EL DUALISMO

EN LAS

Ciencias y especialmente en la Matemática,

POR

D. Enrique Triviño Secret

LICENCIADO EN CIENCIAS.

GERONA:

Imprenta y Encuadernacion de Manuel Llach,

Herrerías Viejas, 5.

1889.

EL DUALISMO

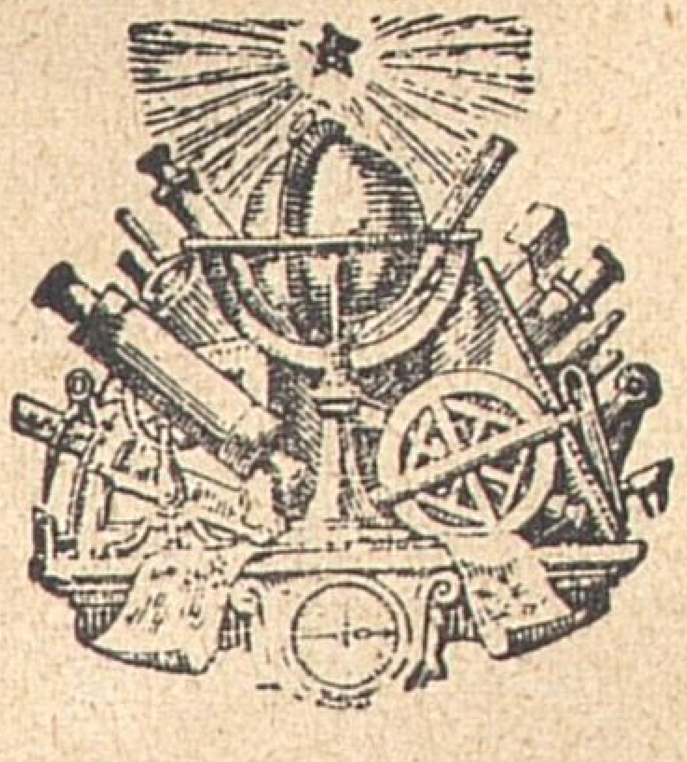
EN LAS

Ciencias y especialmente en la Matemática,

POR

D. Enrique Triviño Secret

LICENCIADO EN CIENCIAS.



GERONA:

Imprenta y Encuadernacion de Manuel Llach,

Herrerías Viejas, 5.

1889.

EL DUALISMO EN LAS CIENCIAS

Y

con especialidad en la Matemática.

De la misma manera que en el mundo físico queriendo el hombre ensanchar sus conocimientos ó enriquecerse con nuevas verdades, ha tenido que valerse de telescópios con los cuales ha descubierto lo que se le ocultaba á la simple vista; así también, en el estudio de toda ciencia se ha hecho necesario disponer de un buen método para uniformar las verdades que encierra, y tanto más necesario es este cuanto mayor es el número de verdades en la ciencia objeto de nuestro estudio. No hay ciencia de cualquier clase que sea, que no se vea caracterizada por un método, y sea el que fuere ese método siempre reconoce una base. Considerando pues como una de estas bases la *dualidad* en simetría ú oposición de partes, vamos en este trabajo á considerar el principio *dual* en las ciencias pero muy especialmente en la Matemática, manifestando aunque sea á grandes rasgos la presencia de este principio en algunas ciencias como las naturales y la Geografía, extendiéndonos luego por lo que se refiere á las ciencias Matemáticas, en donde el mencionado principio toma mayores proporciones ó como pudiéramos decir, llega á su mayor grado.

Comenzemos pues por el mundo físico. NATU-

RALEZA; he aquí una palabra que ha recibido muchas acepciones, y de cuyo estudio se han ocupado las ciencias físico-naturales si bien haciéndolo de diferente manera. Si prestamos pues nuestra atencion en los sêres que se encuentran en la superficiê é interior de nuestro globo, vemos yá desde luego *dos* clases de ellos, unos llamados orgánicos y otros denominados inorgánicos que presentan carácteres diametralmente opuestos, y como si aún no fuera bastante esta division para darnos á conocer el principio *dual* ó sea la *dualidad* en simetria ú oposicion, vemos subdividirse á los orgánicos y á los inorgánicos; á los primeros en *animales* y *vegetales* es decir en *dos* clases, y á los segundos en *minerales* y *astros* (distribuidos en el espacio y de los que se ocupa la Astronomia) tambienen *dos* clases presentando propiedades características.

Si en una noche serena se fîja nuestra vista en la bóveda celeste la veremos sembrada de multitud de astros, pudiéndose observar que al paso que unos conservan su colocaciôn y distancia otros varian esa posiciôn, deduciendo de aqui una division *dual* estrellas *fijas* y estrellas *errantes*. Los planetas son cuerpos opacos que giran al rededor del Sol de occidente á oriente en ôrbitas elípticas, y sabido es que además de este movimiento que se llama de *traslaciôn* poseen otro que es el de *rotacion* y verifican sobre su eje. Tenemos pues yá á los planetas con *dos* movimientos mediantes los que hacen su revolucion en un número determinado de años, dias, horas y minutos.

Mas, considerando nuevamente el movimiento de traslacion el que como se ha dicho yá verifican al rededor del Sol, se reconoce sin esfuerzo alguno que este movimiento debe obedecer precisamente como enseña la Física á *dos* fuerzas, pues las ôrbitas ó caminos recorridos por los planetas son elipses y con ese nombre se desígna una curva que estudia la Geometria rama de las matemáticas y por consiguiente, quiere decir, que debe estar sometida á las *dos* fuerzas que rigen á todo movimiento curvilíneo, á las *dos* fuerzas centrales *centripeta* que tiende sin cesar á acercar al cuerpo que se mueve al centro y *centrifuga* que tiende á separarlo ó apartarlo de dicho punto. Y si seguimos nuestro estudio por mas que por un momento nos pasemos al mundo abstracto, reconocerëmos que esa curva llamada elipse tiene *dos* focos situados á diferente lado del centro y situados con simetria y su ecuacion es de segundo grado. No se puede hallar *dualismo* más perfecto.

Si de los planetas pasamos á los satélites cuerpos celestes que pertenecen tambien á las estrellas errantes, se reconoce que están dotados de *dos* movimientos casi todos que son, uno en virtud del que giran al rededor de los planetas que verifican de occidente á oriente y otro de rotacion sobre su eje. El mas notable de todos los satélites es la Luna que lo es de la tierra, cuyo satélite gira al rededor de esta describiendo una elipse y por lo tanto los satelites son una nueva prueba del principio de *dualidad* en el mundo fïsico, si se recuerda lo dicho relativamente á los planetas.

Las ciencias físico-naturales nos ofrecen como se ha dicho yá ejémplos numerosos de la existencia del principio *dual,* pero siendo la Fïsica una de las ciencias que se comprenden con tal denominacion, necesario es que presentemos ejémplos de que esta ciencia nos demuestra la existencia del mencionado principio

Con efecto, admitese en Fïsica que todo cuerpo se compone de partes sumamente pequeñas que se mantienen á cierta distancia en virtud de fuerzas que rigen la materia llamadas fuerzas moleculares, y demuéstrase que son estas en número de *dos,* una que se llama atraccion molecular que tiende sin cesar á acercar las moléculas y otra ó segunda que tiende á separarlas repulsion molecular, y nótese bien la importancia que debe darse á esas fuerzas moleculares, pues de ellas resultan los tres estados generales de los cuerpos ó sea la division en sólidos, liquidos y gaseosos, segun que la atraccion es mayor, igual ó menor que la repulsion. Las dos fuerzas moleculares antes nombradas, realizan pues una verdadera *dualidad en oposicion*, por cuanto producen efectos contrarios cuales son acercar y separar las moléculas.

Como este, pudieramos citar algunos ejemplos más que presenta la Física acerca el principio *dual*. No lo harémos, sin embargo, por cuanto nos extenderiamos demasiado estudiando el mundo físico, siendo nuestro objeto despues de haber dado á conocer brevemente el principio en él; extendernos algo mas respecto el mundo abstracto en que se encuentra la Matemática. Pasemos pues á ocuparnos de la *dualidad* en la ciencia matemática principiando por lo referente al número.

Hace algunos años tuvimos ocasion de leer un escrito en el que se decia que la primera division *dual* la fijaba el Espacio y el Tiempo, *elementos de la Matemática*; el Espacio engendrador de la Geometría y el Tiempo engendrador del cuanto ó sea del número. No comprendemos nosotros que sean el Espacio y el Tiempo elementos de la Ciencia Matemática, es decir, que se ocupe esta ciencia en estudiar el Espacio y el Tiempo. El Tiempo lleva impreso un carácter que es el de ser *sucesivo* como lo es el número *sucesion de unidades*, pero cabe aqui preguntar ¿no es tambien el espacio *sucesivo*? Desde luego; pues no podemos considerar ninguna magnitud por sencilla que sea, una linea recta por ejemplo, sin mirarla como una sucesion de elementos (puntos) en cualquiera de los dos sentidos que constituyen su direccion interna. Luego necesariamente hay que convenir en que si el número guarda cierta relacion con el Tiempo, por ser sucesivo como él, tambien la tiene con el Espacio por ser este sucesivo, y si el tiempo es inagotable en el órden progresivo y regresivo, el espacio tambien es infinito en la progresion y regresion de cada una de sus tres direcciones fundamentales.

Con lo que llevamos apuntado, queremos decir que no estamos conformes en que el objeto de la ciencia matemática sea el Tiempo y el Espacio; el objeto de esa ciencia es la *cantidad*, y por lo tanto, no fijarémos nosotros la primera division *dual* en el Tiempo y Espacio como comprendidos en la matemática.

La primera division *dual* la fijaremos en el mismo *número*. Al número se le define como es sabido el resultado de comparar la cantidad con la unidad, que sí bien es arbitraria ha de ser de la misma especie que la cantidad que se compara con ella. Aqui vemos desde luego *dos* elementos, cantidad que se compara y unidad con la que se compara.

Sin apartarnos del *número* encontramos aún el principio *dual*. El número, puesto en relacion con otros, se somete á operaciones conocidas cuales son, suma, resta, multiplicación, división, potencias y raices; unas que se llaman de composicion ó directas y otras de descomposicion ó inversas, pudiendo considerarse todo número como *suma, diferencia, producto, cociente, potencia y raiz*. Pero es de notar, que esas seis operaciones se dividen en grupos de *dos* comprendiendo cada grupo una operacion directa y otra inversa, lo que pone de manifiesto el principio dual.

1.er grupo	Suma. (Reunión de números en general)	
	Resta. (Inversa de la Suma)	
2.º grupo	Multiplicación. (Reunión de números iguales)	
	División. (Inversa de la multiplicación)	
3.er grupo	Elevacion á potencias.	Reunion de números iguales, y en igual número que unidades tiene uno de ellos.
	Extraccion de raices.	Inversa de la elevacion á potencias.

Fijémonos todavia una vez más en el cuadro anterior, y á poco que se medite se reconoce que las operaciones directas que forman los grupos segundo y tercero, es decir, la multiplicación y la elevación á potencias no son más que formas que se derivan de la suma, así como, las inversas de los mismos grupos ó sean la división y la extracion de raices son formas derivadas de la resta. Deducimos pues del cuadro anterior el siguiente.

Operaciones { de composición, referidas á la suma.
de descomposición, referidas á la resta }

que pone de manifiesto el principio *dual*.

Ademas, toda operación cualquiera que sea tiene por objeto representar el resultado que se obtiene al ejecutar la misma, en una forma que tenga relación con el sistema de numeración que se adopte, y en un sistema de numeración sea el que fuere, se reconoce el principio *dual* como quiera que al dársenos un número se tiene por una parte el valor fijo de la base del sistema en que está escrito, y por otra el valor de la cifra, es decir, *dos* elementos. Así, si se dá el número 5, se tiene la base del sistema que puede ser 6, 7, 8, 9, 10 etc. y el valor 5 que constituye el absoluto de dicha cifra, podemos expresarlo así;

Sistema de numeración { Valor fijo de la base.
Valor absoluto de las cifras, }

De aqui, que los Matemáticos quisieron estudiar al número en si sin sujeción á ninguna base y se sucedieron muchos trabajos de los cuales nos dá conocimiento la historia de las ciencias matemáticas.

Si fijamos la atención en la serie natural de los números enteros, nada á primera vista nos dice esta série, pero si se comparan entre si los mismos números, facilmente se nota que al paso que los unos son primarios ó elementales (pudieramos decir primos) hay otros que no lo son qne llamamos compuestos. Tenemos otra vez el principio *dual*.

Números { Primarios ó primos.
Compuestos.

Si nos fijamos nuevamente en la série natural entera, y la consideramos descompuesta en dos, tres, cuatro, cinco, etc. séries subalternas y agrupamos las formas respectivas resultantes, facilmente se obtiene una general $mA + B$; que comprende las anteriores, es decir, comprende á la primera que espresa los números de la série natural dispuestos en columnas verticales de dos términos en órden de graduación, á la segunda, representativa de los mismos números pero dispuestos en columnas verticales de tres términos tambien en órden de gradacion, á la tercera, que representa los mismos números y dispuestos de la misma manera pero en columnas de cuatro etc.

Para formar estas series subalternas se han tomado como tipos los terminos de la serie natural y los números menores que estos términos, de manera que en la forma resultante que es *dual* $m\ A + B$; el segundo término B está evidentemente enlazado con el factor m del primero por que representa todos los números inferiores á este.

Pitágoras, matemático que vivió años antes de nuestra era y jefe de la escuela que lleva su nombre, dividía yá en su tiempo los números en pares ó simétricos é impares ó asimétricos; los dividia pues en *dos* clases, se vé que ya en aquellos tiempos se reconocia el principio *dual*. Digamos en que fundaba Pitágoras su división ó clasificación. Tomando por modelo el cuerpo humano en el cual los órganos del movimiento, estan situados lateralmente á derecha é izquierda de la linea media, suponia la cabeza y los brazos formando un triangulo y de esta manera obtenia todos los números que representaba por puntos. Los pares ó simétricos eran los producidos por la suma de los puntos laterales horizontales del triángulo mencionado hecho caso omiso de la linea media (vertical) comenzando por la parte superior. Introducia luego la linea media y por el mismo procedimiento de sumas horizontales obtenia los números impares ó asimétricos. Llegaba procediendo así, á obtener una figura que en Geometria se llama triángulo rectángulo isósceles, y este triángulo á su vez, se componía de *dos* triángulos rectángulos isósceles iguales.

Segun la doctrina de la escuela Pitagórica, los números impares tenian un principio, un medio y un fin, al paso que los pares carecian de medio. Esta manera de considerar los números, está en perfecta armonia con lo que se ha dicho respecto el modo de obtener los números pares é impares; recuerdese bien, que en los primeros no se tiene en consideración la línea media, mientras que en los últimos no se puede prescindir de esta linea.

Vemos ocuparse tambien á los Pitagoristas del *par-impar* que representaban por la fórmula.

$$(2a + 1) . 2 = 4a + 2.$$

que comprende todos los números divisibles por 2 solamente y no por 4, es decir el duplo de todo número impar como 2=2.1,, 6= 2. 3 etc. Nuevamente se vé una multiplicación por *dos* (*dualidad*); esto es, todos los números pares podian referirse á los impares de donde procedian por una multiplicación *dyádica*, si nos servimos de la espresion pitagórica que llamaba *dyáde* al *dos*.

Continuemos examinando el modo de constituir los números figurados en la escuela Pitagórica, y al ver que de los números triangulares que presentan por diferencias sucesivas la serie natural de enteros, es decir, los términos de una progresión aritmetica cuya diferencia d = 1, se forman por sumas sucesivas los numeros piramidales; que procediendo de igual manera con los términos de la pogresión anterior se obtienen tambien los triangulares ó trigonales, y sucesivamente se obtienen los tetragonales, pentagonales, exagonales etc. practicando igual operación con los terminos de progresiones de diferencia d=2, d=3, d=4 etc., y que en general se podian representar estas progresiones por *dos* signos por ejemplo, d. a en que d indica la diferencia de la progresión (número fijo) y a (variable) todos los terminos á partir de 1; no podemos dudar de que se daba en aquel tiempo importancia al principio *dual*.

Sin salirnos de la escuela pitagórica, vamos á hacer algunas consideraciones sobre el *gnomon* á fin de ver confirmado una vez más en dicha escuela el principio de *dualidad* ¿Que era el gnomon? Pues era ni más ni menos que la union de *dos* lineas perpendiculares que rodean al cuadrado, y que por su forma en ángulo recto recibia este nombre, de la misma manera que el gnomon propiamente dicho ó sea el stylo de los cuadrantes solares forma ángulo recto con su sombra, y no se estrañe que invadamos el campo geométrico cuando se habla de números, pues sabido es que en tiempo de Pitágoras la Aritmética estaba combinada con la Geometria.

Por medio del gnomon se esplicaba en aquellos tiempos el modo de formar los números pares hasta el infinito. Así siendo la diferencia de dos cuadrados consecutivos una figura compuesta de *dos* rectángulos formando ángulo recto, es decir, de dos figuras teniendo cada una igual superficie, y suponiendo representada esta superficie por S, se tenia S + S = 2 S tipo del número par y de esta manera se obtenian los números pares 2=1+1, 4=2+2 etc., debiendo tambien notarse que eran de diferente especie por la adición del cuadrado unidad.En cuanto á los impares, se formaban al infinito añadiendo sucesivamente la unidad á todos los números pares, lo que se demostraba por medio de los cuadrados sucesivos y fajas que les rodeaban.

Se ha manifestado anteriormente la importancia que en tiempo de Pitágoras se daba al *dyade* ó sea al *dos*, pero aun la consideración del mismo *dyade* evidenciaba el principio que sostenemos en este escrito. Veamos como. Si se suman dos terminos consecutivos de la série de números impares, produce siempre un multiplo de 4 que de un modo general puede representarse por 4a. Este hecho observado yá por los Pitagoristas, les indujo á llamar *dyade axil ó primero* al producto 4 a×1, denominando de igual manera á los demás dyades á partir del centro ó axil, segundo, tercero cuarto etc. y el formado por los extremos recibia el nombre de *dyade lateral simétrico*.

Si se observa que los términos que forman los números impares consecutivos son los de una progresion aritmética de diferencia 2, y se recuerda que la suma de los términos que equidistan de los extremos es igual á la de estos extremos si el número de términos es par, ó igual al duplo del término medio si dicho nûmero es impar; se reconoce sin dificultad que los *dos* elementos de cada dyade, se distribuyen simetricamente á derecha é izquierda del dyade axil ó primero, con lo cual queda plenamente probado que el principio de *dualidad* está tambien evidenciado por el mismo dyade segun habíamos dicho.

Theón de Smyrna, matemático del siglo segundo de nuestra era, pertenecia á la segunda escuela de Alejandría y se ocupó bastante de la teoría de los números. La primera division que hacía de los números era la de pares é impares, llamando pares á los divisibles en *dos* partes iguales é impares á los que no se podían dividir en esas dos partes. Daba una segunda división en primos é indescomponibles y compuestos. Los primeros los definía como se hace hoy, diciendo que no son medidos más que por la unidad y por sí mismos. pero los designaba con vários nombres tales como primos, no compuestos ó indescomponibles, lineales, es decir, con solo longitud (téngase presente que hemos dicho se estudiaba entonces la Aritmética en combinación con la Geometría) euthymétricos (usamos de esta palabra para acomodarnos al lenguaje usado en la obra de Théon) é imparmente impares. Los compuestos se difinían, los que eran medidos por otro número, se llamaban planos unos y sólidos otros. Esta división *dual* estaba fundada en el número de factores primos constitutivos que podian ser dos ó tres. Así, el número 14 era plano por descomponerse en 2×7 y $66 = 2 \times 3 \times 11$ era sólido.

Al estudiar los números Theón de Smyrna, los dividió tambien en *dos* clases, de parmente impares (téngase presente lo dicho respecto la palabra *euthymétrico*) é imparmente pares. Los primeros eran divisibles por el 2 pero dando cóciente impar, tal sucede con el número 18 cuya mitad es 9, mientras que los segundos eran divisibles dos veces por el 2 ó por 4, tal acontece con el $28 = 4 \times 7$. Y como en este último caso siempre la mitad del número es tambien par como él, se deduce una división *dual* de los números pares.

Números pares { Parmente impares ó cuya mitad es impar.
Imparmente pares ó cuya mitad es par.

Los del primer grupo se componen efectivamente de *dos* números impares iguales entre sí, $(18 = 9 + 9)$ y los del segundo de *dos* números pares tambien iguales entre sí, $(28 = 14 + 14)$, lo que puede servir de cierto modo para justificar sus denominaciones.

Otra división encontramos aún en la obra de Théon, que es la de números *æqualiter æqualibus* é *inæqualiter inæqualibus*. Esta división se referia á los números planos, es decir, á los que tenian longitud y latitud. Los que tenian estas dos dimensiones iguales pertenecian al primer grupo y los que las tenian desiguales al segundo. Sirvan de ejemplo $9 = 3 \times 3$,, $25 = 5 \times 5$ del primer grupo y $14 = 2 \times 7$,, $10 = 2 \times 5$ del segundo.

Finalmente, el estudio de los números cuadrados suma de *dos* números triangulares consecutivos, de los paralelográmicos producto de *dos* factores n $(m+n)$ y de los oblongos producto tambien de *dos* factores m $\times$ n; acaban de darnos idea completa de lo que es el principio *dual.*

Si prosiguiendo nuestro estudio nos fijamos en el modo de ser de la cantidad, la veremos figurar desde luego como positiva y negativa en los tiempos de Descartes, es decir, con *dos* modos opuestos de existencia; *dualidad* realizada en la cantidad y si bien esta *dualidad* desaparece yá, por los estudios hechos en el siglo presente en el cual se ha probado logicamente que la division de las cantidádes en positivas y negativas es falsa, debiendo admitirse como tercer miembro de la división las cantidades imaginarias que son tan legítimas como las reales; á pesar de todo esto, se establece una nueva *dualidad* por cuanto se expresa por el signo $\llcorner$ que señala la perpendicularidad el imaginarismo de las cantidades, esto es, por *dos* rectas perpendiculares entre sí.

Más aún, toda espresión imaginaria consta de *dos* elementos llamados módulo y argumento. El módulo que es siempre real corresponde á la categoría de cantidad (como se ha demostrado en el siglo presente) y el argumento que es real en las cantidades reales á las cuales se extiende la teoría del módulo y del argumento é imaginario en las cantidades imaginarias; corresponde siempre á la categoria de cualidad. Vése pues, que si bien la introduccion del imaginarismo en los cálculos matematicos hace desaparecer la *dualidad*; esta vuelve nuevamente á aparecer en la consideracion de las imaginarias.

Y nótese bien, que precisamente las cantidades llevan consigo estos *dos* elementos ó explicita ó implicitamente. Así, en la cantidad A está el módulo en A y el argumento en el $+1$ pues $A=+1$. A,, en $-A$ el módulo es A y el argumento -1 por qué $-A=-1$. A, en las imaginarias de la forma $A\pm B\sqrt{-1}$ el módulo es $\sqrt{A^2+B^2}$ y el argumento ó coeficiente puede representarse por a, y por último en la forma $\sqrt[2n]{-A}=\sqrt[2n]{A}.\sqrt[2n]{-1}$ el primer factor es módulo y el segundo argumento.

Pascal, matemático del siglo XVII, llama á las simples unidades números de *primer* órden, de *segundo* á los de la serie natural, de *tercero* á los formados por la adicion de los naturales, (triangulares), de *cuarto* á los que se forman por la adicion de los anteriores ó triangulares, (piramidales), de quinto, á los formados de igual manera por los precedentes, y así sucesivamente, y disponiendo estos números en forma de triangulo construye su triángulo aritmetico, el cuál contiene por lineas horizontales los coeficientes todos de las potencias cuyos exponentes están indicados por la línea vertical que comprende los números naturales.

Pedro Fermat matemático tambien del siglo XVII, se ocupó de teoría de los números y entre las muchas proposiciones que sienta son de notar algunas que hacen referencia á los números trigonales, tetragonales, pentagonales etc. Dice que, todo número es trigonal ó compuesto de dos ó tres números trigonales, ó es el mismo cuadrado ó formado por dos, tres ó cuatro cuadrados, pentagonal, ó compuesto de dos, tres, cuatro ó cinco números pentagonales etc. y notemos bien que dice *dos* ó más, es decir, por lo menos *dos* (*dualidad*). Es verdad, que se nos dirá que toda *cosa* para llamarse compuesta, es preciso que conste de dos elementos por lo menos, porqué de lo contrario ya no debería llamarse compuesta sinó simple ó elemental; pero, debe notarse que los *dos* elementos han de ser y son precisamente de la misma especie, es decir, ó trigonales ambos ó tetragonales ó pentagonales etc. y que no son iguales por lo general. Así el número 7 no es trigonal y se compone de 6 y de 1 ambos trigonales, el 45 no es tetragonal y se descompone en 9 y 36 que son cuadrados, el 17, no es pentagonal é igualmente se descompone en 12 y 5 que lo son, y otro tanto diriamos de otras formas numéricas, todo lo cual dice ya, que en esas formas está de manifiesto la *dualidad*.

El siglo en que vivimos se ha enriquecido con un nuevo descubrimiento cual es el de las *determinantes*, teoría importantísima que se va exigiendo ya siquiera sea paulatinamente en los estudios universitarios y profesionales, y ha venido á probar tambien la *dualidad*. Con efecto, basta haber penetrado estos estudios para ver que el desarrollo de una determinante queda reducido á una forma *dual*, pues sabido que los términos ván alternando de signos, fácil es reunir en uno solo los de signo positivo y también en uno solo los de signo negativo, viniendo de este modo á una espresión *dualística* tal como A—B.

Podríamos extendernos algo más estudiando en los números espresados en general el principio referido en el desarrollo de este trabajo, más no queremos concluirle sin antes exponer dicho principio aunque sea con brevedad en la Geometría.

Muchas cuestiones presenta el estudio de esta ciencia en que se manifiesta la dualidad, bastará sin embargo, nos fijemos en algunas de ellas.

Daremos como ejemplo en primer lugar la teoría de poligonos. En toda figura geométrica así denominada demuestrase que la componen *dos* clases de elementos que son lados y ángulos. En la teoría de semejanza, se atiende á la proporcionalidad de lados é igualdad de ángulos, ya sean triángulos, ya sean poligonos de mayor número de lados; porqué si bien parece que hacemos omisión en algun caso de semejanza de triángulos de una de esas *dos* condiciones; sin embargo, en realidad no es así por cuanto la una conduce necesariamente á la otra. Si bien dos triángulos son semejantes teniendo los ángulos iguales, de ser semejantes debe admitirse forzosamente la proporcionalidad de lados. La teoría de igualdad nos pone de manifiesto lo mismo, solo aquí la razon de semejanza es igual á la unidad. Por fin, la teoría de los polígonos convexos inscritos y circunscritos á la circunferencia cuyos perímetros se van acercando á ella, nos acaba de evidenciar nuestro punto doctrinal. Aquí se vé una verdadera *dualidad* pero es en oposicion de partes, por cuanto mientras los perimetros de los polígonos inscritos van *aumentando* para acercarse á la circunferencia, los perímetros de los circunscritos ván *disminuyendo* para acercarse á ella.

Mucho más se podría decir sobre esta matéria. No lo haremos, pues con todo lo dicho basta para poner en evidencia que el principio *dual* se manifiesta en las ciencias y en especial en la Matemática, objeto que nos hemos propuesto en el desarrollo de este trabajo.