



UNIVERSIDAD DE VALLADOLID
FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER
MÁSTER EN MATEMÁTICAS

**MÉTODOS DINÁMICOS
PARA EL ESTUDIO DE TRANSICIONES CRÍTICAS
EN SISTEMAS COMPLEJOS
DE LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA**

Autor: Jesús Dueñas Pamplona

Tutor: Rafael Obaya García

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Valladolid

Índice general

1. Introducción	3
2. Preliminares	7
2.1. Desigualdad de Gronwall	7
2.2. Espacios de funciones	8
2.2.1. Espacios de funciones continuas	8
2.2.2. Espacios de funciones integrables	12
2.3. Dinámica no autónoma	12
3. Dicotomías exponenciales	15
3.1. Definiciones y propiedades	15
3.2. Soluciones hiperbólicas y persistencia	19
4. Puntos de no retorno	27
4.1. Marco de trabajo para estudiar puntos de no retorno	27
4.2. Existencia de atractor pullback local	30
4.3. Rastreo de la curva de equilibrios estables	35
4.4. Clasificación de algunos puntos de no retorno	42
5. Ecuaciones diferenciales de Carathéodory	43
5.1. Definiciones y resultados fundamentales	43
5.2. Transiciones constantes a trozos	46
5.3. Topologías de continuidad para subfamilias de $\mathcal{LC}(\mathbb{R}^n)$	47
5.4. Existencia y unicidad de atractor pullback local	50
5.5. Rastreo de la curva de equilibrios estables	55
5.6. Rastreo de puntos finales para velocidades altas	58
5.7. Persistencia en c del rastreo de puntos finales	60
6. Experimentos numéricos	63
6.1. Un primer ejemplo	63
6.2. Par atractor-repulsor cuadrático	66
6.3. Otros tipos de puntos de no retorno	71
6.4. Una fuerza de rango finito	72
7. Rastreo por pseudo-órbitas	75
7.1. Resultados previos	75
7.2. Pseudo-órbitas y rastreo	78
7.3. Ejemplo con una bifurcación de tipo pitchfork	81

8. Aplicaciones	83
8.1. Modelo ecológico de hervíboros y plantas	83
8.2. Modelo climatológico de Fraedrich	88
Bibliografía	93

Capítulo 1

Introducción

En las últimas décadas, la complejidad se ha convertido en un interrogante fundamental en multitud de ámbitos de la ciencia moderna. Investigaciones tan dispares como el estudio de la evolución de un arrecife de coral o del desarrollo de sociedades modernas se han mostrado marcados por variedad de fenómenos emergentes, los cuales presentan la necesidad de un marco teórico sólido que permita comprender los mecanismos que los producen. En general, los sistemas cuyo comportamiento global se aleja del que cabría esperar de sus componentes por separado, es decir, en los que las interacciones juegan un papel dominante, son llamados habitualmente *sistemas complejos*. El interés por este tipo de sistemas es creciente en los últimos años en diversas ramas de la ciencia, desde la termodinámica hasta la climatología, pasando por las finanzas o la ecología.

En el estudio de una amplia gama de sistemas, la hipótesis de que la respuesta al cambio en factores externos sea predecible y gradual es aceptable. Sin embargo, algunos sistemas complejos pueden responder con grandes cambios a estímulos externos de pequeña magnitud. Estos fenómenos son denominados *transiciones críticas* o *puntos de no retorno* (en inglés *tipping points*) y es natural que sean una fuente de preocupación en variedad de ramas de las ciencias aplicadas [13, 28, 29, 30], en la medida en que la desertización de un ecosistema, un terremoto o el ocaso de una civilización pueden condicionar profundamente el desarrollo de la vida humana en nuestro planeta. La comprensión profunda de estos fenómenos conduciría en último término al desarrollo de herramientas de detección temprana y mecanismos de actuación para revertir estas tendencias.

En general, el marco matemático que usaremos para el tratamiento de este problema serán unos estados inicial y final en los que la evolución del sistema venga descrita por un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias y una serie de estados intermedios a través de los cuales se lleva a cabo la transición. Ambos dos estados, inicial y final, van a venir dados por distintos valores de un parámetro en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con dependencia paramétrica. Los estados intermedios vendrán dados por un intervalo cerrado y acotado de valores del parámetro que contenga al inicial y al final. En este marco, dada una transición, es decir, una forma de variar el parámetro con el tiempo desde el valor que representa el estado inicial al que representa el estado final, se van a estudiar propiedades cualitativas de la trayectoria, que puede estar globalmente definida o no, y que representa el comportamiento del sistema a lo largo de la transición: el *atractor pullback local*.

En los últimos años se ha producido un avance considerable en el desarrollo de una teoría matemática capaz de servir de marco para el estudio de este tipo de transiciones [2, 17, 18, 23]. En [3], Ashwin et al. clasifican ciertos tipos de puntos de no retorno en función de la naturaleza matemática del mecanismo que los produce, pudiendo así distinguir puntos de no retorno por velocidad de transición (*rate-induced tipping* o *R-tipping*), puntos de no retorno por bifurcación (*bifurcation tipping* o *B-tipping*) y puntos de no retorno por ruido (*noise tipping* o *N-tipping*). La formalización de algunos de estos conceptos es introducida por Ashwin et al. [2], y será uno de los trabajos principales cuyos resultados abordaremos en esta memoria. Por un lado, los puntos de no retorno por velocidad de transición consisten en la pérdida del seguimiento de una curva de equilibrios estables autónomos para ciertas velocidades de transición, por otro, los puntos de no retorno por bifurcación representan el paso del sistema por algún estado intermedio que impide la evolución hacia el estado buscado en el futuro. Los puntos de no retorno por velocidad de transición, aunque no lo precisaremos más, pueden ser entendidos como una verdadera bifurcación no autónoma, en la que el cambio en la velocidad de transición cambia la estructura de las soluciones en el entorno del atractor pullback local. Finalmente, los puntos de no retorno por ruido están producidos por pequeñas perturbaciones aleatorias de las órbitas y corresponden al ámbito de las ecuaciones diferenciales estocásticas.

En un trabajo reciente, Alkhayuon et al. [1] introducen los puntos de no retorno dependientes de la fase para ciclos estables (*phase tipping* o *P-tipping*), que pueden ser totales o parciales dependiendo de si ocurren para todos los posibles valores de la fase de la órbita periódica inicial o sólo para algunos de ellos. Todos estos resultados tratan sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias intrínsecamente autónomos en los que la dependencia temporal es introducida únicamente por la transición.

En [2], Ashwin et al. aportan condiciones suficientes para que haya o no haya puntos de no retorno por velocidad de transición en sistemas unidimensionales en términos de los dominios de atracción de los equilibrios autónomos exponencialmente estables. Más tarde, Kiers et al. [16, 18] comprueban que estas condiciones no son suficientes en sistemas multidimensionales y aportan una condición suficiente alternativa, aunque más compleja. Además, Kiers [16, 17] ha dado definiciones de puntos de no retorno por velocidad de transición para sistemas dinámicos discretos y ha estudiado condiciones bajo las cuales suceden o no. Los puntos de no retorno inducidos por velocidad de transición también han sido estudiados en el marco de sistemas dinámicos aleatorios [14]. Por otro lado, Longo et al. [21] sientan las bases para una teoría para sistemas intrínsecamente no autónomos con dinámica asintótica.

En esta memoria se presentarán parte de los resultados obtenidos en estos avances, en particular los concernientes a puntos de no retorno para equilibrios unipuntuales en ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas producidos por velocidad de transición y por bifurcación. Aunque los sistemas que se traten sean intrínsecamente autónomos, como se ha mencionado antes, el estudio de transiciones se corresponde con la adición de variación temporal en uno o varios de los parámetros de la ecuación, por lo que las ecuaciones que rigen las transiciones son ecuaciones no autónomas asintóticamente autónomas. Aunque no serán los métodos dinámicos que se utilicen a lo largo de este trabajo, es destacable que este tipo de ecuaciones con dinámica asintótica admiten una compactificación temporal que permite recuperar la estructura de flujo sobre un espacio de fases algo más complicado que el original. Esa línea, así como la incorporación de herramientas de teoría de bifurcación no autónoma y de teoría de control podrían ser futuras líneas de desarrollo interesantes para este tema.

A continuación, describimos brevemente la estructura y distribución de contenidos de la presente memoria. En el Capítulo 2 se presentan una serie de resultados preliminares necesarios para el desarrollo de la teoría posterior, siendo de especial interés la Sección 2.2.1, que introduce los espacios de funciones que serán necesarios para desarrollar los capítulos siguientes. Los espacios de funciones continuas servirán para el desarrollo de la teoría del Capítulo 4 mientras que los espacios de funciones localmente integrables tendrán su relevancia en el Capítulo 5. En el Capítulo 3 se introduce el concepto de dicotomía exponencial, una generalización adecuada del concepto de matriz hiperbólica al marco de las ecuaciones diferenciales no autónomas, y las soluciones hiperbólicas, generalización del concepto de punto de equilibrio hiperbólico. Los resultados clásicos de persistencia de dicotomías exponenciales y soluciones hiperbólicas [8, 10] que se presentan suponen las herramientas fundamentales con las que construir los resultados de transiciones críticas en los capítulos siguientes.

El Capítulo 4 presenta la teoría fundamental de rastreo de curvas de equilibrios asintóticamente estables siguiendo fundamentalmente [2], utilizando funciones de transición suaves. Para ello, se introduce en primer lugar el concepto de atractor pullback local, y en el Teorema 4.2.5 se demuestra su existencia y unicidad en el tipo de sistemas que se quiere tratar. En este caso el atractor pullback local es una solución que representa el comportamiento físico del sistema a lo largo de la transición. En los casos en los que haya rastreo de los puntos finales será, de hecho, una solución globalmente definida y, además, una solución hiperbólica. El Teorema 4.3.5 demuestra que, de hecho, el atractor pullback local puede rastrear a una proximidad arbitraria una curva de equilibrios asintóticamente estables para velocidades de transición suficientemente bajas, es decir, que si en el camino de equilibrios estables del sistema autónomo para los distintos valores del parámetro que son atravesados en la transición no hay puntos de bifurcación, la disminución de la velocidad de transición garantiza el rastreo. Este tipo de rastreo de una curva de puntos asintóticamente estables sirve de herramienta para asegurar el rastreo de los puntos finales, que es, en definitiva, el objetivo en el estudio de este tipo de sistemas. En función de este resultado sobre rastreo se enuncia de forma clara lo que son los puntos de no retorno por velocidad de transición y por bifurcación. El concepto de punto de no retorno (*tipping*) se presenta en cierta forma como el concepto antagónico al de rastreo de la curva de equilibrios.

En el Capítulo 5 se tratan resultados similares a los del capítulo anterior pero una clase de transiciones de naturaleza más general. Se consideran transiciones constantes a trozos, es decir, en las cuales se supone que el sistema atraviesa una cantidad numerable de estados intermedios cuya dinámica intrínseca es autónoma entre el estado inicial y el final. El marco para tratar este problema es el de las ecuaciones diferenciales de Carathéodory [4], consiguiéndose resultados de rastreo de las mismas características que los del capítulo anterior. Sin embargo, en este capítulo se presentan también otros resultados con un enfoque radicalmente distinto: gracias a los resultados de [24] sobre topologías de continuidad para ecuaciones de Carathéodory, se presenta el Teorema 5.6.2 de rastreo para velocidades suficientemente altas. Este teorema da un criterio preciso que garantiza la existencia de una velocidad a partir de la cual hay rastreo de los puntos finales de la curva de equilibrios. Con estos mismos argumentos se probará que el rastreo de puntos finales es persistente ante pequeñas modificaciones en el valor de la velocidad de transición. El enfoque que se sigue es el mismo que [23] propone para una clase de ecuaciones diferenciales escalares intrínsecamente no autónomas.

En el Capítulo 6 se presentan una serie de experimentos numéricos que ilustran los resultados de los dos capítulos anteriores, incluyendo situaciones de no retorno y situaciones de rastreo, tanto a velocidades bajas como altas. Se presentan ejemplos tanto de transiciones continuas como constantes a trozos. Además, se presentan algunos ejemplos de no retorno que manifiestan la variedad de situaciones que se pueden presentar y las dificultades que surgen al intentar dar una clasificación completa de estos fenómenos. En el Capítulo 7 se introduce una nueva forma de rastreo de una curva de equilibrios estables propuesta por [2]: las pseudo-órbitas, que consisten en funciones que tienen una cantidad finita de discontinuidades suficientemente pequeñas y que son soluciones de la ecuación diferencial fuera de esas discontinuidades. El uso que se da a las pseudo-órbitas en dicho artículo es novedoso, ya que se aleja de las dos aplicaciones clásicas que habían tenido: la caracterización de los conjuntos ω -límite a través de la propiedad de recurrencia por cadenas [5, 6, 12, 25] y su uso en sistemas hiperbólicos [15]. El añadido al problema de los puntos de no retorno que aportan las pseudo-órbitas respecto de las soluciones clásicas o en sentido generalizado de los capítulos anteriores es que permiten rastrear curvas de equilibrios estables que incluyen puntos de bifurcación, pese a que se pierde la unicidad de soluciones.

Para acabar, el Capítulo 8 recoge dos modelos [3, 26], uno proveniente de la ecología y el otro de la meteorología, en los que se encuentran puntos de no retorno de los dos tipos que se tratan en esta memoria: por velocidad de transición y por bifurcación. La ocurrencia de puntos de no retorno por velocidad de transición puede resultar especialmente paradójica en la medida en la que se observa que la velocidad en el cambio de las condiciones externas de un sistema es determinante: el mismo cambio en ellas a una velocidad más alta es capaz de conducir a una catástrofe mientras que el cambio realizado de forma lenta conduce a un equilibrio estable y seguro ecológicamente o climatológicamente. Por ejemplo, en el modelo ecológico se observa la posibilidad de que un aumento demasiado rápido de la cantidad de recursos disponibles para las plantas de un ecosistema conduzca a la extinción de los herbívoros que de ellas se alimentan mientras que ese mismo cambio a menor velocidad permitiría la supervivencia de los herbívoros. Los requerimientos de las ciencias aplicadas [13, 29], como los que se muestran en este capítulo, muestran la urgencia requerida al desarrollo de una teoría matemática que sea capaz de explicar los mecanismos que dan lugar a estos fenómenos, y alientan a que se siga investigando en esta dirección.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se presentarán muy brevemente algunos conceptos fundamentales que se utilizarán reiteradamente en el resto de la memoria: el lema de Gronwall, los espacios de funciones continuas e integrables adecuados para trabajar en los capítulos posteriores y unas nociones sobre la definición de proceso en dinámica no autónoma, objeto que juega un papel similar al del flujo en dinámica autónoma.

2.1. Desigualdad de Gronwall

El lema de Gronwall tal y como es enunciado a continuación permite acotar superiormente funciones positivas de las que se dispone una desigualdad integral concreta. Es conocido que este resultado juega un papel fundamental en la demostración de existencia y unicidad de soluciones al problema de Cauchy de ecuaciones diferenciales ordinarias, y en nuestra memoria será aplicado en varias ocasiones para obtener resultados concernientes a dicotomías exponenciales.

Lema 2.1.1 (Desigualdad de Gronwall). Sean $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable y $k, u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sendas funciones continuas, siendo k positiva, tales que se verifica

$$u(t) \leq c(t) + \int_a^t k(s)u(s) ds, \quad \forall t \in I. \quad (2.1)$$

(I) Entonces se cumple que para $t \in I$,

$$u(t) \leq c(t) + \int_a^t c(s)k(s) \exp\left(\int_s^t k(r) dr\right) ds. \quad (2.2)$$

(II) Si $c(t) \equiv c$ es una función constante, se verifica para $t \in I$,

$$u(t) \leq c \exp\left(\int_a^t k(s) ds\right). \quad (2.3)$$

Demostración. Se considera la función auxiliar $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$v(s) = \exp\left(-\int_a^s k(r) dr\right) \int_a^s k(r)u(r) dr.$$

Es claro que v es continua y derivable gracias al teorema fundamental del cálculo (en virtud de la continuidad de k y u), y su derivada es

$$v'(s) = \left(u(s) - \int_a^s k(r)u(r) dr \right) k(s) \exp \left(- \int_a^s k(r) dr \right) \leq c(s)k(s) \exp \left(- \int_a^s k(r) dr \right),$$

donde la cota se tiene gracias a la positividad de k y a la desigualdad (2.1) del enunciado. En consecuencia, para $t \in I$, por la monotonía de la integral,

$$v(t) = v(a) + \int_a^t v'(s) ds \leq \int_a^t c(s)k(s) \exp \left(- \int_a^s k(r) dr \right) ds,$$

donde se ha tenido en cuenta que $v(a) = 0$. Se concluye, de nuevo a partir de la desigualdad (2.1) del enunciado, que

$$u(t) \leq c(t) + v(t) \exp \left(\int_a^t k(r) dr \right) \leq c(t) + \int_a^t c(s)k(s) \exp \left(\int_s^t k(r) dr \right) ds,$$

como se quería probar. La desigualdad cuando $c(t) \equiv c$ se obtiene de la anterior por aplicación del teorema fundamental del cálculo. \square

2.2. Espacios de funciones

2.2.1. Espacios de funciones continuas

Los espacios de funciones que se describen a continuación serán el marco funcional adecuado para los lados derechos de sistemas de n ecuaciones diferenciales

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (2.4)$$

en las diferentes aplicaciones que aparecerán a lo largo del trabajo. El problema representa un problema de evolución respecto de la variable independiente t , por lo que será denominada *variable temporal*, del vector de *variables de estado* \mathbf{x} , que a veces también será denominado vector de variables de posición.

Denotaremos por $\mathcal{C}^{0,0}$ ó $\mathcal{C}^{0,0}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ al espacio de las funciones $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuas. A lo largo de todo este trabajo se denotará por $|\cdot|$ una norma vectorial cualquiera en \mathbb{R}^d , y se reservará el símbolo $\|\cdot\|$ para la norma matricial inducida por $|\cdot|$ en el correspondiente espacio de operadores lineales y continuos. Para dotar al espacio vectorial $\mathcal{C}^{0,0}$ de una topología adecuada se define la siguiente familia de seminormas, que lo convierte en un espacio localmente convexo, ya que el único elemento para el que todas las seminormas son nulas es la función idénticamente nula. Para cada $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ se define la seminorma siguiente, con $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{0,0}$,

$$|\mathbf{f}|_{k,0,0} = \sup_{|(t,\mathbf{x})| \leq k} |\mathbf{f}(t, \mathbf{x})|. \quad (2.5)$$

La seminorma de (2.5), dado $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, corresponde a la topología de la convergencia uniforme en el compacto $\{(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n+1} : |(t, \mathbf{x})| \leq k\}$. Como nos encontramos ante una familia numerable de seminormas, el espacio $\mathcal{C}^{0,0}$ es, de hecho, metrizable al ser equipado con la distancia

$$d_{0,0}(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2|_{k,0,0}}{1 + |\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2|_{k,0,0}}.$$

La topología inducida por esta métrica es la de la convergencia uniforme en los compactos de \mathbb{R}^{n+1} . Por un lado, la métrica $d_{0,0}$ es invariante por traslaciones y, por otro, como la convergencia en esta métrica implica la convergencia uniforme en cada compacto (y el espacio de funciones continuas en un compacto concreto dotado de la métrica de la convergencia uniforme es completo) se verifica que el espacio $\mathcal{C}^{0,0}$ es completo. En consecuencia, se tiene que $(\mathcal{C}^{0,0}, d_{0,0})$ es un espacio de Fréchet.

A continuación, introducimos otro espacio muy adecuado para los propósitos de este trabajo. La propiedad esencial que se añade a este espacio y que lo diferencia del anterior es una propiedad de uniformidad en la variable temporal. Esta propiedad la van a tener las funciones con las que trabajaremos más adelante, ya que la variación temporal va a ser, como veremos, “compactificada” a través de una función continua, que será la función de transición. El recurso de la compactificación de la variación temporal de un sistema de ecuaciones diferenciales es habitual en dinámica no autónoma, y da lugar a métodos y técnicas más potentes y variados que los que se presentarán en esta memoria [15].

Denotaremos $\mathcal{C}^{b,0}$ ó $\mathcal{C}^{b,0}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ al espacio de funciones $\mathbf{f}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuas y, además, acotadas en cada conjunto de la forma $\mathbb{R} \times K$, siendo $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto. La topología que se dé a este espacio debe ser acorde con las propiedades de sus funciones y, por ello, se definen las siguientes seminormas que actúan sobre elementos $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{b,0}$ para hacerlo localmente convexo:

$$|\mathbf{f}|_{k,b,0} = \sup_{(t,\mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times B_k} |\mathbf{f}(t, \mathbf{x})|, \quad B_k = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| \leq k\}, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \quad (2.6)$$

Cada seminorma se corresponde con la convergencia uniforme en un conjunto $\mathbb{R} \times B_k$. Cabe destacar que el valor del superior de $|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})|$ cuando $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times B_k$ es finito porque se ha pedido que las $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{b,0}$ sean funciones acotadas sobre los conjuntos de la forma $\mathbb{R} \times K$, con $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. La numerabilidad de la familia de seminormas hace que se pueda hacer de $\mathcal{C}^{b,0}$ un espacio métrico al dotarlo de

$$d_{b,0}(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2|_{k,b,0}}{1 + |\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2|_{k,b,0}}.$$

Por construcción, la topología inducida es la de la convergencia uniforme en los conjuntos de la forma $\mathbb{R} \times K$, con $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. La métrica $d_{b,0}$ es también invariante por traslaciones y, gracias a que el espacio de funciones continuas y acotadas sobre un conjunto determinado es completo, se sigue que $\mathcal{C}^{b,0}$ es completo y, en consecuencia, $(\mathcal{C}^{b,0}, d_{b,0})$ es un espacio de Fréchet.

Para denotar las derivadas sucesivas respecto de variables espaciales utilizaremos notación de multíndices. Un multíndice n -dimensional es una n -upla $\alpha \in \mathbb{N}^n$, que denotaremos $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ y para la que definimos la norma $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, el factorial $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$ y denotamos

$$D^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial \mathbf{x}^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

De aquí en adelante se reservará siempre el símbolo D para referirnos a la matriz jacobiana respecto de las variables de estado, mientras que usaremos $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{d}{dt}$ ó la notación de Newton $(\dot{\mathbf{x}})$

para las derivadas temporales.

En paralelismo con $\mathcal{C}^{0,0}$, dado $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, denotaremos por $\mathcal{C}^{0,m}$ ó $\mathcal{C}^{0,m}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ al espacio de las funciones $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuas con $D^\alpha \mathbf{f} = \frac{\partial^\alpha \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^\alpha} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua para todo $|\alpha| \leq m$. Siguiendo un proceso similar al anterior, se quiere dotar ahora a este espacio de una topología que tenga en cuenta también la proximidad entre los elementos jacobianos sucesivos $D\mathbf{f}, \dots, D^m \mathbf{f}$. Para ello, ha de tenerse en cuenta que para $1 \leq j \leq m$ se tiene que $D^j \mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n^{j+1}}$, y aunque todas las normas en el espacio de llegada $\mathbb{R}^{n^{j+1}}$ sean equivalentes por ser este de dimensión finita, si escogemos la norma adecuada para definir las seminormas simplificaremos su utilización más adelante.

Con este propósito de dar la norma natural en $\mathbb{R}^{n^{j+1}}$ que responda a la estructura de derivadas, si denotamos $\mathcal{L}(E, F)$ al espacio normado de operadores lineales y continuos entre dos espacios normados E y F , podemos definir la siguiente sucesión recursiva de espacios normados: $\mathcal{L}_0 = \mathbb{R}^n$ y para $j \in \mathbb{N}$ con $j \geq 1$ definimos $\mathcal{L}_j = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_{j-1})$, denotando $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_j}$ para $j \geq 1$ a sus normas asociadas como espacios de operadores lineales y continuos. Nótese que $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_1}$ es la norma matricial asociada a la norma vectorial $|\cdot|$, es decir, que según la notación que se ha asumido antes se corresponde con $\|\cdot\|$, y se preferirá por simplicidad esta notación a lo largo del trabajo. De esta forma, se tiene que para $1 \leq j \leq m$, al escribir $D^j \mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}_j = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_{j-1})$ se está dotando al espacio de llegada de la norma natural al considerar la derivada como aplicación lineal, es decir, dados $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\|D^j \mathbf{f}(t, \mathbf{x})\|_{\mathcal{L}_j} = \sup_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|D^j \mathbf{f}(t, \mathbf{x})\mathbf{y}\|_{\mathcal{L}_{j-1}}}{|\mathbf{y}|}.$$

Ahora estamos en disposición de definir una familia de seminormas que recojan adecuadamente la topología que esperamos que tenga $\mathcal{C}^{0,m}$. Para cada $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{0,m}$,

$$|\mathbf{f}|_{k,0,m} = \sup_{|(t,\mathbf{x})| \leq k} |\mathbf{f}(t, \mathbf{x})| + \sum_{j=1}^m \sup_{|(t,\mathbf{x})| \leq k} \|D^j \mathbf{f}(t, \mathbf{x})\|_{\mathcal{L}_j}, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \quad (2.7)$$

Como caso particular es importante destacar la familia de seminormas para $m = 1$,

$$|\mathbf{f}|_{k,0,1} = \sup_{|(t,\mathbf{x})| \leq k} |\mathbf{f}(t, \mathbf{x})| + \sup_{|(t,\mathbf{x})| \leq k} \|D\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\|, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad (2.8)$$

que aparecerá con mayor frecuencia. Las seminormas de (2.7) que, como en los casos anteriores, convierten a $\mathcal{C}^{0,m}$ en un espacio localmente convexo, se corresponden con la topología (que se puede estudiar a partir de sucesiones de funciones $\{\mathbf{f}_s\}_{s=1}^\infty$ gracias al primer axioma de numerabilidad) de la convergencia uniforme tanto de las funciones \mathbf{f}_s , como de sus arreglos de derivadas parciales hasta orden m , $D\mathbf{f}_s, D^2\mathbf{f}_s, \dots, D^m\mathbf{f}_s$ en el mismo compacto $\{(t, \mathbf{x}) : |(t, \mathbf{x})| \leq k\}$. De nuevo, la numerabilidad de la familia de seminormas asegura que $\mathcal{C}^{0,m}$ es metrizable al ser equipado con la distancia

$$d_{0,m}(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2|_{k,0,m}}{1 + |\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2|_{k,0,m}}.$$

La topología inducida por esta distancia es la de la convergencia uniforme simultánea de las funciones y sus derivadas hasta orden m en los compactos de \mathbb{R}^{n+1} . Por un razonamiento

similar al dado para $\mathcal{C}^{0,0}$, se tiene que $\mathcal{C}^{0,m}$ es también un espacio completo y, más en concreto, $(\mathcal{C}^{0,m}, d_{0,m})$ es un espacio de Fréchet.

Para acabar esta sección introduciremos una última familia de espacios de funciones continuas, incorporando la propiedad de uniformidad en la variable temporal que ya hemos descrito en el espacio $\mathcal{C}^{b,0}$, pero esta vez añadiéndosela a los espacios $\mathcal{C}^{0,m}$ en vez de a $\mathcal{C}^{0,0}$. Dado $m \in \mathbb{N}$, denotaremos por $\mathcal{C}^{b,m}$ ó $\mathcal{C}^{b,m}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ al espacio de funciones $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuas y, además, acotadas en los conjuntos de la forma $\mathbb{R} \times K$ con $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, y también con $\frac{\partial^\alpha \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^\alpha} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua para todo $|\alpha| \leq m$ y acotada en los conjuntos de la forma $\mathbb{R} \times K$. La topología es dada a través de la familia de seminormas que, indizadas por $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, actúan sobre $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{b,m}$,

$$|\mathbf{f}|_{k,b,m} = \sup_{(t,\mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times B_k} |\mathbf{f}(t, \mathbf{x})| + \sum_{j=1}^m \sup_{(t,\mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times B_k} \|D^j \mathbf{f}(t, \mathbf{x})\|_{\mathcal{L}_j}, \quad B_k = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| \leq k\}. \quad (2.9)$$

Es claro que los superiores que se toman en esta definición son finitos gracias a la propia definición del espacio $\mathcal{C}^{b,m}$. Al tratarse de una familia numerable de seminormas, estas provocan que la distancia

$$d_{b,m}(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2|_{k,b,m}}{1 + |\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2|_{k,b,m}}$$

convierta a $\mathcal{C}^{b,m}$ en un espacio métrico. La topología que induce esta distancia es la de la convergencia uniforme de las funciones y sus derivadas parciales hasta orden m en los conjuntos de la forma $\mathbb{R} \times K$ con $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Para acabar, $d_{b,m}$ es también invariante por traslaciones, así que razonando como antes se sigue que $\mathcal{C}^{b,m}$ es completo y, en consecuencia, $(\mathcal{C}^{b,m}, d_{b,m})$ es un espacio de Fréchet.

Comentario 2.2.1. Se busca remarcar que los espacios precedentes se han introducido para funciones que van de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ en \mathbb{R}^n (es decir, en los que se quiere dar un tratamiento diferenciado a la variable temporal, precisamente para aquellas funciones que van a tomar el papel de lado derecho en ecuaciones diferenciales ordinarias) y se espera que no haya confusión cuando, por ejemplo, se utilice $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ para designar a las funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R}^m continuas ó $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ a las continuamente derivables de \mathbb{R} en \mathbb{R}^m .

Por otro lado, el orden de las variables que se utilizará a lo largo de este trabajo para los lados derechos de las ecuaciones diferenciales ordinarias será siempre $(t, \mathbf{x}, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, correspondiendo t a la variable temporal, \mathbf{x} a las de estado y λ al parámetro del que depende el sistema (que en esta memoria será siempre escalar), aunque en ninguno de los casos que se van a tratar aparecerán las tres simultáneamente. Esto lleva a definir los espacios de funciones continuas $\mathcal{C}^{m,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ para $m \in \mathbb{N}$ de forma análoga a como se definió $\mathcal{C}^{0,m}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ pero intercambiando el papel de las variables de entrada, ya que serán (\mathbf{x}, λ) en lugar de (t, \mathbf{x}) .

Comentario 2.2.2. Las acotaciones de cada una de las seminormas de un espacio por otra seminorma de otro espacio de funciones continuas permiten establecer las siguientes inclusiones

continuas naturales entre los espacios que acabamos de presentar, $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{b,m} & \hookrightarrow & \mathcal{C}^{0,m} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}^{b,0} & \hookrightarrow & \mathcal{C}^{0,0} \end{array}$$

2.2.2. Espacios de funciones integrables

Dado $1 \leq p < \infty$, denotaremos por $L^p(I, \mathbb{R}^n)$ al espacio de las funciones medibles $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tales que

$$\int_I |\mathbf{x}(t)|^p dt < \infty. \quad (2.10)$$

Estos espacios serán denominados espacios de funciones p -integrables en I . Es conocido que $L^p(I, \mathbb{R}^n)$ es un espacio de Banach al ser dotado de la norma

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\int_I |\mathbf{x}(t)|^p dt \right)^{1/p}. \quad (2.11)$$

Dado $1 \leq p < \infty$, denotaremos por $L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$ al espacio de las funciones medibles $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tales que para cada intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}$ se tenga que $\mathbf{x}|_I \in L^p(I, \mathbb{R}^n)$, es decir, que se verifique que

$$\int_I |\mathbf{x}(t)|^p dt < \infty. \quad (2.12)$$

Los espacios $L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$ serán denominados espacios de funciones localmente p -integrables. Necesitaremos utilizar estos espacios cuando queramos estudiar ecuaciones diferenciales de Carathéodory en el Capítulo 5, es decir, en los que se admita que el lado derecho de las ecuaciones diferenciales ordinarias pueda tener variación temporal discontinua. Por simplicidad se denotará $L_{loc}^p = L_{loc}^p(\mathbb{R})$.

Comentario 2.2.3. En el caso en que I es un intervalo compacto, son bien conocidas las inclusiones continuas construidas a partir de la desigualdad de Hölder que nos dicen que si $1 \leq p \leq q \leq \infty$ se tiene que $L^q(I, \mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(I, \mathbb{R}^n)$. Como no hemos dotado a $L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$ de una topología, podremos limitarnos a decir que el resultado anterior garantiza la contención entre dichos espacios de funciones: $L_{loc}^q(\mathbb{R}^n) \subset L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$.

2.3. Dinámica no autónoma

En dinámica autónoma el operador de evolución de entre tiempos s y t sólo depende del lapso de tiempo $t - s$ transcurrido en la evolución y esto permite escribirlo como un grupo de operadores que definen un flujo. Sin embargo, esto no es así para operadores de evolución en dinámica no autónoma, en los cuales el papel de s y t es importante, no sólo el de su diferencia. Esto lleva a la definición de un nuevo objeto para describir la evolución, el *proceso* o semigrupo biparamétrico.

Cabe destacar que, aunque incorporando la variable temporal como una variable de estado más es posible recuperar estructura de flujo en la evolución, este tratamiento no permite recuperar la mayoría de las propiedades dinámicas que se tratan en dinámica autónoma. Por ejemplo, en este tipo de formulación no pueden existir puntos de equilibrio del sistema. La

formulación de procesos no recoge más información dinámica que la del flujo del sistema aumentado. Sin embargo, aunque no entra dentro de este trabajo, es relevante en dinámica no autónoma que los sistemas de ecuaciones ordinarias periódicas o cuasiperiódicas admiten la construcción una estructura dotada de un flujo en la cual las propiedades dinámicas vuelven a ser significativas. Esta construcción basada en la compactificación temporal se denomina *skew-product* o *semiflujo triangular*.

Con estos comentarios simplemente se pretende enfatizar las diferencias entre la dinámica autónoma y la no autónoma y recalcar la importancia de desarrollar y utilizar herramientas propias de dinámica no autónoma, ya que tendrán más alcance en este tipo de problemas.

Definición 2.3.1 (Proceso). Dado un espacio métrico (X, d) , se dice que una familia de aplicaciones continuas de $X \rightarrow X$, $\{S(t, t) : t \geq s\}$ es un **proceso** si satisface las siguientes propiedades:

- (I) $S(t, t)\mathbf{x} = \mathbf{x}$ para cada $t \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{x} \in X$.
- (II) $S(t, s) = S(t, r)S(r, s)$, para cada $t \geq r \geq s$.
- (III) $(t, s, \mathbf{x}) \rightarrow S(t, s)\mathbf{x}$ es continua en el conjunto $\{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : t \geq s\} \times X$.

Comentario 2.3.2. Téngase en cuenta que, pese a la notación utilizada, que es la usual en muchos textos de dinámica no autónoma, las aplicaciones continuas de un proceso no tienen por qué ser lineales en el dato inicial \mathbf{x} , de hecho, esto no ocurrirá más allá del caso de procesos inducidos por sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

En este marco de trabajo tiene cabida la definición de *atractor pullback*, que como se verá en el Capítulo 4, va a ser el objeto adecuado para describir la transición en nuestro sistema físico. La definición [24] que presentamos a continuación opera en un espacio de fases dotado de un proceso, mientras que la que usaremos en el Capítulo 4 no exigirá la existencia global. En esa línea la definición de proceso local aportará más claridad. Además, en el Capítulo 4 restringiremos los conjuntos $\mathcal{A}(t)$ a conjuntos unipuntuales y sólo pediremos atracción local en un entorno: será lo que definiremos como *atractor pullback local*.

Definición 2.3.3 (Atractor pullback). Se dice que una familia paramétrica de conjuntos $\mathcal{A}(\cdot) = \{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ del espacio de fases X es un **atractor pullback** para el proceso $S(\cdot, \cdot)$ si

- I) $\mathcal{A}(t)$ es un conjunto compacto para cada $t \in \mathbb{R}$,
- II) $\mathcal{A}(\cdot)$ es invariante, es decir, $S(t, s)\mathcal{A}(s) = \mathcal{A}(t)$ para todo $t \geq s$,
- III) para cada $t \in \mathbb{R}$, el conjunto $\mathcal{A}(t)$ atrae los conjuntos acotados a tiempo t , es decir, que para cualquier conjunto acotado $B \subseteq X$ se tiene que

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \text{dist}(S(t, s)B, \mathcal{A}(t)) = 0, \quad (2.13)$$

donde $\text{dist}(A, B)$ es la *semi-distancia de Hausdorff* entre dos conjuntos no vacíos $A, B \subseteq X$, que viene dada por $\text{dist}(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y)$.

- IV) \mathcal{A} es la familia minimal de conjuntos cerrados que verifican la propiedad (III).

El apelativo *pullback* que se da a este tipo de atractor se debe a la propiedad (III), que es radicalmente distinta de la atracción *forward* que es más habitual manejar. Aquí la convergencia al atractor debe darse no cuando se deja evolucionar unas condiciones iniciales un tiempo suficientemente largo desde un tiempo inicial fijo, sino cuando las condiciones iniciales son llevadas hacia atrás en el tiempo a suficiente distancia.

Volviendo a la definición de proceso, surge un problema a la hora de estudiar a través de la Definición 2.3.1 la evolución dada por problemas de Cauchy de un sistema de ecuaciones diferenciales no autónomo

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \quad (2.14)$$

donde $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, y $s \in \mathbb{R}$. La existencia global de soluciones, es decir, en intervalos del tipo $[s, \infty)$, no está garantizada. La solución $\mathbf{x}(t, s, \mathbf{x}_0)$ de (2.14) está definida en el intervalo maximal de definición $(\alpha_-(s, \mathbf{x}_0), \alpha_+(s, \mathbf{x}_0))$. Esto conduce a que el proceso inducido por el sistema (2.14) no esté bien definido para todo $t \geq s$, y para subsanarlo, se da la siguiente definición:

Definición 2.3.4 (Proceso local). Dado el conjunto de la forma

$$U = \bigcup_{(s, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^{n+1}} [s, \alpha_+(s, \mathbf{x}_0)) \times \{s\} \times \{\mathbf{x}_0\},$$

se dice que la aplicación continua $S : U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\begin{aligned} S : U \subseteq \mathbb{R}^{n+2} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, s, \mathbf{x}_0) &\longrightarrow \mathbf{x}(t, s, \mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

es el **proceso local inducido por (2.14)** porque, si se denota $S(t, s, \mathbf{x}_0) = S(t, s)\mathbf{x}_0$, es conocido que se verifica que

- (I) $S(s, s)\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$ para todo $(s, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$,
- (II) si $(t, s, \mathbf{x}_0) \in U$ y $s \leq r \leq t$ entonces $(t, r, S(r, s, \mathbf{x}_0)) \in U$ y $S(t, s)\mathbf{x}_0 = S(t, r)S(r, s)\mathbf{x}_0$.

Además, se sabe también que U es un conjunto abierto de $\{(t, s, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^{n+2} : t \geq s\}$. Cuando se tiene que $U = \{(t, s, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^{n+2} : t \geq s\}$, entonces decimos que (2.14) induce un **proceso global**, y se está en el caso de la Definición 2.3.1.

Capítulo 3

Dicotomías exponenciales

Una ecuación diferencial autónoma lineal definida por una matriz hiperbólica tiene espacios estable e inestable correspondiendo con la suma directa de los espacios de autovalores asociados a autovalores con parte real estrictamente negativa y positiva respectivamente. Este hecho es fundamental también en el estudio de ecuaciones autónomas no lineales, ya que permite la construcción y análisis de variedades estables e inestables. Sin embargo, en el caso no autónomo, el signo de los autovalores de la matriz de un sistema lineal que depende del tiempo no es determinante para el estudio de este tipo de propiedades. Esto conduce a la introducción de las *dicotomías exponenciales* [8], las cuales consisten en que los sistemas lineales exhiban la propiedad dinámica análoga a la que se ha descrito antes. De esta forma, las dicotomías exponenciales suponen la generalización natural del concepto de sistema lineal hiperbólico al ámbito de la dinámica no autónoma.

3.1. Definiciones y propiedades

En esta sección se introducirán los conceptos fundamentales relativos a dicotomías exponenciales. Se considerará, en primer lugar, el sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneo no autónomo

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x}, \quad (3.1)$$

donde $A : J \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ es una matriz continua en un intervalo $J \subseteq \mathbb{R}$. Para este tipo de sistemas está garantizada la existencia global de soluciones en el intervalo J de definición [4, Th 5.1]. Denotaremos por $X(t)$ a una matriz fundamental de la ecuación (3.1).

Definición 3.1.1 (Dicotomía exponencial). Diremos que la ecuación (3.1) tiene una **dicotomía exponencial** en un intervalo $J_0 \subseteq J$ si existe una proyección $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y constantes positivas K y α tales que, para todo $t, s \in J_0$,

$$\begin{aligned} \|X(t)PX^{-1}(s)\| &\leq Ke^{-\alpha(t-s)}, & t \geq s, \\ \|X(t)(I-P)X^{-1}(s)\| &\leq Ke^{-\alpha(s-t)}, & s \geq t. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Se denominará a (K, α) el par o las constantes de la dicotomía exponencial. Cuando se suprima la mención al intervalo J_0 se entenderá que se trata de $J_0 = \mathbb{R}$. La mayoría de los casos de interés de esta definición son en los que J_0 sea $[0, \infty)$, $(-\infty, 0]$ ó \mathbb{R} .

Las siguientes proposiciones y definiciones nos ayudarán a ahondar sobre el significado de los conceptos que se acaba de definir.

Proposición 3.1.2 (Descomposición de soluciones). Si el sistema (3.1) tiene una dicotomía exponencial y $\mathbf{x}(t)$ es una solución de (3.1), entonces $\mathbf{x}(t)$ se puede descomponer como suma de dos soluciones de (3.1) distintas,

$$\mathbf{x}_1(t) = X(t)PX^{-1}(s)\mathbf{x}(s), \quad \mathbf{x}_2(t) = X(t)(I - P)X^{-1}(s)\mathbf{x}(s). \quad (3.3)$$

Demostración. La solución al problema de Cauchy formado por el sistema (3.1) y la condición inicial $\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, con $s \in \mathbb{R}$, es $\mathbf{x}(t) = X(t)X^{-1}(s)\mathbf{x}_0$, la cual se puede descomponer como

$$\mathbf{x}(t) = X(t)X^{-1}(s)\mathbf{x}_0 = X(t)PX^{-1}(s)\mathbf{x}_0 + X(t)(I - P)X^{-1}(s)\mathbf{x}_0. \quad (3.4)$$

Cada uno de los dos sumandos de (3.4) es, de hecho, una solución de (3.1), ya que, por ejemplo, el primero de los sumandos se puede escribir como

$$X(t)PX^{-1}(s)\mathbf{x}_0 = X(t)X^{-1}(s)(X(s)PX^{-1}(s)\mathbf{x}_0),$$

donde la condición inicial a tiempo $s \in \mathbb{R}$ es $X(s)PX^{-1}(s)\mathbf{x}_0$ (y análogamente con el segundo sumando). Si la dicotomía exponencial estuviera definida en $J_0 = \mathbb{R}$ cada una de estas dos soluciones en las que se descompone la solución tendría un comportamiento radicalmente distinto: una se hace exponencialmente pequeña cuando $t \rightarrow \infty$ y la otra cuando $t \rightarrow -\infty$. \square

En resumidas cuentas, se tiene que para cada instante de tiempo $t \in \mathbb{R}$ existe un proyector $X(t)PX^{-1}(t)$ que descompone \mathbb{R}^n en las condiciones iniciales exponencialmente estables y las exponencialmente inestables, y un aspecto esencial que lo diferencia de las variedades estable e inestable en ecuaciones autónomas es que esta descomposición cambia en cada instante de tiempo siguiendo la evolución de la ecuación lineal no autónoma (3.1). Este análisis motiva las siguientes definiciones.

Definición 3.1.3 (Espacios estable e inestable). Cuando la ecuación (3.1) con $J = \mathbb{R}$ tiene una dicotomía exponencial, se define para $t \in \mathbb{R}$ el **proyector a tiempo t** como

$$P(t) = X(t)PX^{-1}(t), \quad (3.5)$$

el **espacio estable a tiempo t** como $E(t) = \text{Ran}(P(t))$ y el **espacio inestable a tiempo t** como $U(t) = \text{Ker}(P(t)) = \text{Ran}(I - P(t))$.

Al ser $P(t)$ un proyector, se tiene que $\mathbb{R}^n = E(t) \oplus U(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. La familia uniparamétrica de espacios vectoriales $\{E(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ se denomina familia de espacios estables, mientras que $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ se denomina familia de espacios inestables. Estas familias uniparamétricas también pueden denominarse fibrados estable e inestable a tiempo t .

Cabe destacar que los proyectores sobre el espacio estable e inestable $P(t)$ y $I - P(t)$ verifican que

$$\begin{aligned} P(t)X(t)X^{-1}(s) &= X(t)PX^{-1}(s) = X(t)X^{-1}(s)P(s), \\ (I - P(t))X(t)X^{-1}(s) &= X(t)(I - P)X^{-1}(s) = X(t)X^{-1}(s)(I - P(s)), \end{aligned} \quad (3.6)$$

es decir, que verifican cierta propiedad de conmutación con el operador de evolución del sistema: dado un dato inicial va a ser lo mismo proyectar a tiempo s y evolucionar desde tiempo s hasta tiempo t que evolucionar de tiempo s a tiempo t y luego proyectar a tiempo t (teniendo en cuenta que el proyector que se utiliza en cada uno de los dos tiempos distintos es diferente).

Proposición 3.1.4 (Acotación de las soluciones proyectadas). Si (3.1) tiene una dicotomía exponencial y $\mathbf{x}(t)$ es una solución de (3.1), entonces las proyecciones de $\mathbf{x}(t)$ sobre los espacios estable e inestable son las soluciones de la Proposición 3.1.2,

$$\mathbf{x}_1(t) = P(t)\mathbf{x}(t) = X(t)PX^{-1}(s)\mathbf{x}(s), \quad \mathbf{x}_2(t) = (I - P(t))\mathbf{x}(t) = X(t)(I - P)X^{-1}(s)\mathbf{x}(s).$$

Además, si $\mathbf{x}(t)$ es globalmente acotada, cada una de las dos soluciones $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$ es una solución globalmente acotada.

Demostración. Que $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$ son soluciones de (3.1) y, además, $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_2(t)$ se ha probado en la Proposición 3.1.2. Para comprobar la parte del enunciado relativa a acotación, de la definición de dicotomía exponencial, al hacer $t = s$, se tiene que $\|P(t)\| = \|X(t)PX^{-1}(t)\| \leq K$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y, por tanto, tomando normas en la definición de $\mathbf{x}_1(t)$:

$$|\mathbf{x}_1(t)| = \|X(t)PX^{-1}(t)X(t)X^{-1}(s)\mathbf{x}(s)\| \leq \|X(t)PX^{-1}(t)\| \cdot |\mathbf{x}(t)| \leq K|\mathbf{x}(t)|.$$

Esto implica, ya que $\mathbf{x}(t)$ es una solución globalmente acotada, que $\mathbf{x}_1(t)$ es una solución globalmente acotada de (3.1). Procediendo análogamente con $\mathbf{x}_2(t)$ se obtiene que las dos soluciones en las que se puede descomponer $\mathbf{x}(t)$ a través de la dicotomía exponencial son soluciones globalmente acotadas si la original lo es. \square

Definición 3.1.5 (Sistema Hurwitz). Se dice que el sistema (3.1) es **Hurwitz en $+\infty$** si tiene una dicotomía exponencial con $P = I$. Análogamente, se dice que es **Hurwitz en $-\infty$** si tiene una dicotomía exponencial con $P = 0$.

Comentario 3.1.6. Si se considera el sistema lineal autónomo

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x},$$

con $A \in \mathbb{R}^{n^2}$, es conocido, gracias al teorema del subespacio estable e inestable [27], que tendrá una dicotomía exponencial si y sólo si todos los autovalores de A tienen parte real no nula. Además, la tendrá con $P = I$ (resp. $P = 0$), es decir, será Hurwitz en $+\infty$ (resp. $-\infty$), si todos los autovalores tienen parte real estrictamente negativa (resp. positiva).

Proposición 3.1.7. Si el sistema (3.1) tiene una dicotomía exponencial, entonces $\mathbf{x} \equiv 0$ es la única solución globalmente acotada.

Demostración. Supongamos que $\mathbf{x}(t)$ es una solución globalmente definida y acotada. Entonces, escribiendo como en la descomposición (3.4) se tiene que

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_2(t) = X(t)PX^{-1}(s)\mathbf{x}(s) + X(t)(I - P)X^{-1}(s)\mathbf{x}(s), \quad (3.7)$$

para $t \geq s$. Ahora, por la definición de dicotomía exponencial podemos acotar $\mathbf{x}_1(t)$ como

$$|\mathbf{x}_1(t)| = \|X(t)PX^{-1}(s)\mathbf{x}(s)\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}|\mathbf{x}(s)|, \quad t \geq s,$$

y como $|\mathbf{x}(s)|$ está acotada, al hacer tender $s \rightarrow -\infty$ se tiene que $|\mathbf{x}_1(t)| = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, luego el primer término de (3.7) es idénticamente nulo. Procediendo análogamente (pero con $s \rightarrow \infty$) se tiene que tiene lo mismo para el segundo y, por tanto, necesariamente $\mathbf{x} \equiv 0$, como se quería probar. \square

Notación 3.1.8. En primer lugar, recordamos que en el Capítulo 2 se dijo que con $|\cdot|$ se denotará una norma en \mathbb{R}^n , por ejemplo, la norma euclídea; mientras que con $\|\cdot\|$ se denotará la norma matricial (de operadores) inducida por $|\cdot|$ en $\mathbb{R}^{n^2} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Dada una función $\mathbf{a} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua y acotada, se define

$$|\mathbf{a}|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\mathbf{a}(t)|.$$

Es conocido que si se denomina $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ al espacio de las funciones continuas y acotadas de \mathbb{R} en \mathbb{R}^n , entonces $(\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), |\cdot|_\infty)$ es un espacio de Banach. Análogamente, dada $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$, se definirá

$$\|A\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|A(t)\|,$$

y se tendrá que $(\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n^2}), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach.

Proposición 3.1.9. Dada $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ una matriz continua y $\mathbf{b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua y acotada, si el sistema $\dot{\mathbf{y}} = A(t)\mathbf{y}$ tiene una dicotomía exponencial con par (K, α) y proyección $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \quad (3.8)$$

tiene una única solución acotada y viene dada por

$$\mathbf{y}_b(t) = \int_{-\infty}^t X(t)PX^{-1}(s)\mathbf{b}(s) ds - \int_t^\infty X(t)(I-P)X^{-1}(s)\mathbf{b}(s) ds. \quad (3.9)$$

Además, se verifica que

$$|\mathbf{y}_b|_\infty \leq 2\frac{K}{\alpha} |\mathbf{b}|_\infty. \quad (3.10)$$

Demostración. Veamos en primer lugar la unicidad. Si existieran dos soluciones acotadas de (3.8), entonces su diferencia sería una solución acotada de $\dot{\mathbf{y}} = A(t)\mathbf{y}$, y la Proposición 3.1.7 nos aseguraría que es idénticamente nula por tener dicho sistema una dicotomía exponencial. En definitiva, las dos deberían ser iguales, como se necesitaba ver. Para la existencia veamos que la expresión del enunciado está bien definida y que es solución. En primer lugar, la siguiente acotación demuestra que las dos integrales son convergentes para todo $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^t X(t)PX^{-1}(s)\mathbf{b}(s) ds \right| &\leq |\mathbf{b}|_\infty \int_{-\infty}^t \|X(t)PX^{-1}(s)\| ds \\ &\leq |\mathbf{b}|_\infty \int_{-\infty}^t Ke^{-\alpha(t-s)} ds = \frac{K}{\alpha} |\mathbf{b}|_\infty < \infty. \\ \left| \int_t^\infty X(t)(I-P)X^{-1}(s)\mathbf{b}(s) ds \right| &\leq |\mathbf{b}|_\infty \int_t^\infty \|X(t)(I-P)X^{-1}(s)\| ds \\ &\leq |\mathbf{b}|_\infty \int_t^\infty Ke^{-\alpha(s-t)} ds = \frac{K}{\alpha} |\mathbf{b}|_\infty < \infty. \end{aligned}$$

La expresión anterior muestra, de hecho, que la función así definida está acotada por $2\frac{K}{\alpha} |\mathbf{b}|_\infty$ en el caso general y por $\frac{K}{\alpha} |\mathbf{b}|_\infty$ en el caso que el sistema sea Hurwitz en $\pm\infty$. Sólo queda, por

tanto, ver que es solución: por el teorema fundamental del cálculo y la regla de derivación del producto es claro que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(X(t) \int_{-\infty}^t P X^{-1}(s) \mathbf{b}(s) ds \right) &= A(t) \int_{-\infty}^t X(t) P X^{-1}(s) \mathbf{b}(s) ds + X(t) P X^{-1}(t) \mathbf{b}(t), \\ \frac{d}{dt} \left(-X(t) \int_t^{\infty} (I - P) X^{-1}(s) \mathbf{b}(s) ds \right) \\ &= -A(t) \int_t^{\infty} X(t) (I - P) X^{-1}(s) \mathbf{b}(s) ds + X(t) (I - P) X^{-1}(t) \mathbf{b}(t). \end{aligned}$$

Al sumar las dos expresiones anteriores, se obtiene $A(t)\mathbf{y}_b(t) + \mathbf{b}(t)$ en el lado derecho y $\frac{d}{dt}\mathbf{y}_b(t)$ en el lado izquierdo, quedando probado que efectivamente \mathbf{y}_b es solución de (3.11). \square

Corolario 3.1.10. Dada $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ una matriz continua y $\mathbf{b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua y acotada, si el sistema $\dot{\mathbf{y}} = A(t)\mathbf{y}$ es Hurwitz en $+\infty$, entonces

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \quad (3.11)$$

tiene una única solución acotada y viene dada por

$$\mathbf{y}_b(t) = \int_{-\infty}^t X(t) X^{-1}(s) \mathbf{b}(s) ds.$$

Si, en cambio, $\dot{\mathbf{y}} = A(t)\mathbf{y}$ es Hurwitz en $-\infty$ la única solución acotada de (3.11) viene dada por

$$\mathbf{y}_b(t) = - \int_t^{\infty} X(t) X^{-1}(s) \mathbf{b}(s) ds.$$

Además, en ambos casos se verifica que

$$|\mathbf{y}_b|_{\infty} \leq \frac{K}{\alpha} |\mathbf{b}|_{\infty}. \quad (3.12)$$

Demostración. Se obtiene por aplicación directa de la Proposición 3.1.9 para el caso $P = I$ y $P = 0$. La demostración de la Proposición 3.1.9 indica la razón de la desaparición del 2 de la cota para $|\mathbf{y}_b|_{\infty}$. \square

3.2. Soluciones hiperbólicas y persistencia

La persistencia de dicotomías exponenciales y soluciones hiperbólicas es un tema ampliamente tratado en la literatura, existiendo resultados para sistemas dinámicos discretos, de dimensión finita, de dimensión infinita... Las ideas y resultados principales que trataremos en esta sección están inspiradas en Fink [10, Th 8.4].

La proposición que enunciamos a continuación garantiza la persistencia de las dicotomías exponenciales de tipo Hurwitz. En realidad, no sólo estas sino todas las dicotomías exponenciales son persistentes en cierto sentido, como se puede encontrar en [8], pero en este trabajo presentamos sólo este resultado porque es el que necesitaremos más adelante para probar la persistencia de soluciones hiperbólicas atractivas.

Proposición 3.2.1. Sea $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ una matriz continua tal que el sistema (3.1) es Hurwitz en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) con par de dicotomía exponencial (K, α) y sea $0 < \delta < \alpha/K$. Entonces, para toda matriz continua $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ que cumpla $\|B - A\|_\infty < \delta$ se verifica que el sistema

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = B(t)\mathbf{x} \quad (3.13)$$

es Hurwitz en $+\infty$ (resp. en $-\infty$). Además, existe un par de dicotomía exponencial (K, α') común para todas las matrices continuas B que cumplen $\|B - A\|_\infty < \delta$.

Demostración. Tomando $\delta > 0$ como indica el enunciado, se va a tratar (3.13) como un sistema perturbado de (3.1). Para ello, se escribe el sistema (3.13) como

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = B(t)\mathbf{x} = A(t)\mathbf{x} + (B(t) - A(t))\mathbf{x}.$$

De esta forma, la fórmula de variación de las constantes nos indica que las soluciones de (3.13) con condición inicial \mathbf{x}_0 en $s \in \mathbb{R}$ van a ser soluciones hasta donde estén definidas (al ser lineal homogéneo el problema (3.13) en este caso es en todo \mathbb{R}) de la siguiente ecuación integral, siendo de nuevo $X(t)$ la matriz fundamental de (3.1),

$$\mathbf{x}(t) = X(t)X^{-1}(s)\mathbf{x}_0 + \int_s^t X(t)X^{-1}(u)(B(u) - A(u))\mathbf{x}(u) du. \quad (3.14)$$

Como (3.1) es Hurwitz en $+\infty$, se tiene que $\|X(t)X^{-1}(s)\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}$ si $t \geq s$ y, por tanto, tomando normas en (3.14) se puede escribir

$$|\mathbf{x}(t)| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}|\mathbf{x}_0| + \int_s^t Ke^{-\alpha(t-u)}\delta|\mathbf{x}(u)| du,$$

lo que equivale a

$$e^{\alpha t}|\mathbf{x}(t)| \leq Ke^{\alpha s}|\mathbf{x}_0| + \int_s^t K\delta e^{\alpha u}|\mathbf{x}(u)| du. \quad (3.15)$$

Aplicando entonces el Lema 2.1.1 de Gronwall en su segunda versión a la función $e^{\alpha t}|\mathbf{x}(t)|$ se obtiene que

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}|\mathbf{x}(t)| &\leq Ke^{\alpha s}|\mathbf{x}_0| \exp\left(\int_s^t K\delta du\right) = Ke^{\alpha s}|\mathbf{x}_0|e^{K\delta(t-s)} \\ &\Rightarrow |\mathbf{x}(t)| = |Y_B(t)Y_B^{-1}(s)\mathbf{x}_0| \leq Ke^{-(\alpha-K\delta)(t-s)}|\mathbf{x}_0|, \end{aligned}$$

donde $Y_B(t)$ es una matriz fundamental del sistema (3.13). En consecuencia, se tiene la desigualdad

$$\|Y_B(t)Y_B^{-1}(s)\| \leq Ke^{-(\alpha-K\delta)(t-s)}, \quad t \geq s, \quad (3.16)$$

válida para cualquier matriz continua $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ que verifique $\|A - B\|_\infty < \delta$, y como $K\delta < \alpha$, se deduce que (3.13) es Hurwitz en $+\infty$. Además, con $\alpha' = \alpha - K\delta$, el par (K, α') es válido para cualquier matriz continua B que verifique $\|B - A\|_\infty < \delta$. Para el caso de sistema Hurwitz en $-\infty$ se razona análogamente. \square

El concepto de dicotomía exponencial que hemos tratado hasta ahora se restringe al ámbito de los sistemas lineales. A continuación, se da el salto a sistemas diferenciales no lineales, exigiendo la condición de dicotomía exponencial de tipo Hurwitz a la ecuación variacional linealizada en torno a una solución concreta. Esta solución, que será llamada solución hiperbólica, heredará de su ecuación variacional una propiedad de atracción o repulsión de soluciones cercanas.

Definición 3.2.2 (Solución hiperbólica). Sean $\mathbf{g} \in \mathcal{C}^{0,1}$ y $\mathbf{x}_{\mathbf{g}}(t)$ una solución acotada del sistema

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}). \quad (3.17)$$

Diremos que $\mathbf{x}_{\mathbf{g}}$ es una **solución hiperbólica** de (3.17) si el sistema linealizado

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = D\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_{\mathbf{g}}(t))\mathbf{y} \quad (3.18)$$

tiene dicotomía exponencial. Diremos que $\mathbf{x}_{\mathbf{g}}$ es una **solución hiperbólica atractiva** de (3.17) si (3.18) es Hurwitz en $+\infty$ y que es una **solución hiperbólica repulsiva** de (3.17) si (3.18) si es Hurwitz en $-\infty$.

Estas definiciones están motivadas porque, si $\mathbf{x}_{\mathbf{g}}$ es una solución hiperbólica atractiva (resp. repulsiva), la aplicación del método de la primera aproximación muestra que es, de hecho, exponencialmente asintóticamente estable (resp. inestable). En vista de las aplicaciones posteriores, nos interesa encontrar que los dominios de atracción exponencial que se deducen del método de primera aproximación se puedan tomar iguales para toda una familia de funciones $\mathbf{g} \in \mathcal{C}^{b,2}$ (ver la definición de $\mathcal{C}^{b,2}$ en la Sección 2.2.1). Estas propiedades de uniformidad en familias serán fundamentales en las aplicaciones posteriores. Con esa intención, se repasa el método de la primera aproximación en el sentido del siguiente teorema.

Teorema 3.2.3 (Revisión del método de primera aproximación). Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}^{b,2}$ una familia de funciones acotada (en $\mathcal{C}^{b,2}$) tal que para todo $\mathbf{g} \in \mathcal{F}$ se verifica que el sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x})$ admite una solución hiperbólica atractiva $\mathbf{x}_{\mathbf{g}}$, y que todos los sistemas linealizados tienen un par de dicotomía exponencial común, es decir, que existen $\alpha, K > 0$ tales que para cualquier $\mathbf{g} \in \mathcal{F}$ se tiene que

$$\dot{\mathbf{y}} = D\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_{\mathbf{g}}(t))\mathbf{y} \quad (3.19)$$

es Hurwitz en $+\infty$ con par (K, α) . Además, se supone que las órbitas de las soluciones hiperbólicas $\mathbf{x}_{\mathbf{g}}$, con $\mathbf{g} \in \mathcal{F}$, están contenidas en un compacto común de \mathbb{R}^n , es decir, que la familia $\{\mathbf{x}_{\mathbf{g}}\}_{\mathbf{g} \in \mathcal{F}}$ está acotada en $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Entonces, para cualquier $\alpha' < \alpha$ existe $\delta = \delta(\alpha') > 0$ tal que para cualquier $\mathbf{g} \in \mathcal{F}$ se tiene que, si para algún $s \in \mathbb{R}$ se verifica que una solución $\mathbf{x}(t)$ de (3.17) cumple que $|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_{\mathbf{g}}(s)| < \delta$, entonces

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{\mathbf{g}}(t)| \leq K e^{-\alpha'(t-s)} |\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_{\mathbf{g}}(s)|, \quad \text{para todo } t \geq s. \quad (3.20)$$

Demostración. Para cualquier $\mathbf{g} \in \mathcal{F}$, el sistema (3.17) se puede reescribir gracias al cambio de variable $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\mathbf{g}}(t)$ como

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}_{\mathbf{g}}(t) + \mathbf{y}) - \mathbf{g}(t, \mathbf{x}_{\mathbf{g}}(t)) = \left(\int_0^1 D\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_{\mathbf{g}}(t) + \sigma_1 \mathbf{y}) d\sigma_1 \right) \mathbf{y}, \quad (3.21)$$

donde se ha hecho la primera aproximación a través del resto integral del teorema de Taylor. Sumando y restando el sistema linealizado, (3.21) se convierte en

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = D\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_g(t))\mathbf{y} + \left(\int_0^1 \left(D\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_g(t) + \sigma_1\mathbf{y}) - D\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_g(t)) \right) d\sigma_1 \right) \mathbf{y}.$$

Aplicando de nuevo el Teorema de Taylor con resto en versión integral se tiene que el sistema puede convertirse, gracias a que $\mathbf{g} \in \mathcal{C}^{b,2}$, en

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = D\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_g(t))\mathbf{y} + \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 D^2\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_g(t) + \sigma_2\sigma_1\mathbf{y}) d\sigma_2 \right) \sigma_1\mathbf{y} d\sigma_1 \right) \mathbf{y}. \quad (3.22)$$

Para clarificar lo que se ha escrito, téngase en cuenta que

$$D^2\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_g(t) + \sigma_2\sigma_1\mathbf{y}) \in \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)),$$

luego al integrar se obtiene otro elemento del mismo espacio, y al aplicar \mathbf{y} se tiene uno de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, que de nuevo se integra y se evalúa en \mathbf{y} , obteniendo un vector de \mathbb{R}^n que depende de t y de \mathbf{y} . Se denotará entonces

$$\mathbf{b}_g(t, \mathbf{y}) = \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 D^2\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_g(t) + \sigma_2\sigma_1\mathbf{y}) d\sigma_2 \right) \sigma_1\mathbf{y} d\sigma_1 \right) \mathbf{y}. \quad (3.23)$$

Procedemos entonces a acotar $\mathbf{b}_g(t, \mathbf{y})$. Puesto que, por hipótesis, todas las órbitas de las soluciones hiperbólicas están contenidas en un compacto común, dado $\delta_0 > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que el compacto $B_k = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| \leq k\}$ contiene al conjunto acotado dado por

$$\bigcup_{\mathbf{g} \in \mathcal{F}} \{\mathbf{x}_g(t) + \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : t \in \mathbb{R}, |\mathbf{y}| \leq \delta_0\}.$$

La acotación de la familia \mathcal{F} en $\mathcal{C}^{b,2}$ implica la acotación de \mathcal{F} en cada una de las seminormas $|\cdot|_{k,2}$, luego existe $M > 0$ tal que para todo $\mathbf{g} \in \mathcal{F}$ se tiene que $|\mathbf{g}|_{k,2} \leq M$. Entonces,

$$\|D^2\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_g(t) + \sigma_2\sigma_1\mathbf{y})\|_{\mathcal{L}_2} \leq |\mathbf{g}|_{k,2} \leq M, \quad \forall \mathbf{g} \in \mathcal{F}, t \in \mathbb{R}, |\mathbf{y}| \leq \delta_0, \sigma_1, \sigma_2 \in [0, 1]$$

y, por tanto, $|\mathbf{b}_g(t, \mathbf{y})| \leq M|\mathbf{y}|^2$ para todo $t \in \mathbb{R}$, todo $|\mathbf{y}| \leq \delta_0$ y todo $\mathbf{g} \in \mathcal{F}$. En consecuencia, dado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño como para que $\alpha > K\epsilon$, existe un $0 < \delta \leq K^{-1} \min\{\epsilon/M, \delta_0\}$ tal que si $|\mathbf{y}| \leq K\delta$ se tenga que $|\mathbf{b}_g(t, \mathbf{y})| \leq \epsilon|\mathbf{y}|$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{g} \in \mathcal{F}$. No hay pérdida de generalidad en suponer $K \geq 1$, ya que si se tiene una dicotomía exponencial con constante $K' > 0$, esta se puede sustituir por cualquier número positivo mayor y se sigue teniendo una dicotomía exponencial.

Dada entonces una solución $\mathbf{y}(t)$ de (3.21), que por cambio de variable se corresponde con una solución $\mathbf{x}(t)$ de (3.17), se tiene que la fórmula de variación de las constantes en (3.22) nos garantiza que dados $s \leq t$ para los que la solución esté definida, si llamamos $X_g(t)$ a una matriz fundamental del sistema linealizado $\dot{\mathbf{y}} = D\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_g(t))\mathbf{y}$,

$$\mathbf{y}(t) = X_g(t)X_g^{-1}(s)\mathbf{y}(s) + \int_s^t X_g(t)X_g^{-1}(r)\mathbf{b}_g(r, \mathbf{y}(r)) dr.$$

Ahora, se puede acotar este sistema habida cuenta la cota común que por hipótesis se ha supuesto que tiene $\|X_g(t)X_g^{-1}(s)\|$ para todo $\mathbf{g} \in \mathcal{F}$ y la que se ha conseguido para $\mathbf{b}_g(t, \mathbf{y})$:

$$|\mathbf{y}(t)| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}|\mathbf{y}(s)| + \int_s^t Ke^{-\alpha(t-r)}\epsilon|\mathbf{y}(r)| dr,$$

siendo esta acotación válida siempre que $|\mathbf{y}(r)| \leq K\delta$ para todo $r \in [s, t]$. Ahora, la aplicación del Lema 2.1.1 de Gronwall en su segunda versión a la función $|\mathbf{y}(t)|e^{\alpha t}$ nos permite concluir que siempre que $|\mathbf{y}(r)| \leq K\delta$ en $r \in [s, t]$ se verifica que

$$|\mathbf{y}(t)| \leq K|\mathbf{y}(s)|e^{-(\alpha-K\epsilon)(t-s)}. \quad (3.24)$$

Al haber considerado antes ϵ suficientemente pequeño como para que $\alpha > K\epsilon$, la exponencial que aparece en la fórmula es decreciente. Veamos entonces que si para algún $s \in \mathbb{R}$ se tiene que $|\mathbf{y}(s)| \leq \delta$ entonces la solución está definida hasta $+\infty$ y se da la desigualdad que se acaba de probar. Para ello, definimos $t_0 = \sup \{\hat{t} \in [s, \infty) : |\mathbf{y}(r)| \leq K\delta \text{ para todo } r \in [s, \hat{t}]\}$. Si este valor fuera finito, aplicando (3.24) en $[s, \hat{t}]$ tendríamos que $|\mathbf{y}(\hat{t})| \leq K|\mathbf{y}(s)|e^{-(\alpha-K\epsilon)(\hat{t}-s)} < K\delta$. Ahora bien, entonces, como $|\mathbf{y}(\hat{t})| < K\delta$, por continuidad $\mathbf{y}(t)$ sigue siendo menor o igual que $K\delta$ en un entorno más allá de \hat{t} , lo que contradice la definición de \hat{t} , llevando a que $\hat{t} = \infty$, es decir, que la solución está definida hasta $+\infty$. Además se tiene que $|\mathbf{y}(t)| \leq K\delta$ para $t \in [s, \infty)$, pudiendo aplicarse en dicho intervalo la desigualdad (3.24). Por último, es importante recordar que la constante $\delta > 0$ es válida independientemente de $\mathbf{g} \in \mathcal{F}$.

Deshaciendo el cambio de variable y resumiendo, se tiene que dado cualquier $\alpha' < \alpha$ existe $\delta = \delta(\alpha') > 0$ tal que para cualquier $\mathbf{g} \in \mathcal{F}$ se tiene que, si para algún $s \in \mathbb{R}$ se verifica que una solución $\mathbf{x}(t)$ de (3.17) cumple que $|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_{\mathbf{g}}(s)| \leq \delta$, entonces

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{\mathbf{g}}(t)| \leq Ke^{-\alpha'(t-s)}|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_{\mathbf{g}}(s)|, \quad \text{para todo } t \geq s. \quad (3.25)$$

Esta es la condición de estabilidad asintótica exponencial para la solución $\mathbf{x}_{\mathbf{g}}$, teniendo además constantes de estabilidad uniformes para una familia de ellas. Es lo que buscábamos probar. \square

A continuación, se presenta el teorema que veníamos buscando en este capítulo, el teorema de persistencia de soluciones hiperbólicas atractivas. Fundamentado sobre la Proposición 3.2.1, este teorema supondrá una herramienta imprescindible para el desarrollo del Capítulo 4. Proporcionará el resultado necesario para probar la existencia del atractor pullback local y la existencia de un dominio de atracción no autónomo de los atractores exponencialmente estables del sistema del futuro. La persistencia se enuncia en los siguientes términos: las pequeñas perturbaciones de un sistema diferencial que tiene una solución hiperbólica atractiva también tienen soluciones hiperbólicas atractivas y estas son cercanas a la del sistema sin perturbar. El tamaño de las perturbaciones permitidas se medirá precisamente a través de las seminormas introducidas en los espacios de funciones de la Sección 2.2.

Teorema 3.2.4 (Persistencia de soluciones hiperbólicas atractivas). Sea $\mathbf{g} \in \mathcal{C}^{b,1}$ y $\mathbf{x}_{\mathbf{g}}$ una solución hiperbólica atractiva de

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}). \quad (3.26)$$

Se supone además que $D\mathbf{g}$ es uniformemente continua en los conjuntos de la forma $\mathbb{R} \times K$, con $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Fijado $\epsilon_0 > 0$, se considera el conjunto acotado

$$\Gamma_0 = \{\mathbf{x}_{\mathbf{g}}(t) + \mathbf{y} : t \in \mathbb{R}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, |\mathbf{y}| \leq \epsilon_0\}. \quad (3.27)$$

Sea $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ cumpliendo que $\Gamma_0 \subseteq B_k = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| \leq k\}$. Entonces existe $\delta_0 > 0$ tal que para cualquier $\mathbf{h} \in \mathcal{C}^{b,1}$, con $|\mathbf{h} - \mathbf{g}|_{k,b,1} < \delta_0$, se verifica que

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{h}(t, \mathbf{x}) \quad (3.28)$$

admite una solución hiperbólica atractiva \mathbf{x}_h con un par de dicotomía exponencial que es común para todo \mathbf{h} bajo esas condiciones. Además, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) \leq \delta_0$ continua tal que si $|\mathbf{h} - \mathbf{g}|_{k,b,1} < \delta(\epsilon)$ entonces $|\mathbf{x}_h - \mathbf{x}_g|_\infty < \epsilon$. Se verifica que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta(\epsilon) = 0$.

Demostración. La idea principal de la demostración va a ser aplicar un teorema de punto fijo a la fórmula de variación de las constantes para encontrar la solución hiperbólica atractiva buscada. Se procede, por tanto, en dicha dirección. Como \mathbf{x}_g es una solución hiperbólica atractiva de (3.26), se tiene que

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = D\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_g(t))\mathbf{y} \quad (3.29)$$

es Hurwitz en $+\infty$ con par de dicotomía exponencial (K, α) . Denominamos $X(t)$ a la matriz fundamental del sistema (3.29). Para buscar soluciones del sistema (3.28), lo escribimos a través del cambio de variable $\mathbf{x} = \mathbf{x}_g(t) + \mathbf{y}$, que resulta en

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{h}(t, \mathbf{x}_g(t) + \mathbf{y}) - \mathbf{g}(t, \mathbf{x}_g(t)) = D\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_g(t))\mathbf{y} + \mathbf{b}_h(t, \mathbf{y}), \quad (3.30)$$

donde

$$\mathbf{b}_h(t, \mathbf{y}) = \mathbf{h}(t, \mathbf{x}_g(t) + \mathbf{y}) - \mathbf{g}(t, \mathbf{x}_g(t)) - D\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_g(t))\mathbf{y}. \quad (3.31)$$

Como por hipótesis $D\mathbf{g}$ es uniformemente continua en el conjunto $\mathbb{R} \times B_k$, existe $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ tal que para todo $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ que verifique $|\mathbf{y}| \leq \epsilon$ se tenga que

$$\|D\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_g(t) + \mathbf{y}) - D\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_g(t))\| \leq \frac{\alpha}{K} \cdot \frac{1}{4} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \quad (3.32)$$

En consecuencia, para cualquier $\mathbf{h} \in \mathcal{C}^{b,1}$ tal que $|\mathbf{h} - \mathbf{g}|_{k,b,1} \leq (\alpha/K) \cdot (1/4)$, cualquier $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ con $|\mathbf{y}| \leq \epsilon$ y $t \in \mathbb{R}$ se sigue que

$$\begin{aligned} & \|D\mathbf{h}(t, \mathbf{x}_g(t) + \mathbf{y}) - D\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_g(t))\| \\ & \leq \|D\mathbf{h}(t, \mathbf{x}_g(t) + \mathbf{y}) - D\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_g(t) + \mathbf{y})\| + \|D\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_g(t) + \mathbf{y}) - D\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_g(t))\| \\ & \leq |\mathbf{h} - \mathbf{g}|_{k,b,1} + \frac{\alpha}{K} \cdot \frac{1}{4} \leq \frac{\alpha}{K} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{\alpha}{K} \cdot \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

donde el segundo sumando se ha tratado por medio de la convergencia uniforme (3.32) mientras que el primero por la definición de seminorma (2.9) junto con la hipótesis del enunciado de que $\Gamma_0 \subseteq B_k$. Para proceder como se indicó al principio de la demostración necesitaremos conocer una cota para la función \mathbf{b}_h . En esa línea, escribimos dicha función de forma más conveniente:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_h(t, \mathbf{y}) &= \mathbf{h}(t, \mathbf{x}_g(t) + \mathbf{y}) - \mathbf{g}(t, \mathbf{x}_g(t)) - D\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_g(t))\mathbf{y} \\ &= \left(\mathbf{h}(t, \mathbf{x}_g(t) + \mathbf{y}) - \mathbf{h}(t, \mathbf{x}_g(t)) - D\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_g(t))\mathbf{y} \right) + \left(\mathbf{h}(t, \mathbf{x}_g(t)) - \mathbf{g}(t, \mathbf{x}_g(t)) \right) \\ &= \left(\int_0^1 (D\mathbf{h}(t, \mathbf{x}_g(t) + \lambda\mathbf{y}) - D\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_g(t))) d\lambda \right) \mathbf{y} + \left(\mathbf{h}(t, \mathbf{x}_g(t)) - \mathbf{g}(t, \mathbf{x}_g(t)) \right), \end{aligned}$$

donde se ha utilizado la expresión integral del resto del teorema de Taylor. El segundo sumando está acotado por $|\mathbf{h} - \mathbf{g}|_{k,b,1}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, mientras que el primero, por (3.33), está acotado por $(\alpha/K) \cdot (\epsilon/2)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ siempre que $|\mathbf{h} - \mathbf{g}|_{k,b,1} \leq (\alpha/K) \cdot (1/4)$ y $|\mathbf{y}|_\infty < \epsilon$. En

consecuencia, siempre que $|\mathbf{h} - \mathbf{g}|_{k,b,1} \leq (\alpha/K) \cdot (1/4) \cdot \min\{1, \epsilon\}$ y además $|\mathbf{y}|_\infty < \epsilon$, se tendrá que

$$|\mathbf{b}_h(t, \mathbf{y})| \leq \frac{\alpha}{K} \cdot \frac{\epsilon}{2} + |\mathbf{h} - \mathbf{g}|_{k,b,1} \leq \frac{\alpha}{K} \cdot \frac{\epsilon}{2} + \frac{\alpha}{K} \cdot \frac{\epsilon}{4} = \frac{\alpha}{K} \cdot \frac{3}{4} \cdot \epsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.34)$$

Es importante recalcar que en este paso se ha introducido una nueva restricción sobre $|\mathbf{h} - \mathbf{g}|_{k,b,1}$, que es $|\mathbf{h} - \mathbf{g}|_{k,b,1} \leq (\alpha/K) \cdot (1/4) \cdot \min\{1, \epsilon\}$, la cual se asumirá implícitamente hasta el final de la prueba, para poder utilizar tanto (3.34) como las ecuaciones precedentes, ya que es más exigente que $|\mathbf{h} - \mathbf{g}|_{k,b,1} \leq (\alpha/K) \cdot (1/4)$. De hecho, si se define $\delta = \delta(\epsilon) = (\alpha/K) \cdot (1/4) \cdot \min\{1, \epsilon\} > 0$, se tiene que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta(\epsilon) = 0$ y este valor cumplirá los requerimientos del enunciado. Por otro lado, dados $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_h(t, \mathbf{y}_1) - \mathbf{b}_h(t, \mathbf{y}_2) &= \mathbf{h}(t, \mathbf{x}_g(t) + \mathbf{y}_1) - \mathbf{h}(t, \mathbf{x}_g(t) + \mathbf{y}_2) - D\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_g(t))(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) \\ &= \int_0^1 \left(D\mathbf{h}(t, \mathbf{x}_g(t) + \lambda\mathbf{y}_1 + (1-\lambda)\mathbf{y}_2) - D\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_g(t)) \right) (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) d\lambda, \end{aligned}$$

y si se supone que $|\mathbf{y}_1| \leq \epsilon$, $|\mathbf{y}_2| \leq \epsilon$, entonces por (3.33), como

$$|\lambda\mathbf{y}_1 + (1-\lambda)\mathbf{y}_2| \leq \lambda|\mathbf{y}_1| + (1-\lambda)|\mathbf{y}_2| \leq \lambda\epsilon + (1-\lambda)\epsilon = \epsilon,$$

se verifica que

$$|\mathbf{b}_h(t, \mathbf{y}_1) - \mathbf{b}_h(t, \mathbf{y}_2)| \leq \frac{\alpha}{K} \cdot \frac{1}{2} \cdot |\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1|. \quad (3.35)$$

Considerando ahora $\mathbf{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua y acotada, $|\mathbf{y}|_\infty < \epsilon$, la expresión (3.33) nos asegura que

$$\|D\mathbf{h}(t, \mathbf{x}_g(t) + \mathbf{y}(t)) - D\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_g(t))\| \leq \frac{\alpha}{K} \cdot \frac{1}{2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (3.36)$$

expresión que utilizaremos en la parte final de la prueba para mostrar que la solución obtenida por iteración de punto fijo es, de hecho, una solución hiperbólica atractiva. Por otra parte, el Corolario 3.1.10 nos garantiza que el sistema (3.30) con la función $\mathbf{y}_0(t)$ sustituida en el término no homogéneo

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = D\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_g(t))\mathbf{y} + \mathbf{b}_h(t, \mathbf{y}_0(t)) \quad (3.37)$$

tiene una única solución acotada, $T_h\mathbf{y}_0$, que viene dada por

$$T_h\mathbf{y}_0(t) = \int_{-\infty}^t X(t)X^{-1}(s) \mathbf{b}_h(s, \mathbf{y}_0(s)) ds. \quad (3.38)$$

A continuación, se busca aplicar un proceso de iteración de punto fijo a la ecuación anterior, ya que si se encuentra un $\mathbf{y}_0(t)$ que sea solución de (3.37) donde el término no homogéneo dependa de esta misma solución, esta será solución también de (3.30). Para elegir correctamente el conjunto de funciones continuas con cota común en el que vamos a hacer que el operador T_h sea contractivo necesitamos utilizar la cota (3.34) que hemos obtenido antes para $\mathbf{b}_h(t, \mathbf{y})$ junto con la cota (3.12) que nos da el Corolario 3.1.10, obteniendo que si $|\mathbf{y}_0|_\infty \leq \epsilon$,

$$|T_h\mathbf{y}_0(t)| \leq \frac{3}{4}\epsilon \quad \Rightarrow \quad |T_h\mathbf{y}_0|_\infty \leq \frac{3}{4}\epsilon. \quad (3.39)$$

Ahora, al juntar (3.35) con (3.12) se consigue que si $|\mathbf{y}_1|_\infty \leq \epsilon$, $|\mathbf{y}_2|_\infty \leq \epsilon$

$$|T_h\mathbf{y}_1(t) - T_h\mathbf{y}_2(t)| \leq \frac{1}{2}|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1|_\infty \quad \Rightarrow \quad |T_h\mathbf{y}_1 - T_h\mathbf{y}_2|_\infty \leq \frac{1}{2}|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1|_\infty. \quad (3.40)$$

Consideramos entonces la siguiente bola cerrada centrada en el origen del espacio $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$:

$$E = \left(\left\{ \mathbf{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ continuas y acotadas : } |\mathbf{y}|_\infty \leq \epsilon \right\}, |\cdot|_\infty \right).$$

Como E es un cerrado de un espacio de Banach es un espacio métrico completo, el ámbito adecuado de aplicación del teorema del punto fijo de Banach. Entonces, al considerar el operador no lineal $T_{\mathbf{h}} : E \rightarrow E$, la expresión (3.39) nos garantiza que está bien definido y (3.40) nos garantiza que es contractivo. Por tanto, el teorema de punto fijo de Banach asegura que existe una única función $\mathbf{y}_{\mathbf{h}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua, con $|\mathbf{y}_{\mathbf{h}}|_\infty \leq \epsilon$ que es la única solución acotada de (3.30) y, por tanto, deshaciendo el cambio de variable, $\mathbf{x}_{\mathbf{h}} = \mathbf{x}_{\mathbf{g}} + \mathbf{y}_{\mathbf{h}}$ es la única solución acotada de (3.28) y se verifica que $|\mathbf{x}_{\mathbf{h}} - \mathbf{x}_{\mathbf{g}}|_\infty = |\mathbf{y}_{\mathbf{h}}|_\infty \leq \epsilon$.

Gracias a que $(\alpha/K) \cdot (1/2) < \alpha/K$, en vista de (3.36), la Proposición 3.2.1 garantiza que para cualquier $\mathbf{h} \in \mathcal{C}^{b,1}$ con $|\mathbf{h} - \mathbf{g}|_{k,b,1} \leq \delta$, se verifica que el sistema lineal asociado a la matriz continua $D\mathbf{h}(t, \mathbf{x}_{\mathbf{g}}(t) + \mathbf{y}_{\mathbf{h}}(t))$ es Hurwitz en $+\infty$ y además, existe un par de dicotomía exponencial (K, α') común para todos ellos. Esto implica que $\mathbf{x}_{\mathbf{h}}$, de hecho, es una solución hiperbólica atractiva de (3.28) para cada $\mathbf{h} \in \mathcal{C}^{b,1}$ verificando la condición antes indicada. \square

De la misma forma que se mencionó que existen resultados de persistencia de dicotomías exponenciales que no sean de tipo Hurwitz, merece la pena mencionar que pasa lo mismo con soluciones hiperbólicas que no sean necesariamente atractivas.

El siguiente corolario da las condiciones precisas de aplicación de estos resultados que necesitaremos en el Capítulo 4. Exigiendo a una familia de funciones un poco más regularidad de la necesaria para aplicar el Teorema 3.2.4 se consigue satisfacer la uniformidad del Teorema 3.2.3 a la par que satisfacer las hipótesis del Teorema 3.2.4. La regularidad $\mathcal{C}^{b,2}$ que se exige aquí será necesaria en el resto del trabajo.

Corolario 3.2.5. Sea $\mathbf{g} \in \mathcal{C}^{b,2}$ y $\mathbf{x}_{\mathbf{g}}$ una solución hiperbólica atractiva de

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}). \quad (3.41)$$

Se considera una familia acotada de $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}^{b,2}$. Fijado $\epsilon_0 > 0$, se considera el conjunto acotado

$$\Gamma_0 = \{ \mathbf{x}_{\mathbf{g}}(t) + \mathbf{y} : t \in \mathbb{R}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, |\mathbf{y}| \leq \epsilon_0 \}.$$

Sea $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ cumpliendo que $\Gamma_0 \subseteq B_k = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| \leq k \}$. Entonces existe $\delta_0 > 0$ tal que, para cualquier $\mathbf{h} \in \mathcal{F}$ que satisfaga $|\mathbf{h} - \mathbf{g}|_{k,b,1} < \delta_0$, se verifica que

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{h}(t, \mathbf{x}) \quad (3.42)$$

admite una solución hiperbólica atractiva $\mathbf{x}_{\mathbf{h}}$ con un par de dicotomía exponencial y un dominio de atracción comunes para todo \mathbf{h} en esas condiciones. Además, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) \leq \delta_0$ continua tal que si $|\mathbf{h} - \mathbf{g}|_{k,b,1} < \delta(\epsilon)$ entonces $|\mathbf{x}_{\mathbf{h}} - \mathbf{x}_{\mathbf{g}}|_\infty < \epsilon$. Se verifica que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta(\epsilon) = 0$.

Demostración. Aplicamos el Teorema 3.2.4. La hipótesis de que $D\mathbf{g}$ sea uniformemente continua en los conjuntos de la forma $\mathbb{R} \times K$ con $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto se satisface gracias a que si $\mathbf{g} \in \mathcal{C}^{b,2}$, entonces $D\mathbf{g}$ tiene derivada acotada en dichos conjuntos, luego es uniformemente continua. El resultado añadido de que se tenga un dominio de atracción común para todos los elementos de la familia que satisfagan esas condiciones es aportado por el Teorema 3.2.3, cuyas hipótesis se satisfacen gracias a la aplicación del Teorema 3.2.4. \square

Capítulo 4

Puntos de no retorno

Este capítulo tratará de dar un marco matemático adecuado para el estudio de transiciones críticas. Como ya se mencionó brevemente en el Capítulo 1, se consideran un estado inicial y un estado final en los que la evolución del sistema está regido por sendos sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas. Ambos dos se corresponden con distintos valores del parámetro de un sistema de ecuaciones que depende de λ . La transición entre ambos estados se modeliza a través de la introducción de una función en el parámetro del sistema que recoja su variación respecto de la variable temporal y , de esta forma, la transición entre los dos estados de este sistema esté descrita por una sistema de ecuaciones diferenciales no autónomo. En este Capítulo seguiremos el enfoque de [2], con argumentos para las pruebas basadas en ideas de [10]. En las páginas siguientes pasaremos por la definición del atractor pullback local que va a describir el comportamiento del sistema en estudio y acabaremos por aportar definiciones precisas de mecanismos que pueden provocar transiciones críticas.

4.1. Marco de trabajo para estudiar puntos de no retorno

En vista de lo anterior, se tratarán sistemas asintóticamente autónomos de la forma:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda(ct)), \quad (4.1)$$

donde $t \in \mathbb{R}$ es la variable temporal, $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es la función continuamente diferenciable que describe el estado del sistema en cada instante de tiempo, $\Lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ es la función de transición entre los estados inicial y final del sistema, que se pide que sea continuamente diferenciable, $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{2,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ representa la ley diferencial que rige la evolución del sistema, y $c > 0$ es la velocidad de la transición. La función Λ controla la forma de la transición entre el sistema del pasado ($\lim_{t \rightarrow -\infty} \Lambda(t)$) y el del futuro ($\lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda(t)$) a través de un parámetro en la ecuación diferencial. El valor c refleja la velocidad de dicha transición y será el parámetro en función del cual queremos estudiar la transición.

Utilizaremos notación de procesos (ver Sección 2.3) para describir las soluciones de los problemas de valor inicial asociados a la ecuación diferencial no autónoma (4.1), en la que la regularidad de \mathbf{f} asegura la existencia y unicidad de soluciones [4]. Dado

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda(ct)), \quad \mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0, \quad (4.2)$$

con $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $s \in \mathbb{R}$, la solución única de este problema de valor inicial (4.2), $\mathbf{x}(\cdot, s, \mathbf{x}_0, c)$, si se asume existencia global en $[s, \infty)$, induce el proceso

$$S_c(t, s)\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t, s, \mathbf{x}_0, c), \quad t \geq s.$$

En caso de no asumir existencia global induce un proceso local que denotaremos de la misma manera. Cabe destacar que el proceso $S_c(t, s)$ depende tanto de la forma de la función de transición Λ como de la velocidad de transición $c > 0$ elegida.

Es importante recalcar que si definimos $\mathbf{f}_c : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $\mathbf{f}_c(t, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda(ct))$, se tiene que, como Λ es continua, por ser $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{2,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ se sigue que $\mathbf{f}_c \in \mathcal{C}^{0,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = \mathcal{C}^{0,2}$ y, además, dado $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto,

$$D^\alpha \mathbf{f}_c(\mathbb{R} \times K) \subseteq D^\alpha \mathbf{f} \left(K \times \left[\sup_{t \in \mathbb{R}} \Lambda(ct), \inf_{t \in \mathbb{R}} \Lambda(ct) \right] \right), \quad |\alpha| \leq 2,$$

luego $D^\alpha \mathbf{f}_c$ es acotada sobre los conjuntos de la forma $\mathbb{R} \times K$ si se pide la condición de que $\sup_{t \in \mathbb{R}} \Lambda(ct)$ y $\inf_{t \in \mathbb{R}} \Lambda(ct)$ sean finitos, como haremos a continuación. En consecuencia se tiene, además, que $\mathbf{f}_c \in \mathcal{C}^{b,2}$. Se dice que la variación temporal de la función \mathbf{f} es compactificada por la función de transición Λ .

Definición 4.1.1 (Conjunto de funciones de transición admisibles). Dados $\lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_- < \lambda_+$, se define

$$\mathcal{P}(\lambda_-, \lambda_+) = \left\{ \Lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, [\lambda_-, \lambda_+]) : \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \Lambda(s) = \lambda_\pm, \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{d\Lambda}{ds}(s) = 0 \right\}.$$

Una vez fijados los valores del parámetro λ_- y λ_+ entre los cuales se va a estudiar una transición, se denotará por \mathcal{X} al *conjunto de puntos de equilibrio* del diagrama de bifurcación de la ecuación autónoma

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda), \quad (4.3)$$

donde $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$ es aquí un parámetro independiente del tiempo. Este sistema autónomo es el que describe, para $\lambda = \lambda_\pm$ el comportamiento asintótico del sistema cuando $t \rightarrow \pm\infty$.

Definición 4.1.2 (Conjunto de puntos de equilibrio). Se define el **conjunto de puntos de equilibrio** de \mathbf{f} en el intervalo de valores del parámetro $[\lambda_-, \lambda_+]$ como

$$\mathcal{X} = \left\{ (\mathbf{x}, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times [\lambda_-, \lambda_+] : \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda) = 0 \right\}. \quad (4.4)$$

Al linealizar el sistema (4.3), se puede separar el conjunto \mathcal{X} en tres conjuntos disjuntos dependiendo del máximo de la parte real de los autovalores de la matriz linealizada $D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)$. Denotaremos $\sigma(A)$ al conjunto de autovalores de una matriz cuadrada A .

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{\text{stab}} &= \left\{ (\mathbf{x}, \lambda) \in \mathcal{X} : \max_{\mu \in \sigma(D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda))} \operatorname{Re}(\mu) < 0 \right\}, \\ \mathcal{X}_{\text{unst}} &= \left\{ (\mathbf{x}, \lambda) \in \mathcal{X} : \max_{\mu \in \sigma(D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda))} \operatorname{Re}(\mu) > 0 \right\}, \\ \mathcal{X}_{\text{bif}} &= \left\{ (\mathbf{x}, \lambda) \in \mathcal{X} : \max_{\mu \in \sigma(D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda))} \operatorname{Re}(\mu) = 0 \right\}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Es claro que se tiene que se trata de conjuntos disjuntos tales que $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{\text{stab}} \cup \mathcal{X}_{\text{unst}} \cup \mathcal{X}_{\text{bif}}$.

Definición 4.1.3 (Conjunto de puntos de equilibrio regular). Se dice que \mathcal{X} es **regular** si el conjunto \mathcal{X}_{bif} es aislado.

La definición de que \mathcal{X} es regular se mantendrá hasta el final del trabajo. A continuación, se presentan dos definiciones de tipos de curvas en \mathcal{X} : ramas y caminos, que proporcionarán los conceptos necesarios para enunciar los teoremas de rastreo de este capítulo.

Definición 4.1.4 (Rama en \mathcal{X}). Se dirá que una curva dada por la aplicación localmente inyectiva $\phi : I \rightarrow \mathcal{X}$, con $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $\phi \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{X})$, es una **rama** si $\text{Im}(\phi)$ no interseca con \mathcal{X}_{bif} salvo quizá en los extremos de la curva. Además, diremos que es una **rama estable** si $\text{Im}(\phi) \subseteq \overline{\mathcal{X}_{\text{stab}}}$.

Comentario 4.1.5. Se dice que dos aplicaciones \mathcal{C}^1 localmente inyectivas $\phi_1 : I_1 \rightarrow \mathcal{X}$ y $\phi_2 : I_2 \rightarrow \mathcal{X}$ están relacionadas por \mathcal{R} si existe una aplicación de clase \mathcal{C}^1 biyectiva $\varphi : I_1 \rightarrow I_2$, que verifique $\varphi'(t) \neq 0$ para todo $t \in I_1$ y que sea un cambio de variable ($\phi_2 \circ \varphi = \phi_1$). Una curva \mathcal{C}^1 es una clase de equivalencia definida por \mathcal{R} . De esta forma, las ramas en \mathcal{X} son clases de equivalencia definidas por \mathcal{R} .

Definición 4.1.6 (Camino en \mathcal{X}). Dados $\Lambda \in \mathcal{P}(\lambda_-, \lambda_+)$ y $\mathbf{X} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, diremos que una aplicación continua $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$ definida por $\phi(s) = (\mathbf{X}(s), \Lambda(s))$ es un **camino** si existen límites $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \phi(s) = (\mathbf{X}_{\pm}, \lambda_{\pm})$, con $\mathbf{X}_{+}, \mathbf{X}_{-} \in \mathbb{R}^n$. Además, se dirá que es un **camino estable** si $\text{Im}(\phi) \subseteq \overline{\mathcal{X}_{\text{stab}}}$.

Comentario 4.1.7. Cabe destacar algunos aspectos importantes en lo referente a las dos definiciones que se acaban de formular. En primer lugar, en la definición de camino, la condición $\text{Im}(\phi) \subseteq \mathcal{X}$ garantiza que para cada $s \in \mathbb{R}$ se tiene que $\mathbf{X}(s)$ es un punto de equilibrio de la ecuación autónoma (4.3) con parámetro $\Lambda(s)$. Por otro lado, las ramas en \mathcal{X} son independientes de la función de transición Λ elegida, mientras que los caminos en \mathcal{X} no lo son, su parametrización viene dada directamente por $s = ct$. Por último, las ramas conectan puntos para diferentes valores de λ sin tener que tratarse de los puntos extremos de λ_- y λ_+ , mientras que en el caso del camino sí que ha de ser así. De hecho, en el Capítulo 7 se verá como, bajo la hipótesis de que \mathcal{X} sea regular, los caminos se pueden descomponer en una cantidad finita de ramas.

Proposición 4.1.8 (Continuación de ramas). Si $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{1,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, entonces se tiene que por cada punto de equilibrio hiperbólico $(\mathbf{x}_0, \lambda_0) \in \mathcal{X}$ pasa una única rama en el diagrama de bifurcación, y el vector tangente a la rama en dicho punto tiene componente no nula en dirección λ . En particular, por cada punto de $\mathcal{X}_{\text{stab}}$ pasa una única rama estable.

Demostración. El conjunto \mathcal{X} es el conjunto de puntos (\mathbf{x}, λ) con $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$ que verifican que $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda) = 0$. Si $(\mathbf{x}_0, \lambda_0) \in \mathcal{X}$ es un punto de equilibrio hiperbólico, entonces se tiene que $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$ tiene rango máximo, luego el Teorema de la Función Implícita nos garantiza que $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda) = 0$ define localmente una única curva de clase \mathcal{C}^1 que pasa por el punto $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$, que es la rama buscada. Además, dicha curva queda parametrizada por λ , de forma que el vector de dirección de la rama en dicho punto tiene componente no nula en dirección λ . En el caso de los puntos de $\mathcal{X}_{\text{stab}}$, por ser puntos hiperbólicos se aplica lo anterior y, además, la persistencia de los equilibrios exponencialmente estables hace que exista un entorno en el que los equilibrios son exponencialmente estables, siendo estable la rama que pasa por él. \square

Proposición 4.1.9. Sean $(\mathbf{X}_{\pm}, \lambda_{\pm}) \in \mathcal{X}_{\text{stab}}$ y una función de transición $\Lambda \in \mathcal{P}(\lambda_-, \lambda_+)$. Se asume que $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{1,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ y que \mathcal{X} es regular. Entonces se verifica una de las dos posibilidades siguientes:

- (I) Existe una única aplicación $\mathbf{X} : [\lambda_-, \lambda_+] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase \mathcal{C}^1 , con $(\mathbf{X}(\lambda), \lambda) \in \mathcal{X}_{\text{stab}}$ para todo $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$, que conecta $\mathbf{X}(\lambda_{\pm}) = \mathbf{X}_{\pm}$, y que define un camino estable $\phi(s) = (\mathbf{X}(\Lambda(s)), \Lambda(s))$. Entonces se dice que ϕ *atraviesa una única rama estable*.
- (II) Existen unos únicos $\lambda_0 \in (\lambda_-, \lambda_+)$ y $\mathbf{X} : [\lambda_-, \lambda_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase \mathcal{C}^1 , con $(\mathbf{X}(\lambda), \lambda) \in \mathcal{X}_{\text{stab}}$ para todo $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_0)$ y $\mathbf{X}(\lambda_-) = \mathbf{X}_-$, tales que o bien existe el límite $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \mathbf{X}(\lambda) = \mathbf{X}_0$, con $(\mathbf{X}_0, \lambda_0) \in \mathcal{X}_{\text{bif}}$, o bien $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} |\mathbf{X}(\lambda)| = \infty$.

Demostración. La función que resulta de la aplicación del teorema de la función implícita en la Proposición 4.1.8 tendrá un dominio de definición a través del cual sólo pasa por puntos de $\mathcal{X}_{\text{stab}}$ máximo $\mathbf{X} : [\lambda_-, \lambda_0) \rightarrow \mathcal{X}$. Si $\lambda_0 > \lambda_+$ se tiene la situación de (I), habiéndose conseguido la parametrización de la rama estable. Además, se sabe que $\lambda_0 \neq \lambda_+$ porque $(\mathbf{X}_+, \lambda_+) \in \mathcal{X}_{\text{stab}}$ por hipótesis. Si no se da el caso anterior entonces $\lambda_0 \in (\lambda_-, \lambda_+)$. Supongamos que existen $(\mathbf{X}_1, \lambda_0), (\mathbf{X}_2, \lambda_0) \in \mathcal{X}_{\text{bif}}$ de forma que $\mathbf{X}(\lambda)$ se acumula en \mathbf{X}_1 y \mathbf{X}_2 cuando $\lambda \rightarrow \lambda_0$, es decir, para $j = 1, 2$ existen sucesiones crecientes $\{\lambda_n^j\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [\lambda_-, \lambda_0)$ tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^j = \lambda_0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{X}(\lambda_n^j) = \mathbf{X}_j$. No hay pérdida de generalidad en suponer que $\lambda_n^1 < \lambda_n^2 < \lambda_{n+1}^1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como \mathcal{X} es regular \mathcal{X}_{bif} no tiene puntos de acumulación, luego se sigue que existe $\delta > 0$ tal que $(\overline{B}(\mathbf{X}_j, \delta) \times \{\lambda_0\}) \cap \mathcal{X}_{\text{bif}} = (\mathbf{X}_j, \lambda_0)$ para $j = 1, 2$. Ahora bien, como $\mathbf{X}(\lambda)$ se acumula tanto en \mathbf{X}_1 como en \mathbf{X}_2 de forma alternada, esta tiene que atravesar una cantidad infinita de veces la frontera del compacto $K = \overline{B}(\mathbf{X}_1, \delta) \setminus B(\mathbf{X}_1, \delta/2)$ cuando $\lambda \rightarrow \lambda_0$, lo que implica que existe una sucesión creciente $\{\lambda_n^3\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq [\lambda_-, \lambda_0)$ que verifica que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^3 = \lambda_0$ y $\mathbf{X}(\lambda_n^3) \in K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por la compacidad de K se tiene que $\mathbf{X}(\lambda_n^3)$ admite una subsucesión convergente hacia un $\mathbf{X}_3 \in K$. Por la definición de λ_0 y la continuidad de \mathbf{X} se tiene $(\mathbf{X}_3, \lambda_0) \in \mathcal{X}_{\text{bif}}$, y se llega a un absurdo porque no podía haber más puntos de bifurcación en dicho compacto. La unicidad de los puntos de acumulación de \mathbf{X} lleva a que o bien existe el límite $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \mathbf{X}(\lambda) \in \mathbf{X}_0$, con $(\mathbf{X}_0, \lambda_0) \in \mathcal{X}_{\text{bif}}$, o bien $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} |\mathbf{X}(\lambda)| = \infty$, como se quería probar. \square

4.2. Existencia de atractor pullback local

Como ya se ha anunciado anteriormente, el objeto matemático que describirá la evolución del sistema a lo largo de la transición será el *atractor pullback local*. En esta sección se probará su existencia para el problema que se ha introducido en la sección anterior, utilizando los resultados de robustez de soluciones hiperbólicas del Capítulo 3. Cabe destacar dos diferencias fundamentales con la definición general de atractor pullback que se aportó en la Sección 2.3: ahora el atractor pullback local puede no estar globalmente definido y la atracción pullback se restringe a un entorno del límite en $-\infty$ del atractor, es decir, es local.

Definición 4.2.1 (Atractor pullback local). Se dirá que una solución $\mathbf{x} : (-\infty, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $\beta \in \mathbb{R}$, de (4.1) es un **atractor pullback local** si existe un abierto acotado $U \subset \mathbb{R}^n$ de forma que

- (I) existe $T_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{x}(t) \in U$ para todo $t \leq T_1$,
- (II) existe $T_2 \leq \beta$ tal que para todo $\mathbf{y} \in U$ y $t < T_2$ se verifica que

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} |S(t, s)\mathbf{y} - \mathbf{x}(t)| = 0, \quad \text{uniformemente en } U. \quad (4.6)$$

De hecho, cuando se cumple la propiedad (II) para un $T_2 \leq \beta$ cualquiera, se verifica también para todo $t < \beta$. Esto se comprueba componiendo (4.6) con el proceso, tomando $t' > t$ para los cuales esté definida \mathbf{x} :

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} S(t', s)\mathbf{y} = S(t', t) \lim_{s \rightarrow -\infty} S(t, s)\mathbf{y} = S(t', t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t').$$

Nuestro primer objetivo va a ser demostrar la existencia de un atractor pullback local del sistema (4.1) bajo la hipótesis de que $(\mathbf{X}_-, \lambda_-) \in \mathcal{X}_{\text{stab}}$. Para ello, nos va a ser necesario a definir lados derechos de sistemas diferenciales construidos por truncamiento del lado derecho de nuestra ecuación diferencial original.

Definición 4.2.2 (Truncamientos de (4.1)). Dado $c \in (0, \infty)$, para cada $s \in \mathbb{R}$ se definen los siguientes **truncamientos** del lado derecho de (4.1):

$$\hat{\mathbf{f}}_{c,s}(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda(ct)), & t \in (-\infty, s], \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda(cs)), & t \in (s, \infty), \end{cases} \quad \check{\mathbf{f}}_{c,s}(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda(cs)), & t \in (-\infty, s), \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda(ct)), & t \in [s, \infty). \end{cases}$$

Para demostrar la existencia del atractor pullback local se quiere utilizar las funciones $\hat{\mathbf{f}}_{c,s}$ como aproximaciones al sistema $\mathbf{f}_-(t, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda_-)$, el cual es independiente del tiempo pero que escribimos así para poder utilizar cómodamente el Corolario 3.2.5. Esta independencia del tiempo garantiza precisamente que $\mathbf{f}_- \in \mathcal{C}^{b,2}$. Por otro lado, para los sistemas $\hat{\mathbf{f}}_{c,s}$, la función de transición compactifica la variación temporal, es decir, dado $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto,

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \hat{\mathbf{f}}_{c,s}(\mathbb{R} \times K) \subseteq \frac{\partial^\alpha}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \mathbf{f}(K \times A_c(s)), \quad \text{con } A_c(s) = \left[\inf_{t \in (-\infty, s]} \Lambda(ct), \sup_{t \in (-\infty, s]} \Lambda(ct) \right],$$

donde el conjunto del lado derecho es acotado para todo multíndice $|\alpha| \leq 2$ por continuidad sobre un compacto. Esto garantiza que $\hat{\mathbf{f}}_{c,s} \in \mathcal{C}^{b,2}$ para todo $s \in \mathbb{R}$. De esta forma, podemos definir la familia de lados derechos de sistemas que queremos utilizar para aproximar:

$$\mathcal{F} = \left\{ \hat{\mathbf{f}}_{c,s} \in \mathcal{C}^{b,2} : s \in \mathbb{R} \right\}. \quad (4.7)$$

A continuación, queremos comprobar que esta es una familia acotada de $\mathcal{C}^{b,2}$ para que así se le pueda aplicar el Corolario 3.2.5. Para ello, basta ver que dado cualquier $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ se tiene

$$\sup_{(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times B_k} \|D^\alpha \hat{\mathbf{f}}_{c,s}(t, \mathbf{x})\|_{\mathcal{L}_\alpha} \subseteq \sup_{(\mathbf{x}, \lambda) \in B_k \times A_c(\infty)} \|D^\alpha \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)\|_{\mathcal{L}_\alpha},$$

donde el lado derecho es una cota uniforme para $\alpha = 0, 1, 2$ por continuidad en un compacto y esto garantiza que \mathcal{F} es una familia acotada de $\mathcal{C}^{b,2}$, ya que es acotada en cualquiera de las seminormas que inducen la topología.

Por otro lado, dado $\epsilon_0 > 0$ arbitrario se considera el conjunto $\Gamma_0 = B(\mathbf{X}_-, \epsilon_0)$. Tomamos un $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ de forma que $\Gamma_0 \subseteq B_k = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| \leq k\}$. Entonces,

$$\sup_{(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times B_k} |\hat{\mathbf{f}}_{c,s}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}_-(t, \mathbf{x})| \subseteq \sup_{(\mathbf{x}, \lambda) \in B_k \times A_c(s)} |\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda) - \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda_-)|, \quad (4.8)$$

donde la continuidad de \mathbf{f} asegura, gracias a que $\lim_{s \rightarrow -\infty} \Lambda(cs) = \lambda_-$, que el lado derecho tiende hacia 0 cuando $s \rightarrow -\infty$, ya que $A_c(s) \downarrow \{\lambda_-\}$. Se obtiene lo mismo para $D\mathbf{f}$. En consecuencia, se tiene que

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} |\hat{\mathbf{f}}_{c,s} - \mathbf{f}_-|_{k,b,1} = 0. \quad (4.9)$$

Esto es lo que necesitábamos para enunciar el siguiente teorema. En él, la perturbación de la solución hiperbólica \mathbf{X}_- correspondiente al sistema del pasado dará lugar al atractor pullback local en un entorno de $-\infty$.

Teorema 4.2.3. Dados $(\mathbf{X}_-, \lambda_-) \in \mathcal{X}_{\text{stab}}$ y un $c > 0$ fijo, existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que

(I) si $s \leq s_0$ entonces

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \hat{\mathbf{f}}_{c,s}(t, \mathbf{x}) \quad (4.10)$$

admite una solución hiperbólica atractiva $\hat{\mathbf{x}}_c^s$. Además, existe una función continua creciente $\delta_0 : (-\infty, s_0] \rightarrow \mathbb{R}^+$ con $\lim_{s \rightarrow -\infty} \delta_0(s) = 0$ que verifica que $|\hat{\mathbf{x}}_c^s - \mathbf{X}_-|_\infty \leq \delta_0(s)$,

(II) existen constantes $\delta, K, \alpha > 0$ tales que si, dados $u \leq t \leq s \leq s_0$ y una condición inicial $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_c^s(u)| \leq \delta$, entonces se verifica que

$$|\mathbf{x}(t, u, \mathbf{x}_0, c) - \hat{\mathbf{x}}_c^s(t)| \leq K e^{-\alpha(t-u)} |\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_c^s(u)|, \quad (4.11)$$

(III) si $s \leq s_0$, se tiene que $\hat{\mathbf{x}}_c^{s_0}|_{(-\infty, s)} = \hat{\mathbf{x}}_c^s|_{(-\infty, s)}$ y, además, $\lim_{t \rightarrow -\infty} \hat{\mathbf{x}}_c^s(t) = \mathbf{X}_-$.

Demostración. Se aplica el Corolario 3.2.5 a \mathbf{f}_- y a la familia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}^{b,2}$ que se ha definido en (4.7), ya que se ha visto antes del teorema que se verifican las hipótesis. Para ello, basta notar que el sistema que se va a perturbar, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda_-)$, tiene a $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}_-$ para todo $t \in \mathbb{R}$ como solución hiperbólica atractiva, ya que se trata de un punto crítico exponencialmente asintóticamente estable.

El Corolario 3.2.5, nos garantiza directamente que para el $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ elegido justo antes de (4.8), existe $\eta_0 > 0$ tal que si $|\hat{\mathbf{f}}_{c,s} - \mathbf{f}_-|_{k,b,1} < \eta_0$ entonces existe la solución hiperbólica atractiva $\hat{\mathbf{x}}_c^s$ buscada del sistema perturbado $\hat{\mathbf{f}}_{c,s}$. Además, también garantiza la existencia de una función continua monótona creciente $\mu : (0, \infty) \rightarrow (0, \eta_0]$ tal que $|\hat{\mathbf{x}}_c^s - \mathbf{X}_-|_\infty < \epsilon$ si $|\hat{\mathbf{f}}_{c,s} - \mathbf{f}_-|_{k,b,1} \leq \mu(\epsilon)$, con $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu(\epsilon) = 0$. Ahora, en virtud de (4.9), se tiene que existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $s \leq s_0$ se verifica que $|\hat{\mathbf{f}}_{c,s} - \mathbf{f}_-|_{k,b,1} \leq \mu(\delta/2)$, donde δ es el dominio de atracción uniforme proporcionado por el Corolario 3.2.5. Además, si para $s \leq s_0$ definimos

$$\eta(s) = \sup_{u \leq s} |\hat{\mathbf{f}}_{c,u} - \mathbf{f}_-|_{k,b,1},$$

es claro que es una función continua monótona creciente y (4.9) muestra que tiende hacia 0 cuando $s \rightarrow -\infty$. Para cada $s \leq s_0$ se define

$$\delta_0(s) = \inf \{ \epsilon \in (0, \infty) : \eta(s) \leq \mu(\epsilon) \}. \quad (4.12)$$

Como μ y η son continuas y monótonas crecientes, es claro que $\delta_0 : (-\infty, s_0] \rightarrow [0, \infty)$ es continua y creciente, y gracias a que $\eta(s) \rightarrow 0$ si $s \rightarrow -\infty$ y a que $\mu(\epsilon) \rightarrow 0$ si $\epsilon \rightarrow 0$ se tiene que $\lim_{s \rightarrow -\infty} \delta_0(s) = 0$. Además, δ_0 únicamente toma el valor 0 si $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda(ct)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda_-)$ para algún conjunto de la forma $(t, \mathbf{x}) \in (-\infty, \tilde{s}] \times B_k$. Con esto se acaba el apartado (I), ya que se consigue que $|\hat{\mathbf{x}}_c^s - \mathbf{X}_-|_\infty < \delta_0(s)$ si $s \leq s_0$.

Por otro lado, el Corolario 3.2.5 asegura la existencia del par de dicotomía exponencial común (K, α) para todos estos sistemas linealizados y un ya utilizado dominio de atracción uniforme $\delta > 0$ para todos ellos. Como $\mathbf{x}(t, u, \mathbf{x}_0, c)$ es solución hasta $t \leq s$ de la misma

ecuación que $\hat{\mathbf{x}}_c^s$, se aplica el Teorema 3.2.3 para obtener la desigualdad del enunciado. Así queda probado (II).

Para acabar, aplicando el apartado (I), como gracias a la elección de s_0 se tiene que $\delta_0(s) \leq \delta/2$ para todo $s \leq s_0$, entonces la desigualdad triangular nos garantiza que

$$|\hat{\mathbf{x}}_c^{s_0} - \hat{\mathbf{x}}_c^s|_\infty \leq |\hat{\mathbf{x}}_c^{s_0} - \mathbf{X}_-|_\infty + |\hat{\mathbf{x}}_c^s - \mathbf{X}_-|_\infty \leq \delta_0(s_0) + \delta_0(s) \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta, \quad (4.13)$$

y, por tanto, para $u \leq t \leq s \leq s_0$ como se tiene que $\mathbf{x}(t, u, \hat{\mathbf{x}}_c^{s_0}(u), c) = \hat{\mathbf{x}}_c^{s_0}(t)$. Aplicando lo obtenido en el apartado (II) se deduce que

$$|\hat{\mathbf{x}}_c^{s_0}(t) - \hat{\mathbf{x}}_c^s(t)| \leq K e^{-\alpha(t-u)} |\hat{\mathbf{x}}_c^{s_0}(u) - \hat{\mathbf{x}}_c^s(u)|.$$

Haciendo $u \rightarrow -\infty$ en la ecuación anterior se tiene que $\hat{\mathbf{x}}_c^{s_0}|_{(-\infty, s)} = \hat{\mathbf{x}}_c^s|_{(-\infty, s)}$, como se quería ver. Para acabar, al combinar esto con $|\hat{\mathbf{x}}_c^s - \mathbf{X}_-|_\infty \leq \delta_0(s)$ para $s \leq s_0$ se tiene que necesariamente $\lim_{t \rightarrow -\infty} \hat{\mathbf{x}}_c^s(t) = \mathbf{X}_-$ para cualquier $s \leq s_0$, ya que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |\hat{\mathbf{x}}_c^s(t) - \mathbf{X}_-| = \lim_{t \rightarrow -\infty} |\hat{\mathbf{x}}_c^t(t) - \mathbf{X}_-| \leq \lim_{t \rightarrow -\infty} |\hat{\mathbf{x}}_c^t - \mathbf{X}_-|_\infty \leq \lim_{t \rightarrow -\infty} \delta_0(t) = 0. \quad \square$$

El siguiente resultado que se presenta se corresponde a las truncaciones en $+\infty$, y la perturbación de la solución hiperbólica \mathbf{X}_+ del sistema del futuro. Es análogo al que se acaba de presentar, pero el resultado es ligeramente distinto y requiere un procedimiento diferente en algunos pasos. Lo presentamos ahora por similitud con el anterior pese a que no se utilizará hasta la sección siguiente.

Teorema 4.2.4. Dados $(\mathbf{X}_+, \lambda_+) \in \mathcal{X}_{\text{stab}}$ y un $c > 0$ fijo, existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que

(I) si $s \geq s_0$, entonces el sistema

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \check{\mathbf{f}}_{c,s}(t, \mathbf{x}) \quad (4.14)$$

admite una solución hiperbólica atractiva $\check{\mathbf{x}}_c^s$. Además, existe una función continua decreciente $\delta_0 : [s_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ con $\lim_{s \rightarrow \infty} \delta_0(s) = 0$ que verifica que $|\check{\mathbf{x}}_c^s - \mathbf{X}_+|_\infty \leq \delta_0(s)$.

(II) existen constantes $\delta, K, \alpha > 0$ tales que si, dados $s_0 \leq s \leq u \leq t$ y una condición inicial $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $|\mathbf{x}_0 - \check{\mathbf{x}}_c^s(u)| \leq \delta$, entonces se cumple que

$$|\mathbf{x}(t, u, \mathbf{x}_0, c) - \check{\mathbf{x}}_c^s(t)| \leq K e^{-\alpha(t-u)} |\mathbf{x}_0 - \check{\mathbf{x}}_c^s(u)|.$$

(III) se cumple que $\lim_{t \rightarrow \infty} \check{\mathbf{x}}_c^s(t) = \mathbf{X}_+$.

Demostración. Procediendo análogamente al teorema anterior, en primer lugar se define la familia de sistemas truncados hacia delante

$$\mathcal{F} = \left\{ \check{\mathbf{f}}_{c,s} \in \mathcal{C}^{b,2} : s \in \mathbb{R} \right\}, \quad (4.15)$$

la cual es una familia acotada de $\mathcal{C}^{b,2}$. De la misma forma que se tuvo (4.9), se tiene que, dado $\epsilon_0 > 0$, si se define $\Gamma_0 = B(\mathbf{X}_+, \epsilon_0)$, y dado $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $\Gamma_0 \subseteq B_k = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| \leq k\}$, entonces

$$\lim_{s \rightarrow \infty} |\check{\mathbf{f}}_{c,s} - \mathbf{f}_+|_{k,b,1} = 0, \quad (4.16)$$

donde se ha denotado $\mathbf{f}_+(t, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda_+)$. A partir de ahí se puede repetir análogamente la demostración del apartado (I) del Teorema 4.2.3, obteniendo la existencia de un $s_0 \in \mathbb{R}$ y de una función continua decreciente $\delta_0 : [s_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ con $\lim_{s \rightarrow \infty} \delta_0(s) = 0$ tales que, si $s \geq s_0$, el sistema diferencial con lado derecho $\dot{\mathbf{x}}_{c,s}$ admite una solución hiperbólica atractiva $\tilde{\mathbf{x}}_c^s$ que verifica $|\tilde{\mathbf{x}}_c^s - \mathbf{X}_+|_\infty \leq \delta_0(s)$, probando el apartado (I). En dicho proceso, de la aplicación del Corolario 3.2.5 se obtiene la uniformidad de los dominios de atracción, δ , y de las constantes de dicotomía exponencial K, α para todos esos sistemas. Además, se puede elegir s_0 de forma que $\delta_0(s_0) \leq \delta/2$. Por tanto, al tener en cuenta que una solución del sistema no perturbado $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda(ct))$ es (localmente) solución de $\dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{f}}_{c,s}(t, \mathbf{x})$ para $t \geq s$ se tiene que si existen $s_0 \leq s \leq u$ y $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ tales que $|\mathbf{x}_0 - \tilde{\mathbf{x}}_c^s(u)| \leq \delta$ entonces

$$|\mathbf{x}(t, u, \mathbf{x}_0, c) - \tilde{\mathbf{x}}_c^s(t)| \leq K e^{-\alpha(t-s)} |\mathbf{x}_0 - \tilde{\mathbf{x}}_c^s(u)|,$$

para todos los $s \leq u \leq t$. Está probado el apartado (II). Ahora, por la misma razón que en (4.13), gracias a que $\delta_0(s_0) \leq \delta/2$, la desigualdad triangular permite aplicar la desigualdad anterior a otra solución hiperbólica de las obtenidas. De ahí se obtiene que para cualesquiera $s_0 \leq s \leq u \leq t$ se tiene

$$|\tilde{\mathbf{x}}_c^{s_0}(t) - \tilde{\mathbf{x}}_c^s(t)| \leq K e^{-\alpha(t-s)} |\tilde{\mathbf{x}}_c^{s_0}(u) - \tilde{\mathbf{x}}_c^s(u)|. \quad (4.17)$$

Tomando entonces el límite cuando $t \rightarrow \infty$ en la expresión anterior, se obtiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\mathbf{x}}_c^{s_0}(t) - \tilde{\mathbf{x}}_c^s(t)| = 0, \quad \forall s \geq s_0. \quad (4.18)$$

Este límite no puede ser otro que \mathbf{X}_+ , ya que para valores suficientemente grandes de s la expresión $|\tilde{\mathbf{x}}_c^s - \mathbf{X}_+|_\infty \leq \delta_0(s)$ antes obtenida garantiza que las soluciones hiperbólicas tienen que estar tan cerca como se quiera de \mathbf{X}_+ . Esto se comprueba estudiando, dado $\epsilon > 0$,

$$|\tilde{\mathbf{x}}_c^{s_0}(t) - \mathbf{X}_+| \leq |\tilde{\mathbf{x}}_c^{s_0}(t) - \tilde{\mathbf{x}}_c^s(t)| + |\tilde{\mathbf{x}}_c^s(t) - \mathbf{X}_+| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon,$$

siempre que se tome $s \geq s_0$ tal que $|\tilde{\mathbf{x}}_c^s - \mathbf{X}_+|_\infty \leq \epsilon/2$ y $t \geq s$ tal que $|\tilde{\mathbf{x}}_c^{s_0}(t) - \tilde{\mathbf{x}}_c^s(t)| \leq \epsilon/2$. En consecuencia, queda probado (III), es decir, $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{x}}_c^s(t) = \mathbf{X}_+$ para $s \geq s_0$. \square

Teorema 4.2.5 (Existencia de atractor pullback local). Dado $(\mathbf{X}_-, \lambda_-) \in \mathcal{X}_{\text{stab}}$ existe una única solución \mathbf{x}_c de (4.1) verificando $\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{x}_c(t) = \mathbf{X}_-$ y que sea un atractor pullback local. Además, existe un entorno U de \mathbf{X}_- y un $T \in \mathbb{R}$ tal que \mathbf{x}_c es la única solución que permanece en U para todo $t < T$.

Demostración. Se define, utilizando el Teorema 4.2.3, el candidato a atractor pullback local de la siguiente manera, con $T = s_0$,

$$\mathbf{x}_c(t) = \begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}_c^{s_0}(t), & \text{si } t \leq s_0, \\ S(t, s_0)\tilde{\mathbf{x}}_c^{s_0}(s_0), & \text{si } t \geq s_0 \text{ y está bien definido.} \end{cases}$$

Es claro entonces que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{x}_c(t) = \mathbf{X}_-$, la propiedad (II) asegura que se tiene la propiedad de atracción pullback en $U = B(\mathbf{X}_-, \delta)$ y que, además, tiene que ser la única trayectoria que tiene límite \mathbf{X}_- en $-\infty$, ya que si otra lo verificara, haciendo $u \rightarrow -\infty$ en (II), se tendría que debería coincidir con el atractor pullback en $(-\infty, s_0]$. Este mismo procedimiento de hacer $u \rightarrow -\infty$ en (II) demuestra que \mathbf{x}_c es la única solución que permanece en U para todo $t < -T$. \square

4.3. Rastreo de la curva de equilibrios estables

En esta sección se va a probar uno de los resultados fundamentales de esta memoria: que para velocidades de transición lo suficientemente pequeñas se va a conseguir que el atractor pullback local permanezca tan cerca como se pretenda de la curva de equilibrios estables de los sistemas autónomos siempre que esta atraviese una única rama estable. Las velocidades suficientemente pequeñas que permiten esta aproximación del atractor pullback local por la curva de equilibrios estables son a veces llamadas *velocidades adiabáticas* en las aplicaciones.

Definición 4.3.1 (ϵ -rastrear). Dados $\epsilon > 0$ y $\Lambda \in \mathcal{P}(\lambda_-, \lambda_+)$, se dice que una curva $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, que habitualmente será una solución o solución a trozos de (4.1), para un valor de $c > 0$ determinado ϵ -rastrea el camino estable $\phi(s) = (\mathbf{X}(s), \Lambda(s))$ si para todo $t \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{X}(ct)| < \epsilon. \quad (4.19)$$

En el caso de que el camino estable atraviese una única rama estable se podrá parametrizar como $\phi(s) = (\mathbf{X}(\Lambda(s)), \Lambda(s))$ y diremos que para $c > 0$ la curva \mathbf{x} lo ϵ -rastrea si para todo $t \in \mathbb{R}$

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{X}(\Lambda(ct))| < \epsilon. \quad (4.20)$$

Definición 4.3.2 (Rastrear los puntos finales). Dada $\Lambda \in \mathcal{P}(\lambda_-, \lambda_+)$, se dice que una curva $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, que habitualmente será una solución o solución a trozos de (4.1), para un valor de $c > 0$ determinado **rastrea los puntos finales** \mathbf{X}_\pm si se cumple que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{X}_\pm. \quad (4.21)$$

De estas dos definiciones que se acaban de presentar, la más importante es la Definición 4.3.2, ya que establece cuándo existe una conexión entre el estado inicial y final de la transición, que es el interés final de este estudio. Sin embargo, la Definición 4.3.1 va a resultar muy útil en el caso de sistemas inicial y final autónomos que estamos estudiando en esta memoria, ya que va a ser la herramienta natural para garantizar la conexión en situaciones adiabáticas, como veremos en el Teorema 4.3.5. A continuación, presentamos la siguiente proposición de naturaleza técnica, que va a ser la pieza clave para probar el resultado buscado.

Proposición 4.3.3. Se considera la familia biparamétrica

$$\mathcal{F} = \{(A_c^s, \mathbf{g}_c^s, \mathbf{h}_c^s) : s \in \mathbb{R}, c \in (0, \infty)\}, \quad (4.22)$$

donde para cada elemento de la familia se tiene que $A_c^s \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n^2})$, $\mathbf{g}_c^s, \mathbf{h}_c^s \in \mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Asociado a cada elemento de \mathcal{F} está el sistema de ecuaciones diferenciales en \mathbb{R}^n :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A_c^s(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}_c^s(t, \mathbf{x}) + \mathbf{h}_c^s(t, \mathbf{x}), \quad (4.23)$$

Se asume que

- para cada $c \in (0, \infty)$ y $s \in \mathbb{R}$, el sistema lineal $\dot{\mathbf{x}} = A_c^s(t)\mathbf{x}$ es Hurwitz en $+\infty$ y, además, existe un par de dicotomía exponencial (K, α) independiente de c y de s , es decir, que si $X_c^s(t)$ es una matriz fundamental del mismo se tiene que

$$\|X_c^s(t)(X_c^s)^{-1}(s)\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}, \quad \text{para todo } t \geq s, \quad (4.24)$$

- existe un $a > 0$ tal que

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{g}_c^s(t, \mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|} = 0, \quad \text{uniformemente en } t \in \mathbb{R}, \text{ en } c \in (0, a] \text{ y en } s \in \mathbb{R}, \quad (4.25)$$

- se tiene que para cualesquiera $K \subset \mathbb{R}^n$, $J \subset \mathbb{R}$ compactos, si se denota $J_s = J + s$ al desplazado del compacto J la cantidad $s \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} \mathbf{h}_c^s(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \text{uniformemente en los conjuntos de la forma } J_s \times K, \quad (4.26)$$

es decir, convergencia en el sentido de $\mathcal{C}^{0,0}$. Cabe destacar que la convergencia de cada \mathbf{h}_c^s se está pidiendo en un compacto distinto, es decir, que dado $\mu > 0$ se pide que exista $c_0 \in (0, \infty)$ tal que para todo $0 < c \leq c_0$ se verifique que, independientemente de $s \in \mathbb{R}$,

$$|\mathbf{h}_c^s(t, \mathbf{y})| < \mu, \quad \text{para todo } (t, \mathbf{y}) \in J_s \times K. \quad (4.27)$$

Si dado $s \in \mathbb{R}$ se denota por $\mathbf{x}_s(t, r, \mathbf{x}_0, c)$ a la solución de (4.23) para lado derecho seleccionado por $s \in \mathbb{R}$, entonces existen $\epsilon_0 > 0$ y $l > 0$ tales que para cualquier $\epsilon \leq \epsilon_0$ existe un $0 < c_\epsilon \leq a$ de forma que se verifica que si $|\mathbf{x}_0| \leq \epsilon$ se tiene que, para cualquier $0 < c < c_\epsilon$, se verifica que $|\mathbf{x}_s(t, s, \mathbf{x}_0, c)| \leq \epsilon/2$ para todo $t \in [s + l, s + 2l]$.

Demostración. Se toma $\mu_0 > 0$ verificando $\mu_0 < \alpha/2K$ y se elige $l > 0$ de forma que

$$l > \frac{2}{\alpha} \log(4K) \quad \Leftrightarrow \quad K \exp(-\alpha l/2) < \frac{1}{4}. \quad (4.28)$$

Por (4.25), dado el $\mu_0 > 0$ que se ha tomado antes existe $\epsilon_0 > 0$ tal que si $|\mathbf{x}| < 2K\epsilon_0$, entonces $|\mathbf{g}_c^s(t, \mathbf{x})| < \mu_0|\mathbf{x}|$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$, $c \in (0, a]$ y $s \in \mathbb{R}$. Dado $\epsilon \leq \epsilon_0$ cualquiera, se toma ahora $\mu_1 > 0$ de forma que

$$\mu_1 \leq \alpha \epsilon e^{-\alpha 2l}, \quad (4.29)$$

y se toma por (4.26), dado $J = [0, 2l]$, un $c_\epsilon = c_\epsilon(s) > 0$ tal que si $c \leq c_\epsilon$ entonces $|\mathbf{h}_c^s(t, \mathbf{x})| \leq \mu_1$ para cualquier $t \in [s, s + 2l]$, $|\mathbf{x}| \leq 2K\epsilon$ y $s \in \mathbb{R}$. Con esto ya tenemos seleccionadas las constantes que aparecen en la tesis del teorema.

Dado que \mathbf{h}_c^s y \mathbf{g}_c^s son continuas, por la fórmula de variación de las constantes para la ecuación (4.23) con $c \in (0, \infty)$, $s \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ se puede escribir

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_s(t, s, \mathbf{x}_0, c) = X_c^s(t)(X_c^s)^{-1}(s)\mathbf{x}_0 + \int_s^t X_c^s(t)(X_c^s)^{-1}(r) \left(\mathbf{g}_c^s(t, \mathbf{x}(r)) + \mathbf{h}_c^s(r, \mathbf{x}(r)) \right) dr. \quad (4.30)$$

Mientras $s \leq t \leq t_0 = \sup \{ \hat{t} \in [s, s + 2l] : |\mathbf{x}(t)| \leq 2K\epsilon, \text{ para todo } t \in [s, \hat{t}] \}$ y $c \leq c_0$, la expresión anterior implica, en virtud de (4.24), de $|\mathbf{x}_0| \leq \epsilon$ y de las definiciones de μ_0 y μ_1 ,

$$|\mathbf{x}(t)| \leq K e^{-\alpha(t-s)} \epsilon + \int_s^t K e^{-\alpha(t-r)} \mu_0 |\mathbf{x}(r)| dr + \int_s^t K e^{-\alpha(t-r)} \mu_1 dr. \quad (4.31)$$

En el tercer sumando del lado derecho de (4.31), se efectúa y acota de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \int_s^t K e^{-\alpha(t-r)} \mu_1 dr &= K \mu_1 e^{-\alpha(t-s)} \int_s^t e^{-\alpha(s-r)} dr \\ &= \frac{K \mu_1}{\alpha} e^{-\alpha(t-s)} (e^{\alpha(t-s)} - 1) \leq \frac{K \mu_1}{\alpha} e^{-\alpha(t-s)} e^{\alpha 2l}, \end{aligned}$$

luego (4.31) se convierte en

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}(t)|e^{\alpha t} &\leq \left(K\epsilon + \frac{K\mu_1}{\alpha}e^{\alpha 2l}\right)e^{\alpha s} + \int_s^t K\mu_0(|\mathbf{x}(r)|e^{\alpha r}) dr \\ &\leq 2K\epsilon e^{\alpha s} + \int_s^t K\mu_0(|\mathbf{x}(r)|e^{\alpha r}) dr, \end{aligned} \quad (4.32)$$

donde en la segunda desigualdad se ha utilizado (4.29). Por tanto, si se le aplica a $|\mathbf{x}(t)|e^{\alpha t}$ la desigualdad de Gronwall en $[s, t_0]$ se tiene que $|\mathbf{x}(t)|e^{\alpha t} \leq 2K\epsilon e^{\alpha s} e^{K\mu_0(t-s)}$, y, por tanto,

$$|\mathbf{x}(t)| \leq 2K\epsilon e^{-(\alpha-K\mu_0)(t-s)} < 2K\epsilon e^{-(\alpha/2)(t-s)}. \quad (4.33)$$

En primer lugar, cabe destacar que $t_0 > s$, ya que como $K \geq 1$, entonces $|\mathbf{x}_0| \leq \epsilon < 2K\epsilon$ y por continuidad existe un intervalo en el que la solución sigue siendo menor que $2K\epsilon$. Ahora bien, t_0 no puede ser estrictamente menor que $s + 2l$, ya que entonces (4.33) nos garantizaría que $|\mathbf{x}(t_0)| < 2K\epsilon$, luego existiría un intervalo contenido en $[s, s + 2l]$ que extendiera a $[s, t_0]$ en el que $|\mathbf{x}(t)| \leq 2K\epsilon$, lo cual contradice la definición de t_0 . En consecuencia, $t_0 = s + 2l$.

La ecuación (4.33) implica, gracias a que $t_0 = s + 2l$, que dado $t \in [s + l, s + 2l]$ se tiene que

$$|\mathbf{x}(t)| < 2K\epsilon e^{-(\alpha/2)(t-s)} = 2K\epsilon e^{-(\alpha/2)(t-(s+l))} e^{-(\alpha/2)l} \leq 2K\epsilon e^{-(\alpha/2)l} \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad (4.34)$$

donde en la última desigualdad se ha tenido en cuenta (4.28). \square

A continuación, se va a considerar un camino estable ϕ que atraviesa una única rama estable y se va a volver al problema que nos ocupa. En este caso es importante destacar que la Proposición 4.1.8 va permitir escribir una parametrización del camino de la forma $\phi(s) = (\mathbf{X}(\Lambda(s)), \Lambda(s))$, que utilizaremos en lo que queda de sección. Dado $s \in \mathbb{R}$, se va a buscar escribir el sistema (4.1) de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda(ct)),$$

en una forma que nos permita la aplicación de la Proposición 4.3.3, con el objetivo de garantizar que el atractor pullback de (4.1) está cerca de $\mathbf{X}(\Lambda(ct))$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Con esta idea se escribe la descomposición

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda(cs)) + \left(\mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda(ct)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda(cs))\right) \\ &= D\mathbf{f}(\mathbf{X}(\Lambda(cs)), \Lambda(cs))(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\Lambda(cs))) \\ &\quad + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda(cs)) - D\mathbf{f}(\mathbf{X}(\Lambda(cs)), \Lambda(cs))(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\Lambda(cs))) \\ &\quad + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda(ct)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda(cs)). \end{aligned}$$

Ahora, se utiliza el cambio de variable $\mathbf{x} - \mathbf{X}(\Lambda(cs)) = \mathbf{y}$, obteniendo

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{y}}{dt} &= D\mathbf{f}(\mathbf{X}(\Lambda(cs)), \Lambda(cs))\mathbf{y} \\ &\quad + \mathbf{f}(\mathbf{X}(\Lambda(cs)) + \mathbf{y}, \Lambda(cs)) - D\mathbf{f}(\mathbf{X}(\Lambda(cs)), \Lambda(cs))\mathbf{y} \\ &\quad + \mathbf{f}(\mathbf{X}(\Lambda(cs)) + \mathbf{y}, \Lambda(ct)) - \mathbf{f}(\mathbf{X}(\Lambda(cs)) + \mathbf{y}, \Lambda(cs)). \end{aligned} \quad (4.35)$$

A continuación, establecemos la correspondencia adecuada con las funciones que aparecen en la Proposición 4.3.3 anterior:

$$\begin{cases} A_c^s \mathbf{y} = D\mathbf{f}(\mathbf{X}(\Lambda(cs)), \Lambda(cs))\mathbf{y}, \\ \mathbf{g}_c^s(t, \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{X}(\Lambda(cs)) + \mathbf{y}, \Lambda(cs)) - D\mathbf{f}(\mathbf{X}(\Lambda(cs)), \Lambda(cs))\mathbf{y}, \\ \mathbf{h}_c^s(t, \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{X}(\Lambda(cs)) + \mathbf{y}, \Lambda(ct)) - \mathbf{f}(\mathbf{X}(\Lambda(cs)) + \mathbf{y}, \Lambda(cs)). \end{cases} \quad (4.36)$$

En concreto, aplicaremos el resultado de la Proposición 4.3.3 para valores $s = s_0 + kl$, con $k = -1, 0, 1, 2, \dots$, donde los valores concretos de s_0 y l se precisarán posteriormente. En consecuencia, el siguiente paso es asegurarse que los sistemas (4.35) verifican las hipótesis de la proposición que queremos aplicar.

Lema 4.3.4. La familia

$$\mathcal{F} = \{(A_c^s, \mathbf{g}_c^s, \mathbf{h}_c^s) : s \in \mathbb{R} \ c \in (0, \infty)\}, \quad (4.37)$$

definida por (4.36) verifica las hipótesis de la Proposición 4.3.3.

Demostración. En primer lugar, hay que asegurar que existen unas constantes $K, \alpha > 0$ comunes a todos los sistemas A_c^s . Para cada $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$, cada uno de los sistemas $\dot{\mathbf{y}} = D\mathbf{f}(\mathbf{X}(\lambda), \lambda)\mathbf{y}$ es Hurwitz en $+\infty$. Entonces, la Proposición 3.2.1 nos asegura que cada una de las matrices $D\mathbf{f}(\mathbf{X}(\lambda), \lambda)$ tiene un entorno de matrices de sistemas Hurwitz en $+\infty$ con constantes de dicotomía exponencial comunes y, por tanto, cada $\lambda_0 \in [\lambda_-, \lambda_+]$ tiene un entorno para el que $\dot{\mathbf{y}} = D\mathbf{f}(\mathbf{X}(\lambda), \lambda)\mathbf{y}$ es Hurwitz en $+\infty$ en todo el entorno con constantes de dicotomía exponencial comunes. Como $[\lambda_-, \lambda_+]$ es compacto, basta una cantidad finita de estos entornos para recubrirlo y, por tanto, tomando el máximo de las K y el mínimo de las α para esa cantidad finita de entornos se tienen unas constantes de dicotomía exponencial comunes para todo $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$. En consecuencia, se tiene la hipótesis (4.24).

Por otro lado, aplicando el teorema de Taylor con resto integral al primer sumando de $\mathbf{g}_c^s(t, \mathbf{y})$ se obtiene

$$\begin{aligned} |\mathbf{g}_c^s(t, \mathbf{y})| &= |\mathbf{f}(\mathbf{X}(\Lambda(cs)) + \mathbf{y}, \Lambda(cs)) - D\mathbf{f}(\mathbf{X}(\Lambda(cs)), \Lambda(cs))\mathbf{y}| \\ &\leq \int_0^1 \|D\mathbf{f}(\mathbf{X}(\Lambda(cs)) + \sigma\mathbf{y}, \Lambda(cs)) - D\mathbf{f}(\mathbf{X}(\Lambda(cs)), \Lambda(cs))\| |\mathbf{y}| d\sigma, \end{aligned}$$

y como tanto la variación de $\mathbf{X}(\Lambda(cs))$ como la de $\Lambda(cs)$ están contenidos en compactos cuando $s \in \mathbb{R}$, existe un compacto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ que contiene a $(\mathbf{X}(\Lambda(cs)) + \mathbf{y}, \Lambda(cs))$ para todo $s \in \mathbb{R}$ y todo $|\mathbf{y}| \leq 2K$, y al ser $D\mathbf{f}$ uniformemente continua en dicho compacto, dado $\mu_0 > 0$ existe $\epsilon_0 > 0$ (con $\epsilon_0 \leq 1$) tal que si $|\mathbf{y}| < 2K\epsilon_0$ se tiene que $|\mathbf{g}_c^s(t, \mathbf{y})| < \mu_0|\mathbf{y}|$ para cualquier $s \in \mathbb{R}$. Además, es claro que esta elección es uniforme en $c \in (0, \infty)$ porque su variación no nos saca del compacto en el que hay continuidad uniforme, y en $t \in \mathbb{R}$ porque esta variable no aparece explícitamente. Se cumple la hipótesis (4.25).

Queda estudiar la tercera hipótesis (4.26): dada la familia de compactos $J_s \times K$, hay que garantizar, dado $\mu > 0$, la existencia de un $c_\epsilon > 0$ tal que si $c \leq c_\epsilon$ entonces $|\mathbf{h}_c^s(t, \mathbf{y})| \leq \mu$ para cualquier $(t, \mathbf{y}) \in J_s \times K$, garantizando que c_ϵ es independiente de la elección de $s \in \mathbb{R}$. Ahora bien, considerando un compacto que contenga a $(\mathbf{X}(\Lambda(\mathbb{R})) + K) \times \Lambda(\mathbb{R})$, se tiene

que \mathbf{f} es uniformemente continua en él, luego dado $\mu > 0$ existe $\epsilon_1 = \epsilon_1(\mu) > 0$ tal que si $|\Lambda(ct) - \Lambda(cs)| \leq \epsilon_1$ siendo $t, s \in \mathbb{R}$ cualquiera, se tiene que

$$|\mathbf{h}_c^s(t, \mathbf{y})| = |\mathbf{f}(\mathbf{X}(\Lambda(cs)) + \mathbf{y}, \Lambda(ct)) - \mathbf{f}(\mathbf{X}(\Lambda(cs)) + \mathbf{y}, \Lambda(cs))| \leq \mu. \quad (4.38)$$

Entonces, como $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{d\Lambda}{ds}(s) = 0$, se tiene que Λ' está acotada, luego el teorema del valor medio nos garantiza que, si $t \in J_s$ con $s \in \mathbb{R}$,

$$|\Lambda(ct) - \Lambda(cs)| \leq |\Lambda'|_\infty c(t - s).$$

Gracias a que los conjuntos J_s son precisamente desplazados de J , si $M > 0$ es una cota para los elementos del compacto J , se tiene que $t - s \leq M$ si $t \in J_s$ (porque entonces $t - s \in J$). De aquí que $c_\epsilon = \epsilon_1 / (|\Lambda'|_\infty M)$ verifica naturalmente la condición requerida y, además, la elección es válida para todo $s \in \mathbb{R}$. \square

En consecuencia, podemos aplicar la Proposición 4.3.3 a sistemas del tipo (4.35), teniendo la herramienta fundamental para probar el teorema de rastreo. Se utilizará la conclusión de la proposición para cada uno de los sistemas en el intervalo $[s + l, s + 2l]$,

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A_c^s \mathbf{y} + \mathbf{g}_c^s(t, \mathbf{y}) + \mathbf{h}_c^s(t, \mathbf{y}),$$

con $s = s_0 + kl$, siendo $k = -1, 0, 1, 2, \dots$, para valores adecuados de s_0 y l .

Dado $\epsilon > 0$, denominamos $c_{\epsilon,1} > 0$ a la cota superior para las velocidades de rastreo que resulta de la aplicación de la Proposición 4.3.3 a los sistemas anteriores. Por conveniencia de la demostración siguiente, vamos a elegir un $c_\epsilon > 0$ posiblemente más pequeño que el que se acaba de presentar. Como se va a asumir \mathbf{X} atraviesa una única rama, $\mathbf{X}' : [\lambda_-, \lambda_+] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua y, por tanto, es acotada, y si denotamos $|\mathbf{X}'|_\infty = \sup_{\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]} |\mathbf{X}'(\lambda)|$, se definirá $c_{\epsilon,2} = \epsilon / (4l |\mathbf{X}'|_\infty |\Lambda'|_\infty)$, de forma que para $c \leq c_{\epsilon,2}$ el teorema del valor medio garantice que si $t \in [s + l, s + 2l]$,

$$|\mathbf{X}(\Lambda(cs)) - \mathbf{X}(\Lambda(ct))| \leq |(\mathbf{X} \circ \Lambda)'|_\infty c(t - s) \leq |\mathbf{X}'|_\infty |\Lambda'|_\infty c 2l \leq \frac{\epsilon}{2}. \quad (4.39)$$

Para poder disponer de esta expresión en la prueba siguiente se elegirá $c_\epsilon = \min\{c_{\epsilon,1}, c_{\epsilon,2}\} > 0$.

Teorema 4.3.5 (Rastreo de la curva de puntos de equilibrio estable). Sean una función de transición $\Lambda \in \mathcal{P}(\lambda_-, \lambda_+)$, dos equilibrios $(\mathbf{X}_\pm, \lambda_\pm) \in \mathcal{X}_{\text{stab}}$ y un camino estable $\phi(s) = (\mathbf{X}(\Lambda(s)), \Lambda(s))$ que conecta $\mathbf{X}_- = \mathbf{X}(\lambda_-)$ con $\mathbf{X}_+ = \mathbf{X}(\lambda_+)$ y que atraviesa una única rama estable. Entonces, para todo $\epsilon > 0$ existe un $c_\epsilon > 0$ tal que para cualquier $0 < c < c_\epsilon$ el atractor pullback local que sale de \mathbf{X}_- , denotado $\mathbf{x}_c(t)$, ϵ -rastrea el camino estable $(\mathbf{X}(\Lambda(s)), \Lambda(s))$. Además, para $c > 0$ suficientemente pequeño también rastrea los puntos finales \mathbf{X}_\pm .

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, se toma $c_\epsilon = \min\{c_{\epsilon,1}, c_{\epsilon,2}\} > 0$ como se ha indicado antes y se fija $c < c_\epsilon$. El Teorema 4.2.3 y Teorema 4.2.5 nos aseguran que existe $s_1 \in \mathbb{R}$ tal que $|\mathbf{x}_c(t) - \mathbf{X}_-| \leq \epsilon/2$ si $t \leq s_1$. Por otro lado, como $\mathbf{X} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ y $\mathbf{X}(\lambda_-) = \mathbf{X}_-$, entonces existirá $\eta > 0$ tal que si $|\lambda - \lambda_-| < \eta$, entonces $|\mathbf{X}(\lambda) - \mathbf{X}_-| \leq \epsilon/2$. Como $\Lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y $\lim_{s \rightarrow -\infty} \Lambda(cs) = \lambda_-$, existe $s_2 \in \mathbb{R}$ tal que para $t \leq s_2$ se tiene que $|\Lambda(ct) - \lambda_-| < \eta$, consiguiéndose así que $|\mathbf{X}(\Lambda(ct)) - \mathbf{X}_-| \leq \epsilon/2$ para $t \leq s_2$. Juntando ambas piezas por medio de la desigualdad triangular se tiene que para $t \leq s_0 = \min\{s_1, s_2\}$ se verifica que

$$|\mathbf{x}_c(t) - \mathbf{X}(\Lambda(ct))| \leq \epsilon. \quad (4.40)$$

Ahora se procede inductivamente para ver que

$$|\mathbf{x}_c(t) - \mathbf{X}(\Lambda(ct))| \leq \epsilon, \quad \text{para } t \in [s_0 + (k+1)l, s_0 + (k+2)l], \quad k \in \{-1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

El caso base de la inducción se tiene por el resultado de la Proposición 4.3.3 para el valor $s = s_0 - l$ gracias a (4.40), obteniendo que si $c \leq c_\epsilon \leq a$,

$$|\mathbf{x}_c(t) - \mathbf{X}(\Lambda(c(s_0 - l)))| \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{para } t \in [s_0, s_0 + l],$$

y al juntarlo con (4.39) gracias a la desigualdad triangular:

$$|\mathbf{x}_c(t) - \mathbf{X}(\Lambda(ct))| \leq \epsilon, \quad \text{para } t \in [s_0, s_0 + l],$$

que es lo que se quería obtener. Las aplicaciones sucesivas son idénticas, y garantizan que para $c \leq c_\epsilon$ se verifica

$$|\mathbf{x}_c(t) - \mathbf{X}(\Lambda(ct))| \leq \epsilon, \quad \text{para } t \in \mathbb{R},$$

lo que prueba que \mathbf{x}_c efectivamente ϵ -rastrea la curva de equilibrios estables $(\mathbf{X}(\Lambda(s)), \Lambda(s))$ para valores de c suficientemente pequeños.

Como ya sabíamos que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{x}_c(t) = \mathbf{X}_-$ por las propiedades del atractor pullback local, resta únicamente probar que para $c > 0$ suficientemente pequeño se tiene también el límite $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}_c(t) = \mathbf{X}_+$. Para ello, hacemos uso del Teorema 4.2.4 obteniendo la existencia de un $s'_0 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $s \geq s'_0$ se tiene que $|\tilde{\mathbf{x}}_c^s - \mathbf{X}_+|_\infty \leq \delta/2$, siendo δ el dominio de atracción uniforme de las soluciones hiperbólicas al problema truncado $\tilde{\mathbf{x}}_c^s$. Dado $0 < \epsilon < \delta/2$, por continuidad de la curva de equilibrios \mathbf{X} , existe un $t_0 \geq s'_0$ tal que para todo $t \geq t_0$ se cumple que $|\mathbf{X}(\Lambda(ct)) - \mathbf{X}_+| < \epsilon/2$. Como el atractor pullback local \mathbf{x}_c verifica que $|\mathbf{x}_c(t) - \mathbf{X}(\Lambda(ct))| \leq \epsilon/2$ para $c \leq c_{\epsilon/2}$ y todo $t \in \mathbb{R}$, se tiene que $|\mathbf{x}_c(t) - \mathbf{X}_+| \leq \epsilon < \delta/2$ para $t \geq t_0$. Juntando los dos pasos anteriores se tendrá que $|\tilde{\mathbf{x}}_c^s(t) - \mathbf{x}_c(t)| < \delta$ para $t \geq t_0 \geq s'_0$, estando el atractor pullback local dentro del dominio de atracción de la solución hiperbólica atractiva $\tilde{\mathbf{x}}_c^s$ obtenida en el Teorema 4.2.4, y teniendo, por tanto, su mismo límite \mathbf{X}_+ . Con esto que queda probado que para c suficientemente pequeño el atractor pullback local \mathbf{x}_c rastrea los puntos finales de la curva de equilibrio estable, \mathbf{X}_\pm . \square

El teorema que presentamos a continuación, muestra que en caso de rastreo de los puntos finales, que ya dijimos que es la propiedad fundamental que se busca, el atractor pullback local es, de hecho, una solución hiperbólica.

Teorema 4.3.6. Dados $(\mathbf{X}_\pm, \lambda_\pm) \in \mathcal{X}_{\text{stab}}$ y $\Lambda \in \mathcal{P}(\lambda_-, \lambda_+)$, si el atractor pullback local que sale de \mathbf{X}_- rastrea los puntos finales \mathbf{X}_\pm , entonces está globalmente definido y es una solución hiperbólica atractiva de (4.1).

Demostración. La definición global está garantizada por la propia definición de rastreo de los puntos finales. Queremos comprobar que el sistema

$$\dot{\mathbf{y}} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_c(t), \Lambda(ct))\mathbf{y} \tag{4.41}$$

es Hurwitz en $+\infty$. Llamaremos $X(t)$ a una matriz fundamental de este sistema. En primer lugar, nos damos cuenta de que, gracias a que \mathbf{x}_c rastrea los puntos finales,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D\mathbf{f}(\mathbf{x}_c(t), \Lambda(ct)) = D\mathbf{f}(\mathbf{X}_+, \lambda_+).$$

Sean (K_1, α_1) las constantes de dicotomía exponencial del sistema $\dot{\mathbf{y}} = D\mathbf{f}(\mathbf{X}_+, \lambda_+)\mathbf{y}$. Tomamos $0 < \delta < \alpha_1/K_1$. Por el límite anterior existe $s_1 \in \mathbb{R}$ de forma que para todo $t \geq s_1$ se tiene que

$$\|D\mathbf{f}(\mathbf{x}_c(t), \Lambda(ct)) - D\mathbf{f}(\mathbf{X}_+, \lambda_+)\| < \delta.$$

Entonces definimos

$$B(t) = \begin{cases} D\mathbf{f}(\mathbf{x}_c(t_1), \Lambda(ct_1)), & \text{si } t \in (-\infty, t_1), \\ D\mathbf{f}(\mathbf{x}_c(t), \Lambda(ct)), & \text{si } t \in [t_1, \infty), \end{cases} \quad (4.42)$$

consiguiendo que $\|B - D\mathbf{f}(\mathbf{X}_+, \lambda_+)\|_\infty < \delta$. En estas condiciones, la Proposición 3.2.1 nos asegura que $\dot{\mathbf{y}} = B(t)\mathbf{y}$ es Hurwitz en $+\infty$ con un par de dicotomía exponencial (K_2, α_2) . Como si $t, s \geq s_1$ el proceso inducido por $\dot{\mathbf{y}} = B(t)\mathbf{y}$ coincide con el de (4.41), se tiene que

$$\|X(t)X^{-1}(s)\| \leq K_2 e^{-\alpha_2(t-s)} \quad \text{para } (t, s) \in [s_1, \infty)^2 \text{ con } t \geq s. \quad (4.43)$$

Por otra parte, el Teorema 4.2.3 nos garantiza, gracias a que el atractor pullback local $\mathbf{x}_c(t)$ es extensión de $\hat{\mathbf{x}}_c^{s_0}$, que existen unas constantes positivas (K_3, α_3) tales que

$$\|X(t)X^{-1}(s)\| \leq K_3 e^{-\alpha_3(t-s)} \quad \text{para } (t, s) \in (-\infty, s_0]^2 \text{ con } t \geq s. \quad (4.44)$$

Tomamos ahora $\alpha_4 = \min\{\alpha_2, \alpha_3\}$. Como $\|X(t)X^{-1}(s)\|e^{\alpha_4(t-s)}$ es una función continua en el compacto $[s_0, s_1]^2$ admite una cota $K_4 > 0$ que además podemos tomar tal que $K_4 \geq \max\{K_2, K_3, 1\}$. Entonces se tiene que

$$\|X(t)X^{-1}(s)\| \leq K_4 e^{-\alpha_4(t-s)} \quad \text{para } (t, s) \in [s_0, s_1]^2 \text{ con } t \geq s. \quad (4.45)$$

Además, gracias a haber tomado $K_4 \geq K_2, K_3$ y $\alpha_4 \leq \alpha_2, \alpha_3$ que los anteriores, se tiene que (4.43) y (4.44) se verifican también con las constantes (K_4, α_4) . Juntando para ese valor de las constantes lo obtenido en las tres cotas tenemos que

$$\|X(t)X^{-1}(s)\| \leq K_4 e^{-\alpha_4(t-s)} \quad \text{para } (t, s) \in (-\infty, s_0]^2 \cup [s_0, s_1]^2 \cup [s_1, \infty)^2 \text{ con } t \geq s. \quad (4.46)$$

Para acabar, como queremos que la cota sirva para todo $t \geq s$ falta analizar tres casos más:

- si $t \in [s_0, s_1]$ y $s \in (-\infty, s_0]$, entonces

$$\|X(t)X^{-1}(s)\| \leq \|X(t)X^{-1}(s_0)\| \|X(s_0)X^{-1}(s)\| \leq K_4^2 e^{-\alpha_4(t-s)}.$$

- si $t \in [s_1, \infty)$ y $s \in [s_0, s_1]$, entonces

$$\|X(t)X^{-1}(s)\| \leq \|X(t)X^{-1}(s_1)\| \|X(s_1)X^{-1}(s)\| \leq K_4^2 e^{-\alpha_4(t-s)}.$$

- si $t \in [s_1, \infty)$ y $s \in (-\infty, s_0]$, entonces

$$\|X(t)X^{-1}(s)\| \leq \|X(t)X^{-1}(s_1)\| \|X(s_1)X^{-1}(s_0)\| \|X(s_0)X^{-1}(s)\| \leq K_4^3 e^{-\alpha_4(t-s)}.$$

De esta forma, si elegimos $K = K_4^3 \geq 1$ y $\alpha = \alpha_4 > 0$ se tiene que la desigualdad es válida para todo $t \geq s$, luego (4.41) es Hurwitz en $+\infty$ y, por tanto, el atractor pullback local es una solución hiperbólica atractiva. \square

Comentario 4.3.7. El resultado que se acaba de presentar es de gran relevancia, ya que muestra que el atractor pullback local exhibe propiedades de atracción en sentido *forward* además de las propiedades de atracción *backward* que motivaron su definición. Sin embargo, merece la pena destacar que esto sólo ocurre cuando el atractor rastrea dos puntos finales exponencialmente estables, sean cuales sean, uno en el pasado y uno en el futuro; es decir, no ocurre en situaciones de tipping en las que el atractor pullback local tienda hacia ∞ .

4.4. Clasificación de algunos puntos de no retorno

Disponiendo ahora de la herramienta que proporciona el Teorema 4.3.5, se puede tratar de dar una primera clasificación de los puntos de no retorno, es decir, situaciones donde no hay rastreo de la curva de equilibrios que se quiere seguir. En esta sección es importante asumir que $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{1,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ para que la Proposición 4.1.8 nos garantice que por cada punto de $\mathcal{X}_{\text{stab}}$ pase una rama estable.

Definición 4.4.1 (Punto de no retorno por velocidad de transición). Dados $\Lambda \in \mathcal{P}(\lambda_-, \lambda_+)$ y $(\mathbf{X}_\pm, \lambda_\pm) \in \mathcal{X}_{\text{stab}}$ tales que existe un camino estable ϕ que los conecta, decimos que $c_0 \in \mathbb{R}$ es un **punto de no retorno por velocidad de transición** (*R-tipping point*) para el atractor pullback local \mathbf{x}_c que sale de \mathbf{X}_- si existe $\delta > 0$ tal que este no rastrea los puntos finales del camino ϕ para $c = c_0$ pero sí que lo hace o bien para $c \in (c_0 - \delta, c_0)$ o bien para $c \in (c_0, c_0 + \delta)$.

Comentario 4.4.2. En [2, Definition 3.2] se definen únicamente los puntos de no retorno por velocidad de transición a velocidades bajas, con el interés puesto en el teorema de rastreo. La definición presentada, sin embargo, permite la existencia de puntos de no retorno tanto en sentido creciente como decreciente, lo que es de interés en las aplicaciones.

Definición 4.4.3 (Punto de no retorno por bifurcación). Dados $(\mathbf{X}_\pm, \lambda_\pm) \in \mathcal{X}_{\text{stab}}$ y $\Lambda \in \mathcal{P}(\lambda_-, \lambda_+)$, si existe $c_0 > 0$ de forma que para todo $0 < c < c_0$ se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}_c(t) = \mathbf{X}_+,$$

donde con $\mathbf{x}_c(t)$ se denota el atractor pullback local que parte de \mathbf{X}_- en $-\infty$, pero no existe ningún camino estable que conecte \mathbf{X}_- con \mathbf{X}_+ , entonces se dice que Λ se encuentra un **punto de no retorno por bifurcación** partiendo de \mathbf{X}_- .

El siguiente corolario utiliza el Teorema 4.3.5 para justificar el nombre que se ha dado a los puntos de no retorno por bifurcación.

Corolario 4.4.4. Se supone que $\Lambda \in \mathcal{P}(\lambda_-, \lambda_+)$ se encuentra un punto de no retorno por bifurcación partiendo de $(\mathbf{X}_-, \lambda_-) \in \mathcal{X}_{\text{stab}}$. Entonces existe $\lambda_0 \in (\lambda_-, \lambda_+)$ tal que o bien existe un punto de bifurcación $(\mathbf{X}_0, \lambda_0) \in \mathcal{X}_{\text{bif}}$ que interrumpe la rama estable que parte de \mathbf{X}_- o bien si $\mathbf{X}(\lambda)$ es la parametrización de la rama estable que parte de \mathbf{X}_- se tiene que $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} |\mathbf{X}(\lambda)| = \infty$.

Demostración. Por reducción al absurdo, si no fuera así, en virtud de la Proposición 4.1.9, la única rama estable que parte de \mathbf{X}_- conectaría entonces con un estado \mathbf{Y}_+ para valor del parámetro λ_+ sin pasar por ningún punto de \mathcal{X}_{bif} . Ahora bien, en esa situación el Teorema 4.3.5 nos garantiza que existe un $c_0 > 0$ tal que para todo $c < c_0$ se tiene que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}_c(t) = \mathbf{Y}_+$, contradiciendo que el atractor pullback local tenga límite \mathbf{X}_+ en $+\infty$. \square

Comentario 4.4.5. En [3] se indica que para que se dé este calificativo se requiere que el punto de bifurcación que atraviesa el sistema sea “peligroso” en un sentido físico, es decir, que una rama estable cuyos equilibrios tengan distinto significado físico o biológico y, por tanto, tales que la transición de unos a otros suponga una catástrofe para el sistema. Este calificativo, por supuesto, no es matematizable pero supone la relación directa con las aplicaciones.

Capítulo 5

Ecuaciones diferenciales de Carathéodory

En este Capítulo introducimos un tipo de ecuaciones diferenciales ordinarias en los que la regularidad del lado derecho es inferior a la usual: se permiten discontinuidades en la variable temporal. El interés de introducir este tipo de transiciones en el problema de búsqueda de conexiones y puntos de no retorno está, en primer lugar, en el interés físico de introducir una sucesión de estados intermedios en los que la evolución sea regida durante un intervalo finito de tiempo por ecuaciones diferenciales autónomas, es decir, de la misma naturaleza que los estados inicial y final. En segundo lugar, no es una desviación de la teoría hasta ahora presentada, sino que la contiene como un caso particular, la generaliza. En tercer lugar, aunque queda mayormente fuera de esta memoria, permite obtener analíticamente cotas rigurosas sobre situaciones en las que hay puntos de no retorno o rastreo de forma más sencilla que en el caso continuo, proporcionando información sobre este a través de límites. Las referencias principales para este capítulo son [4, 21].

5.1. Definiciones y resultados fundamentales

Hasta ahora todos los resultados que se han presentado estaban sustentados sobre la teoría clásica de ecuaciones diferenciales ordinarias, es decir, la que estudia problemas de valor inicial en $s \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \quad (5.1)$$

donde $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, y con esto se tenía asegurada la existencia, unicidad, prolongación maximal y otras propiedades de sus soluciones.

Sin embargo, diversos intereses provenientes de la física y la ingeniería motivan el estudio de ecuaciones diferenciales en los que la función \mathbf{f} es menos regular que la que se ha presentado anteriormente. En este caso estudiaremos ecuaciones que admitan discontinuidades temporales, las llamadas ecuaciones diferenciales de Carathéodory.

Definición 5.1.1 (Funciones de Carathéodory). Diremos que una función $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una **función de Carathéodory** si se verifican las condiciones

(C1) $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es medible Borel,

(C2) para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ existe una función real no negativa $m_K \in L^1_{loc}$ que verifica que

$$|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})| \leq m_K(t) \quad (5.2)$$

para todo $\mathbf{x} \in K$ y casi todo $t \in \mathbb{R}$.

Las funciones m_K definidas en (C2) reciben el nombre de m -cotas. Se define $\mathfrak{C}(\mathbb{R}^n)$ como el conjunto de funciones de Carathéodory.

La condición de que el lado derecho de una ecuación diferencial ordinaria sea una función de Carathéodory es suficiente para garantizar la existencia de soluciones del problema de valor inicial (5.1). Sin embargo, como se puede encontrar en [4], esta condición no es suficiente para garantizar la unicidad de soluciones del problema. Por esta razón se introducen los espacios de funciones siguientes, que incorporan condiciones de tipo Lipschitz a las funciones de Carathéodory antes introducidas, consiguiendo garantizar así unicidad de soluciones y dependencia continua, que son requerimientos obligatorios para poder definir un proceso local que dé cabida a la teoría de puntos de no retorno que se quiere desarrollar.

Definición 5.1.2 (Funciones de Lipschitz-Carathéodory). Diremos que una función medible $\mathbf{f}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una **función de Lipschitz-Carathéodory** si \mathbf{f} es una función de Carathéodory, es decir, si verifica las condiciones (C1) y (C2) de la Definición 5.1.2 y, además, verifica que

(L) para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ existe una función real no negativa $l_K \in L^1_{loc}$ tal que $|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})| \leq l_K(t)|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ y para casi todo $t \in \mathbb{R}$.

Las funciones l_K definidas en (L) reciben el nombre de l -cotas. Se define $\mathfrak{L}\mathfrak{C}(\mathbb{R}^n)$ como el espacio de clases de equivalencia de funciones de Lipschitz-Carathéodory inducido por la relación de equivalencia que identifica dos funciones si son iguales salvo en un conjunto de medida nula de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Comentario 5.1.3. La propiedad Lipschitz de la que gozan las funciones de Lipschitz-Carathéodory hace que $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ sea una función continua en la variable \mathbf{x} para casi todo $t \in \mathbb{R}$ fijo. Gracias a esto, las funciones de cada clase de equivalencia de $\mathfrak{L}\mathfrak{C}(\mathbb{R}^n)$ tienen las mismas m -cotas y l -cotas. De la misma forma se garantiza la unicidad de las cotas óptimas que se introducen en la siguiente definición.

Definición 5.1.4 (Cotas óptimas). Dada $\mathbf{f} \in \mathfrak{L}\mathfrak{C}(\mathbb{R}^n)$, se denomina la **m -cota óptima** de \mathbf{f} en el compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ a

$$m_K(t) = \sup_{\mathbf{x} \in K} |\mathbf{f}(t, \mathbf{x})|, \quad (5.3)$$

y la **l -cota óptima** de \mathbf{f} en el compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ a

$$l_K(t) = \sup_{\substack{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}}} \frac{|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (5.4)$$

Por un lado, cabe destacar que los superiores que aparecen en las expresiones (5.3) y (5.4) son finitos gracias a la existencia de m -cota y l -cota en el compacto K respectivamente, por ser $\mathbf{f} \in \mathfrak{L}\mathfrak{C}(\mathbb{R})$.

Por otro lado, dichas cotas óptimas son medibles gracias a que, como K es separable por ser compacto y \mathbf{f} continua en \mathbf{x} para casi todo $t \in \mathbb{R}$, el superior se puede tomar en ambos casos a través de un conjunto numerable, sabiendo que el superior de un conjunto numerable de funciones medibles es medible. Las funciones sobre las que se toma el superior son medibles ya que las secciones de una función medible en un producto son medibles. En consecuencia $m_K, l_K \in L^1_{loc}$, luego efectivamente se trata de una m -cota y una l -cota.

Ahora bien, fijándonos en el sistema diferencial (5.1), vemos que la falta de continuidad de la función \mathbf{f} en la variable temporal va a provocar que la derivada de la función solución \mathbf{x} no tenga por qué existir en todos los puntos. Esto es lo que motiva la definición de soluciones en un sentido más débil que el clásico del sistema (5.1), que sea capaz de acomodar la teoría referente a funciones de Carathéodory.

Definición 5.1.5 (Solución en sentido extendido). Dado un problema diferencial

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad (5.5)$$

donde $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, siendo $\mathbf{f} \in \mathcal{L}\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, diremos que una función $\mathbf{x} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, con I un intervalo, es una **solución en sentido extendido** de (5.5) si es una función absolutamente continua que cumple que $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$ para todo $t \in I \setminus A$, siendo A un conjunto de medida nula. Equivalentemente (por una caracterización de la continuidad absoluta) \mathbf{x} será una solución en sentido extendido si es continua y verifica que

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(s) + \int_s^t \mathbf{f}(u, \mathbf{x}(u)) du, \quad (5.6)$$

para cualesquiera $t, s \in I$.

Comentario 5.1.6. Cuando no haya riesgo de confusión, se dirá que \mathbf{x} es una solución de (5.5) en vez de decir que es una solución en sentido extendido. Por otro lado, es claro que esta definición generaliza las soluciones en sentido usual para un $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{0,1}$. Finalmente, cabe reseñar que todas las funciones de Lipschitz-Carathéodory de una misma clase de equivalencia inducen la misma solución en sentido extendido, cuya prueba para un caso un poco más general se puede encontrar, por ejemplo, en [21, Prop. 2.6].

El resultado siguiente condensa los de Coddington y Levinson [4, Th. 1.1, 1.2 y 2.1], garantizando existencia y unicidad de soluciones, prolongación maximal y una propiedad importante sobre el intervalo maximal de definición.

Teorema 5.1.7 (Existencia, unicidad y prolongación maximal de Carathéodory). Para cualesquiera $\mathbf{f} \in \mathcal{L}\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, tiempo inicial $s \in \mathbb{R}$ y dato inicial $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ existe un intervalo maximal de definición $I_{\mathbf{f}, \mathbf{x}_0, s} = (a_{\mathbf{f}, \mathbf{x}_0, s}, b_{\mathbf{f}, \mathbf{x}_0, s})$ con $s \in I_{\mathbf{f}, \mathbf{x}_0, s}$ y una única función absolutamente continua $\mathbf{x}(t, s, \mathbf{x}_0, \mathbf{f}) : I_{\mathbf{f}, \mathbf{x}_0, s} \rightarrow \mathbb{R}^n$ que es solución en sentido extendido del problema de Cauchy

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0.$$

Además, si $a_{\mathbf{f}, \mathbf{x}_0, s} > -\infty$ (respectivamente $b_{\mathbf{f}, \mathbf{x}_0, s} < \infty$), entonces $|\mathbf{x}(t, s, \mathbf{x}_0, \mathbf{f})| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow a_{\mathbf{f}, \mathbf{x}_0, s}$ (respectivamente cuando $t \rightarrow b_{\mathbf{f}, \mathbf{x}_0, s}$).

Proposición 5.1.8 (Fórmula de variación de las constantes). Dados una función con valores matriciales $A \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^{n^2})$, un término no homogéneo $\mathbf{b} \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ y un $s \in \mathbb{R}$, si denominamos $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ a la matriz fundamental asociada al sistema diferencial $\dot{\mathbf{y}} = A(t)\mathbf{y}$, entonces se cumple que la solución en sentido extendido del problema de valor inicial,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0, \quad (5.7)$$

viene dada por

$$\mathbf{x}(t) = X(t)X^{-1}(s)\mathbf{x}_0 + \int_s^t X(t)X^{-1}(r)\mathbf{b}(r) dr. \quad (5.8)$$

5.2. Transiciones constantes a trozos

Ahora presentamos la motivación que nos ha conducido a introducir las ecuaciones diferenciales de Carathéodory: funciones de transición constantes a trozos que hacen que el sistema transite por una sucesión de estados autónomos intermedios a lo largo de la transición. Estas funciones de transición serán aproximantes constantes a trozos para una función de transición continua $\Lambda \in \mathcal{P}(\lambda_-, \lambda_+)$ como las que se han utilizado en el Capítulo 4.

Se definen para distintos valores del paso de discretización h y de la velocidad de transición c . En el caso más general, que es en el que $h, c \in (0, \infty)$ se define como

$$\Lambda_c^h(t) = \Lambda(cjh), \quad \text{si } t \in [jh, (j+1)h), \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (5.9)$$

A continuación, presentamos dos casos particulares que también serán de gran utilidad. El primero de ellos, es el caso $h = 0$, que nos devuelve al caso continuo ya estudiado, y una vez hayamos descrito topologías de continuidad adecuadas servirá de nexo entre los dos. Se define tomando límites cuando $h \rightarrow 0$ en el lado derecho de (5.9),

$$\Lambda_c^0(t) = \Lambda(ct), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5.10)$$

El segundo de los casos particulares, cuando $c = \infty$, se convierte en

$$\Lambda_\infty^h(t) = \begin{cases} \lambda_-, & \text{si } t \in (-\infty, 0), \\ \Lambda(0), & \text{si } t \in [0, h), \\ \lambda_+, & \text{si } t \in [h, \infty), \end{cases} \quad (5.11)$$

que también tiene sentido cuando $h = 0$, convirtiéndose en una función escalón

$$\Lambda_\infty^0(t) = \begin{cases} \lambda_-, & \text{si } t \in (-\infty, 0), \\ \lambda_+, & \text{si } t \in [0, \infty). \end{cases} \quad (5.12)$$

Dado $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{2,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, el sistema de ecuaciones diferenciales que se va a estudiar será

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda_c^h(t)). \quad (5.13)$$

Si definimos $\mathbf{f}_c^h(t, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda_c^h(t))$, se verifica que $\mathbf{f}_c^h \in \mathfrak{L}\mathfrak{C}(\mathbb{R}^n)$, ya que por un lado es claro que es medible Borel y, por otro lado, dado $K \subset \mathbb{R}$ compacto, si $M_k > 0$ es una cota para el

conjunto $\mathbf{f}(K \times \mathbb{R})$, se tiene $|\mathbf{f}_c^h(t, \mathbf{x})| \leq M_K$, luego existe m -cota que, de hecho, se puede tomar independiente de t y, finalmente, para todo $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$ se sigue que $\mathbf{f}(\cdot, \lambda)$ es Lipschitz en los compactos, con constante de Lipschitz una cota para $D\mathbf{f}(\cdot, \lambda)$ en dicho compacto, la cual varía de forma continua con λ y, por tanto, va a dar una l -cota localmente integrable al introducir la dependencia en $\Lambda_c^h(t)$. En consecuencia, el Teorema 5.1.7 asegura que los problemas de valor inicial de (5.13) admiten solución única.

De forma completamente análoga a la del Capítulo 3, se definen las dicotomías exponenciales y soluciones hiperbólicas de ecuaciones diferenciales de Carathéodory, permitiéndonos usar tratamientos dinámicos similares a los del Capítulo 4.

Definición 5.2.1 (Solución hiperbólica de Carathéodory). Sea $\mathbf{g} \in \mathcal{LC}(\mathbb{R}^n)$ de clase \mathcal{C}^1 en la componente \mathbf{x} tal que $D\mathbf{g} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{n^2})$ y $\mathbf{x}_g(t)$ una solución en sentido extendido acotada del sistema

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}). \quad (5.14)$$

Diremos que \mathbf{x}_g es una **solución hiperbólica** de (3.17) si el sistema linealizado

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = D\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_g(t))\mathbf{y} \quad (5.15)$$

tiene dicotomía exponencial. Diremos que \mathbf{x}_g es una **solución hiperbólica atractiva** de (3.17) si (3.18) es Hurwitz en $+\infty$ y que es una **solución hiperbólica repulsiva** de (3.17) si (3.18) si es Hurwitz en $-\infty$.

Comentario 5.2.2. Veamos por qué basta con pedir que $\mathbf{g} \in \mathcal{LC}(\mathbb{R}^n)$ y $D\mathbf{g} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{n^2})$ para que el lado derecho del sistema (5.15) esté en $\mathcal{LC}(\mathbb{R}^n)$ y, por tanto, tenga asegurada existencia y unicidad de soluciones, pudiéndose definir matrices fundamentales y dicotomías exponenciales. En primer lugar, si $(t, \mathbf{x}) \rightarrow D\mathbf{g}(t, \mathbf{x})$ es medible Borel, se tiene que $(t, \mathbf{y}) \rightarrow D\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_g(t))\mathbf{y}$ lo es también por composición con funciones continuas. En segundo lugar,

$$|D\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_g(t))\mathbf{y}| \leq \|D\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_g(t))\| |\mathbf{y}| \leq m_K(t)|\mathbf{y}|,$$

donde $K \subset \mathbb{R}^n$ es un compacto que contiene a $\mathbf{x}_g(t)$ y m_K es la m -cota correspondiente de $D\mathbf{g}$. De esta forma, es claro que $(t, \mathbf{y}) \rightarrow D\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_g(t))\mathbf{y}$ también tiene m -cotas. Por último,

$$|D\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_g(t))\mathbf{y} - D\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_g(t))\mathbf{z}| \leq \|D\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_g(t))\| |\mathbf{y} - \mathbf{z}| \leq m_K(t)|\mathbf{y} - \mathbf{z}|,$$

teniéndose también las l -cotas.

5.3. Topologías de continuidad para subfamilias de $\mathcal{LC}(\mathbb{R}^n)$

De aquí en adelante denotaremos $\mathbf{x}(t, s, \mathbf{x}_0, h, c)$ a la solución del problema de valor inicial y fijaremos un $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{2,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ para lo que resta de capítulo. Ya se comentó después de (5.13) por qué en estas condiciones $\mathbf{f}_c^h \in \mathcal{LC}(\mathbb{R}^n)$. Queremos estudiar el problema de valor inicial

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}_c^h(t, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda_c^h(t)), \quad \mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (5.16)$$

A continuación, dado $D \subset \mathbb{R}^n$ denso, vamos a introducir una topología \mathcal{T}_D en $\mathcal{LC}(\mathbb{R}^n)$; después, referiremos a una serie de resultados de [21] que garantizan que bajo ciertas condiciones sobre

las l -cotas de una familia de funciones de $\mathcal{L}\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ esa topología es independiente de la elección de D y, además, es una topología de continuidad, es decir, que las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales varían de forma continua en cierto sentido con las funciones de la familia; y finalmente, probaremos que las funciones \mathbf{f}_c^h que se han definido antes verifican dicha propiedad sobre las l -cotas y que la dependencia en h y c es coherente con la topología \mathcal{T}_D .

Definición 5.3.1. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto denso numerable. Denominaremos \mathcal{T}_D a la topología definida sobre $\mathcal{L}\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ por la familia de seminormas

$$p_{I, \mathbf{x}_j}(\mathbf{f}) = \int_I |\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_j)| dt, \quad (5.17)$$

donde se han considerado $\mathbf{f} \in \mathcal{L}\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, el punto $\mathbf{x}_j \in D$, y el intervalo $I = [q_1, q_2]$ con $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$.

Comentario 5.3.2. En primer lugar, cabe destacar que si sobre $\mathbf{f} \in \mathcal{L}\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ se anulan todas las seminormas, entonces para cada $\mathbf{x}_j \in D$ se tiene que $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_j) = 0$ para casi todo $t \in \mathbb{R}$. Como D es numerable y para casi todo $t \in \mathbb{R}$ la función $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ es continua en \mathbf{x} se sigue que para casi todo t se tiene que $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. En consecuencia, \mathbf{f} se anula salvo quizá en un conjunto de Borel de \mathbb{R}^{n+1} de medida nula, luego está en la clase de equivalencia de la función 0. Esto garantiza que la familia numerable de seminormas anterior haga de $\mathcal{L}\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ un espacio localmente convexo y, de hecho, metrizable.

Definición 5.3.3 (*l -cotas L_{loc}^1 -acotadas*). Dado un subconjunto $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, se dirá que este admite *l -cotas L_{loc}^1 -acotadas* si para cualquier compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, al considerar el conjunto de l -cotas óptimas de las funciones de \mathcal{F} en dicho compacto:

$$S_K = \{l_{\mathbf{f}, K} : \mathbf{f} \in \mathcal{F}\}, \quad (5.18)$$

entonces para cualquier intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}$ se verifica que

$$\sup_{\mathbf{f} \in \mathcal{F}} \int_I l_{\mathbf{f}, K}(t) dt < \infty. \quad (5.19)$$

Bajo estas condiciones, [21, Th. 4.12] asegura que la definición del espacio topológico $(\mathcal{F}, \mathcal{T}_D)$ es independiente de la elección del conjunto denso numerable $D \subset \mathbb{R}^n$ y, además, [21, Th 5.8] garantiza que, de hecho, se trata de una topología de continuidad, es decir, que dados una sucesión de funciones $\{\mathbf{f}_k\}_{k=1}^{\infty}$ en \mathcal{F} que converge a \mathbf{f} en la topología $(\mathcal{L}\mathcal{C}, \mathcal{T}_D)$ y una sucesión de datos iniciales $\{\mathbf{x}_{0,k}\}_{k=1}^{\infty}$ en \mathbb{R}^n que converge a $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces para cualquier $s \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{x}(t, s, \mathbf{x}_{0,k}, \mathbf{f}_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t, s, \mathbf{x}_0, \mathbf{f})$$

uniformemente en t en cualquier subintervalo compacto contenido en el intervalo maximal de definición de la solución límite $\mathbf{x}(\cdot, s, \mathbf{x}_0, \mathbf{f})$, donde con $\mathbf{x}(t, s, \mathbf{x}_0, \mathbf{f})$ se indica la solución a tiempo t de la ecuación diferencial con lado derecho \mathbf{f} y condición inicial \mathbf{x}_0 a tiempo s .

Teorema 5.3.4 (*Dependencia continua de las soluciones con h y c*). La familia

$$\mathcal{F} = \left\{ \mathbf{f}_c^h : c \in (0, \infty], h \in [0, \infty) \right\} \quad (5.20)$$

admite l -cotas L_{loc}^1 -acotadas. Si se considera una sucesión $\{(c_k, h_k)\}_{k=1}^\infty$ en $(0, \infty) \times [0, \infty)$, un elemento límite $(c_0, h_0) \in (0, \infty) \times [0, \infty)$, y una sucesión de datos iniciales $\{\mathbf{x}_{0,k}\}_{k=1}^\infty$ en \mathbb{R}^n que converge a $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\mathbf{x}(t, s, \mathbf{x}_{0,k}, h_k, c_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t, s, \mathbf{x}_0, h_0, c_0) \quad (5.21)$$

uniformemente en t en cualquier subintervalo compacto contenido en el intervalo maximal de definición de la solución límite $\mathbf{x}(t, s, \mathbf{x}_0, h_0, c_0)$.

Demostración. Gracias a que cualquier compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ está contenido en un compacto convexo $K' \subset \mathbb{R}^n$ y a la continuidad de $D\mathbf{f}$, se tiene que para cualquier $t \in \mathbb{R}$ y cualesquiera $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ se verifica que

$$|\mathbf{f}_c^h(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}_c^h(t, \mathbf{y})| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \sup_{\mathbf{z} \in K'} \|D\mathbf{f}_c^h(t, \mathbf{z})\| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \sup_{(\mathbf{z}, \lambda) \in K' \times \Lambda(\mathbb{R})} \|D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)\|.$$

En consecuencia, no sólo las l -cotas son integrables en cualquier intervalo I sino que son, de hecho, constantes e independientes del elemento de la familia \mathcal{F} que se escoja, pudiéndose así aplicar los resultados de [21] antes mencionados. Se toma entonces $D = \mathbb{Q}^n$ y se va a probar la convergencia en \mathcal{T}_D cuando $k \rightarrow \infty$. Para ello hace falta estudiar la convergencia en cada una de las seminormas, es decir, lo que hay que probar es que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} p_{[q_1, q_2], \mathbf{x}}(\mathbf{f}_{c_k}^{h_k} - \mathbf{f}_{c_0}^{h_0}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{q_1}^{q_2} |\mathbf{f}_{c_k}^{h_k}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}_{c_0}^{h_0}(t, \mathbf{x})| dt \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{q_1}^{q_2} |\mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda_{c_k}^{h_k}(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda_{c_0}^{h_0}(t))| dt = 0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

para cualesquiera $\mathbf{x} \in \mathbb{Q}^n$, $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$. Ahora bien, fijado $\mathbf{x} \in \mathbb{Q}^n$ se tiene que $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \cdot)$ es una función continua en todo \mathbb{R} . Como, además, se tiene la cota

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda_{c_k}^{h_k}(t))| \leq \sup_{\lambda \in \Lambda(\mathbb{R})} |\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)|,$$

que es una constante como función de t y, por tanto, integrable sobre intervalos finitos, se sigue que el teorema de la convergencia dominada garantiza que si para casi todo $t \in [q_1, q_2]$ se verifica

$$\Lambda_{c_k}^{h_k}(t) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \Lambda_{c_0}^{h_0}(t), \quad (5.23)$$

entonces se cumple (5.22). Vamos a separar la demostración en casos dependiendo de los valores h_0 y c_0 .

- Si $h_0, c_0 \in (0, \infty)$, dado cualquier $t \in [q_1, q_2]$ que no sea de la forma $t = jh_0$, con $j \in \mathbb{Z}$, se toma $\epsilon = \epsilon(t) = \min_{j \in \mathbb{Z}} |t - jh_0| > 0$. Sin pérdida de generalidad se puede asumir que en este caso $h_k, c_k \in (0, \infty)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por un lado, se tiene que $I = [q_1, q_2] \subseteq [j_1 h_0, j_2 h_0]$ para ciertos $j_1, j_2 \in \mathbb{Z}$. Entonces, si se define $j_M = \max\{|j_1|, |j_2|\}$ y se toma $k' \in \mathbb{N}$ de forma que para todo $k \geq k'$ se verifique que $|h_0 - h_k| \leq \epsilon/2j_M$. De esta forma, se tiene que $|jh_0 - jh_k| \leq \epsilon/2$ para todo $j \in [j_1, j_2] \cap \mathbb{Z}$. Esto implica que si $t \in (ih_0, (i+1)h_0)$ con $i \in \mathbb{Z}$ entonces también $t \in (ih_k, (i+1)h_k)$ para cualquier $k \geq k'$, luego

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\Lambda_{c_k}^{h_k}(t) - \Lambda_{c_0}^{h_0}(t)) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\Lambda(c_k i h_k) - \Lambda(c_0 i h_0)) = 0.$$

- Si $h_0 \in (0, \infty)$ y $c_0 = \infty$. Ahora dado cualquier $t \in [q_1, q_2]$ distinto de 0 y de h_0 , se toma $\epsilon = \epsilon(t) = \min\{|t|, |t - h_0|\} > 0$. Entonces si $t \in (0, h_0)$ existe $k' \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq k'$ se cumple que $|h_k - h_0| \leq \epsilon/2$, lo que garantiza que $\Lambda_{c_k}^{h_k}(t) = \Lambda(0) = \Lambda_{\infty}^{h_0}(t)$; y para $t < 0$ ó $t > h_0$ de forma análoga se tiene que $\lim_{k \rightarrow \infty} \Lambda_{c_k}^{h_k}(t) = \lambda_{\pm} = \Lambda_{\infty}^h(t)$.
- Si $h_0 = 0$ y $c_0 \in (0, \infty)$, dado $t \in [q_1, q_2]$, para cada $k \in \mathbb{N}$ para el que $h_k \neq 0$ se define $j_k \in \mathbb{Z}$ tal que $t \in [h_k j_k, h_k(j_k + 1))$. A través de la subsucesión $\{k_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ que verifica $h_{k_m} = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$ es claro que se tiene la convergencia, ya que $\Lambda(c_{k_m} t) \rightarrow \Lambda(c_0 t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ cuando $m \rightarrow \infty$, por lo que sin pérdida de generalidad podemos suponer que $h_k \neq 0$ y, por tanto, la existencia de los $j_k \in \mathbb{Z}$ antes mencionados. Como $h_k \rightarrow 0$, existirá $k_0 \in \mathbb{N}$ de forma que si $t > 0$ (resp. $t < 0$) se tenga que $j_k > 0$ (resp. $j_k < 0$) para todo $k \geq k_0$, debido a que j_k es una sucesión que tiende hacia $\pm\infty$ cuando $k \rightarrow \infty$ por su propia definición. Si $t \geq 0$ se cumple que $h_k j_k \leq t$ y si $t < 0$ entonces $t - h_k < h_k j_k$. En cualquiera de los dos casos $|h_k j_k| \leq |t| + \max_{k \in \mathbb{N}} h_k = |t| + M$, donde este máximo $M > 0$ es finito porque la sucesión es convergente. Entonces

$$\begin{aligned} |\Lambda_{c_0}^0(t) - \Lambda_{c_k}^{h_k}(t)| &= |\Lambda(c_0 t) - \Lambda(c_k h_k j_k)| \leq |\Lambda'|_{\infty} |c_0 h_k(j_k + \lambda_k) - c_k h_k j_k| \\ &\leq |\Lambda'|_{\infty} (|c_0 - c_k| \cdot |j_k h_k| + c_0 h_k) \leq |\Lambda'|_{\infty} (|c_0 - c_k|(|t| + M) + c_0 h_k), \end{aligned}$$

donde $\lambda_k = t/h_k - j_k$ y se ha usado en consecuencia que $|\lambda_k| \leq 1$. Cuando se hace tender $k \rightarrow \infty$ en la expresión anterior se obtiene que $\Lambda_{c_k}^{h_k}(t) \rightarrow \Lambda_{c_0}^0(t)$ para todo $t \in [q_1, q_2]$.

- Si $h_0 = 0$ y $c_0 = \infty$ entonces, dado $t \in [q_1, q_2] \setminus \{0\}$, de nuevo se vuelven a definir $j_k \in \mathbb{Z}$ tales que $t \in [h_k j_k, h_k(j_k + 1))$, asumiendo que $h_k \neq 0$ sin pérdida de generalidad por un razonamiento análogo al del punto anterior. Vamos a utilizar la desigualdad contraria a la $|h_k j_k| \leq |t| + \max_{k \in \mathbb{N}} h_k$ obtenida en el apartado anterior. Para ello, se tiene en cuenta que si $t > 0$ entonces $t - h_k < h_k j_k$ y si $t < 0$ entonces $h_k j_k \leq t$. En ambos casos, para h_k lo suficientemente pequeño, $|t| - h_k < |h_k j_k|$ luego $\{h_k j_k\}_{k=0}^{\infty}$ no puede tender hacia 0. De ahí se deduce que $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k h_k j_k = \pm\infty$, valiendo $+\infty$ si $t > 0$ y $-\infty$ si $t < 0$. De aquí que para todo $t \in \mathbb{R}$ se tenga

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Lambda_{c_k}^{h_k}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Lambda(c_k h_k j_k) = \Lambda_{\infty}^0(t).$$

Como en los cuatro casos posibles se cumple (5.23), queda probado el teorema. \square

5.4. Existencia y unicidad de atractor pullback local

Disponiendo ahora de las herramientas fundamentales para tratar ecuaciones diferenciales de Carathéodory que suponen el Teorema 5.1.7 y la Proposición 5.1.8, nos disponemos a repetir de forma muy esquemática los pasos que se dieron en el caso continuo para demostrar la existencia de atractor pullback local, que será solución en sentido extendido.

En esta sección consideramos $h \in [0, \infty)$ y $c \in (0, \infty]$ fijos. Para nuestro propósito, se consideran perturbaciones por truncamiento del sistema no autónomo (5.12) de la misma forma que en el caso continuo:

$$\hat{\mathbf{f}}_{c,s}^h(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda_c^h(t)), & t \in (-\infty, s], \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda_c^h(s)), & t \in (s, \infty), \end{cases} \quad \check{\mathbf{f}}_{c,s}^h = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda_c^h(s)), & t \in (-\infty, s), \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda_c^h(t)), & t \in [s, \infty). \end{cases}$$

Vamos a ir siguiendo poco a poco las demostraciones que se han ido utilizando en el Capítulo 4 para demostrar la existencia y unicidad de atractor pullback local, así como las propiedades de rastreo del mismo, comprobando que se pueden utilizar con mínimas modificaciones. Queremos encontrar soluciones, por tanto, del sistema

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \hat{\mathbf{f}}_{c,s}^h(t, \mathbf{x}). \quad (5.24)$$

En primer lugar, seguimos la demostración del Teorema 3.2.4 para comprobar que la menor regularidad con la que cuentan estos sistemas no supone ningún perjuicio en los resultados. Usando el cambio de variable $\mathbf{x} = \mathbf{X}_- + \mathbf{y}$ el sistema a tratar se convierte en

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = D\mathbf{f}(\mathbf{X}_-, \lambda_-)\mathbf{y} + \mathbf{b}_{c,s}^h(t, \mathbf{y}),$$

donde

$$\mathbf{b}_{c,s}^h(t, \mathbf{y}) = \hat{\mathbf{f}}_{c,s}^h(t, \mathbf{X}_- + \mathbf{y}) - D\mathbf{f}(\mathbf{X}_-, \lambda_-)\mathbf{y}.$$

Fijado un $\epsilon_0 > 0$ se toma un $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ de forma que

$$\overline{B}(\mathbf{X}_-, \epsilon_0) \subseteq B_k = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| \leq k\}. \quad (5.25)$$

El punto crucial para poder proceder de la misma forma que en la demostración del Teorema 3.2.4 es darse cuenta que pese a que $\hat{\mathbf{f}}_{c,s}^h \notin \mathcal{C}^{b,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, ya que no hay continuidad respecto de la variable temporal, se tiene que $D\hat{\mathbf{f}}_{c,s}^h(t, \mathbf{x})$ está bien definido para todo $t \in \mathbb{R}$ (habrá que tener cuidado en que esta no es función continua de t , pero sí que lo es de \mathbf{x}), ya que se corresponde con $D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda_c^h(t))$ para $t \leq s$ y con $D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda_c^h(s))$ para $t \geq s$. Además, aunque $\hat{\mathbf{f}}_{c,s}^h - \mathbf{f}(\mathbf{X}_-, \lambda_-)$ no esté en $\mathcal{C}^{b,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, sí que se puede definir la seminorma

$$|\hat{\mathbf{f}}_{c,s}^h - \mathbf{f}(\mathbf{X}_-, \lambda_-)|_{k,b,1} = \sup_{(t,\mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times B_k} |\hat{\mathbf{f}}_{c,s}^h(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{X}_-, \lambda_-)| + \sup_{(t,\mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times B_k} \|D\hat{\mathbf{f}}_{c,s}^h(t, \mathbf{x}) - D\mathbf{f}(\mathbf{X}_-, \lambda_-)\|,$$

ya que ambos superiores involucrados son finitos. Para ello, basta observar, por ejemplo, que el siguiente conjunto está acotado

$$\|D^\alpha \hat{\mathbf{f}}_{c,s}^h(\mathbb{R} \times B_k)\|_{\mathcal{L}_\alpha} \subseteq \left\| D^\alpha \mathbf{f} \left(B_k \times \left[\inf_{r \in (-\infty, s]} \Lambda_c^h(r), \sup_{r \in (-\infty, s]} \Lambda_c^h(r) \right] \right) \right\|_{\mathcal{L}_\alpha} \quad (5.26)$$

ya que el conjunto del lado derecho está acotado por continuidad en un compacto, y pensar análogamente los involucrados en la seminorma. La uniformidad que se pide sobre la linealizada del sistema a perturbar se obtendrá gracias a la independencia de la variable t del lado derecho $D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda_-)$. A continuación, se lleva a cabo la misma elección de constantes que en el Teorema 3.2.4, es decir, siendo (K, α) el par de dicotomía exponencial de $D\mathbf{f}(\mathbf{X}_-, \lambda_-)$, se considera un $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ tal que si $|\mathbf{y}| \leq \epsilon$ se tenga que

$$\|D\mathbf{f}(\mathbf{X}_- + \mathbf{y}, \lambda_-) - D\mathbf{f}(\mathbf{X}_-, \lambda_-)\| \leq \frac{\alpha}{K} \cdot \frac{1}{4}. \quad (5.27)$$

Para cada $t \in \mathbb{R}$ fijo no hay problema en aplicar el teorema de Taylor a las variables espaciales \mathbf{y} , por tanto, tomando $\delta_0 = \delta_0(\epsilon) = (\alpha/K) \cdot (1/4) \cdot \min\{1, \epsilon\}$ se llega a que siempre que $h \in [0, \infty)$ y $c \in (0, \infty]$ verifiquen la desigualdad $|\hat{\mathbf{f}}_{c,s}^h - \mathbf{f}(\mathbf{X}_-, \lambda_-)|_{k,b,1} \leq \delta_0$, y también que $\mathbf{y}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \overline{B}(0, \epsilon)$ entonces

$$|\mathbf{b}_{c,s}^h(t, \mathbf{y})| \leq \frac{\alpha}{K} \cdot \frac{3}{4} \cdot \epsilon, \quad |\mathbf{b}_{c,s}^h(t, \mathbf{y}_1) - \mathbf{b}_{c,s}^h(t, \mathbf{y}_2)| \leq \frac{\alpha}{K} \cdot \frac{1}{2} \cdot |\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1|, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (5.28)$$

Para acabar, observando la forma del operador de iteración

$$T_{c,s}^h \mathbf{y}_0(t) = \int_{-\infty}^t X(t)X^{-1}(s) \mathbf{b}_{c,s}^h(s, \mathbf{y}_0(t)) ds,$$

si se considera la misma bola cerrada del espacio de funciones $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$,

$$E = \left(\{ \mathbf{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ continuas y acotadas : } |\mathbf{y}|_\infty \leq \epsilon \}, |\cdot|_\infty \right),$$

se tiene que $T_{c,s}^h : E \rightarrow E$ está bien definida y es contractiva entre espacios métricos completos, luego por el teorema del punto fijo de Banach tiene una única solución en E , que denominaremos $\mathbf{y}_{c,s}^h(t)$. En consecuencia, $\hat{\mathbf{x}}_{c,s}^h(t) = \mathbf{X}_- + \mathbf{y}_{c,s}^h(t)$ es nuestro candidato a solución hiperbólica atractiva.

Acudiendo ahora a la demostración de la Proposición 3.2.1, se comprueba que la continuidad que se pide a $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ no juega ningún papel siempre que se verifique que $\|A - B\|_\infty < \delta_0$, ya que las dos piezas de la demostración que son la fórmula de variación de las constantes y el lema de Gronwall van a funcionar igual para nuestras funciones constantes a trozos. De esta forma, se tiene que existe un par de dicotomía exponencial común (K, α') para todas las soluciones hiperbólicas $\hat{\mathbf{x}}_{c,s}^h$ siempre que $|\hat{\mathbf{f}}_{c,s}^h - \mathbf{f}(\mathbf{X}_-, \lambda_-)|_{k,b,1} \leq \delta_0$, y además, se tiene que $|\hat{\mathbf{x}}_{c,s}^h - \mathbf{X}_-|_\infty \leq \epsilon$. Además, por las mismas razones que en el caso continuo,

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} |\hat{\mathbf{f}}_{c,s}^h - \mathbf{f}(\mathbf{X}_-, \lambda_-)|_{k,b,1} = 0, \quad (5.29)$$

luego existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que si $s \leq s_0$ se tiene que $|\hat{\mathbf{f}}_{c,s}^h - \mathbf{f}(\mathbf{X}_-, \lambda_-)|_{k,b,1} \leq \delta_0$.

Ahora, volviendo sobre el Teorema 3.2.3 del método de la primera aproximación y su prueba, se observa que basta realmente con que exista $M > 0$ tal que para cualquier par $h \in [0, \infty)$ y $c \in (0, \infty]$ que cumpla $|\hat{\mathbf{f}}_{c,s}^h - \mathbf{f}(\mathbf{X}_-, \lambda_-)|_{k,b,1} \leq \delta_0$ se tenga que

$$\|D^2 \hat{\mathbf{f}}_{c,s}^h(t, \mathbf{x})\|_{\mathcal{L}_2} \leq M, \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times B_k,$$

para conseguir un dominio de atracción uniforme $\delta > 0$ para todas las soluciones hiperbólicas atractivas que se han considerado antes. En esa dirección, se tiene que para cualquier $s \leq s_0$ se verifica que

$$\|D^2 \hat{\mathbf{f}}_{c,s}^h(\mathbb{R} \times B_k)\|_{\mathcal{L}_2} \subseteq \left\| D^2 \mathbf{f} \left(B_k \times \left[\inf_{r \in (-\infty, s_0]} \Lambda_c^h(r), \sup_{r \in (-\infty, s_0]} \Lambda_c^h(r) \right] \right) \right\|_{\mathcal{L}_2}, \quad (5.30)$$

luego efectivamente existe la cota $M > 0$ antes buscada, ya que el lado derecho es un conjunto acotado por ser la imagen de una función continua en un compacto.

En resumen, se tiene que existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $s \leq s_0$ se verifica que el sistema (5.24) admite una solución hiperbólica $\hat{\mathbf{x}}_{c,s}^h$ que verifica que $|\hat{\mathbf{x}}_{c,s}^h - \mathbf{X}_-| \leq \epsilon(s)$, de forma que $\lim_{s \rightarrow -\infty} \epsilon(s) = 0$ y tales que todas esas soluciones hiperbólicas admiten un par de dicotomía exponencial y un dominio de atracción exponencial comunes. Estos son todos los ingredientes necesarios para que los Teoremas 4.2.3 y 4.2.5 aseguren la existencia de un atractor pullback local de nuestro problema, lo cual queda plasmado en el siguiente teorema.

Teorema 5.4.1 (Existencia de atractor pullback local para transiciones constantes a trozos). Dados $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{2,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, una función de transición $\Lambda \in \mathcal{P}(\lambda_-, \lambda_+)$, un estado inicial estable $(\mathbf{X}_-, \lambda_-) \in \mathcal{X}_{\text{stab}}$, una velocidad de transición $c \in (0, \infty]$ y un paso discreto $h \in [0, \infty)$, se tiene que para el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda_c^h(t)) \quad (5.31)$$

existe una única solución $\mathbf{x}_c^h(t)$ que es un atractor pullback local verificando $\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{x}_c^h(t) = \mathbf{X}_-$. Además, existe un entorno U de \mathbf{X}_- y un $T > 0$ tal que \mathbf{x}_c^h es la única solución que permanece en U para todo $t < -T$.

La propiedad de perturbación que se ha probado puede condensarse en la siguiente proposición, incluyendo también la de perturbación en un entorno de $+\infty$ que necesitaremos más adelante.

Proposición 5.4.2 (Resumen de perturbaciones de las soluciones asintóticas). Sean $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{2,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ y un paso de discretización $h \in [0, \infty)$ fijo. Entonces,

- I) fijado $c_m \in (0, \infty)$, existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que para cualesquiera $s \leq s_0$ y $c \in [c_m, \infty]$ el sistema

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \hat{\mathbf{f}}_{c,s}^h(t, \mathbf{x}) \quad (5.32)$$

admite una solución hiperbólica atractiva $\hat{\mathbf{x}}_{c,s}^h$. Además, existe $\delta > 0$ y una función creciente $\delta_0 : (-\infty, s_0] \rightarrow [0, \delta/2]$ con $\lim_{s \rightarrow -\infty} \delta_0(s) = 0$ que verifica que $|\hat{\mathbf{x}}_{c,s}^h - \mathbf{X}_-|_\infty \leq \delta_0(s)$. Por último, existen constantes $K, \alpha > 0$ tales que teniéndose $u \leq t \leq s \leq s_0$, un dato $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, y verificándose que $|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{c,s}^h(u)| \leq \delta$ entonces se cumple que

$$|\mathbf{x}(t, u, \mathbf{x}_0, h, c) - \hat{\mathbf{x}}_{c,s}^h(t)| \leq K e^{-\alpha(t-u)} |\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{c,s}^h(u)|.$$

Si $s \leq s_0$ se cumple que $\hat{\mathbf{x}}_{c,s_0}^h|_{(-\infty, s)} = \hat{\mathbf{x}}_{c,s}^h|_{(-\infty, s)}$ y, además, $\lim_{t \rightarrow -\infty} \hat{\mathbf{x}}_{c,s}^h(t) = \mathbf{X}_-$.

- II) fijado $s_0 < 0$, existe $c_m > 0$ tal que para cualesquiera $s \leq s_0$ y $c \in [c_m, \infty]$ el sistema (5.32) admite una solución hiperbólica atractiva $\hat{\mathbf{x}}_{c,s}^h$. Además, existe $\delta > 0$ y una función decreciente $\delta_0 : [c_m, \infty) \rightarrow [0, \delta/2]$ con $\lim_{c \rightarrow \infty} \delta_0(c) = 0$ tal que verifica que $|\hat{\mathbf{x}}_{c,s}^h - \mathbf{X}_-|_\infty \leq \delta_0(c)$. Por otro lado, existen $K, \alpha > 0$ tales que teniendo $u \leq t \leq s \leq s_0$, un dato $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, y verificándose que $|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{c,s}^h(u)| \leq \delta$ entonces se cumple que

$$|\mathbf{x}(t, u, \mathbf{x}_0, h, c) - \hat{\mathbf{x}}_{c,s}^h(t)| \leq K e^{-\alpha(t-u)} |\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{c,s}^h(u)|.$$

Si $s \leq s_0$ se cumple que $\hat{\mathbf{x}}_{c,s_0}^h|_{(-\infty, s)} = \hat{\mathbf{x}}_{c,s}^h|_{(-\infty, s)}$ y, además, $\lim_{t \rightarrow -\infty} \hat{\mathbf{x}}_{c,s}^h(t) = \mathbf{X}_-$.

- III) fijado $c_m \in (0, \infty)$, existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que para cualesquiera $s \geq s_0$ y $c \in [c_m, \infty]$ el sistema

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \check{\mathbf{f}}_{c,s}^h(t, \mathbf{x}) \quad (5.33)$$

admite una solución hiperbólica atractiva $\check{\mathbf{x}}_{c,s}^h$. Además, existe $\delta > 0$ y una función decreciente $\delta_0 : [s_0, \infty) \rightarrow [0, \delta/2]$ con $\lim_{s \rightarrow \infty} \delta_0(s) = 0$ que verifica que $|\check{\mathbf{x}}_{c,s}^h - \mathbf{X}_+|_\infty \leq \delta_0(s)$. Por otro lado, existen $K, \alpha > 0$ tales que teniéndose $s_0 \leq s \leq u \leq t$, un dato $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, y verificándose que $|\mathbf{x}_0 - \check{\mathbf{x}}_{c,s}^h(u)| \leq \delta$ entonces se cumple que

$$|\mathbf{x}(t, u, \mathbf{x}_0, h, c) - \check{\mathbf{x}}_{c,s}^h(t)| \leq K e^{-\alpha(t-u)} |\mathbf{x}_0 - \check{\mathbf{x}}_{c,s}^h(u)|.$$

Por último, se cumple también que $\lim_{t \rightarrow \infty} \check{\mathbf{x}}_{c,s}^h(t) = \mathbf{X}_+$.

IV) fijado $s_0 > h$, existe $c_m > 0$ tal que para cualesquiera $s \geq s_0$ y $c \in [c_m, \infty]$ el sistema (5.33) admite una solución hiperbólica atractiva $\tilde{\mathbf{x}}_{c,s}^h$. Además, existe $\delta > 0$ y una función decreciente $\delta_0 : [c_m, \infty) \rightarrow [0, \delta/2]$ con $\lim_{c \rightarrow \infty} \delta_0(c) = 0$ que verifica que $|\tilde{\mathbf{x}}_{c,s}^h - \mathbf{X}_+|_\infty \leq \delta_0(c)$. Por otro lado, existen $K, \alpha > 0$ tales que teniéndose $s_0 \leq s \leq u \leq t$, un dato $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, y verificándose que $|\mathbf{x}_0 - \tilde{\mathbf{x}}_{c,s}^h(u)| \leq \delta$ entonces se cumple que

$$|\mathbf{x}(t, u, \mathbf{x}_0, h, c) - \tilde{\mathbf{x}}_{c,s}^h(t)| \leq K e^{-\alpha(t-u)} |\mathbf{x}_0 - \tilde{\mathbf{x}}_{c,s}^h(u)|.$$

También se verifica que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{x}}_{c,s}^h(t) = \mathbf{X}_+$.

Demostración. Para probar el apartado I) sólo queda, con lo presentado en el desarrollo de esta sección, que todo se puede tomar uniformemente en $[c_m, \infty]$ y la última afirmación del enunciado, la cual se tiene análogamente a como se hizo en el Capítulo 4. Para la parte correspondiente a la uniformidad basta ver dos puntos: que

$$\sup_{(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times B_k} \|D^\alpha \hat{\mathbf{f}}_{c,s}^h(t, \mathbf{x}) - D^\alpha \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda_-)\|_{\mathcal{L}_\alpha}$$

se puede hacer pequeño cuando $s \rightarrow -\infty$ uniformemente en $c \in [c_m, \infty]$ para $\alpha = 0, 1$; y que

$$\sup_{(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times B_k} \|D^2 \hat{\mathbf{f}}_{c,s}^h(t, \mathbf{x})\|_{\mathcal{L}_2}$$

admite una cota uniforme en $c \in [c_m, \infty]$ y $s \in (-\infty, s_0]$ con $s_0 < 0$. Para ello, basta tener en cuenta que si denotamos

$$A_{h,c}(s) = \left[\inf_{r \in (-\infty, s]} \Lambda_c^h(r), \sup_{r \in (-\infty, s]} \Lambda_c^h(r) \right] \subseteq \left[\inf_{r \in (-\infty, s]} \Lambda(cr), \sup_{r \in (-\infty, s]} \Lambda(cr) \right],$$

para valores $s < 0$ se tiene que $(-\infty, cs] \subseteq (-\infty, c_m s]$, luego entonces

$$A_{h,c}(s) \subseteq \left[\inf_{r \in (-\infty, s]} \Lambda(cr), \sup_{r \in (-\infty, s]} \Lambda(cr) \right] \subseteq \left[\inf_{r \in (-\infty, s]} \Lambda(c_m r), \sup_{r \in (-\infty, s]} \Lambda(c_m r) \right] = A_{0,c_m}(s), \quad (5.34)$$

y es claro que, por la continuidad de Λ se cumple que $\lim_{s \rightarrow -\infty} A_{0,c_m}(s) = \{\lambda_-\}$ (el límite de conjuntos está bien definido porque cada uno está contenido en los anteriores, luego se puede definir como la intersección de todos ellos). En consecuencia para $\alpha = 0, 1$,

$$\sup_{(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times B_k} \|D^\alpha \hat{\mathbf{f}}_{c,s}^h(t, \mathbf{x}) - D^\alpha \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda_-)\|_{\mathcal{L}_2} \leq \sup_{(\mathbf{x}, \lambda) \in B_k \times A_{0,c_m}(s)} \|D^\alpha \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda) - D^\alpha \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda_-)\|_{\mathcal{L}_2}, \quad (5.35)$$

$$\sup_{(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times B_k} \|D^2 \hat{\mathbf{f}}_{c,s}^h(t, \mathbf{x})\|_{\mathcal{L}_2} \leq \sup_{(\mathbf{x}, \lambda) \in B_k \times A_{0,c_m}(s)} \|D^2 \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)\|_{\mathcal{L}_2} < \infty, \quad (5.36)$$

que es lo que nos hacía falta ver para tener garantizada la uniformidad, ya que los dos lados derechos anteriores no dependen de c y donde el lado derecho de (5.35) tiende hacia 0 cuando $s \rightarrow -\infty$.

Para probar II), que afirma que si se fija un $s_0 < 0$ arbitrario, entonces existe un $c_m > 0$ tal que para $c \in [c_m, \infty]$ se verifica un resultado análogo al anterior, basta darse cuenta de que para cualquier $s \leq s_0$

$$A_{0,c}(s) \subseteq \left[\inf_{r \in (-\infty, s_0]} \Lambda(cr), \sup_{r \in (-\infty, s_0]} \Lambda(cr) \right] = \left[\inf_{t \in [c, \infty)} \Lambda(ts_0), \sup_{t \in [c, \infty)} \Lambda(ts_0) \right] \xrightarrow{c \rightarrow \infty} \{\lambda_-\}, \quad (5.37)$$

luego análogamente se conseguirán c 's para los que $|\hat{\mathbf{f}}_{c,s}^h - \mathbf{f}_-|_{k,b,1}$ se haga tan pequeño como se requiera (que era el papel que antes hacía s en la demostración) uniformemente en $s \leq s_0$, pudiendo conseguirse entonces hacer la misma construcción pero dependiendo la función δ_0 de c en lugar de s .

El apartado III) se prueba de forma análoga, realizando las mismas modificaciones que se hicieron en el caso continuo (Teorema 4.3.5) a partir de la del apartado anterior. De nuevo, cabe destacar que las soluciones hiperbólicas que se obtienen en este proceso no tienen por qué ser extensiones las unas de las otras, pero sí que tienen el mismo límite. La justificación de la uniformidad se hace de la misma manera que en el apartado anterior, pero ahora definiendo

$$B_{h,c}(s) = \left[\inf_{r \in [s, \infty)} \Lambda_c^h(r), \sup_{r \in [s, \infty)} \Lambda_c^h(r) \right], \quad (5.38)$$

y notando la ligera diferencia de que en este caso se necesita considerar $B_{h,c}(s) \subseteq B_{0,c}(s-h)$ para que al tomar $s > h$, se tenga $B_{h,c}(s) \subseteq B_{0,c}(s-h) \subseteq B_{0,c_m}(s-h)$, deduciéndose que $\lim_{s \rightarrow \infty} B_{0,c_m}(s-h) = \{\lambda_+\}$ y siguiéndose, por tanto, los mismos resultados. El apartado IV) toma la prueba de II) en el marco de III). \square

5.5. Rastreo de la curva de equilibrios estables

En esta sección se pretende asegurar que el proceso llevado a cabo para garantizar rastreo en el caso de transición continua se puede llevar a cabo con mínimas modificaciones en el caso de transiciones constantes a trozos. Por esa razón en lo que resta de sección se irán siguiendo las demostraciones de la Sección 4.3, indicando las modificaciones que hacen esos resultados válidos para este caso. Al igual que se hizo en el caso continuo, se busca escribir el sistema (5.13) en la forma siguiente:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A_{c,h}^s \mathbf{y} + \mathbf{g}_{c,h}^s(\mathbf{y}) + \mathbf{h}_{c,h}^s(t, \mathbf{y}), \quad (5.39)$$

donde

$$\begin{cases} A_{c,h}^s \mathbf{y} = D\mathbf{f}(\mathbf{X}(\Lambda_c^h(s)), \Lambda_c^h(s)), \\ \mathbf{g}_{c,h}^s(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{X}(\Lambda_c^h(s)) + \mathbf{y}, \Lambda_c^h(s)) - D\mathbf{f}(\mathbf{X}(\Lambda_c^h(s)), \Lambda_c^h(s))\mathbf{y}, \\ \mathbf{h}_{c,h}^s(t, \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{X}(\Lambda_c^h(s)) + \mathbf{y}, \Lambda_c^h(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{X}(\Lambda_c^h(s)) + \mathbf{y}, \Lambda_c^h(s)). \end{cases}$$

Se quiere aplicar la Proposición 4.3.3 de la misma forma que se hizo en el Capítulo 4 para conseguir rastrear la curva de equilibrios estables.

En primer lugar, vamos a ver que análogamente al Lema 4.3.4, esta familia cumple las hipótesis de la Proposición 4.3.3 y luego comprobaremos que no hay problema en aplicarla. Con esta dirección, cabe destacar que el mismo argumento que se empleó en el caso continuo garantiza aquí la existencia de constantes de dicotomía exponencial comunes para los sistemas $D\mathbf{f}(\mathbf{X}(\Lambda_c^h(s)), \Lambda_c^h(s))$ independientemente de $c \in (0, \infty)$, $h \in [0, \infty)$ y $s \in \mathbb{R}$, ya que cada uno de esos sistemas se corresponde con $D\mathbf{f}(\mathbf{X}(\lambda), \lambda)$ para algún $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$.

A partir de ahora se considerará un valor de $h \in [0, \infty)$ fijo y para él se demostrará el rastreo de los equilibrios. El caso $h = 0$ es el que ya se ha estudiado en la Sección 4.3, por lo que no incidiremos mucho más sobre él. Buscando una mayor sencillez a la hora de aplicar un

resultado análogo a la Proposición 4.3.3, teniendo en cuenta que lo que nos da el par (K, α) es una cota inferior a la hora de elegir $l > 0$, vamos a tomar un $l_h = mh$ posiblemente mayor que el que nos daría la proposición, con $m \in \mathbb{N}$. Más adelante tomaremos $s_0 \in \mathbb{R}$ también de esta forma (luego concretaremos su elección), $s_0 = nh$ con $n \in \mathbb{Z}$ para que la aplicación del resultado de la proposición sea en los puntos $s = s_0 + kl = h(n + km)$, con $k = -1, 0, 1, 2, \dots$. También es idéntico al caso continuo el argumento que muestra que se puede tomar un $\epsilon_0 > 0$ común para todas estas funciones, teniendo en cuenta la continuidad uniforme de Df en cualquier compacto que contenga a

$$\left(\mathbf{X}(\Lambda(\mathbb{R})) + \overline{B}(0, 2K) \right) \times \Lambda(\mathbb{R}), \quad (5.40)$$

es decir, dado $\mu_0 > 0$ existe un $0 < \epsilon_0 \leq 1$ tal que si $|\mathbf{y}| < 2K\epsilon_0$ entonces $|\mathbf{g}_{h,c}^s(\mathbf{y})| < \mu_0|\mathbf{y}|$ para cualquier $s \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, queda comprobar que se puede escoger $c_\epsilon > 0$ sin problemas al haber introducido una transición continua a trozos. La continuidad uniforme de \mathbf{f} en el mismo compacto escogido antes que contiene a (5.40) garantiza que existe $\epsilon_2 > 0$ tal que si $|\Lambda_c^h(t) - \Lambda_c^h(s)| \leq \epsilon_2$ entonces $|\mathbf{h}_{c,h}^s(t, \mathbf{y})| \leq \nu_1$ si $|\mathbf{y}| \leq 2K\epsilon \leq 2K$. Ahora bien, se tiene que si $t \in [s, s + 2l_h]$

$$|\Lambda_c^h(t) - \Lambda_c^h(s)| = \left| \Lambda \left(hc \left[\frac{t}{h} \right] \right) - \Lambda(cs) \right| \leq |\Lambda'|_\infty \left(h \left[\frac{t}{h} \right] - s \right) c \leq |\Lambda'|_\infty 2l_h c, \quad (5.41)$$

tomando $c_{\epsilon,1} = \epsilon_2 / (|\Lambda'|_\infty 2l_h)$ se vaya a poder proceder como en el Capítulo 4. Nótese que la desigualdad anterior se ha podido tratar así precisamente por la elección de que $s = h(n + km)$, donde los tres números n, k, m involucrados son enteros. Si esto no se hubiera tomado así aparecería $(2l_h + h)$ en lugar de $2l_h$ en la última desigualdad, lo cual tampoco supondría grandes problemas pero complicaría el razonamiento posterior. También es importante destacar que la desigualdad anterior se ha obtenido en el caso de que $h \neq 0$ y $c \neq \infty$, pero esto no resta generalidad ya que el caso $h = 0$ ya se estudió en la Sección 4.3, obteniendo la misma desigualdad, y lo que estamos estudiando es rastreo para casos de c pequeño, por lo que el valor $c = \infty$ nos resulta indiferente en esta discusión.

Hay otro aspecto relevante que discutir en torno a la ecuación (5.41) y es la posible dependencia con h del valor de $c_{\epsilon,1}$ que se acaba de escoger (y análogamente del $c_{\epsilon,2}$ que se escogerá a continuación). Nos gustaría ver que estas constantes se pueden tomar las mismas en compactos de la forma $h \in [0, h_1]$, con $h_1 > 0$. El problema recae sobre la elección de las l_h . Denotaremos $M = \frac{2}{\alpha} \log(4K)$ que es el valor que debe superar l para poder seguir la demostración de la Proposición 4.3.3. Escogemos en primer lugar $l_{h_1} = m_1 h_1 > M + h_1$, con $m_1 \in \mathbb{N}$. Este excedente en la definición va a ser el que nos garantice la uniformidad, ya que para cualquier $h \in [0, h_1]$ va a existir un múltiplo entero de h con $n \in \mathbb{N}$, $l_h = n_h h$ (para $h = 0$ vale tomar l_{h_1}), que verifique $M < l_h \leq l_{h_1}$. Así queda garantizado por (5.41) que

$$|\Lambda_c^h(t) - \Lambda_c^h(s)| \leq |\Lambda'|_\infty 2l_h c \leq |\Lambda'|_\infty 2l_{h_1} c, \quad (5.42)$$

y por tanto, la elección $c_{\epsilon,1} = \epsilon_2 / (|\Lambda'|_\infty 2l_{h_1})$ es válida en el compacto $[0, h_1]$.

A continuación, con la misma elección de $c_{\epsilon,2} = \epsilon / (4l_{h_1} |\mathbf{X}'|_\infty |\Lambda'|_\infty)$ que en el caso continuo se garantiza que para $c_\epsilon \leq \min\{c_{\epsilon,1}, c_{\epsilon,2}\}$ se tenga también que si $t \in [s + l, s + 2l]$, para todo $h \in [0, h_1]$, gracias a (5.42), se cumpla que por el teorema del valor medio

$$|\mathbf{X}(\Lambda_c^h(t)) - \mathbf{X}(\Lambda_c^h(s))| \leq |\mathbf{X}'|_\infty |\Lambda_c^h(t) - \Lambda_c^h(s)| \leq |\mathbf{X}'|_\infty |\Lambda'|_\infty c 2l_{h_1} \leq \frac{\epsilon}{2}. \quad (5.43)$$

Para acabar de recorrer la demostración de la Proposición 4.3.3, se observa que la aplicación de la fórmula de variación de las constantes y el Lema de Gronwall son válidos también en el caso de transición continua a trozos. Finalmente, se acaba la demostración de ϵ -rastreo y rastreo de los puntos finales como en el Teorema 4.3.5, señalando únicamente que la elección de s_1 y s_2 debe ser entre los múltiplos enteros de h para que lo sea también s_0 , como se ha requerido en el proceso anterior.

Detallando lo anterior, dado $\epsilon > 0$ y $h \in [0, h_1]$ fijos, se toma $c < c_\epsilon$, y la existencia de atractor pullback local de la Sección 5.4 asegura que existe $s_1 = hn_1$, con $n_1 \in \mathbb{Z}$ tal que si $t \leq s_1$ entonces $|\mathbf{x}_c^h(t) - \mathbf{X}_-| \leq \epsilon/2$. Por otro lado, al tratarse $\Lambda_c^h(s)$ de una función continua a trozos y acotada, es claro que existen sus límites laterales y, por tanto, existe $s_2 = hn_2$ con $n_2 \in \mathbb{Z}$ tal que si $t \leq s_2$ se verifica que $|\mathbf{X}(\Lambda_c^h(t)) - \mathbf{X}_-| \leq \epsilon/2$. Cabe destacar aquí que s_0 depende del h elegido, al igual que depende de c , pero esto no afecta a la demostración, porque lo que se prueba es el rastreo para esos h y c fijos. Juntando ambas se tiene que para $t \leq s_0 = hn = h \min\{n_1, n_2\} = \min\{s_1, s_2\}$,

$$|\mathbf{x}_c^h(t) - \mathbf{X}(\Lambda_c^h(t))| \leq \epsilon.$$

Con las aplicaciones sucesivas del resultado la versión de la Proposición 4.3.3 que se ha justificado antes para nuestra transición continua a trozos, unidas a (5.43) por medio de la desigualdad triangular se obtiene el ϵ -rastreo, es decir, que para $c \leq c_\epsilon$ se cumple que

$$|\mathbf{x}_c^h(t) - \mathbf{X}(\Lambda_c^h(t))| \leq \epsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (5.44)$$

Es importante destacar que aquí lo que se rastrea no es la curva de equilibrios estables $(\mathbf{X}(\Lambda(s)), \Lambda(s))$ sino su correspondiente discretización $\mathbf{X}(\Lambda_c^h(t))$. Finalmente, las mismas modificaciones que se hicieron para aplicar el Corolario 3.2.5 a la existencia de atractor pullback, se aplican a los truncamientos del sistema en entornos de $+\infty$, como aparece formulado en la Proposición 5.4.2, encontrando soluciones hiperbólicas atractivas que, ahora, como en el caso continuo, no tienen por qué coincidir sino que tienen el mismo límite en $+\infty$, que es \mathbf{X}_+ . En definitiva se tiene rastreo de los puntos finales de la curva de equilibrios estables por parte del atractor pullback local. Lo que se ha probado se puede resumir en el siguiente teorema.

Teorema 5.5.1 (Rastreo del atractor pullback local para transiciones constantes a trozos). Dados $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{2,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, una función de transición $\Lambda \in \mathcal{P}(\lambda_-, \lambda_+)$, un estado inicial estable $(\mathbf{X}_-, \lambda_-) \in \mathcal{X}_{\text{stab}}$, un paso discreto $h_1 > 0$, y un camino estable $(\mathbf{X}(\Lambda(s)), \Lambda(s))$ que atraviesa una rama estable contenida en $\mathcal{X}_{\text{stab}}$ y que conecta $\mathbf{X}_- = \mathbf{X}(\lambda_-)$ con $\mathbf{X}_+ = \mathbf{X}(\lambda_+)$, se tiene que, para todo $h \in [0, h_1]$, el atractor pullback local que sale de \mathbf{X}_- para el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda_c^h(t))$$

ϵ -rastrea su discretización de paso h , es decir, que para todo $\epsilon > 0$ existe $c_\epsilon > 0$ tal que para todo $0 < c < c_\epsilon$ y todo $h \in [0, h_1]$ se verifica que

$$|\mathbf{x}_c^h(t) - \mathbf{X}(\Lambda_c^h(t))| \leq \epsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

y para c suficientemente pequeño rastrea los puntos finales \mathbf{X}_\pm de la curva de equilibrios estables.

Comentario 5.5.2. De forma análoga a como se probó en el Teorema 4.3.6, se puede comprobar que el atractor pullback local obtenido es también una solución hiperbólica siempre que haya rastreo de los puntos finales.

5.6. Rastreo de puntos finales para velocidades altas

Con la Proposición 5.4.2 como herramienta fundamental vamos a poder probar a continuación que si el atractor pullback local conecta \mathbf{X}_- y \mathbf{X}_+ para $c = \infty$, la conexión se va a mantener para un entorno del tipo $[c_0, \infty]$. Este resultado sería la otra cara de la moneda del Teorema 5.5.1, ya que así como este mostraría el comportamiento del sistema para velocidades de transición bajas, el teorema que se a presentar ahora muestra lo que ocurre para velocidades altas. A velocidades intermedias pueden ocurrir diversidad de circunstancias, en las que el numérico y otro tipo de resultados tienen mucho que decir.

Se van a tratar conjuntamente los casos $h = 0$ y $h > 0$, correspondiendo el primero al caso continuo y el segundo al discretizado con una transición constante a trozos. La siguiente proposición describe analíticamente las condiciones de rastreo de los puntos finales para $c = \infty$, que serán el punto de partida para el teorema de rastreo de los puntos finales para velocidades altas.

Proposición 5.6.1 (Rastreo de los puntos finales para $c = \infty$). Dados $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{2,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, un paso $h \in [0, \infty)$ fijo y dos puntos de equilibrio estables $(\mathbf{X}_-, \lambda_-)$ y $(\mathbf{X}_+, \lambda_+)$, se verifica que

- i) dado $h = 0$ fijo, entonces \mathbf{X}_- pertenece al dominio de atracción autónomo del equilibrio estable \mathbf{X}_+ si y sólo si el atractor pullback local $\mathbf{x}_{0,\infty}$ rastrea los puntos finales \mathbf{X}_\pm .
- ii) dado $h > 0$ fijo, entonces $\mathbf{x}(h, 0, \mathbf{X}_-, h, \infty)$ pertenece al dominio de atracción autónomo del equilibrio estable \mathbf{X}_+ si y sólo si el atractor pullback local \mathbf{x}_∞^h rastrea los puntos finales \mathbf{X}_\pm .

Demostración. Para $c = \infty$, como $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda_\infty^h(t)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda_-)$ para todo $t < 0$, es claro que el atractor pullback local va a tener que ser $\mathbf{x}(t, 0, \mathbf{X}_-, h, \infty)$, ya que $\mathbf{x}_\infty^h(0) = \mathbf{X}_-$. En el caso $h = 0$, a partir del instante $t = 0$, el atractor pullback evoluciona según $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda_+)$, por lo que el atractor pullback local tendrá límite \mathbf{X}_+ en ∞ si y sólo si \mathbf{X}_- está en el dominio de atracción autónomo de $(\mathbf{X}_+, \lambda_+)$. En el caso $h > 0$ el atractor pullback local pasa a evolucionar según la ley del sistema autónomo final a partir del instante $t = h$, por lo que se tendrá el rastreo de los puntos finales si y sólo si $\mathbf{x}(h, 0, \mathbf{X}_-, h, \infty)$ pertenece al dominio de atracción autónomo del equilibrio estable $(\mathbf{X}_+, \lambda_+)$. \square

Teorema 5.6.2 (Rastreo de los puntos finales para velocidades de transición altas). Sean $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{2,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, una función de transición $\mathcal{P}(\lambda_-, \lambda_+)$, un paso $h \in [0, \infty)$ fijo y dos puntos de equilibrio estables $(\mathbf{X}_-, \lambda_-)$ y $(\mathbf{X}_+, \lambda_+)$. Entonces se verifica que si el atractor pullback local \mathbf{x}_∞^h rastrea los puntos finales \mathbf{X}_\pm , entonces existe $c_0 > 0$ tal que para todo $c \in [c_0, \infty]$ el atractor pullback local \mathbf{x}_c^h también rastrea los puntos finales \mathbf{X}_\pm .

Demostración. El caso $c = \infty$ para $h = 0$ se corresponde con un sistema que tiene un salto en $t = 0$ en el que pasa de comportarse como el estado inicial a comportarse como el estado final (ver (5.12)). Por otro lado, el caso $c = \infty$ para $h > 0$ se corresponde con la transición $\Lambda_\infty^h(t)$, definida en la ecuación (5.11), que va a evolucionar en tres escalones: según $\lambda = \lambda_-$ para $t \in (-\infty, 0)$, según $\lambda = \Lambda(0)$ para $t \in [0, h)$ y según $\lambda = \lambda_+$ para $t \in [0, \infty)$. De esta forma, es claro que el atractor pullback local para este sistema en ambos casos no es otro que $\mathbf{x}(t, s, \mathbf{X}_-, h, \infty)$ para cualquier $s \leq 0$. La hipótesis de que haya conexión entre atractores para $c = \infty$ se traduce a unas condiciones analíticas concretas según la Proposición 5.6.1.

Para hacer la prueba que buscamos, en primer lugar, fijado $h \in [0, \infty)$ utilizamos el apartado IV) de la Proposición 5.4.2, que nos garantiza que si tomamos el punto $s_0 = 1 + h > h$, entonces existen un $c_1 > 0$ y $\delta_1 > 0$ tales que para cualquier $c \in [c_1, \infty)$ y $s \geq 1 + h$ existen soluciones hiperbólicas atractivas $\tilde{\mathbf{x}}_{c,s}^h$ de (5.33) que verifican $|\tilde{\mathbf{x}}_{c,s}^h - \mathbf{X}_+|_\infty \leq \delta_1/2$, donde δ_1 es también el dominio de atracción hiperbólica exponencial de estas soluciones. En consecuencia, para cualquier $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ que verifique que $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{X}_+| \leq \delta_1/2$ se tiene que, por la desigualdad triangular, $|\tilde{\mathbf{x}}_{c,1+h}^h(t) - \mathbf{x}_0| \leq \delta_1$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$, pero en particular nos interesa para $t \geq 1 + h$, ya que es entonces cuando $\tilde{\mathbf{x}}_{c,1+h}^h$ es solución de (5.16). Entonces, el dominio de convergencia exponencial δ_1 nos asegura que si $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{X}_+| \leq \delta_1/2$ entonces se verifica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t, s, \mathbf{x}_0, h, c) = \mathbf{X}_+ \quad (5.45)$$

para cualquier $c \in [c_1, \infty)$ y cualquier $s \geq 1 + h$. En definitiva, tenemos la bola $B(\mathbf{X}_+, \delta_1/2)$, la cual tiene la propiedad de que si una solución está dentro de ella en algún instante de tiempo $t \geq 1 + h$, necesariamente tiene límite \mathbf{X}_+ siempre que estemos utilizando velocidades de transición superiores a c_1 .

Ahora, consideramos el atractor pullback para $c = \infty$, que antes hemos dicho que era $\mathbf{x}(t, -1, \mathbf{X}_-, h, \infty)$. Como se ha supuesto que conecta \mathbf{X}_- con \mathbf{X}_+ , verificará que existe un instante de tiempo $t_1 \geq 1 + h$ en el que para todo $t \geq t_1$ se cumpla que

$$|\mathbf{x}(t, -1, \mathbf{X}_-, h, \infty) - \mathbf{X}_+| \leq \frac{\delta_1}{4}. \quad (5.46)$$

Ahora, por la continuidad de la función $\mathbf{x}(t, s, \mathbf{x}_0, h, c)$ que garantiza el Teorema 5.3.4 se tiene que existen $c_2 \geq c_1$ y $\delta_2 > 0$ tales que para cualquier $\mathbf{x}_0 \in B(\mathbf{X}_-, \delta_2)$ y cualquier $c \in [c_2, \infty)$ se tiene que para todo $t \in [-1, t_1]$,

$$|\mathbf{x}(t, -1, \mathbf{x}_0, h, c) - \mathbf{x}(t, -1, \mathbf{X}_-, h, \infty)| \leq \frac{\delta_1}{4}. \quad (5.47)$$

Evaluando (5.46) y (5.47) en $t = t_1$ y juntándolas por la desigualdad triangular se obtiene que si $\mathbf{x}_0 \in B(\mathbf{X}_-, \delta_2)$ y $c \in [c_2, \infty)$,

$$|\mathbf{x}(t_1, -1, \mathbf{x}_0, h, c) - \mathbf{X}_+| \leq \frac{\delta_1}{2},$$

lo cual, por (5.45) garantiza que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t, -1, \mathbf{x}_0, h, c) = \mathbf{X}_+.$$

Para acabar, basta ver que el atractor pullback local para un valor suficientemente alto de c verifica precisamente que $\mathbf{x}_c^h(-1) \in B(\mathbf{X}_-, \delta_2)$, ya que entonces estará garantizado que tiene límite \mathbf{X}_+ en $+\infty$ por lo anterior. Para conseguir esto, volvemos a la Proposición 5.4.2, esta vez al apartado II), que nos garantiza que existe un $c_3 \geq c_2$ tal que si $c \in [c_3, \infty)$ se cumple que $|\tilde{\mathbf{x}}_{c,t_2}^h - \mathbf{X}_-|_\infty \leq \delta_2$, dado $t_2 = -1$. Como el atractor pullback local \mathbf{x}_c^h se construye precisamente prolongando $\tilde{\mathbf{x}}_{c,t_2}^h$ como solución verdadera a partir de $t_2 = -1$, lo que tenemos es precisamente que $\mathbf{x}_c^h(-1) \in B(\mathbf{X}_-, \delta_2)$, luego hemos acabado gracias a que hemos ido tomando $c_3 \geq c_2 \geq c_1$. Para $c \in [c_3, \infty)$ se mantiene la conexión entre \mathbf{X}_- y \mathbf{X}_+ por medio del atractor pullback local. El valor $c_0 = c_3$ hace que se verifique el enunciado. \square

5.7. Persistencia en c del rastreo de puntos finales

A continuación, utilizando los mismos argumentos que se han utilizado en la sección anterior, se procede a probar la persistencia del rastreo de los puntos finales del atractor pullback local para variaciones en c , es decir, dado $c_0 \in (0, \infty]$, se quiere ver que existe un entorno de c 's para los cuales también hay rastreo de los puntos finales. En la sección anterior se ha probado el caso $c = \infty$, por lo que ahora nos centraremos únicamente en $c \in (0, \infty)$. Este resultado da consistencia a la Definición 4.4.1 de punto de no retorno por velocidad de transición, ya que justifica que el punto de no retorno sea el extremo de un intervalo abierto en el que hay rastreo de puntos finales. Para empezar, necesitamos un lema que asegure que la variación en c hace que los sistemas truncados en $-\infty$ permanezcan cercanos.

Lema 5.7.1. Dados $c_0 \in (0, \infty)$, un $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, un tiempo de truncamiento $t_1 < 0$ y un $\epsilon > 0$ fijos, existe un entorno de c_0 de la forma $(c_-, c_+) \subseteq (0, \infty)$ tal que para todo $c \in V$ se tiene que

$$|\hat{\mathbf{f}}_{c_0, t_1}^h - \hat{\mathbf{f}}_{c, t_1}^h|_{k, b, 1} < \epsilon. \quad (5.48)$$

Demostración. Basta ver que $|\mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda_{c_0}^h(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda_c^h(t))|$ se puede hacer uniformemente pequeño en $(t, \mathbf{x}) \in (-\infty, t_1] \times B_k$ al restringirnos a un entorno suficientemente pequeño de c_0 , ya que para la otra parte de la seminorma, la correspondiente a las derivadas, se razona análogamente. Gracias a que $t_1 < 0$, a (5.34) y a (5.37) se tiene que, dado $c_m \in (0, c_0)$, se verifica que $A_{h, c}(t_1) \subseteq A_{0, c}(t_1) \subseteq A_{0, c_m}(t_1)$ para todo $c \in (c_m, \infty)$. De esta forma, como $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)$ es uniformemente continua en el compacto $B_k \times A_{0, c_m}(t_1)$, se sigue que existe $\delta > 0$ tal que

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda_{c_0}^h(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda_c^h(t))| < \epsilon/2$$

si se cumple que $|\Lambda_{c_0}^h(t) - \Lambda_c^h(t)| < \delta$, sujeto a que $t \in (-\infty, t_1]$ y $c \in (c_m, \infty)$, que garantizan que no nos salimos del compacto donde tenemos la continuidad uniforme. En el caso en que $h \neq 0$, se tiene que

$$|\Lambda_{c_0}^h(t) - \Lambda_c^h(t)| = \left| \Lambda \left(hc_0 \left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor \right) - \Lambda \left(hc \left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor \right) \right|. \quad (5.49)$$

Ahora bien, como $\lim_{s \rightarrow -\infty} \Lambda(s) = \lambda_-$, existe $s_1 < 0$ tal que para todo $s \leq s_1$ se verifica que $|\Lambda(s) - \lambda_-| < \delta/2$. Entonces, para $t \in (-\infty, s_1/c_m]$ se tiene que

$$|\Lambda_{c_0}^h(t) - \Lambda_c^h(t)| \leq \left| \Lambda \left(hc_0 \left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor \right) - \lambda_- \right| + \left| \Lambda \left(hc \left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor \right) - \lambda_- \right| < \delta, \quad (5.50)$$

ya que $hc \lfloor t/h \rfloor \leq tc < tc_m \leq s_1$ para cualquier $c \in (c_m, \infty)$. De esta forma, si $s_1/c_m \geq t_1$ hemos acabado y tendríamos $(c_-, c_+) = (c_m, \infty)$. De lo contrario, si $s_1/c_m < t_1$ hay que comprobar también que $|\Lambda_{c_0}^h(t) - \Lambda_c^h(t)| < \delta$ para $t \in [s_1/c_m, t_1]$ para c 's en un entorno de c_0 . Utilizando que para $t < 0$ se verifica que $|\lfloor t/h \rfloor| < |t/h - 1|$, por el teorema del valor medio aplicado en (5.49) se tiene que para $t \in [s_1/c_m, t_1]$

$$|\Lambda_{c_0}^h(t) - \Lambda_c^h(t)| < |\Lambda'|_\infty h \left| \frac{t}{h} - 1 \right| |c - c_0| \leq |\Lambda'|_\infty \left(\frac{|s_1|}{c_m} + h \right) |c - c_0|, \quad (5.51)$$

luego tomando $c_- = \max\{c_m, c_0 - \delta/(|\Lambda'|_\infty(|s_1|/c_m + h))\}$ y $c_+ = c_0 + \delta/(|\Lambda'|_\infty(|s_1|/c_m + h))$ habríamos terminado. En el caso $h = 0$ se procede de forma análoga, pero sin necesidad de introducir las funciones de parte entera y acotarlas. \square

A continuación, procedemos a demostrar el resultado que buscábamos.

Teorema 5.7.2 (Persistencia en c del rastreo de puntos finales). Sean $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{2,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, una función de transición $\mathcal{P}(\lambda_-, \lambda_+)$, un paso $h \in [0, \infty)$ fijo y dos puntos de equilibrio estables $(\mathbf{X}_-, \lambda_-)$ y $(\mathbf{X}_+, \lambda_+)$. Entonces se verifica que si para un cierto $c_0 \in (0, \infty)$ el atractor pullback local $\mathbf{x}_{c_0}^h$ rastrea los puntos finales \mathbf{X}_\pm , entonces existe un entorno $(c_-, c_+) \subseteq (0, \infty)$ de c_0 tal que para todo $c \in (c_-, c_+)$ el atractor pullback local \mathbf{x}_c^h también rastrea los puntos finales \mathbf{X}_\pm .

Demostración. En primer lugar, fijando un $c_m \in (0, c_0)$ cualquiera, se aplica el apartado (III) de la Proposición 5.4.2, obteniendo la existencia de un $s_0 > 0$ tal que para todo $s \geq s_0$ se tiene que $\tilde{\mathbf{x}}_{c,s}^h$ es una solución hiperbólica del sistema truncado en $+\infty$, existe un dominio de atracción común $\delta > 0$ y se verifica que $|\tilde{\mathbf{x}}_{c,s}^h - \mathbf{X}_+|_\infty \leq \delta/2$ para todo $c \in [c_m, \infty)$ y todo $s \geq s_0$. De esta forma, para cualquier $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ que verifique que $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{X}_+| \leq \delta/2$ se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t, s, \mathbf{x}_0, h, c) = \mathbf{X}_+ \quad (5.52)$$

para cualesquiera $s \geq s_0$ y $c \in [c_m, \infty)$, ya que por la desigualdad triangular entran en el dominio de atracción de radio $\delta > 0$ de la correspondiente solución hiperbólica $\tilde{\mathbf{x}}_{c,s}^h$ a velocidad de transición c que tiene límite \mathbf{X}_+ . Ahora, aprovechando que es conocido que para c_0 el atractor pullback rastrea los puntos finales \mathbf{X}_\pm , tomamos $s_1 \geq s_0$ de forma que para todo $s \geq s_1$ se tenga que $|\mathbf{x}_{c_0}^h(s) - \mathbf{X}_+| \leq \delta/4$, de forma que si para algún $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $|\mathbf{x}_{c_0}^h(s) - \mathbf{x}_0| \leq \delta/4$ para algún $s \geq s_1$, entonces la desigualdad triangular garantice $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{X}_+| \leq \delta/2$ y, por tanto, que también se tiene (5.52).

Ahora, se aplica el apartado (I) de la Proposición 5.4.2, obteniendo la existencia de un $s_2 < 0$ tal que para todo $s \leq s_2$ y todo $c \in [c_m, \infty)$ el sistema truncado admite la solución hiperbólica atractiva $\hat{\mathbf{x}}_{c,s}^h$ con un dominio de atracción $\delta' > 0$ (las cuales son extensiones unas de otras hasta el punto de sus respectivos truncamientos) y además verifican que $|\hat{\mathbf{x}}_{c,s}^h - \mathbf{X}_-|_\infty \leq \delta'/4$ (este no es directamente el s_0 que aporta la proposición es posiblemente uno más restrictivo con la separación de \mathbf{X}_- de las soluciones hiperbólicas). Con esta elección que se ha hecho de s_2 se tiene garantizado, además, que por la desigualdad triangular $|\hat{\mathbf{x}}_{c,s}^h - \hat{\mathbf{x}}_{c_0,s}^h|_\infty \leq \delta'/2$ para cualquier $s \leq s_2$ y $c \in [c_m, \infty)$. Ahora, la dependencia continua de las soluciones a tiempo finito con el valor inicial y los parámetros nos garantiza que existe un entorno (c_-^1, c_+^1) de c_0 y un $\epsilon > 0$ tales que para cualesquiera velocidad de transición $c \in (c_-^1, c_+^1)$ y valor inicial $\mathbf{x}_0 \in B(\mathbf{x}_{c_0}^h(s_2), \epsilon)$ se tenga que

$$|\mathbf{x}(t, s_2, \mathbf{x}_0, h, c) - \mathbf{x}(t, s_2, \mathbf{x}_{c_0}^h(s_2), h, c_0)| = |\mathbf{x}(t, s_2, \mathbf{x}_0, h, c) - \mathbf{x}_{c_0}^h(t)| \leq \frac{\delta}{4} \quad (5.53)$$

para todo $t \in [s_2, s_1]$. Concatenando esta desigualdad evaluada en $t = s_1$ con lo obtenido en el párrafo anterior se tiene que si $c \in (c_-^1, c_+^1)$ y $\mathbf{x}_0 \in B(\mathbf{x}_{c_0}^h(s_2), \epsilon)$ entonces se tiene que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t, s_2, \mathbf{x}_0, h, c) = \mathbf{X}_+$.

Utilizando la persistencia de las soluciones hiperbólicas para ecuaciones de Carathéodory que se ha comentado en partes anteriores del capítulo (análogo al Teorema 3.2.4 y al Corolario 3.2.5), se obtiene, en virtud del Lema 5.7.1 (eligiendo un k suficientemente grande como para que la solución acotada $\hat{\mathbf{x}}_{c_0, s_2}^h$ esté contenida en B_k), que $\hat{\mathbf{f}}_{c, s_2}^h$ puede ser tratado como una perturbación de $\hat{\mathbf{f}}_{c_0, s_2}^h$ para c 's en un entorno de c_0 , llevando a que existe un entorno

$(c_-, c_+) \subseteq (c_-^1, c_+^1)$ de c_0 tal que para todo $c \in (c_-, c_+)$ se tenga que el sistema $\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{f}}_{c,s_2}^h(t, \mathbf{x})$ tenga una solución hiperbólica atractiva $\tilde{\mathbf{x}}_{c,s_2}^h$ que verifica que $|\hat{\mathbf{x}}_{c_0,s_2}^h - \tilde{\mathbf{x}}_{c,s_2}^h|_\infty < \min\{\delta'/2, \epsilon\}$.

Sin embargo, aún no tenemos garantizado que la solución $\tilde{\mathbf{x}}_{c,s_2}^h$ obtenida por medio de la perturbación coincida en $(-\infty, s_2]$ con el atractor pullback local \mathbf{x}_c^h del que queremos obtener información. Para verlo tenemos en cuenta que ya teníamos que $|\hat{\mathbf{x}}_{c,s}^h - \hat{\mathbf{x}}_{c_0,s}^h|_\infty \leq \delta'/2$ para cualquier $s \leq s_2$ y $c \in [c_m, \infty)$, luego por la desigualdad triangular, uniéndolo a la conclusión del párrafo anterior:

$$|\hat{\mathbf{x}}_{c,s_2}^h - \tilde{\mathbf{x}}_{c,s_2}^h|_\infty \leq |\hat{\mathbf{x}}_{c,s_2}^h - \hat{\mathbf{x}}_{c_0,s_2}^h|_\infty + |\hat{\mathbf{x}}_{c_0,s_2}^h - \tilde{\mathbf{x}}_{c,s_2}^h|_\infty < \delta', \quad (5.54)$$

donde δ' era el dominio de atracción de $\hat{\mathbf{x}}_{c,s_2}^h$, obteniéndose entonces que para $s \leq t \leq s_2$

$$|\hat{\mathbf{x}}_{c,s_2}^h(t) - \tilde{\mathbf{x}}_{c,s_2}^h(t)| \leq K e^{-\alpha(t-s)} |\hat{\mathbf{x}}_{c,s_2}^h(s) - \tilde{\mathbf{x}}_{c,s_2}^h(s)|, \quad (5.55)$$

luego haciendo $s \rightarrow -\infty$ se obtiene que coinciden en $(-\infty, s_2]$ y, por tanto, también con el atractor pullback local \mathbf{x}_c^h en ese mismo intervalo. De esta forma, se deduce que

$$|\mathbf{x}_{c_0}^h(s_2) - \mathbf{x}_c^h(s_2)| < \epsilon \quad (5.56)$$

y, por tanto, del razonamiento que sigue a (5.53) se concluye que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}_c^h(t) = \mathbf{X}_+$, que es lo que necesitábamos ver para garantizar que hay rastreo de los puntos finales, ya que el atractor pullback local por definición parte de \mathbf{X}_- . El intervalo de c 's en los que es válido este razonamiento es el más restrictivo que hemos llegado a usar, es decir, (c_-, c_+) . Queda completado lo que queríamos ver. \square

Capítulo 6

Experimentos numéricos

Este capítulo está dedicado a la realización de experimentos numéricos que, por un lado, ilustren los resultados que se han probado en los capítulos anteriores y que, por otro lado, exploren las regiones paramétricas intermedias para los que los teoremas encontrados no dan información. Antes de empezar hay que justificar el modo en el que se ha realizado la integración numérica de estos problemas, ya que el atractor pullback es, en definitiva, una solución global definida a partir de su valor asintótico en $-\infty$.

Por un lado, como $\lim_{t \rightarrow -\infty} \Lambda_c^h(t) = \lambda_-$, existirá un valor $t_- \in \mathbb{R}$ tal que para todo $t \leq t_-$ se tenga que $|\lambda_- - \Lambda_c^h(t)|$ sea más pequeño que una tolerancia fijada, a partir de la cual consideramos que ambos números resultan indistinguibles para nuestra computadora. En nuestro caso lo hemos fijado como $1\text{e-}15$. De esta forma, se puede calcular numéricamente el valor t_- a partir del cual se va a comenzar a integrar, pudiéndose considerar que la solución es, a efectos numéricos, constante hasta ese punto y de valor \mathbf{X}_- .

Por otro lado, para justificar la atracción de \mathbf{X}_+ en $t \rightarrow \infty$ basta recordar que en las secciones anteriores se ha probado que existe un entorno de \mathbf{X}_+ y un tiempo $t_+ > 0$ tal que cualquier solución que esté en dicho entorno para cualquier $t \geq t_+$ tiene límite \mathbf{X}_+ en $+\infty$. De esta forma, queda justificado que la información que nos aporta la integración numérica en una ventana de tiempo finita sea representativa del comportamiento global, ya que se puede entender que es una aproximación precisa al atractor pullback local y que su límite en $+\infty$ es \mathbf{X}_+ si al final de la ventana está suficientemente cerca.

Para llevar a cabo la integración numérica se ha utilizado la función MATLAB 2020b, `ode45`, con las opciones de integración `RelTol=1e-9` y `AbsTol=1e-9`.

6.1. Un primer ejemplo

En primer lugar, repetimos la simulación numérica de [2] para el sistema escalar

$$\frac{dx}{dt} = g(x, \Lambda(ct)), \quad (6.1)$$

con $\Lambda \in \mathcal{P}(\lambda_-, \lambda_+)$ y

$$g(x, \lambda) = -\left((x + a + b\lambda)^2 + M \tanh(\lambda - d)\right) \left(x - \frac{K}{\cosh(e\lambda)}\right), \quad (6.2)$$

donde a, b, d, e, K, M son constantes. Para comenzar, se estudian los puntos críticos del sistema tomando ya unos valores de las constantes de aquí en adelante:

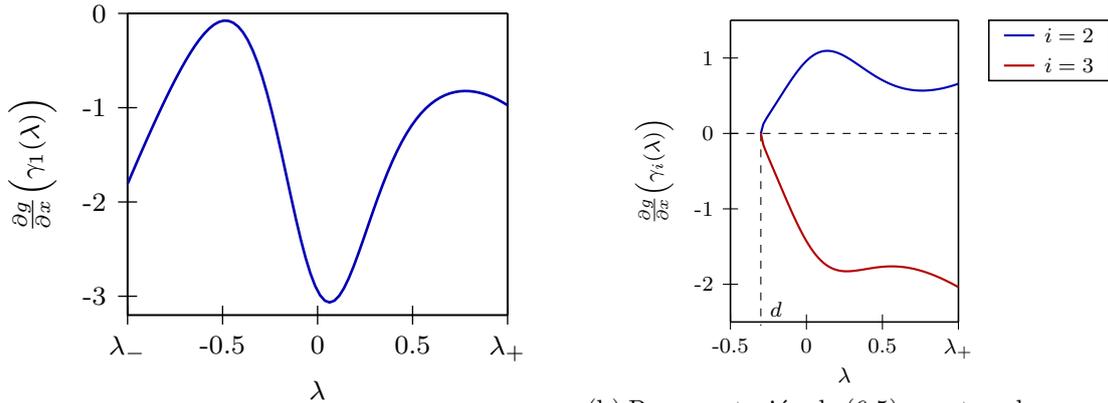
$$a = -0.25, \quad b = 1.2, \quad d = -0.3, \quad e = 3, \quad K = 2, \quad M = -0.4. \quad (6.3)$$

Derivando (6.2) se obtiene

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, \lambda) = -2(x + a + b\lambda) \left(x - \frac{K}{\cosh(e\lambda)} \right) - \left((x + a + b\lambda)^2 + M \tanh(\lambda - d) \right).$$

Los valores del parámetro entre los que se va a realizar la transición son $\lambda_- = -1$ y $\lambda_+ = 1$. Una primera familia de puntos críticos del sistema autónomo asociado a (6.2) serán los que anulen el segundo factor de (6.2), que se parametrizarán según $\gamma_1(\lambda) = (x_1(\lambda), \lambda) = (K/\cosh(e\lambda), \lambda)$, con $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$. Para ellos,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(\gamma_1(\lambda)) = - \left(\left(\frac{K}{\cosh(e\lambda)} + a + b\lambda \right)^2 + M \tanh(\lambda - d) \right). \quad (6.4)$$



(a) Representación de (6.4), mostrando que $\gamma_1(\lambda)$, con $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$ se corresponde con una curva de puntos críticos exponencialmente estables al tomar valores estrictamente negativos.

(b) Representación de (6.5), mostrando que $\gamma_2(\lambda)$, $\lambda \in (d, \lambda_+]$, es una curva de puntos críticos exponencialmente inestables, que $\gamma_3(\lambda)$, $\lambda \in (d, \lambda_+]$, lo es de exponencialmente estables y que $\gamma_2(d) = \gamma_3(d)$ es un punto de bifurcación.

Figura 6.1: Representación de la derivada espacial de (6.2) para los valores de las constantes escogidos en (6.3) a lo largo de las curvas de puntos críticos de (6.1) para evaluar la estabilidad o inestabilidad de los mismos.

En la Figura 6.1a se encuentra representado (6.4) para los valores de las constantes que se han tomado, y se comprueba que sólo toma valores estrictamente negativos, es decir, que γ_1 corresponde a una curva de equilibrios exponencialmente estables para el sistema autónomo. Por otro lado, si se anula el segundo factor de (6.2), entonces, teniendo en cuenta que en (6.3) se ha tomado $M \leq 0$, se encuentran dos ramas de puntos críticos parametrizadas por:

$$\begin{aligned} \gamma_2(\lambda) &= (x_2(\lambda), \lambda) = \left(\sqrt{-M \tanh(\lambda - d)} - a - b\lambda, \lambda \right), \\ \gamma_3(\lambda) &= (x_3(\lambda), \lambda) = \left(-\sqrt{-M \tanh(\lambda - d)} - a - b\lambda, \lambda \right), \end{aligned}$$

ambas dos definidas para $\lambda \in [d, \lambda_2]$. Para ellas, se tiene que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(\gamma_i(\lambda)) = \mp 2\sqrt{-c \tanh(\lambda - d)} \left(\pm \sqrt{-M \tanh(\lambda - d)} - a - b\lambda - \frac{K}{\cosh(e\lambda)} \right), \quad i = 2, 3. \quad (6.5)$$

Esta expresión está representada en la Figura 6.1b para las elecciones de parámetros que se han hecho. A través de la Figura 6.1 se concluye fácilmente que

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{\text{stab}} &= \{\gamma_1(\lambda) : \lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]\} \cup \{\gamma_3(\lambda) : \lambda \in (d, \lambda_+]\}, \\ \mathcal{X}_{\text{unst}} &= \{\gamma_2(\lambda) : \lambda \in (d, \lambda_+]\}, \\ \mathcal{X}_{\text{bif}} &= \gamma_2(d) = \gamma_3(d). \end{aligned}$$

Se verifican entonces las hipótesis del Teorema 4.3.5 de ϵ -rastreo (*tracking*) de un camino estable γ_1 que atraviesa una única rama estable. El teorema nos garantiza que existirá una velocidad de transición $c_\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeña como para que el atractor pullback (cuya existencia y unicidad viene garantizada por el Teorema 4.2.5) la ϵ -rastree a cualquier velocidad de transición más pequeña $c \leq c_\epsilon$. Para ilustrar este resultado, en primer lugar elegimos una función de transición, Λ , que venga definida por

$$\Lambda(t) = (\lambda_+ - \lambda_-) \frac{\tanh(t) + 1}{2} + \lambda_-. \quad (6.6)$$

Es claro que esta función verifica $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Lambda(t) = \lambda_\pm$, también que $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{d\Lambda(t)}{dt} = 0$ y es monótona, luego toma siempre valores en $[\lambda_-, \lambda_+]$. Es una función de transición adecuada.

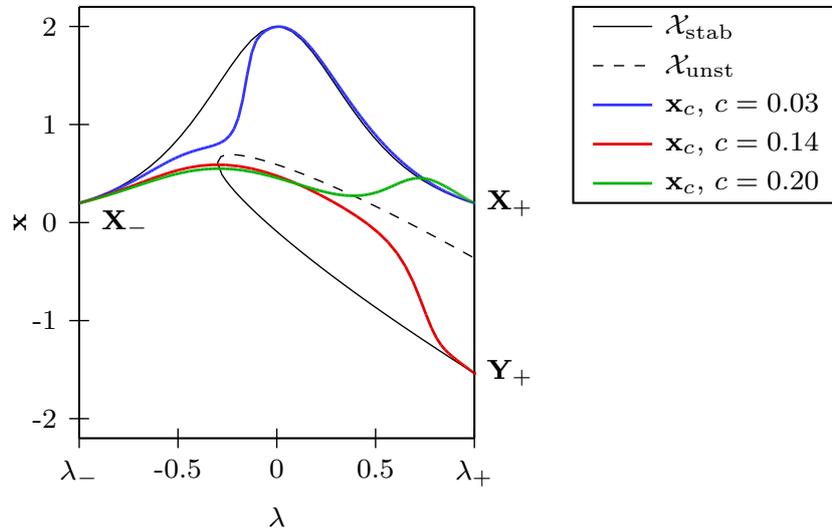


Figura 6.2: Diagrama de bifurcación del sistema (6.1) con atractores pullback para diversos valores del parámetro c , para los cuales se observa distintos fenómenos de puntos de no retorno (hacia \mathbf{Y}_+ para $c = 0.14$) o de rastreo (para $c = 0.03, 0.20$). La curva de equilibrios estables que se pretende rastrear es γ_1 . Se ha denotado $(\mathbf{X}_-, \lambda_-) = \gamma_1(\lambda_-)$, $(\mathbf{X}_+, \lambda_+) = \gamma_1(\lambda_+)$, $(\mathbf{Y}_+, \lambda_+) = \gamma_3(\lambda_+)$. La paridad de la primera componente de γ_1 garantiza que, además, $\mathbf{X}_- = \mathbf{X}_+$.

En estas condiciones se pueden efectuar simulaciones numéricas para comprobar que, efectivamente, para velocidades suficientemente bajas el atractor pullback local de \mathbf{X}_- sigue

de forma efectiva la curva de equilibrios estables. Los resultados se encuentran en la Figura 6.2. Además, como $\mathbf{X}_- = \mathbf{X}_+$ se tiene que \mathbf{X}_- está en el dominio de atracción de $(\mathbf{X}_+, \lambda_+)$, luego el Teorema 5.6.2 garantiza que habrá rastreo de los puntos finales para velocidades suficientemente altas. La simulación numérica sugiere que el valor $c = 0.20$ es suficientemente alto como para que la conexión que se consigue entre el estado final e inicial no se vuelva a romper. En esta conexión, como era de esperar, el atractor pullback local sigue un camino muy diferente de la curva de equilibrios estables. A ciertos valores de las velocidades intermedias se produce un punto de no retorno inducido por la velocidad de transición, es decir, que el atractor pullback local acaba desviándose hacia el equilibrio estable \mathbf{Y}_+ . Finalmente, para velocidades de transición c lo suficientemente bajas se consigue que el atractor pullback comience y acabe en los equilibrios estables que se pretendía y, además, se consigue que siga de cerca la curva de equilibrios estables que los une.

6.2. Par atractor-repulsor cuadrático

A continuación, presentamos otro ejemplo sencillo en el que estudiamos puntos de no retorno. Trataremos una ecuación diferencial cuadrática autónoma del tipo:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \lambda) = -(x - \lambda)^2 + k, \quad (6.7)$$

donde $k > 0$ en todo caso. En un primer lugar, usaremos la misma función de transición $\Lambda(t)$ que en el caso anterior, (6.6), para después pasar a considerar las correspondientes transiciones discretizadas $\Lambda_c^h(t)$ que se han considerado en la Sección 5.2. La ecuación diferencial escalar no autónoma que gobernará transición continua que se estudia en primer lugar será, por tanto,

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \Lambda(ct)) = -(x - \Lambda(ct))^2 + k. \quad (6.8)$$

Se comprueba inmediatamente que los dos únicos puntos críticos de $f(x, \lambda)$ son $x = \lambda \pm \sqrt{k}$. Además, como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \lambda) = -2(x - \lambda),$$

se deduce inmediatamente que $x = \lambda + \sqrt{k}$ es un punto de equilibrio exponencialmente estable mientras que $x = \lambda - \sqrt{k}$ es exponencialmente inestable. La recta de fases del sistema autónomo (6.7) nos proporciona la información que requerimos para entender la transición:



En vista de la representación anterior, en cualquier instante de tiempo en el que el atractor pullback permanezca en la región que hay entre ambos puntos críticos se desplazará hacia el atractor, $\lambda + \sqrt{k}$. En consecuencia, si el repulsor $\lambda - \sqrt{k}$ permanece en todo momento por debajo del extremo inferior de las posiciones que alcanza el atractor (y que en la transición que hemos considerado es la inicial), es decir, si

$$\lambda_+ - \sqrt{k} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \{ \Lambda(ct) - \sqrt{k} \} < \inf_{t \in \mathbb{R}} \{ \Lambda(ct) + \sqrt{k} \} = \lambda_- + \sqrt{k},$$

no habrá posibilidad de punto de no retorno. Para los valores $\lambda_- = -1$ y $\lambda_+ = 1$ que estamos tomando la condición anterior se traduce en que $k > 1$. Para el caso $k = 1$, al tratarse de una

transición continua y darse la igualdad únicamente en el límite $t \rightarrow \infty$, el atractor pullback local para cualquier instante de tiempo $t \in \mathbb{R}$ va estar por encima de $0 = \lambda_+ - \sqrt{1}$, llevando a que tampoco hay punto de no retorno, razonando análogamente con los dominios de atracción.

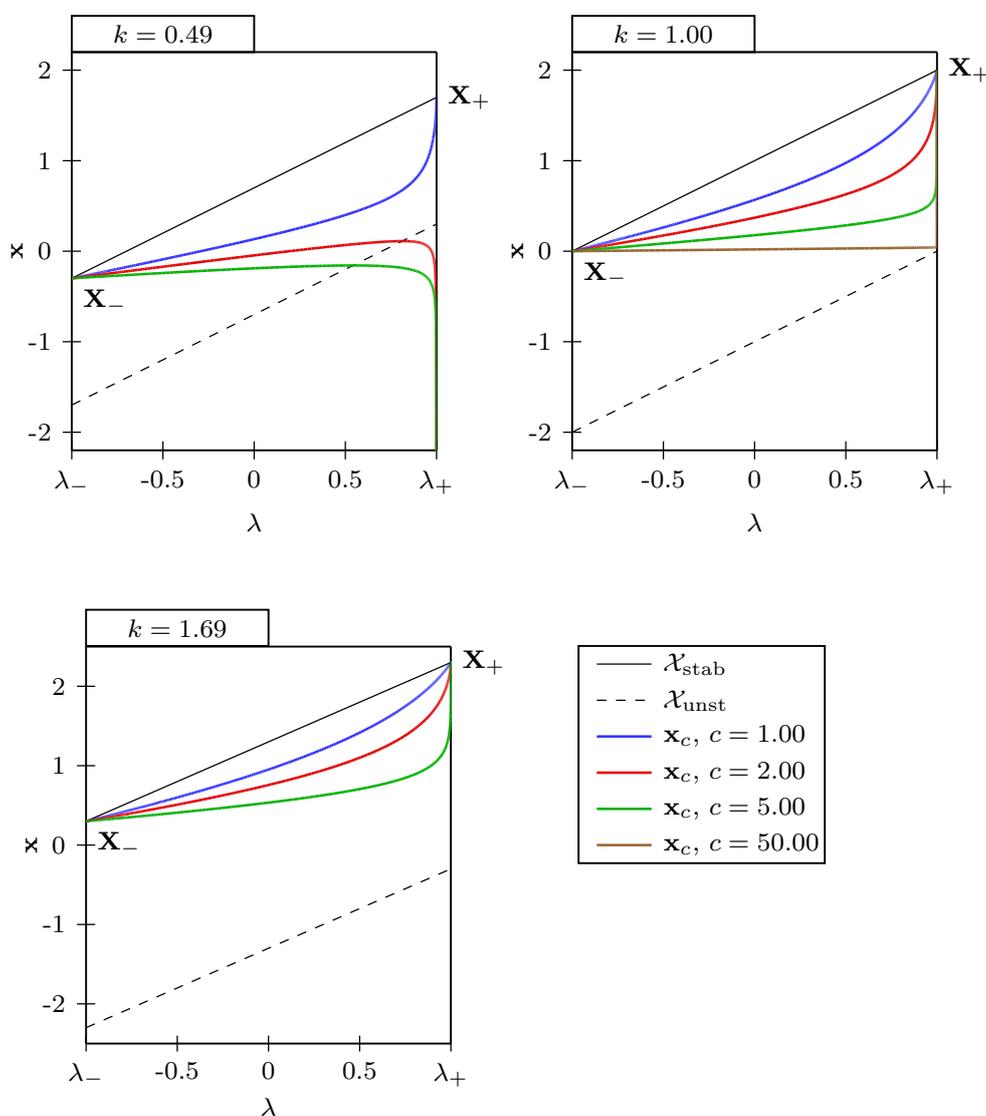


Figura 6.3: Diagramas de bifurcación para distintos valores de $k > 0$ del sistema dado por (6.7) con función de transición continua $\Lambda(ct)$, presentando atractores pullback para diversos valores del parámetro c . Se observan diversos fenómenos: para $k > 1$ hay no retorno para valores grandes de c mientras que para $k \leq 1$ hay rastreo de los puntos finales para cualquier velocidad de transición.

Por el contrario, si no se cumple esta condición existirá una velocidad de transición c suficientemente alta como para que el atractor pullback local se llegue a situar por debajo del repulsor y, por tanto, se dé un punto de no retorno. Esta condición se da cuando $k < 1$. La Figura 6.3 recoge todas las situaciones descritas.

El segundo ámbito tratado en este trabajo y bajo el cual debemos analizar numéricamente este modelo es el de las funciones de transición constantes a trozos, tal y como se han estudiado en el Capítulo 5. Bajo este enfoque el sistema saltará en determinados instantes de tiempo de evolucionar según un sistema autónomo a evolucionar según otro. Esta aproximación resulta ventajosa en la medida en la que se pueden entender todos los estados intermedios como autónomos, es decir, cualitativamente análogos a los estados inicial y final asintóticos. En primer lugar, veamos qué ocurre con la transición discontinua con $c = \infty$:

$$\Lambda_{\infty}^0(t) = \begin{cases} \lambda_-, & \text{si } t < 0, \\ \lambda_+, & \text{si } t \geq 0, \end{cases} \quad (6.9)$$

que ya se introdujo en el Capítulo 5, cuyos resultados aplicaremos. Siguiendo el mismo análisis que se hizo de los puntos críticos del sistema autónomo (6.7) es claro que en este caso habrá tres situaciones distintas:

- $\lambda_- + \sqrt{k} > \lambda_+ - \sqrt{k}$, o equivalentemente $k > 1$. En este caso el atractor pullback local rastrea los puntos finales de la curva de equilibrios estables, ya que para $t > 0$ el atractor pullback está posicionado por encima del repulsor.
- $\lambda_- + \sqrt{k} = \lambda_+ - \sqrt{k}$, o equivalentemente $k = 1$. En este caso el atractor pullback es una solución constante y acaba en el repulsor del estado final, es decir, que se produce un punto de no retorno.
- $\lambda_- + \sqrt{k} < \lambda_+ - \sqrt{k}$, o equivalentemente $k < 1$. El atractor pullback a partir de tiempo $t > 0$ está en una posición estrictamente por debajo del repulsor, lo que produce que tenga límite $-\infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. Se produce un punto de no retorno de distinto tipo que en el caso anterior.

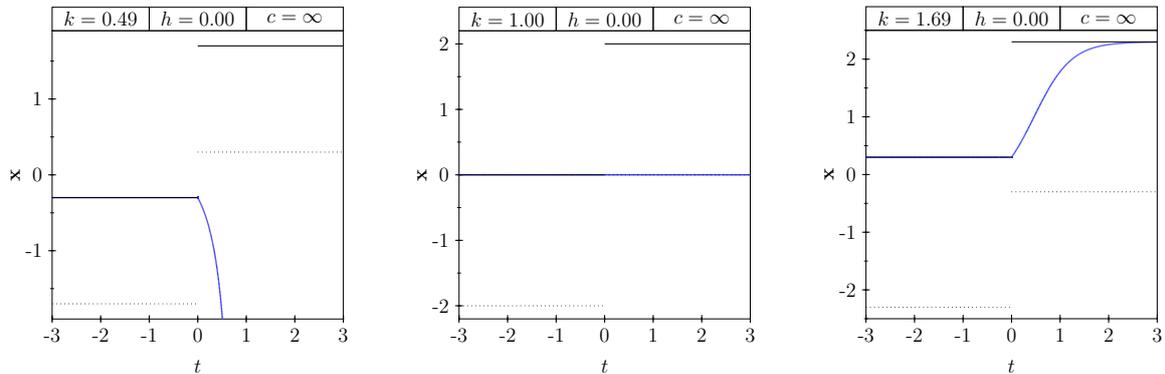


Figura 6.4: Atractores pullback (azul) del sistema (6.8) con transición discreta $\Lambda_{\infty}^0(t)$ para distintos valores de $k > 0$ tomando la función de transición (6.9). Se observan diversos fenómenos: para $k > 1$ hay un punto de no retorno con explosión de la solución, para $k = 1$ hay un punto de no retorno hacia el equilibrio inestable del sistema futuro y para $k < 1$ hay rastreo de los puntos finales de equilibrio estable. En línea continua negra se presentan los equilibrios estables del sistema autónomo para cada instante de tiempo, en punteada los inestables.

La Figura 6.4 recoge el comportamiento de las soluciones para distintos valores de k que ilustran las tres situaciones descritas. El único caso en el que hay rastreo de los puntos finales

para $c = \infty$ es cuando $k > 1$, que es la hipótesis bajo la cual hemos probado el Teorema 5.6.2.

A continuación, se procede a hacer algunos experimentos numéricos con la misma ecuación cuadrática autónoma (6.7) para distintas funciones $\Lambda_c^h(t)$ definidas en la Sección 5.2, observando diversos fenómenos que están en relación con los Teoremas 5.5.1 y 5.6.2. En la Figura 6.5 se ilustra con un caso particular un comportamiento que no es exactamente el descrito por el Teorema 5.6.2, sino un posible recíproco, el cual no ha sido probado en el presente trabajo. El motivo que hace interesante ilustrar esta situación en lugar de la del Teorema 5.6.2 es que, en este modelo sencillo que estamos utilizando, hay rastreo de puntos finales para $c = \infty$ si y sólo si $k > 1$, y eso acaba por garantizar que también hay rastreo para cualquier valor de $c > 0$, no apreciándose un punto a partir del cual el sistema sigue el comportamiento cualitativo de $c = \infty$.

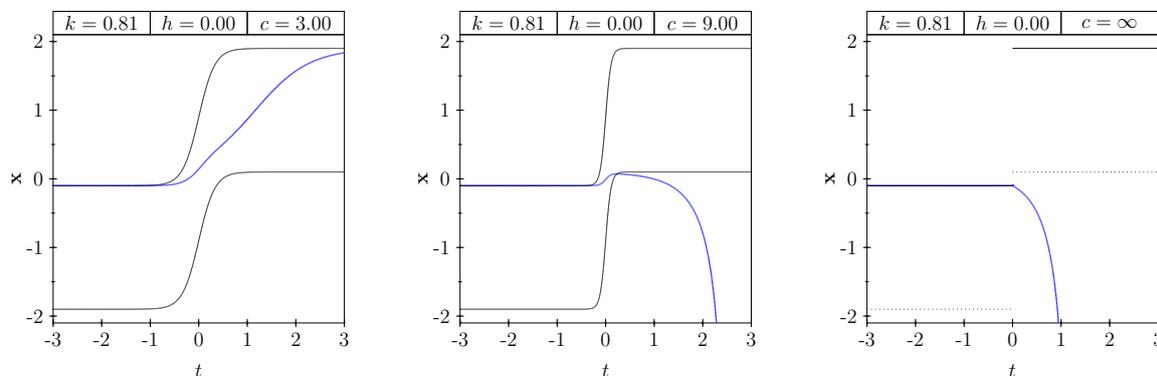


Figura 6.5: Atractores pullback (azul) del sistema (6.8) para $k = 0.49$, $h = 0$, tomando funciones de transición constantes a trozos $\Lambda_c^h(t)$ para distintos valores de c indicados sobre cada representación; a modo de ilustración de un posible recíproco del Teorema 5.6.2. En línea continua negra se representan los equilibrios estables del sistema autónomo para cada $t \in \mathbb{R}$, en línea punteada los inestables.

Tomando los valores $k = 0.81$ y $h = 0$, se observa que el comportamiento de no retorno para $c = \infty$ se mantiene para velocidades de transición suficientemente altas. En el caso $c = \infty$ (derecha) hay no retorno, como ya se había indicado antes, debido a que $k < 1$. Se observa también cómo aunque para velocidades de transición bajas (por ejemplo, $c = 3$, izquierda) sí que hay rastreo de los puntos finales; para velocidades suficientemente altas (por ejemplo, $c = 9$, centro) se retoma el comportamiento cualitativo de no retorno.

Por otro lado, presentamos en la Figura 6.6 una ilustración del Teorema 5.5.1. Para ello se ha tomado una ventana de representación temporal fija en $[-3, 3]$, los valores $k = 1.69$, $h = 0.5$ y se ha ido tomando valores cada vez más pequeños de $c > 0$ para observar cómo el atractor pullback local se va acercando a la curva de equilibrios estables discreta. La figura permite darse cuenta de cómo la clave del rastreo de la curva es que la variación de la curva de equilibrios en un intervalo de tiempo finito disminuye al hacer $c \rightarrow 0$.

Para acabar, la Figura 6.7 ilustra la complejidad que puede presentar el comportamiento cualitativo del sistema en relación a la variación de $h \in [0, \infty)$. Fijados los valores de $k = 0.49$

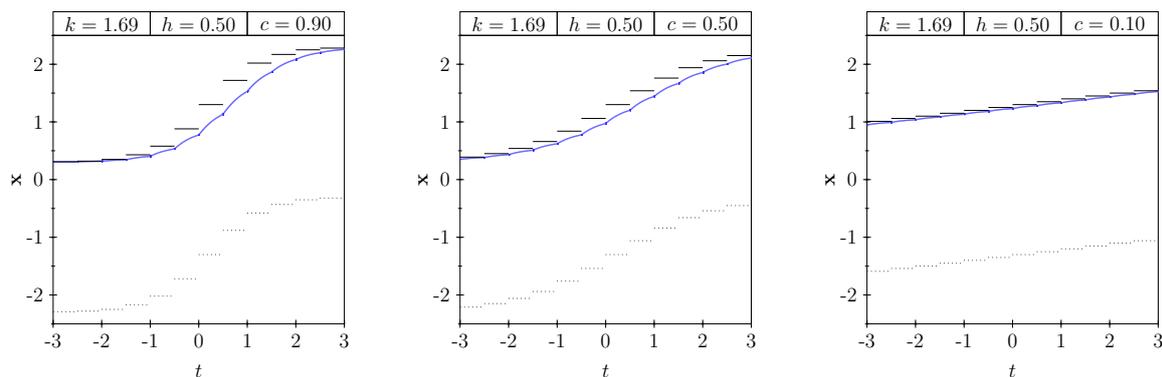


Figura 6.6: Atractores pullback (azul) del sistema (6.8) para $k = 0.81$, $h = 0.5$, tomando funciones de transición constantes a trozos $\Lambda_c^h(t)$ para distintos valores de c indicados sobre cada representación; a modo de ilustración del Teorema 5.5.1. En línea continua negra se representan los equilibrios estables del sistema autónomo para cada $t \in \mathbb{R}$, en línea punteada los inestables.

y $c = 1.54$ se observa cómo para $h = 0$ y $h = 1.6$ el atractor pullback local rastrea los puntos finales de la curva de equilibrios estables, mientras que para un valor intermedio entre estos dos, $h = 0.8$, no lo hace, hay un punto de no retorno. Este ejemplo muestra un comportamiento muy interesante, para c fijo encontramos puntos de no retorno tanto para h creciente como para h decreciente. Esta idea, que ya había aparecido en el ejemplo de la Sección 6.1 pero para el caso de c creciente y decreciente, nos hace descartar la idea de que exista alguna propiedad general de unicidad de puntos de no retorno.

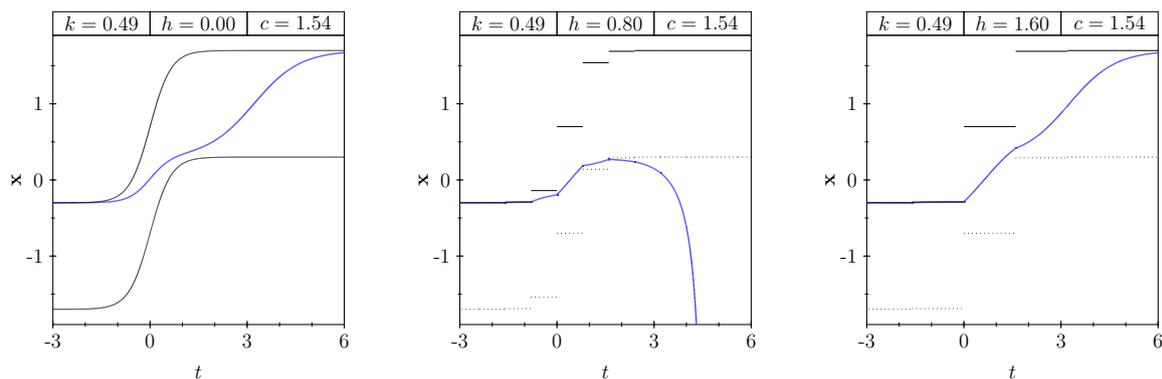


Figura 6.7: Atractores pullback (azul) del sistema (6.8) para $k = 0.49$ y $c = 1.54$, tomando funciones de transición constantes a trozos $\Lambda_c^h(t)$. Se observa que para $h = 0$ y $h = 1.6$ hay rastreo de los puntos finales mientras que para el valor intermedio $h = 0.8$ se da una situación de no retorno, indicando que no hay propiedad de monotonía en h para el no retorno. En línea negra continua se presentan los equilibrios autónomos estables y en punteada los inestables.

6.3. Otros tipos de puntos de no retorno

A continuación, presentamos una serie de situaciones sencillas, acompañadas de algunas simulaciones numéricas, que muestran las dificultades de obtener una clasificación cerrada de los puntos de no retorno, ya que los hay de tipos muy diversos.

En primer lugar, consideramos la ecuación diferencial escalar autónoma

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x + 1. \quad (6.10)$$

Vamos a considerar una transición entre valores del parámetro $\lambda_- = -1$ y $\lambda_+ = 1$ a través de la función de transición (6.6) que ya hemos utilizado en las secciones anteriores. Su conjunto de puntos críticos es $\mathcal{X} = \{(-1/\lambda, \lambda) : \lambda \in [-1, 1] \setminus \{0\}\}$, y como el lado derecho de la ecuación linealizada es $Df(x, \lambda) = \lambda$, se tiene que son exponencialmente estables para $\lambda \in [-1, 0)$ e inestables para $\lambda \in (0, 1]$.

La inexistencia de puntos de equilibrio estable para valores del parámetro positivos conduce a que no puedan existir soluciones acotadas: no hay equilibrio al que ir en el futuro. Por otro lado, al seguir siendo la ecuación de transición una ecuación lineal, está garantizada la definición global de las soluciones, que tenderán a $\pm\infty$. Sin embargo, este ejemplo muestra que esta situación puede darse sin pasar por ningún punto de bifurcación.

Los resultados numéricos de este ejemplo lineal se presentan en la parte izquierda de la Figura 6.8. Se observa precisamente lo que se ha descrito antes: el atractor pullback local es no acotado, ya que no tiene equilibrio a donde ir. Este ejemplo, al igual que el que vamos a presentar a continuación, muestra que los puntos de bifurcación no son los únicos puntos peligrosos para una rama de equilibrios estables: esta puede terminar en $\pm\infty$.

A continuación, planteamos otro ejemplo similar, en el que no hay puntos de bifurcación pero no se consigue rastrear una curva de equilibrios estables. Se trata de la siguiente ecuación escalar:

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda^2 x^2 + 1. \quad (6.11)$$

Si consideramos los mismos valores inicial y final del parámetro $\lambda_- = -1$, $\lambda_+ = 1$ y la misma función de transición (6.6) tenemos los puntos críticos $(\pm 1/\lambda, \lambda)$ para $\lambda \in [-1, 1] \setminus \{0\}$. Ahora, como la linealizada es $Df(x, \lambda) = -2\lambda^2 x$, se tiene que los puntos críticos de coordenada x positiva son exponencialmente estables y los de coordenada x negativa son inestables. Aquí, de nuevo no va a haber ni puntos de bifurcación ni curva de equilibrios estables que conecte el pasado con el futuro que seguir, pero sin embargo, a diferencia del ejemplo anterior, va a haber conexión de dos equilibrios estables independientemente de la velocidad de conexión.

Esto queda ilustrado en las simulaciones numéricas de la parte derecha de la Figura 6.8. En ellas se observa precisamente este rastreo de puntos finales independientemente de la velocidad de la transición. Cuanto más pequeñas se hacen las velocidades de transición más grandes llegan a ser los valores que toma el atractor pullback local, ya que sigue más de cerca la rama estable que parte desde \mathbf{X}_- hacia el infinito. Sin embargo, siempre llega un momento en el que, pasado el valor de $\lambda = 0$ el atractor pullback local pasa a seguir la rama estable que llega hasta \mathbf{X}_+ , llegando hasta él.

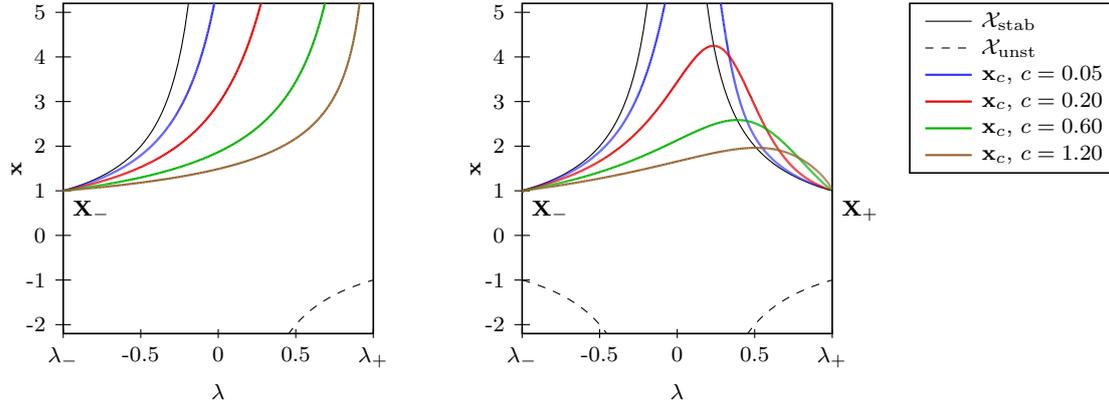


Figura 6.8: Diagrama de bifurcación del sistema (6.10) (izquierda), y del sistema (6.11) (derecho) con atractores pullback para diversos valores del parámetro c y función de transición (6.6), para los cuales se observa distintos fenómenos de puntos de no retorno. La curva de equilibrios estables que parte de \mathbf{X}_- no llega a ningún punto de equilibrio para valor del parámetro λ_+ . En el caso de la izquierda los atractores pullback locales tienden a ∞ independientemente del valor de la velocidad de transición, mientras que en el caso de la derecha siempre se conecta con \mathbf{X}_+ .

6.4. Una fuerza de rango finito

A continuación, pasamos a considerar un sistema de ecuaciones en el cual aparecen una gran cantidad de puntos de bifurcación. Se considera un potencial de la forma

$$U(x, \lambda) = \begin{cases} -\exp\left(-\frac{1}{1-(x-\lambda)^2}\right), & \text{si } x \in (\lambda-1, \lambda+1), \\ 0, & \text{si } x \notin (\lambda-1, \lambda+1). \end{cases} \quad (6.12)$$

Se trata, por tanto un potencial atractivo de rango finito centrado en el punto λ . Se interpretará que este potencial es la ligadura entre una partícula colocada en la posición λ y otra partícula cuya posición queremos determinar resolviendo el sistema. Además, se considerará una fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad de la partícula, $-\beta v$, con $\beta > 0$. De esta forma, si denotamos $F(x, \lambda) = -\frac{\partial}{\partial x}U(x, \lambda)$, en virtud de las leyes de la mecánica, el movimiento de la partícula quedará descrito en el estado autónomo por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = F(x, \lambda) - \beta v. \end{cases} \quad (6.13)$$

Los puntos críticos de este sistema son aquellos para los que $F(x, \lambda) = 0$. Es inmediato comprobar que todos los puntos $x \notin (\lambda-1, \lambda+1)$ lo verifican y, además, son puntos de \mathcal{X}_{bif} ya que la derivada espacial de $F(x, \lambda)$ también se anula en ellos, siendo el polinomio característico de (6.13) es $p(\lambda) = \lambda^2 + \beta\lambda - \frac{\partial F}{\partial x}(x, \lambda)$. Por otro lado, en $x \in (\lambda-1, \lambda+1)$ se tiene que

$$F(x, \lambda) = -\frac{\partial U}{\partial x}(x, \lambda) = -\frac{2(x-\lambda)}{(1-(x-\lambda)^2)^2} e^{-\frac{1}{1-(x-\lambda)^2}},$$

luego el único punto crítico posible es λ . Se comprueba además que $\frac{\partial F}{\partial x}(\lambda, \lambda) = -2/e$, lo cual asegura que los autovalores de la matriz linealizada del sistema en $x = \lambda$ son estrictamente negativos, ya que $-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 8/e} < 0$ para todo $\beta > 0$. Por tanto, $x = \lambda$ es un punto de equilibrio exponencialmente estable y podemos tratar de rastrearlo al hacer variar λ según una función de transición $\Lambda(t)$ como (6.6).

Para nuestra exploración numérica concreta de una transición, consideramos los valores inicial y final del parámetro $\lambda_- = -1$ y $\lambda_+ = 1$, al igual que en los ejemplos anteriores. Por lo anterior, quedan asignados $\mathbf{X}_- = -1$ y $\mathbf{X}_+ = 1$. Introducimos la función de transición Λ dada por (6.6) en el sistema (6.13), obteniendo el sistema no autónomo que rige la dinámica de la transición:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = F(x, \Lambda(ct)) - \beta v. \end{cases} \quad (6.14)$$

Estas ecuaciones diferenciales rigen cómo la partícula sometida a la fuerza de ligadura dada por (6.12) es capaz de seguir o no a la partícula a la que está ligada por dicha fuerza de rango finito cuando ésta se desplaza espacialmente según refleja la función de transición. En definitiva, la partícula que es seguida y cuyo movimiento hemos prefijado a partir de la función de transición está representada por la rama de equilibrios estables, mientras que la partícula seguidora es el atractor pullback local.

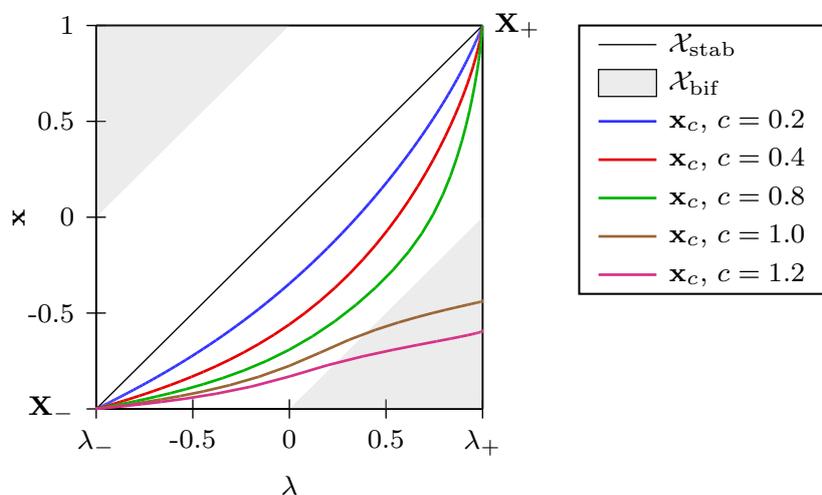


Figura 6.9: Diagrama de bifurcación del sistema (6.14) junto con atractores pullback para distintas velocidades de transición $c > 0$.

En la Figura 6.9 se observa el comportamiento de este sistema para distintos valores de la velocidad de transición $c > 0$. La intuición física de lo que está sucediendo es clara: cuando la partícula que es seguida se mueve a una velocidad demasiado alta (es decir, a velocidades de transición demasiado altas), la otra partícula escapa del rango de alcance de la fuerza de ligadura. Esto es lo que ocurre en la figura cuando se toman valores $c = 1.0$ y $c = 1.2$. Sin embargo, para velocidades de transición $c > 0$ suficientemente bajas se mantiene siempre dentro

del dominio de atracción y, por tanto, hay rastreo.

Otro hecho que merece la pena destacar es que la dinámica de la transición depende drásticamente de la diferencia de los valores λ_- y λ_+ , es decir, de la magnitud de la transición que se está efectuando. Si $\lambda_+ - \lambda_- \leq 1$ se va a obtener que el atractor pullback local nunca puede llegar a salirse del dominio de atracción de la partícula a seguir, lo que provoca que nunca pueda dejar de haber rastreo de los puntos finales. A partir de $\lambda_+ - \lambda_- > 1$, como hemos visto en el ejemplo numérico, hay una velocidad a partir de la cual se pierde el rastreo. Parece razonable pensar que esta dependencia con la magnitud de la transición sea un fenómeno muy frecuente en los problemas de transiciones críticas.

Este ejemplo aporta el interesante matiz de que no hace falta que existan equilibrios inestables de ninguno de los sistemas autónomos involucrados en la transición para que se den puntos de no retorno. Además, también queda visto que el no retorno puede conducir hacia equilibrios que son puntos de bifurcación, no únicamente hacia equilibrios exponencialmente inestables, como pasa en el caso de $c = 1.0$ y $c = 1.2$ (los puntos de bifurcación son la superficie gris de la figura).

Capítulo 7

Rastreo por pseudo-órbitas

La atención en los resultados de rastreo de los Capítulos 4 y 5 se la han llevado los caminos estables (Definición 4.1.6) que atraviesan una única rama estable (Definición 4.1.4) contenida en $\mathcal{X}_{\text{stab}}$, es decir, que no contenían ningún punto de bifurcación ni siquiera en sus extremos. En este capítulo, en cambio, se explorará la posibilidad de que el camino estable no esté formado únicamente por puntos de $\mathcal{X}_{\text{stab}}$, sino que contenga puntos de \mathcal{X}_{bif} . El Corolario 4.4.4 nos indicaba que si en un sistema no hay rastreo de los puntos finales para velocidades pequeñas y el conjunto de equilibrios en $[\lambda_-, \lambda_+]$ está acotado, entonces necesariamente existen puntos de bifurcación sobre la rama estable que parte del atractor del pasado; arrastrando así la atención precisamente sobre este tipo de caminos estables. En estos casos, los teoremas que se presentan en este capítulo recuperan el rastreo para velocidades bajas a través de un nuevo tipo de curvas (que no son exactamente soluciones), las pseudo-órbitas.

Las pseudo-órbitas en inicio fueron introducidas para tratar problemas muy distintos al que se va a explicar ahora siguiendo el enfoque de Ashwin et al. [2]. Quizá el uso más popular de las mismas haya sido la caracterización de los conjuntos ω -límite a través de la propiedad de recurrencia por cadenas; la cual consiste en que todo punto del conjunto se pueda conectar consigo mismo a través de una pseudo-órbita. En esta línea, Conley [5, 6] probó que todo ω -límite de un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias tiene la propiedad de recurrencia por cadenas. El resultado que ilustra la otra dirección fue probado por Franke y Selgrade [12] y dice que cualquier conjunto no vacío, compacto, conexo y con la propiedad de recurrencia por cadenas es topológicamente equivalente a un ω -límite de un flujo sobre un compacto. Posteriormente, Mischaikow, Smith y Thieme [25] trasladaron el resultado de Conley a sistemas asintóticamente autónomos, aseverando que todo ω -límite de un sistema asintóticamente autónomo tiene la propiedad de recurrencia por cadenas respecto del flujo límite asintótico. El otro uso clásico que se les ha dado, bajo el nombre de *órbitas aproximadas*, ha sido en el tratamiento de sistemas dinámicos hiperbólicos [15].

7.1. Resultados previos

A lo largo de todo este capítulo será imprescindible suponer que \mathcal{X} es regular (Definición 4.1.3), hipótesis bajo la cual se tiene la siguiente proposición, que jugará un papel importante en lo posterior. Cabe destacar que a lo largo de todo este capítulo nos restringiremos al caso de que el espacio de estados sea unidimensional, es decir, $n = 1$. Por otro lado, supondremos que $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, porque así como en los capítulos anteriores se asumió la existencia de

una rama estable, aquí queremos que el teorema de la función implícita garantice que fuera de $\mathcal{X}_{\text{bif}} \cup \mathcal{X}_{\text{unst}}$ el diagrama de bifurcación se descomponga enteramente en curvas de clase \mathcal{C}^1 , es decir, ramas estables. Además queremos que sigan pudiéndose utilizar los argumentos que condujeron al rastreo en capítulos anteriores, por lo que se mantiene la regularidad \mathcal{C}^2 en las variables de estado.

A lo largo de todo este capítulo, también supondremos una condición de regularidad adicional para la función de transición, que es muy general pero simplificará las demostraciones posteriores.

Definición 7.1.1 (Función de transición regular). Diremos que una función de transición $\Lambda \in \mathcal{P}(\lambda_-, \lambda_+)$ es **regular** si la contraimagen por Λ de cualquier punto de $\text{Im}(\Lambda)$ es unión finita de intervalos compactos, posiblemente unipuntuales.

Proposición 7.1.2. Dada $\Lambda \in \mathcal{P}(\lambda_-, \lambda_+)$, si \mathcal{X} es regular entonces un camino estable ϕ contiene una cantidad finita de puntos de bifurcación en $\text{Im}(\phi)$.

Demostración. La regularidad del conjunto de puntos críticos \mathcal{X} implica por definición que \mathcal{X}_{bif} es un conjunto de puntos aislados. El teorema de la función implícita garantiza que en un entorno de cada punto de $\mathcal{X}_{\text{stab}}$ se tiene que \mathcal{X} está parametrizado por curvas de clase \mathcal{C}^1 , ya que $\det(D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)) \neq 0$. Supongamos por reducción al absurdo que $\text{Im}(\phi)$ contiene una cantidad infinita de puntos de \mathcal{X}_{bif} . Como los puntos de \mathcal{X}_{bif} son puntos aislados en \mathcal{X} , lo son también en $\text{Im}(\phi)$, pero como $\text{Im}(\phi)$ está contenido en un compacto que es la imagen por ϕ de la recta compactificada por dos puntos $\overline{\mathbb{R}}$, se llega a un absurdo. \square

Proposición 7.1.3. Dada $\Lambda \in \mathcal{P}(\lambda_-, \lambda_+)$, se considera un camino $\phi(s) = (\mathbf{X}(s), \Lambda(s))$ que en el intervalo $[s_a, s_b]$ atraviesa una única rama estable contenida en $\mathcal{X}_{\text{stab}}$, es decir, tal que los extremos también son equilibrios exponencialmente estables. Entonces, para cualquier $\epsilon > 0$ existe c_ϵ tal que, dado un $0 < c < c_\epsilon$, existe una solución $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ de

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda(ct)) \quad (7.1)$$

que ϵ -rastrea ese trozo de camino, es decir, que para todo $t \in [s_a/c, s_b/c]$ se verifica que

$$|\tilde{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{X}(ct)| \leq \epsilon. \quad (7.2)$$

Además, el resultado también es cierto en el caso de que alguno de los dos extremos del intervalo sean infinitos. En el caso de que el intervalo sea $(-\infty, s_b]$ hay que pedir que $(\mathbf{X}_-, \lambda_-) \in \mathcal{X}_{\text{stab}}$, si es $[s_a, \infty)$ hay que pedir que $(\mathbf{X}_+, \lambda_+) \in \mathcal{X}_{\text{stab}}$ y si es \mathbb{R} ambas cosas a la vez.

Demostración. Los casos de $s_a = -\infty$ y de $s_b = \infty$ están ya resueltos gracias a la persistencia de las dicotomías exponenciales reflejada en los apartados II) y IV) del Teorema 5.4.2. Por tanto, nos fijamos en el caso en que s_a y s_b son cantidades finitas. Sea $\epsilon > 0$. El argumento es similar al seguido en la Sección 4.3. Dado $s \in \mathbb{R}$ se reescribe la ecuación diferencial (7.1), tras el cambio de variable $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{X}(\Lambda(cs))$, como

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A_c^s \mathbf{y} + \mathbf{g}_c^s(t, \mathbf{y}) + \mathbf{h}_c^s(t, \mathbf{y}), \quad (7.3)$$

donde

$$\begin{cases} A_c^s \mathbf{y} = D\mathbf{f}(\mathbf{X}(\Lambda(cs)), \Lambda(cs)) \mathbf{y}, \\ \mathbf{g}_c^s(t, \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{X}(\Lambda(cs)) + \mathbf{y}, \Lambda(cs)) - D\mathbf{f}(\mathbf{X}(\Lambda(cs)), \Lambda(cs)) \mathbf{y}, \\ \mathbf{h}_c^s(t, \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{X}(\Lambda(cs)) + \mathbf{y}, \Lambda(ct)) - \mathbf{f}(\mathbf{X}(\Lambda(cs)) + \mathbf{y}, \Lambda(cs)). \end{cases} \quad (7.4)$$

En el intervalo $[s_a, s_b]$ el camino estable ϕ atraviesa únicamente equilibrios exponencialmente estables, y sin embargo una rama estable que forma parte de un camino estable (y acotado por ser continuo y tener límites en $\pm\infty$) ha de estar delimitada por dos puntos de bifurcación. En consecuencia, la rama estable está definida en un abierto mayor que $[s_a, s_b]$, luego existe un intervalo cerrado $[r_a, r_b]$ que contiene a $[s_a, s_b]$ y para el que el camino ϕ atraviesa la misma rama estable que en $[s_a, s_b]$. Los mismos argumentos presentados en el Lema 4.3.4 muestran que a estos sistemas se les puede aplicar la Proposición 4.3.3, definiendo en este caso

$$|\mathbf{X}'|_\infty = \sup_{s \in [r_a, r_b]} |\mathbf{X}'(s)|, \quad |\Lambda'|_\infty = \sup_{s \in [r_a, r_b]} |\Lambda'(s)|,$$

y obteniéndose $c_{\epsilon,0} = \min\{c_{\epsilon,1}, c_{\epsilon,2}\}$ a través de (4.38) y (4.39). Sin embargo, en este caso hay que aplicar una restricción añadida más sobre el valor de c_ϵ para poder aplicar la Proposición 4.3.3, ya que se necesita un punto de partida de la solución, que ahora no tiene un comienzo caracterizado por el atractor pullback en un entorno de $-\infty$. Dada $l > 0$ la longitud aportada por la proposición, se restringe las posibles velocidades según: $c_\epsilon = \min\{c_{\epsilon,0}, (s_a - r_a)/l\}$. Se toma $0 < c < c_\epsilon$. La razón de esta restricción es que se va a tratar de ver que la solución que verifica las propiedades del enunciado es $\mathbf{x}(t, r_a/c, \mathbf{X}(r_a), c)$. De esta forma, es claro que

$$|\mathbf{x}(r_a/c, r_a/c, \mathbf{X}(r_a), c) - \mathbf{X}(r_a)| = 0 \leq \epsilon,$$

y, por tanto, se puede aplicar la Proposición 4.3.3 a partir del punto $s = r_a/c$, ya que entonces $l \leq (s_a - r_a)/c$, para obtener en todo el intervalo $t \in [s_a/c, s_b/c]$ que

$$|\tilde{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{X}(ct)| \leq \epsilon,$$

como queríamos comprobar. \square

Para acabar este apartado, introducimos aquí un breve lema técnico cuya finalidad es descargar la prueba posterior del Teorema 7.2.3, de forma que se puedan seguir mejor las ideas en la demostración.

Lema 7.1.4. Sean $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, una función de transición $\Lambda \in \mathcal{P}(\lambda_-, \lambda_+)$, un punto de bifurcación $(\mathbf{X}_0, \lambda_0) \in \mathcal{X}_{\text{bif}}$, de forma que $\Lambda(s_0) = \lambda_0$, con $s_0 \in \mathbb{R}$ y siendo $[s_0^-, s_0^+]$ el intervalo cerrado maximal que contiene a s_0 en el que Λ es constante y $c > 0$ una velocidad de transición fija. Entonces, dados $\xi_1, \delta_1 > 0$ existe $M > 0$ tal que para cualesquiera $0 < \delta \leq \delta_1$ y $0 < \xi \leq \xi_1$, con $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}$, se verifica que

$$|\mathbf{x}(t, t_1, \mathbf{x}_0, c) - \mathbf{x}_0| \leq M(\xi^2 + \delta)|t - t_1| \quad (7.5)$$

siempre que $t \in [t_1, t_2]$, se tenga la contención $[ct_1, ct_2] \subseteq [s_0^- - \delta, s_0^+ + \delta]$ y, además, se cumpla que $|\mathbf{x}(t, t_1, \mathbf{x}_0, c) - \mathbf{X}_0| \leq \xi$ para todo $t \in [t_1, t_2]$.

Demostración. En primer lugar, teniendo en cuenta que $\Lambda([s_0^-, s_0^+]) = \{\lambda_0\}$, aplicando el teorema del valor medio a la derecha de s_0^+ y a la izquierda de s_0^- se tiene que si $M_1 > 0$ es una cota para $|\Lambda'(s)|$ en el intervalo $[s_0^- - \delta_1, s_0^+ + \delta_1]$, entonces

$$|\Lambda(s) - \lambda_0| \leq M_1 \inf_{r \in [s_0^-, s_0^+]} |s - r| \quad (7.6)$$

para todo $s \in [s_0^- - \delta_1, s_0^+ + \delta_1]$. A continuación, utilizamos el teorema de Taylor en forma integral para la función \mathbf{f} alrededor del punto $(\mathbf{X}_0, \lambda_0)$. Como $(\mathbf{X}_0, \lambda_0) \in \mathcal{X}_{\text{bif}} \subseteq \mathcal{X}$ se tiene que

$\mathbf{f}(\mathbf{X}_0, \lambda_0) = 0$, luego podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda) - \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda_0) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda_0) - \mathbf{f}(\mathbf{X}_0, \lambda_0) \\ &= \int_0^1 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \lambda}(\mathbf{x}, \theta\lambda + (1-\theta)\lambda_0)(\lambda - \lambda_0) d\theta + \int_0^1 D\mathbf{f}(\theta\mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{X}_0, \lambda_0)(\mathbf{x} - \mathbf{X}_0) d\theta. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Definimos ahora el compacto $K = \{(\mathbf{x}, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |\mathbf{x} - \mathbf{X}_0| \leq \xi_1, |\lambda - \lambda_0| \leq M_1\delta_1\}$. Por un lado, sea $M_2 > 0$ una cota para $|\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \lambda}(\mathbf{x}, \lambda)|$ sobre el compacto K y, por el otro, como $(\mathbf{X}_0, \lambda_0)$ es un punto de bifurcación y estamos en el caso $n = 1$ se tiene que $D\mathbf{f}(\mathbf{X}_0, \lambda_0) = 0$, luego

$$\begin{aligned} D\mathbf{f}(\theta\mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{X}_0, \lambda_0) &= D\mathbf{f}(\theta\mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{X}_0, \lambda_0) - D\mathbf{f}(\mathbf{X}_0, \lambda_0) \\ &= \int_0^1 D^2\mathbf{f}(\theta\mu\mathbf{x} + ((1-\theta)\mu + (1-\mu))\mathbf{X}_0, \lambda_0)\theta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_0) d\mu. \end{aligned} \quad (7.8)$$

En consecuencia, si $M_3 > 0$ es una cota para $\|D^2\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)\|_{\mathcal{L}_2}$ sobre K , entonces, si juntamos (7.7) y (7.8) se tiene que para $(\mathbf{x}, \lambda) \in K$,

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)| \leq M_2|\lambda - \lambda_0| + M_3|\mathbf{x} - \mathbf{X}_0|^2, \quad (7.9)$$

luego utilizando (7.6) se tiene que si $ct \in [s_0^- - \delta_1, s_0^+ + \delta_1]$ y $\mathbf{x} \in B(\mathbf{X}_0, \xi_1)$

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda(ct))| \leq M_2|\Lambda(ct) - \lambda_0| + M_3|\mathbf{x} - \mathbf{X}_0|^2 \leq M_2M_1 \inf_{r \in [s_0^-, s_0^+]} |ct - r| + M_3|\mathbf{x} - \mathbf{X}_0|^2. \quad (7.10)$$

Ahora, dados $0 < \delta \leq \delta_1$ y $0 < \xi \leq \xi_1$, se verifica que si $ct \in [s_0^- - \delta, s_0^+ + \delta]$ y $\mathbf{x} \in B(\mathbf{X}_0, \xi)$, al ser estos conjuntos más pequeños que los tratados antes,

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda(ct))| \leq M_2M_1\delta + M_3\xi^2 \leq M(\delta + \xi^2), \quad (7.11)$$

donde $M = \max\{M_2M_1, M_3\}$. Para acabar, dado $\mathbf{x}_0 \in B(\mathbf{X}_0, \xi)$, al aplicar el teorema fundamental del cálculo a $\mathbf{x}(t, t_1, \mathbf{x}_0, c)$ se tiene que, para $t \in [t_1, t_2]$,

$$|\mathbf{x}(t, t_1, \mathbf{x}_0, c) - \mathbf{x}_0| = \left| \int_{t_1}^t \mathbf{f}(\mathbf{x}(t, t_1, \mathbf{x}_0, c), \Lambda(ct)) dt \right| \leq M(\xi^2 + \delta)|t - t_1|, \quad (7.12)$$

siempre que $ct_1, ct_2 \in [s_0^- - \delta, s_0^+ + \delta]$ y, además, se cumpla que $|\mathbf{x}(t, t_1, \mathbf{x}_0, c) - \mathbf{X}_0| \leq \xi$ para todo $t \in [t_1, t_2]$, que es lo que queríamos probar. \square

7.2. Pseudo-órbitas y rastreo

A continuación, introducimos la noción de pseudo-órbita, que será el sustituto de las trayectorias en el teorema de rastreo que se presentará poco más adelante. Aunque presentemos la definición en el caso de espacio de estados unidimensional que estamos usando, la generalización de la definición a \mathbb{R}^n es la natural.

Definición 7.2.1 (Pseudo-órbita). Dados $\epsilon, T > 0$, diremos que una función $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, con $a < b$ reales, es una (ϵ, T) -**pseudo-órbita** de (7.1) si existe una cantidad finita de puntos $t_1 = a, t_2, \dots, t_M = b$ que verifican que $t_{i+1} > t_i + T$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, M-1\}$ tales que $\mathbf{x}(t)$ es una trayectoria de (7.1) en el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ y además,

$$\left| \mathbf{x}(t_{i+1}) - \lim_{t \rightarrow t_{i+1}^-} \mathbf{x}(t) \right| \leq \epsilon. \quad (7.13)$$

Dados $\epsilon, T > 0$, diremos que una función $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}$, siendo I de la forma $(-\infty, b]$, $[a, \infty)$ ó \mathbb{R} , es una (ϵ, T) -**pseudo-órbita** de (7.1) si lo es restringida a cada subintervalo compacto.

Comentario 7.2.2. Cabe destacar que existen variedad de definiciones de pseudo-órbitas. La que se acaba de presentar, que se puede encontrar en [2], está adaptada adecuadamente al proceso inducido por una ecuación no autónoma. Quizá la definición más corriente es la dada en [6, Definición 3.1A], que no se hace en función de la curva $\mathbf{x}(t)$, sino únicamente a través de las coordenadas de los puntos de discontinuidad y el flujo según el cual se produce la evolución. Esa definición es equivalente a la presentada si es aplicada al flujo generado por el sistema extendido

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \Lambda(s)), \quad \frac{ds}{dt} = c, \quad (7.14)$$

y se impone que no se puedan producir discontinuidades en la variable temporal, es decir, que se pueda definir una curva $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como en la definición anterior.

Teorema 7.2.3 (Rastreo por pseudo-órbitas). Se consideran $\Lambda \in \mathcal{P}(\lambda_-, \lambda_+)$ una función de transición, y $\phi(s) = (\mathbf{X}(s), \Lambda(s))$ un camino estable que conecta los puntos $(\mathbf{X}_-, \lambda_-)$ y $(\mathbf{X}_+, \lambda_+)$. Entonces, para cada $\epsilon > 0$ existe un $c_\epsilon > 0$ tal que para todo $0 < c < c_\epsilon$ existe una $(\epsilon, 1)$ -pseudo-órbita $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ de (7.1) que ϵ -rastrea el camino, es decir, que verifica que

$$|\tilde{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{X}(ct)| \leq \epsilon,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demostración. El Teorema 4.3.5 y el Corolario 4.4.4 nos dan la idea de que los posibles problemas en el rastreo podrán surgir precisamente en un entorno de los puntos de bifurcación, que la Proposición 7.1.2 nos asegura que son una cantidad finita sobre $\text{Im}(\phi)$. En consecuencia, todo el estudio se realizará en torno a estos puntos. Como Λ es regular, puede tomar en una unión finita de intervalos cerrados (posiblemente unipuntuales) un valor constante que coincida con alguno de los puntos de bifurcación, luego podemos considerar un conjunto finito de puntos en \mathbb{R} :

$$s_1^- \leq s_1^+ < s_2^- \leq s_2^+ < \cdots < s_k^- \leq s_k^+,$$

tales que Λ es constante en los intervalos $[s_j^-, s_j^+]$ cuando $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, se verifique $\phi(s) \in \mathcal{X}_{\text{bif}}$ en dichos intervalos y además $\phi(s) \notin \mathcal{X}_{\text{bif}}$ fuera de esos intervalos.

Probaremos que el resultado del enunciado es cierto a partir de un ϵ lo suficientemente pequeño, estando así garantizado que ocurre también para valores más grandes. Para comenzar, tomamos dos valores $\delta_1, \xi_1 > 0$ arbitrarios y les aplicamos el Lema 7.1.4 a cada uno de los puntos de \mathcal{X}_{bif} que están sobre el camino estable ϕ , obteniendo $M_j > 0$ que hace que se verifique (7.5) en cada uno de esos puntos. Tomamos $M = \max_{1 \leq j \leq k} M_j > 0$. Sea entonces $T > 0$ el fijado en el enunciado, $T = 1$, y $\epsilon > 0$ uno posiblemente más pequeño que el enunciado, cumpliendo la condición de que $\epsilon < \min\{1/(16M), \xi_1\}$, que como hemos comentado antes no supone pérdida de generalidad y será necesaria más adelante. Entonces, como $\mathbf{X}(s)$ es una función continua, para cada $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ existe $\hat{\delta}_j$ de forma que

$$|\mathbf{X}(s) - \mathbf{X}_j| \leq \frac{\epsilon}{4} \quad (7.15)$$

para todo $s \in [s_j^- - \hat{\delta}_j, s_j^+ + \hat{\delta}_j]$. Se toma

$$\delta = \min \left\{ \min_{1 \leq j \leq k} \hat{\delta}_j, \min_{2 \leq j \leq k} \frac{s_j^- - s_{j-1}^+}{3}, \delta_1, \frac{\epsilon}{16M} \right\}, \quad (7.16)$$

consiguiendo así que,

- por el primer término del mínimo, si $s \in [s_j^- - \delta, s_j^+ + \delta]$ se verifica (7.15) con $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, ya que $[s_j^- - \delta, s_j^+ + \delta] \subseteq [s_j^- - \hat{\delta}_j, s_j^+ + \hat{\delta}_j]$.
- por el segundo término del mínimo, $s_{j-1}^+ + \delta \leq s_j^- - 2\delta < s_j^- - \delta$ para todo $j \in \{2, 3, \dots, k\}$, es decir, que los intervalos $[s_{j-1}^+ + \delta, s_j^- - \delta]$ no son ni vacíos ni unipuntuales, implicando que los intervalos de estudio entorno a los puntos de bifurcación $[s_j^- - \delta, s_j^+ + \delta]$ son disjuntos dos a dos,
- por el tercer término del mínimo, la expresión (7.5) obtenida por aplicación del Lema 7.1.4 es válida para ese $0 < \delta \leq \delta_1$ en cada uno de los puntos de bifurcación,
- por el cuarto término del mínimo, se tiene que $M\delta \leq \epsilon/16$, cota que nos hará falta más adelante.

A continuación, la Proposición 7.1.3 nos garantiza que existen velocidades de transición $c_j > 0$ tales que para cualquier $c \leq c_j$ existen trayectorias que $(\epsilon/4)$ -rastrear respectivamente en los intervalos $(-\infty, (s_1^- - \delta)/c]$, $[(s_1^+ + \delta)/c, (s_2^- - \delta)/c]$, $[(s_2^+ + \delta)/c, (s_3^- - \delta)/c]$, ..., $[(s_k^+ + \delta)/c, \infty)$. De esta forma, si se toma cualquier $c \leq c_\epsilon = \min\{\min_{1 \leq j \leq k+1} c_j, \delta\}$, entonces existen trayectorias $\tilde{\mathbf{x}}_j$ de (7.1) (que dependen de dicha elección de c pero que será fija de aquí en adelante) para $k \in \{1, 2, \dots, k+1\}$ que verifican

$$\begin{aligned} |\tilde{\mathbf{x}}_1(ct) - \mathbf{X}(ct)| &\leq \frac{\epsilon}{4}, & ct &\in (-\infty, s_1^- - \delta), \\ |\tilde{\mathbf{x}}_j(ct) - \mathbf{X}(ct)| &\leq \frac{\epsilon}{4}, & ct &\in [s_{j-1}^+ + \delta, s_j^- - \delta], & j &\in \{2, 3, \dots, k\}, \\ |\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}(ct) - \mathbf{X}(ct)| &\leq \frac{\epsilon}{4}, & ct &\in [s_k^+ + \delta, \infty), \end{aligned} \quad (7.17)$$

ya que dichos intervalos están contenidos en respectivas ramas estables. Ahora, como se había tomado $\epsilon < \min\{1/(16M), \xi_1\}$, se tiene que, por un lado $\epsilon < \sqrt{\frac{\epsilon}{16M}}$ y, por otro $\epsilon < \xi_1$, luego existe $\xi > 0$ que verifica que

$$\epsilon < \xi < \min\left\{\xi_1, \sqrt{\frac{\epsilon}{16M}}\right\}, \quad (7.18)$$

y que, en consecuencia, es un candidato válido para aplicar la fórmula (7.5) obtenida del Lema 7.1.4. Cabe destacar que si juntamos entonces la cuarta parte de (7.16) con (7.18) y la conclusión del Lema 7.1.4 tenemos que para $t \in [t_1, t_1 + 2]$, un valor inicial $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}$,

$$|\mathbf{x}(t, t_1, \mathbf{x}_0, c) - \mathbf{x}_0| \leq M(\xi^2 + \delta)|t - t_1| \leq \frac{\epsilon}{8}|t - t_1| \leq \frac{\epsilon}{4}, \quad (7.19)$$

siempre que $ct_1, c(t_1 + 2) \in [s_0^- - \delta, s_0^+ + \delta]$ y, además, se cumpla que $|\mathbf{x}(t, t_1, \mathbf{x}_0, c) - \mathbf{X}_j| \leq \xi$ para todo $t \in [t_1, t_1 + 2]$ y algún $j \in \{1, 2, \dots, k\}$.

A continuación, tenemos que usar este resultado para unir los fragmentos de solución que se han encontrado en (7.17) respetando la definición de pseudo-órbita. Hay que rellenar el intervalo de tiempo $t \in [(s_j^- - \delta)/c, (s_j^+ + \delta)/c]$ y para ello lo dividimos en $M \in \mathbb{N}$ puntos separados una distancia estrictamente mayor que 1 y menor o igual que 2:

$$t_{j,1} = (s_j^- - \delta)/c, t_{j,2}, t_{j,3}, \dots, t_{j,M} = (s_j^+ + \delta)/c.$$

La condición de que $c \leq c_\epsilon \leq \delta$ tomada en la definición de c_ϵ asegura que esta división puede efectuarse, ya que el intervalo a dividir tiene longitud estrictamente mayor que 1. Se toman $\tilde{\mathbf{x}}_{j,k} : [t_{j,k}, t_{j,k+1}] \rightarrow \mathbb{R}$ con $k \in \{1, 2, \dots, M-1\}$ dados por

$$\tilde{\mathbf{x}}_{j,k}(t) = \mathbf{x}(t, t_{j,k}, \mathbf{X}(ct_{j,k}), c). \quad (7.20)$$

Para acabar el teorema hay que probar dos cosas: la primera que estas soluciones en efecto ϵ -rastrean el camino ϕ , y la segunda, que los saltos que se producen son de magnitud menor que ϵ .

Para ello, en primer lugar veamos que se puede aplicar a estas soluciones la ecuación (7.19), es decir, que se tiene que $|\mathbf{x}(t, t_{j,k}, \mathbf{X}(ct_{j,k}), c) - \mathbf{X}_j| \leq \xi$ para todo $t \in [t_{j,k}, t_{j,k+1}]$. Se tiene en cuenta que $h(t) = |\mathbf{x}(t, t_{j,k}, \mathbf{X}(ct_{j,k}), c) - \mathbf{X}_j|$ es una función continua que verifica, por (7.15) y (7.18), que $h(t_{j,k}) = |\mathbf{X}(ct_{j,k}) - \mathbf{X}_j| \leq \epsilon/4 < \xi/4$. Si por reducción al absurdo no se verifica $|\mathbf{x}(t, t_{j,k}, \mathbf{X}(ct_{j,k}), c) - \mathbf{X}_j| \leq \xi$ para todo $t \in [t_{j,k}, t_{j,k+1}]$, entonces existirá por continuidad un primer punto $\nu_1 \in [t_{j,k}, t_{j,k+1}]$ a partir del cual exista un abierto $(\nu_1, \nu_2) \subset [t_{j,k}, t_{j,k+1}]$ en el que $|\mathbf{x}(t, t_{j,k}, \mathbf{X}(ct_{j,k}), c) - \mathbf{X}_j| > \xi$. Como en $[t_{j,k}, \nu_1]$ sí que se verifica la desigualdad correcta, (7.19) garantiza que $|\mathbf{x}(t, t_{j,k}, \mathbf{X}(ct_{j,k}), c) - \mathbf{X}(ct_{j,k})| \leq \epsilon/4$ para $t \in [t_{j,k}, \nu_1]$, pero entonces la desigualdad triangular dice que $|\mathbf{x}(t, t_{j,k}, \mathbf{X}(ct_{j,k}), c) - \mathbf{X}_j| \leq \epsilon/2 < \xi/2$ para $t \in [t_{j,k}, \nu_1]$, contradiciendo, por continuidad, que se tenga $|\mathbf{x}(t, t_{j,k}, \mathbf{X}(ct_{j,k}), c) - \mathbf{X}_j| > \xi$ para $t \in (\nu_1, \nu_2)$.

En consecuencia, la desigualdad triangular nos garantiza el rastreo, ya que para $t \in [t_{j,k}, t_{j,k+1})$,

$$\begin{aligned} & |\mathbf{x}(t, t_{j,k}, \mathbf{X}(ct_{j,k}), c) - \mathbf{X}(ct)| \\ & \leq |\mathbf{x}(t, t_{j,k}, \mathbf{X}(ct_{j,k}), c) - \mathbf{X}(ct_{j,k})| + |\mathbf{X}(ct_{j,k}) - \mathbf{X}_j| + |\mathbf{X}_j - \mathbf{X}(ct)| \\ & \leq \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{3\epsilon}{4} < \epsilon, \end{aligned} \quad (7.21)$$

donde la desigualdad para el primer término se deduce de (7.19) y las de los otros dos términos de (7.15). Para acabar, veamos que la magnitud de los saltos es menor que ϵ . Primero veamos qué pasa con los saltos en los puntos intermedios del intervalo $[(s_j^- - \delta)/c, (s_j^+ + \delta)/c]$. Para ellos basta evaluar la desigualdad anterior en $t_{j,k+1}$:

$$|\mathbf{x}(t_{j,k+1}, t_{j,k}, \mathbf{X}(ct_{j,k}), c) - \mathbf{X}(ct_{j,k+1})| < \epsilon. \quad (7.22)$$

Para los saltos en los extremos del intervalo $[(s_j^- - \delta)/c, (s_j^+ + \delta)/c]$ basta tener en cuenta que las cotas de (7.17) son válidas en los intervalos cerrados, luego se tienen. De esta forma, uniendo las definiciones de (7.17) y de (7.20) se tiene una ϵ -pseudo-órbita $\tilde{\mathbf{x}}$ que rastrea el camino estable ϕ , como se quería encontrar. \square

7.3. Ejemplo con una bifurcación de tipo pitchfork

Consideramos ahora la ecuación diferencial escalar

$$\frac{dx}{dt} = x(\lambda - x^2), \quad (7.23)$$

cuya dinámica consideramos conocida, ya que se trata de la forma normal de la bifurcación de tipo pitchfork. Es conocido que para $\lambda < 0$ tiene un punto de equilibrio estable en $x = 0$

mientras que para $\lambda > 0$ tiene puntos de equilibrio estable $x = \pm\sqrt{\lambda}$ e inestable $x = 0$ y para $\lambda = 0$ un punto de bifurcación en $x = 0$. Consideramos la función de transición $\Lambda(s) = \tanh(s)$ que hemos utilizado en ocasiones anteriores, (6.6), y estudiamos la transición no autónoma entre $\lambda_- = -1$ y $\lambda_+ = 1$ regida por

$$\frac{dx}{dt} = x(\Lambda(ct) - x^2). \quad (7.24)$$

El atractor pullback local se corresponderá con la solución $x_c(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, ya

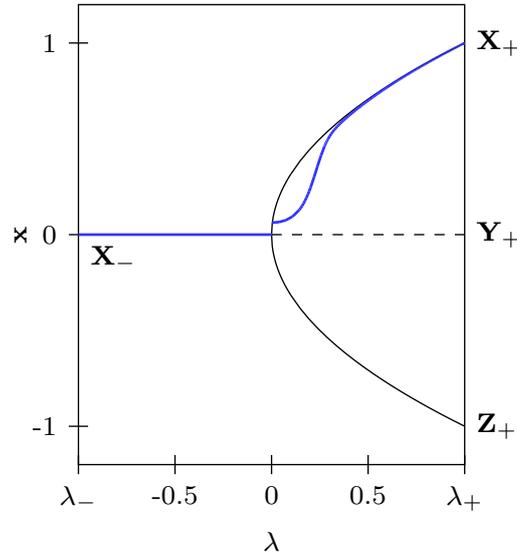


Figura 7.1: Diagrama de bifurcación del sistema (7.24) con una $(0.25, 1)$ -pseudo-órbita (azul) que rastrea el camino estable ϕ , para el valor de $c = 0.013$. La pseudo-órbita presenta una única discontinuidad, en el punto $t = 0.3001$, $\lambda = 0.0039$, con salto de magnitud $\epsilon/4 \approx 0.0625$. En línea continua negra se representan los equilibrios estables del sistema autónomo y en discontinua los inestables. La integración numérica se ha llevado a cabo de la misma forma que en Capítulo 6.

que en $x = 0$ se encuentra el único equilibrio exponencialmente estable para todo $\lambda < 0$. Sin embargo, eso no es un camino estable, ya que para $\lambda > 0$ se tiene que el punto $x = 0$ es inestable. Consideramos el camino estable dado por

$$\phi(s) = \begin{cases} (0, \Lambda(s)), & \text{si } s \in (-\infty, 0], \\ (\sqrt{\Lambda(s)}, \Lambda(s)), & \text{si } s \in (0, \infty), \end{cases}$$

que atraviesa un punto de bifurcación en $\lambda = 0$ y está contenido en $\mathcal{A}_{\text{stab}}$ para el resto de valores. Es claro que el atractor pullback local $x_c \equiv 0$ no ϵ -rastrea el camino estable ϕ , pero, sin embargo, el Teorema 7.2.3 nos garantiza que sí que existen $(\epsilon, 1)$ -pseudo-órbitas que lo ϵ -rastrean. La simulación numérica de la Figura 7.1 muestra precisamente una de esas pseudo-órbitas, que ha sido fabricada según las indicaciones que se encuentran en el pie de la figura.

Capítulo 8

Aplicaciones

En este capítulo presentamos dos aplicaciones de la teoría presentada en los capítulos anteriores que se encuentran en artículos de investigación recientes [3, 26] relacionados con modelos provenientes de las ciencias aplicadas. Uno es un modelo proveniente de la ecología [26, 28], en concreto, del estudio de poblaciones y de cómo su interacción se puede ver afectada por causas externas; el otro modelo proviene de la climatología [3, 11], en concreto sobre la evolución de la temperatura terrestre.

8.1. Modelo ecológico de herbívoros y plantas

El sistema de ecuaciones diferenciales que se presenta a continuación modela la evolución de una población de herbívoros, H y una de plantas, P , en interacción:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP - CP^2 - Hg(P), \\ \frac{dH}{dt} = (Ee^{-bP}g(P) - m)H, \end{cases} \quad (8.1)$$

donde $E, C, a, b, b_c, c_{\text{máx}}$ van a ser constantes del problema a tratar mientras que contemplamos que m y r recojan condiciones medioambientales externas que pueden ser función del tiempo, tomando el papel de λ en los teoremas de los capítulos anteriores.

Antes de estudiar numéricamente algunas transiciones en este sistema, explicaremos brevemente el significado de los términos que aparecen en el sistema de ecuaciones diferenciales. Por un lado, la contribución $rP - CP^2$ se corresponde con un crecimiento logístico de las plantas en ausencia de herbívoros, donde r es la tasa de crecimiento de la población de plantas (es razonable que pueda variar en función de las condiciones climatológicas, como por ejemplo la cantidad de precipitaciones o de recursos disponibles para las plantas) y C es el factor de competición de las plantas, de forma que r/C es la capacidad máxima de plantas que puede sostener el medio. En [28] se indica que también es una suposición adecuada que la capacidad máxima dependa de los factores externos recogidos en r como, por ejemplo, las precipitaciones en regiones secas, ya que se consigue una mejor modelización de la productividad de las plantas. Por otro lado, el término $-mH$ de la segunda de las ecuaciones se corresponde con la pérdida de masa de herbívoros, siendo m el factor de pérdida de herbívoros, el cual incluye tanto la mortalidad como el gasto energético de los mismos (puede verse afectado externamente por epidemias, por ejemplo). Finalmente, ambas dos poblaciones están relacionadas por una

interacción modelada a través de una función de respuesta funcional de tipo III modificada

$$g(P) = c_{max} \frac{P^2}{P^2 + a^2} e^{-b_c P}. \quad (8.2)$$

La respuesta funcional de tipo III recoge modela tanto la limitación del tiempo de procesado de alimento de los herbívoros, como el tiempo dedicado al aprendizaje y a la elección del alimento. La modificación exponencial introducida a la respuesta funcional de tipo III clásica, $e^{-b_c P}$, reduce la alimentación para cantidades de biomasa altas. Esta reducción es explicada por [28] en términos de un abanico de mecanismos que producen una retroalimentación positiva en estados de biomasa alta. Algunos de ellos serían, por ejemplo, que los herbívoros tienen preferencia natural por las plantas más jóvenes mientras que evitan las más crecidas debido probablemente a que su inferior contenido proteico las hace menos nutritivas y apetecibles (reducción de la palatabilidad) y, por otro lado, a que si la vegetación es alta los herbívoros tienen que dedicar una parte mucho mayor de su tiempo y energías a detectar posibles predadores ocultos en la espesura.

La validez del modelo ha sido contrastada experimentalmente en regiones positivamente invariantes de la forma $[0, P_0] \times \mathbb{R}$ con un $P_0 > 0$ suficientemente grande (mayor que r/C para garantizar la invariancia), ya que para cantidades arbitrariamente grandes de plantas el modelo prevee una privación de ingesta por parte de los herbívoros que no está validada. En concreto, [28] se basa en la interacción entre el coral de un arrecife y una especie de erizos de mar para proponer el modelo, así como en otras interacciones en diversos tipos de bosques. La idea que se persigue en dicho artículo es mostrar cómo cambios en factores externos (por ejemplo, una epidemia en los herbívoros) pueden conducir el sistema a un estado resiliente (dominado por las plantas) del que es difícil volver (el estado de biomasa alta impide la proliferación de herbívoros).

Los valores de las constantes y los rangos en los que se moverán los parámetros van a ser, junto con las unidades de cada una de las magnitudes, los que se presentan en el Cuadro 8.1. Las variables P y H son sendas densidades superficiales de masa en el hábitat en cuestión, luego se miden en gm^{-2} .

	Significado	Unidades	Valor
$C > 0$	Factor de competición de las plantas	$\text{m}^2\text{g}^{-1}\text{d}^{-1}$	0.02
$a > 0$	Semisaturación de la respuesta funcional	gm^{-2}	10
$b \geq 0$	Exponente de calidad reducida del alimento en condiciones de biomasa alta	m^2g^{-1}	0.025
$b_c \geq 0$	Exponente de eficiencia de predación herbívora en condiciones de biomasa alta	m^2g^{-1}	0.025
$E > 0$	Eficiencia de asimilación herbívora	adimensional	0.4
$c_{max} > 0$	Nivel de ingesta máxima herbívora cuando $b_c = 0$	d^{-1}	1
$m > 0$	Factor de pérdida de herbívoros	d^{-1}	0 – 0.2
$r > 0$	Tasa de crecimiento máximo de las plantas	d^{-1}	0 – 2.5

Cuadro 8.1: Constantes y unidades del problema [26, 28]

Lo primero que debemos encontrar son los puntos críticos de nuestro sistema de ecuaciones diferenciales. Si en la segunda de las ecuaciones de (8.1) se anulara el segundo de los factores del producto, $H = 0$, entonces de las posibilidades de anulación de la primera de las ecuaciones encontramos dos puntos críticos: $e_1 = (0, 0)$ y $e_2 = (r/C, 0)$. La otra posibilidad de anulación de la segunda de las ecuaciones es que

$$Ee^{-bP}g(P) = m, \quad (8.3)$$

que sólo depende de P , por lo que introduciendo sus raíces en la otra ecuación se obtiene la cantidad de herbívoros en esos otros puntos críticos

$$H = \frac{rP - CP^2}{g(P)}. \quad (8.4)$$

De esta forma, como los parámetros que vamos a considerar que pueden variar en nuestro sistema son r y m , tenemos que la cantidad de puntos críticos depende únicamente del valor m del factor de pérdida de herbívoros, ya que r no aparece en (8.3). De la Figura 8.1 se obtiene que existe un $m_0 \approx 0.1316$ tal que para $m < m_0$ habrá dos puntos de equilibrio más, de los que denotaremos e_3 al de valor de P más bajo y e_4 al otro. Estos dos equilibrios tienen sentido ecológico, en el que no profundizaremos, y que nos lleva a llamar a e_3 equilibrio de dominancia de herbívoros y a e_4 equilibrio de dominancia de plantas. De (8.1), si denotamos $\mathbf{f}(P, H, r, m)$ al lado derecho del sistema (8.1), se deduce que

$$D\mathbf{f}(0, 0, r, m) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix}, \quad D\mathbf{f}(r/C, 0, r, m) = \begin{pmatrix} -r & -g(r/C) \\ 0 & Ee^{-br/C}g(r/C) - m \end{pmatrix}. \quad (8.5)$$

En consecuencia, e_1 es un punto de silla mientras que e_2 es un punto de silla siempre que $Ee^{-br/C}g(r/C) > m$ y es un foco exponencialmente estable si $Ee^{-br/C}g(r/C) < m$.

A continuación, vamos a simular dos situaciones descritas en [26]. Lo primero que hacemos es determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio e_3 y e_4 numéricamente, obteniendo los autovalores del sistema linealizado. Las representaciones gráficas se encuentran en la Figura 8.2. En ambos casos se obtiene que e_3 es un equilibrio exponencialmente estable a lo largo de toda la transición y que e_4 es un punto de silla y, por tanto, es inestable. En definitiva, esto implica que bajo las condiciones externas a las que nos restringimos en las dos transiciones que vamos a simular estará permitida la dominancia (con coexistencia de especies) por parte de los herbívoros pero no por parte de las plantas.

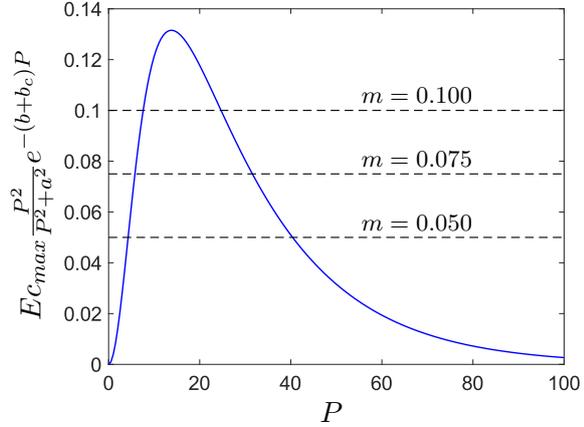


Figura 8.1: Representación de $Ee^{-bP}g(P)$ para los valores recogidos en el Cuadro 8.1. La función tiene un máximo aproximadamente en 13.7880 en el que toma el valor 0.1316, lo que provoca que para valores de m más grandes que dicho valor no haya más puntos de equilibrio que e_1 y e_2 , mientras que cuando m esté por debajo habrá dos puntos de equilibrio.

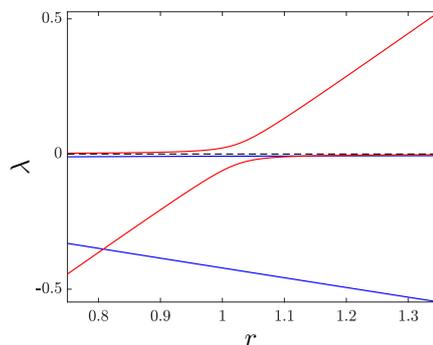
En ambos casos construiremos numéricamente el atractor pullback local que parte del punto de equilibrio e_3 , que es en cierta forma el más ‘natural’ porque es el único punto de equilibrio estable en el que coexisten plantas y herbívoros. Los parámetros que vamos a utilizar para ambas transiciones serán los descritos a continuación:

- I) Consideramos fija $m = 0.075$ y hacemos variar r desde 0.75 hasta 1.35. Con esta simulación se quiere ilustrar el Teorema 4.3.5, observando que para un valor de la velocidad de transición $c = 0.2$ se produce un punto de no retorno hacia el equilibrio estable e_2 de sólo plantas, es decir, se produce la extinción de los herbívoros; mientras que para un valor $c = 0.1$ hay rastreo del equilibrio e_3 , sin riesgo para el ecosistema.
- II) Consideramos fija $r = 0.5$ y hacemos variar m desde 0.12 hasta 0.135. En esta situación, los puntos críticos e_3 y e_4 desaparecerán a partir del valor $m_0 \approx 0.1316$ del parámetro, por lo dicho antes. Con esta simulación se quiere ilustrar de alguna manera el Corolario 4.4.4, es decir, que en este caso la presencia de no retorno a velocidades arbitrariamente bajas se debe a la presencia de puntos de bifurcación en el camino a seguir. En este caso, se fuerza al atractor pullback local que sale de e_3 para velocidad $c = 0.001$ a pasar por el punto de bifurcación en el que desaparecen los equilibrios e_3 y e_4 , ocasionando un punto de no retorno hacia e_2 , es decir, extinguiendo de nuevo los herbívoros de nuestro ecosistema.

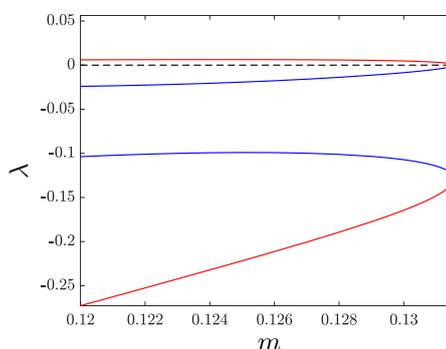
En ambas dos situaciones, para todos los valores del parámetro se cumple la desigualdad $Ee^{-br/C}g(r/C) < m$, luego e_2 es un foco exponencialmente estable. Esto, sumado a los resultados de la Figura 8.2, nos indica que se va a tener que e_1 y e_4 son puntos de silla, mientras que e_2 y e_3 son sendos focos exponencialmente estables. La transición crítica se producirá porque para ciertas velocidades de transición se tendrá que el atractor pullback local que sale de e_3 en el pasado llega a e_2 en vez de al estado de e_3 en el futuro.

Las simulaciones se llevan a cabo siguiendo las mismas indicaciones de integración numérica que se hicieron al principio del Capítulo 6. En la Figura 8.3 se encuentran representados tridimensionalmente los resultados de ambas simulaciones.

Las Figuras 8.4 y 8.5 representan las proyecciones de la anterior representación tridimensio-

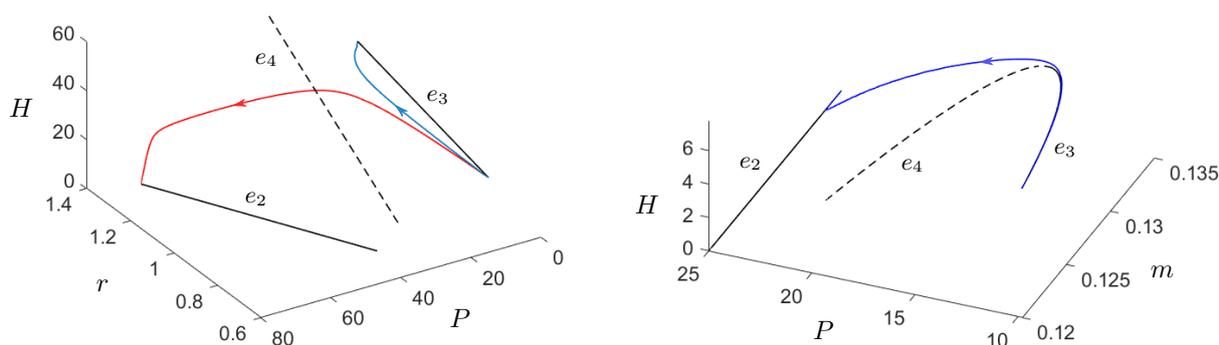


(a) Caso I, $m = 0.075$ fija.



(b) Caso II, $r = 0.5$ fija.

Figura 8.2: Autovalores de Df en los puntos e_3 (azul) y e_4 (rojo) para distintos valores de los parámetros de control según los dos casos I) y II) que se van a tratar. En ambos casos se obtienen autovalores reales, siendo e_3 un foco exponencialmente estable (ambos autovalores por debajo estrictamente que 0) y e_4 un punto de silla (un autovalor por encima y otro por debajo).



(a) Caso I), $m = 0.075$ fija. Se representa el atractor pullback local para velocidades de transición $c = 0.1$ (azul) y $c = 0.2$ (rojo). La curva de menor velocidad rastrea el equilibrio e_3 , mientras que la curva de mayor velocidad tiene un punto de no retorno hacia el equilibrio estable e_2 , la extinción de los herbívoros.

(b) Caso II), $r = 0.5$ fija. Se representa en azul el atractor pullback local para velocidad de transición $c = 0.001$. El sistema atraviesa un punto de bifurcación en el que desaparecen los equilibrios e_3 y e_4 , produciéndose un punto de no retorno hacia el equilibrio estable e_2 , que supone la extinción de la especie de herbívoros.

Figura 8.3: Resultado de la simulación de la transición de los casos I) y II). Los equilibrios estables se representan en línea continua y en discontinua los inestables.

nal para permitir una interpretación más sencilla de los resultados obtenidos. En este ejemplo queda plasmada la importancia de los puntos de no retorno inducidos por la velocidad de la transición, que hasta ahora habían sido tenidos en cuenta en menor medida en muchas ramas de las ciencias aplicadas.

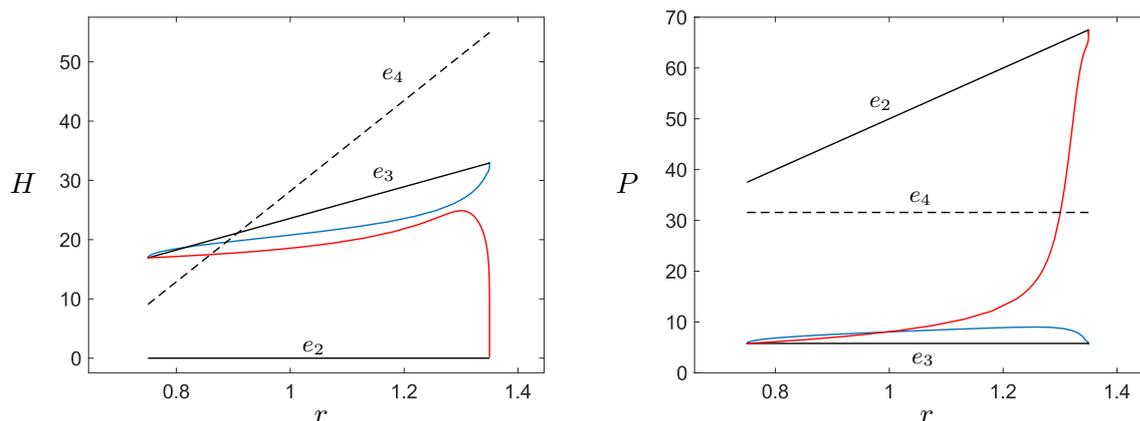


Figura 8.4: Proyecciones de la Figura 8.3a en los planos (r, H) y (r, P) .

El comportamiento observado en el caso I) es, en cierta manera, contraintuitivo, ya que presenta que un aumento demasiado rápido en los recursos disponibles para las plantas puede llevar a la extinción de los herbívoros que de ellas se alimentan mientras que el mismo cambio a menor velocidad no provoca la extinción. Este hecho, bajo la hipótesis de que el modelo

diferencial ha sido adecuadamente validado, nos hace conscientes de la complejidad de la no linealidad en las interacciones de los ecosistemas y, pero a la vez, aporta pistas para su adecuada comprensión, modelado y predicción.

Estos resultados [28], muestran que en ciertas ocasiones la velocidad a la que se producen los cambios medioambientales puede ser más importante que su magnitud. Restringirse al estudio de equilibrios en este tipo de sistemas que evolucionan de forma no autónoma a través de parámetros externos puede resultar en una visión reducida del problema global. La creciente variabilidad de los fenómenos climatológicos que se espera en el próximo siglo aumentan la necesidad de teoría y métodos que sean capaces de tratar con este tipo de fenómenos. Como apunta [3], los avances en estos temas tienen que estar orientados a la comprensión de la complejidad, a la detección precoz de este tipo de fenómenos de no retorno y a la propuesta de formas de revertir las tendencias para evitar el no retorno.

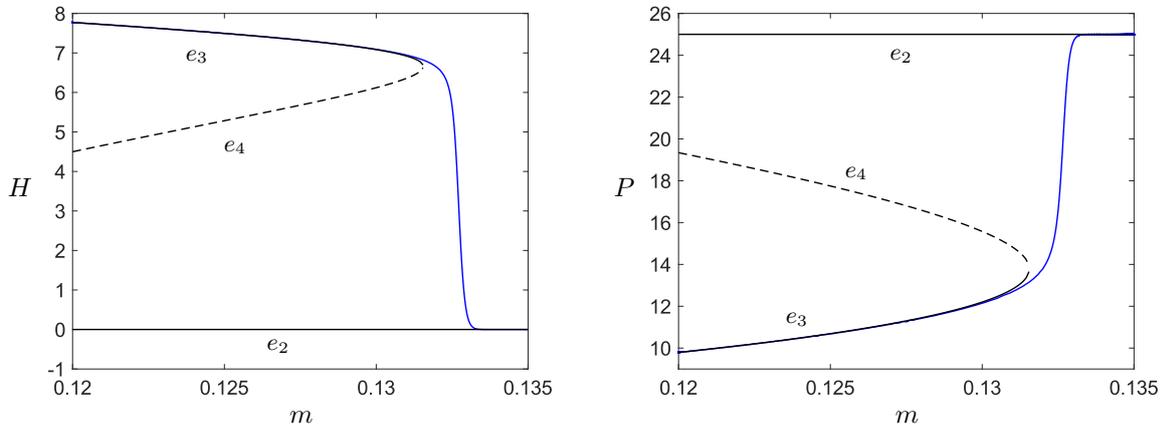


Figura 8.5: Proyecciones de la Figura 8.3b en los planos (m, H) y (m, P) .

8.2. Modelo climatológico de Fraedrich

A continuación, presentamos un modelo climatológico sencillo [3, 11], introducido por Fraedrich. En él observaremos también B-tipping y R-tipping, como en el caso anterior. El modelo se basa en un balance de energías entre energía recibida y expulsada por radiación en nuestro planeta, a través del cual se pretende encontrar una ecuación diferencial que rijan la temperatura en la Tierra. Este modelo considera el albedo terrestre (fracción de la energía que es reflejada de toda la que llega a la superficie) como una función de la temperatura: $a_2 - b_2 T^2$, con dos constantes cuyo significado aportaremos enseguida. Por otro lado, se modela la radiación saliente como un cuerpo negro. La ecuación diferencial resultante es

$$\frac{dT}{dt} = f(T) = a(-T^4 + b_\mu T^2 - d_\mu), \quad (8.6)$$

$$a = \frac{e_{SA}\sigma}{c}, \quad b_\mu = \frac{\mu I_0 b_2}{4e_{SA}\sigma}, \quad d_\mu = -\frac{\mu I_0(1 - a_2)}{4e_{SA}\sigma}, \quad (8.7)$$

donde el significado de las diferentes constantes se recoge en la Tabla 8.2. La cuarta potencia de la temperatura se corresponde con la emisión de cuerpo negro mientras que la segunda

potencia y el término independiente se corresponden con la radiación recibida moderada por el albedo.

	Significado	Valor	Unidades
c	Capacidad calorífica por m^2 de superficie de una capa oceánica de 30 metros de profundidad	10^8	$Kg K^{-1}s^{-2}$
I_0	Constante solar, potencia por unidad de superficie	1366	Wm^{-2}
σ	Constante de Stefan-Boltzmann	$5.6704 \cdot 10^{-8}$	$Wm^{-2}K^{-4}$
μ	Parámetro de configuración de la órbita planetaria	1	adimensional
e_{SA}	Emisividad efectiva de cuerpo negro terrestre	0.62	adimensional
b_2	Parámetro de relación albedo-temperatura	$1.690 \cdot 10^{-5}$	K^{-2}
a_2	Parámetro de magnitud del albedo	1.6927	adimensional

Cuadro 8.2: Constantes y unidades del problema [3]

Se van a estudiar fenómenos de no retorno sometiendo al sistema a variación de dos factores externos: el albedo y la configuración de la órbita planetaria. La propuesta de Fraedrich considera que las constantes del albedo que se han utilizado dependen fuertemente de la cantidad de hielo en las superficies oceánicas terrestres. Por tanto, es interesante estudiar transiciones entre distintos valores de los parámetros del albedo, ya que se trata de la hipotética evolución de la temperatura media terrestre ante variaciones en la cantidad de hielo en nuestro planeta. Por otro lado, observaremos que pequeños cambios en la configuración de la órbita terrestre podrían conducir irremediablemente a la congelación del mismo.

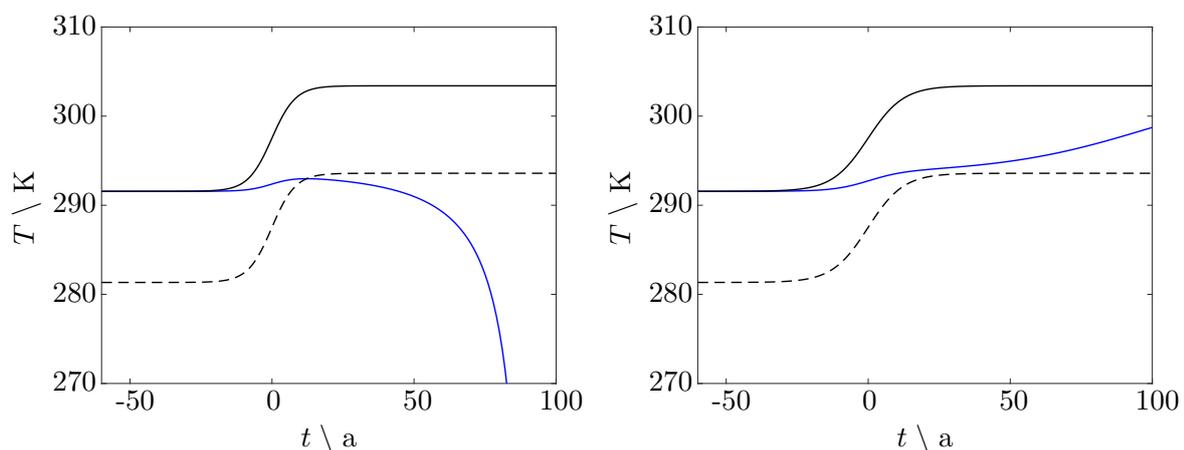


Figura 8.6: Atractor pullback local (azul) para el sistema (8.11) con función de transición (8.10). A la izquierda se encuentra un punto de no retorno a una velocidad de $c = 0.12 a^{-1}$, mientras que a la derecha se tiene rastreo de los puntos finales para una velocidad de $c = 0.08 a^{-1}$. En línea continua (negro) el equilibrio estable correspondiente a T_1 y en discontinua (negro) el de T_2 , inestable. El tiempo en el eje de abscisas está medido en años.

En primer lugar, estudiamos los puntos críticos de (8.6). Como sólo nos interesan los puntos críticos de temperatura positiva (ya que estamos trabajando en escala kelvin, no hay posibilidad

física de temperatura negativa) nos quedamos con

$$T_1 = \sqrt{\frac{b_\mu}{2} + \sqrt{\left(\frac{b_\mu}{2}\right)^2 - d_\mu}}, \quad T_2 = \sqrt{\frac{b_\mu}{2} - \sqrt{\left(\frac{b_\mu}{2}\right)^2 - d_\mu}}. \quad (8.8)$$

Para que la raíz cuadrada interna tenga argumento mayor o igual que cero, es decir, para que al menos exista el equilibrio de temperatura T_1 , ha de verificarse que

$$(a_2 - 1)16e_{SA}\sigma \leq \mu I_0 b_2^2. \quad (8.9)$$

Por otro lado, una vez verificada esa ecuación, para que exista el segundo equilibrio ha de cumplirse también que $a_2 \geq 1$, relación que asumiremos que se cumple siempre. Para estos equilibrios a temperaturas positivas se tiene que el signo de $f'(T)$ es el mismo que el de $b_\mu - 2T^2$, es decir, que T_1 es un equilibrio exponencialmente estable mientras que T_2 es un equilibrio exponencialmente inestable. Además, cualquier modificación de parámetros que haga que se invierta la desigualdad (8.9) hará que el sistema atraviese un punto de bifurcación tangencial (*fold* o *saddle-node*) en el cual los dos puntos críticos se aniquilen mutuamente.

Vamos a estudiar dos transiciones distintas:

- 1) Consideramos influencia externa en el sistema a través de los parámetros de albedo. Con este ejemplo se quiere ilustrar la posibilidad de existencia de no retorno por velocidad de transición. Para ello, consideramos otro parámetro λ que unifique la variación de los parámetros que modelan el albedo b_2 y a_2 . Se considera entonces que el parámetro b_2 va a variar entre $b_2^0 = 1.690 \cdot 10^{-5}$ y $b_2^f = 1.8350 \cdot 10^{-5}$, escribiendo que

$$b_2(\lambda) = (1 - \lambda)b_2^0 + \lambda b_2^f.$$

Ahora, como queremos mantenernos alejados de posibles bifurcaciones, elegimos el valor de a_2 de forma que mantenga constante la diferencia entre los dos lados de la desigualdad (8.9), de forma que, si tiene valor inicial $a_2^0 = 1.6927$,

$$a_2(\lambda) = a_2^0 + \frac{\mu I}{16e_{SA}\sigma} ((b_2(\lambda))^2 - (b_2^0)^2).$$

Definiendo la misma función de transición que veníamos utilizando,

$$\Lambda(s) = \frac{1}{2} (\tanh(s) + 1), \quad (8.10)$$

y el sistema autónomo (8.6) sobre el que se introduce la transición como

$$\frac{dT}{dt} = f(T, \lambda) = a(-T^4 + b_\mu(\lambda)T^2 - d_\mu(\lambda)), \quad (8.11)$$

$$a = \frac{e_{SA}\sigma}{c}, \quad b_\mu(\lambda) = \frac{\mu I_0 b_2(\lambda)}{4e_{SA}\sigma}, \quad d_\mu(\lambda) = -\frac{\mu I_0 (1 - a_2(\lambda))}{4e_{SA}\sigma},$$

se realiza el experimento numérico utilizando el mismo procedimiento que se siguió en el Capítulo 6, obteniendo los resultados de la Figura 8.6. Dependiendo de la velocidad de la transición se encuentran un punto de no retorno o no.

ii) En este segundo caso buscamos presentar un fenómeno de tipo B-tipping, es decir, que el punto de no retorno se produzca por la presencia de una bifurcación en el camino a seguir. Por el análisis hecho en torno a (8.9), bastará hacer que los parámetros del sistema atraviesen dicha igualdad para conseguir una bifurcación de tipo *saddle-node*. Como se mencionó antes, esto se llevará a cabo a través de la variación del parámetro de configuración de la órbita terrestre. Consideramos entonces fijos los valores de albedo b_2 y a_2 que se dan en la Tabla 8.2. La igualdad en (8.9) se alcanza para el valor crítico de μ dado por

$$\mu_c = \frac{(a_2 - 1)16e_{SA}\sigma}{I_0 b_2^2} \approx 0.9987262.$$

En consecuencia, si elegimos $\mu_1 = 0.9988$ y $\mu_2 = 0.9987$ habremos atravesado la bifurcación en el transcurso de la transición entre esos dos valores. Definimos la función de transición

$$\Lambda(s) = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1) \frac{\tanh(s) + 1}{2}, \quad (8.12)$$

y, en consecuencia, la ecuación diferencial ordinaria (8.6) a la que se aplica la transición (8.12) de la ecuación anterior es

$$\frac{dT}{dt} = f(T, \mu) = a(-T^4 + b_\mu T^2 - d_\mu), \quad (8.13)$$

donde los valores de las distintas constantes involucradas siguen siendo los mismos presentados en la expresión (8.7). El resultado del experimento numérico se encuentra representado en la Figura 8.7, realizado con los mismos criterios que previamente. Se ha elegido una velocidad de transición muy baja, de $c = 0.00001 \text{ a}^{-1}$, para manifestar de forma efectiva que el no retorno se produce por el paso por el punto de bifurcación. Esto hace que la ventana de la representación tenga un amplio rango de 20.000 de años.

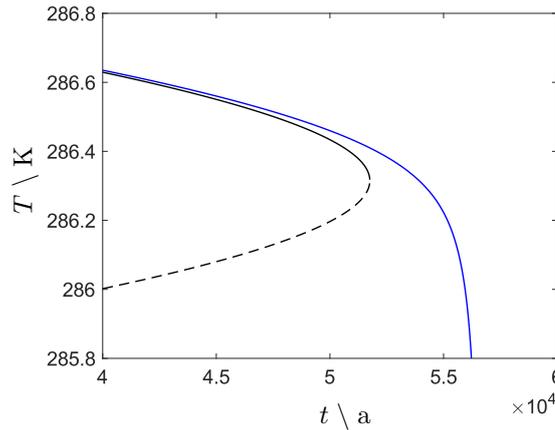


Figura 8.7: Atractor pullback local (azul) para el sistema (8.13) con función de transición (8.12). Se utiliza velocidad de transición $c = 0.00001 \text{ a}^{-1}$, observándose un punto de no retorno al presentarse el punto de bifurcación de tipo *saddle-node* de la pareja de equilibrios considerados. En línea continua (negro) el equilibrio estable correspondiente a T_1 y en discontinua (negro) el de T_2 , inestable. El tiempo en el eje de abscisas está medido en años y, teniendo en cuenta el multiplicador, cada marca en el eje se corresponde con 5000 años.

Las simulaciones numéricas hechas con este modelo encuentran puntos de no retorno debidos a dos causas distintas: exceso de velocidad de transición, es decir, que las variaciones en la cantidad de hielo terrestre que condicionan el albedo sean demasiado rápidas; y paso del sistema por un punto de bifurcación, es decir, variación del parámetro de configuración orbital hacia un valor del parámetro que inestabiliza el comportamiento del sistema.

En ambos casos el punto de no retorno supone el comienzo de una disminución irreversible de la temperatura terrestre que conduce a la congelación del planeta y, por ende, al fin de la vida en la Tierra. Esta situación pone de manifiesto la complejidad de los sistemas que tenemos a nuestro alrededor, incluso cuando los modelamos de forma sencilla. Las causas de un comportamiento determinado en un sistema complejo pueden ser diversas y son difíciles de estudiar, por lo que es razonable pensar que no conviene sacar conclusiones apresuradas. A la vez, el estudio de este tipo de fenómenos desde una perspectiva tanto teórica como aplicada puede aportar mucha información sobre las causas que provocan la complejidad, pudiéndonos acercar cada vez más a poder proporcionar herramientas eficaces para la detección temprana de este tipo de catástrofes, y también de herramientas capaces de revertir las tendencias observadas hacia los equilibrios estables deseados.

Bibliografía

- [1] H. Alkhayuon, R. C. Tyson, S. Wieczorek. Phase-sensitive tipping: How cyclic ecosystems respond to contemporary climate. arXiv:2101.12107 (2021).
- [2] P. Ashwin, C. Perryman, S. Wieczorek. Parameter shifts for nonautonomous systems in low dimension: bifurcation- and rate-induced tipping. *Nonlinearity*, **30**, 6 (2017), 2185–2210.
- [3] P. Ashwin, S. Wieczorek, R. Vitolo, P. Cox. Tipping points in open systems: bifurcation, noise-induced and rate-dependent examples in the climate system. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, **370** (2012), 1166–1184.
- [4] E. A. Coddington, N. Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill, New York, 1955.
- [5] C. Conley. *Isolated Invariant Sets and the Morse Index*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics no. 38, Amer Math Soc, Providence, Rhode Island, 1978.
- [6] C. Conley. The gradient structure of a flow. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **8** (1988), 11–26.
- [7] W. A. Coppel. *Stability and Asymptotic Behaviour of Differential Equations*. Heath, Boston, 1965.
- [8] W. A. Coppel. *Dichotomies in Stability Theory*. Springer, Berlin Heidelberg, 1978.
- [9] N. Dunford, J. T. Schwartz. *Linear operators. Part I, General theory*. Interscience, New York, 1958.
- [10] A. M. Fink. *Almost Periodic Differential Equations*. Springer, Berlin Heidelberg, 1974.
- [11] K. Fraedrich. Catastrophes and resilience of a zero-dimensional climate system with ice-albedo and greenhouse effect feedback. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, **105** (1979), 147–167.
- [12] J. E. Franke, J. F. Selgrade. Abstract ω -limit sets, chain recurrent sets, and basic sets for flows. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **60**, 1 (1976), 309–316.
- [13] M. Gladwell. *The Tipping Point: How Little Things Can Make a Big Difference*. Little Brown, Boston, New York, London, 2000.
- [14] M. Hartl. *Non-autonomous Random Dynamical Systems: Stochastic Approximation and Rate-Induced Tipping*. PhD thesis, Imperial College London, 2019.

- [15] A. Katok, B. Hasselblott. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [16] C. Kiers. *Rate-induced tipping in applied dynamical systems: multi-dimensional flows and maps*. PhD thesis, University of North Carolina at Chapel Hill, 2020.
- [17] C. Kiers. Rate-induced tipping in discrete-time dynamical systems. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, **19**, 2 (2020), 1200-1224.
- [18] C. Kiers, C. K. Jones. On conditions for rate-induced tipping in multi-dimensional dynamical systems. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **32** (2020), 483-503.
- [19] P. Kloeden, M. Rasmussen. *Nonautonomous Dynamical Systems*. American Mathematical Society, 2010.
- [20] Y. A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer, New York, 2004.
- [21] I. P. Longo, S. Novo, R. Obaya. Topologies of L_{loc}^p type for Carathéodory functions with applications in non-autonomous differential equations. *Journal of Differential Equations*, **263**, 11 (2017), 7187-7220.
- [22] I. P. Longo, C. Núñez, R. Obaya. Rate-induced tipping in a piecewise uniformly continuous transition of nonautonomous quadratic ordinary differential equation. Preprint Universidad de Valladolid (2021).
- [23] I. P. Longo, C. Núñez, R. Obaya, M. Rasmussen. Rate-induced tipping and saddle-node bifurcation for quadratic differential equations with nonautonomous asymptotic dynamics. *SIAM Journal of Applied Dynamical Systems*, **20**, 1 (2020), 500-540.
- [24] I. P. Longo, S. Novo, R. Obaya. Weak topologies for Carathéodory differential equations: Continuous dependence, exponential dichotomy and attractors. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **31**, 1 (2019).
- [25] K. Mischaikow, H. Smith, H. R. Thieme. Asymptotically autonomous semiflows: Chain recurrence and Lyapunov functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, **347**, 5 (1995), 1669-1685.
- [26] P. O’Keeffe, S. Wiczorek. Tipping phenomena and points of no return in ecosystems: Beyond classical bifurcations. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, **19**, 4 (2020), 2371-2402.
- [27] L. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer, New York, 2001.
- [28] M. Scheffer, E. H. van Nes, M. Holmgren, T. Hughes. Pulse-driven loss of top-down control: The critical-rate hypothesis. *Ecosystems*, **11** (2008), 226–237.
- [29] M. Scheffer. *Critical Transitions in Nature and Society*. Princeton University Press, Princeton, 2009.
- [30] D. Sornette. Predictability of catastrophic events: Material rupture, earthquakes, turbulence, financial crashes, and human birth. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **99**, 1 (2002), 2522-2529.