



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

Trabajo Fin de Máster

Máster en Matemáticas

**Recuperación de funciones holomorfas. Aplicaciones
en la resolución de ecuaciones parabólicas regresivas.**

Autor: Carlos Arranz Simón

Tutor: César Palencia de Lara
Departamento de Matemática Aplicada

Índice general

Introducción	5
1. Espacios de funciones holomorfas. Teoría del potencial	9
1.1. Teoría del potencial en el plano complejo	9
1.1.1. El problema Dirichlet en un disco. El núcleo de Poisson	9
1.1.2. Funciones subarmónicas	14
1.1.3. El problema Dirichlet general. Medidas armónicas	17
1.2. Espacios de Hardy del disco	23
1.3. El problema de interpolación de Pick-Nevanlinna	29
1.3.1. Operadores de Hankel	30
1.3.2. El problema de interpolación	33
2. Algunas técnicas en análisis numérico.	39
2.1. Descomposición en valores singulares. Mínimos cuadrados	39
2.2. La transformada discreta de Fourier	44
3. Recuperación de funciones holomorfas	51
3.1. Interpolación de funciones en H^2	51
3.2. Constante de Lebesgue y fórmula del error de Hermite	54
3.3. Resultados principales	55
4. Problemas parabólicos regresivos	65
A. Códigos de Matlab	79

Introducción

El objetivo de este Trabajo Fin de Máster es profundizar en el estudio de algunas técnicas de uso habitual en la investigación en Análisis Numérico, concretamente, en el ámbito de la resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales y la teoría de semigrupos. Para ello, se ha realizado un análisis detallado de un método para problemas parabólicos regresivos, propuesto en [17], que está basado en la recuperación de una función holomorfa a partir de sus valores aproximados en una muestra finita de puntos publicada a su vez en [18]. Además, la demostración de estos resultados requiere de conceptos y resultados no tratados en los planes de estudios del Grado o el Máster en Matemáticas de la Universidad de Valladolid, por lo que se presentan en esta memoria. Estos temas trabajados son los espacios de Hardy; la teoría del potencial en el plano complejo, que incluye el estudio de las funciones subarmónicas y las medidas armónicas; problemas de interpolación de funciones holomorfas; la transformada de Fourier discreta y algunas aplicaciones de la descomposición en valores singulares.

Dentro del ámbito de las ecuaciones diferenciales, las ecuaciones en derivadas parciales parabólicas tienen gran importancia a la hora de modelar fenómenos físicos que evolucionan en el tiempo, tales como la distribución de temperaturas en un material (*ecuación del calor*), las fluctuaciones de densidad de un material que se difunde (*ecuación del difusión*) o la evolución temporal de una partícula a escalas atómicas (*ecuación de Schrödinger*). La teoría de semigrupos de operadores lineales, expuesta en [9, 21], proporciona un marco común en el que tratar estos problemas para estudiar algunas de sus propiedades generales, tales como la existencia y unicidad de soluciones para problemas de Cauchy. Estos resultados han supuesto una parte importante del objeto de estudio de la asignatura *Ecuaciones Diferenciales Avanzadas* del presente Máster, por lo que se toman como punto de partida.

Sin embargo, mucho menos se puede decir en general sobre los correspondientes problemas regresivos, en los que se parte del conocimiento de la solución en un instante temporal y se pretende conocer la solución en los instantes precedentes. Aunque la existencia de soluciones se puede arreglar reforzando las hipótesis de partida, desde el punto de vista numérico la propagación de pequeños errores en el dato inicial no admite una solución tan inmediata. En líneas generales, el procedimiento planteado en este trabajo consiste en aproximar la solución en instantes de tiempo posteriores, un problema bien planteado y ampliamente estudiado, para después aproximar los valores en tiempos anteriores mediante el método de recuperación de funciones holomorfas. Resulta esencial en este punto la extensión analítica del semigrupo a un sector del plano complejo, hecho que depende de la geometría del espectro de su generador infinitesimal.

En el primer capítulo, se tratan algunos de los temas necesarios para el desarrollo de los métodos numéricos. Primero, se aborda la teoría del potencial en el plano complejo, con lo que se pretende establecer algunas propiedades relevantes de las funciones subarmónicas y estudiar la ecuación de Laplace en dominios generales del plano complejo mediante el uso de las medidas armónicas. La referencia principal de esta parte es [22], aunque algunos resultados también se encuentran en [23]. A continuación se pasa a estudiar los espacios de Hardy, que son los espacios de funciones holomorfas en los que se formulan los problemas de interpolación de la siguiente sección y la recuperación de funciones holomorfas. Las referencias principales son [11, 20, 23], en los que se siguen caminos diferentes para introducirlos, pero que en virtud del teorema 1.28 resultan ser equivalentes. Para cerrar el capítulo, se trata el problema de interpolación de Pick-Nevanlinna, en el que se analiza bajo qué condiciones existe una función holomorfa del disco en sí mismo que toma unos valores prescritos en unos nodos dados.

En el segundo capítulo se han incluido algunas técnicas del ámbito del análisis numérico utilizadas para implementar el algoritmo principal. La primera es la descomposición en valores singulares de una matriz, que permite resolver de forma eficiente el problema lineal de mínimos cuadrados con una restricción sobre el tamaño del vector; como referencias, se citan [6, 26]. La segunda es la transformada discreta de Fourier, que mediante el algoritmo FFT (Fast Fourier Transform) permite calcular los interpolantes trigonométricos de una función dada de forma muy eficiente. Este algoritmo va a permitir resolver numéricamente la ecuación del calor de una manera muy directa. Como referencia principal para esta parte se ha consultado [3].

En el tercer capítulo se utilizan las técnicas del capítulo anterior para desarrollar un método de recuperación de funciones holomorfas en el disco unidad a partir de sus valores en los nodos de Jacobi en un intervalo $[-r, r]$. El desarrollo del capítulo está basado principalmente en [17]. Para ello se prueban varios lemas previos, en los que resultan cruciales las propiedades de los polinomios ortogonales de Jacobi y de interpolación en los ceros de los mismos, que pueden encontrarse en [25]. Se incluye una pequeña mejora respecto de las acotaciones del citado artículo, ya que la función $\gamma(z)$ (3.8) utilizada en esta memoria tiene un denominador $\sqrt{1 - |z|}$ a diferencia del $1 - |z|$ ya conocido. El resultado principal del capítulo es el teorema 3.4, que da una cota para el error cometido en la recuperación que depende del espacio vectorial de dimensión finita en el que se aproxima, los nodos en los que se encuentran los valores y los errores en los valores en dichos nodos. Tras probarlo, se particulariza para el caso con el que trabajaremos en la práctica: como espacio vectorial se eligen los núcleos de Cauchy, unas funciones racionales definidas en 3.3, y como nodos se eligen los ceros de los polinomios de Chebyshev de primera especie.

En el cuarto capítulo se culmina el trabajo, explicando como utilizar el método para resolver problemas regresivos. En primer lugar, se precisa como una acotación a priori sobre el tamaño de la solución hace que el problema regresivo esté bien puesto. Después, se enuncia el resultado principal, en el que se da una cota del error cometido por el método numérico para el problema regresivo. Finalmente, se comentan los experimentos numéricos realizados en MATLAB. La ecuación elegida es la ecuación del calor $u_t = u_{xx}$ con condiciones frontera Dirichlet homogéneas, y el algoritmo se ha implementado tanto en una como en dos dimensiones. Tras ejecutar el algoritmo con diferentes condiciones

iniciales y perturbaciones se muestran y comentan los resultados más relevantes.

Finalmente, se ha incluido un apéndice con algunos de los códigos en lenguaje de MATLAB utilizados en la implementación del método, así como comentarios sobre las subrutinas de los programas principales cuyo código no se detalla.

Capítulo 1

Espacios de funciones holomorfas. Teoría del potencial

1.1. Teoría del potencial en el plano complejo

1.1.1. El problema Dirichlet en un disco. El núcleo de Poisson

A lo largo de este texto Ω denota un dominio (conjunto abierto y conexo) del plano complejo \mathbb{C} y $\partial\Omega$ su frontera. También D será el disco unidad de \mathbb{C} y ∂D su correspondiente frontera, la circunferencia centrada en 0 y de radio unidad. El conjunto de las funciones holomorfas en un dominio Ω se denota por $H(\Omega)$.

Se consideran, para $1 \leq p < \infty$, los espacios de las funciones medibles $f : \partial D \rightarrow \mathbb{C}$ tales que

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^p dt \right)^{1/p} < \infty,$$

que equipados con la norma $\|\cdot\|_p$ correspondiente, dan lugar a los espacios de Banach $L^p([0, 2\pi], \mu)$, que denotaremos simplemente por $L^p(\mu)$. Asimismo, se considera el espacio de las funciones medibles $f : \partial D \rightarrow \mathbb{C}$ y esencialmente acotadas, equipado con la norma del máximo $\|\cdot\|_\infty$, que se denota por L^∞ .

Una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ de clase \mathcal{C}^2 se dice *armónica* si verifica la ecuación de Laplace, es decir, si $f_{xx} + f_{yy} = 0$. Conviene recordar que las partes reales e imaginarias de las funciones holomorfas son siempre armónicas, como consecuencia de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Sin embargo, existen funciones armónicas que no son holomorfas como, por ejemplo, las funciones $f(z) = \bar{z}^n$ para $n \in \mathbb{N}$.

El teorema de Cauchy del análisis complejo permite representar una función holomorfa en términos de una integral que involucra los valores de dicha función en un contorno adecuado. El núcleo integral de Poisson permite dar una representación integral similar más conveniente para nuestros propósitos, por lo que se introduce en esta sección, siguiendo principalmente las referencias [20, 23].

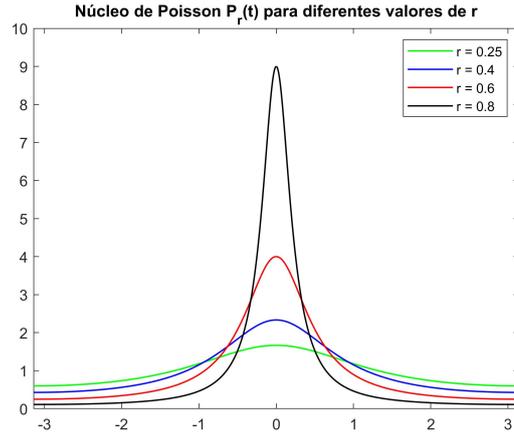


Figura 1.1: Se muestra el núcleo de Poisson en $[-\pi, \pi]$. Al aumentar el valor de r , el área bajo la curva se concentra en torno al punto medio.

Proposición 1.1. Se define el *núcleo de Poisson* $P_r(t)$ para $0 \leq r < 1$, $t \in \mathbb{R}$, como

$$P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int}. \quad (1.1)$$

Si $z = re^{i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$P_r(t - \theta) = P_r(\theta - t) = \operatorname{Re} \left(\frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}} \right) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - t)},$$

por lo que es una función par y 2π -periódica.

Para cada $0 \leq r < 1$ el núcleo de Poisson verifica las siguientes propiedades:

1. $P_r(t) \geq 0$ para cada $t \in \mathbb{R}$.
2. $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t - \theta) d\theta = 1$.
3. Para cada $0 < \delta < \pi$, se tiene que $\sup_{t \in I(\delta)} P_r(t) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 1$, donde $I(\delta)$ es el conjunto $\{t \in \mathbb{R} : \delta < |t| < \pi\}$.

Por verificar estas tres propiedades se dice que el núcleo de Poisson es una aproximación de la identidad. Además, ocurre que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P_r(t - \theta)|^2 d\theta = \frac{1+r}{1-r}.$$

Demostración. Si $0 \leq r < 1$ y $t, \theta \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
 P_r(\theta - t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-t)} \\
 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(e^{in\theta} e^{-int} + e^{-in\theta} e^{int} \right) \\
 &= 1 + 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \left(r e^{i\theta} e^{-it} \right)^n \\
 &= \operatorname{Re} \left(\frac{1 + z e^{-it}}{1 - z e^{-it}} \right) \\
 &= \operatorname{Re} \left(\frac{1 - r^2 + 2ir \sin(\theta - t)}{|1 - z e^{-it}|^2} \right) \\
 &= \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - t)},
 \end{aligned}$$

como se quería probar. Teniendo en cuenta la penúltima expresión de la ecuación anterior y que $0 \leq r < 1$, se deduce que $P_r(t) \geq 0$. La convergencia uniforme de la serie (1.1) en t para cada r fijo garantiza que se puede intercambiar la suma con la integral. Tras integrar término a término, el único sumando no nulo es el correspondiente a $n = 0$ del que se sigue inmediatamente el resultado 2. Para $t \in I(\delta)$, se tiene que

$$P_r(t) \leq \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\delta)} \rightarrow 0 \quad \text{si } r \rightarrow 1,$$

lo que prueba la tercera afirmación. Para la última parte, conviene notar que las funciones $\{1/2\pi e^{in\theta}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ son un sistema ortonormal y completo en el espacio de Hilbert $L^2(\mu)$, por lo que teniendo en cuenta la expresión (1.1) se sigue que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P_r(t - \theta)|^2 d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{2|n|} = 1 + \frac{2r}{1 - r} = \frac{1 + r}{1 - r}.$$

■

Proposición 1.2. Sea $f \in L^1(\mu)$. La función $P_D f$ definida en D mediante

$$P_D f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f(t) dt$$

es una función armónica, que se denomina *extensión armónica de f*.

Demostración. Supongamos en primer lugar que f toma valores reales. En estas condiciones, se tiene que

$$P_D f(z) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \frac{1 + z e^{it}}{1 - z e^{-it}} f(t) dt$$

de acuerdo con la proposición (1.1). f es una función armónica porque es la parte real de una función holomorfa, como garantiza el teorema de holomorfía bajo el signo integral [23, 10.7]. En general, si f toma valores complejos existen g, h reales con $f = g + ih$, y entonces $P_D f = P_D g + iP_D h$, así que f es armónica. ■

Puesto que las funciones armónicas no son en general holomorfas no se pueden desarrollar siempre en serie de potencias. Sin embargo, para las extensiones armónicas de funciones de $L^1(\mu)$ siempre se tiene un desarrollo que involucra potencias de z y \bar{z} .

Proposición 1.3. Sea $f \in L^1(\mu)$. Se denota por $\hat{f}(n)$ el n -ésimo coeficiente de Fourier de f , esto es,

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

La extensión armónica $P_D f$ de f se puede escribir en términos de estos coeficientes como

$$P_D f(re^{it}) = f_r(e^{it}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) r^{|n|} e^{in\theta}, \quad (1.2)$$

equivalentemente,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(-n) \bar{z}^n.$$

Demostración. Para $M, N \geq 1$ se definen los polinomios $P_r^{M,N}$ como

$$P_r^{M,N}(t) = \sum_{n=-M}^{n=N} r^{|n|} e^{int},$$

que verifican la desigualdad

$$\|P_r^{M,N} - P_r\|_{\infty} \leq \sum_{n>M} r^n + \sum_{n>N} r^n = \frac{r^{M+1} + r^{N+1}}{1-r}.$$

De lo anterior se sigue que

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (P_r(\theta-t) - P_r^{M,N}(\theta-t)) f(t) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \|P_r^{M,N} - P_r\|_{\infty} \|f\|_1$$

converge hacia 0 uniformemente en los discos $|z| = r < R$. Finalmente, observemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r^{M,N}(\theta-t) f(t) dt &= \sum_{n=-M}^N r^{|n|} e^{in\theta} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \\ &= \sum_{n=-M}^N \hat{f}(n) r^{|n|} e^{in\theta}, \end{aligned}$$

de donde se concluye tomando límites. ■

La proposición siguiente contiene información acerca del comportamiento de la extensión armónica de una función f al acercarse al borde del disco. Mediante técnicas habituales en el estudio de la convolución de funciones se prueban diferentes tipos de convergencia hacia la función f .

Proposición 1.4. Sea $f \in L^p(\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$ y $P_D f$ su extensión armónica en D . Si $f_r(e^{i\theta}) = P_D f(re^{i\theta})$, se tiene que $\|f_r\|_p \leq \|f\|_p$ para cada $0 \leq r < 1$. Además, si $1 \leq p < \infty$ se tiene que $\|f_r - f\|_p \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 1$. De hecho, f_r converge uniformemente a f en cada intervalo cerrado en el que f sea continua.

Demostración. En el caso $p < \infty$ las relaciones

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t - \theta) d\theta = 1, \quad P_r(t - \theta) \geq 0$$

permiten utilizar la desigualdad de Jensen para funciones convexas [23, Cap. 3.3], pues caracterizan el núcleo de Poisson normalizado como una medida de probabilidad. La convexidad de las funciones $\varphi(t) = |t|^p$ asegura que

$$|f_r(\theta)|^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) |f(t)|^p dt.$$

Integrando ahora respecto de θ , utilizando el teorema de Tonelli-Fubini y teniendo en cuenta la integral del núcleo de Poisson se concluye la prueba. En el caso $p = \infty$, la acotación es directa teniendo de nuevo en cuenta la integral del núcleo de Poisson.

Para probar la segunda parte, se vuelve a utilizar que P_r es una aproximación de la identidad para obtener

$$\begin{aligned} f_r(e^{it}) - f(e^{it}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(e^{it}) - f(e^{i\theta})) P_r(\theta - t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(e^{i(\theta+x)}) - f(e^{i\theta})) P_r(x) dx, \end{aligned}$$

donde se ha utilizado el cambio de variable $x = \theta - t$, la periodicidad de las funciones involucradas y el hecho de que P_r es una función par.

Sean $\epsilon > 0$ y I un intervalo cerrada en el que f es continua. Separamos la integral anterior en dos intervalos $I_1 = \{0 \leq |x| \leq \delta\}$ e $I_2 = \{\delta \leq |x| \leq \pi\}$, con δ suficientemente pequeño para que

$$\left| f(e^{i(\theta+x)}) - f(e^{i\theta}) \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

para $\theta \in I$ y $|x| \leq \delta$, que existe gracias a la continuidad uniforme de f en el intervalo. Así, se tiene que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{I_1} \left| f(e^{i(\theta+x)}) - f(e^{i\theta}) \right| P_r(x) dx < \frac{\epsilon}{2}$$

y que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{I_2} \left| f(e^{i(\theta+x)}) - f(e^{i\theta}) \right| P_r(x) dx \leq 2\|f\|_1 \sup_{x \in I_2} P_r(x) < \frac{\epsilon}{2}$$

para r suficientemente próximo a 1, gracias a la tercera propiedad de la proposición 1.1. Por lo tanto, f_r converge uniformemente a f en I .

Si $f \in L^p(\mu)$ en general, por la densidad de las funciones continuas existen $f^{(0)}, f^{(1)} \in L^p(\mu)$ tal que $f = f^{(0)} + f^{(1)}$, siendo la primera de ellas una función continua con $\|f - f^{(0)}\|_p < \epsilon/3$. Se debe cumplir también que $f_r = f_r^{(0)} + f_r^{(1)}$. La continuidad garantiza que $f_r^{(0)}$ converge uniformemente; y, por tanto, en la norma de $L^p(\mu)$, a la función $f^{(0)}$. Los resultados ya probados aseguran que

$$\|f_r^{(1)}\|_p \leq \|f^{(1)}\|_p < \frac{\epsilon}{3}, \quad \|f_r - f_r^{(0)}\|_p < \frac{\epsilon}{3},$$

así que

$$\begin{aligned} \|f_r - f\|_p &\leq \|f_r - f_r^{(1)}\|_p + \|f_r^{(1)} - f^{(1)}\|_p + \|f^{(1)} - f\|_p \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \|f_r^{(1)} - f^{(1)}\|_p + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon \end{aligned}$$

para r suficientemente próximo a 1, como se quería probar. \blacksquare

El núcleo de Poisson juega un papel central a la hora de resolver la ecuación de Laplace con condición de contorno tipo Dirichlet en un disco. Concretamente, si ϕ es una función continua definida en ∂D , entonces la función $u : D \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\phi(t) dt \quad (1.3)$$

es la solución del problema

$$\begin{cases} \Delta u(z) = 0, & z \in D, \\ \lim_{z \rightarrow \xi} u(z) = \phi(\xi), & \xi \in \partial D. \end{cases}$$

Esta es la ecuación de Laplace con condición frontera Dirichlet en el disco unidad. El resultado es consecuencia de la última afirmación de la proposición 1.4. La expresión de la solución es similar cuando el dominio es otro disco, pero al trabajar en dominios generales se puede generalizar esta técnica mediante el uso de las medidas armónicas, como se comentará en una sección posterior.

En algunos textos se define el núcleo de Poisson como la función $P : D \times \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$P(z, \xi) = \operatorname{Re} \left(\frac{\xi + z}{\xi - z} \right), \quad z \in D, \xi \in \partial D. \quad (1.4)$$

Las igualdades de la proposición 1.1 ponen de manifiesto que las definiciones son similares (tómese $\xi = e^{it}$, $z = re^{i\theta}$) y los resultados se pueden expresar de forma equivalente en términos de una u otra expresión. Sin embargo, esta segunda forma permite captar mejor el sentido en el que las medidas armónicas generalizan la técnica del núcleo de Poisson al resolver la ecuación de Laplace con condición Dirichlet en dominios más generales. En estos términos, la ecuación 1.3 se escribe como

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, \xi)\phi(\xi) d\xi \quad (1.5)$$

1.1.2. Funciones subarmónicas

Las funciones subarmónicas tienen una gran importancia a la hora de generalizar la resolución del problema Dirichlet para la ecuación de Laplace en el disco a un dominio cualquiera del plano complejo. Además, utilizando sus propiedades se prueban varias desigualdades integrales de gran importancia a la hora de introducir los espacios de Hardy. En la referencia [23, Cap. 17.1] se puede encontrar una breve introducción a este tema, mientras que en [22, Cap. 2,3] se desarrolla su aplicación a la ecuación de Laplace en el plano complejo.

Definición 1.5. Sea $f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$. Se dice que f es *superiormente semicontinua* (resp. *inferiormente semicontinua*) si el conjunto

$$\{x \in \Omega : f(x) < \alpha\} \quad (\text{resp. } \{x \in \Omega : f(x) > \alpha\})$$

es abierto para cada $\alpha \in \mathbb{R}$. Esto es, que para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ y cada $x \in \mathbb{R}$ verificando que $f(x) < \alpha$ (resp. $f(x) > \alpha$), existe $\epsilon > 0$ tal que $f(y) < \alpha$ (resp. $f(y) > \alpha$) si $y \in D(x; \epsilon)$.

Por ejemplo, las funciones características de los conjuntos cerrados son superiormente semicontinuas y las de los conjuntos abiertos son inferiormente semicontinuas. Una función es continua si, y solo si, es inferior y superiormente semicontinua.

Definición 1.6. Una función $f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ se denomina subarmónica si cumple las siguientes propiedades:

1. $-\infty \leq f(z) < \infty$ si $z \in \Omega$.
2. f es superiormente semicontinua en Ω .
3. Si $\bar{D}(a; r) \subset \Omega$, entonces

$$f(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

4. Ninguna de las integrales anteriores toma el valor $-\infty$.

La condición (4) de la definición [23] anterior es para excluir que la función $f(z) \equiv -\infty$ sea subarmónica y muchos autores, e.g. [22], no la imponen. Por otra parte, las dos primeras condiciones garantizan que la función f es acotada superiormente en los conjuntos compactos y, por tanto, que las integrales que aparecen en el tercer punto existen y no toman el valor ∞ . Si K es compacto, la semicontinuidad superior de f garantiza que los conjuntos $\{z \in K : u(z) \geq n\}$ son cerrados para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces, o bien se cumple que $K_1 \cap \dots \cap K_n = K_n = \emptyset$ para algún $n \in \mathbb{N}$, o bien la sucesión de conjuntos anterior tiene la propiedad de la intersección finita. En este segundo caso, la compacidad de K garantiza que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$, contradiciendo entonces que $u(z) < \infty$. Por tanto, u está acotada superiormente en los compactos de Ω .

Proposición 1.7. Sean f una función subarmónica en Ω y φ una función convexa y estrictamente creciente en \mathbb{R} . Entonces la función $\varphi \circ f$ es subarmónica en Ω .

Demostración. Se define $\varphi(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$ para que la composición tenga sentido cuando $u(z) = -\infty$. La condición de subarmonicidad (1) se cumple porque $\varphi(x) < \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Puesto que la función φ es creciente y continua (por ser convexa), para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ ocurre que $\varphi^{-1}(-\infty, \alpha)$ es un intervalo de la forma $(-\infty, \beta)$ y por tanto

$$(\varphi \circ f)^{-1}(-\infty, \alpha) = f^{-1}(\varphi^{-1}(-\infty, \alpha))$$

es un conjunto abierto gracias a la semicontinuidad de f , por lo que la función $\varphi \circ f$ es superiormente semicontinua.

Ahora, si $\bar{D}(a; r) \subset \Omega$ se tiene que

$$\varphi(f(a)) \leq \varphi\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta\right) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(f(a + re^{i\theta})) d\theta.$$

La primera desigualdad se deduce de que φ es creciente y de que f es subarmónica, mientras que la segunda se debe a la desigualdad de Jensen. El último requisito de la definición 1.6 también es consecuencia de esta desigualdad. ■

Teorema 1.8. Sea $f \in H(\Omega)$ que no es idénticamente nula. Entonces las funciones $\log |f|$, $\log^+ |f|$ y $|f|^p$, para $0 < p < \infty$, son subarmónicas en Ω .

Demostración. Poniendo que $\log |f(z)| = -\infty$ si $f(z) = 0$, la función $\log |f|$ es entonces superiormente semicontinua gracias a la continuidad del logaritmo y del valor absoluto. Si $\bar{D}(a; r) \subset \Omega$ y $f(a) \neq 0$, la fórmula de Jensen [23, 15.18] asegura que, si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son los ceros de f en $\bar{D}(a; r)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \log |f(a)| &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(a + re^{i\theta})| d\theta + \sum_{k=1}^n \log \frac{|\alpha_k|}{r} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(a + re^{i\theta})| d\theta. \end{aligned}$$

Si $f(a) = 0$ la desigualdad también es cierta. Por tanto, la función $\log |f|$ es subarmónica. Para concluir el teorema basta con aplicar la proposición anterior con la función $\log |f|$ y las funciones convexas $\varphi(t) = \max\{0, t\}$ y $\varphi(t) = e^{pt}$, respectivamente. ■

Proposición 1.9. Sean u una función continua y subarmónica en Ω , K un conjunto compacto de Ω y h una función real y continua en K y armónica en el interior de K , V , para la que se cumple que $u(z) \leq h(z)$ en cada punto de la frontera de K . Se cumple entonces que $u(z) \leq h(z)$ para todo $z \in V$.

Demostración. Sea $v = u - h$ y supongamos que $v(z) > 0$ para algún $z \in V$. La función v es continua en K así que alcanza un máximo m en K que no puede estar en la frontera, puesto que ahí $v(z) \leq 0$. El conjunto $E = \{z \in K : v(z) = m\}$ es un compacto no vacío. Si $a \in E$ es un conjunto de dicho compacto, para algún $r > 0$ se tiene que $\bar{D}(a; r) \subset V$, pero tal que algún arco de la circunferencia centrada en a de radio r no está completamente contenido en E (de lo contrario, se contradeciría el carácter compacto de E). Por tanto,

$$v(a) = m > \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

La desigualdad anterior implica que v no es subarmónica y que por tanto u tampoco lo es, lo que es absurdo. ■

El último resultado de esta sección será de gran utilidad al definir los espacios de Hardy y con las normas que se introducen en ellos. Para probarlo se necesita un lema previo.

Lema 1.10. Sea f una función continua y subarmónica en el disco D y

$$m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta}) d\theta, \quad 0 \leq r < 1.$$

Entonces m es una función creciente en $[0, 1)$.

Demostración. Dados $r_1 < r_2$, sea h la única función que coincide con f en la circunferencia $S(0, r_2)$ que es armónica en el disco $D(0, r_2)$ correspondiente. La proposición anterior asegura que $f \leq h$ en $D(0, r_2)$, así que

$$m(r_1) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(r_1 e^{i\theta}) d\theta = h(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(r_2 e^{i\theta}) d\theta = m(r_2),$$

así que m es creciente, como se quería probar. ■

Finalmente, merece la pena mencionar varias propiedades de las funciones subarmónicas cuyas pruebas pueden encontrarse en [22] y que serán de utilidad en el transcurso de la exposición.

De forma análoga a lo que ocurre con las funciones armónicas, para las subarmónicas también se tiene un principio del máximo. La importancia de este principio radica en que a partir de condiciones locales sobre la función se derivan condiciones globales de gran importancia. Hay que destacar que, en este caso, nada se puede decir a priori sobre el mínimo absoluto de una función subarmónica. En lo que sigue, se considerará que si un dominio Ω es no acotado entonces $\infty \in \partial\Omega$.

Teorema 1.11. Principio del máximo para funciones subarmónicas. Sea f una función subarmónica en un dominio Ω . Se verifican las siguientes proposiciones.

1. Si f alcanza un máximo local en Ω , entonces f es constante.
2. Si $\limsup_{z \rightarrow \xi} f(z) \leq 0$ para cada $\xi \in \partial\Omega$, entonces $f \leq 0$ en Ω .

La definición de función subarmónica con la que se ha trabajado evita condiciones de regularidad sobre la función más allá de la semicontinuidad superior. Sin embargo, bajo condiciones más fuertes de regularidad, se puede dar una caracterización más sencilla de esta propiedad.

Teorema 1.12. Sea Ω un dominio de \mathbb{C} y sea $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Entonces f es subarmónica si, y solo si $\Delta f \geq 0$ en Ω .

1.1.3. El problema Dirichlet general. Medidas armónicas

En esta sección se explican las técnicas que se utilizan para abordar el estudio de la ecuación de Laplace con condición de contorno Dirichlet en un dominio cualquiera del plano complejo. Los detalles de esta teoría, que escapan de la extensión que se pretende en este trabajo, se pueden encontrar en [22, Cap. 3]. Este estudio conduce a resultados, como por ejemplo el Teorema de las Dos Constantes, que serán de gran utilidad en estudio de la recuperación de funciones holomorfas realizado en el capítulo correspondiente.

El problema que se explica es el de encontrar una función $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u(z) = 0, & z \in \Omega, \\ \lim_{z \rightarrow \xi} u(z) = \phi(\xi), & \xi \in E \subset \partial\Omega, \end{cases}$$

donde la regularidad de la función ϕ y las características del conjunto E se precisan más adelante. Cuando Ω era un disco la solución se podía expresar en cada punto como la integral de la función dato ϕ respecto de una medida de probabilidad dada por el núcleo de Poisson. Si se define, para cada $z \in D$, la siguiente medida en ∂D ,

$$d\mu_z = \frac{1}{2\pi} P(z, \xi) |d\xi|,$$

la ecuación (1.5) se puede escribir como

$$u(z) = \int_{\partial D} \phi(\xi) d\mu_z(\xi).$$

Este resultado se puede generalizar a otros dominios del plano complejo mediante la introducción de las llamadas medidas armónicas, que generalizan el papel del núcleo de Poisson en el caso de que el dominio sea un disco. En cuanto a la generalización a un dominio cualquiera, que se apoya esencialmente en el Teorema de Representación de Riesz para medidas complejas, no se pretende demostrarla con todo detalle, sino introducir las ideas y resultados más relevantes.

Dado $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio del plano con frontera $\partial\Omega$, \mathcal{M} denotará la clase de las funciones holomorfas en Ω y continuas en $\bar{\Omega}$ con la norma del supremo y \mathcal{A} el subconjunto de $\mathcal{C}(\partial\Omega)$ de funciones continuas en $\partial\Omega$ que son restricciones a $\partial\Omega$ de funciones de \mathcal{M} . Del principio del módulo máximo, se sigue que $\|f\|_{\bar{\Omega}} = \|f\|_{\partial\Omega}$ para las funciones de \mathcal{M} , por lo que cada función de \mathcal{A} posee una única extensión a un elemento de \mathcal{M} , que se denotará por la misma letra. Además, del mismo principio se sigue que para $z \in \Omega$, la aplicación de evaluación $f \in \mathcal{A} \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$ es un funcional lineal y continuo. La desigualdad $|f(z)| \leq \|f\|_{\partial\Omega}$ que garantiza la continuidad se alcanza para las funciones constantes, por lo que la norma del funcional es exactamente 1. El teorema de Hahn-Banach garantiza que se puede extender el funcional, de forma que existe un funcional lineal $\Lambda_z : \mathcal{C}(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ verificando

$$\begin{aligned} \Lambda_z f &= f(z), & f \in \mathcal{A} \\ \Lambda_z 1 &= 1 \\ \|\Lambda_z\| &= 1. \end{aligned}$$

Como se prueba en [23, p. 101], estas dos últimas condiciones garantizan que Λ_z es un funcional positivo (esto es, envía funciones positivas en números reales positivos). Por el Teorema de Representación de Riesz, existe una única medida de Borel positiva regular μ_z sobre $\partial\Omega$, para cada $z \in \Omega$, tal que

$$\Lambda_z = \int_{\partial\Omega} f d\mu_z \quad \text{si } f \in \mathcal{C}(\partial\Omega).$$

En particular, si $f \in \mathcal{A}$ se puede representar como

$$f(z) = \int_{\partial\Omega} f d\mu_z.$$

Tomando la función $f \equiv 1$ se comprueba que μ_z es de hecho una medida de probabilidad para cada $z \in \Omega$.

Las ideas del párrafo anterior motivan la siguiente definición.

Definición 1.13. Sea Ω un dominio del plano complejo y sea $\mathcal{B}(\partial\Omega)$ la σ -álgebra de Borel del conjunto ∂D . Se dice que la función $\omega : D \times \mathcal{B}(\partial\Omega) \rightarrow [0, 1]$ es una *medida armónica en Ω* si se cumple que

1. para cada $z \in \Omega$, la aplicación $I \mapsto \omega(z, I)$ es una medida de probabilidad.
2. si $\phi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, la solución u del problema Dirichlet con dato ϕ en Ω se puede escribir mediante la siguiente *integral de Poisson generalizada*,

$$u(z) = \int_{\partial\Omega} \phi(\xi) d\omega(z, \xi) \quad \text{para } z \in D.$$

En la teoría del potencial, se introduce el concepto de *conjunto polar* para representar un papel de conjuntos despreciables a efectos de medidas armónicas de una forma similar al que representan los conjuntos de medida nula en la teoría de la medida.

Definición 1.14. Se dice que un conjunto E de \mathbb{C} es *polar* si para cada medida de Borel finita $\mu \neq 0$ cuyo soporte sea un conjunto compacto de E se tiene que

$$\int \int \log |z - w| d\mu(z) d\mu(w) = -\infty. \tag{1.6}$$

Cuando una propiedad se cumple en todos los puntos de un conjunto salvo quizá en un subconjunto polar del mismo, se dice que la propiedad se satisface n. e. (*nearly everywhere*).

Si se considera que μ es una distribución de carga en \mathbb{C} , la cantidad (1.6) es la energía electrostática total de la distribución, cambiada de signo. Estos conjuntos verifican además las siguientes propiedades:

- Los subconjuntos de un conjunto polar son polares.
- Todo conjunto polar tiene medida de Lebesgue nula. El recíproco no es cierto, como se mostrará en un ejemplo.
- Los conjuntos unipuntuales son polares. Además, las uniones numerables de conjuntos polares son polares.
- La propiedad de ser polar es invariante bajo transformaciones conformes.

Ejemplo 1.15. Si $r > 0$, el intervalo $I = [-r, r]$ no es un conjunto polar. Para probarlo, consideramos la medida $d\mu = |dz|$ con soporte en el propio intervalo $[-r, r]$ y observamos que

$$\int_{-r}^r \int_{-r}^r \log |z - w| |dz| |dz| = \int_{-r}^r \int_{-2r}^{2r} \log |x| dx dy > -\infty, \tag{1.7}$$

donde se ha llevado a cabo el cambio de variable $x = z - w, y = w$. Por tanto el conjunto no es polar. Además, teniendo en cuenta la definición se deduce que la recta real \mathbb{R} tampoco es un conjunto polar y, puesto que esta propiedad se mantiene bajo transformaciones conformes, podemos garantizar que las circunferencias tampoco son conjuntos polares. Este caso particular tendrá importancia al tratar la recuperación de funciones holomorfas en el tercer capítulo.

La condición de frontera no polar es precisamente la que hace falta para que la medida armónica de un dominio esté unívocamente determinada. Además, esta es de hecho una función armónica que satisface un problema de tipo Dirichlet concreto, lo que permite calcularla o estimarla en algunos casos.

Proposición 1.16. Sea Ω un dominio del plano complejo tal que ∂D es no polar, y sea I un subconjunto de Borel de $\partial\Omega$. Se tiene que:

1. existe una única medida armónica para Ω ;
2. la función $z \mapsto \omega(z, I)$ es armónica y acotada en Ω ;
3. si la frontera de I relativa a ∂D es polar, entonces $\omega(z, I)$ es la solución del problema de Dirichlet generalizado con función dato $\phi = \chi_I$.

La medida armónica nos va a permitir, en primer lugar, dar la solución del problema Dirichlet generalizado ya anunciada.

Teorema 1.17. Solución del problema Dirichlet generalizado. Sea Ω un dominio del plano complejo tal que ∂D es no polar, y sea $\phi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada que es continua n. e. en ∂D . Entonces existe una única función armónica u en Ω tal que $\lim_{z \rightarrow \xi} u(z) = \phi(\xi)$ para n. e. $\xi \in \partial D$, que se puede escribir como

$$u(z) = \int_{\partial\Omega} \phi(\xi) d\omega(z, \xi)$$

en términos de la medida armónica ω del dominio.

Además, la propiedad inferior de la media de las funciones subarmónicas se va a poder extender a integrales en caminos más generales que las circunferencias que se requerían en la definición.

Teorema 1.18. Principio del máximo para funciones subarmónicas II. Sea Ω un dominio del plano complejo y u una función subarmónica y acotada en Ω . Si $\partial\Omega$ es no polar, y $\limsup_{z \rightarrow \xi} u(z) \leq 0$ para n. e. $\xi \in \partial\Omega$, entonces $u \geq 0$ en Ω .

Si u es subarmónica y acotada en Ω y además está definida en $\partial\Omega$, se tiene que

$$u(z) \leq \int_{\partial\Omega} u(\xi) d\omega(z, \xi),$$

donde ω es la medida armónica de Ω .

Demostración. Por claridad, se explica la prueba de la segunda afirmación. Se define la función v en Ω como

$$v(z) = \int_{\partial\Omega} u(\xi) d\omega(z, \xi),$$

que es armónica de acuerdo con el teorema 1.17. Además, se tiene que la función $u - v$ es subarmónica y

$$\limsup_{z \rightarrow \xi} (u(z) - v(z)) = u(\xi) - u(\xi) = 0 \quad \text{n.e. } \xi \in \partial\Omega,$$

debido a la semicontinuidad superior de u y de nuevo al teorema 1.17. Por la primera parte del teorema, se concluye que $u \leq v$ en el dominio. ■

La función $\omega(z, I)$, donde I es un conjunto de Borel en las condiciones del enunciado, recibe el nombre de *medida armónica de I relativa a Ω* . Si no hay lugar a confusión esta se denotará simplemente por ω .

Proposición 1.19. Sean Ω un dominio de \mathbb{C} tal que su frontera $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es no polar, con Γ_1, Γ_2 subconjuntos de Borel medibles y disjuntos de $\partial\Omega$, y ω la medida armónica de Γ_1 relativa a Ω . Si u es una función subarmónica en Ω que satisface

$$u(z) \leq M_1, \quad z \in \Gamma_1, \quad u(z) \leq M_2, \quad z \in \Gamma_2, \quad (1.8)$$

donde M_1 y M_2 son constantes positivas, entonces se tiene que

$$u(z) \leq M_1 \omega(z) + M_2 (1 - \omega(z))$$

para cada $z \in \Omega$.

Demostración. Por el teorema 1.18, se tiene que, si $\tilde{\omega}$ es la medida armónica de Ω ,

$$\begin{aligned} u(z) &\leq \int_{\partial\Omega} u(\xi) d\tilde{\omega}(z, \xi) \\ &\leq \int_{\Gamma_1} M_1 d\tilde{\omega}(z, \xi) + \int_{\Gamma_2} M_2 d\tilde{\omega}(z, \xi) \\ &= M_1 \tilde{\omega}(z, \Gamma_1) + M_2 \tilde{\omega}(z, \Gamma_2) \\ &= M_1 \omega(z) + M_2 (1 - \omega(z)), \end{aligned}$$

como se quería probar. ■

Nótese que si una función u es holomorfa, entonces $|u|$ y $\log |u|$ son subarmónicas y se les puede aplicar el teorema de las dos constantes. En este caso, podemos enunciar una generalización del principio del módulo máximo, que permitía acotar una función holomorfa en el interior del dominio por el valor máximo que alcanza en su frontera. Ahora, si hay un subconjunto de la frontera en el que se conoce una acotación mejor, podemos acotar el módulo de la función en cada punto por una combinación de ambas constantes, determinada por el valor de ω en cada punto.

Teorema 1.20. Sean Ω un dominio de \mathbb{C} tal que su frontera $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es no polar, con Γ_1, Γ_2 subconjuntos de Borel medibles y disjuntos de $\partial\Omega$, y ω la medida armónica de Γ_1 relativa a Ω , esto es, la única función armónica en Ω tal que $\omega(z) = 1$ si $z \in \Gamma_1$ y $\omega(z) = 0$ si $z \in \Gamma_2$. Si f es una función holomorfa en Ω que satisface

$$u(z) \leq M_1, \quad z \in \Gamma_1, \quad u(z) \leq M_2, \quad z \in \Gamma_2, \quad (1.9)$$

donde M_1 y M_2 son constantes positivas, entonces se tiene que

$$|u(z)| \leq M_1^{\omega(z)} M_2^{1-\omega(z)}.$$

para cada $z \in \Omega$.

Demostración. Se concluye aplicando el lema anterior a la función subarmónica $\log |f|$ y tomando exponenciales. ■

A continuación se muestran dos ejemplos de dominios, sus medidas armónicas y la acotación que proporciona el teorema de dos constantes cuando se aplica a funciones holomorfas en dichos dominios.

Ejemplo 1. Banda vertical.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, se considera el dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Re} z < b\}$ y se toma como subconjunto $\Gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = b\}$. Si se toma la función $\omega : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\omega(x + iy) = \frac{x - a}{b - a},$$

se comprueba directamente que

- ω es armónica, $\Delta\omega(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$.
- $\omega(z) = 1$ para cada $z \in \Gamma_1$.
- $\omega(z) = 0$ para cada $z \in \Gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = a\}$.

Por tanto, ω es la medida armónica de Γ_1 relativa a Ω . Si f es holomorfa en un entorno de $\overline{\Omega}$ verificando

$$|f(z)| \leq M_1 \quad \text{si } z \in \Gamma_1, \quad |f(z)| \leq M_2 \quad \text{si } z \in \Gamma_2, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| < \infty,$$

entonces, por el teorema de las dos constantes, se tiene que si $z = x + iy \in \Omega$,

$$|f(z)| \leq M_1 \frac{x - a}{b - a} + M_2 \frac{b - x}{b - a}.$$

La cota de la norma de f en la recta $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = c\}$, con $c = (1 - \alpha)a + \alpha b$, $\alpha \in (0, 1)$, es la combinación lineal convexa de las cotas en las rectas $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = a\}$ y $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = b\}$ con la misma constante α ,

$$|f(z)| \leq (1 - \alpha)M_2 + \alpha M_1, \quad \text{si } \operatorname{Re} z = (1 - \alpha)a + \alpha b.$$

Ejemplo 2. Corona circular.

Dados $r, R \in \mathbb{R}$, se considera el dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ y se toma como subconjunto $\Gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$. Si se toma la función $\omega : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\omega(z) = \frac{\log(|z|/r)}{\log(R/r)},$$

se comprueba directamente que

- ω es armónica, $\Delta\omega(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$.
- $\omega(z) = 1$ para cada $z \in \Gamma_1$.
- $\omega(z) = 0$ para cada $z \in \Gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$.

Por tanto, ω es la medida armónica de Γ_1 relativa a Ω . Si f es holomorfa en un entorno de $\overline{\Omega}$ verificando

$$|f(z)| \leq M_1 \quad \text{si } z \in \Gamma_1, \quad |f(z)| \leq M_2 \quad \text{si } z \in \Gamma_2,$$

entonces, por el teorema de las dos constantes, se tiene que si $z \in \Omega$,

$$|f(z)| \leq M_1 \frac{\log(|z|/r)}{\log(R/r)} + M_2 \frac{\log(R/|z|)}{\log(R/r)}.$$

En caso de que nos situemos en una circunferencia intermedia de radio $\rho = R^\alpha r^{1-\alpha}$, con $\alpha \in (0, 1)$ se tiene que

$$|f(z)| \leq \alpha M_1 + (1 - \alpha)M_2.$$

Esta cota aún se puede mejorar observando que la función $\log |f|$ también es subarmónica, de acuerdo con la proposición 1.8, y se le puede aplicar el teorema de las dos constantes. Así, de la cota anterior para $\log |f|$ y tomando exponenciales se sigue que

$$|f(z)| \leq M_1^\alpha M_2^{1-\alpha}, \quad \text{si } |z| = R^\alpha r^{1-\alpha}.$$

Este resultado es conocido como el *teorema de los tres círculos de Hadamard*.

1.2. Espacios de Hardy del disco

Productos de Blaschke

La existencia de una función holomorfa en el disco unidad que se anule en una sucesión de puntos dada está garantizada por el teorema de factorización de Weierstrass, siempre que la sucesión considerada no tenga un punto de acumulación en dicho disco. Sin embargo, las funciones obtenidas mediante la construcción del teorema son, en general, difíciles de manipular. Los productos de Blaschke dan lugar a funciones más fáciles de manipular y de acotar en el disco unidad.

Proposición 1.21. Sea $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de elementos no nulos de D tales que

$$\sum_{n=1}^\infty (1 - |z_n|) < \infty.$$

Entonces el producto

$$B(z) = \prod_{n=1}^\infty \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \bar{z}_n z} \tag{1.10}$$

converge uniformemente en los compactos de D y define una función holomorfa en D . Además, $|B(z)| < 1$ si $z \in D$. Uno de tales productos se denomina *producto de Blaschke*.

Demostración. Cada factor $B_n(z) = \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \bar{z}_n z}$ es una transformación de Möbius que envía el disco D en sí mismo. Esto se debe a que $B_n(z_n) = 0$ y a que, para z con $|z| = 1$, se tiene que

$$|B_n(z)| = |\bar{z}| \left| \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \bar{z}_n z} \right| = \left| \frac{\bar{z} z_n - 1}{1 - \bar{z}_n z} \right| = 1.$$

Por lo tanto, $|B_n(z)| \leq 1$ para cada $z \in D$. Para comprobar la convergencia uniforme del producto, basta comprobar que $\sum_{n=1}^\infty (1 - |B_n(z)|)$ converge uniformemente en $|z| \leq r < 1$. Ocurre que

$$|1 - B_n(z)| = \left| \frac{(1 - |z_n|)(z|z_n| + z_n)}{(1 - \bar{z}_n z)z_n} \right| \leq \frac{1 + r}{1 - r} (1 - |z_n|),$$

así que la serie es convergente debido a las hipótesis sobre la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^\infty$. La holomorfa de B está garantizada por la convergencia uniforme en virtud del teorema [1, 6.1.7] ■

Espacios de Hardy del disco

En esta sección se introducen los espacios de Hardy de funciones holomorfas en el disco unidad, que serán el marco de trabajo adecuado para estudiar los problemas que se tratan en capítulos posteriores. El objetivo es demostrar los teoremas (1.28) y (1.29) que caracterizan los espacios de Hardy y permiten operar con ellos de una forma cómoda.

A lo largo de la sección se consideran funciones holomorfas en el disco unidad, esto es, $f \in H(D)$. Se definen las funciones f_r en ∂D como

$$f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta}) \quad 0 \leq r < 1.$$

Estas funciones f_r toman los mismos valores que f al recorrer la circunferencia centrada en 0 de radio r . Puesto que f es holomorfa en el disco, estas funciones serán continuas y, por tanto, integrables respecto de la medida de Lebesgue, al ser μ una medida finita. Tiene sentido entonces considerar las normas siguientes,

$$\begin{aligned} \|f_r\|_p &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_r(e^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} & 0 < p < \infty \\ \|f_r\|_\infty &= \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |f_r(e^{i\theta})| \\ \|f_r\|_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f_r(e^{i\theta})| d\theta \end{aligned}$$

que se utilizan en la siguiente definición.

Definición 1.22. Sea $f \in H(D)$ y $0 \leq p \leq \infty$. Se definen las aplicaciones

$$\|f\|_p = \sup_{0 \leq r < 1} \|f_r\|_p.$$

Se definen entonces, para $0 < p \leq \infty$ los *espacios de Hardy del disco* H^p como

$$H^p = \{f \in H(U) : \|f\|_p < \infty\}$$

y el espacio de Nevanlinna \mathcal{N} como

$$\mathcal{N} = \{f \in H(U) : \|f\|_0 < \infty\}.$$

Cabe hacer las siguientes observaciones en cuanto a la definición anterior:

1. Si $0 < p < q < \infty$, la desigualdad de Hölder y el hecho de que μ es una medida finita aseguran que $H^q \subset H^p$. También ocurrirá que $H^\infty \subset H^p$ para cada $0 \leq p < \infty$, de nuevo por la finitud de la medida. Finalmente, puesto que $\log^+ t \leq t^p$ siempre que $t > 0$, $0 < p < \infty$, se tiene que $H^p \subset \mathcal{N}$ para cada $0 < p < \infty$. De esta forma los espacios de Hardy y Nevanlinna están ordenados de la siguiente manera,

$$H^\infty \subset H^q \subset H^p \subset \mathcal{N}, \quad 0 < p < q < \infty.$$

2. La proposición 1.10 asegura que si $p < \infty$ entonces $\|f_r\|_p$ es una función creciente de r . El caso $p = \infty$ es igualmente cierto por el principio del módulo máximo. Se tiene entonces que

$$\|f\|_p = \lim_{r \rightarrow 1} \|f_r\|_p.$$

3. Si $1 \leq p \leq \infty$, la aplicación $\|\cdot\|_p$ resulta ser una norma en H^p , las propiedades se heredan de las normas p clásicas pasando al límite, de forma que H^p resulta ser un espacio vectorial normado. De hecho, como se verá más adelante, H^p resulta ser un espacio de Banach.

Si $0 < p < 1$ dichas aplicaciones no son normas puesto que no verifican la desigualdad triangular, aunque el correspondiente espacio H^p sigue siendo un espacio vectorial.

4. La aplicación $\|\cdot\|_0$ da cuenta del crecimiento del logaritmo de la función f cuando $|z| \rightarrow 1$. La razón por la que se elige \log^+ en vez del logaritmo es para evitar que valores próximos a 0 de la función den lugar a valores grandes de $\|\cdot\|_0$. De esta manera, solo los valores grandes en módulo de f son tenidos en cuenta.

Proposición 1.23. Sea $f \in \mathcal{N}$ y se denota por $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ a sus ceros en el disco D , repetidos de acuerdo con su multiplicidad. Se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|) < \infty.$$

Demostración. Si 0 es un cero de f con multiplicidad m , consideramos la función $g = z^{-m}f$ que tiene los mismos ceros que f , salvo el cero; por lo que podemos suponer que $f(0) \neq 0$. La convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|)$ equivale a la del producto $\prod_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ y también a la de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log |\alpha_n|$, esta última será la que probaremos.

Dado $n \in \mathbb{N}$, se escoge $r \in (0, 1)$ tal que los ceros $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ estén en $\bar{D}(0, r)$. De la fórmula de Jensen, se sigue que

$$\log |f(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta + \sum_{k=1}^n \log \frac{|\alpha_k|}{r}.$$

La hipótesis de que $f \in \mathcal{N}$ garantiza la existencia de una constante $\|f\|_0$ que acota la integral de la fórmula anterior para todo $r \in (0, 1)$. Por tanto,

$$0 \geq \sum_{k=1}^n \log |\alpha_k| \geq \log |f(0)| - \|f\|_0 + n \log r.$$

La igualdad es cierta para todo $k \in \mathbb{N}$ cuando $r \rightarrow 1$ (puesto que se añaden los sumandos correspondientes en la fórmula de Jensen), por lo que

$$\sum_{k=1}^n \log |\alpha_k| \geq \log |f(0)| - \|f\|_0,$$

como se quería probar. ■

Si se tienen en cuenta las proposiciones 1.10 y 1.23, se puede asegurar que el producto de Blaschke correspondiente a los ceros de una función $f \in \mathcal{N}$, B , es una función holomorfa en D con los mismos ceros, incluyendo multiplicidades, que f . Por tanto, definiendo $F(z) = f(z) (B(z))^{-1}$ para cada $z \in D$ se obtiene una nueva función holomorfa F tal que $|F(z)| \geq 1$ en D ; en particular, sin ceros en D . En lo que sigue, nos referiremos a $f = FB$ como la *descomposición canónica* de f .

Proposición 1.24. Sea $0 < p \leq \infty$ y $f \in H^p$. Si $f = FB$ es la descomposición canónica de f , entonces $F \in H^p$ y además $\|F\|_p = \|f\|_p$.

Demostración. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ los ceros de f incluyendo multiplicidades. Sea B_n el producto de Blaschke (finito) formado por los n primeros elementos de dicha sucesión. Debido a la compacidad de \bar{D} y a que $|B_n(z)| = 1$ siempre que $|z| = 1$, ocurre que $|B_n(re^{i\theta})| \rightarrow 1$ uniformemente en θ cuando $r \rightarrow 1$. En consecuencia, las funciones $F_n = f/B_n$ verifican que $\|F_n\|_p = \|f\|_p$. Cuando $n \rightarrow \infty$, $|F_n(z)|$ converge monótonamente a $|F(z)|$, debido a la acotación por 1 de los productos de Blaschke en D . El teorema de la convergencia monótona garantiza entonces que

$$\|F_r\|_p = \lim_{r \rightarrow \infty} \|(F_n)_r\|_p.$$

Los términos de la sucesión de la derecha están acotados por $\|f\|_p$, así que tomando límites cuando $r \rightarrow 1$ se tiene que $\|F\|_p \leq \|f\|_p$. Como se tenía que $|F(z)| \geq |f(z)|$, también ocurre que $\|F\|_p \geq \|f\|_p$, como queríamos probar. ■

Proposición 1.25. Sea $f \in H^p$, para $p > 0$. Entonces el límite $\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta})$ existe para casi todo $\theta \in [0, 2\pi]$ y, denotándolo por $F(e^{i\theta})$, se tiene que

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(e^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}.$$

Demostración. Primera parte. Caso de $f \in H^2$. En el caso de una función $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ del espacio H^2 ocurre, por la identidad de Parseval, que

$$\|f_r\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}, \quad \text{luego} \quad \|f\|_2^2 = \lim_{r \rightarrow 1} \|f_r\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2.$$

Por tanto, f es la integral de Poisson de $F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{int} \in L^2(\mu)$. Los resultados expuestos en [23, 10.21-25] garantizan que en estas condiciones $f(re^{it}) \rightarrow F(e^{it})$ en casi todo punto de la circunferencia ∂D . La igualdad del enunciado queda probada teniendo en cuenta, de nuevo, la expresión de la identidad de Parseval para la función F .

Segunda parte. Caso en el que la función es un producto de Blaschke B . En este caso, la extensión radial tiene módulo unidad en casi todo punto. En este caso B es una función de H^∞ y, por tanto, de H^2 . El razonamiento previo permite concluir que B admite límites radiales en casi todo punto de ∂D , que denotamos simplemente por $B(e^{it})$. Puesto que $|B(z)| < 1$ para $z \in D$, también se cumple que $|B(e^{it})| \leq 1$ en ∂D . La factorización canónica de B como elemento de H^2 es trivial, pues basta tomar $F = 1$ en todo D , siguiendo la notación de la proposición (1.24). Pero además, por esta misma proposición, tiene que ocurrir que

$$\|B\|_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |B(e^{it})|^2 dt = \|F\|_2 = 1;$$

y la igualdad solo puede alcanzarse si $|B(e^{it})| = 1$ en casi todo punto de ∂D .

Tercera parte. Caso general. Sea $f \in H^p$, con $p > 0$ y sea $f = BF$ su descomposición canónica. Definimos la función auxiliar $G(z) = (F(z))^{p/2}$. Entonces G pertenece a H^2

y $G(re^{it}) \rightarrow G(e^{it})$ para casi todo punto de ∂D . En dichos puntos, ocurre que $F(re^{it})$ converge a una función F tal que $|F(e^{it})|^{p/2} = |G(e^{it})|$. Como B tiene límite radial de módulo unidad en casi todos los puntos de la circunferencia, entonces $\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{it}) = f(e^{it})$ existe y se tiene que $|f(e^{it})|^{p/2} = |G(e^{it})|$ en casi todo punto, por lo que

$$\|f\|_p^p = \|F\|_p^p = \|G\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |G(e^{it})|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^p dt,$$

como se quería probar. ■

Proposición 1.26. Una función f está en H^1 si y solo si admite una factorización $f = gh$ con g y h en H^2 verificando $\|f\|_1 = \|g\|_2 \|h\|_2$.

Demostración. La condición suficiente es inmediata. Si B es el producto de Blaschke formado por los ceros de f , se tiene que $f/B \in H^1$ por la proposición 1.24. Como f/B no tiene ceros en D , que es un dominio simplemente conexo, entonces existe una raíz cuadrada analítica $g \in H(D)$, esto es, una función tal que $g^2 = f/B$. Por tanto, $f = g^2 B$ y, al tratarse de la descomposición canónica de f , $\|f\|_1 = \|g^2\|_1 = \|g\|_2^2$. Como también se tiene que $\|gB\|_2 = \|g\|_2$, puesto que B tiene módulo unidad en casi todo punto de ∂D , basta tomar g y $h = gB$. ■

Proposición 1.27. Sea $f \in H^1$ y $F \in L^1(\mu)$ su límite radial en la frontera del disco. Ocurre entonces que f es la extensión armónica de F .

Demostración. Para probarlo, veremos que $f_r \rightarrow F$ en $L^1(\mu)$, lo que es suficiente puesto que la convergencia en $L^1(\mu)$ garantiza la convergencia de los coeficientes de Fourier, ya que $|\hat{f}(n)| \leq \|f\|_1$ si $f \in L^1(\mu)$. Puesto que $\hat{f}_r(n) = a_n r^n$, se tendrá que $\hat{F}(n) = a_n$ y la fórmula 1.2 permite concluir con el enunciado.

Dada $f \in H^1$, sean $g, h \in H^2$ tales que $f = gh$ y sean G, H los límites radiales respectivos de las funciones indicadas. Se tiene que

$$\begin{aligned} \|f_r - F\|_1 &= \|g_r h_r - GH\|_1 \\ &\leq \|G(h_r - h)\|_1 + \|h_r(g_r - g)\|_1 \\ &\leq \|G\|_2 \|h_r - h\|_2 + \|H\|_2 \|g_r - g\|_2, \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad se ha utilizado la desigualdad de Cauchy-Schwartz. Para concluir, basta ver que si $g \in H^2$ entonces $\lim_{r \rightarrow 1} \|G - g_r\|_2 = 0$ y tomar límites en la expresión anterior. Para ello, observemos que si $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^2$ se tiene que

$$G(r) = \|G - g_r\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 (1 - r^n)^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$$

para cada $r \in [0, 1]$. Por tanto, la serie que depende de r converge uniformemente como función de r en $[0, 1]$, así que G es continua y $\lim_{r \rightarrow 1} \|G - g_r\|_2 = G(1) = 0$, como se quería probar. ■

El siguiente teorema es fundamental a la hora de trabajar con los espacios H^p , pues los caracteriza precisamente como subconjuntos de los espacios de Banach $L^p(\mu)$ para $1 \leq p \leq \infty$.

Teorema 1.28. Sea $1 \leq p \leq \infty$. Una función f pertenece al espacio H^p si, y solo si, es la extensión armónica de una función $F \in L^p(\mu)$ verificando $\hat{F}(n) = 0$.

Demostración. Supongamos en primer lugar que $f \in H^p$. De acuerdo con los teoremas 1.25 y 1.27 existe un límite radial de f , F , y además f es la extensión armónica de F al disco unidad. De acuerdo con la fórmula (1.2), se tiene que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(n)z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{F}(-n)\bar{z}^n.$$

Para que f sea efectivamente una función holomorfa, es necesario que $\hat{F}(n) = 0$ si $n < 0$, para que los términos en \bar{z} se anulen en el desarrollo en serie anterior.

Por el contrario, si $F \in L^p(\mu)$ verifica $\hat{F}(n) = 0$ la fórmula (1.2) garantiza que la extensión armónica f de F es una función holomorfa. Esta función será una función de H^p gracias a la acotación conseguida en la proposición (1.4). ■

Teorema 1.29. Si $1 \leq p \leq \infty$, H^p es un espacio de Banach. Además, H^2 es un espacio de Hilbert, de forma que dadas funciones $f, g \in H^2$ tales que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, se tiene que

$$\langle f, g \rangle_{H^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{b}_n.$$

Demostración. Para cada $1 \leq p \leq \infty$, la aplicación

$$T_n : F \in L^p(\mu) \mapsto \hat{F}(n) \in \mathbb{C}$$

es un funcional lineal y continuo. La linealidad está clara, y se tiene que

$$\left| \hat{F}(n) \right| \leq \int_0^{2\pi} |F(e^{it})| dt \leq \|F\|_1 \leq C_p \|F\|_p,$$

para cada $F \in L^p(\mu)$, donde C_p es una constante que depende de cada p . La desigualdad anterior es suficiente para garantizar que T_n es un funcional continuo, en particular, su núcleo es un conjunto cerrado. En virtud de la proposición anterior, se tiene que

$$H^p = \bigcap_{n < 0} \ker T_n,$$

que es cerrado en $L^p(\mu)$ por ser intersección de conjuntos cerrados. Al ser H^p un subespacio cerrado de un espacio de Banach, también es completo.

En el caso $p = 2$, H^2 es un espacio de Hilbert por ser un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert. Solo resta comprobar como es la restricción del producto interno de $L^2(\mu)$ para funciones de H^2 . Si f, g son funciones de H^2 con la expresión del enunciado, entonces sus extensión radiales F, G de $L^2(\mu)$ son las funciones

$$F(e^{it}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{int}, \quad G(e^{it}) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{int}.$$

Puesto que el conjunto de funciones $\{e^{int} : n \in \mathbb{N}\}$ es un sistema ortonormal y completo para la norma que estamos considerando, se tiene que

$$\langle f, g \rangle_{H^2} = \langle F, G \rangle_{L^2(\mu)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{b}_n.$$

■

1.3. El problema de interpolación de Pick-Nevalinna

En este apartado se introduce el problema de interpolación de Pick-Nevalinna. La cuestión a la que se pretende dar respuesta es la de encontrar una función analítica f en H^∞ que tome unos valores prescritos en unos nodos $z_1, \dots, z_n \in D$, esto es, que verifique ciertas condiciones de interpolación $f(z_i) = w_i$ para ciertos valores $w_i \in \mathbb{C}$, sujeta a una restricción sobre su norma $\|f\|_\infty \leq M$.

El objetivo principal de esta sección es probar el teorema de Pick, que va a dar una condición necesaria y suficiente para la existencia de una función tal en el caso $M = 1$, es decir, para funciones holomorfas del disco unidad en sí mismo. La condición necesaria y suficiente es que la matriz

$$Q = \left(\frac{1 - z_i \bar{z}_j}{1 - w_i \bar{w}_j} \right)_{i,j=1}^n$$

sea definida positiva.

Este resultado fue probado independientemente por G. Pick en 1916 y por R. Nevalinna en 1919. Para probarlo utilizaron un enfoque basado en construir una sucesión de productos de Blaschke que satisface las condiciones, cuya existencia dependía de la positividad de la matriz Q . Una prueba directa que utiliza este tipo de técnicas puede encontrarse en [12].

Posteriormente, en 1956 B. Sz-Nagy y A. Korányi [16] dieron una prueba de la condición de Pick utilizando técnicas de espacios de Hilbert, mientras que en 1967 D. Sarason [24] lo demostró mediante la teoría de operadores. La referencia principal que se utiliza aquí [20] sigue esta línea, que es algo más larga pero establece resultados que se pueden utilizar en otros problemas de interpolación relacionados.

Observación 1.30. El teorema de Pick y el lema de Schwarz.

En el caso de que busquemos una función $f \in \mathcal{C}^\infty(D)$ tomando unos valores dados en los nodos, el problema tendría solución para cualesquiera valores con tal de que $|w_i| \leq 1$. Sin embargo, las funciones holomorfas son una clase mucho más restringida y sus propiedades de crecimiento van a impedir la existencia en algunos casos.

El lema de Schwarz, que es resultado elemental del Análisis Complejo, asegura que una función holomorfa f del disco en sí mismo con $f(0) = 0$ debe cumplir la restricción $|f(z)| \leq |z|$ para cada $z \in D$, ya que de lo contrario la función crecería necesariamente en el disco unidad hasta tomar valores superiores a la unidad. Este lema va a resultar ser equivalente al teorema de Pick en el caso $n = 2$, en tanto que da condiciones necesarias

y suficientes para que exista una función del disco unidad en sí mismo con valores prescritos en dos nodos.

Se ha mostrado en la proposición 1.10 que las funciones $\varphi_a(z) = (z - a)/(1 - \bar{a}z)$ envían el disco unidad en sí mismo con $\varphi_a(a) = 0$. Por lo tanto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $z_1 = w_1 = 0$, puesto que de existir esta función se podría conseguir la original componiendo con funciones del tipo φ_a . El teorema de Pick afirma que existe una función holomorfa $f : D \rightarrow D$ con $f(0) = 0, f(z_0) = w_0$ si, y solo si la matriz

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1 - |z_0|^2}{1 - |w_0|^2} \end{pmatrix}$$

es definida positiva, que en este caso equivale a que lo sea su determinante

$$\det M = \frac{|z_0|^2 - |w_0|^2}{1 - |z_0|^2},$$

es decir, si $|w_0| \leq |z_0|$; como predecía el lema de Schwartz. El teorema de Pick va a generalizar este resultado al caso en el que se cuenta con una cantidad arbitraria, pero finita, de nodos.

1.3.1. Operadores de Hankel

Para abordar este problema se introducen los operadores de Hankel en el espacio H^2 . En lo que sigue, denotaremos por $\Pi : L^2(\mu) \rightarrow H^2$ a la proyección ortogonal sobre el subespacio H^2 , que cobra pleno sentido gracias a lo expuesto en la proposición (1.29). Este operador actúa de la siguiente forma:

$$\Pi \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{int}.$$

Claramente, $\|\Pi\| \leq 1$ por tratarse de una proyección ortogonal.

Dada un función φ de L^∞ , se define el correspondiente *operador de multiplicación* $M_\varphi : L^2 \rightarrow L^2(\mu)$ mediante

$$(M_\varphi f)(e^{it}) = \varphi(e^{it})f(e^{it}).$$

Es claro además que $\|M_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$. De hecho, en [20, 1.6.2] se prueba que siempre se alcanza la igualdad anterior, aunque no lo necesitaremos.

Ejemplo 1.31. Operadores de desplazamiento. Si elegimos alguna las funciones $\varphi(z) = z^n$, con $n \in \mathbb{Z}$, el operador de multiplicación M_φ correspondiente actúa de la siguiente manera:

$$M_\varphi f = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k-n} z^k$$

para $f \in L^2(\mu)$. Se denominan operadores de desplazamiento. Además, puesto que $\|\varphi\|_\infty = 1$ y se tiene que $\|M_\varphi f\|_2 = \|f\|_2$, se cumple la propiedad anunciada de que $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$.

Denotamos por H^2_{\perp} al complemento ortogonal de H^2 respecto de $L^2(\mu)$; esto es, al subespacio generado por los vectores de la base con índice negativo,

$$e_n(e^{it}) = e^{int}.$$

Ya tenemos los elementos necesarios para introducir los operadores de Hankel.

Definición 1.32. Dada $\varphi \in L^\infty$, se define el *operador de Hankel con símbolo φ* como el operador $\Gamma_\varphi : H^2 \rightarrow H^2_{\perp}$ dado por

$$\Gamma_\varphi f = (I - \Pi)M_\varphi f.$$

La siguiente proposición recoge las propiedades fundamentales de estos operadores.

Proposición 1.33. Se tiene que $\|\Gamma_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$. Además, si la función $\varphi(e^{it})$ tiene por desarrollo en serie de Fourier a $\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{int}$, entonces la matriz de Γ_φ con respecto a las bases ortonormales $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ de H^2 y $\{e_{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ de H^2_{\perp} es

$$\begin{pmatrix} d_{-1} & d_{-2} & d_{-3} & d_{-4} & \cdots \\ d_{-2} & d_{-3} & d_{-4} & d_{-5} & \cdots \\ d_{-3} & d_{-4} & d_{-5} & d_{-6} & \cdots \\ d_{-4} & d_{-5} & d_{-6} & d_{-7} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix};$$

una matriz de este tipo, con las diagonales sudoeste a noroeste constantes, se denomina *matriz de Hankel*. Además, $\Gamma_\varphi = 0$ si, y solo si, φ es una función de H^∞ .

Demostración. En primer lugar, se tiene que

$$\|\Gamma_\varphi f\|_2 \leq \|(I - \Pi)M_\varphi f\| \leq \|M_\varphi f\| \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|_2.$$

Además,

$$\begin{aligned} \Gamma_\varphi e_k &= (I - \Pi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{int} e^{ikt} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-k-1} d_n e^{i(n+k)t} = \sum_{r=1}^{\infty} d_{-r-k} e^{-irt}, \end{aligned}$$

tras hacer el cambio de índices $r = -n - k$. La matriz del operador en las bases correspondientes tiene la forma anunciada. Finalmente, teniendo en cuenta lo anterior es claro que $\Gamma_\varphi = 0$ si, y solo si, $d_n = 0$ para cada $n < 0$; condición que el teorema (1.29) establece como necesaria y suficiente para que $\varphi \in H^\infty$. ■

El teorema que se prueba a continuación garantiza que la desigualdad en la norma de un operador de Hankel siempre se alcanza, aunque para ello haya que considerar otra función de H^∞ que de lugar al mismo operador. En la prueba del teorema se muestra además que un operador acotado de H^2 en H^2_{\perp} cuya matriz asociada es una matriz de Hankel es de hecho un operador de Hankel.

Teorema 1.34. Teorema de Nehari. Se supone que $\Gamma_\varphi : H^2 \rightarrow H^2$ es un operador de Hankel. Entonces existe una función $\psi \in L^\infty$ con $\Gamma_\psi = \Gamma_\varphi$ y tal que $\|\Gamma_\psi\| = \|\psi\|_\infty$. Entonces

$$\|\Gamma_\varphi\| = \inf \{ \|\varphi + h\|_\infty : h \in H^\infty \} = d(\varphi, H^\infty),$$

y el inferior se alcanza en $h = \psi - \varphi$.

Demostración. En primer lugar, observemos que si el desarrollo en serie de Fourier de la función φ es $\varphi(e^{it}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ikt}$ y $m, n > 0$, entonces se tiene que, para $n > 0$,

$$\Gamma_\varphi e^{int} = (I - \Pi) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{i(k+n)t} \right) = \sum_{k=-\infty}^{-n} d_k e^{i(k+n)t} = \sum_{k=-\infty}^0 d_{k-n} e^{ikt}.$$

Como consecuencia inmediata se tiene que para $n, m > 0$

$$\langle \Gamma_\varphi e^{int}, e^{-imt} e^{-it} \rangle = d_{-n-m-1} = \langle \Gamma_\varphi e^{int} e^{imt}, e^{-it} \rangle,$$

y por la linealidad del producto interno,

$$\left\langle \Gamma_\varphi \sum_{n=0}^N b_n e^{int}, \sum_{n=0}^N \bar{c}_n e^{-imt} e^{-it} \right\rangle = \left\langle \Gamma_\varphi \left(\sum_{n=0}^N b_n e^{int} \sum_{n=0}^N c_n e^{imt} \right), e^{-it} \right\rangle$$

Esta última identidad garantiza que al definir el siguiente funcional lineal sobre los polinomios

$$\alpha(f) = \langle \Gamma_\varphi f, e^{-it} \rangle,$$

se cumple una propiedad interesante: si f factoriza como producto de dos polinomios $f = f_1 f_2$, entonces

$$\alpha(f) = \langle \Gamma_\varphi (f_1, f_2), e^{-it} \rangle = \langle \Gamma_\varphi f_1, \bar{f}_2 e^{-it} \rangle.$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz permite concluir que

$$|\alpha(f_1 f_2)| \leq \|\Gamma_\varphi\| \|f_1\|_2 \|f_2\|_2.$$

Hemos visto anteriormente que el espacio de polinomios es denso en H^1 , así que la cota anterior permite extender α de forma única en todo H^1 . Puesto que las funciones de H^1 factorizan como producto de dos funciones de H^2 , la extensión debe verificar

$$\alpha(f_1 f_2) = \langle \Gamma_\varphi f_1, \bar{f}_2 e^{-it} \rangle \quad \text{si } f_1, f_2 \in H^2,$$

con $|\alpha(f_1 f_2)| \leq \|\Gamma_\varphi\| \|f_1\|_2 \|f_2\|_2$. Utilizando el resultado 1.26 se tiene que

$$|\alpha(f)| \leq \|\Gamma_\varphi\| \|f\| \quad \text{si } f \in H^1.$$

En particular, $\|\alpha\| \leq \|\Gamma_\varphi\|$. Ahora se puede utilizar el teorema de Hahn-Banach para extender el dominio de definición del funcional lineal α a todo el espacio $L^1(\mu)$ manteniendo la acotación anterior. El teorema [23, 6.16] da una representación para el funcional de la forma

$$\alpha(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \beta(e^{it}) dt,$$

donde β es una función de L^∞ con $\|\beta\|_\infty = \|\alpha\| \leq \|\Gamma_\varphi\|$.

Además, para $k \geq 0$, se tendrá que

$$\langle \beta, e^{-ikt} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikt} \beta(e^{it}) dt = \alpha(e^{ikt}) = \langle \Gamma_\varphi e^{ikt}, e^{-it} \rangle = d_{-k-1}.$$

En consecuencia, los coeficientes de Fourier de β , β_n , satisfacen que $\beta_{-k} = d_{-k-1}$ para $k \geq 0$. Ahora podemos tomar $\psi(e^{it}) = e^{-it} \beta(e^{it})$ de forma que ahora los coeficientes de Fourier ψ_n de ψ coinciden con los de φ para $k \leq -1$. Además, no se pierde la acotación

$$\|\psi\|_\infty = \|\beta\|_\infty \leq \|\Gamma_\varphi\|.$$

Finalmente, es claro por la definición de los operadores de Hankel que Γ_φ y Γ_ψ coinciden si tienen los mismos coeficientes de Fourier para $k \leq -1$, esto es, si la diferencia $h = \psi - \varphi$ está en H^∞ . Entonces,

$$\|\Gamma_\varphi\| \leq \inf \{ \|\varphi + h\| : h \in H^\infty \}.$$

Puesto que, por cómo se ha construido, existe una función $h \in H^\infty$ tal que $\psi = \varphi + h$,

$$\|\psi\|_\infty \leq \|\Gamma_\varphi\| = \|\Gamma_\psi\| \leq \|\psi\|_\infty,$$

así que $\|\psi\|_\infty = \|\Gamma\|$ como se quería. ■

1.3.2. El problema de interpolación

A lo largo de esta sección, ψ denotará una función de H^2 que toma valores de módulo unidad en casi todo punto de ∂D . K será el espacio $(\psi H^2)^\perp$ de H^2 , y Π_K la proyección ortogonal correspondiente sobre dicho espacio.

Proposición 1.35. El operador de multiplicación M_ψ es un operador unitario en $L^2(\mu)$ con inverso $M_{\bar{\psi}}$, y se tiene que $M_\psi H^2 \subset H^2$. Además, $H^2 = K \oplus \psi H^2$ y $M_{\bar{\psi}}(K) \subset H^\perp$.

Demostración. El carácter unitario e invertible del operador se siguen de la identidad siguiente:

$$\langle f, g \rangle = \langle \bar{\psi} \psi f, g \rangle = \langle \psi f, \psi g \rangle \quad \text{si } f, g \in L^2(\mu).$$

Además, si $k \in K$ y $f \in H^2$, se tiene que

$$\langle \bar{\psi} k, f \rangle = \langle k, \psi f \rangle = 0,$$

por la definición del conjunto K , por lo que el operador $M_{\bar{\psi}}$ envía K en H^\perp . ■

Ejemplo 1.36. Si se escoge la función ψ como una de las funciones $\psi(z) = z^n$, con $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\psi H^2 = \left\{ f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^2 : a_0 = \dots = a_{k-1} = 0 \right\}$$

y por lo tanto $K = (\psi H^2)^\perp = \text{span} \{1, z, \dots, z^{k-1}\}$ es el espacio de los polinomios de grado a lo sumo $k-1$.

Dado $\varphi \in H^\infty$, se define el operador $S_\varphi : K \rightarrow K$ como

$$S_\varphi(f) = \Pi_K(\varphi f), \quad f \in K.$$

Es inmediato comprobar que S_φ es acotado y que $\|S_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$ para $\varphi \in H^\infty$. A diferencia de los operadores de multiplicación M_φ introducidos en la sección anterior, los operadores S_φ se definen únicamente para $\varphi \in H^\infty$. Esto se debe a que para tales funciones φf siempre está en H^2 si f lo estaba, cosa que no ocurre si tomamos una $\varphi \in L^\infty$. Se prueban dos lemas relacionados con esta nueva familia de operadores que facilitan la prueba del teorema de Pick.

Lema 1.37. Para $\varphi_1, \varphi_2 \in H^\infty$, los operadores S_{φ_1} y S_{φ_2} conmutan; esto es, $S_{\varphi_1}S_{\varphi_2} = S_{\varphi_2}S_{\varphi_1}$.

Demostración. Observemos que

$$S_{\varphi_1}f = \varphi_1 f + \psi g$$

para una cierta $g \in H^2$. Igualmente, existirá una $h \in H^2$ tal que

$$S_{\varphi_2}S_{\varphi_1}f = \varphi_2 S_{\varphi_1}f + \psi h = \varphi_2 \varphi_1 f + \psi(\varphi_2 g + h),$$

de forma que

$$S_{\varphi_2}S_{\varphi_1}f = \Pi_K(\varphi_1 \varphi_2 f).$$

El papel que han jugado las funciones φ_1 y φ_2 se puede intercambiar, por lo que

$$S_{\varphi_2}S_{\varphi_1}f = \Pi_K(\varphi_1 \varphi_2 f) = S_{\varphi_1}S_{\varphi_2}f,$$

por lo que los operadores conmutan. ■

Lema 1.38. Sea T un operador en K que conmuta con S_z . Existe entonces una función $\varphi \in H^\infty$ tal que $T = S_\varphi$ y $\|\varphi\|_\infty = \|T\|$.

Demostración. Primera parte. Veamos que, en las condiciones del enunciado, el operador $\tilde{T} = M_{\bar{\psi}}T\Pi_K$ envía H^2 en H^2_\perp y es un operador de Hankel. El hecho de que \tilde{T} envíe H^2 en H^2_\perp se debe a que $M_{\bar{K}}$ enviaba K en H^2_\perp . Puesto que T conmuta con $S_z (= \Pi_K M_z)$ se tiene que $\Pi_K M_z T = T \Pi_K M_z$. Entonces,

$$\Pi_K M_z T \Pi_K = T(\Pi_K M_z \Pi_K) = T(S_z S_1) = T(S_1 S_z) = T \Pi_K M_z,$$

de acuerdo con el lema anterior. Recordando que el operador inverso de $M_{\bar{\psi}}$ es M_ψ resulta que $T \Pi_K = M_\psi \tilde{T}$. Juntándolo con lo anterior, da

$$\Pi_K M_z M_\psi \tilde{T} = M_\psi \tilde{T} M_z, \quad M_{\bar{\psi}} \Pi_K M_\psi M_z \tilde{T} = \tilde{T} M_z.$$

Ahora, para cada $f \in H^2$ se tiene que $\psi \tilde{T} f = T \Pi_K f$ está en H^2 , por lo que también lo está $z \psi \tilde{T} f$ y podemos escribir

$$z \psi \tilde{T} f = \psi g + k,$$

donde $g \in H^2$ y $k \in K$. Entonces,

$$\bar{\psi} \Pi_K \psi z \tilde{T} f = \bar{\psi}(\Pi_K(\psi g + k)) = \bar{\psi}k = (I - \Pi)(g + \bar{\psi}k) = (I - \Pi)M_z \tilde{T} f, \quad (1.11)$$

lo que permite concluir que $(I - \Pi)M_z\tilde{T} = \tilde{T}M_z$. Esta es la igualdad clave que permite probar que \tilde{T} es un operador de Hankel, puesto que para $n \geq 0$, $m > 0$, se tiene que la entrada (m, n) de la matriz del operador verifica

$$\begin{aligned} \langle \tilde{T}z^{n+1}, z^{-m} \rangle &= \langle \tilde{T}M_z z^n, z^{-m} \rangle = \langle (I - \Pi)z\tilde{T}z^n, z^{-m} \rangle \\ &= \langle z\tilde{T}z^n, z^{-m} \rangle = \langle \tilde{T}z^n, z^{-m-1} \rangle, \end{aligned}$$

esto es, solo depende de $m + n$.

Segunda parte. Conclusión del lema. La primera parte de la prueba garantiza que existe una función $\gamma \in L^\infty$ tal que $\tilde{T} = \Gamma_\gamma$. Además, se cumple que $\gamma\psi$ está en H^∞ , puesto que

$$\Gamma_\gamma\psi = \bar{\psi}T\Pi_K\psi = \bar{\psi}T(\Pi_K(1\psi)) = 0.$$

De la definición de operador de Hankel se deduce que $\gamma\psi$ está en H^2 (además de en L^∞) por lo que debe estar en H^∞ , es decir, que $\gamma = \bar{\psi}\varphi$ para cierta $\varphi \in H^\infty$.

También, puesto que $Tk = M_\psi\Gamma_\gamma k$ para todo $k \in K$, de forma que

$$Tk = \psi(I - \Pi)\bar{\psi}\varphi k.$$

Si $\varphi k = k_1 + \psi h_1$ con $k_1 \in K$ y $h_1 \in H^2$, entonces

$$Tk = \psi(I - \Pi)(\bar{\psi}k_1 + h_1) = \psi(\bar{\psi}k_1) = k_1 = \Pi_K(\varphi k),$$

por lo que, finalmente, $T = S_\varphi$, como se quería mostrar. Por el teorema de Nehari, podemos escoger $\gamma \in H^\infty$ de forma que

$$\|\varphi\|_\infty = \|\gamma\|_\infty = \|\tilde{T}\|_\infty \leq \|T\|_\infty,$$

y como siempre se tiene que $\|T\| = \|S_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$, esto completa la prueba. \blacksquare

A continuación se enuncia el teorema de Pick, que da una condición necesaria y suficiente para que el problema de interpolación tenga solución. Es claro que el problema se puede reducir al estudio del caso $M = 1$, puesto que en otro caso basta trabajar con los valores correspondientes w_i/M .

Teorema 1.39. Teorema de Pick. Existe una función $f \in H^\infty$ satisfaciendo las condiciones $\|f\|_\infty \leq 1$ y $f(z_i) = w_i$ para $i = 1, \dots, n$ si, y solo si la matriz $n \times n$ Q definida mediante

$$Q_{j,k} = \frac{1 - w_j\bar{w}_k}{1 - z_j\bar{z}_k} \quad (j, k = 1, \dots, n)$$

es una matriz definida positiva. En caso de que la matriz Q sea positiva, existe una función en las condiciones anteriores que es un producto de Blaschke de grado a lo sumo n .

Demostración. A lo largo de la prueba denotaremos por ψ a la siguiente función

$$\psi(z) = \prod_{j=1}^n \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z}, \quad z \in D.$$

Primera parte. El espacio vectorial $K = (\psi H^2)^\perp$ tiene dimensión n . De hecho, $K = \langle k_1, \dots, k_m \rangle$ con $k_j(z) = 1/(1 - \bar{z}_j z)$.

Las funciones k_j están en el espacio de Hilbert H^2 ya que son analíticas en un entorno de \bar{U} . Si f es una función analítica del espacio H^2 , entonces ocurre que $\langle f, k_j \rangle = f(z_j)$. Esto se debe a que si

$$k_j(z) = \frac{1}{1 - \bar{z}_j z} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{z}_j^n z^n, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

entonces se tiene que

$$\langle f, k_j \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{z}_j^n = f(z_j).$$

Puesto que $\psi \in H^\infty$, entonces $\psi f \in H^2$ y $\langle \psi f, k_j \rangle = \psi(z_j) f(z_j) = 0$, lo que prueba directamente que $k_j \in K$ para $j = 1, \dots, n$. La matriz Z $n \times n$ definida por

$$Z_{jk} = \frac{1}{1 - \bar{z}_j z_k} \quad (j, k = 1, \dots, n)$$

resulta ser definida positiva, puesto que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_j \bar{c}_k Z_{jk} &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_j \bar{c}_k \langle k_j, k_k \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n \frac{c_j}{1 - \bar{z}_j z}, \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{1 - \bar{z}_k z} \right\rangle \\ &= \left\| \sum_{j=1}^n \frac{c_j}{1 - \bar{z}_j z} \right\|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

y la igualdad a 0 se alcanza únicamente si la función es nula, lo que se puede comprobar directamente que ocurre únicamente cuando todos los coeficientes c_j son nulos. En particular, la matriz Z es regular, por lo que para cada función $f \in H^2$ existen coeficientes $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ tales que $f(z_k) = \sum_{j=1}^n a_j Z_{jk}$ para $k = 1, \dots, n$. Así, la función $f - \sum_{j=1}^n a_j k_j$ se anula en todos los nodos z_1, \dots, z_n y la proposición 1.24 garantiza que existe $h \in H^2$ tal que $f - \sum_{j=1}^n a_j k_j = \psi h$. Esto prueba definitivamente que los k_j , $j = 1, \dots, n$, constituyen una base de K .

Segunda parte. Dada $\varphi \in H^\infty$, el operador S_φ^* es diagonal en K .

Puesto que K es un espacio vectorial de dimensión finita, basta comprobar que los elementos no diagonales del operador en la base de los k_j son nulos:

$$\langle S_\varphi^* k_j, k_l \rangle = \langle k_j, S_\varphi k_l \rangle = \langle k_j, \Pi_K \varphi k_l \rangle = \langle k_j, \varphi k_l \rangle = \overline{\varphi(z_j) k_l(z_j)} = \overline{\varphi(z_j)} \{k_j, k_l\},$$

luego necesariamente $S_\varphi^* k_j = \overline{\varphi(z_j)} k_j$ para $j = 1, \dots, n$. En particular, $S_z^* k_j = \bar{z}_j k_j$, es decir, que las funciones k_j , $j = 1, \dots, n$ de la base son funciones propias del operador S_z^* con autovalores $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$.

Tercera parte. Un operador $T : K \rightarrow K$ conmuta con S_z si, y solo si k_1, \dots, k_n son funciones propias de T^* .

Supongamos en primer lugar que las funciones de la base de K son propias de T^* con autovalores λ_j , $j = 1, \dots, n$. Se comprueba directamente que

$$T^* S_z^* k_j = \lambda_j \bar{z}_j k_j = S_z^* T^* k_j,$$

es decir, que los operadores conmutan.

Recíprocamente, si los operadores conmutan, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (T^*S_z^* - S_z^*T^*)k_j, k_l \rangle = \bar{z}_j \langle T^*k_j, k_l \rangle - \langle T^*k_j, S_z k_l \rangle \\ &= (\bar{z}_j - \bar{z}_l) \langle T^*k_j, k_l \rangle, \end{aligned}$$

luego $\langle T^*k_j, k_l \rangle = 0$ si $j \neq l$ y el operador T^* es diagonal.

Cuarta parte. Conclusión. Si $T = S_\varphi$, ocurría que $T^*k_j = \overline{\varphi(z_j)}k_j, j = 1, \dots, n$. Por el resultado 1.38, existe una función $\varphi \in H^\infty$ cumpliendo $\|\varphi\|_\infty \leq 1$ y $\varphi(z_j) = w_j$ para $j = 1, \dots, n$ si, y solo si el operador T definido por

$$T^*k_j = \bar{w}_j k_j,$$

satisface que $\|T\| \leq 1$. Esto equivale a que $I - TT^* \geq 0$, donde I es la matriz identidad de tamaño $n \times n$. Para concluir la demostración del teorema basta comprobar que la matriz del operador $I - TT^*$ en la base de los k_j tiene la forma anunciada por el teorema,

$$\begin{aligned} \langle (I - TT^*)k_j, k_l \rangle &= \langle k_j, k_l \rangle - \langle T^*k_j, T^*k_l \rangle = k_j(z_l) - \langle \bar{w}_j k_j, \bar{w}_l k_l \rangle \\ &= \frac{1}{1 - \bar{z}_j z_l} - \bar{w}_j w_l \langle k_j, k_l \rangle = \frac{1 - \bar{w}_j w_l}{1 - \bar{z}_j z_l} \end{aligned}$$

■

Capítulo 2

Algunas técnicas en análisis numérico.

2.1. Descomposición en valores singulares. Mínimos cuadrados

El objetivo de esta sección es resolver el problema lineal de mínimos cuadrados en \mathbb{R}^n sujeto a una restricción sobre el tamaño del vector. Concretamente, si $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ denota una matriz $m \times n$, $M > 0$, se trata de encontrar un vector $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\hat{x} = \operatorname{argmin}_{\|x\| \leq M} \|Ax - b\|. \quad (2.1)$$

Descomposición en valores singulares

En primer lugar, se estudia la descomposición en valores singulares (SVD, por sus siglas en inglés) de una matriz $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, herramienta que se utilizará en la resolución del problema anterior.

Lema 2.1. Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, entonces la matriz $A^t A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ es simétrica; semidefinida positiva, en particular, tiene autovalores positivos; y se cumple que $\ker(A^t A) = \ker(A)$.

Demostración. La primera afirmación es inmediata. Si $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $x^t A^t A x = \|Ax\|^2 \geq 0$, por lo que la matriz es semidefinida positiva. El espectro de una matriz está contenido en su rango numérico, por lo que los autovalores deben ser positivos. Finalmente, es inmediato que $\ker(A) \subset \ker(A^t A)$, mientras que si $x \in \ker(A^t A)$ se tendrá que

$$0 = x^t A^t A x = \|Ax\|^2,$$

por lo que necesariamente $Ax = 0$, es decir, $x \in \ker(A)$. Esto concluye la prueba. ■

Teorema 2.2. Descomposición en valores singulares. Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ de rango r . Existen unos números positivos $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ y unas matrices ortogonales $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $Q \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ tales que

$$A = Q \Sigma P^t,$$

donde $\Sigma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es la matriz

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ & & & \sigma_r & \\ 0 & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Demostración. La matriz $A^t A$ es simétrica y real, por lo que existe una base ortonormal u_1, \dots, u_n de \mathbb{R}^n formada por autovectores cuyos autovalores correspondientes, que son positivos, son $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$. Puesto que $\ker(A) = \ker(A^t A)$ y el rango de la matriz A es r , se tendrá que $\lambda_i > 0$ si $1 \leq i \leq r$ y que $\lambda_i = 0$ si $r < i \leq n$. En otras palabras, u_1, \dots, u_r forman una base ortonormal de $\ker(A)^\perp$, mientras que u_{r+1}, \dots, u_n lo es de $\ker(A)$.

A continuación se definen

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \quad v_i = \frac{A u_i}{\sigma_i} \quad \text{para } i = 1, \dots, r.$$

Se verifican las siguiente relaciones de ortogonalidad

$$v_j^t v_i = \frac{u_j^t A^t A u_i}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{u_j^t \sigma_i^2 u_i}{\sigma_i \sigma_j} = \delta_{ij} \quad \text{para } i, j = 1, \dots, r,$$

por lo que v_1, \dots, v_r es una base ortonormal de $\text{rank}(A)$. Se pueden añadir vectores adecuados para que $v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_m$ sea base ortonormal de \mathbb{R}^m .

Finalmente, se define P como la matriz cuyas columnas son los vectores u_1, \dots, u_n y Q la matriz cuyas columnas son los v_1, \dots, v_m . Estas matrices son ortonormales debido a la ortonormalidad de las bases anteriores. La descomposición de A enunciada en el teorema corresponde a expresar la matriz A en las bases anteriores. ■

Los vectores u_1, \dots, u_n (las columnas de P) se suelen denominar *autovectores derechos de A* , mientras que los v_1, \dots, v_m (las columnas de Q) se denominan *autovectores izquierdos*. En estas condiciones la imagen de un vector $x \in \mathbb{R}^n$ por la matriz A se puede expresar como

$$Ax = \sum_{i=1}^r \sigma_i (u_i^t x) v_i. \quad (2.2)$$

Más generalmente, esta descomposición se puede utilizar para expresar de forma sencilla la solución del problema de mínimos cuadrados relacionado con la matriz A .

Un aspecto importante en la práctica es la utilización de un método numéricos barato y estable para llevar a cabo la descomposición de la matriz. Un enfoque general con varios algoritmos específicos puede encontrarse en [6, Cap. 8.6]. En el desarrollo de este trabajo se trata con matrices pequeñas, típicamente de dimensión no superior a $n, m = 20$, por lo que se calcula directamente a partir de la función *eig* de Matlab que proporciona los autovalores y autovectores de la matriz.

Descomposición en valores singulares y normas matriciales

Los valores singulares de una matriz se pueden utilizar para computar de forma sencilla algunas propiedades de una matriz tales como su norma 2 y su número de condición espectral.

Proposición 2.3. Si $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ una matriz de rango r que tiene valores singulares $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$, entonces $\|A\|_2 = \sigma_1$.

Demostración. Consideramos las bases u_1, \dots, u_n y v_1, \dots, v_m que forman las columnas de P y Q en sus respectivos espacios euclídeos. Como $Au_1 = \sigma_1 v_1$, se tiene que

$$\|A\|_2 \geq \frac{\|Au_1\|}{\|u_1\|} = \sigma_1.$$

Por otra parte, si $x \in \mathbb{R}^n$ existen coeficientes c_1, \dots, c_n tales que

$$x = c_1 u_1 + \dots + c_n u_n,$$

y como la base es ortonormal,

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 &= \|c_1 \sigma_1 v_1 + \dots + c_r \sigma_r v_r\|_2^2 \\ &= |c_1 \sigma_1|^2 + \dots + |c_r \sigma_r|^2 \\ &\leq |\sigma_1|^2 (|c_1|^2 + \dots + |c_r|^2) \\ &\leq |\sigma_1|^2 \|x\|^2, \end{aligned}$$

por lo que $\|A\|_2 \leq \sigma_1$, como se quería probar. ■

La norma $\|\cdot\|_2$ de una matriz se puede interpretar geoméricamente como la mayor amplificación que puede sufrir un vector $x \in \mathbb{R}^m$ cuando se le aplica A . El valor singular más grande hereda esta interpretación en virtud de este teorema.

Si A es una matriz invertible con la descomposición en valores singulares $A = Q\Sigma P^t$ y valores singulares $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n$, entonces se comprueba directamente gracias a la ortogonalidad de Q y P que

$$A^{-1} = P^{-t} \Sigma^{-1} Q^{-1} = P \Sigma^{-1} Q.$$

En particular, los autovalores de la matriz A^{-1} son $\sigma_n^{-1} \geq \dots \geq \sigma_1^{-1} > 0$. Gracias a esto, el número de condición espectral de A ,

$$\mu(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2,$$

se puede expresar como

$$\mu(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}.$$

Esto permite interpretar el número de condición como el cociente entre la mayor y la menor amplificación que puede experimentar un vector de \mathbb{R}^n al ser aplicársele A .

El problema lineal de mínimos cuadrados

Teorema 2.4. Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. La solución de norma mínima para el problema lineal de mínimos cuadrados

$$\hat{x} = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\| \quad (2.3)$$

se escribe, siguiendo la notación de los teoremas anteriores, como

$$\hat{x} = \sum_{j=1}^r \frac{v_j^t b}{\sigma_j} u_j. \quad (2.4)$$

Demostración. La prueba se basa en el hecho de que v_1, \dots, v_m es una base ortonormal de \mathbb{R}^m , por lo que

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^r \sigma_i (u_i^t x) v_i - \sum_{i=1}^m (v_i^t b) v_i \right\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^r (\sigma_i (u_i^t x) - v_i^t b)^2 + \sum_{i=r+1}^m (v_i^t b)^2. \end{aligned}$$

El segundo sumando no depende de x elegido, mientras que el primero es mínimo si se eligen como coordenadas $u_i^t x = v_i^t b / \sigma_i$, dando lugar así a la expresión del enunciado. Si $r < n$ hay infinitas soluciones, pero cualquier solución distinta de \hat{x} tiene norma mayor; esta es la única que está en $\ker(A)^\perp$. ■

En el problema anterior se pueden dar los tres casos siguientes:

1. El sistema $Ax = b$ tiene solución única. El vector (2.4) es, en este caso, dicha solución.
2. El sistema $Ax = b$ tiene infinitas soluciones. El vector (2.4) es la solución de norma mínima del sistema.
3. El sistema $Ax = b$ no tiene solución. El vector (2.4) es la solución de norma mínima del problema de mínimos cuadrados correspondiente.

El problema lineal de mínimos cuadrados con restricciones

Pasamos a abordar el problema de mínimos cuadrados con restricción (2.1). Si resulta que el vector \hat{x} en (2.4) es tal que $\|\hat{x}\| \leq M$, entonces esta es también la solución del problema con restricción. En caso contrario, el siguiente resultado asegura que la solución del problema restringido x_0 es tal que $\|x_0\| = M$.

Proposición 2.5. Sean $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ $M > 0$, $b \in \mathbb{R}^m$. Si el vector \hat{x} , que es la solución de norma mínima del problema de mínimos cuadrados (2.3), es tal que $\|\hat{x}\| > M$, entonces la solución x_0 del problema restringido (2.1) se encuentra precisamente sobre la esfera de radio M .

Demostración. Por la definición de \hat{x} , se tiene que $\|A\hat{x} - b\| \leq \|Ax - b\|$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Además, la linealidad garantiza que, para cada $\lambda \neq 0$, $\|A(\lambda\hat{x}) - \lambda b\| \leq \|A(\lambda x) - \lambda b\|$ si $x \in \mathbb{R}^n$.

En las condiciones del enunciado, veremos que para cada $x \in \mathbb{R}^n$ con $\|x\| < M$ existe x_0 con $\|x_0\| = M$ tal que $\|Ax_0 - b\| \leq \|Ax - b\|$. Dado dicho x , existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que $x_0 = \lambda x + (1 - \lambda)\hat{x}$, puesto que el segmento que une x y \hat{x} debe cortar a la esfera de radio M . Así pues,

$$\begin{aligned} \|Ax_0 - b\|^2 &= \|A(\lambda x + (1 - \lambda)\hat{x}) - b\|^2 \\ &\leq (\|A(\lambda x) - \lambda b\| + \|A(1 - \lambda)\hat{x} - (1 - \lambda)b\|)^2 \\ &\leq (\lambda\|Ax - b\| + (1 - \lambda)\|Ax - b\|)^2 \\ &\leq \|Ax - b\|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el mínimo se debe encontrar necesariamente en la esfera de radio M . ■

Este resultado garantiza que la solución del problema mínimo cuadrático restringido se puede encontrar minimizando la función $F(x) = \|Ax - b\|^2$ sujeta a la restricción $\|x\|^2 = M$. Por lo tanto, utilizando el teorema de los multiplicadores de Lagrange se deduce que nuestro problema es equivalente al de encontrar un mínimo relativo para la función

$$H(x, \lambda) = \|Ax - b\|^2 + \lambda(\|x\|^2 - M^2) \quad x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Teorema 2.6. Sean $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ $M > 0$, $b \in \mathbb{R}^m$. La solución de norma mínima del problema lineal de mínimos cuadrados con restricciones se puede escribir como

$$x = \sum_{i=1}^r \frac{\sigma_i(v_i^t b)}{\sigma_i^2 + \lambda} u_i,$$

donde $\lambda > 0$ es la única solución de la ecuación

$$G(\lambda) = \sum_{i=1}^r \frac{(v_i^t b)^2 \sigma_i^2}{(\sigma_i^2 + \lambda)^2} - M^2 = 0.$$

Demostración. La solución x está en $\ker(A)^\perp$, puesto que de lo contrario la norma no sería mínima. Por lo tanto, existe $c \in \mathbb{R}^n$, con $c_i = 0$ si $r < i \leq n$, y tal que $x = Pc$, donde P es la matriz ortogonal que aparece en la descomposición en valores singulares de A . Por la ortonormalidad, se tiene que $\|x\| = \|c\|$. Así pues,

$$\begin{aligned} H(Pc, \lambda) &= \|A(Pc) - y\|^2 + \lambda(\|c\|^2 - M^2) \\ &= \|(Q\Sigma P^t)(Pc) - (QQ^t)y\|^2 + \lambda(\|c\|^2 - M^2) \\ &= \|\Sigma c - Q^t y\|^2 + \lambda(\|c\|^2 - M^2) \\ &= \sum_{i=1}^r (\sigma_i c_i - v_i^t b)^2 + \sum_{i=r+1}^m (v_i^t b)^2 + \lambda \left(\sum_{i=1}^r c_i^2 - M^2 \right). \end{aligned}$$

Derivando respecto de cada c_i e igualando las derivadas a 0, aparecen las condiciones

$$c_i = \frac{v_i^t b \sigma_i}{\sigma_i^2 + \lambda},$$

y derivando respecto de λ e igualando a 0 se obtiene la condición que permite obtener λ . La constante λ que soluciona el problema siempre va a ser positiva. Esto se debe a que para $\lambda = 0$ se tiene la solución del problema mínimo cuadrático sin restricciones. En el caso restringido la norma debe ser menor por lo que λ debe ser mayor que 0. Del hecho de que $G'(\lambda) < 0$ se deduce la unicidad de la solución. ■

2.2. La transformada discreta de Fourier

Las series de Fourier constituyen una herramienta fundamental en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales... Sin embargo, al utilizar métodos numéricos no es posible

La transformada de Fourier discreta y, más generalmente, los métodos pseudoespectrales, constituyen una herramienta mucho más potente que los métodos de diferencias finitas a la hora de efectuar la derivación numérica de una función. En la referencia [3] se puede encontrar una introducción a estas técnicas con aplicaciones en la resolución de ecuaciones en derivadas parciales.

Supongamos que se tiene una función $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de manera que se conocen sus valores en una red equiespaciada de nodos $\{x_0 = 0, x_1, \dots, x_N = 1\}$, con $h = 1/N$. En este caso, la derivada de la función u se puede aproximar en cada punto mediante fórmulas del tipo

$$u'(x_i) \approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2h}.$$

Estas fórmulas se eligen típicamente para ser exactas para polinomios hasta un cierto grado y pueden generalizarse para el cálculo de derivadas de orden superior. También pueden construirse, utilizando polinomios interpoladores en los nodos, fórmulas de derivación de orden más alto que involucren más valores de la función. Sin embargo, no podemos evitar los fallos de precisión cuando $h \rightarrow 0$ derivados de efectuar una división entre una cantidad pequeña.

La idea de los métodos pseudoespectrales de derivación es aproximar en primer lugar la función mediante una sucesión de funciones regulares φ_k ,

$$u(x) \approx \sum_{k=0}^N u_k \varphi_k(x),$$

para después aproximar la función derivada mediante las derivadas de las φ_k , que se suponen conocidas.

$$u'(x) \approx \sum_{k=0}^N u_k \varphi_k'(x).$$

Como funciones φ se suelen elegir los polinomios trigonométricos o alguna clase de polinomios ortogonales, como los polinomios de Legendre o Chebyshev. Además, para funciones suficientemente regulares estos métodos tienen orden de convergencia exponencial frente al orden de convergencia polinómico de los métodos de diferencias finitas, lo que permite llevar a cabo mejores aproximaciones con muchos menos puntos.

En lo que sigue supondremos que las funciones φ_k son polinomios trigonométricos para dar lugar a lo que se conoce como transformada de Fourier discreta. Por simplicidad en la notación se trabaja con una muestra discreta de una función $u : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, ya que el caso de otro intervalo se reduce a este mediante una transformación afín. Se supone además que N es par, ya que en la práctica es habitual utilizar potencias de 2, y que se conocen los valores de la función en una sucesión de nodos equiespaciados $\{x_0 = 0, x_1, \dots, x_N = 1\}$ tales que $x_{i+1} - x_i = h = 2\pi/N$.

Definición 2.7. Si $u : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función con $u(x_i) = u_i$, se define su *transformada de Fourier discreta* como

$$\hat{u}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u_j e^{-ikx_j}, \quad k = -\frac{N}{2}, -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2} - 1. \quad (2.5)$$

La *transformada de Fourier inversa* es

$$u_j = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{u}_k e^{ikx_j}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.6)$$

Se puede comprobar directamente que al realizar la transformada inversa de la función transformada se recupera la función original

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{u}_k e^{ikx_j} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{i=0}^{N-1} u_i e^{-ikx_i} \right) e^{ikx_j} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{ik(x_j - x_i)} \right) u_i \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} N \delta_{ij} u_i = u_j. \end{aligned}$$

Respecto de la definición anterior cabe observar que los coeficientes de Fourier de una función definida en $[0, 2\pi]$ se definen habitualmente como

$$\hat{u}(k) = \int_0^{2\pi} u(t) e^{-ikt} dt,$$

de resultas que los coeficientes de la transformada discreta \hat{u}_k parecen aproximaciones discretas de la integral anterior. Esta similitud es de hecho una igualdad cuando la función u es un polinomio trigonométrico de grado $< N$, es decir, una combinación lineal de las funciones $\{\varphi_k = e^{ikt} : k = -N+1, \dots, N-1\}$. Esto se debe al siguiente resultado que se recoge como proposición.

Proposición 2.8. La regla de los trapecios compuesta con N nodos equiespaciados es exacta para polinomios trigonométricos de grado menor que N .

Demostración. Supongamos que $f(t) = e^{ikt}$ con $k = -N+1, \dots, N-1$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{2\pi}{N} f\left(\frac{2\pi j}{N}\right) &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{2\pi}{N} e^{2\pi i k j / N} \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{2\pi}{N} \left(e^{2\pi i k / N} \right)^j \\ &= \frac{2\pi}{N} \frac{1 - e^{2\pi i k}}{1 - e^{2\pi i k / N}} = 0. \end{aligned}$$

Puesto que la integral de estos polinomios se anula en el intervalo $[0, 2\pi]$ se tiene el resultado anunciado. ■

Esta proposición tiene como consecuencia que al considerar los polinomios trigonométricos $\{\varphi_k = e^{ikt} : k = -N/2, \dots, N/2 - 1\}$, que son los que se consideran al definir la transformada discreta de Fourier, sus normas $\|\cdot\|_2$ y las relaciones de ortogonalidad entre ellos se mantienen en la versión discreta.

La transformada de Fourier rápida

Al tratar con polinomios trigonométricos en una red como la considerada aparece el fenómeno del *aliasing*, que consiste en que funciones diferentes en el intervalo toman los mismos valores en los puntos de la red y son equivalentes a efectos de la discretización. Concretamente, se tiene que φ_k y φ_j toman los mismo valores en la red si, y solo si $j - k$ es múltiplo de N . En la definición (2.5) sería equivalente en principio utilizar las funciones $\{\varphi_k = e^{ikt} : k = 0, \dots, N - 1\}$, aunque a efectos de aproximación veremos que tiene una gran importancia el considerar los índices negativos.

Sin embargo, esta equivalencia se utiliza para calcular de forma efectiva la transformada inversa mediante (2.5). Si ω_N denota el número complejo

$$\omega_N = e^{-\frac{2\pi}{N}i} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)$$

la transformada discreta de Fourier se puede definir alternativamente como la aplicación lineal $F_N \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^N, \mathbb{C}^N)$ con matriz dada por $(F_N)_{i,j} = \omega_N^{ij}$ para $i, j = 0, \dots, N - 1$.

De las relaciones (2.5), (2.6) y las propiedades de aliasing se deduce que F_N es una matriz invertible cuya inversa es $F_N^{-1} = \frac{1}{N}F_N^H$, donde el superíndice H denota la traspuesta conjugada de la matriz. Por tanto, el cálculo de una transformada inversa se puede reducir al de una transformada directa haciendo

$$F_N^{-1}\mathbf{u} = \frac{1}{N}\overline{(F_N\mathbf{u})}.$$

En principio, la transformada de Fourier discreta se podría calcular mediante el producto de los valores de u en la red con la matriz F_N con un coste operativo de N^2 multiplicaciones. Sin embargo, existen una serie de algoritmos conocidos con el nombre genérico de *transformada de Fourier rápida* (FFT) que permiten reducir drásticamente el número de operaciones necesarios para computarla aprovechando que la matriz F_N tiene una gran cantidad de elementos repetidos, especialmente cuando N es una potencia de 2. El primer algoritmo en esta línea fue propuesto por los matemáticos norteamericanos Cooley y Tuckey en 1967 y permite computar la DFT utilizando tan solo $\frac{N}{2} \log_2 \frac{N}{2}$ multiplicaciones. Por ejemplo, para $N = 2^{10} = 1024$ el coste se reduce de 1048576 multiplicaciones a tan solo 4608, menos del 0,5% de las necesarias con el método ingenuo.

Transformadas discretas en senos y cosenos

Las series de Fourier aparecen de forma natural en problemas de ecuaciones de derivadas parciales al tratar de resolverlas mediante separación de variables. Por ejemplo,

para la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t(t, x) = u_{xx}(t, x) & (t, x) \in [0, T] \times [0, 2\pi], \\ u(0, x) = f(x) & x \in [0, 2\pi], \\ u(t, 0) = u(t, 2\pi) = 0 & t \in [0, T], \end{cases}$$

si $f \in L^2([0, 2\pi])$ la solución se puede escribir como

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_n \operatorname{sen}(nx) e^{-n^2 t},$$

donde f_n son los coeficientes de Fourier de f en su desarrollo en serie de senos. La razón por la que aparecen los senos es que satisfacen las condiciones de contorno espaciales del problema. Al discretizar en espacio este problema u otros más complicados con condiciones de contorno similares puede ser necesario llevar a cabo un desarrollo de este tipo en lugar de un desarrollo en serie de polinomios trigonométricos generales. Conviene recordar que al realizar un desarrollo en serie de senos o cosenos se necesitan añadir las frecuencias semienteras, además de las enteras que ya aparecen en el caso general.

Para realizar un *desarrollo en serie de cosenos discreto* se debe realizar en primer lugar la extensión par de la función. Para ello, se forma el vector

$$[u_0, u_1, \dots, u_N] \mapsto [u_0, u_1, \dots, u_N, u_{N-1}, \dots, u_1]$$

de longitud $2N$ y se realiza su transformada de Fourier discreta mediante un algoritmo FFT. La construcción de los coeficientes para el desarrollo en serie de cosenos se explica a continuación. Teniendo en cuenta que $e^{ikx_{2N-j}} = e^{i4\pi} e^{-ikx_j} = -e^{-ikx_j}$, se tiene que los nuevos coeficientes de Fourier discretos verifican

$$\hat{u}_{-k} = u_0 + \sum_{j=1}^{N-1} u_j e^{ikx_j} + u_N + \sum_{j=1}^{N-1} u_j e^{-ikx_j} = \hat{u}_k$$

para $k = 1, \dots, N-1$. Ahora, utilizando la fórmula (2.6) se tiene que

$$\begin{aligned} u_j &= \sum_{k=-N}^{N-1} \hat{u}_k e^{ikx_j} \\ &= \hat{u}_0 + \sum_{k=1}^{N-1} (\hat{u}_k + \hat{u}_{-k}) \cos(kx_j) + i \sum_{k=1}^{N-1} (\hat{u}_k - \hat{u}_{-k}) \sin(kx_j) + \hat{u}_{-N} \cos(Nx_j) \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^N c_k \cos(kx_j), \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que $\sin(Nx_j) = 0$, propiedad de simetría y tomando los coeficientes

$$c_0 = \hat{u}_0, \quad c_k = \hat{u}_k + \hat{u}_{-k} \quad \text{si } k = 1, \dots, N-1, \quad c_k = \hat{u}_{-k}.$$

De forma completamente análoga, para construir un *desarrollo en serie de senos discreto* se realiza la extensión impar. Para ello se debe exigir a la función que $u_0 = u_N = 0$ y se forma el vector

$$[u_0, u_1, \dots, u_N] \mapsto [u_0, u_1, \dots, u_N, -u_{N-1}, \dots, -u_1]$$

de longitud $2N$. En este caso los coeficientes satisfacen

$$\hat{u}_{-k} = \sum_{j=1}^{N-1} u_j e^{ikx_j} - \sum_{j=1}^{N-1} u_j e^{-ikx_j} = -\hat{u}_k$$

para $k = 1, \dots, N-1$. Además, se puede comprobar directamente que $\hat{u}_0 = \hat{u}_{-N} = 0$. Utilizando de nuevo la fórmula (2.6) se tiene que

$$\begin{aligned} u_j &= \sum_{k=-N}^{N-1} \hat{u}_k e^{ikx_j} \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} (\hat{u}_k + \hat{u}_{-k}) \cos(kx_j) + i \sum_{k=1}^{N-1} (\hat{u}_k - \hat{u}_{-k}) \sin(kx_j) \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} s_k \sin(kx_j), \end{aligned}$$

teniendo en cuenta las propiedades anteriores y tomando los coeficientes

$$s_k = i(\hat{u}_k - \hat{u}_{-k}) \quad \text{si } k = 1, \dots, N-1.$$

Interpolación trigonométrica

La transformada discreta de Fourier y los algoritmos FFT permiten resolver el problema de interpolación trigonométrica en nodos equiespaciados de una forma sencilla. Bajo las mismas condiciones que en la sección anterior sobre los nodos y la función u , se trata de obtener unos coeficientes $v_{-N/2}, v_{-N/2+1}, \dots, v_{N/2-1}$ tales que

$$u_j = \sum_{k=N/2}^{N/2-1} v_k e^{ikx_j}, \quad \text{para } j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Por lo explicado anteriormente sobre el aliasing de las funciones trigonométricas, esto es equivalente a encontrar $v'_0, v'_1, \dots, v'_{N-1}$ satisfaciendo

$$u_j = \sum_{k=0}^{N-1} v'_k e^{ikx_j}, \quad \text{para } j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Si \mathbf{v}' es el vector de coeficientes v'_i , la ecuación anterior es equivalente a que $\mathbf{u} = NF_N^{-1}\mathbf{v}'$, así que los coeficientes de interpolación se obtienen haciendo

$$\mathbf{v}' = \frac{1}{N} F_N \mathbf{u},$$

esto es, mediante una transformada discreta y una división. Para obtener los coeficientes \mathbf{v} hay que hacer el reordenamiento siguiente

$$[v_{-N/2}, \dots, v_{-1}, v_0, v_1, \dots, v_{N/2-1}] = [v'_{N/2}, \dots, v'_{N-1}, v'_0, v'_1, \dots, v'_{N/2-1}].$$

En la figura 2.1 se pone de manifiesto la importancia de utilizar las frecuencias negativas para formar el interpolante trigonométrico. Si no se utilizan, aunque se sigue interpolando a la función la aproximación no es buena en otros puntos.

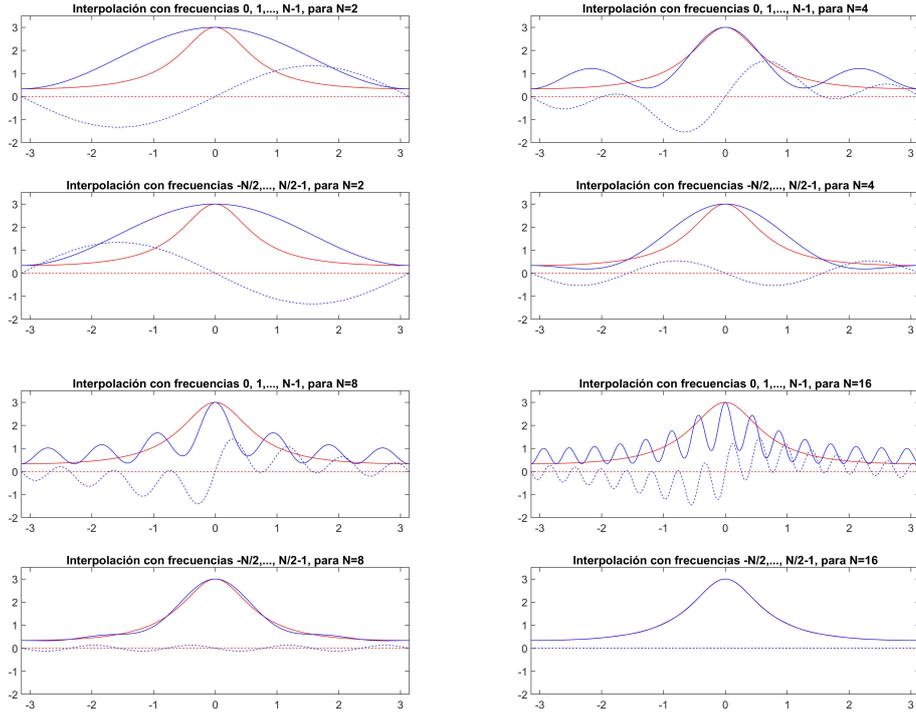


Figura 2.1: Se representa la función $f(x) = 3/(5 - 4 \cos(x))$, en rojo, y sus interpolantes trigonométricos obtenidos mediante transformada discreta de Fourier, en azul, para distintos valores de N . En línea discontinua se representa la parte imaginaria de la función.

Finalmente, mencionaremos una cota importante para el error cometido en la interpolación trigonométrica cuya prueba puede encontrarse en el libro [3]. La aproximación a la función u , que ahora supondremos periódica y $u \in L^2(0, 2\pi)$, es tanto mejor cuanto más regular sea la función. Por esto, el error cometido se debe estudiar en el marco de los llamados *espacios de Sobolev*

$$H^m(0, 2\pi) = \left\{ u \in L^2(0, 2\pi) : \frac{d^k u}{dx^k} \in L^2(0, 2\pi) \text{ para } 0 \leq k \leq m \right\},$$

definidos para $m \in \mathbb{N}$, donde las derivadas se entienden en todo caso en el sentido de las distribuciones. En otras palabras, $H^m(0, 2\pi)$ es el espacio de funciones de cuadrado integrable cuyas m primeras derivadas distribucionales es también de cuadrado integrable. Este espacio se equipa con el producto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^m(0, 2\pi)} = \sum_{k=0}^m \int_0^{2\pi} \frac{d^k u}{dx^k}(x) \frac{d^k v}{dx^k}(x) dx, \quad (2.7)$$

y la norma correspondiente $\|u\|_{H^m(0, 2\pi)} = (\langle u, u \rangle_{H^m(0, 2\pi)})^{1/2}$. Además, el subespacio de $H^m(0, 2\pi)$ formado por las funciones cuyas $m - 1$ primeras derivadas son periódicas se denota por $H_p^m(0, 2\pi)$. Una vez introducidos estos conceptos, el interpolante trigonométrico $I_N u$ en los nodos $x_j = 2\pi j/N$, $j = 0, 1, \dots, N - 1$ satisface el siguiente resultado.

Proposición 2.9. Error de la interpolación trigonométrica. Si $u \in H^m(0, 2\pi)$ y se tiene un entero $0 \leq l \leq m$, entonces existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|u - I_N u\|_{H^m(0, 2\pi)} \leq C N^{l-m} \left\| \frac{d^m u}{dx^m} \right\|_{L^2(0, 2\pi)}. \quad (2.8)$$

Como consecuencia del teorema anterior, si la función u es suficientemente regular, el error cometido en la interpolación tiende hacia 0 cuando $N \rightarrow \infty$ más rápidamente que cualquier potencia de $1/N$, esto es, tiene *orden espectral*.

Capítulo 3

Recuperación de funciones holomorfas

En este capítulo se estudia el problema de recuperar o aproximar una función holomorfa de la que se conocen una serie de valores aproximados en unos nodos dados. Esta situación se da en varios contextos como la teoría de funciones, la teoría de la señal o las ecuaciones en derivadas parciales. Esta exposición, que seguirá la referencia [17], tiene como una de sus posibles aplicaciones el método numérico para resolver problemas parabólicos regresivos que se tratará en el capítulo siguiente.

3.1. Interpolación de funciones en H^2

Sean $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ la función holomorfa que se pretende recuperar, $\{z_n\}_{n=1}^N$ una sucesión de nodos en D y $\mathbf{w} = \{w_n\}_{n=1}^N \in \mathbb{C}^N$ los valores de la función en dichos nodos. Con vistas a su aplicación en problemas numéricos, suponemos que conocemos unos valores aproximados $\mathbf{w} + \delta\mathbf{w} = \{w_n + \delta w_n\}_{n=1}^N$, para los que además se conoce una cota del error $|\delta w_n| \leq \epsilon$, $1 \leq n \leq N$. El problema de la recuperación consiste en encontrar una función adecuada $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ tal que la diferencia $|F(z) - f(z)|$, $z \in D$, sea pequeña en un sentido que se ha de precisar.

El problema así formulado no admite una solución razonable, por lo que se supone el conocimiento a priori de información acerca del tamaño de la función f . Este tamaño se medirá mediante las normas correspondientes de los espacios de Hardy H^p , introducidos en el primer capítulo. Así, consideraremos como hipótesis adicional que

$$f \in \mathcal{B}_p(M) = \{f \in H^p : \|f\|_p \leq M\}.$$

Aunque al estudiar el problema de interpolación de Pick-Nevanlinna se han dado condiciones necesarias y suficientes para encontrar una función $F(z_n) = w_n + \delta w_n$ en $B_\infty(M)$, el interpolante no se comporta bien frente a cambios en los valores numéricos aproximados.

Dados unos nodos z_1, \dots, z_N y una función $f \in H^p$, el problema de encontrar el interpolante óptimo Rf , es decir, aquel que minimiza el error $\sup_{f \in H^p} \|Rf - f\|_p$, está

resuelto para $p = 2, \infty$. Para $p = 2$, el interpolante óptimo [5] viene dado por

$$Rf(z) = \sum_{n=1}^N w_n \frac{1 - |z_n|^2}{1 - z\bar{z}_n} \prod_{m \neq n} \frac{B_m(z)}{B_m(z_n)}, \quad (3.1)$$

donde $B_n(z) = (z - z_n)/(1 - \bar{z}_n z)$, $1 \leq n \leq N$; mientras que para $p = \infty$, el óptimo es [15]

$$Sf(z) = \sum_{n=1}^N w_n \frac{(1 - |z_n|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \bar{z}_n z|} \prod_{m \neq n} \frac{B_m(z)}{B_m(z_n)}. \quad (3.2)$$

Cabe destacar que este segundo interpolante ni siquiera es holomorfo, a pesar de su propiedad de optimalidad. Aunque estos interpolantes dan lugar a buenas aproximaciones, cuando se utiliza la fórmula (3.1) con los valores perturbados $w_n + \delta w_n$ para dar lugar a una nueva función $\tilde{R}f$, para valores $z \in D$, $|z| > |z_n|$ se incurre en un error

$$\left| \tilde{R}f(z) - f(z) \right| \geq C\Gamma^N \epsilon,$$

donde $C = C(z) > 0$ y $\Gamma = \Gamma(z) > 1$, de forma que resulta perjudicial aumentar el número de nodos N . Para $p = \infty$ se observa un comportamiento similar. De esta manera, los algoritmos óptimos de aproximación no resultan útiles en la práctica debido a su sensibilidad respecto de los errores en los valores de la función. Por esta razón se renuncia a encontrar un interpolante para tratar buscar una aproximante tipo mínimos cuadrados en algún subespacio adecuado.

Por conveniencia con los algoritmos del Álgebra Lineal Numérica se opta por ampliar el marco de trabajo al espacio H^2 , ya que las normas de funciones en este espacio son más sencillas de computar. Así, denotaremos por $V \subset H^2$ un subespacio de dimensión J con buenas propiedades de aproximación. Este espacio podrá ser el $V = \mathcal{P}_{N-1}$, el espacio de los polinomios de grado a lo sumo $N - 1$ o \mathcal{S}_N , el espacio generado por los núcleos de Cauchy

$$k_n(z) = \frac{1}{1 - \bar{z}_n z}, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (3.3)$$

Hay que destacar que, descomponiendo en fracciones simples los sumandos que aparecen en (3.1), se comprueba que el interpolante óptimo Rf pertenece al espacio \mathcal{S}_N .

En cuanto al espacio de polinomios, el teorema de Weierstrass asegura que una función de H^2 , que en particular es continua en el conjunto compacto \bar{D} , se puede aproximar uniformemente por polinomios. Es más, en el espacio de Hilbert H^2 el conjunto de funciones $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ es un sistema ortonormal y completo, como se deduce directamente del teorema 1.29. No obstante, el interpolante trigonométrico de una función puede tener un mal comportamiento en los puntos no interpolados cuando se utilizan polinomios de grado alto, por lo que no resulta recomendable su utilización.

Los núcleos de Cauchy, que fueron mencionados en la prueba del Teorema de Pick, pueden dar lugar también a un sistema ortonormal y completo de H^2 bajo ciertas condiciones, que se muestran en el siguiente teorema, justificando así sus buenas propiedades de aproximación en este espacio.

Teorema 3.1. Sea $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de nodos en D que satisface

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) = \infty.$$

Se define la sucesión $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ de funciones definida recursivamente mediante

$$g_1(z) = \frac{(1 - |z_1|^2)^{1/2}}{1 - \bar{z}_1 z}$$

y

$$g_n(z) = \frac{(1 - |z_n|^2)^{1/2}}{1 - \bar{z}_n z} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k z}, \quad n \geq 2.$$

Las sucesión $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ es un sistema ortonormal y completo de funciones de H^2 , y para cada $f \in H^2$ se tiene que

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n,$$

de manera que la suma converge en la norma de H^2 y cada coeficiente c_n está determinado por los valores $f(z_1), \dots, f(z_n)$.

Demostración. En primer lugar, hay que observar que si $k_n = 1/(1 - \bar{z}_n z)$ para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\|k_n\|_2^2 = \langle k_n, k_n \rangle = k_n(z_n) = \frac{1}{1 - |z_n|^2}.$$

Esto muestra que g_1 está normalizado y que cada función de la base tiene la forma $g_n = e_n b_n$, siendo e_n el núcleo de Cauchy k_n normalizado y b_n el producto de Blaschke, salvo un factor de módulo unidad, asociado a los nodos z_1, \dots, z_{n-1} . Por esta razón, y teniendo en cuenta la proposición 1.24, todas las funciones de la sucesión tienen norma 1, ya que $\|g_n\|_2 = \|e_n\|_2 = 1$. Además, si $m > n$, se tiene que

$$\langle g_n, g_m \rangle = \langle e_n b_n, e_m b_m \rangle = \langle e_n, e_m b_m / b_n \rangle = 0,$$

ya que $e_m b_m / b_n$ se anula en z_n , por lo que la sucesión es ortonormal.

Notése que el espacio generado por las $\{g_1, \dots, g_n\}$ es el mismo que el generado por los $\{k_1, \dots, k_n\}$, ya que son linealmente independientes y al descomponer cada g_n en fracciones simples las fracciones que aparecen son múltiplos de cada k_j , $1 \leq j \leq n$. Por esta razón, si una función verifica $\langle f, g_n \rangle = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces f es ortogonal a las funciones k_n y satisface $f(z_n) = 0$ para $n \in \mathbb{N}$. Pero debido a las hipótesis sobre la sucesión de nodos y teniendo en cuenta la proposición 1.23, debe ocurrir que $f \equiv 0$. Esto es condición suficiente para garantizar que la sucesión es una base ortonormal de H^2 . Por lo tanto, se tiene que

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n,$$

donde la suma converge en la norma de H^2 y, en particular, converge puntualmente en D . Así, evaluando cada lado de la suma en los coeficientes se va generando la siguiente recurrencia,

$$\begin{aligned} f(z_1) &= c_1 g_1(z_1) \\ f(z_2) &= c_1 g_1(z_2) + c_2 g_2(z_2) \\ f(z_3) &= c_1 g_1(z_3) + c_2 g_2(z_3) + c_3 g_3(z_3), \end{aligned}$$

y como $g_n(z_n)$ nunca se anula, estas ecuaciones tienen una solución única para la sucesión de coeficientes $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$. ■

Para este espacio V , se considera el problema de minimización mínimo cuadrático

$$\min_{G \in V} \sum_{n=1}^N |G(z_n) - (w_n + \delta w_n)|^2 \quad (3.4)$$

sujeto a la restricción

$$\|H\|_2 \leq M. \quad (3.5)$$

De ahora en adelante se denotará por F a una de sus soluciones. En el apéndice B.1. se explica cómo resolver un problema de este tipo mediante la descomposición en valores singulares de una matriz y los multiplicadores de Lagrange. Esto requiere la elección de una base ortonormal $\{\phi_n\}_{n=1}^N$ de V para poder controlar el tamaño de los aproximantes. Si $H \in V$, existirá $\mathbf{c} = \{c_n\}_{n=1}^N$ tal que $H = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j$, y será $\|H\|_2 = \|\mathbf{c}\|_2$. Para $V = \mathcal{P}_{N-1}$ se puede tomar la base $\{z_n\}_{n=0}^{N-1}$ y para $V = \mathcal{S}_N$ se elige la base ortonormal $\{g_n(z)\}_{n=0}^{N-1}$ dada por

$$g_1(z) = \frac{(1 - |z_1|^2)^{1/2}}{1 - \bar{z}_1 z}, \quad g_n(z) = \frac{(1 - |z_n|^2)^{1/2}}{1 - \bar{z}_n z} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k z}, \quad 2 \leq n \leq N.$$

3.2. Constante de Lebesgue y fórmula del error de Hermite

La constante de Lebesgue Λ_N asociada a una sucesión de nodos $\{z_n\}_{n=1}^N$ en el intervalo $I = [-r, r]$ se define como

$$\Lambda_N = \max_{x \in I} \sum_{n=1}^N |l_n(x)|,$$

donde las funciones l_n , $1 \leq n \leq N$ son los polinomios fundamentales de Lagrange correspondientes a los nodos $\{z_n\}_{n=1}^N$, esto es, los únicos polinomios tales que $l_n(z_m) = \delta_{nm}$ para cada $1 \leq n, m \leq N$.

Esta constante permite acotar el interpolante de Lagrange de una función f en términos de sus valores en los nodos. Si L_{N-1} es el único polinomio de grado $N - 1$ tal que $L_{N-1}(z_n) = f(z_n)$ para cada $1 \leq n \leq N$, se tiene que

$$L_{N-1}(z) = \sum_{n=1}^N f(z_n) l_n(z),$$

y entonces se tiene la siguiente desigualdad,

$$|L_{N-1}(z)| \leq \sum_{n=1}^N |f(z_n)| |l_n(z)| \leq \|f\|_N \sum_{n=1}^N |l_n(z)|,$$

es decir,

$$\|L_{N-1}\|_I \leq \Lambda_N \|f\|_N. \tag{3.6}$$

Utilizando los polinomios $\Omega_N(z)$ definidos anteriormente, se puede expresar del error en la interpolación, debida a Hermite, en términos de una integral en el plano complejo. Si se supone que la sucesión de nodos se encuentra en el interior de un disco Ω y que la función f es holomorfa en un entorno del disco cerrado, entonces se tiene la *fórmula del error de interpolación de Hermite*,

$$f(x) - L_{N-1}(x) = \frac{\Omega_N(x)}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{\Omega_N(z)(z-x)} dz. \tag{3.7}$$

Para probarla, notemos que los polos del integrando son los nodos de la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^N$ y $z = x$. Los residuos del integrando en dichos puntos se consiguen simplemente eliminando el factor $(z - z_i)$ en el denominador. Aplicando el teorema de los residuos se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_N(x)}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{\Omega_N(z)(z-x)} dz &= \Omega_N(x) \left(\frac{f(z_1)}{(z_1 - z_2) \dots (z_1 - z_N)(z_1 - x)} \right. \\ &+ \dots + \frac{f(z_N)}{(z_N - z_1) \dots (z_N - z_{N-1})(z_N - x)} \\ &+ \left. \frac{f(x)}{(x - z_1) \dots (x - z_N)} \right) \\ &= f(z_1)l_1(x) + \dots + f(z_N)l_N(x) - f(x) \\ &= L_{N-1}(x) - f(x), \end{aligned}$$

como se quería probar.

3.3. Resultados principales

Para el análisis nos restringimos a nodos reales en el intervalo $I = [-r, r]$, $0 < r < 1$. Consideremos el polinomio de Jacobi de grado N asociado a los parámetros $-1/2 \leq \alpha, \beta$ $P_N^{\alpha, \beta}(z)$. Un estudio bastante completo de sus propiedades al que nos referiremos en varias ocasiones se puede encontrar en [25]. Denotamos por $J_N^{\alpha, \beta}(z) = P_N^{\alpha, \beta}(z/r)$ al polinomio escalado, cuyos ceros $\{z_n\}_{n=1}^N$ son los que consideraremos a la hora de recuperar la función. Cabe tener en cuenta que el caso $\alpha = \beta = -1/2$ se corresponde con el de los más habituales polinomios de Chebyshev de primera especie, que serán los que se utilicen en las aplicaciones. Se utiliza la notación

$$\|f\|_I = \max \{|f(z)| : z \in I\}$$

que tiene sentido para funciones $f \in H^2$.

Para combinar la aproximación de F a f en el intervalo I con la cota a priori se utilizará el teorema de las dos constantes 1.20. Hay que destacar que en este caso se

están combinando dos normas diferentes, por lo que no se puede aplicar directamente el teorema. Para ello, sea $\omega : \bar{D} \rightarrow [0, 1]$ la medida armónica de I relativa a $D \setminus I$, que de acuerdo con el teorema 1.16 es la única función continua en \bar{D} , armónica en $D \setminus I$ y tal que $\omega(z) = 0$ si $|z| = 1$ y $\omega(z) = 1$ si $z \in I$.

Lema 3.2. Sea $f \in H^p$ no idénticamente nula. Entonces, para cada $z \in D$ se tienen las siguientes desigualdades interpolatorias:

(a) Si $p = 2$, se tiene

$$|f(z)| \leq (\gamma(z)\|f\|_2)^{1-\omega(z)} \|f\|_I^{\omega(z)},$$

con

$$\gamma(z) = \sqrt{\frac{1+|z|}{1-|z|}} \frac{1}{1-\omega(z)}. \quad (3.8)$$

(b) Si $p = \infty$, se tiene

$$|f(z)| \leq \|f\|_\infty^{1-\omega(z)} \|f\|_I^{\omega(z)}.$$

Demostración. Sea $z \in D \setminus I$. De acuerdo con lo expuesto al comienzo de la sección 1.1.3, el teorema de representación de Riesz y el principio del módulo máximo aseguran que existe una medida de probabilidad μ_z con soporte en $I \cup \partial U$ tal que, para cada función $g \in \mathcal{C}(\bar{U}) \cap H(U \setminus I)$ se tiene que

$$g(z) = \int_I g(\xi) d\mu_z(\xi) + \int_{\partial U} g(\xi) d\mu_z(\xi).$$

Obsérvese que tomando $g = \omega$, se deduce que

$$\mu_z(I) = \omega(z), \quad \mu_z(\partial U) = 1 - \omega(z). \quad (3.9)$$

Supongamos en primer lugar que $f \in H^2$. Definiendo como en el capítulo anterior las funciones $f_r(z) = f(rz)$ para $0 < r < 1$ y $z \in D$, ocurre que

$$f_r(z) \rightarrow f(z), \quad \|f_r\|_2 \rightarrow \|f\|_2, \quad \|f_r\|_I \rightarrow \|f\|_I, \quad \text{cuando } r \rightarrow 1.$$

El primer límite (puntual) es consecuencia de la continuidad de f en U , la segunda es consecuencia de la proposición 1.4 y para la última basta observar que f es holomorfa en un entorno de I para garantizar la convergencia uniforme. Las funciones f_r son continuas en \bar{U} , así que los límites anteriores garantizan que es suficiente con probar el lema para funciones continuas en \bar{U} ; para una función $f \in H^2$ basta con tomar límites. Para una de tales funciones f resulta que $\ln|f|$ es subarmónica. Así, por el principio del máximo para funciones subarmónicas (proposición 1.18),

$$\begin{aligned} \ln|f(z)| &\leq \int_I \ln|f(\xi)| d\mu_z(\xi) + \int_{\partial U} \ln|f(\xi)| d\mu_z(\xi) \\ &= \frac{1}{\omega(z)} \int_I \ln|f(\xi)|^{\omega(z)} d\mu_z(\xi) + \frac{1}{1-\omega(z)} \int_{\partial U} \ln|f(\xi)|^{1-\omega(z)} d\mu_z(\xi). \end{aligned}$$

Ahora, se utiliza la desigualdad de Jensen en el lado derecho de la desigualdad anterior con la función exponencial, que es convexa. Las identidades 3.9 garantizan que se puede

usar dicha desigualdad en cada integral al tratarse de medidas de probabilidad. Se obtiene

$$|f(z)| \leq \frac{1}{\omega(z)} \int_I |f(\xi)|^{\omega(z)} d\mu_z(\xi) \cdot \frac{1}{1-\omega(z)} \int_{\partial U} |f(\xi)|^{1-\omega(z)} d\mu_z(\xi),$$

el integrando de la primera integral se acota mediante $\|f\|_I$ mientras que en la segunda integral se utiliza la desigualdad de Hölder con exponentes $1/p = 1 - \omega(z)$, $1/q = \omega(z)$ para dar lugar a

$$|f(z)| \leq \|f\|_I^{\omega(z)} \left(\frac{1}{1-\omega(z)} \right)^{1-\omega(z)} \left(\int_{\partial U} |f(\xi)| d\mu_z(\xi) \right)^{1-\omega(z)}.$$

Por el principio del máximo para funciones armónicas, se tiene que

$$\int_{\partial U} |f(\xi)| d\mu_z(\xi) \leq \int_{\partial U} |f(\xi)| P_z(\xi) \frac{|d\xi|}{2\pi},$$

puesto que, como funciones de $z \in D \setminus I$, se tratan de dos funciones armónicas en $D \setminus I$ que, de acuerdo con el teorema 1.17, tienen límites iguales cuando z tiende hacia ∂D , pero cuando z tiende hacia I la primera tiende hacia 0 mientras que la segunda es ≥ 0 . Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y las propiedades del núcleo de Poisson se tiene que

$$\int_{\partial U} |f(\xi)| P_z(\xi) \frac{|d\xi|}{2\pi} \leq \sqrt{\frac{1+|z|}{1-|z|}} \|f\|_2.$$

Combinando esta cota con la obtenida previamente se obtiene el resultado del enunciado.

La parte (b) se prueba de una manera similar. En este caso se puede aplicar directamente el teorema de las dos constantes a las funciones f_r y tomar límites cuando $r \rightarrow 1$. ■

Lema 3.3. Para $\Omega(z) = \prod_{n=1}^N (z - z_n)$ se tiene que

$$\frac{\|\Omega_N\|_I}{\min_{|z|=1} |\Omega_N(z)|} \leq c_N \tau^N,$$

donde

$$c_N = 4 \frac{\Gamma(p+2)\Gamma(p+3/2)\Gamma(N+2p+1)\Gamma(N+q+1)(1+r)}{\Gamma(q+1)\Gamma(2p+2)\Gamma(N+p+1)\Gamma(N+p+1/2)(1-r)} = O(N^{q+1/2}),$$

con $p = (\alpha + \beta)/2$ y $q = \max\{\alpha, \beta\}$, y

$$\tau = \frac{r}{1 + \sqrt{1-r^2}} < 1.$$

Demostración. La prueba del lema se basa en varias propiedades de los polinomios ortogonales de Jacobi que se pueden encontrar en [25]. Concretamente, en 7.32.1 se prueba que

$$\|\Omega\|_I = \frac{1}{a_n} \|J_N^{\alpha, \beta}\|_I = \frac{r^N}{a_N} \frac{\Gamma(N+q+1)}{N! \Gamma(q+1)},$$

donde a_N es el coeficiente principal del polinomio $J_N^{\alpha,\beta}$. La expresión de dicho coeficiente se deduce directamente a partir de las relaciones de recurrencia que determinan los polinomios de Jacobi (ver [25, 4.5]), esta es,

$$\frac{1}{a_N} = \frac{2}{\alpha + \beta + 2} \prod_{n=1}^{N-1} \frac{D_n}{B_n}$$

con

$$\begin{aligned} D_n &= 2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta) \\ B_n &= (2n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta). \end{aligned}$$

A continuación, se utiliza la propiedad de factorial de la función Gamma para relacionar los productos que determinan el coeficiente a_N con los valores de la función Gamma que aparecen en el coeficiente c_N . Es decir,

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{N-1} (n+\alpha+\beta+1) &= \frac{\Gamma(N+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} = \frac{\Gamma(2p+N+1)}{\Gamma(2p+2)}, \\ \prod_{n=1}^{N-1} (2n+\alpha+\beta+2) &= 2^{N-1} \prod_{n=1}^{N-1} \left(n + \frac{\alpha+\beta}{2} + 1 \right) = 2^{N-1} \frac{\Gamma(p+N+1)}{\Gamma(p+2)} \end{aligned}$$

y así para los otros términos que intervienen. Juntándolo todo se llega a que

$$\begin{aligned} \|\Omega_N\|_I &\leq \frac{4\Gamma(p+2)\Gamma(p+3/2)\Gamma(N+2p+1)\Gamma(N+q+1)}{(\alpha+\beta+2)\Gamma(q+1)\Gamma(2p+2)\Gamma(N+p+1)\Gamma(N+p+1/2)} \frac{r^N}{2^N} \\ &= c_N \frac{1-r}{1+r} \frac{r^N}{2^N} \end{aligned}$$

Falta acotar $|\Omega_N(z)|$ para $|z|=1$. Observemos que si $|z|=1$ y para cada $0 \leq x \leq r$

$$\begin{aligned} |(z-x)(z+x)| &= ((z-x)(z+x)(\bar{z}-x)(\bar{z}+x))^{1/2} \\ &= ((1-x^2)^2 - z^2x^2 - \bar{z}^2x^2 - 2x^2)^{1/2} \\ &= \left((1-x^2)^2 + 4x^2(\operatorname{Im}(z))^2 \right)^{1/2} \\ &\geq \left((1-x^2)^2 \right)^{1/2} = |(1+x)(1-x)|. \end{aligned}$$

Como los nodos z_n son simétricos respecto del 0, la identidad anterior implica que

$$|\Omega_N(z)| \geq |\Omega_N(\bar{z})|, \quad |z|=1.$$

Se introducen los nodos modificados $z_n^* = -r \cos((n-1)\pi/N)$, para $1 \leq n \leq N+1$, y se define

$$\Omega_{N+1}^*(z) = \prod_{n=1}^{N+1} (z - z_n^*).$$

De acuerdo con el teorema [25, 6.21.2] se tiene que, para $1 \leq n \leq N$, $z_n = \cos \theta_n$ verificando

$$\frac{(2n-1)\pi}{2N+1} \leq \theta_n \leq \frac{2n\pi}{2N+1},$$

por lo que $\theta_n < n\pi/N$, y por ser la función coseno decreciente en el intervalo $[0, \pi]$ se tiene que $(1 - z_n) \leq (1 - z_{n+1}^*)$. Entonces, juntando los resultados anteriores se tiene que, si $|z| = 1$,

$$|\Omega_N(z)| \geq |\Omega_N(1)| \geq \prod_{n=1}^N (1 - z_n) \geq \prod_{n=2}^{N+1} (1 - z_n^*) = \frac{\Omega_{N+1}^*(1)}{1+r}.$$

Para concluir la prueba del lema conviene tener en cuenta la siguiente desigualdad integral, que se prueba utilizando el cambio de variable $\xi/r = \cos t$ y teniendo en cuenta que la función $t \mapsto \ln(1 + r \cos t)$ es decreciente en $[0, \pi]$,

$$\begin{aligned} \int_{-r}^r \frac{\ln(1 - \xi)}{r\pi\sqrt{1 - (\xi/r)^2}} d\xi &= \int_0^\pi \frac{\ln(1 + r \cos t)}{\pi} d\xi \\ &= \sum_{n=1}^N \int_{(n-1)\pi/N}^{n\pi/N} \frac{\ln(1 + r \cos t)}{\pi} dt \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln(1 - z_n^*). \end{aligned}$$

En otras palabras, la suma $(1/N) \sum_{n=1}^N \ln(1 - z_n^*)$ es una suma de Riemann superior para la integral $\int_{-r}^r \ln(1 - \xi)\mu(\xi) d\xi$, donde $\mu(\xi) = 1/(r\pi\sqrt{1 - (\xi/r)^2})$, para $-r < \xi < r$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \ln \Omega_{N+1}^*(1) &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln(1 - \xi_n^*) + \frac{1}{N} \ln(1 - r) \\ &\geq \int_{-r}^r \ln(1 - \xi)\mu(\xi) d\xi + \frac{1}{N} \ln(1 - r) \\ &= \ln(1 + \sqrt{1 - r^2}) - \ln 2 + \frac{1}{N} \ln(1 - r). \end{aligned}$$

Entonces, si $|z| = 1$, se tiene

$$\Omega_{N+1}^*(1) \geq (1 - r) \left(\frac{1 + \sqrt{1 - r^2}}{2} \right)^N.$$

Basta utilizar las acotaciones dadas para $\|\Omega_N\|_I$, $\min_{|z|=1} |\Omega_N(z)|$ y $\Omega_{N+1}^*(1)$ para tener la acotación propuesta en el enunciado. ■

El siguiente teorema es el resultado principal de este capítulo. Para enunciarlo se establecen las siguientes notaciones. Dada $f \in H^2$, se denota por $\|f\|_N = \max_{1 \leq n \leq N} |f(z_n)|$ al máximo de la función en los nodos. Además, se fija

$$\rho_N(f, V, M) = \min \{ \|f - H\|_N : H \in V \cap \mathcal{B}_2(M) \}.$$

Teorema 3.4. Sean $f \in H^2$ tal que $\|f\|_2 \leq M$ para cierta $M > 0$ y $\{\delta\omega_n\}_{n=1}^N \in \mathbb{C}^N$. Sean $\rho_N = \rho(f, V, M)$, $\epsilon = \max_{1 \leq n \leq N} |\delta\omega_n|$ y sean $\{z_n\}_{n=1}^N$ los ceros del polinomio $J_N^{\alpha, \beta}$ para ciertos valores $-1/2 \leq \alpha, \beta \leq 1/2$. Sea $F \in V \cap \mathcal{B}_2(M)$ la solución del problema de minimización (3.4)-(3.5). Entonces se tiene la siguiente cota para cada $z \in D$,

$$|f(z) - F(z)| \leq (2M\gamma(z))^{1-\omega(z)} \left(\frac{2M}{1-r} c_N \tau^N + \Lambda_N \left(\epsilon + \sqrt{N} (\epsilon + \rho_N) \right) \right)^{\omega(z)} \quad (3.10)$$

Demostración. Sea $h(z) = f(z) - F(z)$. Teniendo en cuenta el lema 3.3, basta con probar que para cada $x \in I$ se tiene que

$$|h(x)| \leq \frac{2Mc_N}{1-r} \tau^N + \Lambda_N \left(\epsilon + \sqrt{N} (\epsilon + \rho_N) \right). \quad (3.11)$$

Sea ahora L_{N-1} el polinomio interpolador de Lagrange de f en los nodos $\{z_n\}_{n=1}^N$. Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} \|h\|_I &\leq \|L_{N-1}\|_I + \|h - L_{N-1}\|_I \\ &\leq \Lambda_N \|h\|_N + \|h - L_{N-1}\|_I \end{aligned}$$

utilizando la acotación (3.6). Se procede a acotar los dos sumandos de la fórmula anterior.

Sean $\mathbf{W} = \{F(z_n)\}_{n=1}^N$, $G_0 \in V \cap B_2(M)$ una función tal que

$$\|f - G_0\|_N = \min_{G \in V \cap B_2(M)} \|f - G\|_N = \rho_N$$

y sea $\mathbf{G}_0 = \{G_0(z_n)\}_{n=1}^N$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \|h\|_N &= \|\mathbf{w} - \mathbf{W}\|_\infty \\ &\leq \|\mathbf{w} - (\mathbf{w} + \delta\mathbf{w})\|_\infty + \|(\mathbf{w} + \delta\mathbf{w}) - \mathbf{W}\|_\infty \\ &\leq \epsilon + \|(\mathbf{w} + \delta\mathbf{w}) - \mathbf{W}\|_2 \\ &\leq \epsilon + \|(\mathbf{w} + \delta\mathbf{w}) - \mathbf{G}_0\|_\infty \\ &\leq \epsilon + \sqrt{N} \|(\mathbf{w} + \delta\mathbf{w}) - \mathbf{G}_0\|_\infty \\ &\leq \epsilon + \sqrt{N} (\epsilon + \rho_N), \end{aligned}$$

teniendo en cuenta los problemas de minimización que solucionan F y G_0 , respectivamente.

Para acotar utilizar el lema 3.2 conviene utilizar la fórmula del error de interpolación de Hermite (3.7) con h . La fórmula sigue siendo válida aunque h no sea necesariamente holomorfa en un entorno de D , porque esta es cierta en cualquier disco de radio $0 < r < 1$ que contenga a los nodos y para utilizarla en la circunferencia unidad basta notar que $\|h_r - H\|_1 \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 1$.

Teniendo en cuenta que $\|f\|_2 \leq M$ y utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwartz se tiene que

$$\begin{aligned} |h(x) - L_{N-1}(x)| &\leq \frac{|\Omega_N(x)|}{2\pi} \int_{\delta U} \frac{|H(z)|}{|\Omega_N(z)| |1-r|} |dz| \\ &\leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\partial U} |H(z)| |dz| \right) \frac{c_N \tau^N}{1-r} \\ &\leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\partial U} |H(z)|^2 |dz| \right)^{1/2} \frac{c_N \tau^N}{1-r} \\ &= \frac{2M}{1-r} c_N \tau^N. \end{aligned}$$

Juntando las cotas que se han obtenido para $\|h\|_N$ y para $\|h - L_{N-1}\|_I$ se concluye la prueba. ■

La cota dada en (3.10) pierde su significado cuando $|z| \rightarrow 1$, puesto que $\omega(z) \rightarrow 0$ y además el denominador de $\gamma(z)$ contiene un factor de la forma $(1 - |z|)$. El primer problema no se puede solucionar fácilmente, pero el segundo puede evitarse si se conoce una cota para $\|f\|_\infty$ en lugar de una para $\|f\|_2$, gracias al lema 3.2.

Teorema 3.5. Sean $f \in H^\infty$ tal que $\|f\|_\infty \leq M$ para cierta $M > 0$ y satisfaciendo el resto de hipótesis del teorema 3.4. Supongamos que existe una base ortonormal $\{\phi_j(z)\}_{j=1}^J$ de V tal que $\|\phi_j\| \leq C$, para $1 \leq j \leq J$. Sea $F \in V \cap B_2(M)$ la solución del problema de minimización (3.4)-(3.5). Entonces se tiene la siguiente cota para cada $z \in D$,

$$|f(z) - F(z)| \leq \left(M \left(1 + C\sqrt{J} \right) \right)^{1-\omega(z)} \left(\frac{2M}{1-r} c_N \tau^N + \Lambda_N \left(\epsilon + \sqrt{N}(\epsilon + \rho_N) \right) \right)^{\omega(z)} \quad (3.12)$$

Demostración. De nuevo, se trata de acotar la diferencia entre las funciones f y F en el disco y en el intervalo I para posteriormente utilizar el teorema de las dos constantes vía el lema 3.5.b. En primer lugar, se tendrá que existen ciertas constantes $\gamma_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, J$ tales que

$$F(z) = \sum_{j=1}^J \gamma_j \phi_j(z).$$

Entonces, por la ortonormalidad de la base,

$$\sum_{j=1}^J |\gamma_j|^2 = \|F\|^2 \leq M^2.$$

Ahora, utilizando la cota anterior y el hecho de que las normas vectoriales J - dimensionales 1 y 2 son equivalentes y satisfacen $\|\cdot\|_1 \leq \sqrt{J} \|\cdot\|_2$, se tiene que

$$|h(z)| \leq M + |F(z)| \leq M + \sum_{j=1}^J |\gamma_j| C \leq M + CM\sqrt{J} \quad \text{para } z \in D.$$

Para acotar la diferencia en I , se puede seguir utilizando la cota (3.11), ya que $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty \leq M$. Se concluye la prueba utilizando estas cotas junto al lema mencionado previamente. \blacksquare

En la práctica, las cotas (3.10)-(3.12) se pueden mejorar eligiendo convenientemente los parámetros que intervienen en el enunciado de los teoremas. En los experimentos numéricos realizados en este trabajo se elige siempre como espacio vectorial de aproximación el de los *núcleos de Cauchy*, $V = \mathcal{S}_N$, y como distribución de nodos la de los *ceros de un polinomio de Chebyshev* adecuado, que corresponde al caso particular de los polinomios de Jacobi con $\alpha = \beta = -1/2$.

El valor de la constante de aproximación ρ_N ha sido estudiado para los espacios de núcleos de Cauchy \mathcal{S}_N y de polinomios \mathcal{P}_N en los trabajos [5] y [13], respectivamente. Para la primera se prueba que $\rho_N = 0$, mientras que para la segunda se prueba la siguiente cota

$$\rho_N \leq \frac{Mr^N}{\sqrt{1-r^2}},$$

razón por la que se ha elegido el primero como espacio vectorial de trabajo.

En cuanto a la constante de Lebesgue Λ_N , en [25, Cap. 14.4] se dan las siguientes acotaciones para el caso en que la distribución de nodos son los ceros del polinomio de Jacobi $P_N^{\alpha, \beta}$,

$$\Lambda_N = \begin{cases} O\left(N^{q+1/2}\right), & q = \max\{\alpha, \beta\} > -1/2, \\ O(\ln N), & q = -1/2. \end{cases}$$

El caso $q = -1/2$, que es el más favorable en este aspecto, corresponde a los polinomios de Chebyshev de primera especie. Los ceros de estos polinomios escalados en $[-r, r]$ se pueden calcular directamente como

$$z_n = -r \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{2n-1}{N}\right), \quad n = 1, \dots, N. \quad (3.13)$$

Además, la constante de Lebesgue satisface en este caso la acotación

$$\Lambda_N \leq 1 + \frac{2}{\pi} \ln N,$$

y la constante c_N admite una expresión mucho más sencilla,

$$\begin{aligned} c_N &= 4 \frac{\Gamma(3/2) \Gamma(1) \Gamma(N) \Gamma(N+1/2) (1+r)}{\Gamma(1/2) \Gamma(1) \Gamma(N+1/2) \Gamma(N) (1-r)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{4(1+r)}{1-r} \\ &= \frac{2(1+r)}{1-r}. \end{aligned}$$

Teniendo toda esta información en cuenta, en el siguiente corolario se da una versión simplificada de la cota (3.10) basada en elegir como número de nodos el primer entero N para el que

$$c_N \tau^N = \frac{2(1+r)}{1-r} \tau^N \leq \epsilon. \quad (3.14)$$

Hay que tener en cuenta que si los valores $w_n + \delta w_n$ se conocen con perturbaciones de tamaño ϵ , este orden de precisión será el máximo que se pueda exigir a los valores recuperados.

Corolario 3.6. Supongamos que $\alpha = \beta = -1/2$ y $\epsilon \leq M^* = 4M(1+r)/(1-r)^2$ en el teorema 3.4. Entonces, para $V = \mathcal{S}_N$, y

$$\xi = 1 + \frac{\ln(\epsilon/M^*)}{\ln \tau}, \quad N = \lceil \xi \rceil,$$

se tiene que, para $z \in D$,

$$|f(z) - F(z)| \leq (2M\gamma(z))^{1-\omega(z)} \epsilon^{\omega(z)} \left(1 + \left(\frac{2}{\pi} \ln N\right) (1 + \sqrt{N})\right)^{\omega(z)}. \quad (3.15)$$

También se puede utilizar la siguiente cota simplificada,

$$|f(z) - F(z)| \leq (2M\gamma(z))^{1-\omega(z)} (3N\epsilon)^{\omega(z)}, \quad (3.16)$$

para $z \in D$.

Demostración. Para derivar la primera cota, basta observar que el N escogido en el enunciado es precisamente el menor que satisface la condición (3.14). Una vez escogido, se escribe la cota (3.10) incorporando la información precedente a este resultado.

Para obtener la segunda, basta tener en cuenta las desigualdad $\ln x < \sqrt{x}$, para $x \leq 1$; $N \geq 2$, para acotar el último paréntesis en (3.15) como

$$\begin{aligned} \left(1 + \left(\frac{2}{\pi} \ln N\right) (1 + \sqrt{N})\right) &\leq \left(2 + \frac{2}{\pi} \ln N + \sqrt{N} \frac{2}{\pi} \ln N + \sqrt{N}\right) \\ &\leq N \left(1 + \frac{\sqrt{2} + 1}{\pi} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &\leq 3N. \end{aligned}$$

■

Respecto a las cotas (3.16) y (3.6) cabe hacer las siguientes observaciones. Aunque se elige el número de nodos N utilizado en la recuperación para que el término $c_N \tau^N$ sea menor que el error a priori ϵ , hay que notar que un incremento del número de nodos puede aumentar el error cometido, debido al crecimiento de los términos Λ_N , \sqrt{N} que aparecen en (3.10). Con esta elección de nodos aseguramos un orden de aproximación cuasióptimo, puesto que con una cantidad de nodos $N = O(|\ln \epsilon|)$ se consigue un orden de error

$$|f(z) - F(z)| \leq (2M\gamma(z))^{1-\omega(z)} O\left(\sqrt{|\ln \epsilon|} \ln |\ln \epsilon| \epsilon\right)^{\omega(z)}.$$

A pesar de que no se consigue el orden $O(\epsilon)$, que sería el óptimo dado que es del que partimos en los puntos que se utilizan para la aproximación, en la práctica ϵ está acotado por la precisión finita de la máquina y $\ln \epsilon$ se mantiene pequeño.

Capítulo 4

Problemas parabólicos regresivos

En este apartado se explica un método numérico con el que utilizar el algoritmo de recuperación holomorfa propuesto en el capítulo anterior para resolver problemas parabólicos regresivos. Como referencia del método numérico se puede consultar [18], mientras que para los detalles de la teoría de semigrupos de operadores y sus extensiones holomorfas se puede revisar [9, 21].

Para formular este problema se considera X un espacio de Banach complejo y $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ un operador no necesariamente acotado que es el generador infinitesimal de un semigrupo holomorfo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores lineales y acotados en X . En este contexto el *problema de Cauchy progresivo*

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), & t \geq 0, \\ u(0) = u_0 \in X, \end{cases}$$

esta bien puesto, y su solución es la dada por $u(t) = S(t)u_0, t \geq 0$. Sin embargo, nosotros estamos ahora interesados en resolver el *problema de Cauchy regresivo* (BCP, por sus siglas en inglés)

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), & 0 \geq t \geq T, \\ u(T) = u_T \in \mathcal{R}_T = \text{Im}(S(T)), \end{cases} \quad (4.1)$$

para ciertos $T > 0$ y u_T . El conjunto \mathcal{R}_T en el que puede tomarse el dato de Cauchy es la imagen del operador $S(T)$ para que pueda existir una solución. Estos problemas aparecen de forma natural en diferentes contextos. Por ejemplo, la difuminación de una imagen o su paso a través de una lente se pueden formular mediante una convolución, que se correspondería con el avance del semigrupo, de forma que el problema regresivo asociado consiste en recuperar la imagen anterior a la difuminación.

Aunque, como comprobaremos más adelante en el teorema 4.1, es cierto que el problema regresivo tiene solución única para un $u_T \in \mathcal{R}_T$ dado, en la práctica lo que se conoce realmente es una aproximación $u_T + \delta u_T \in X$, para la que se supone conocida una cota $\|\delta u_T\| \leq \delta$. Esto da lugar a dos dificultades prácticas en la resolución del problema:

- Si el operador A no es acotado, el dato perturbado $u_T + \delta u_T$ puede no pertenecer a \mathcal{R}_T . Esto contrasta con el caso acotado, para el que $S(t) = e^{At}$ y el semigrupo es, de hecho, un grupo de transformaciones.

- El error δu_T se puede propagar incontroladamente para $0 \leq t < T$, debido a que el espectro del operador A está contenido en el semiplano de parte real negativa.

La solución que plantearemos radica en avanzar en el tiempo la solución, esto es, resolver numéricamente el problema progresivo; para posteriormente aproximar la solución en tiempos previos al dato inicial mediante la recuperación holomorfa. Para solventar, al menos parcialmente, estas dificultades, se puede suponer que se conoce una información a priori sobre el tamaño de la solución, esto es, que existe $M_0 > 0$ tal que

$$\|u(0)\| \leq M_0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

La elección de esta constante depende del problema particular con el que se trabaje. En algunos casos puede obtenerse matemáticamente mientras que en otros casos el problema físico subyacente permite elegir un valor razonable de M_0 . Además, se puede suponer que el semigrupo admite una extensión holomorfa a un sector de la forma

$$\Sigma_\theta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| \leq \theta\}.$$

Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que existe una constante C_θ tal que

$$\|S(z)\| \leq C_\theta, \quad z \in \Sigma_\theta,$$

pues para ello basta asumir un cambio de la forma $A - \lambda I$ en su generador infinitesimal. Así, la cota a priori se puede extender al sector

$$\|u(z)\| \leq \|S(z)\| \|u(0)\| \leq C_\theta M_0 = M, \quad z \in \Sigma_\theta. \quad (4.2)$$

Esta hipótesis adicional permite establecer el siguiente teorema, que garantiza una continuidad de tipo Hölder en los errores para tiempos $0 < t < T$.

Teorema 4.1. Sean $u_1, u_2 : [0, T] \rightarrow X$ dos soluciones de la ecuación diferencial (4.1) y tales que se conoce una cota a priori $M > 0$ como en (4.2). Para $0 < \theta' < \theta < \pi/2$, sea

$$\Omega = \{z \notin T + \sigma_\theta : |\arg(z)| < \theta'\}$$

y sean Γ_1 la parte de la frontera de Ω que está en el sector $T + \Sigma_\theta$. y ω es la medida armónica de Γ_1 con respecto a Ω . Entonces, se tiene que

$$\|v_2(t) - v_1(t)\| \leq C_\theta^{\omega(t)} (2M)^{1-\omega(t)} \|v_2(T) - v_1(T)\|^{\omega(t)}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Demostración. Con vistas a aplicar el Teorema de las Dos Constantes 1.20 se acota la diferencia de las soluciones en la frontera del dominio. En primer lugar, puesto que $\Omega \subset \Sigma_\theta$ se tiene que para $z \in \Gamma_1$,

$$\|v_2(z) - v_1(z)\| = \|S(z - T)(v_2(T) - v_1(T))\| \leq M \|v_2(T) - v_1(T)\|.$$

Por otro lado, para $z \in \partial\Omega \setminus \Gamma_1$ se utiliza la cota a priori de las soluciones para dar

$$\|v_2(z) - v_1(z)\| \leq 2M.$$

Finalmente, utilizando el teorema mencionado con la medida armónica ω se concluye la prueba. ■

El teorema garantiza unicidad de soluciones en $0 < t < T$ para el problema regresivo, así como continuidad respecto del dato en tiempo $t = T$. Sin embargo, para $t = 0$ ocurre que $\omega(0) = 0$ y la cota (4.1) no ofrece ninguna información al llegar a este punto.

Para concluir esta primera sección, se explica en líneas generales el método numérico propuesto, cuyos detalles se irán desarrollando a lo largo del mismo. En primer lugar, se considera un espacio vectorial de dimensión finita X_h que permita trabajar numéricamente con el espacio de Banach X . Entonces, se realiza una integración temporal del problema de Cauchy progresivo que parte de $t = T$, para obtener aproximaciones a los valores de u en ciertos tiempos $t_1 < \dots < t_N$. Puesto que el semigrupo está definido en un sector del plano complejo Σ_θ , para obtener los valores de u en tiempos $0 < t < T$ sería deseable llevar a cabo una recuperación holomorfa, tal como la estudiada en el capítulo precedente, a cada una de las coordenadas de u en una base de X_h elegida. Es por esto que se utiliza una transformación conforme ψ que lleve el sector Σ_θ en el disco D , dominio en el que se ha estudiado previamente esta recuperación. De esta manera, eligiendo como puntos t_1, \dots, t_N los inversos por ψ de los nodos de Chebyshev en el disco, aquellos que daban lugar al mejor orden de recuperación, se podrán combinar las propiedades de convergencia y estabilidad del método de integración numérica y las del algoritmo de recuperación para obtener una cota del error cometido en los valores de u en tiempos $0 < t < T$.

Este algoritmo resulta ser bastante versátil, puesto que *puede aplicarse tanto a problemas lineales como no lineales* ya que solo es necesario disponer de un método numérico para integrar el problema directo. En este trabajo se ha aplicado a problemas lineales, puesto que el objetivo principal era implementar el algoritmo de recuperación de funciones holomorfas, pero en [18] se puede encontrar un ejemplo de aplicación a un problema no lineal cuyo comportamiento es similar. Además, aunque el método de recuperación holomorfa debe aplicarse en cada una de las componentes de la base de X_h , en la práctica se trata de resolver muchos problemas mínimo cuadráticos con la misma matriz. Por tanto, la parte más costosa del algoritmo que es la descomposición en valores singulares de la matriz del problema, solo ha de realizarse una vez.

Una transformación conforme

El problema de la recuperación holomorfa de una función se ha abordado en el capítulo anterior para el disco unidad por ser un dominio sencillo y con propiedades bien conocidas, señalándose que para trabajar en otro dominio se puede buscar una transformación conforme que lo lleve en dicho disco. En este caso debemos trabajar con subconjuntos del sector Σ_θ en el que está bien definido el semigrupo holomorfo en cuestión. En la siguiente proposición se recogen las propiedades de la transformación que utilizaremos, que envía el conjunto

$$\Sigma = \{z \in \Sigma_\theta : |z| \leq R\}$$

en el disco D .

Proposición 4.2. La aplicación $\psi : \Sigma \rightarrow D$ dada por

$$\psi(z) = \frac{a + \xi - \xi^{-1}}{a - \xi + \xi^{-1}}, \quad (4.3)$$

donde $\xi = (z/R)^\sigma$, $\sigma = \pi/(2\theta)$, $a = b(1-r)/(1+r)$, $b = (T/R)^\sigma - (T/R)^\sigma$; es una transformación conforme y biyectiva tal que $\psi(0) = -1$, $\psi(T) = -r$, $\psi(R) = 1$.

Además, para invertir la transformación y obtener $w = \psi^{-1}(z)$ se debe tomar

$$\xi = -\frac{1}{2}\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1}, \quad w = R\xi^{1/\sigma},$$

donde $\alpha = a(1-z)/(1+z)$.

Demostración. Se construye Ψ como composición de sucesivas transformaciones. En primer lugar, se toma $\xi = \psi_1(z) = (z/R)^\sigma$, que lleva el conjunto de partida en el semidisco $\{z \in D : \operatorname{Re} z \geq 0\}$.

A continuación, se utiliza $\psi_2(z) = z^{-1} - z$, otra transformación conforme que envía el segmento $[i, 0]$ en el $[-2i, -i\infty]$, el $[0, -i]$ en el $[i\infty, 2i]$ y el arco de la circunferencia unidad de parte real positiva en el segmento $[2i, -2i]$; es decir, el el borde del dominio resultante de la primera transformación se envía por la segunda en el eje imaginario. Además, el interior se envía en el semiplano de parte real positiva, por lo que $\psi_1 \circ \psi_2(\Sigma) = H^+$.

Finalmente, este semiplano se envía en el disco unidad mediante una transformación de Möbius. Para garantizar que $\psi(0) = -1$ y que $\psi(R) = 1$, debe ser de la forma $\psi_3(z) = (a-z)/(a+z)$, y puesto que se busca $\psi(T) = -r$, ha de elegirse a verificando

$$a \frac{1+r}{1-r} = (T/R)^\sigma - (T/R)^\sigma,$$

como se indica en el enunciado.

Para invertir la transformación, se debe resolver la ecuación

$$(z+1)\xi^2 + a(1-z)\xi - (1+z) = 0,$$

eligiendo la raíz positiva para que el número w esté en el conjunto ξ de partida. ■

Semidiscretización en espacio

Para integrar el problema abstracto de evolución 4.1 se utiliza el enfoque del método de líneas, que pasa por considerar una familia de espacios vectoriales normados de dimensión finita X_h , para $0 < h < \bar{h}$, con buenas propiedades de aproximación al espacio de Banach original X . Se denotan por $\|\cdot\|$ la norma de dichos espacios siempre que no haya lugar a confusión, por $P_h : X \rightarrow X_h$ a la proyección sobre el espacio de aproximación y por $A_h : X_h \rightarrow X_h$ a la aproximación del operador A . Las soluciones del problema de evolución original se aproximan por las del *problema semidiscreto*

$$\begin{cases} u'(t) = A_h u(t), & t \geq 0, \\ u(0) = u_{h,0} = P_h u_0 \in X_h. \end{cases}$$

Para integrar este problema se utiliza un método racional cuyas propiedades se describen más adelante. De cara a efectuar cálculos prácticos se eligen unas bases $\{\chi_{h,j}\}_{j=1}^{J(h)}$ para

cada X_h . A las bases se les exige como requisito adicional estar bien acondicionadas, en el sentido de que existen $k_*, k^* > 0$ tales que para cada $0 < h < \bar{h}$, $x_h \in X_h$ verificando

$$x_h = \sum_{j=1}^{J(h)} x_{h,j} \chi_{h,j},$$

se tiene que

$$k_* \max_{1 \leq j \leq J(h)} |x_{h,j}| \leq \|x_h\| \leq k^* \max_{1 \leq j \leq J(h)} |x_{h,j}|. \quad (4.4)$$

Los coeficientes de la expansión en la base correspondiente se denotan por

$$x_{h,j} = \langle x_h, \chi_{h,j} \rangle, \quad x_h \in X_h, \quad 1 \leq j \leq J(h).$$

Este planteamiento de la discretización permite englobar varias técnicas como elementos finitos, diferencias finitas y métodos espectrales.

Un método racional para la discretización en tiempo

Para la integración temporal de (4.4) se plantea la utilización de un método Runge-Kutta racional con función de estabilidad R , que sea una aproximación a la identidad de orden q . Para las definiciones y propiedades básicas de estos métodos y su estabilidad se puede consultar [7, 8].

Fijado un espacio X_h , se aproxima numéricamente la solución del problema semidiscreto en unos niveles de tiempo $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_L = \bar{t}$ correspondientes a avanzar en la integración con pasos variables $k_{l+1} = \tau_{l+1} - \tau_l \leq \bar{k}$, para un \bar{k} dado. Así, el método produce unas aproximaciones sucesivas $u_h^l \approx u_h(\tau_l)$ mediante

$$u_h^{l+1} = R(k_{l+1} A_h) u_h^l, \quad 0 \leq l \leq L-1.$$

En caso de que se parta de un dato inicial suficientemente regular $u_0 \in D((-A)^\nu)$ para un cierto $\nu > 0$ independiente de h , se asume que el método tiene orden q en tiempo y orden $\varphi(h)$ en espacio, siendo $\varphi : (0, \bar{h}] \rightarrow [0, \infty)$ una función verificando $\varphi(h) \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0^+$. Concretamente, existe una constante $C_d > 0$ tal que los errores de la aproximación numérica satisfacen

$$\|P_h u(\tau_l) - u_h^l\| \leq C_d (\|u_0\| + \|((-A)^\nu) u_0\|) (\varphi(h) + k^q), \quad 1 \leq l \leq L, \quad 0 < h \leq \bar{h}.$$

En el caso particular de este trabajo, en el que nuestro propósito es integrar el problema

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), & t \geq T, \\ u(T) = u_T \in X, \end{cases}$$

manejaremos una cota

$$\|P_h u(\tau_l) - u_h^l\| \leq C_p (\varphi(h) + k^q), \quad 1 \leq l \leq L, \quad 0 < h \leq \bar{h}, \quad (4.5)$$

en la que C_p depende del dato u_T . La regularidad del dato en tiempo T está garantizada por la holomorfía del semigrupo.

En realidad, las soluciones que se computan en la práctica parten de un dato perturbado $u_T + \delta u_T$. De cara al análisis de los errores, se denota por u_h^l a las aproximaciones numéricas que parten del dato u_T y por \bar{u}_h^l a las que parten del dato perturbado. Además, al utilizar el método para la integración regresiva es necesario obtener aproximaciones en ciertos tiempos t_1, t_2, \dots, t_n prescritos, que deben estar incluidos en los utilizados para la integración, esto es, $\tau_{l_n} = t_n$, para ciertos l_n con $1 \leq n \leq N$.

Para que el método resulte estable utilizando paso variable en la integración temporal, se requieren dos propiedades adicionales:

- Existe un paso máximo $\bar{k} > 0$, independiente de h , de tal manera que para pasos menores que este el espectro de kA_h no contiene ningún polo de $R(z)$. De esta manera, el operador $R(kA_h)$ es acotado en X_h para $0 < k < \bar{k}$, $0 < h \leq h_0$.
- Para $\bar{t} > 0$ existe una constante C_s independiente de h tal que

$$\left\| \prod_{l=1}^L R(k_l A_h) \right\| \leq C_s, \quad (4.6)$$

para cualquier secuencia finita $\{k_l\}$ de pasos variables con $0 < k_l < \bar{k}$, $1 \leq l \leq L$ y con $\sum_{l=1}^L k_l \leq \bar{t}$.

En la referencia [2] se prueba que los operadores A_h procedentes de discretizar un operador elíptico utilizando diferencias finitas o elementos finitos son uniformemente sectoriales en h . En [19], se prueba además que para un operador sectorial cuyo espectro esté contenido en un sector de la forma $\mathbb{C} \setminus \Sigma_\theta$, con $\Sigma_\theta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| \leq \theta\}$, y una función racional R cuya región de estabilidad contenga al espectro, es decir, que sea $A(\theta)$ -estable, la propiedad (4.6) se cumple.

El algoritmo para el problema regresivo

En síntesis de todo lo anterior, se trata de aproximar numéricamente las soluciones del problema de Cauchy regresivo,

$$\begin{cases} \bar{u}'(t) = A\bar{u}(t), & 0 \geq t \geq T, \\ \bar{u}(T) = u_T + \delta u_T \in \mathcal{R}_T, \end{cases} \quad (4.7)$$

para lo que se siguen los siguientes pasos:

1. Se integra numéricamente el problema para $t \geq T$, obteniéndose unos valores aproximados $\hat{u}_h^n \approx u(T + t_n)$, que incluyen a los tiempos $t_n = \psi^{-1}(z_n)$, siendo z_n los nodos de Chebyshev en el intervalo $[-r, r]$ y ψ la transformación conforme (4.3).
2. Para obtener los valores de la función en $0 \leq t \leq T$, se realiza una recuperación holomorfa, mediante el algoritmo explicado en el capítulo 2, de las funciones

$$f_{h,j}(z) = \langle P_h u(\psi^{-1}(z)), \chi_{h,j} \rangle, \quad z \in D, \quad 1 \leq j \leq J(h),$$

a partir de los valores aproximados

$$f_{h,j}(z_n) \approx \langle \hat{u}_h^n, \chi_{h,j} \rangle, \quad 1 \leq j \leq J(h).$$

Nótese que se debe realizar una recuperación por cada elemento de la base de X_h , pero todas tienen la misma matriz para el problema de mínimos cuadrados involucrado, lo que reduce de forma radical el tiempo de computación. Una vez obtenidas las funciones recuperadas $F_{h,j} : D \rightarrow \mathbb{C}$, el aproximante $U_h(t)$ a $P_h(t)$ se define como

$$P_h(t) \approx U_h(t) = \sum_{j=1}^{J(h)} F_{h,j}(\psi(t)) \chi_{h,j} \quad (4.8)$$

Las propiedades de aproximación del método se recogen en el siguiente teorema.

Teorema 4.3. Sea $u : [0, T] \rightarrow X$ la solución del problema (4.1) y $U_h : [0, T] \rightarrow X$ la solución numérica producida por el algoritmo descrito anteriormente. Entonces, para $0 \leq t \leq T$ se tiene que

$$\|P_h u(t) - U_h(t)\| \leq \left(\frac{k^*}{k_*}\right) (2\|P_h\|M\gamma(\psi(t)))^{1-\omega(t)} (3N\varepsilon)^{\omega(t)}, \quad (4.9)$$

donde k^* y k_* son las constantes en (4.4), ψ la transformación conforme (4.3) y

$$\varepsilon = C_p(\varphi(h) + k^p) + C_s\|P_h\|\delta.$$

Demostración. Fijado $1 \leq j \leq J(h)$, se tiene que para cada $z \in D$, por el buen acondicionamiento de la base de X_h ,

$$\begin{aligned} |f_{h,j}(z)| &\leq |\langle P_h u(\psi^{-1}(z)), \chi_{h,j} \rangle| \\ &\leq \frac{1}{k_*} \|P_h u(\psi^{-1}(z))\| \\ &\leq \frac{1}{k_*} \|P_h\| M. \end{aligned}$$

Gracias a la convergencia del método numérico (4.5) podemos acotar los valores aproximados como

$$\|P_h u(t_n) - u_h^{l_n}\| \leq C_p(\varphi(h) + k^q),$$

y ahora, por la estabilidad del método numérico (4.6) podemos acotar la diferencia entre dos soluciones con datos iniciales cercanos,

$$\begin{aligned} \|u_h^{l_n} - \hat{u}_h^n\| &= \|u_h^{l_n} - \bar{u}_h^{l_n}\| \\ &= \left\| \prod_{l=1}^L R(k_l A_h) P_h u_T - \prod_{l=1}^L R(k_l A_h) P_h (u_T + \delta u_T) \right\| \\ &= \left\| \prod_{l=1}^L R(k_l A_h) P_h (\delta u_T) \right\| \\ &= C_s \|P_h\| \delta. \end{aligned}$$

Combinando las dos desigualdades anteriores se tiene que

$$\begin{aligned}
|f_{h,j}(z_n) - \langle \hat{u}_h^n, \chi_{h,j} \rangle| &= |\langle P_h u(t_n) - \hat{u}_h^n, \chi_{h,j} \rangle| \\
&\leq \frac{1}{k_*} \|P_h U(t_n) - \hat{u}_h^n\| \\
&\leq \frac{1}{k_*} \left(\|P_h U(t_n) - u_h^{l_n}\| + \|u_h^{l_n} - \hat{u}_h^n\| \right) \\
&\leq \frac{1}{k_*} C_p (\varphi(h) + k^q) + \frac{1}{k_*} C_s \|P_h\| \delta \\
&= \frac{1}{k_*} \varepsilon.
\end{aligned}$$

A continuación, utilizando la cota (3.6) con $\epsilon = k_*^{-1} \varepsilon$ y $M = k_*^{-1} \|P_h\| M$ obtenemos, para $z \in D$,

$$|f_{h,j}(z) - F_{h,j}(z)| \leq k_*^{-1} (2 \|P_h\| M \gamma(\psi(t)))^{1-\omega(t)} (3N\varepsilon)^{\omega(t)}.$$

Finalmente, para $t \in \Sigma$, con $z = \psi(t)$, se tiene que

$$\|P_h u(t) - U_h(t)\| \leq k^* \sup_{1 \leq j \leq J(h)} |\langle P_h(t) - U_h(t), \chi_{h,j} \rangle| \leq k^* \sup_{1 \leq j \leq J(h)} |f_{h,j}(z) - F_{h,j}(z)|,$$

puesto que

$$P_h u(t) = \sum_{j=1}^{J(h)} f_{h,j}(z) \chi_{h,j}, \quad U_h(t) = \sum_{j=1}^{J(h)} F_{h,j}(z) \chi_{h,j},$$

lo que permite concluir la prueba. ■

Experimentos numéricos

En este apartado se exponen unos experimentos numéricos realizados con el objetivo de ilustrar las técnicas explicadas en los capítulos anteriores. Algunos códigos utilizados para producirlos se muestran en un apéndice al final del texto.

Al realizar el análisis del método se ha considerado un método racional para la integración temporal del problema. La razón es que esta clase de métodos son muy utilizados y tienen propiedades ampliamente estudiadas. En cambio, en los experimentos realizados se ha decidido utilizar la transformada discreta de Fourier para aproximar las soluciones de la ecuación del calor tanto en una como en dos dimensiones espaciales. Esta herramienta es particularmente apropiada para problemas lineales sencillos, aunque también es la base de muchos *métodos espectrales* de integración (ver por ejemplo [3]), que ofrecen una alternativa a las diferencias finitas y los elementos finitos en la discretización de problemas diferenciales. Por ello, se ha decidido utilizar este enfoque para completar la formación de los estudios de Máster, que ya cubren el estudio e implementación de los métodos racionales en varias asignaturas.

Experimento 1. La ecuación del calor unidimensional

El primer problema regresivo con el que se ha probado es

$$\begin{cases} u_t(t, x) = u_{xx}(t, x) & (t, x) \in [0, T] \times [0, 1], \\ u(0, T) = u_T + \delta u_T & \in X = \mathcal{C}_0[0, 1] \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 & t \in [0, T]. \end{cases}$$

El espacio de Banach correspondiente es $X = \mathcal{C}_0 [0, 1]$, el de las funciones $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $f(0) = f(1) = 0$, con la norma del máximo. Como parámetros se toman $r = 0,3$, $T = 1/8192$, $R = 4,1T$. Como dato inicial u_T se toma el valor en tiempo T de la solución exacta de la ecuación progresiva del calor con dato inicial $u_0(x) = \sin(25\pi x^2)$ y condiciones de frontera Dirichlet homogéneas. La razón por la que se elige esta función es que tiene oscilaciones cada vez más frecuentes cuando x se acerca a 1, por lo que resulta relativamente difícil de aproximar con pocos nodos. El tiempo T se elige pequeño para que la función no decaiga demasiado, aunque esto no supone un problema de interpretación, pues lo relevante a la hora de la recuperación es el ratio t/T . Para funciones con menos oscilaciones se observa un comportamiento mejor para valores grandes de T .

Puesto que no se tiene una expresión analítica para u_T , se realiza primeramente una integración del problema progresivo de 0 a T para tener una aproximación numérica a u_T . Para integrar la ecuación del calor se toma la transformada de Fourier discreta en senos del dato inicial (ver apéndice) y se avanzan los coeficientes hasta el tiempo deseado. Se utiliza una malla de $J = 2^8$ puntos para la discretización espacial, ya que para valores más grandes los errores se deben esencialmente a la recuperación y a la integración y no se obtienen mejoras. También se calcula la solución en tiempos $t = [T/16, T/8, T/4, T/2, 3T/4]$ para medir los errores realizados en la recuperación. En el tiempo T se añaden perturbaciones aleatorias en el intervalo $[-\delta, \delta]$ a los valores de la función, para diferentes valores del parámetro $\delta = 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}$. Por último, como indica el algoritmo planteado, se avanza hasta obtener aproximaciones en tiempos posteriores y se realiza la recuperación holomorfa.

El operador laplaciano Δ con las condiciones de contorno del problema tiene un espectro numerable contenido en el eje real, concretamente,

$$\sigma(\Delta) = \{-n^2 : n \in \mathbb{N}\}.$$

Los resultados en [21, Cap. 2] aseguran que el operador es el generador infinitesimal de un semigrupo holomorfo tal que el ángulo θ del sector Σ_θ correspondiente se puede tomar cualquier $\theta \in (0, \pi/2)$. En los experimentos realizados se elige $\theta = \pi/2, 2$. Tomando como referencia [18], el semigrupo extendido a este sector satisface $C_\theta = \sec^{1/2} \theta$, de manera que se toma

$$M = C_\theta \|u_0\|_\infty = \sec^{1/2} \theta.$$

De acuerdo con lo expuesto en secciones anteriores, para satisfacer la cota del problema se debe tomar $N = [9,82] = 9$.

En la figura 4.1 se comparan los errores cometidos en el proceso de integración regresiva a través de la recuperación holomorfa, mostrándose las gráficas de las funciones en los tiempos señalados así como los errores cometidos en la norma del máximo en escala semilogarítmica.

También es interesante analizar el comportamiento de los errores cuando se varían las perturbaciones introducidas. Hay que tener en cuenta que no se puede esperar que los errores obtenidos tras la recuperación holomorfa sean de un orden menor que las propias perturbaciones. Estos errores se muestran en la figura 4.2.

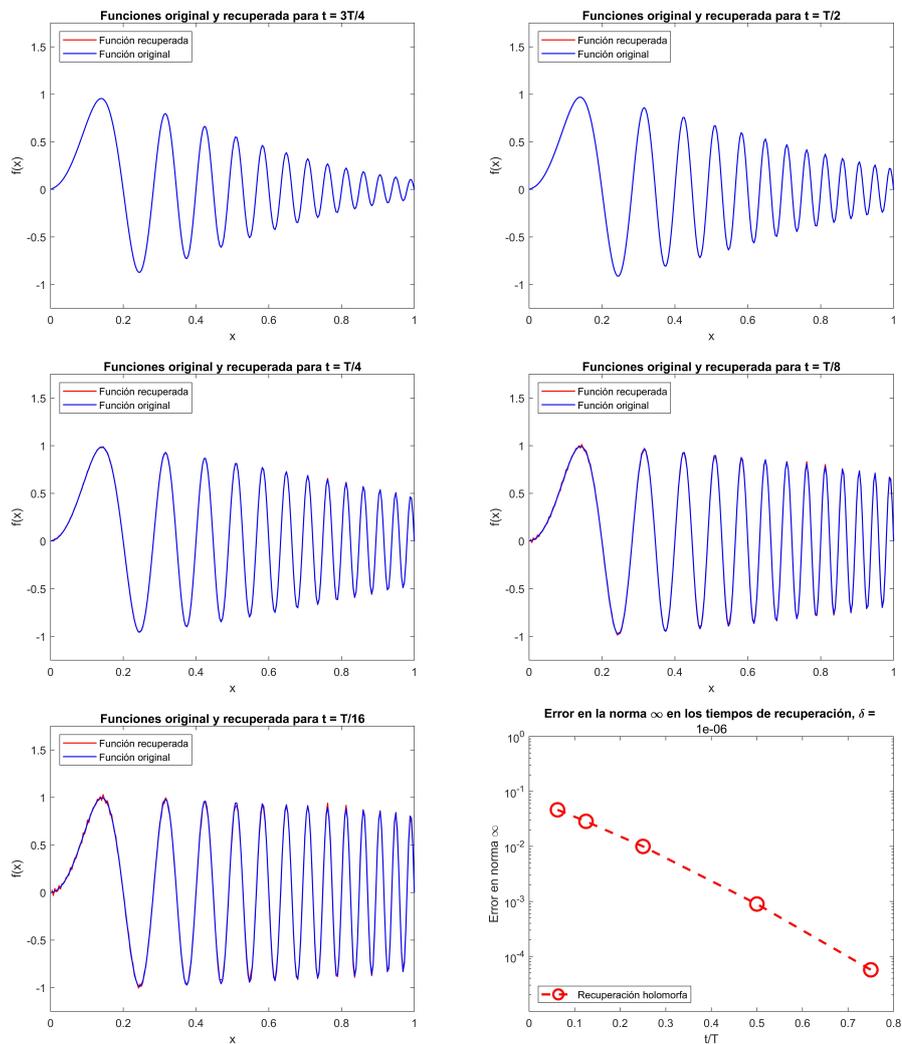


Figura 4.1: Se muestran la función original y la función recuperada para diferentes valores de tiempo y los errores que se cometen. Para tiempos cercanos a T las funciones son difícilmente distinguibles, aunque para $t = T/16$, el 93 % del tiempo retrocedido, ya se pueden apreciar errores considerables.

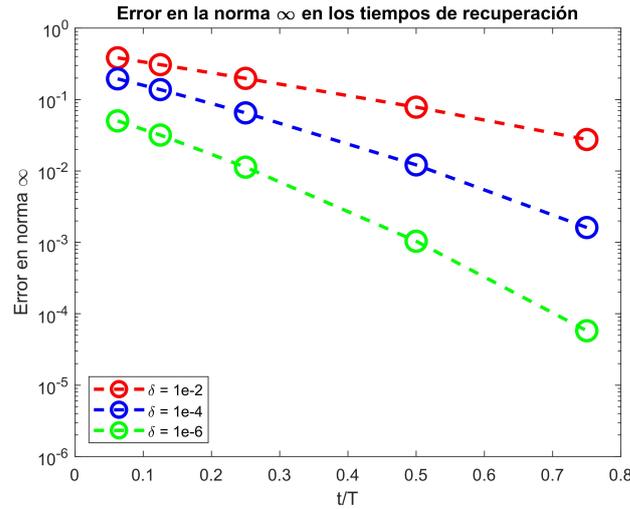


Figura 4.2: Se observa que los errores mínimos que se obtienen son similares a los tamaños de las perturbaciones. Para una fracción de tiempo recuperado t/T , el orden del error se divide aproximadamente por t/T , como cabía esperar.

Por último, mencionar que se ha realizado la integración progresiva directamente, esto es, resolver la ecuación para tiempos $0 < t < T$ partiendo del dato inicial perturbado en tiempo $t = T$. Se ha comprobado que los errores se amplifican dando lugar a errores relativos superiores a la unidad.

Experimento 2. La ecuación del calor bidimensional

El segundo problema regresivo estudiado es

$$\begin{cases} u_t(t, x, y) = \Delta u(t, x, y) & (t, x) \in [0, T] \times [0, 1], \\ u(0, T) = u_T + \delta u_T & \in X = \mathcal{C}_0([0, 1] \times [0, 1]) \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 & t \in [0, T]. \end{cases}$$

Como parámetros se toman $r = 0, 3$, $T = 1/4$, $R = 4, 1T$. La elección de una T diferente se deba a que como dato inicial u_T se toma el valor en tiempo T de la solución exacta de la ecuación progresiva del calor con dato inicial $u_0(x, y) = (x^2 - 1)^2(y^2 - 1)^2$ y condiciones de frontera Dirichlet homogéneas. En este caso también se ha probado, entre otras, con una función del tipo

$$u_0(x, y) = \text{sen}(25\pi x^2) \text{sen}(25\pi y^2)$$

en el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$, con resultados similares a los del primer experimento. El resto de condiciones son similares, con la salvedad de que ahora se deben realizar dos transformaciones discretas de Fourier, una por filas y otra por columnas; esto es, se hace la transformada discreta en la variable x y en la y , para obtener los coeficientes correspondientes. Una vez hecho esto se realiza el experimento siguiendo los mismos pasos. En la figura siguiente se muestran los errores obtenidos para diferentes valores de la perturbación.

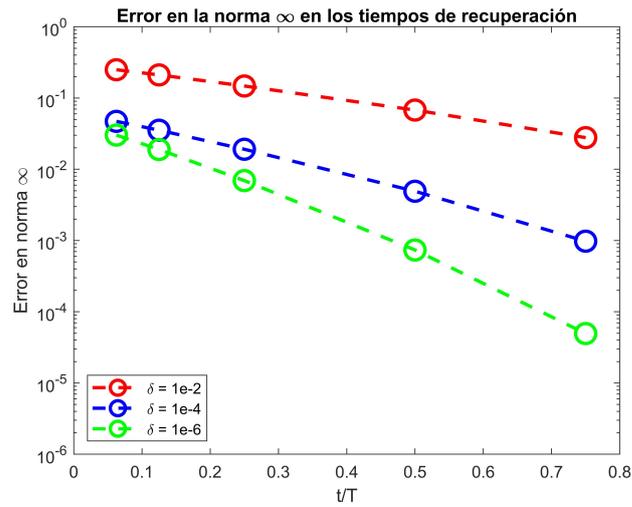
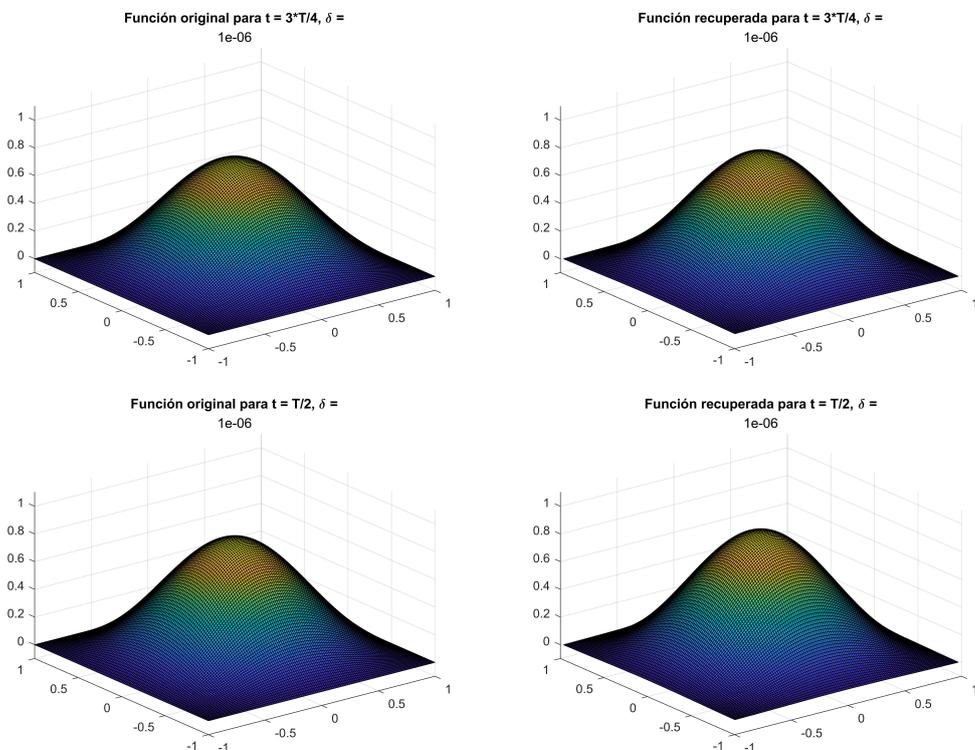
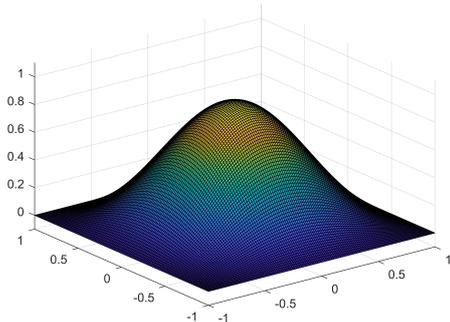


Figura 4.3: Los errores mínimos que se obtienen vuelven a ser similares a los tamaños de las perturbaciones.

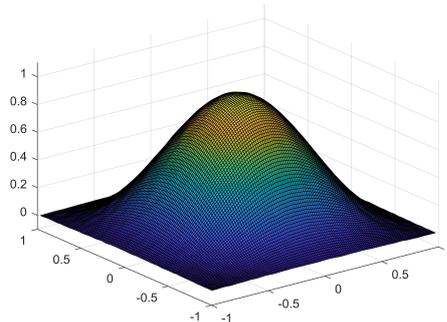
Finalmente, se muestran algunas gráficas de las funciones originales y recuperadas en diferentes tiempos para un valor de las perturbaciones introducidas $\delta = 1e - 6$.



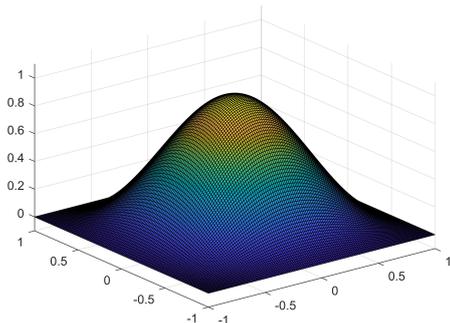
Función original para $t = T/4$, $\delta = 1e-06$



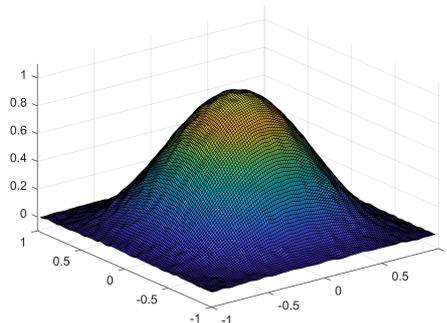
Función recuperada para $t = T/4$, $\delta = 1e-06$



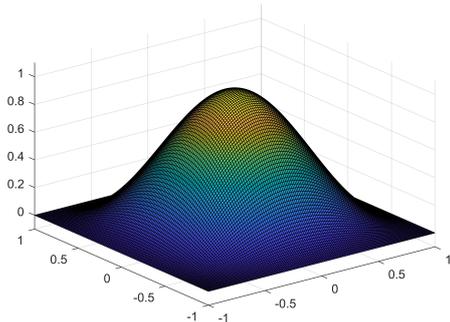
Función original para $t = T/8$, $\delta = 1e-06$



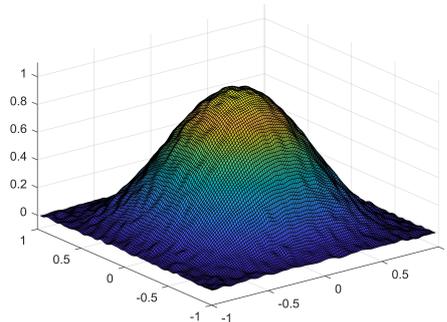
Función recuperada para $t = T/8$, $\delta = 1e-06$



Función original para $t = T/16$, $\delta = 1e-06$



Función recuperada para $t = T/16$, $\delta = 1e-06$



Apéndice A

Códigos de Matlab

Problema regresivo para la ecuación del calor 1D

En este script se muestra el empleo del algoritmo descrito en el capítulo 3 para la resolución de la ecuación del calor regresiva mediante la recuperación holomorfa. Para la discretización en espacio se utiliza la transformada de Fourier discreta, lo que permite avanzar la solución en tiempo de forma sencilla.

```
% Recovery holomorfo de la ecuacion del calor

function [c] = RecoveryCalorfft()
% Introduzco los valores de los parametros
theta = pi/2.2;
r = 0.3;
M = (sec(theta))^0.5;
d = 1e-9;
N = Nodes(r,M,d);

% Discretizacion en espacio.
J = 2^8+1;
T = 1/8192;
R = 4.1*T;

% Funcion en el instante que inicia la integracion. La funcion tiene que
% verificar f(0) = f(1) = 0.
x = linspace(0,1,J);
f = @(z) sin(25*pi*z.^2);
% f = @(z) sin(6*pi*z);
% f = @(z) (z.^2-z);
% f = @(z) sin(6*pi*z)/(5-4*cos(z))
u0 = f(x);

% Nodos de Chebyshev llevados al sector a traves de la transformacion
% conforme
sc = -r*cos((2*[1:N]-1)*pi/(2*N))';
sigma = pi/(2*theta);
b = (T/R)^(-sigma) - (T/R)^(sigma);
a = b*(1-r)/(1+r);
a2 = sc + 1;
a1 = a*(1-sc);
tc = (-a1 + sqrt(a1.*a1 + 4*a2.*a2))./(2*a2);
tc = R*(tc.^(1/sigma));

% Solucion utilizando fft
te = T*[1/16, 1/8, 1/4, 1/2, 3/4]';
k = length(te);
t = [te; T];
```

```

cs = zeros(J-2,k+1+N);
cs(:,1) = analysisfd(u0,0,1,J-1,'S');
cs(:,1:k+1) = cs(:,1).*exp(-([1:J-2].^2)'.*pi^2*t');
aux = synthesisfd(cs(:,k+1),J-1,'s');
cs(:,k+1) = aux(2:end-1) %+ d*(2*rand(J-2,1)-1);
cs(:,k+1) = analysisfd([0;cs(:,k+1);0],0,1,J-1,'S');
cs(:,k+2:end) = cs(:,k+1).*exp(-([1:J-2].^2)'.*pi^2*(tc-T)');
v = cs(:,k+1).*exp(-([1:J-2].^2)'.*pi^2*(te-T)');
u = zeros(J,k+N+1);
for i = 1:k+N+1
    u(:,i) = synthesisfd(cs(:,i),J-1,'s');
end
for i = 1:k
    aux = synthesisfd(v(:,i),J-1,'s');
    v(:,i) = aux(2:end-1);
end

%Se hace la recuperacion de la funcion. Hay que hacer J problemas ls con
%la misma matriz; solo se factoriza una vez.

[Q,s,P] = svdbase(sc);

c = zeros(N,J-2);
for i = 2:J-1
    c(:,i-1) = restrictls(Q,s,P,u(i,end-N+1:end),M);
end

%Se evaluan los errores en los tiempo te. Para ello hay que llevarlos
%primeramente al disco mediante la transformacion conforme.
se = (te/R).^(sigma);
se = (a + se -se.^(-1))./(a - se + se.^(-1));
A = evaluarbase(sc,se);
fnum = A*c;

```

Problema regresivo para la ecuación del calor 2D

En este caso se generaliza el programa anterior para poder trabajar en un dominio espacial rectangular.

```

%Introduzco los valores de los parametros
theta = pi/2.2;
r = 0.3;
M = 1;
%delta = 1e-4;
N = Nodes(r, M, delta);

%Discretizacion en espacio.
%Las coordenadas _1 van para las filas y las _2 para las columnas
x1 = -1; y1 = 1; x2 = -1; y2 = 1;
J1 = 2^8+1;
J2 = 2^8+1;
T = 1/8192;
R = 4.1*T;

%Funcion en el instante que inicia la integracion. La funcion tiene que
%verificar f(frontera) = 0.
xx1 = linspace(x1,y1,J1);
xx2 = linspace(x2,y2,J2);
%f = @(x,y) sin(3*pi*(x+1)).*sin(3*pi*(y+1));
%f = @(x,y) sin(25*pi*(x-1).^2).*sin(25*pi*(y-1).^2);
f = @(x,y) (x.^2 -1).^2.*(y.^2-1).^2;
u0 = f(xx1,xx2');

%Nodos de Chebyshev llevados al sector a traves de la transformacion

```

```

% conforme
sc = -r*cos((2*[1:N]-1)*pi/(2*N))';
sigma = pi/(2*theta);
b = (T/R)^(-sigma) - (T/R)^(sigma);
a = b*(1-r)/(1+r);
a2 = sc + 1;
% a0 = -a2
a1 = a*(1-sc);
tc = (-a1 + sqrt(a1.*a1 + 4*a2.*a2))./(2*a2);
tc = R*(tc.^(1/sigma));

% Solucion utilizando fft
te = T*[1/16, 1/8, 1/4, 1/2, 3/4]';
k = length(te);
t = [te; T; tc];
n = length(t);
cs = analysis2D(u0,x1,y1,x2,y2);
U = zeros(J1,J2,N);
mod = @(z) exp(-pi^2*(([1:J1-2]'/(y2-x2)).^2 + ([1:J2-2]/(y1-x1)).^2)*z);
u = zeros(J1,J2,k+1);

for j = 1:k+1
    u(2:end-1,2:end-1,j) = cs.*mod(t(j));
    u(:, :, j) = synthesis2D(u(:, :, j));
end
u(:, :, end) = u(:, :, end) + delta*(2*rand(J1,J2)-1);
cs = analysis2D(u(:, :, end),x1,y1,x2,y2);
for j = 1:N
    U(2:end-1,2:end-1,j) = cs.*mod(tc(j)-T);
    U(:, :, j) = synthesis2D(U(:, :, j));
end
% Integracion regresiva
v = zeros(J1,J2,k);
for j = 1:k
    v(2:end-1,2:end-1,j) = cs.*mod((te(j)-T));
    v(:, :, j) = synthesis2D(v(:, :, j));
end

% Se hace la recuperacion de la funcion. Hay que hacer J1*J2 problemas ls con
% la misma matriz; solo se factoriza una vez.

[Q,s,P] = svdbase(sc);

c = zeros(J1-2,J2-2,N);

for i = 1:J1-2
    for j = 1:J2-2
        c(i,j,:) = restrictls(Q,s,P,U(i+1,j+1,:),M);
    end
end

% Se evaluan los errores en los tiempo te. Para ello hay que llevarlos
% primeramente al disco mediante la transformacion conforme.
se = (te/R).^(sigma);
se = (a + se - se.^(-1))./(a - se + se.^(-1));
A = evaluarbase(sc,se);

fnum = permute(c,[3,2,1]);
fnum = pagetimes(A,fnum);
fnum = permute(fnum,[3,2,1]);

....

function [cs] = analysis2D(u0,x1,y1,x2,y2)
    [D1,D2] = size(u0);
    cs = zeros(D1-2,D2-2);
    for w=1:D1-2
        cs(w,:) = analysisfd(u0(w+1,:),x2,y2,D2-1,'S');
    end

```

```

    end
    for w=1:D2-2
        cs(:,w) = analysisfd([0;cs(:,w);0],x1,y1,D1-1,'S');
    end
end

function [U] = synthesis2D(U)
    [D1,D2] = size(U);
    for w=1:D2-2
        U(:,w+1) = synthesisfd(U(2:end-1,w+1),D1-1,'S');
    end
    for w=1:D1-2
        U(w+1,:) = synthesisfd(U(w+1,2:end-1),D2-1,'S');
    end
end

```

Subrutinas del algoritmo de recuperación.

En los códigos anteriores se llama a utilizar los siguientes programas:

- **Nodes.** Función auxiliar que calcula el número de nodos propuesto en las hipótesis del teorema 4.3.
- **evaluarbase.** Función que forma una matriz cuya columna i -ésima consta de las evaluaciones de la base ortogonal de núcleos de Cauchy correspondiente a unos nodos z_n en los valores w_j .
- **svdbase.** Este programa devuelve la descomposición en valores singulares de la matriz formada por la función *evaluarbase* con los valores z_n como nodos y como valores de evaluación.
- **restrictls.** Esta función resuelve el problema lineal de mínimos cuadrados con restricciones para la matriz y el término independiente que se les pasa como argumento.
- **analysisfd.** La función devuelve los coeficientes correspondientes al desarrollo en serie de senos discreto de una función, cuyos valores se toman como argumento. Los otros parámetros introducidos especifican la ventana de trabajo, el número de nodos y el tipo de desarrollo realizado.
- **synthesisfd.** Función inversa de la anterior. A partir de los términos del desarrollo en serie, computa los valores de la función.

Bibliografía

- [1] R. B. Ash, W. P. Novinger, *Complex Variables*, Dover (2007).
- [2] N. Bakaev, T. Vidar, L. B. Wahlbin, *Maximum-norm estimates for resolvents of elliptic finite element operators*, *Math. Comput.*, 72 (2003), 1597-1610.
- [3] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, T. A. Zang, *Spectral methods: fundamentals in single domains*, Springer Science and Business Media (2007).
- [4] G. B. Folland, *Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications*, Wiley Interscience (1999).
- [5] M. Golomb, *Interpolation operators as optimal recovery schemes for classes of analytic functions, en Optimal estimation in approximation theory, 93-138*, Springer (1977).
- [6] G. H. Golub, C. F. Van Loan, *Matrix computations*, JHU press (2013).
- [7] E. Hairer, S. P. Norsett, G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems.*, Springer (1993).
- [8] E. Hairer, G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems.*, Springer (1996).
- [9] E. Hille, R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, Vol. 31. American Mathematical Society (1996).
- [10] F. John, *Partial differential equations*, Springer (1991).
- [11] Y. Katznelson, *An introduction to harmonic analysis*, Cambridge University Press (2004).
- [12] D. E. Marshall, *An elementary proof of the Pick-Nevanlinna interpolation theorem*, *The Mich. Math. J.*, 21 (1975), 219-223.
- [13] K. Miller, *Least squares methods for ill-posed problems with a prescribed bound*, *SIAM J. Math. Anal.*, 1 (1970), 52-74.
- [14] D. Mitrea, *Distributions, Partial Differential Equations and Harmonic Analysis*, Springer, (2018).
- [15] K. Y. Osipenko. *Best approximation of analytic functions from information about their values at a finite number of points*. *Math. Notes*, 19 (1976), 17-23.

-
- [16] B. Nagy, Sz, A. Koranyi, *Relations d'un problème de Nevanlinna et Pick avec la théorie des opérateurs de l'espace hilbertien*, Acta Math. Hung., 7.3 (1956), 295-303.
- [17] J. M. Marbán, C. Palencia, *On the numerical recovery of a holomorphic mapping from a finite set of approximate values*, Numer. Math. 91, (2002), 57-75.
- [18] J. M. Marbán, C. Palencia, *A new numerical method for backward parabolic problems in the maximum-norm setting*, SIAM J. Numer. Anal. 40 (2002), 1405-1420.
- [19] C. Palencia, *On the stability of variable stepsize rational approximations of holomorphic semigroups*, Math. Comput., 62 (1994), 93-103.
- [20] J. R. Partington, *Interpolation, identification, and sampling*, Oxford University Press (1997).
- [21] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Vol. 44. Springer Science and Business Media (2012).
- [22] T. Ransford, *Potential theory in the complex plane*, Cambridge University Press (1995).
- [23] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill (1987).
- [24] D. Sarason, *Generalized interpolation in H^∞* , Trans. Am. Math. Soc. 127 (1967), 179-203.
- [25] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, AMS Colloquium Publications Vol. 23, Providence RI (1991).
- [26] D. S. Watkins, *Fundamentals of matrix computations*, Vol. 64, John Wiley and Sons (2004).