
Simetrías de los sistemas del Oscilador Armónico y Kepler-Coulomb en coordenadas esféricas



Universidad de Valladolid

Trabajo de Fin de Master en Física

Sergio Salamanca Pita

Departamento de Física Teórica, Atómica y Óptica

Supervisor: Dr. Javier Negro Vadillo

Índice

1. Introducción	3
1.1. Operadores ladder	3
1.2. Operadores shift	5
2. Sistemas 3D con simetría esférica	6
2.1. Momento angular	8
2.2. El oscilador armónico en 3D	10
2.2.a. Simetrías independientes del OA	12
2.2.b. Funciones propias	14
2.3. El OA tridimensional clásico	15
2.4. Tensor de Fradkin-Demkov	16
2.5. El sistema de Kepler-Coulomb	18
2.5.a. Simetrías del sistema de KC total	20
2.5.b. Funciones propias	20
2.5.c. Caso KC clásico	21
2.5.d. Vector Runge-Lenz	21
2.6. Coordenadas ignorables	21
3. Sistemas d-Dimensionales	22
3.1. Momento angular generalizado	24
3.1.a. Operador ladder	25
3.1.b. Operadores shift	25
3.2. Hamiltoniano radial	26
3.2.a. Oscilador armónico	27
3.2.b. Kepler-Coulomb	27
3.3. Simetrías	28
3.4. Sistemas clásicos	29
3.4.a. Oscilador	29
3.4.b. Kepler-Coulomb	29
3.4.c. Coordenadas Ignorables	30
4. Conclusiones	30

Abstracts

Abstract

The aim of this project is to build the symmetries of the harmonic oscillator and Kepler-Coulomb systems in both classical and quantum formalisms.

We will apply the factorization method to obtain ladder and shift operators which will be the basic ingredients in order to get these symmetries. We will first consider the 3-dimensional case of the systems to illustrate the method. Next, we compare the symmetries obtained by our procedure with the well known symmetries which are expressed in cartesian coordinates. These symmetries that can be found in the references are called the Fradkin-Demkov tensor (for the harmonic oscillator) and the Runge-Lenz vector (for the Kepler-Coulomb). Finally, we consider the general case of d -dimensional systems by extending in a straightforward way the previous arguments already applied in 3 dimensions.

Resumen

El objetivo de este proyecto de fin de master es la construcción de las simetrías de los sistemas del oscilador armónico y de Kepler-Coulomb en los formalismos de la mecánica cuántica y de la clásica. Haremos uso del método de factorización para obtener un tipo de operadores conocidos como “ladder” y “shift” que constituyen los ingredientes básicos de las simetrías. Para ilustrar el método comenzaremos por el caso de sistemas en 3 dimensiones. Después compararemos las simetrías obtenidas de esta manera con las bien conocidas en la literatura, en términos de coordenadas cartesianas, como el tensor de Fradkin-Demkov (para el oscilador armónico) y el vector de Runge-Lenz (para el sistema de Kepler-Coulomb). Finalmente hemos considerado las simetrías para sistemas de d -dimensiones extendiendo de forma directa los argumentos anteriores.

1. Introducción

Este trabajo está dedicado a las simetrías de los sistemas del oscilador armónico isótropo (OA) y de Kepler-Coulomb (KC) dentro de los formalismos de la mecánica clásica y cuántica. Comenzaremos con la formulación cuántica y después veremos que un límite razonable nos permite resolver las simetrías en el caso clásico.

En principio parece poco interesante plantear un problema que es tan clásico en el tiempo y que es tan conocido a lo largo de los estudios de grado. Trataremos de motivar el interés que pueden tener estas cuestiones como objeto de un trabajo de master. Para atraer el interés del lector mencionaremos algunas novedades de nuestra aproximación que son aplicables a otros sistemas menos conocidos (y por lo tanto más curiosas): (i) Plantearemos el estudio en coordenadas esféricas dado que ambos sistemas son separables en dichas coordenadas. Esto nos permitirá seguir los mismos pasos y hará fácil la comparación de los resultados de ambos casos. (ii) La separación en coordenadas esféricas da lugar a una sucesión ordenada de subsistemas, cada uno de una dimensión menor. Otras veces el proceso de separación origina otra relación entre subsistemas, como el de las coordenadas cartesianas para el oscilador que mostraremos brevemente en una sección. Cada subsistema suministra automáticamente una simetría, y dichas simetrías conmutan entre sí, por lo que obtenemos un número de simetrías en involución igual a la dimensión. Esta propiedad nos garantiza que el sistema es integrable. (iii) Pero lo más interesante es cuando podemos aplicar el método de factorización [1, 2] a esta cadena de subsistemas para construir operadores que se denominan “ladder” y “shift”. Estos operadores nos permiten obtener más simetrías que conectan cada par de subsistemas consecutivos en la cadena (o cada par de ‘sistemas paralelos’ en las coordenadas cartesianas). De esta manera llegamos a obtener el máximo número de simetrías independientes, que para un sistema de d dimensiones es $2d - 1$. Siguiendo este camino, que no hemos visto aplicar previamente, comprobamos que los sistemas del OA y de KC pertenecen al club muy reducido de sistemas maximalmente superintegrables.

La organización del trabajo es la siguiente. En primer lugar introducimos los operadores “ladder” y “shift” mediante un par de ejemplos en una sección ‘previa’. Comenzamos de hecho, en la sección 3, con los sistemas tridimensionales que poseen simetría esférica, centrándonos en el OA y KC. Mostramos cómo se aplica el método de factorización en ambos casos para obtener las simetrías. También comentamos con cierto detalle cómo los operadores “lader” también se aplican en coordenadas cartesianas para obtener las simetrías conocidas como tensor Fradkin-Demkov. Este método que se desarrolla para el formalismo cuántico, se implementa de manera automática para el de la mecánica clásica. Los conceptos de funciones “ladder” y “shift” están bien definidos y se aplican para construir constantes de movimiento. Acabamos la sección mostrando cómo las simetrías obtenidas determinan un sistema de variables dinámicas de tipo acción-ángulo formadas por variables ignorables. Finalmente, en la sección 5 se incluye una extensión de estas consideraciones a los sistemas en d dimensiones.

1.1. Operadores ladder

Un método para calcular las simetrías del operador Hamiltoniano en Mecánica Cuántica consiste en hacer uso de unos operadores auxiliares que se denominan “ladder” (o escalera, creación-anihilación) y

“shift” (o desplazamiento, entrelazamiento, . . .). Introducimos a continuación estos operadores mediante un par de ejemplos muy sencillos. En Mecánica Clásica existen análogos a los operadores ladder y shift que se denominan funciones ladder y shift. Aunque su interpretación es diferente, también permiten calcular las simetrías de los sistemas clásicos, como veremos después.

El ejemplo más típico de operadores tipo ladder se presenta en el oscilador armónico unidimensional,

$$H = -\partial_{xx} + \frac{\omega^2}{4}x^2 \quad (1.1)$$

en donde hemos tomado $\hbar = 1, 2m = 1$, (se pueden esconder en x, ω y en la energía E). Construimos los operadores bien conocidos a^\pm que factorizan H y que verifican las relaciones

$$a^\pm = \mp \partial_x + \frac{\omega}{2}x, \quad H = a^+a^- + \frac{\omega}{2}, \quad [a^-, a^+] = \omega \quad (1.2)$$

Dichos operadores no son simetrías de H (no conmutan con H), por el contrario, realizan los conmutadores

$$[H, a^\pm] = \pm \omega a^\pm \iff a^\pm H = (H \mp \omega)a^\pm \quad (1.3)$$

Esta relación significa que cuando a^\pm actúan sobre una función propia de H el resultado es otra función propia, cuya energía aumenta (+) o disminuye (-) en un cuanto ω . Estos operadores permiten desplazarnos entre estados propios del mismo operador H con diferente energía (de ahí el nombre de ladder o escalera). Entonces, los estados propios ψ_n del sistema pueden construirse con la ayuda de operadores a^+ actuando sobre el estado fundamental ψ_0 aniquilado por a^- ,

$$a^- \psi_0 = 0 \implies \psi_0(x) = N e^{-\frac{\omega}{4}x^2} \quad (1.4)$$

siendo N una constante de normalización. De modo que

$$\psi_n(x) = N(a^+)^n e^{-\frac{\omega}{4}x^2}, \quad H\psi_n(x) = \omega(n + \frac{1}{2})\psi_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.5)$$

Extendiendo esta idea, de forma general diremos que A^\pm son operadores ladder de un Hamiltoniano H si actuando sobre funciones propias de H originan otras funciones propias del mismo H pero con otros valores de la energía. En términos de conmutadores, tales operadores obedecen a las siguientes relaciones parecidas a las del oscilador (1.3):

$$[H, A^+] = \Delta(H) A^+, \quad [H, A^-] = -A^- \Delta(H) \quad (1.6)$$

o equivalentemente,

$$(H - \Delta(H))A^+ = A^+ H, \quad H A^- = A^- (H - \Delta(H)) \quad (1.7)$$

en donde $\pm\Delta(H)$ es el cambio de energía (que pudiera no ser constante y depender de H) originado por la acción de A^\pm .

1.2. Operadores shift

Tomemos como ejemplo para introducir un operador shift (o desplazamiento, entrelazamiento, intertwining) al Hamiltoniano procedente del momento angular, L^2 , en la variable θ siguiente

$$H_m := L_m^2 = -\partial_{\theta\theta} - \frac{1}{\tan\theta}\partial_{\theta} + \frac{m^2}{\sin^2\theta}, \quad \theta \in (0, \pi) \quad (1.8)$$

Este Hamiltoniano unidimensional tiene un pozo de potencial infinito, de manera que tendrá un espectro discreto, procedente de estados ligados, formado por infinitos valores propios conocidos: $\ell(\ell + 1)$ (con $\ell \geq m$). Observemos que dicho Hamiltoniano (1.8) depende de un parámetro real m que es el valor propio de la componente L_z .

Podemos factorizar L_m^2 mediante operadores L_m^{\pm} de dos formas:

$$L_m^2 = L_m^- L_m^+ + m(m+1) = L_{m-1}^+ L_{m-1}^- + m(m-1) \quad (1.9)$$

siendo

$$L_m^+ = \partial_{\theta} - m \cot \theta, \quad L_m^- = -\partial_{\theta} - (m+1) \cot \theta \quad (1.10)$$

Una propiedad clave de los operadores L_m^{\pm} es que conectan los Hamiltonianos sucesivos L_m^2 y L_{m+1}^2 :

$$L_m^2 L_m^- = L_m^- L_{m+1}^2, \quad L_m^+ L_m^2 = L_{m+1}^2 L_m^+ \quad (1.11)$$

En definitiva, un par de operadores, tales como L_m^{\pm} , que entrelazan dos Hamiltonianos H_m con parámetros diferentes: H_m y $H_{m'}$, en donde $m' = m \pm 1$ (podría ser otro valor: $m' = m \pm \delta$), se denominan operadores shift (desplazamiento). En este caso, dichos operadores se pueden interpretar como los que conectan estados de diferentes Hamiltonianos, con la misma energía. En contraste, recordemos que los operadores ladder se interpretaban como los que conectan estados del mismo Hamiltoniano pero con energía diferente.

Señalemos que en este trabajo, los operadores Hamiltonianos, ladder, shift, simetrías . . . , se consideran como operadores diferenciales (a veces con ciertas condiciones de contorno para seleccionar soluciones de cuadrado integrable por ejemplo). En general, no nos detendremos a discutir su carácter como operadores definidos en espacios de Hilbert y las propiedades formales en ese contexto.

Podemos apreciar la diferencia entre operadores ladder y shift a través de los conmutadores teniendo en cuenta que de la expresión (1.8) se sigue que

$$H_{m+1} = H_m + \frac{2m+1}{\sin^2\theta} \quad (1.12)$$

Entonces las relaciones (1.11) se pueden escribir

$$[H_m, L_m^-] = L_m^- \frac{2m+1}{\sin^2\theta}, \quad [H_m, L_m^+] = -\frac{2m+1}{\sin^2\theta} L_m^+ \quad (1.13)$$

Como vemos, el término que aparece a la derecha de los conmutadores de (1.13), son los operadores L^{\pm} multiplicando al cambio del potencial (1.12) producido en la relación de intertwining (1.11). Es importante recordar la diferencia de los conmutadores (1.6) para los operadores ladder junto a los (1.13) para los operadores shift.

2. Sistemas 3D con simetría esférica

Inicialmente, trabajaremos con sistemas centrales en tres dimensiones, cuyo potencial $V(r)$ dependa únicamente de la variable radial, de modo que si utilizamos coordenadas esféricas (r, θ, φ) el Hamiltoniano toma la siguiente forma

$$H = \left(-\partial_{rr} - \frac{2}{r}\partial_r + V(r) + \frac{1}{r^2} \left(-\partial_{\theta\theta} - \frac{1}{\tan\theta}\partial_\theta - \frac{1}{\sin^2\theta} \left(\partial_{\varphi\varphi} \right) \right) \right) \quad (2.1)$$

La estructura en forma anidada, o concatenada, del operador H indica lo siguiente: Hay tres operadores, que vienen dados por los sucesivos paréntesis en (2.1), que denotamos por

$$\{ L_z^2, L^2, H \} \quad (2.2)$$

Estos tres operadores, incluyendo el propio H , conmutan entre sí, debido a la estructura concatenada. Entonces se dice que dichos operadores forman un sistema de 3 simetrías (independientes) de H en involución y el sistema se denomina “integrable” en el sentido de Liouville.

Las simetrías (2.2) se corresponden con la separación de variables en coordenadas esféricas. Comentamos a continuación el papel de estas tres simetrías.

1. $L_z^2 = -\partial_{\varphi\varphi}$.

Este es el primero de los operadores de la estructura anidada. Se trata del cuadrado del generador $L_\varphi = i\partial_\varphi$ de rotaciones en torno al eje z . Es una consecuencia de la elección del eje z para las coordenadas esféricas, por lo que los otros generadores L_x y L_y también serán simetrías (aunque no conmuten entre sí, conmutan con H). Las funciones $\phi_m(\varphi)$ en la variable φ propias de dicho operador son:

$$L_z^2 \phi_m(\varphi) = m^2 \phi_m(\varphi), \quad \phi_m(\varphi) = e^{im\varphi}, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (2.3)$$

Para que $\phi_m(\varphi)$ sea univaluada, el valor propio m debe ser entero.

2. $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = -\partial_{\theta\theta} - \frac{1}{\tan\theta}\partial_\theta - \frac{1}{\sin^2\theta} \left(\partial_{\varphi\varphi} \right)$

Este segundo operador que contiene al primero es el Casimir del momento angular cuyos valores propios son $\ell(\ell + 1)$, $\ell = 0, 1, 2, \dots$. Podemos tomar funciones propias $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ de L^2 que también lo sean de L_z^2 ,

$$Y_\ell^m(\theta, \varphi) = P_\ell^m(\theta)\phi_m(\varphi) = P_\ell^m(\theta)e^{im\varphi} \quad (2.4)$$

$$L^2 Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \left(-\partial_{\theta\theta} - \frac{1}{\tan\theta}\partial_\theta - \frac{1}{\sin^2\theta} \left(\partial_{\varphi\varphi} \right) \right) Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \ell(\ell + 1) Y_\ell^m(\theta, \varphi) \quad (2.5)$$

En esta última ecuación, debido a la expresión separada (2.4) y a (2.3), nos queda una ecuación para la función $P_\ell^m(\theta)$, con el operador reducido L_m^2 :

$$L_m^2 P_\ell^m(\theta) = \left(-\partial_{\theta\theta} - \frac{1}{\tan\theta}\partial_\theta - \frac{1}{\sin^2\theta} \left(-m^2 \right) \right) P_\ell^m(\theta) = \ell(\ell + 1) P_\ell^m(\theta), \quad \ell \geq m \quad (2.6)$$

$$3. H = -\partial_{rr} - \frac{2}{r}\partial_r + V(r) + \frac{L^2}{r^2}$$

Se trata de la simetría trivial ya que H conmuta consigo mismo. Podemos proponer la función propia separada añadiendo un factor correspondiente a la última variable r ,

$$\Psi_{\ell m}^n(r, \theta, \varphi) = R_\ell^n(r) P_\ell^m(\theta) \phi_m(\varphi) \quad (2.7)$$

La ecuación reducida para la función $R_\ell^n(r)$ será

$$H_\ell R_\ell^n(r) = \left(-\partial_{rr} - \frac{2}{r}\partial_r + V(r) + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) R_\ell^n(r) = E_\ell^n R_\ell^n(r) \quad (2.8)$$

en donde H_ℓ es el Hamiltoniano reducido a la variable r , una vez sustituido el valor propio $\ell(\ell+1)$ de la parte angular. La energía E_ℓ^n , lleva un índice ℓ debido al valor propio mencionado, junto al índice n que, en general, parametriza los valores discretos de los estados ligados (pero que también puede tomar valores continuos de estados scattering).

Las tres simetrías L_z^2 , L^2 y H , asociadas a la separación de variables proporcionan, como hemos visto, una base de estados propios comunes a los tres operadores:

$$\psi_{n\ell m}(r, \theta, \varphi) = R_\ell^n(r) P_\ell^m(\theta) \phi_m(\varphi) \quad (2.9)$$

Los índices n, ℓ, m están asociados con los autovalores de estos estados propios respecto a los operadores $\{H, \vec{L}^2, L_z^2\}$ de la forma siguiente. Hay una ordenación debido a la estructura anidada del Hamiltoniano en las variable (r, θ, φ) y en las simetrías respectivas:

$$L_z^2 \subset L^2 \subset H \quad (2.10)$$

De esta forma, el problema de cálculo de funciones propias se descompone en tres problemas unidimensionales sucesivos:

- 1) $L_z^2 \phi_m(\varphi) = m^2 \phi_m(\varphi)$,
- 2) $L_m^2 P_\ell^m(\theta) = \left(-\partial_{\theta\theta} - \frac{1}{\tan\theta} \partial_\theta - \frac{1}{\sin^2\theta} (-m^2) \right) P_\ell^m(\theta) = \ell(\ell+1) P_\ell^m(\theta)$ (2.11)
- 3) $H_\ell R_\ell^n(r) = \left(-\partial_{rr} - \frac{2}{r}\partial_r + V(r) + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) R_\ell^n(r) = E_\ell^n R_\ell^n(r)$

La función propia $\phi_m(\varphi)$ de L_z^2 es la primera, no depende de otras, y pertenece a un subespacio de funciones en φ . La siguiente, función propia de L^2 , incluye la anterior: $Y_\ell^m(\theta, \varphi) = P_\ell^m(\theta) \phi_m(\varphi)$; y cuando L^2 se reduce al subespacio de este tipo de funciones obtenemos una ecuación reducida en la variable θ para el operador L_m^2 . Lo mismo se puede decir de H con respecto a la simetría anterior L^2 y de su ecuación reducida para $R_\ell^n(r)$ del operador $H_\ell(r)$.

Este tipo de separación sucesiva por supuesto no es la única, de hecho comentaremos más adelante la separación en coordenadas cartesianas que tiene un carácter paralelo en vez de sucesivo.

2.1. Momento angular

En esta sección nos centramos en la ecuación en valores propios del operador momento angular L^2 , que es común a los potenciales centrales:

$$\vec{L}^2 = -\partial_{\theta\theta} - \frac{1}{\tan\theta}\partial_{\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_{\varphi\varphi} \quad (2.12)$$

Introduciremos la construcción de simetrías mediante este ejemplo que es bien conocido. Las funciones propias separadas de este operador son los armónicos esféricos, $Y_m^\ell(\theta, \phi)$, pero los miraremos bajo otro punto de vista. Recordemos que tienen la siguiente expresión,

$$Y_\ell^m(\theta, \varphi) = N e^{im\varphi} P_\ell^m(\cos\theta) \quad (2.13)$$

en donde las funciones P_ℓ^m son las funciones asociadas de Legendre. Los armónicos Y_ℓ^m son funciones propias comunes de los operadores L_z^2 y \vec{L}^2 con valores propios respectivos m^2 y $\ell(\ell+1)$,

$$\vec{L}^2 Y_m^\ell(\theta, \phi) = \ell(\ell+1) Y_m^\ell(\theta, \phi), \quad L_z Y_m^\ell(\theta, \phi) = m Y_m^\ell(\theta, \phi) \quad (2.14)$$

Tal como hemos explicado, las funciones propias son separables y a su vez son funciones propias de ecuaciones reducidas en cada variable:

$$\vec{L}_m^2 P_\ell^m(\cos\theta) = \left(-\partial_{\theta\theta} - \frac{1}{\tan\theta}\partial_{\theta} + \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right) P_\ell^m(\cos\theta) = \ell(\ell+1) P_\ell^m(\cos\theta) \quad (2.15)$$

$$L_z^2 e^{im\varphi} = m^2 e^{im\varphi} \quad (2.16)$$

Ahora el objetivo es obtener los operadores shift y ladder para estas ecuaciones reducidas del momento angular y después veremos cómo se construyen las simetrías asociadas.

(a) Operadores ladder para L_z^2

Es trivial comprobar que los operadores ladder de $L_z^2 = -\partial_{\varphi\varphi}$ se pueden elegir simplemente exponenciales

$$A_z^\pm = e^{\pm i\varphi}, \quad A_z^\pm \phi_m \propto \phi_{m\pm 1} \quad (2.17)$$

El conmutador de tipo ladder también toma la forma (1.6)

$$A_z^\pm L_z^2 = (L_z \mp 1)^2 A_z^\pm \quad (2.18)$$

Lo que se prueba haciendo actuar el operador de cada lado sobre las funciones $\phi_m(\varphi)$.

(b) Operadores shift para L_m^2

Conocemos ya un par de operadores shift L_m^\pm , introducidos en (1.11):

$$L_m^+ = \partial_{\theta} - m \cot\theta, \quad L_m^- = -\partial_{\theta} - (m+1) \cot\theta \quad (2.19)$$

que nos permiten variar el valor de m en la ecuación de L_m^2 , es decir, tales que

$$L_m^2 L_m^- = L_m^- L_{m+1}^2, \quad L_m^+ L_m^2 = L_{m+1}^2 L_m^+ \quad (2.20)$$

De esta forma, al aplicar este operador a una función propia P_ℓ^m del operador reducido L_m^2 , obtenemos otra solución $P_\ell^{m\pm 1}$ con el mismo autovalor $\ell(\ell+1)$,

$$L_m^2 P_\ell^m = \ell(\ell+1) P_\ell^m \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} L_m^+ P_\ell^m \propto P_\ell^{m+1}, \\ L_m^- P_\ell^m \propto P_\ell^{m-1} \end{cases} \quad (2.21)$$

(c) Operadores de simetría para L_m^2

Por medio de los operadores A_z^\pm y L_m^\pm podemos construir un par de operadores de simetría Z_m^\pm del momento angular L^2

$$Z_m^+ = A_z^+(\varphi) L_m^+(\theta), \quad Z_m^- = A_z^-(\varphi) L_m^-(\theta) \quad (2.22)$$

que actúan en el espacio generado por las funciones propias separadas, del tipo

$$Y_\ell^m(\theta, \varphi) = N e^{im\varphi} P_\ell^m(\cos \theta) \quad (2.23)$$

Comprobemos que S_m^+ es en efecto una simetría. Esquemáticamente se ve en el diagrama siguiente:

$$Z_m^+ : Y_\ell^m = \phi_m(\varphi) P_\ell^m(\cos \theta) \xrightarrow{L_m^+} \phi_m(\varphi) P_\ell^{m+1}(\cos \theta) \xrightarrow{A_z^+} \phi_{m+1}(\varphi) P_\ell^{m+1}(\cos \theta) = Y_\ell^{m+1} \quad (2.24)$$

Observemos los detalles siguientes: i) Las simetrías actúan sobre funciones propias separadas de dos operadores sucesivos: L_z^2 y L^2 . Por lo tanto incluye ambas variables: φ y θ . ii) Pueden actuar sobre cualquier función propia separada, no es necesario que sea polinómica o de un tipo especial. Por lo tanto las simetrías no dependen de las funciones propias en sí, sino de los operadores. Otra cuestión es si las simetrías así definidas son las que nos interesan.

Sustituyendo en (2.22) la expresión de las simetrías es

$$Z_m^+ = e^{i\varphi}(\partial_\theta - m \cot \theta), \quad Z_m^- = e^{-i\varphi}(-\partial_\theta - (m+1) \cot \theta) \quad (2.25)$$

o también

$$Z^\pm = e^{\pm i\varphi}(\pm \partial_\theta + \frac{i}{\tan \theta} \partial_\varphi) \quad (2.26)$$

En este ejemplo Z^\pm se identifican los operadores J^\pm que junto a J_z , $\{J^\pm, J_z\}$, forman un sistema de generadores de $so(3)$ que es el álgebra de Lie de simetrías de L^2 .

(d) Operadores ladder para L_m^2

Nuestro objetivo ahora es encontrar operadores ladder que nos permitan variar el momento angular ℓ cuando actuamos sobre una función propia Y_ℓ^m . Para ello partimos de la ecuación en valores propios del

operador \vec{L}^2 sobre los armónicos esféricos,

$$\vec{L}_m^2 Y_\ell^m = \left(-\partial_{\theta\theta} - \frac{1}{\tan\theta}\partial_\theta + \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)Y_\ell^m = \ell(\ell+1)Y_\ell^m \quad (2.27)$$

Multiplicamos por $\sin^2\theta$ y reordenamos, para obtener

$$B_\ell^2 Y_\ell^m \equiv \sin^2\theta(\partial_{\theta\theta} + \frac{1}{\tan\theta}\partial_\theta + (\ell+1)\ell)Y_\ell^m = m^2 Y_\ell^m \quad (2.28)$$

En el operador B_ℓ^2 se han intercambiado los papeles de los parámetros $\ell(\ell+1)$ y m con respecto al Hamiltoniano $H_m \equiv L_m^2$.

Buscamos ahora factorizar este operador de segundo orden como el producto de dos operadores de primer orden,

$$B_\ell^2 = B_\ell^+ B_\ell^- + \lambda \quad (2.29)$$

Obtenemos a la factorización:

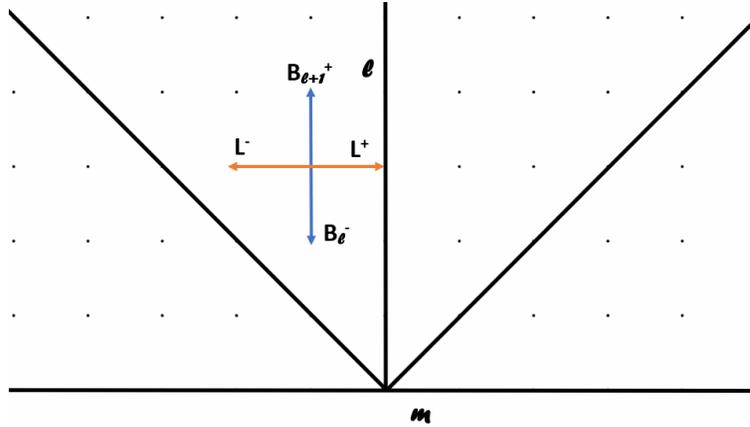
$$B_\ell^\pm = \sin\theta\partial_\theta \pm \ell\cos\theta, \quad \lambda = \ell^2 \quad (2.30)$$

Estos operadores actúan como operadores shift con respecto a los operadores S_ℓ^2 :

$$B_\ell^- S_\ell^2 = S_{\ell-1}^2 B_\ell^- \quad B_{\ell+1}^+ S_\ell^2 = S_{\ell+1}^2 B_{\ell+1}^+ \quad (2.31)$$

ya que nos permiten modificar el valor de ℓ .

De esta forma podemos ver cómo estos operadores ladder con respecto a L_m^2 , junto a los shift hallados antes, nos permiten movernos entre las soluciones Y_m^ℓ tal como se indica en la figura.



2.2. El oscilador armónico en 3D

En esta sección veremos el sistema del oscilador armónico en 3 dimensiones. Partimos del Hamiltoniano en coordenadas esféricas (2.1) en donde $V(r) = \frac{1}{4}\omega^2 r^2$. Tal como hemos visto antes ya tenemos tres

simetrías en involución:

$$L_z^2 \subset L^2 \subset H \quad (2.32)$$

Y tal como acabamos de ver, también hemos construido dos simetrías adicionales S_m^\pm “entre” L_z^2 y L^2 . Lo que veremos a continuación es la construcción de dos nuevas simetrías entre las funciones propias de las siguientes simetrías L^2 y H de acuerdo con la separación (2.9). Para ello necesitamos los operadores ladder de L_ℓ^2 que ya están calculados en la sección anterior: B_ℓ^\pm junto a los operadores shift del Hamiltoniano reducido H_ℓ .

Teniendo en cuenta la separación de variables el Hamiltoniano radial efectivo (2.8) para el oscilador es

$$H_\ell = \left(-\partial_{rr} - \frac{2}{r}\partial_r + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{1}{4}\omega^2 r^2 \right) \quad (2.33)$$

Buscamos ahora factorizar el Hamiltoniano del sistema para hallar los operadores shift de H_ℓ . Para ello consideramos el problema:

$$H = (-\partial_r + W_1)(\partial_r + W_2) + \lambda \quad (2.34)$$

Buscamos modificar únicamente los términos en r^{-1} de los operadores anteriores. De esta forma obtenemos dos parejas de operadores:

$$\begin{aligned} A_\ell^\pm &= (\mp\partial_r + \frac{\ell\mp 1}{r} + \frac{\omega}{2}r) \\ C_\ell^\pm &= (\mp\partial_r + \frac{\ell\mp 1}{r} - \frac{\omega}{2}r) \end{aligned} \quad (2.35)$$

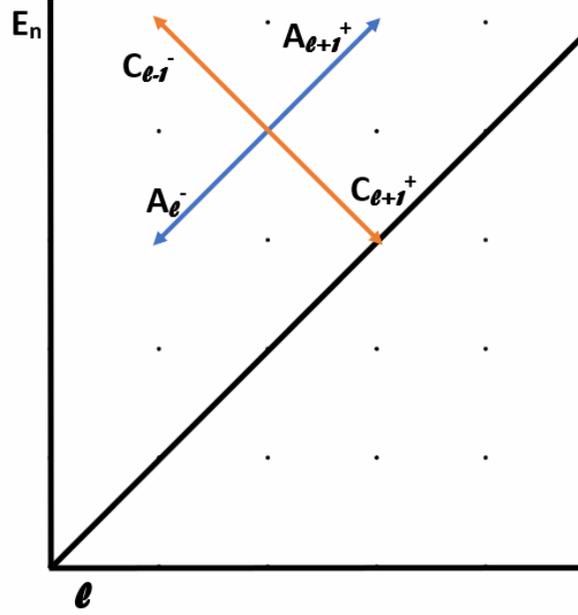
Que permiten factorizar el sistema como:

$$H_\ell = A_\ell^+ A_\ell^- - \frac{\omega}{2}(2\ell - 1) = C_{\ell+1}^- C_{\ell+1}^+ + \frac{\omega}{2}(2\ell + 3) \quad (2.36)$$

Estos operadores actúan al mismo tiempo como shift y ladder para la función radial:

$$\begin{aligned} A_\ell^- H_\ell &= (H_{\ell-1} + w)A_\ell^-; & A_{\ell+1}^+ H_\ell &= (H_{\ell+1} - w)A_{\ell+1}^+ \\ C_\ell^- H_\ell &= (H_{\ell-1} - w)C_\ell^-; & C_{\ell+1}^+ H_\ell &= (H_{\ell+1} + w)A_{\ell+1}^+ \end{aligned} \quad (2.37)$$

Ya que permiten modificar el valor del momento angular al mismo tiempo que la energía del sistema. Recogemos los efectos de estos operadores en el siguiente gráfico:



Donde cada punto (ℓ, E_n) se corresponde con la función R_ℓ^n del sistema.

2.2.a. Simetrías independientes del OA

Hemos obtenido cuatro pares de operadores que permiten trasladarnos entre las soluciones del sistema.

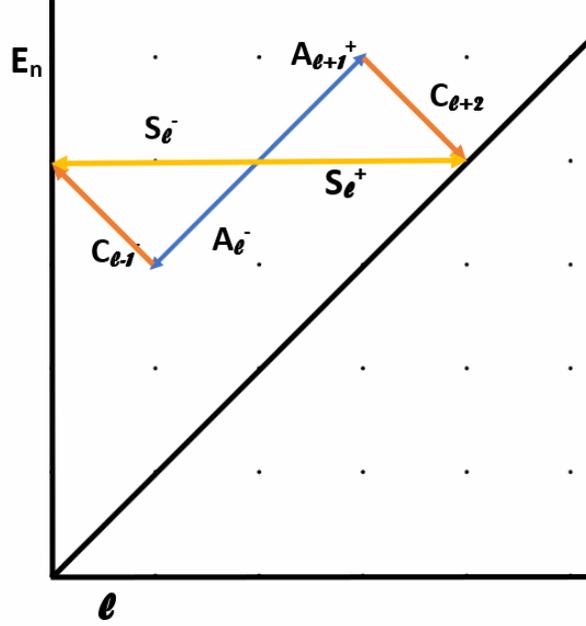
$$\begin{aligned}
 H_\ell = A_\ell^+ A_\ell^- - \frac{\omega}{2}(2\ell - 1) & \quad \begin{cases} A_{\ell+1}^+ = (-\partial_r + \frac{\ell}{r} + \frac{\omega}{2}r) & A_{\ell+1}^+ R_\ell^n \propto R_{\ell+1}^{n+1} \\ A_\ell^- = (+\partial_r + \frac{\ell+1}{r} + \frac{\omega}{2}r) & A_\ell^- R_\ell^n \propto R_{\ell-1}^{n-1} \end{cases} \\
 H_\ell = C_{\ell+1}^- C_{\ell+1}^+ + \frac{\omega}{2}(2\ell + 3) & \quad \begin{cases} C_{\ell+1}^+ = (-\partial_r + \frac{\ell}{r} - \frac{\omega}{2}r) & C_{\ell+1}^+ R_\ell^n \propto R_{\ell+1}^{n-1} \\ C_\ell^- = (\partial_r + \frac{\ell+1}{r} - \frac{\omega}{2}r) & C_\ell^- R_\ell^n \propto R_{\ell-1}^{n+1} \end{cases} \\
 B_\ell^2 = B_\ell^+ B_\ell^- + \ell^2 & \quad \begin{cases} B_{\ell+1}^+ = (\sin \theta \partial_\theta + (\ell + 1) \cos \theta) & B_{\ell+1}^+ Y_m^\ell \propto Y_m^{\ell+1} \\ B_\ell^- = (\sin \theta \partial_\theta - \ell \cos \theta) & B_\ell^- Y_m^\ell \propto Y_m^{\ell-1} \end{cases} \\
 \vec{L}_m^2 = L_m^- L_m^+ + m(m + 1) & \quad \begin{cases} L^+ = e^{+i\varphi} (+\partial_\theta + \frac{i}{\tan \theta} \partial_\varphi) & L^+ Y_m^\ell \propto Y_{m+1}^\ell \\ L^- = e^{-i\varphi} (-\partial_\theta + \frac{i}{\tan \theta} \partial_\varphi) & L^- Y_m^\ell \propto Y_{m-1}^\ell \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Buscamos construir operadores de simetría, que no modifiquen la energía del sistema. Teniendo en cuenta que la energía del sistema queda determinada únicamente por la función radial, debemos combinar los operadores A^\pm, C^\pm de forma que el aumento de energía de uno de los operadores sea neutralizado por el

otro.

$$\begin{aligned} C_{\ell-1}^- A_\ell^- H_\ell &= C_{\ell-1}^- (H_{\ell-1} + \omega) A_\ell^- = H_{\ell-2} C_{\ell-1}^- A_\ell^- \\ C_{\ell+2}^+ A_{\ell+1}^+ H_\ell &= C_{\ell+2}^+ (H_{\ell+1} - \omega) A_{\ell+1}^+ = H_{\ell+2} C_{\ell+2}^+ A_{\ell+1}^+ \end{aligned} \quad (2.39)$$

Estos operadores conservan la energía de los estados radiales modificando su parámetro ℓ asociado.



Empleamos los operadores B^\pm para poder desplazarnos entre los diferentes operadores H_ℓ ya que este parámetro queda definido por:

$$HY_m^\ell = Y_m^\ell H_\ell \quad (2.40)$$

Los cambios producidos por los operadores B^\pm sobre las funciones de onda Y_m^ℓ se trasladan en cambios en el parámetro del Hamiltoniano radial.

$$\begin{aligned} HB_{\ell-1}^- B_\ell^- Y_m^\ell &= B_{\ell-1}^- B_\ell^- Y_m^\ell H_{\ell-2} \\ HB_{\ell+2}^+ B_{\ell+1}^+ Y_m^\ell &= B_{\ell+2}^+ B_{\ell+1}^+ Y_m^\ell H_{\ell+2} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Teniendo esto en cuenta podemos ver cómo el efecto de los operadores radiales (en r) sobre el Hamiltoniano queda neutralizado por los operadores angulares (en θ), de forma que la composición da lugar a simetrías del sistema.

$$\begin{aligned} S_\ell^- &= B_{\ell-1}^- B_\ell^- C_{\ell-1}^- A_\ell^- \\ S_\ell^+ &= B_{\ell+2}^+ B_{\ell+1}^+ C_{\ell+2}^+ A_{\ell+1}^+ \end{aligned} \quad (2.42)$$

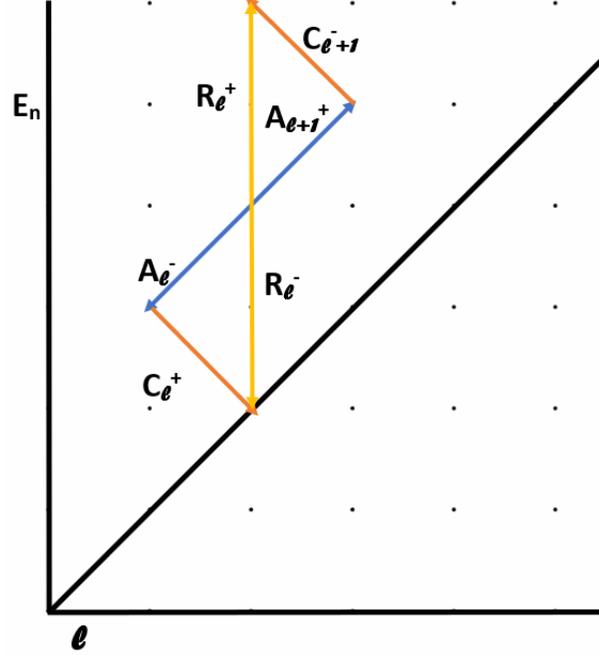
Estos operadores permiten desplazarnos entre estados propios del sistema (2.9) con diferentes valores de momento angular,

$$S_\ell^\pm \psi_{n,\ell,m} \propto \psi_{n,\ell\pm 2,m} \quad (2.43)$$

Análogamente, podemos emplear los operadores $A^\pm C^\pm$ para crear operadores ladder en la energía del sistema:

$$\begin{aligned} R_\ell^+ &= A_\ell^+ C_\ell^- = A_{\ell+1}^+ C_{\ell+1}^- = H - \frac{\omega^2}{2} r^2 + \frac{3}{2} \omega \\ R_\ell^- &= A_{\ell+1}^- C_{\ell+1}^+ = C_\ell^+ A_\ell^- = H - \frac{\omega^2}{2} r^2 - \frac{3}{2} \omega \end{aligned} \quad (2.44)$$

Estos operadores radiales actúan sobre la función total y no modifican el parámetro ℓ del Hamiltoniano. Ilustramos este efecto con el siguiente diagrama:



2.2.b. Funciones propias

Empleando el método de factorización hemos encontrado 3 parejas de operadores que nos permiten modificar los autovalores de las funciones propias respecto a los operadores $\{H, \vec{L}^2, L_z\}$. De esta forma estos operadores nos permiten desplazarnos entre las distintas soluciones del sistema,

$$R_\ell^\pm \psi_{n,\ell,m} \propto \psi_{n\pm 2,\ell,m}; \quad S_\ell^\pm \psi_{n,\ell,m} \propto \psi_{n,\ell\pm 2,m}; \quad L^\pm \psi_{n,\ell,m} \propto \psi_{n,\ell,m\pm 1} \quad (2.45)$$

De esta forma, en principio, podemos expresar los estados del sistema con la aplicación sucesiva de estos operadores sobre uno de los estados propios. Para ello consideramos los estados aniquilados por los operadores de factorización. Si queremos hallar la energía de la función propia con valor máximo de ℓ , y la que fijado ℓ , la de valor máximo de m , podemos utilizar las factorizaciones

$$H_\ell = C_{\ell+1}^- C_{\ell+1}^+ + \frac{\omega}{2} (2\ell + 3); \quad \vec{L}^2 = L_m^- L_m^+ + L_z (L_z + 1) \quad (2.46)$$

Podemos ver que las funciones de onda aniquiladas por los operadores $C_{\ell+1}^+$ y L^\pm son estados propios

de los operadores H_ℓ y \vec{L}^2 con autovalores $\frac{\omega}{2}(2\ell+3)$ y $L_z(L_z \pm 1)$ respectivamente.

$$C_{\ell+1}^+ R_\ell^\ell = 0 \rightarrow R_\ell^\ell = r^\ell e^{-\frac{\omega}{4}r^2}; \quad L^\pm Y_{\pm m}^m = 0 \rightarrow Y_{\pm m}^m = e^{\pm im\varphi} \sin^m \theta \quad (2.47)$$

De esta forma hemos encontrado un estado “fundamental” del nivel de energía $n = \ell$ que nos permite calcular el resto de estados:

$$\psi_{\ell,\ell,\ell} = \left(r^\ell e^{-\frac{\omega}{4}r^2} \right) \left(\sin^\ell \theta \right) \left(e^{\pm i\ell\varphi} \right), \quad E_{n=\ell} = \frac{\omega}{2}(2\ell+3), \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (2.48)$$

Aplicando ahora los operadores ladder podemos construir el espectro completo de estados del sistema. Los operadores R_ℓ^- y S_ℓ^+ aniquilan el estado $\psi_{\ell,\ell,m}$ de esta forma podemos establecer una relación entre el valor del momento angular y la energía del sistema así como el espectro energético del sistema. Por otro lado, análogamente podemos ver como los estados aniquilados por L^\pm nos permiten obtener la relación entre el momento angular y su proyección L_z . Teniendo todo esto en cuenta, tenemos que $|m| \leq \ell \leq n$. Por otro lado, tenemos que los autovalores del sistema deben ser:

$$H\psi_{n,\ell,m} = \frac{\omega}{2}(2n+3)\psi_{n,\ell,m}; \quad \vec{L}^2\psi_{n,\ell,m} = \ell(\ell+1)\psi_{n,\ell,m}; \quad L_z\psi_{n,\ell,m} = m\psi_{n,\ell,m} \quad (2.49)$$

Conocida la relación entre los parámetros del sistema podemos calcular la degeneración de estados.

- Para un valor de ℓ existen $2\ell+1$ valores posibles de m .
- Por otro lado, para una energía dada, al tener operadores ladder que modifican el valor del momento angular en dos unidades y al ser el valor de ℓ positivo, tenemos una degeneración menor. Debemos considerar el caso de n par para el que existen $\frac{n}{2}+1$ valores posibles para el momento angular. Y el caso n impar, para el que tenemos $\frac{n-1}{2}+1$ valores posibles de ℓ .
- La degeneración total para el nivel n de la energía es $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

2.3. El OA tridimensional clásico

Tal como hemos mencionado en la introducción, se puede extender el método de las factorizaciones a los sistemas clásicos de una manera directa, definiendo los análogos de funciones ladder y funciones shift.

Desde un punto de vista práctico dichas funciones se obtienen como límite de los correspondientes operadores cuánticos. De modo que en este trabajo adoptaremos esta opción, que está justificada y que conduce a resultados correctos, tal como veremos después.

Empleamos ahora los operadores auxiliares del sistema cuántico para calcular las funciones correspondientes clásicas, partiendo de la tabla (2.38):

$H_\ell = A_\ell^+ A_\ell^- - \frac{\omega}{2}(2\ell - 1)$ $h_\ell = a_\ell^+ a_\ell^-$	$A_{\ell+1}^+ = (-\partial_r + \frac{\ell}{r} + \frac{w}{2}r), A_\ell^- = (+\partial_r + \frac{\ell+1}{r} + \frac{w}{2}r)$ $a^\pm = (\pm ip_r + \frac{ \vec{L}^2 }{r} + \frac{w}{2}r)$
$H_\ell = C_{\ell+1}^- C_{\ell+1}^+ + \frac{\omega}{2}(2\ell + 3)$ $h_\ell = c_{\ell+1}^- c_{\ell+1}^+$	$C_{\ell+1}^+ = (-\partial_r + \frac{\ell}{r} - \frac{w}{2}r), C_\ell^- = (\partial_r + \frac{\ell+1}{r} - \frac{w}{2}r)$ $c^\pm = (\pm ip_r + \frac{ \vec{L}^2 }{r} - \frac{w}{2}r)$
$B_\ell^2 = B_\ell^+ B_\ell^- + \ell^2$ $b_\ell^2 = b_\ell^+ b_\ell^-$	$B_{\ell+1}^+ = (\sin \theta \partial_\theta + (\ell + 1) \cos \theta), B_\ell^- = (\sin \theta \partial_\theta - \ell \cos \theta)$ $b^\pm = (\pm i \sin \theta p_\theta + \vec{L}^2 \cos \theta)$
$\vec{L}_m^2 = L_m^- L_m^+ + m(m + 1)$ $\vec{L}_m^2 = L_m^- L_m^+$	$L^+ = e^{+i\varphi} (+\partial_\theta + \frac{i}{\tan \theta} \partial_\varphi), L^- = e^{-i\varphi} (-\partial_\theta + \frac{i}{\tan \theta} \partial_\varphi)$ $L^\pm = e^{\pm i\varphi} (\pm ip_\theta - \frac{p_\varphi}{\tan \theta})$

Definimos de forma análoga las funciones de simetría, o constantes de movimiento:

$$s^+ = a^+ c^+ (b^+)^2 \quad s^- = a^- c^- (b^-)^2 \quad (2.50)$$

Separamos estas funciones en su parte simétrica y antisimétrica:

$$s_x = \frac{s^+ + s^-}{2} \quad s_y = \frac{s^+ - s^-}{2i} \quad (2.51)$$

De expresión explícita:

$$s_x = \frac{2p_r}{r} L^2 p_\theta \sin 2\theta - (L^2 \cos 2\theta + L_z^2) (H - \frac{2L^2}{r^2}) \quad (2.52)$$

$$s_y = \sqrt{L^2} ((L^2 \cos 2\theta + L_z^2) \frac{2p_r}{r} + (H - \frac{2L^2}{r^2}) p_\theta \sin 2\theta) \quad (2.53)$$

2.4. Tensor de Fradkin-Demkov

El sistema del oscilador isótropo tridimensional ha sido estudiado con mucha más frecuencia empleando las coordenadas cartesianas. En este caso, el Hamiltoniano se escribe de la forma siguiente, en donde hemos

optado desde el principio por n dimensiones ya que el desarrollo general no tiene más complicaciones,

$$H = \sum_{i=1}^n \left(-\partial_{x_i x_i} + \frac{\omega^2}{4} x_i^2 \right) = \sum_{i=1}^n H_i \quad (2.54)$$

En resumen se trata de la suma de n osciladores unidimensionales independientes H_i con la misma frecuencia, que podríamos escribir $H = \oplus_i H_i$. Cada operador H_i es una simetría asociada a la separación de cada variable x_i . Todos los H_i conmutan, de manera que el sistema es integrable en el sentido de Liouville.

Así pues, H es separable en las n coordenadas cartesianas x_i , tratándose de una separación de tipo “paralelo”, ya que cada una de las variables no es parte de una secuencia de operadores, sino que todas ellas son equivalentes en H dado por (2.54). Las funciones propias de H serán el producto de funciones propias de los H_i , y el valor propio la suma de valores propios:

$$\Psi_{k_1, \dots, k_n} = \prod_{i=1}^n \psi_{k_i}(x_i), \quad E^k = \sum_{i=1}^n \epsilon_{k_i}, \quad k_i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.55)$$

(ó $\Psi = \otimes_i \psi_i$), siendo $\epsilon_{k_i} = \omega(k_i + 1/2)$ la energía de cada estado del oscilador H_i .

Los operadores creación/anihilación son a_i^\pm , factorizan cada H_i y conmutan entre los diferentes pares,

$$a_i^\pm = \mp \partial_{x_i} + \frac{\omega}{2} x_i, \quad H_i = a_i^+ a_i^- + \frac{\omega}{2}, \quad [a_i^\pm, a_j^\pm] = 0, \quad i \neq j \quad (2.56)$$

Dichos operadores no son simetrías de H ni de los H_i , son operadores ladder independientes,

$$[H_i, a_i^\pm] = \pm \omega a_i^\pm \implies \begin{cases} a_i^\pm H_i = (H_i \mp \omega) a_i^\pm \\ a_i^\pm H = (H \mp \omega) a_i^\pm \end{cases} \quad (2.57)$$

Resulta evidente que una simetría s_{ij} viene dada por un producto

$$s_{ij} = a_i^+ a_j^- \quad (2.58)$$

Un conjunto máximo de simetrías independientes viene dado por los $2n - 1$ operadores siguientes, de forma semejante al caso secuencial de las coordenadas esféricas,

$$\mathcal{S} = \{H_1 = a_1^+ a_1^-, \dots, H_n = a_n^+ a_n^-, s_{12}, s_{23}, \dots, s_{n-1, n}\} \quad (2.59)$$

De modo que se puede afirmar que el oscilador isótropo n -dimensional es superintegrable. Uno podría pensar que como las simetrías $s_{i, i+1}$ son complejas (no hermíticas), en realidad cada una de ellas cuenta como dos simetrías reales (hermíticas). En cierto modo es así, pero las dos simetrías reales (hermíticas) no son independientes. Tomemos por ejemplo

$$s_{ij} = a_i^+ a_j^- = (-\partial_{x_i} + \frac{\omega}{2} x_i)(\partial_{x_j} + \frac{\omega}{2} x_j) \quad (2.60)$$

Calculemos el producto $s_{ij}(s_{ij})^+$,

$$s_{ij}(s_{ij})^+ = H_i(H_j + \omega) \quad (2.61)$$

Vemos que este producto es una simetría hermítica dependiente de H_i, H_j pertenecientes conjunto \mathcal{S} de las $2n-1$ simetrías independientes, de modo que el par $\{s_{ij}, (s_{ij})^+\}$ cuenta como una simetría independiente, no dos. Explícitamente

$$s_{ij} = \left(-\partial_i \partial_j + \frac{1}{4}\omega^2 x_i x_j\right) + \left(\frac{\omega}{2}x_i \partial_{x_j} - \frac{\omega}{2}x_j \partial_i\right) = \left(\hat{p}_i \hat{p}_j + \frac{1}{4}\omega^2 x_i x_j\right) + i\frac{\omega}{2}(x_i \hat{p}_j - x_j \hat{p}_i) \quad (2.62)$$

Esto quiere decir que las simetrías no hermíticas s_{ij} dan lugar a dos simetrías hermíticas

$$\hat{Q}_{ij} = \left(\hat{p}_i \hat{p}_j + \frac{1}{4}\omega^2 x_i x_j\right), \quad \hat{L}_{ij} = (x_i \hat{p}_j - x_j \hat{p}_i) \quad (2.63)$$

La primera \hat{Q}_{ij} es simétrica en i, j (notemos que $\hat{Q}_{ii} = H_i$), la segunda \hat{L}_{ij} (el momento angular) antisimétrica. Lo curioso es que estas dos simetrías no son independientes, al multiplicar entre sí dan un producto de H_i y H_j antes mencionado.

Las simetrías \hat{Q}_{ij} así obtenidas se denominan tensor de Fradkin-Demkov [3, 4, 5]. El conjunto de simetrías s_{ij} en (2.60), forman un sistema de n^2 operadores linealmente independientes, y por medio de los conmutadores cierran el álgebra de Lie $u(n)$.

Podemos expresar las simetrías del oscilador isótropo obtenidas en coordenadas esféricas mediante las del tensor de Fradkin-Demkov (que en cierta forma son más elementales), (2.63):

$$\begin{aligned} s_x &= (\vec{L}^2 - L_z^2)H - 2\vec{L}^2 Q_{zz} \\ s_y &= 2(L_x Q_{yz} - L_y Q_{xz}) \end{aligned} \quad (2.64)$$

2.5. El sistema de Kepler-Coulomb

Realizamos un tratamiento análogo para el sistema Kepler-Coulomb tomando el potencial $V(r) = -\frac{k}{r}$. Como el método es el mismo, lo aplicaremos sin tanto detalle. El Hamiltoniano reducido en este caso es el siguiente:

$$H_\ell = \left(-\frac{1}{r}\partial_{rr}r + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{k}{r}\right) \quad (2.65)$$

Para factorizar el sistema modificaremos los operadores de factorización para el oscilador tridimensional ya que al realizar el límite $\omega \rightarrow 0$ debemos obtener la parte del superpotencial que da lugar al término centrífugo del Hamiltoniano. Proponemos operadores de forma:

$$H_\ell = (-\partial_r + \frac{l-1}{r} + a)(\partial_r + \frac{l+1}{r} + b) + \lambda \quad (2.66)$$

Resolviendo la ecuación anterior obtenemos los operadores shift:

$$D_\ell^\pm = (\mp \partial_r + \frac{l \mp 1}{r} - \frac{k}{2\ell}) \quad (2.67)$$

que permiten factorizar el sistema como:

$$H_\ell = D_\ell^+ D_\ell^- - \frac{k^2}{4\ell^2} \quad (2.68)$$

Vemos el efecto de estos operadores:

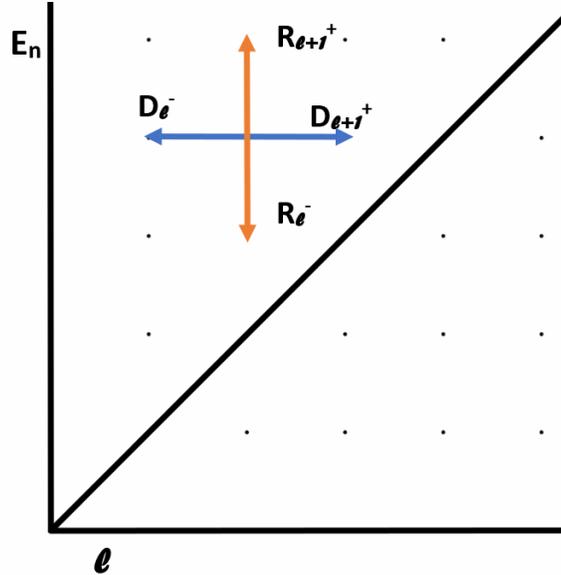
$$D_\ell^- H_\ell = H_{\ell-1} D_\ell^-; \quad D_{\ell+1}^+ H_\ell = H_{\ell+1} D_{\ell+1}^+ \quad (2.69)$$

De esta forma vemos, en efecto, que estos operadores actúan como shift para el Hamiltoniano radial de KC. Por otro lado, el calculo de operadores ladder ha sido extraído del artículo [9] en el que se obtienen operadores ladder para el sistema, de forma:

$$\begin{aligned} R_{\ell,n}^+ &= \left(-r\partial_r + r\sqrt{-E_\ell^n} - \frac{1}{2\sqrt{-E_\ell^n}} + 1 \right) d_{\ell,n}^{-1} \\ R_{\ell,n}^- &= d_{\ell,n} \left(r\partial_r + r\sqrt{-E_\ell^n} - \frac{1}{2\sqrt{-E_\ell^n}} \right) \end{aligned} \quad (2.70)$$

Donde el operador $d_{\ell,n}$ se corresponde con una dilatación de la coordenada radial tal que: $D_{\ell,n} r = \sqrt{\frac{E_\ell^{n-1}}{E_\ell^n}} r$. Estos operadores permiten modificar el valor del parámetro energético n en una unidad.

Recogemos los efectos de estos operadores en el siguiente gráfico:



2.5.a. Simetrías del sistema de KC total

De forma análoga al Oscilador obtenemos:

$$\begin{aligned}
H_\ell &= D_\ell^+ D_\ell^- - \frac{k^2}{4\ell^2} & \begin{cases} D_{\ell+1}^+ = (-\partial_r + \frac{\ell}{r} - \frac{k}{2\ell+2}) & D_{\ell+1}^+ R_\ell^n \propto R_{\ell+1}^n \\ D_\ell^- = (+\partial_r + \frac{\ell+1}{r} - \frac{k}{2\ell}) & D_\ell^- R_\ell^n \propto R_{\ell-1}^n \end{cases} \\
B_\ell^2 &= B_\ell^+ B_\ell^- + \ell^2 & \begin{cases} B_{\ell+1}^+ = (\sin\theta\partial_\theta + (\ell+1)\cos\theta) & B_{\ell+1}^+ Y_m^\ell \propto Y_m^{\ell+1} \\ B_\ell^- = (\sin\theta\partial_\theta - \ell\cos\theta) & B_\ell^- Y_m^\ell \propto Y_m^{\ell-1} \end{cases} \quad (2.71) \\
\vec{L}^2 &= L^- L^+ + L_z(L_z + 1) & \begin{cases} L^+ = e^{+i\varphi} (+\partial_\theta + \frac{i}{\tan\theta}\partial_\varphi) & L^+ Y_m^\ell \propto Y_{m+1}^\ell \\ L^- = e^{-i\varphi} (-\partial_\theta + \frac{i}{\tan\theta}\partial_\varphi) & L^- Y_m^\ell \propto Y_{m-1}^\ell \end{cases}
\end{aligned}$$

Construimos los operadores de simetría entre L^2 y H , en este caso de forma más sencilla, mediante el producto de un operador ladder y un shift:

$$\begin{aligned}
S_\ell^- &= B_\ell^- D_\ell^- \\
S_\ell^+ &= B_{\ell+1}^+ D_{\ell+1}^+ \\
S_\ell^\pm \psi_{n,\ell,m} &\propto \psi_{n,\ell\pm 1,m}
\end{aligned} \quad (2.72)$$

2.5.b. Funciones propias

De forma análoga al sistema anterior, podemos obtener los estados del sistema así como el espectro energético mediante la aplicación de los operadores de simetría y los ladder del Hamiltoniano,

$$R_\ell^\pm \psi_{n,\ell,m} \propto \psi_{n\pm 1,\ell,m}; \quad S_\ell^\pm \psi_{n,\ell,m} \propto \psi_{n,\ell\pm 1,m}; \quad L^\pm \psi_{n,\ell,m} \propto \psi_{n,\ell,m\pm 1} \quad (2.73)$$

En este caso los operadores S_ℓ^\pm modifican los parámetros en una unidad, por lo que la degeneración de estados será diferente. La parte puramente angular es idéntica al caso anterior por lo que consideraremos únicamente la relación entre n y ℓ . Calculamos los estados aniquilados por $D_{\ell+1}^+$:

$$D_{\ell+1}^+ R_\ell^\ell = 0 \rightarrow R_\ell^\ell = r^\ell e^{-\frac{k}{2\ell+2}r}, \quad E_\ell^{n=\ell} = -\frac{k^2}{4\ell^2} \quad (2.74)$$

Teniendo en cuenta el efecto de los operadores S_ℓ^\pm podemos ver como la energía de los estados del sistema puede expresarse como: $E_\ell^n = -\frac{k^2}{4n^2}$, $n \geq \ell$. Por ultimo en este caso para cada valor de $n = 0, 1, 2, \dots$ existen $\ell = 0, \dots, \ell = n$ posibles valores del momento angular lo que se traduce en una degeneración total de $(n+1)^2$ estados posibles para cada valor de la energía.

2.5.c. Caso KC clásico

Hemos construido dos simetrías reales independientes empleando el método de factorización en el formalismo de la mecánica clásica tal como hicimos con el OA,

$$s_x = \left(\frac{\vec{L}^2}{r} + \frac{k}{2}\right) \cos \theta + p_r p_\theta \sin \theta \quad (2.75)$$

$$s_y = \frac{1}{\sqrt{\vec{L}^2}} \left(\left(\frac{\vec{L}^2}{r} + \frac{k}{2}\right) p_\theta \sin \theta + \vec{L}^2 p_r \cos \theta \right) \quad (2.76)$$

2.5.d. Vector Runge-Lenz

Se conoce para el sistema Kepler-Coulomb un vector constante conocido como vector de Runge-Lenz. Este vector se encuentra contenido en el plano de movimiento del sistema y queda definido, en el caso clásico, por la siguiente expresión (en el contexto cuántico el operador se debe simetrizar):

$$\vec{A} = \vec{P} \times \vec{L} - \frac{k}{2r} \vec{r} \quad (2.77)$$

Buscamos la relación entre las coordenadas de este vector y las constantes del movimiento s_x, s_y anteriores halladas mediante el método de factorización:

$$s_x = -A_z \quad s_y = \frac{-1}{\sqrt{\vec{L}^2}} (L_x A_y - L_y A_x) = \frac{-1}{\sqrt{\vec{L}^2}} \vec{L} \times \vec{A} \Big|_z \quad (2.78)$$

2.6. Coordenadas ignorables

Hemos visto como empleando el método de factorización podemos obtener una variedad de operadores con distintas reglas de conmutación con las simetrías involutivas que juegan el papel de distintos Casimires del sistema.

La interpretación de estos operadores es mas sencilla desde el punto de vista clásico, en particular mencionemos los siguientes corchetes de Poisson respecto a las “funciones Casimir”:

$$\{H, R^\pm\} = \pm 2i\omega R^\pm \quad \{\sqrt{\vec{L}^2}, S^\pm\} = \pm 2iS^\pm \quad \{L_z, L^\pm\} = \pm iL^\pm \quad (2.79)$$

Estas simetrías S^\pm, L^\pm junto a R^\pm permiten separar el sistema clásico de forma completa ya que el resto de corchetes que podemos formar a partir de las funciones anteriores son todos idénticamente nulos. Al tratarse de funciones complejas podemos expresarlas en forma polar, por ejemplo en el caso R^\pm ,

$$R^\pm = R e^{\pm 2i\omega \varepsilon_r}; \quad R = \sqrt{R^+ R^-} = \sqrt{(H^2 - \omega \vec{L}^2)}; \quad \tan 2\omega \varepsilon_r = \frac{R^+ - R^-}{i(R^+ + R^-)} \quad (2.80)$$

Al expresar las funciones ladder de esta forma, podemos identificar estos ángulos con las variables dinámi-

cas conjugadas de sus Casimires correspondientes:

$$\{H, Re^{\pm i2\omega\varepsilon_r}\} = \{H, R\}e^{\pm 2i\varepsilon_r} \pm 2i\omega Re^{\pm 2i\omega\varepsilon_r}\{H, \varepsilon_r\} = \pm 2i\omega Re^{\pm 2i\omega\varepsilon_r} \quad (2.81)$$

Expresando el resto de funciones ladder de esta forma, podemos separar el sistema en un nuevo conjunto de coordenadas en el que todas las coordenadas excepto una son constantes y esta ultima evoluciona linealmente en el tiempo.

$$\varepsilon_r = a + t; \quad \varepsilon_\theta = cte; \quad \varepsilon_\varphi = cte; \quad (2.82)$$

Por otro lado, estos operadores nos permiten establecer relaciones entre las $2n$ coordenadas iniciales dos a dos. Los casimires del sistema permiten expresar los momentos en función de sus coordenadas asociadas.

$$H = E = p_r^2 + \frac{\vec{L}^2}{r^2} + V(r) \rightarrow p_r(r); \quad \vec{L}^2 = L^2 = p_\theta^2 + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \rightarrow p_\theta(\theta); \quad L_z^2 = L_z^2 = p_\varphi^2 \quad (2.83)$$

A su vez, los ángulos ε_i relacionan las distintas coordenadas por pares. Para ambos sistemas se tiene la misma relación entre las coordenadas angulares θ y φ :

$$\tan \varepsilon_\varphi = \frac{-p_\theta \tan \theta + p_\varphi \tan \varphi}{p_\varphi + p_\theta \tan \theta \tan \varphi} \implies \varphi = \varphi(\theta, \varepsilon_\varphi) \quad (2.84)$$

En cambio, las siguientes expresiones que conectan el θ y r junto a la evolución temporal de r (la conexión de r y t) deben considerarse para cada sistema en concreto:

$$\begin{aligned} \tan \varepsilon_\theta &= \frac{s_y}{s_x} \implies \theta = \theta(r, \varepsilon_\theta) \\ \tan \varphi_r &= \tan(a + bt) = \frac{r_y}{r_x} \implies r = r(t, \varphi_r) \end{aligned} \quad (2.85)$$

Para el oscilador armónico:

$$\tan 2\omega\varepsilon_r = \tan 2\omega(a + t) = \frac{p_r(r)r\omega}{H - \frac{\omega^2}{2}r^2} \implies r = r(t) \quad (2.86)$$

Por otro lado, para el sistema KC:

$$\tan \varepsilon_\theta = \frac{1}{\sqrt{\vec{L}^2}} \frac{p_r r \vec{L}^2 - p_\theta \tan \theta (\vec{L}^2 - \frac{k}{2}r)}{p_r p_\theta r \tan \theta + (\vec{L}^2 - \frac{k}{2}r)} \implies \theta = \theta(r) \quad (2.87)$$

De esta forma podemos despejar la evolución temporal de cada una de nuestras coordenadas.

3. Sistemas d-Dimensionales

Nos preguntamos ahora si las propiedades de los sistemas centrales del OA y KC se mantienen al aumentar la dimensión o si hay diferencias notables [6, 7, 8].

Analizaremos el funcionamiento la separación de estos mismos sistemas anidados para el caso genérico n dimensional, cuando empleamos las coordenadas esféricas generalizadas definidas por:

$$x_i^d = r \cos \theta_i \prod_{k=i+1}^d \sin \theta_k \quad i = 2 \dots d; \quad x_1^d = r \prod_{k=2}^d \sin \theta_k \quad (3.1)$$

Estas coordenadas se han construido a partir de las coordenadas cartesianas de forma inductiva partiendo de las coordenadas polares. Al introducir una nueva coordenada, se redefine el radio del sistema, $r_d^2 = \sum_{i=1}^d x_i^2 = r_{d-1}^2 + x_d^2$. Por otro lado, el nuevo ángulo θ_d se define a partir de la siguiente proyección: $\frac{x_d}{r} = \cos \theta_d$. Esto nos permite expresar el radio del sistema en $d - 1$ dimensiones en función del radio actual $r_{d-1} = r_d \sin \theta_d$. Al definir todos los ángulos de esta forma, el ángulo θ_d se corresponde con la proyección sobre el eje x_d del radio en dimensión d . Los términos en seno que aparecen en la expresión de nuestras coordenadas son el resultado de expresar el radio r_i en función del radio actual.

Empleando estas coordenadas, podemos expresar el Hamiltoniano de un sistema central como:

$$H = -\partial_{rr} - \frac{d-1}{r} \partial_r + \frac{\vec{L}_d^2}{r^2} + V(r) \quad (3.2)$$

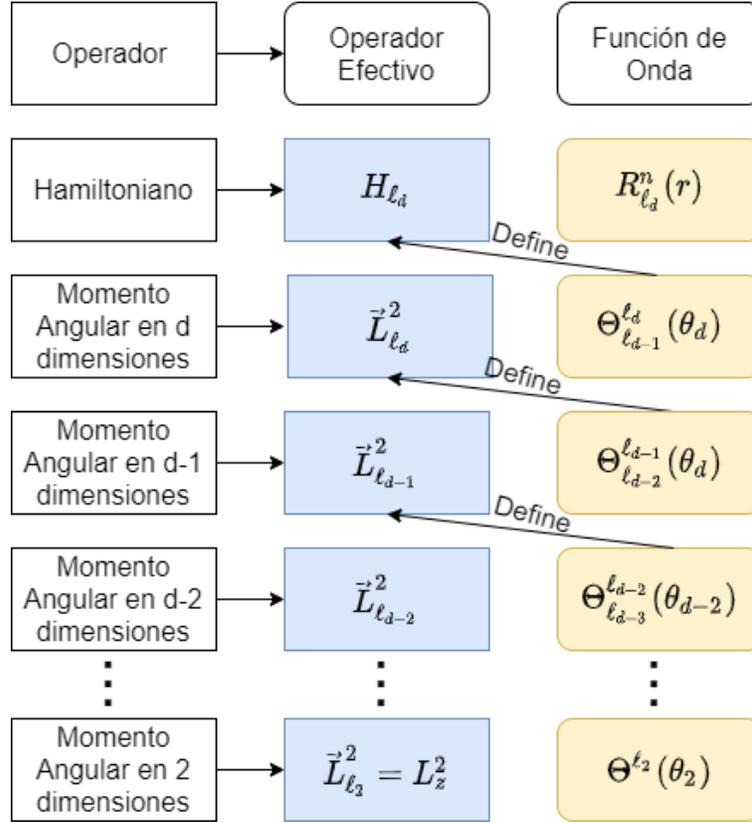
en donde \vec{L}_d^2 es el operador momento angular en d dimensiones que veremos en el siguiente apartado. El operador momento angular contiene su análogo de una dimensión menor, de forma que estos forman una estructura concatenada:

$$\{ L_z^2 \equiv \vec{L}_2^2 \subset \vec{L}_3^2 \subset \dots \subset \vec{L}_{d-1}^2 \subset \vec{L}_d^2 \subset H \} \quad (3.3)$$

Estos operadores (de tipo Casimir) juegan el papel de simetrías involutivas que hacen el sistema integrable. De esta forma, vamos a poder realizar un análisis análogo al caso anterior de forma que podemos encontrar estados propios del sistema comunes a todos los operadores que forman la estructura concatenada. Para ello debemos resolver el sistema de forma escalonada, ya que las funciones propias separadas del sistema las podemos simbolizar de la forma:

$$\Psi = R_{\ell_d}^n(r) \prod_{k=3}^d \Theta_{\ell_{k-1}}^{\ell_k}(\theta_k) e^{i\ell_2 \theta_2} \quad (3.4)$$

De manera que el autovalor de un Casimir se convierte en parámetro del siguiente.



3.1. Momento angular generalizado

El operador momento angular asociado a las rotaciones del sistema se define como [8]:

$$\vec{L}_d^2 = - \sum_{i=1}^d \sum_{j=i+1}^d L_{ij}^2 = - \sum_{i=1}^d \sum_{j=i+1}^d (x_i \partial_j - x_j \partial_i)^2 \quad (3.5)$$

Que al expresarlo en coordenadas esféricas generalizadas podemos ver de forma directa la estructura recursiva:

$$\vec{L}_d^2 = - \sum_{k=2}^d (\partial_{\theta_k} \theta_k + \frac{k-2}{\tan \theta_k} \partial_{\theta_k}) \prod_{p=k+1}^d \frac{1}{\sin^2 \theta_p} = \frac{\vec{L}_{d-1}^2}{\sin^2 \theta_d} - (\partial_{\theta_d} \theta_d + \frac{d-2}{\tan \theta_d} \partial_{\theta_d}) \quad (3.6)$$

Estos operadores poseen autovalores $\ell_d(\ell_d + d - 2)$, estos autovalores deben ser números naturales y se encuentran condicionados entre si ya que como veremos mas adelante para un valor ℓ_d los valores de ℓ_{d-1} deben verificar $0 \leq \ell_{d-1} \leq \ell_d$. A excepción del caso de dos dimensiones, en el que los autovalores al ser $\ell_2^2 = m^2$, $m \in \mathbb{Z}$, $0 \leq |m| \leq \ell_3$, los valores negativos de $\ell_2 = m$ no comprometen la positividad de los autovalores del sistema. Buscamos ahora construir operadores shift y ladder para este sistema que nos permitan en ultima instancia construir operadores de simetría que actúen sobre la función total del sistema.

3.1.a. Operador ladder

Para construir operadores ladder del momento angular como vimos en el caso tridimensional, debemos fabricar un operador para el que el valor ℓ_d sea un parámetro. Para ello seguimos el mismo procedimiento que empleamos en el caso tridimensional, lo que nos permite definir el operador:

$$B_{\ell_d}^d = \sin^2 \theta_d \left(\partial_{\theta_d} + \frac{d-2}{\tan \theta_d} \partial_{\theta_d} + \ell_d(\ell_d + d - 2) \right) \quad (3.7)$$

Que podemos factorizar a partir de los operadores B^\pm del caso tridimensional:

$$B^\pm = \sin \theta \partial_\theta \pm \ell \cos \theta \quad (3.8)$$

Generalizamos esta factorización modificando los términos en ℓ_d , que nos permite obtener una factorización parecida:

$$B_{\ell_d}^+ = \sin \theta_d \partial_{\theta_d} + (\ell_d + d - 3) \cos \theta_d, \quad B_{\ell_d}^- = \sin \theta_d \partial_{\theta_d} - \ell_d \cos \theta_d, \quad \lambda_{\ell_d}^d = \ell_d(\ell_d + d - 3) \quad (3.9)$$

Estos operadores actúan como shift para el parámetro ℓ_d de los operadores $B_{\ell_d}^d$:

$$B_{\ell_d}^- S_{\ell_d}^d = B_{\ell_d-1}^d B_{\ell_d}^-, \quad B_{\ell_d+1}^+ B_{\ell_d}^d = B_{\ell_d+1}^d B_{\ell_d+1}^- \quad (3.10)$$

Teniendo en cuenta la definición de los operadores $B_{\ell_d}^d$ y como el origen del parámetro ℓ_d son los autovalores de la función de onda para el operador momento angular en dimensión d , de esta forma, estos operadores modifican el valor del momento angular del sistema, por lo que se comportan como operadores ladder del momento angular en d dimensiones. Este operador únicamente cambia el superíndice en $\Theta_{\ell_{k-1}}^{\ell_k}$. Para obtener un operador de simetría definida sobre la función de onda total del sistema debemos multiplicar el operador anterior por uno tipo shift que actúe sobre la función de onda $\Theta_{\ell_k}^{\ell_{k+1}}(\theta_k)$.

3.1.b. Operadores shift

Teniendo en cuenta el autovalor del operador momento angular anterior, ℓ_{d-1} , el operador momento angular efectivo para la función $\Theta_{\ell_{d-1}}^{\ell_d}(\theta_d)$ es el siguiente:

$$\vec{L}_{d\ell_{d-1}}^2 = -\partial_{\theta_d} + \frac{d-2}{\tan \theta_d} \partial_{\theta_d} + \frac{\ell_{d-1}(\ell_{d-1} + d - 3)}{\sin^2 \theta_d} \quad (3.11)$$

Factorizamos este operador lo que da como resultado:

$$L_{d\ell_{d-1}}^+ = \left(-\partial_{\theta_d} + \frac{\ell_{d-1} - 1}{\tan \theta_d} \right), \quad L_{d\ell_{d-1}}^- = \left(\partial_{\theta_d} + \frac{\ell_{d-1} + d - 3}{\tan \theta_d} \right) \quad (3.12)$$

de forma que podemos expresar el sistema como:

$$\vec{L}_{d\ell_{d-1}}^2 = L_{d\ell_{d-1}}^+ L_{d\ell_{d-1}}^- + (\ell_{d-1} + d - 3)(\ell_{d-1} - 1) \quad (3.13)$$

Estos operadores, en efecto, actúan como operadores tipo shift:

$$L_{d\ell_{d-1}}^- \vec{L}_{d\ell_{d-1}}^2 = \vec{L}_{d(\ell_{d-1}-1)}^2 L_{d\ell_{d-1}}^- \quad (3.14)$$

Modifican el parámetro ℓ_{d-1} asociado al operador momento angular de una dimensión menor. Combinando estos operadores con los operadores B descritos en la sección anterior obtenemos operadores de simetría del sistema:

$$L_k^\pm = L_{k+1\ell_k}^\pm B_{k\ell_k}^\pm \quad (3.15)$$

$$L_k^+ = (-\sin \theta_k \partial_{\theta_k \theta_{k+1}} + \frac{\ell_k}{\tan \theta_{k+1}} \partial_{\theta_k} - (\ell_k + k - 2) \cos \theta_k \partial_{\theta_{k+1}} + \frac{\vec{L}_{k-1}^2}{\tan \theta_{k+1}} \cos \theta_k) \quad (3.16)$$

Hemos visto que debido a la estructura concatenada de estos sistemas, podemos encontrar operadores de simetría para los operadores momento angular de las distintas dimensiones hasta $d-1$ y estos operadores son idénticos para todos los sistemas. La existencia de operadores de simetría para el momento angular en la última dimensión d esta condicionada por el potencial del sistema, ya que debe existir un operador Shift radial que se acople al operador $B_{d\ell_d}$.

3.2. Hamiltoniano radial

Buscamos a continuación los operadores shift y ladder para la función radial. Consideramos el Hamiltoniano radial efectivo:

$$H_\ell = -\partial_{rr} - \frac{d-1}{r} \partial_r + \frac{\ell_d(\ell_d + d - 2)}{r^2} + V(r) \quad (3.17)$$

Factorizaremos estos sistemas de forma análoga al caso tridimensional. Primero consideramos el sistema para el caso de potencial nulo para el que proponemos factorizaciones de la forma:

$$-\partial_{rr} - \frac{d-1}{r} \partial_r + \frac{\ell_d(\ell_d + d - 2)}{r^2} = (-\partial_r + \frac{a}{r})(\partial_r + \frac{b}{r}) \quad (3.18)$$

Obtenemos los valores $a = \ell_d - 1$ y $b = \ell_d + d - 2$.

Para encontrar los operadores en cada potencial concreto basta con añadir un término a los operadores de factorización. Este término queda descrito por:

$$H_\ell = (-\partial_r + \frac{\ell_d - 1}{r} + c)(\partial_r + \frac{\ell_d + d - 2}{r} + c) + \lambda \rightarrow V(r) = \frac{c}{r}(2\ell + d - 3) + c^2 - \frac{\partial c}{\partial r} + \lambda_{d\ell_d} \quad (3.19)$$

De esta forma podemos encontrar operadores de factorización:

$$O_{d\ell_d}^+ = (-\partial_r + \frac{\ell_d - 1}{r} + c), \quad O_{d\ell_d}^- = (-\partial_r + \frac{\ell_d + d - 2}{r} + c) \quad (3.20)$$

Estos operadores pueden llegar a actuar como operadores shift de H_{ℓ_d} :

$$O_{d\ell_d}^- H_{\ell_d} = (H_{\ell_d-1} + 2 \frac{\partial c}{\partial r}) O_{d\ell_d}^- \quad (3.21)$$

Únicamente para los casos en los que la función c sea constante, obtenemos operadores shift puros, y si c es lineal los operadores actúan como shift y ladder simultáneos. Resolvemos la función c para los casos oscilador isotópico y el sistema Coulombiano.

3.2.a. Oscilador armónico

En este caso el potencial del sistema es de forma $V(r) = \frac{1}{4}\omega^2$. Al considerar la ecuación en c obtenemos los dos pares de operadores:

$$\begin{aligned} A_{\ell_d}^+ &= (-\partial_r + \frac{\ell_d-1}{r} + \frac{\omega}{2}r) \\ A_{\ell_d}^- &= (\partial_r + \frac{\ell_d+d-2}{r} + \frac{\omega}{2}r) \\ C_{\ell_d}^+ &= (-\partial_r + \frac{\ell_d-1}{r} - \frac{\omega}{2}r) \\ C_{\ell_d}^- &= (\partial_r + \frac{\ell_d+d-2}{r} - \frac{\omega}{2}r) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Podemos ver como la función $c = \pm\frac{\omega}{2}r$ no depende de la dimensión en la que estemos trabajando, por lo que el efecto de estos operadores es idéntico al caso tridimensional. Estos operadores factorizan el sistema como:

$$H_{\ell_d} = A_{\ell_d}^+ A_{\ell_d}^- - \frac{\omega}{2}(2\ell_d + d - 4) = C_{\ell_d}^+ C_{\ell_d}^- + \frac{\omega}{2}(2\ell_d + d - 4) \quad (3.23)$$

Y su efecto sobre los estados es simultáneamente un shift en ℓ_d y ladder variando un cuanto de energía.

3.2.b. Kepler-Coulomb

Obtenemos de forma similar para el potencial $V(r) = -\frac{k}{r}$ el par de operadores de factorización:

$$\begin{aligned} D_{\ell_d}^+ &= (-\partial_r + \frac{\ell_d-1}{r} - \frac{k}{2\ell_d+d-3}) \\ D_{\ell_d}^- &= (\partial_r + \frac{\ell_d+d-2}{r} - \frac{\omega}{2\ell_d+d-3}) \end{aligned} \quad (3.24)$$

En este caso, estos operadores dependen explícitamente de la dimensión d . Pese a esto, la interpretación de estos operadores es inmediata ya que la función c es una constante, por lo que estos operadores actúan como ladder de ℓ_d . El sistema queda factorizado como:

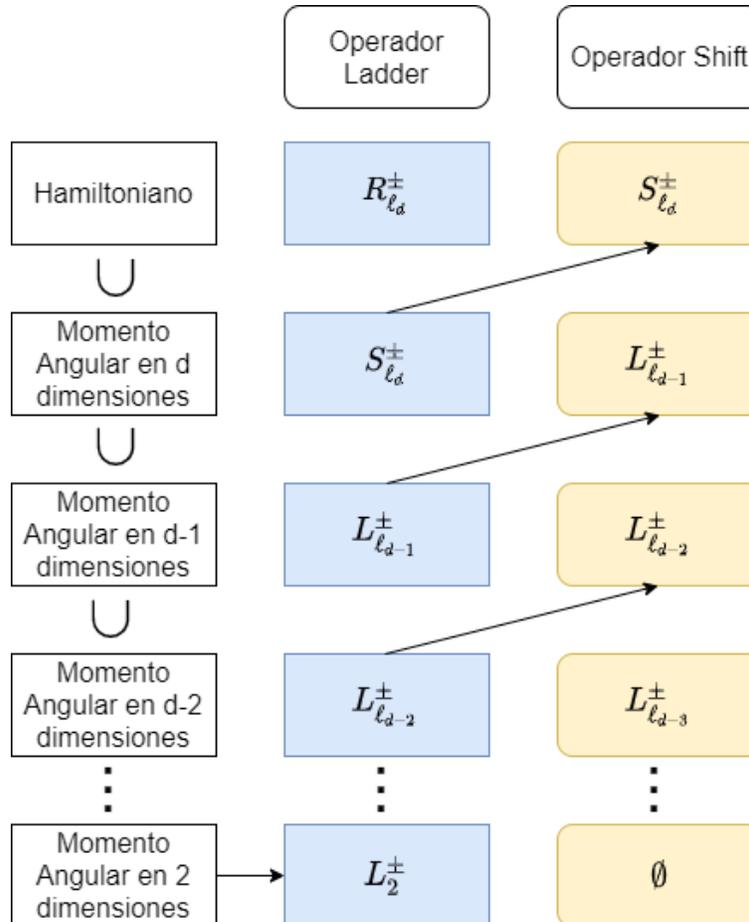
$$H_{\ell_d} = D_{\ell_d}^+ D_{\ell_d}^- - \frac{k^2}{(2\ell_d + d - 3)^2}; \quad H_{\ell_{d-1}} = D_{\ell_d}^- D_{\ell_d}^+ - \frac{k^2}{(2\ell_d + d - 3)^2} \quad (3.25)$$

Por otro lado para los operadores ladder tenemos [9]:

$$\begin{aligned} R_{\ell,n}^+ &= \left(-r\partial_r + r\sqrt{-E_\ell^n} - \frac{1}{2\sqrt{-E_\ell^n}} - d + 1 \right) d_{\ell,n}^{-1} \\ R_{\ell,n}^- &= d_{\ell,n} \left(r\partial_r + r\sqrt{-E_\ell^n} - \frac{1}{2\sqrt{-E_\ell^n}} + d \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

3.3. Simetrías

El efecto de estos operadores radiales es idéntico para cualquier número de dimensiones, lo que nos permite crear operadores S^\pm generalizados que actúen como ladder del momento angular para dimensión d empleando la misma construcción de operadores del caso tridimensional. Los $d - 1$ operadores shift del sistema se corresponden con simetrías independientes del sistema.



Por otro lado, el efecto de los operadores ladder nos permite expresar las funciones de onda como producto de los operadores ladder del sistema aplicados al estado fundamental.

3.4. Sistemas clásicos

Buscamos interpretar las simetrías S obtenidas por el método de factorización. Estas funciones están compuestas de los siguientes componentes:

$$\begin{aligned}
a_d^\pm &= (\mp i p_{r_d} + \frac{|\vec{L}_d^2|}{r_d} + \frac{w}{2} r_d) & c_d^\pm &= (\mp i p_{r_d} + \frac{|\vec{L}_d^2|}{r_d} - \frac{w}{2} r_d) & \text{Oscilador} \\
d_d^\pm &= (\mp i p_{r_d} + \frac{|\vec{L}_d^2|}{r_d} - \frac{k}{2|\vec{L}_d^2|}) & & & \text{Coulomb} \\
b_d^\pm &= (\pm i \sin \theta_d p_{\theta_d} + |\vec{L}_d^2| \cos \theta_d) & & & \text{Angular}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Podemos ver como estas funciones tienen la misma estructura para cualquier dimensión.

3.4.a. Oscilador

Construimos las constantes del movimiento s_x y s_y simetrizando y antisimetrizando las funciones s^\pm . Obtenemos las siguientes funciones:

$$s_x = \frac{2p_r}{r} \vec{L}_d^2 p_{\theta_d} \sin 2\theta_d - (\vec{L}_d^2 \cos 2\theta_d + \vec{L}_{d-1}^2) (H - \frac{2\vec{L}_d^2}{r^2}) \tag{3.28}$$

$$s_y = -\sqrt{\vec{L}_d^2} ((\vec{L}_d^2 \cos 2\theta_d + \vec{L}_d^2) \frac{2p_r}{r} + (H - \frac{2\vec{L}_d^2}{r^2}) p_{\theta_d} \sin 2\theta_d) \tag{3.29}$$

Expresamos estas funciones a partir de las componentes del tensor de Fradkin:

$$s_x = (\vec{L}_d^2 - \vec{L}_{d-1}^2) H - 2\vec{L}_d^2 Q_{x_d x_d} \tag{3.30}$$

$$s_y = 2\sqrt{\vec{L}_d^2} \left(\sum_{i=1}^{d-1} L_{id} Q_{id} \right) \tag{3.31}$$

3.4.b. Kepler-Coulomb

De forma análoga para el caso Coulombiano obtenemos las simetrías:

$$s_x = \left(\frac{\vec{L}_d^2}{r} - \frac{k}{2} \right) \cos \theta_d + p_r p_{\theta_d} \sin \theta_d \tag{3.32}$$

$$s_y = \frac{1}{\sqrt{\vec{L}_d^2}} \left(\vec{L}_d^2 p_r \cos \theta_d - \left(\frac{\vec{L}_d^2}{r} - \frac{k}{2} \right) p_{\theta_d} \sin \theta_d \right) \tag{3.33}$$

Que expresamos en función de las componentes del vector de Runge-Lenz:

$$s_x = A_d; \quad s_y = \frac{1}{\sqrt{\vec{L}_d^2}} \left(\sum_{i=1}^{d-1} L_{id} A_i \right) \tag{3.34}$$

3.4.c. Coordenadas Ignorables

Podemos realizar un tratamiento análogo al caso tridimensional en el que a partir de las funciones de simetría se definen unas nuevas coordenadas ε_{θ_i} y ε_r que forman con las simetrías involutivas H, L_d^2, \dots, L_2^2 un sistema de variables conjugadas en donde el nuevo Hamiltoniano de Hamilton-Jacobi es $K = P = H$.

Por otro lado se debe recalcar que los ángulos ε_{θ_i} ; $i = 2, 3, \dots, d - 1$ no dependen del potencial a estudio, de esta forma cualquier problema en d dimensiones con simetría radial queda resuelto al calcular la evolución temporal de las coordenadas r y θ_d .

4. Conclusiones

Hemos calculado las simetrías para los sistemas del oscilador y de KC por medio del método de factorización (o también mediante operadores de tipo shift y ladder). Dichas simetrías se han obtenido tanto para los sistemas cuánticos como clásicos siguiendo la misma técnica.

Se ha utilizado el sistema de coordenadas esféricas en el que separan ambos sistemas para que sea más fácil la comparación del procedimiento y de los resultados. Por ejemplo, hemos mostrado que las simetrías del oscilador son de carácter tensorial que dependen del ángulo doble, mientras que las de KC son vectoriales y dependen del ángulo sencillo. En este sentido, hemos expresado las simetrías en esféricas en términos de las más conocidas en cartesianas (tensor de Fradkin-Demkov y vector de Runge-Lenz, respectivamente).

Las simetrías obtenidas por este método tienen propiedades interesantes, por ejemplo permiten calcular la trayectoria de una forma bien definida y también, en este caso, nos proporcionan el movimiento. Igualmente se puede obtener el álgebra de simetrías que no hemos incluido en este trabajo.

Este método nos ha permitido, en el caso clásico, hallar las coordenadas conjugadas de las simetrías en involución que también son constantes de movimiento y que constituyen las variables de acción y ángulo con las que se puede expresar el movimiento de manera trivial.

Referencias

- [1] Infeld, L. and Hull, T. (1951) *The Factorization Method*, Rev.Mod. Phys., **23**, 21-68
- [2] Fred Cooper, Avinash Khare, Uday Sukhatme, *Supersymmetry in Quantum Mechanics*, 2001, World Scientific (Singapore)
- [3] Yu. N. Demkov, *Symmetry group of the isotropic oscillator*, Sov. Phys. JETP. **36** 63 (1959).
- [4] D. M. Fradkin, *Three-Dimensional Isotropic Harmonic Oscillator and SU(3)*, Am. J. Phys. **33** (1965), 207-211
- [5] D. M. Fradkin, *Existence of the Dynamic Symmetries o(4) and su(3) for All Classical Central Potential Problems*, Prog. Theor. Phys. **37** 798 (1967).

- [6] E. C. G. Sudarshan N. Mukunda and L. O’Raifeartaigh, *Group theory of the Kepler problem*, Phys. Lett., **19** (1965) 322-26
- [7] R. C. O’Connell and K. Jagannathan, *Illustrating dynamical symmetries in classical mechanics: The Laplace-Runge-Lenz vector revisited*, Am. J. Phys. **71**, 243 (2003); <https://doi.org/10.1119/1.1524165>
- [8] V Balakrishnan, S. Govindarajan and S Lakshmibala, *The Central Force Problem in n Dimensions*, RESONANCE, **25**, No.4 (2020) DOI: <https://doi.org/10.1007/s12045-020-0968-0>
- [9] S. Kuru, J. Negro *Classical spectrum generating algebra of the Kepler-Coulomb system and action-angle variables*, Physics Letters A **376** 260-264 (2012)