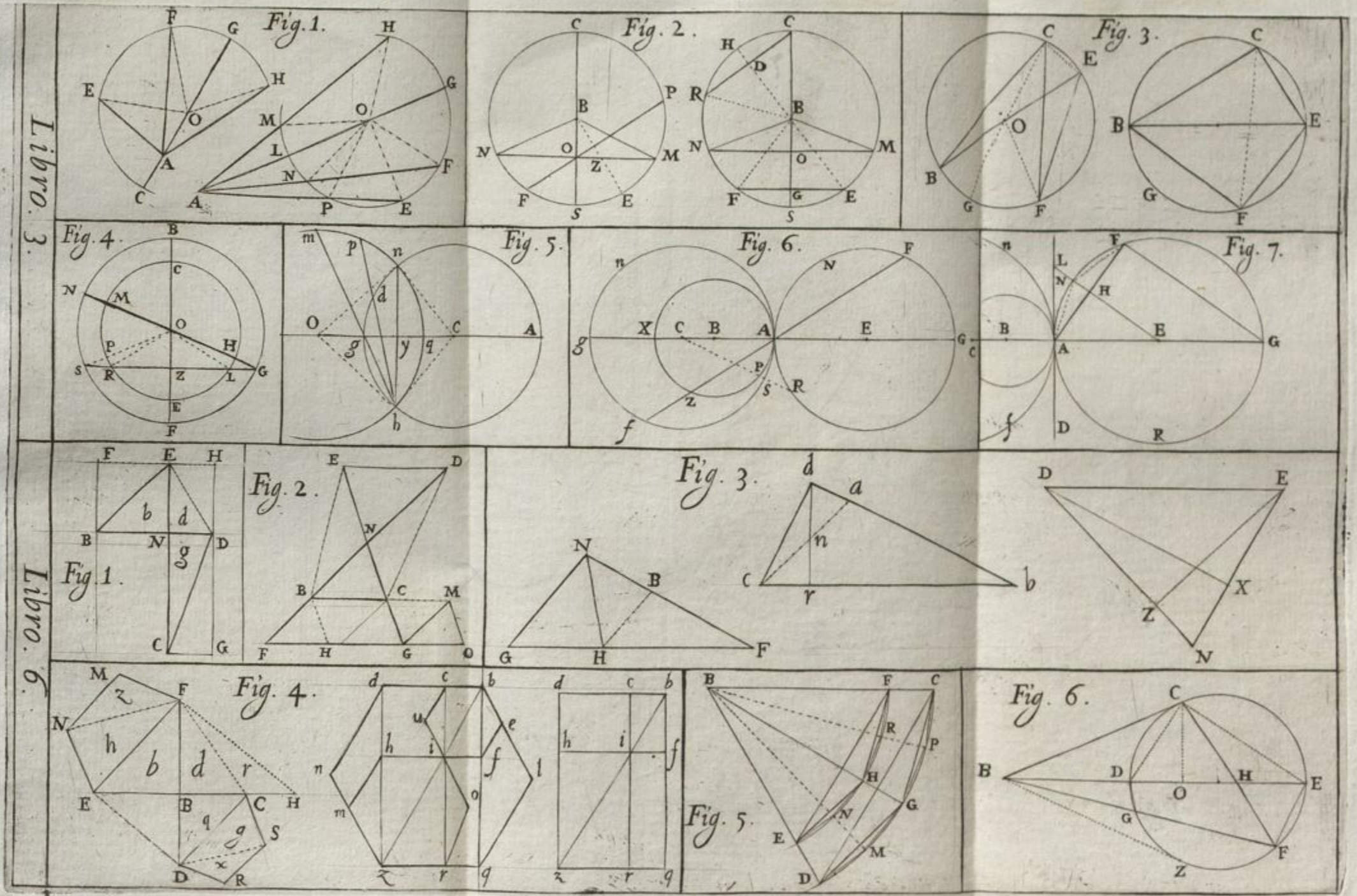
5. La solidez de la esfera es el producto del radio en un tercio de su superficie.

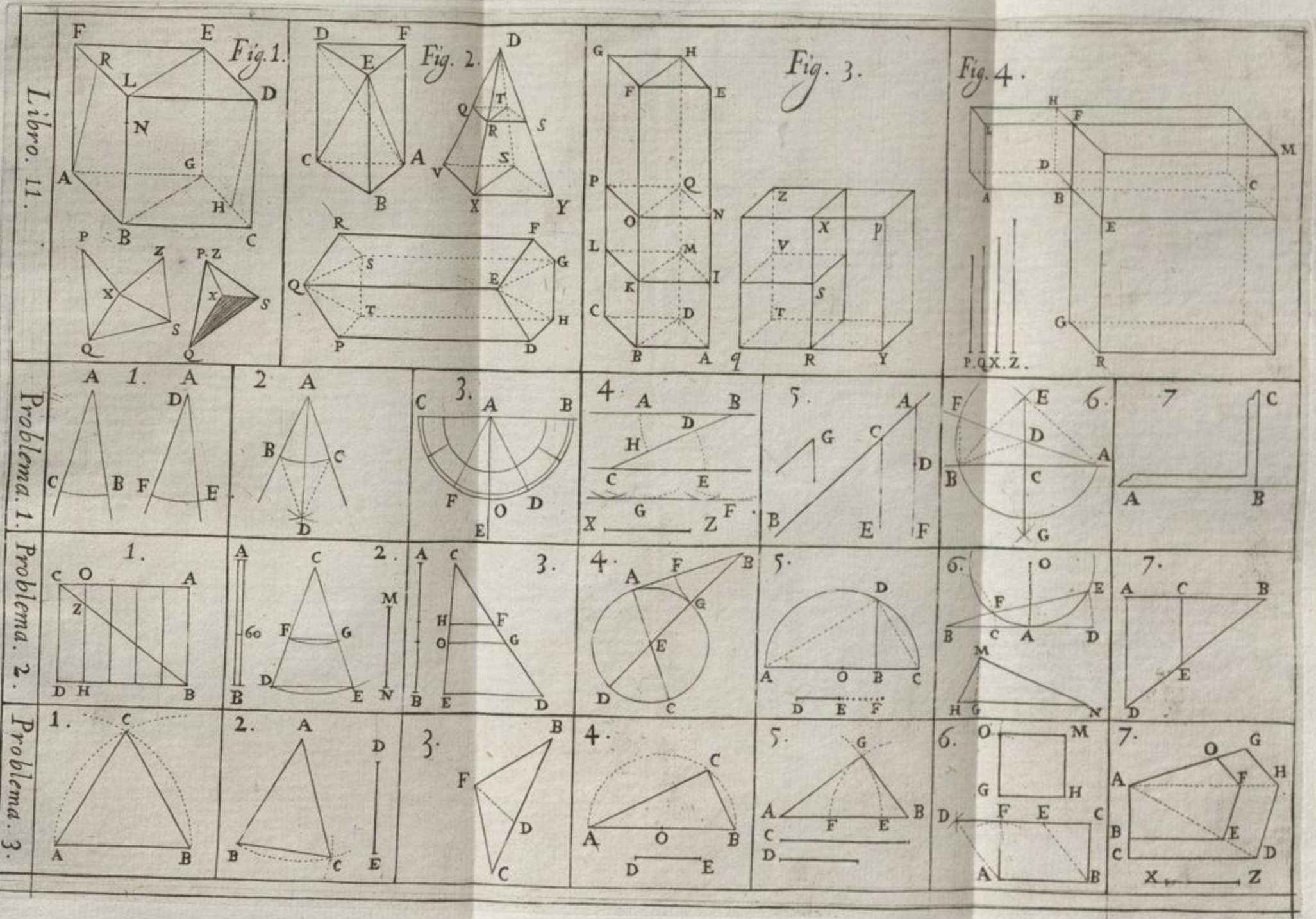
6. La solidez del cilindro es el producto de su altura en la superficie de su base.

7. La solidez del cono es el producto de un tercio de su altura en la superficie de su base circular.

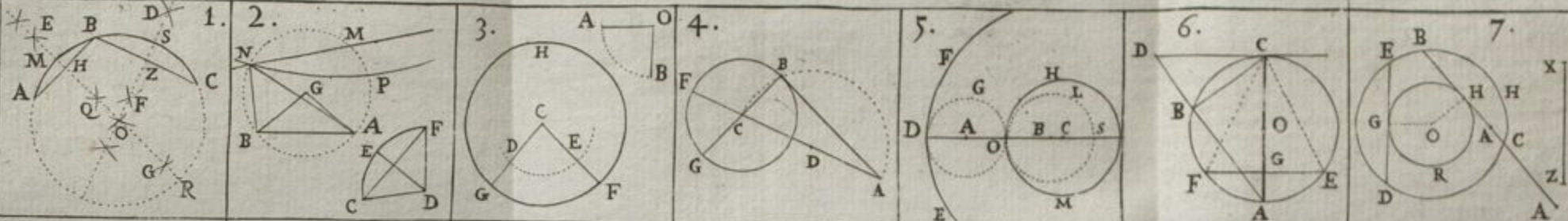
Todos estos Confeccionarios demostrò Archimedes, y quedan resueltos hallada la quadratura, pero basta para la practica hallar la circunferencia, y superficie que las proposiciones de Archimedes, de donde se deduce de desee mayor precision, se puede encontrar en los Confeccionarios propuestos.



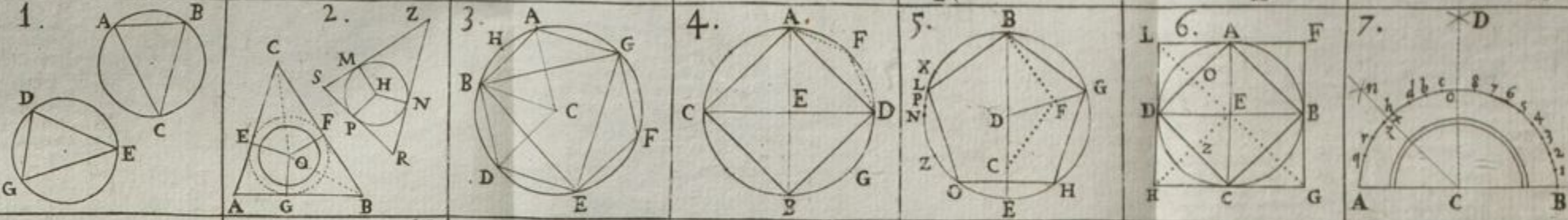




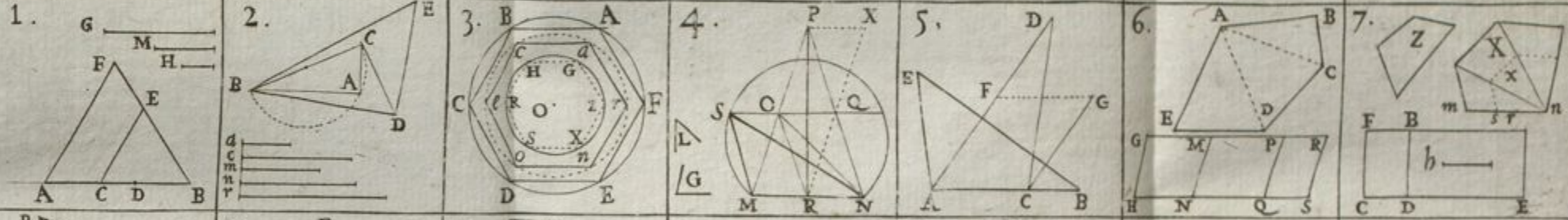
Problema. 4.



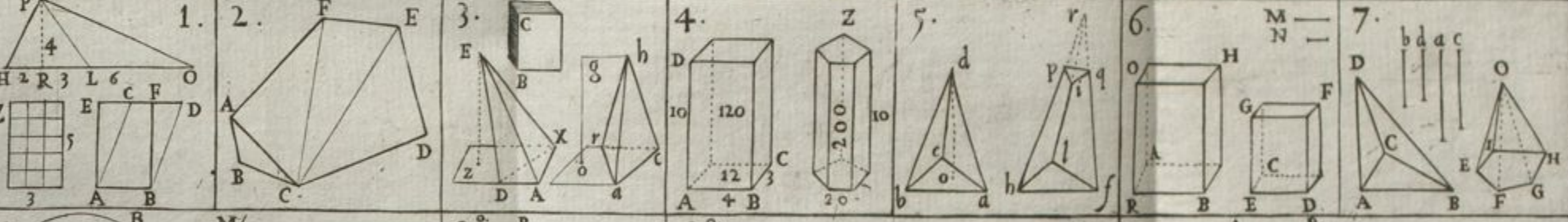
Problema. 5.



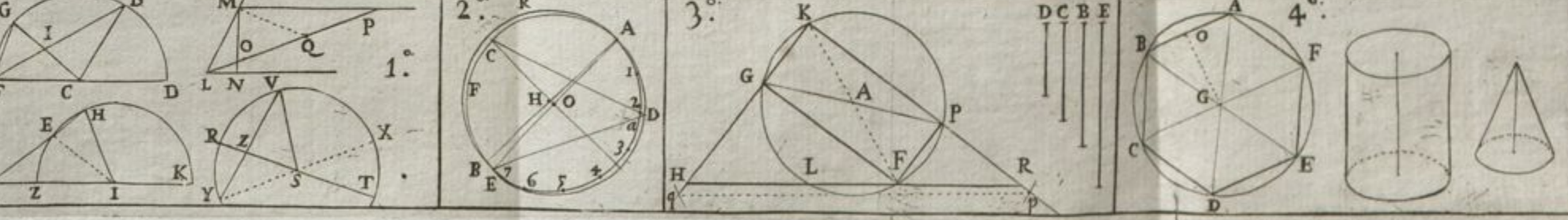
Problema. 6.



Problema. 7.



Probl. 8.



Biblioteca
5.9

1554

1555

1556

1557

1558

1559

1560

1561

1562

1563

1564

1565

1566

1567

1568

1569

1570

1571

1572

1573

1574

1575

1576

1577

1578

1579

1580

BU

de Santa Cruz

1980



UVA. BHSC. BU 05980



UVA. BHSC. BU 05980



UVA. BHSC. BU 05980