



**Universidad de Valladolid**

Facultad de Ciencias

## **Trabajo Fin de Máster**

Máster en Matemáticas

**Herramientas homológicas y combinatorias para el estudio de  
semigrupos numéricos**

*Autor: Pablo Hervás García*

*Tutor/es: Philippe Thierry Giménez*

# Índice general

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introducción</b>  | <b>3</b>  |
| <b>1. Preliminares</b>   | <b>4</b>  |
| 1.1. Semigrupos numéricos  | 4         |
| 1.1.1. Definición y primeras propiedades                                     | 4         |
| 1.1.2. “Paso al proyectivo”  | 7         |
| 1.2. Nociones de Álgebra Conmutativa, Homológica y Combinatoria              | 9         |
| 1.2.1. Lema de Nakayama  | 10        |
| 1.2.2. Módulos libres y proyectivos. Resoluciones                            | 10        |
| 1.2.3. Functor Tor   | 11        |
| 1.2.4. Profundidad, Teorema de Auslander-Buchbaum y anillos Cohen-Macaulay   | 12        |
| 1.2.5. Complejo de Koszul  | 13        |
| 1.2.6. Complejos simpliciales abstractos                                     | 13        |
| <b>2. Homología de semigrupos</b>  | <b>16</b> |
| 2.1. Curvas monomiales: anillos, ideales y resoluciones                      | 16        |
| 2.2. Curvas monomiales: paso al caso proyectivo                              | 18        |
| 2.3. Complejos simpliciales asociados a un semigrupo                         | 21        |
| 2.4. El grafo de Apéry   | 23        |
| <b>3. Prueba de Vu para la Conjetura de Herzog-Srinivasan</b>                | <b>25</b> |
| 3.1. Introducción  | 25        |
| 3.1.1. La conjetura  | 25        |
| 3.1.2. La idea   | 25        |
| 3.2. Preliminares técnicos   | 26        |
| 3.2.1. Sobre los casos triviales   | 26        |
| 3.2.2. El ideal $J(a)$   | 26        |
| 3.2.3. Notación  | 27        |
| 3.2.4. Algunas desigualdades   | 28        |
| 3.2.5. Representación de un elemento   | 28        |
| 3.2.6. Significado de la cota con la regularidad                             | 28        |
| 3.3. Estructura de “doble-cono”  | 29        |
| 3.4. Periodicidad de los números de Betti para curvas monomiales proyectivas | 35        |
| 3.5. Periodicidad de los números de Betti para curvas monomiales afines      | 43        |
| 3.6. Perspectivas  | 48        |
| <b>A. Material adicional</b>   | <b>49</b> |
| A.1. Código en Singular utilizado para el cálculo los números de Betti       | 49        |
| A.2. Ejemplos  | 50        |
| A.2.1. Ejemplo 1   | 51        |
| A.2.2. Ejemplo 2   | 52        |
| A.2.3. Ejemplo 3   | 53        |

# Introducción

Un semigrupo numérico es, simplemente, el conjunto de números naturales<sup>1</sup>

$$S = (a_1, \dots, a_n) = \{u_1 a_1 + \dots + u_n a_n : u_1, \dots, u_n \in \mathbb{N}\}$$

que podemos obtener mediante la suma sucesiva de un conjunto de generadores  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ .

Los semigrupos numéricos han recibido considerable atención desde finales de siglo XX, hasta el punto de escribirse varios tratados dedicados exclusivamente a ellos [RGS09] [ADGS20]. Es un campo con múltiples conexiones a otras áreas de las Matemáticas, y en el que todavía queda mucho por hacer. Por poner un ejemplo: durante un seminario impartido el pasado mes de abril, el profesor Antonio Campillo mencionó el siguiente problema abierto

Sea  $\bar{S}$  el subsemigrupo de  $\mathbb{N}^2$  asociado a  $S$ . ¿Bajo que condiciones en  $S$  ocurre que  $K[\bar{S}]$  es Cohen-Macaulay?

En esta línea, merece la pena mencionar que este tema de los semigrupos está muy arraigado en esta misma Universidad: varios miembros del equipo SINGACOM han publicado numerosos artículos sobre semigrupos numéricos (véanse [CM91, CG97, MLLPC98, BCMP98], o, más recientemente, [BGMMC21]).

Por nuestra parte, en este Trabajo de Fin de Máster recogeremos algunos de las herramientas clásicas de Álgebra Homológica y de Álgebra Combinatoria que han sido desarrolladas a lo largo de los años para el estudio de estos semigrupos. En particular, demostraremos un resultado de periodicidad sobre los números de Betti de  $K[S_j]$ , donde

$$S_j = (a_1 + j, \dots, a_n + j), \quad j = 0, 1, \dots$$

cuando  $j$  es suficientemente grande. Este resultado fue probado por Thanh Quang Vu como parte de su tesis doctoral [Vu14].

La estructura de esta memoria es la siguiente:

- Para comenzar, en el Capítulo 1 presentando algunas definiciones y resultados básicos sobre semigrupos. Tras ellos, introducimos la maquinaria de Álgebra Homológica y de Álgebra Combinatoria que vamos a necesitar en el resto de la memoria.
- A continuación, en el Capítulo 2 entramos de lleno en materia: dado un semigrupo  $S$  con sistema de generadores fijado, mostramos como los números de Betti de  $K[S]$  están relacionados con la homología de ciertos complejos simpliciales abstractos  $\Delta_m$ . También consideramos otro punto de vista basado en grafos coloreados.
- Finalmente, en el Capítulo 3 exponemos y detallamos la prueba de Vu. Aquí es donde todo el trabajo realizado anteriormente se sintetiza en un resultado concreto.

---

<sup>1</sup>Aunque pueda ser tema de disputa en la cafetería, aquí (en este Trabajo de Fin de Máster) siempre se considerará el 0 como un número natural.

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Semigrupos numéricos

En esta primera sección presentamos los dos objetos principales de estudio: los semigrupos afines  $S$  y su correspondiente “versión proyectiva”  $\bar{S}$ . Demostraremos algunas propiedades básicas de estos dos objetos.

#### 1.1.1. Definición y primeras propiedades

Recordemos que un *monoide* es un grupo  $(G, +)$  al que no se le exige la existencia de inversos aditivos. Si además tampoco se exige la existencia de elemento neutro, la estructura algebraica resultante es un *semigrupo*.

Nos interesaremos en general por los submonoides de  $\mathbb{N}$ . En particular, cabe resaltar una clase muy especial de submonoide, los *semigrupos numéricos*:

**Definición 1.1.** Un submonoide (aditivo)  $S$  de  $\mathbb{N}$  es un subconjunto de los números naturales verificando:

- $0 \in S$  (existencia del elemento neutro),
- para todo  $x, y \in S$ ,  $x + y \in S$  (clausura bajo la suma).

Si además se verifica la condición

- $|\mathbb{N} \setminus S| < \infty$  (complemento finito),

decimos que  $S$  es un semigrupo numérico.

El modo más natural de explicitar un submonoide de  $\mathbb{N}$  (o de cualquier otro monoide) consiste en proporcionar un sistema de generadores. Denotamos por  $(\mathbf{a})$  al submonoide de  $\mathbb{N}$  formado por todas las combinaciones lineales con coeficientes no negativos de elementos de  $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}$ :

$$(\mathbf{a}) = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle = \{u_1 a_1 + u_2 a_2 + \dots + u_n a_n : u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{N}\}.$$

Cuando tratemos con un sistema de generadores  $\mathbf{a}$ , establecemos por convenio que siempre  $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$ . Esto permite interpretarlo también como un vector  $(a_1, \dots, a_n)$  sin riesgo de confusión (y con esta notación nos referimos tan solo a  $\mathbf{a}$ , no al submonoide  $(\mathbf{a})$ ). El conjunto de los índices de  $\mathbf{a}$  lo denotamos por  $\Lambda = \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Notación 1.2.** Dado un elemento  $x \in \langle \mathbf{a} \rangle$ , cuando decimos “tomamos una c.l. [combinación lineal] para  $x$ ” nos referimos a que tomamos una expresión de la forma

$$\begin{aligned} x &= u_1 a_1 + \dots + u_n a_n \\ &= (u_1, \dots, u_n) \cdot (a_1, \dots, a_n) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{a}, \end{aligned}$$

Aquí se entenderá que  $u_1, \dots, u_n$  son enteros no negativos, salvo que se indique específicamente lo contrario. En este contexto, denotamos

$$\text{supp } \mathbf{u} = \{i: u_i \neq 0\},$$

el conjunto de índices con coeficiente estrictamente positivos.

**Notación 1.3.** Si  $j$  un entero positivo, denotamos

$$\mathbf{a} + j = \{a_1 + j, a_2 + j, \dots, a_n + j\},$$

y si  $d$  un natural tal que  $d \mid a_1, \dots, a_n$ , denotamos

$$\mathbf{a}/d = \{a_1/d, a_2/d, \dots, a_n/d\}.$$

Dado un submonoide cualquiera  $S$ , decimos que un elemento no nulo  $z \in S \setminus \{0\}$  es *irreducible* si verifica

$$x + y = z, \quad x, y \in S \implies x = 0 \text{ o } y = 0.$$

Notemos que los elementos irreducibles de  $S$  deben figurar en cualquier sistema de generadores de este submonoide. Cuando trabajamos en  $\mathbb{N}$ , la siguiente Proposición nos permite decir aún más:

**Proposición 1.4.** *El conjunto de elementos irreducibles de un submonoide de  $\mathbb{N}$  es finito. En particular, todo submonoide de  $\mathbb{N}$  es finitamente generado: los elementos irreducibles forman el único sistema minimal de generadores.*

**Demostración.** Sea  $S$  nuestro submonoide de  $\mathbb{N}$ . Bastará probar que el conjunto de elementos irreducibles es finito y genera  $S$ .

Llamamos  $a_1$  el menor elemento de  $S \setminus \{0\}$ . Obviamente,  $a_1$  es irreducible. Si  $a_1 = 1$ , entonces  $S = \mathbb{N}$  y el resultado es obvio. De lo contrario,  $S \setminus \langle a_1 \rangle$  es no vacío, y podemos tomar el siguiente elemento más pequeño  $a_2$  que no está generado por  $a_1$ . También es claro que  $a_2$  es irreducible.

El procedimiento recursivo se repite, proporcionando en cada paso  $i$  el siguiente menor elemento irreducible  $a_i$  del submonoide.

Decir que existe una cantidad finita de elementos irreducibles equivale a decir que en algún momento encontramos un  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $S \setminus \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle = \emptyset$ . Si ocurriera esto, es evidente que los elementos irreducibles  $a_1, a_2, \dots, a_n$  generarían  $S$ . Lo único que falta probar pues es que existe tal  $n$ .

Sean  $r_2, r_3, \dots$  los restos de dividir cada  $a_2, a_3, \dots$  entre  $a_1$ . Si alguno de ellos se anulara,  $r_i = 0$ , entonces  $a_i \in \langle a_1 \rangle$ , lo que contradice la irreducibilidad de  $a_i$ , absurdo. Si hubiera dos restos iguales,  $r_i = r_j$  con  $i < j$ , podríamos escribir

$$\begin{aligned} a_i &= q_i a_1 + r_i \\ a_j &= q_j a_1 + r_j \end{aligned}$$

y restando,  $a_j = a_i + (q_j - q_i)a_1 + (r_j - r_i) = a_i + (q_j - q_i)a_1$ . Esto contradice la irreducibilidad de  $a_j$ , absurdo.

Concluimos pues que todos los restos son distintos y verificando  $1 \leq r_i \leq a_1 - 1$ . Por tanto, solo puede haber a lo sumo  $a_1 - 1$  elementos irreducibles. En particular, esta cantidad es finita.  $\square$

Como vemos, todos los submonoides de  $\mathbb{N}$  tienen la forma  $\langle \mathbf{a} \rangle$ , para cierto sistema de generadores  $\mathbf{a}$ . Notemos que el sistema de generadores con el que trabajemos no tiene porqué ser minimal (y, de hecho, a veces no será apropiado “minimalizarlo”).

Antes de continuar, es interesante arrojar algo de luz sobre el significado de la condición de “complemento finito” que exigíamos a los semigrupos numérico.

**Proposición 1.5.** *Un submonoide  $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  es un semigrupo numérico si y solo si*

$$\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1.$$

**Demostración.** Sea  $d = \gcd(a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Todos los elementos de  $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  son múltiplos de  $d$ , por lo que la condición de complemento finito solo es posible de verificar cuando  $d = 1$ . Veamos que esta condición también es suficiente.

Debemos probar que existe un  $M \in \mathbb{N}$  tal que  $m \in \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  para todo  $m \geq M$ . Si estamos en el caso trivial  $a_1 = 1$ , el resultado es obvio. En otro caso, primero veremos que existe un elemento  $s \in \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  de modo que  $s \equiv 1 \pmod{a_1}$ .

Consideramos una identidad de Bezout constituida por los generadores,

$$1 = u_1 a_1 + u_2 a_2 + \dots + u_n a_n, \quad u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{Z}.$$

Para cualquier  $i = 2, \dots, n$ , notemos que es posible realizar la siguiente sustitución

$$\begin{aligned} u_1 &\rightarrow u_1 - a_i = u'_1, \\ u_i &\rightarrow u_i + a_1 = u'_i, \end{aligned}$$

sin que cambie la suma del lado derecho. Denotamos por  $u_i$  a los nuevos  $u'_i$ , y realizamos esta operación hasta lograr una expresión como la anterior, pero en la que además  $u_1 \leq 0$  y  $u_2, \dots, u_n \geq 0$ . Entonces definimos  $s$  como

$$s = 1 - u_1 a_1 = u_2 a_2 + \dots + u_n a_n, \quad (-u_1), u_2, \dots, u_n \in \mathbb{N},$$

este elemento pertenece al submonoide y cumple la propiedad que se pedía.

Una vez obtenido  $s$ , tomamos  $M = (a_1 - 1)s$ . Sea  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq M$ . Realizamos la división euclídea

$$m = qa_1 + r, \quad q, r \in \mathbb{N}, 0 \leq r \leq a_1 - 1.$$

Es fácil ver que  $m \geq rs$  y que  $a_1 \mid (m - rs)$ . Esto nos permite escribir

$$m = [(m - rs)/a_1]a_1 + rs,$$

lo que prueba que  $m \in \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ . □

**Observación 1.6.** Supongamos que  $\langle \mathbf{a} \rangle = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$  es un submonoide de  $\mathbb{N}$  pero no es un semigrupo numérico, es decir,  $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) = d > 1$ . Al dividir,  $\gcd(a_1/d, \dots, a_n/d) = 1$ , por lo que  $\langle \mathbf{a}/d \rangle = \langle a_1/d, \dots, a_n/d \rangle$  sí es un semigrupo numérico.

De hecho, la operación de dividir entre  $d$  proporciona un isomorfismo entre el submonoide original  $\langle \mathbf{a} \rangle$  y el semigrupo numérico  $\langle \mathbf{a}/d \rangle$ . Esto nos dice que, en cuanto a la estructura como submonoide de  $\mathbb{N}$  se refiere, imponer la condición de complemento finito no resta generalidad.

Lo que sí nos dice la condición de complemento finito es que la estructura de cualquier semigrupo numérico es trivial a partir de cierto punto.

Sea  $S$  un semigrupo numérico. Llamamos *número de Frobenius* y denotamos por  $F$  al mayor natural de  $\mathbb{N} \setminus S$ . Este es el único natural de  $\mathbb{N} \setminus S$  que verifica  $F + (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \subset S$ . En particular, tenemos  $F + (S \setminus \{0\}) \subset S$ . A los naturales de  $\mathbb{N} \setminus S$  que verifican esta segunda condición

más débil los llamamos *pseudo-números de Frobenius*. También definimos el *conductor* de  $S$ , el menor natural  $c \in S$  tal que  $n \in S$  para todo  $n \geq c$ . En realidad,  $c = F + 1$ , pero conviene tener nombres para ambos. Estos dos elementos  $c$  y  $F$  marcan la frontera entre la parte no trivial y la parte trivial del semigrupo numérico.

Por supuesto, esta “trivialidad a partir de cierto punto” se extiende a los submonoides de  $\mathbb{N}$ , a raíz de la Observación anterior. Todas estas reflexiones vienen recogidas, con cierto “twist”, en la siguiente Proposición. Si bien no aporta mucho por si sola, la enunciamos para establecer un paralelismo con la siguiente sección.

**Proposición 1.7.** *Sea  $S = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  un submonoide de  $\mathbb{N}$  con  $d = \gcd(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , y sea  $c$  el conductor del semigrupo numérico asociado  $\langle a_1/d, a_2/d, \dots, a_n/d \rangle$ . En estas condiciones, si llamamos  $M = d(c + 1)$ , tenemos que:*

- para todo  $m \in \mathbb{N}$  con  $m \geq M$  se verifica  $m \in S \iff m - d \in S$ .

**Demostración.** Obvio para semigrupos numéricos ( $d = 1$ ). El caso general prosigue por la Observación anterior.  $\square$

Los submonoides de  $\mathbb{N}$  son estructuras combinatorias con definición extremadamente simple. De un modo paralelo a la Teoría de Números, esta simplicidad de las definiciones es traicionera, existe una gran complejidad subyacente. Por tanto, para realizar un estudio efectivo, debemos introducir nomenclatura y estructura adicional.

En ese sentido, y para terminar este apartado, nos planteamos una pregunta inocente: dado un natural arbitrario, ¿cómo saber si pertenece o no al semigrupo numérico?. Este problema se resuelva de forma eficiente una vez conocemos el llamado *conjunto de Apéry*:

**Definición 1.8.** Sea  $S$  un semigrupo numérico. Fijado  $s \in S \setminus \{0\}$ , consideramos para  $0 \leq i \leq s-1$  el menor  $w_i \in S$  que es congruente con  $i$  módulo  $s$ . El conjunto  $\text{Ap}_s = \{w_1, w_2, \dots, w_{s-1}\}$  se denomina conjunto de Apéry de  $S$  (con respecto a  $s$ ). Se suele tomar como  $s$  el menor elemento no nulo del semigrupo numérico, es decir,  $s = a_1$ . En ese caso, el conjunto de Apéry resultante se denomina base estándar de  $S$ .

De esta forma, el problema de pertenencia es inmediato: dado  $m \in \mathbb{N}$ , calculamos el  $0 \leq i \leq s-1$  tal que  $m \equiv i \pmod{s}$ . Hecho esto, resulta que  $m \in S \iff m \geq w_i$ .

El conjunto de Apéry, al igual que el sistema minimal de generadores, codifica toda la información del semigrupo numérico. Ver el semigrupo numérico desde distintos puntos de vista será la idea clave para obtener resultados profundos más adelante.

### 1.1.2. “Paso al proyectivo”

Sea  $S$  un submonoide de  $\mathbb{N}$  y sea  $\mathbf{a} = \{0, a_1, \dots, a_n\}$  un sistema de generadores de  $S$ . Si fijamos  $\mathbf{a}$ , le podemos asociar a  $S$  un nuevo semigrupo  $\bar{S}$  definido como

$$\bar{S} = (\bar{\mathbf{a}}) = \langle (k - 0, 0), (k - a_1, a_1), \dots, (k - a_n, a_n) \rangle \subset \mathbb{N}^2,$$

donde  $k = a_n$ . Es importante notar que aquí estamos generando un semigrupo, no un monoide. Es decir, no se permite que todos los coeficientes sean simultáneamente nulos en las combinaciones lineales. A efectos prácticos, esto significa que  $(0, 0) \notin \bar{S}$ .

**Nota 1.9.** Como veremos en la Sección 2.2, considerar  $S$  o  $\bar{S}$  se puede interpretar como fijarnos en la versión afín o proyectiva de una misma curva monomial. De ahí el título de este apartado.

De momento, nos limitaremos a comentar que si proyectamos  $\bar{S}$  sobre el eje  $y$  volvemos a obtener el submonoide original  $S = S_y$ . Sin embargo, si proyectamos sobre el eje  $x$ , obtenemos

otro submonoide  $S_x$ , que será en general distinto. Obviamente,  $k - \mathbf{a} = \{k, k - a_1, \dots, k - a_{n-1}, 0\}$  es un sistema de generadores de  $S_x$ . A los elementos  $k - a_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  los denotaremos por  $b_i$ . En particular,  $b_n = 0$ .

Por supuesto, los tres semigrupos están determinados de forma única por la elección de  $\mathbf{a}$ , así que ninguno aporta nueva información. Aún así, muchas veces es más sencillo trabajar con uno o con otro.

**Observación 1.10.** Como  $\gcd(a_1, \dots, a_{n-1}, k) = \gcd(k - a_1, \dots, k - a_{n-1}, k)$ ,  $S_x$  es un semigrupo numérico si y solo si  $S_y$  lo es. Esto justifica también como legítimo considerar un nuevo semigrupo

$$\begin{aligned} \bar{S}/d &= \{(x/d, y/d) : (x, y) \in \bar{S}\} \\ &= (\overline{\mathbf{a}/d}). \end{aligned}$$

Una primera idea fundamental consiste en trasladar las c.l. entre  $\bar{S}$  y  $S_x$  o  $S_y$ . Sea  $(x, y) \in \bar{S}$ . Si tomamos una c.l. para  $(x, y)$ ,

$$u_0(k, 0), u_1(k - a_1, a_1) + \dots + u_{n-1}(a_1, k - a_1) + u_n(0, k) = (x, y),$$

obtenemos una c.l. en  $S_x$  y a otra en  $S_y$ :

$$\begin{aligned} u_0k + u_1(k - a_1) + \dots + u_{n-1}(k - a_{n-1}) &= x, \\ u_1a_1 + \dots + u_{n-1}a_{n-1} + u_na_n &= y. \end{aligned}$$

En particular  $x \in S_x$ ,  $y \in S_y$ . De igual modo se ve que para todo elemento  $x_0 \in S_x$  (respectivamente, para todo elemento  $y_0 \in S_y$ ) podemos encontrar un elemento  $(x_0, y) \in \bar{S}$  (respectivamente, un elemento  $(x, y_0) \in \bar{S}$ ).

Otra propiedad elemental es que  $k \mid (x + y)$  para todo  $(x, y) \in \bar{S}$ . De este modo, los elementos de este subsemigrupo de  $\mathbb{N}^2$  se distribuyen en rectas equiespaciadas de pendiente  $-1$ . A estas distintas rectas las llamaremos *niveles*, diremos que  $(x, y)$  está en el nivel  $\ell$  si  $(x + y)/d = \ell$ .

Esto permite otra expresión más cómoda de los elementos de  $\bar{S}$ . En vez de especificar las dos coordenadas, especificamos el nivel  $\ell$  y la coordenada  $x$ , que ahora llamamos  $r$ . De este modo,  $(x, y) \in \bar{S}$  se representa por el par  $(\ell, r)$ . Si queremos recuperar el elemento de  $\bar{S}$  original, basta tomar  $x = r$ ,  $y = \ell k - r$ .

En esta representación, “una c.l. para  $(\ell, r)$ ” es una c.l. de la forma

$$u_0k + u_1b_1 + \dots + u_nb_n = r$$

con  $\sum_{i=1}^n b_i = \ell$ .

Aunque tiene sentido hablar de elementos irreducibles de  $\bar{S}$ , en este caso el asunto es inmediato. Si  $\bar{S} = (\overline{\mathbf{a}})$ , los elementos irreducibles son justamente los generadores  $\mathbf{a}$ . Cabe mencionar que existen subsemigrupos de  $\mathbb{N}^2$  con una cantidad infinita de elementos irreducibles (por ejemplo, los semigrupos de valoración asociados a un germen (de curva en  $\mathbb{C}^2$ ) irreducible con dos ramas). Por suerte o por desgracia, nosotros estamos en un caso mucho más sencillo.

Aún así, sí es interesante comprobar como, al igual que en el caso afín, la estructura de  $\bar{S}$  se hace trivial cuando nos alejamos lo suficiente del origen.

**Proposición 1.11.** Sea  $\bar{S}$  el subsemigrupo de  $\mathbb{N}^2$  asociado a un submonoide  $S$  de  $\mathbb{N}$  con sistema de generadores fijado  $\mathbf{a}$ . Existen cotas  $M_x, M_y \geq 0$  tal que:

- para todo  $(x, y) \in \mathbb{N}^2$  con  $x \geq M_x$  se verifica  $(x, y) \in S \iff (x + k, y) \in S$ .
- Para todo  $(x, y) \in \mathbb{N}^2$  con  $y \geq M_y$  se verifica  $(x, y) \in S \iff (x, y + k) \in S$ .

**Demostración.** De nuevo, a raíz de la Observación anterior, basta considerar el caso en el que  $d = \gcd\{a_1, \dots, a_n\}$ .

Sea  $\text{Ap}_{k,y} = \{w_0, \dots, w_{k-1}\}$  el conjunto de Apéry de  $S_y$  respecto de  $k$ . Sean  $(x_0, w_0), \dots, (x_{k-1}, w_{k-1})$  los elementos de  $\bar{S}$  con menor  $x_i$  para cada  $w_i$ ,  $i = 0, \dots, k-1$ . Tomamos como cota

$$M_x = \max\{x_0, \dots, x_{k-1}\}.$$

Consideramos un elemento  $(x, y) \in \mathbb{N}^2$  con  $x > M_x$ . Si  $y \notin S_y$ , el resultado es trivialmente cierto. De lo contrario, se puede escribir

$$y = bk + w_i$$

para cierto entero  $b \geq 0$ . Entonces,

$$(x, y) = a(k, 0) + (x_i, w_i) + b(0, k)$$

donde  $a = (x - x_i)/k$  a la diferencia de niveles entre  $(x_i, bk + w_i) = (x_i, y)$  y  $(x, y)$ . Notemos que  $a \geq 0$  ya que  $x \geq M_x \geq x_i$ . Por tanto, tanto  $(x, y)$  como  $(x + k, y)$  pertenecen a  $\bar{S}$ . La demostración es análoga para la otra coordenada.  $\square$

En la prueba anterior jugó de nuevo un papel esencial el conjunto de Apéry de un semigrupo numérico asociado a cierto submonoide de  $\mathbb{N}$ . Cuando tratamos con los semigrupos  $\bar{S}$  en  $\mathbb{N}^2$  también se puede definir un “conjunto de Apéry”, si bien el asunto es ahora más delicado.

**Definición 1.12.** Sea  $\bar{S}$  el subsemigrupo de  $\mathbb{N}^2$  asociado a un semigrupo numérico  $S = S_y$ . Sea  $\{u_0, u_1, \dots, u_{d-1}\}$  el conjunto de Apéry respecto a  $k$  de  $S_x$ , y sea  $\{v_0, v_1, \dots, v_{d-1}\}$  el conjunto de Apéry respecto a  $k$  de  $S_y$ . En estas condiciones, el conjunto de Apéry de  $S$  es el formado por los elementos  $q_i = (u_i, v_{d-i})$  para  $i = 1, \dots, d-1$ , junto al elemento  $q_0 = (0, 0)$ .

Recordemos que  $q_0 \notin \bar{S}$ . Es más, el resto de los  $q_i$  tampoco tienen por qué pertenecer a  $S$ . Esta consideración será importante más adelante.

**Nota 1.13.** Ya hemos insistido lo suficiente en la diferencia entre semigrupo y monoide, y en que  $(0, 0) \notin \bar{S}$ . De aquí en adelante relajaremos la notación. Por ejemplo, en ocasiones llamaremos “semigrupos afines” a los submonoides  $S$  de  $\mathbb{N}$ , y también llamaremos “semigrupos proyectivos” a los subsemigrupos  $\bar{S}$  de  $\mathbb{N}^2$  asociados a algún submonoide de  $\mathbb{N}$ .

Aún así, cuando hablemos de “semigrupos numéricos” siempre nos seguiremos refiriendo a exactamente los definidos en la Definición 1.1.

## 1.2. Nociones de Álgebra Conmutativa, Homológica y Combinatoria

Esta sección recoge las diversas herramientas de Álgebra Conmutativa, de Álgebra Homológica y de Álgebra Combinatoria que utilizaremos durante los próximos dos Capítulos.

Puesto que el estudio profundo de estos campos no es el objetivo de este Trabajo de Fin de Máster, procuraremos reducir la exposición a la mínima expresión posible. Por lo general, plantaremos tan solo los resultados que serán estrictamente necesarios posteriormente. Las demostraciones se omitirán.

Para las partes de Álgebra Conmutativa la referencia por excelencia es [Mat87]. También usaremos [Pee11] y [Eis05], que son más específicos a nuestro contexto. Estas tres referencias también nos sirven para nuestra muy superficial incursión en el Álgebra Homológica (por suerte, no hace falta recurrir al Eilenberg). Respecto al Álgebra Combinatoria, tan solo nos fijaremos en complejos simpliciales abstractos. Así pues, podemos citar clásicos de la Topología Algebraica como [GH18] y [Hat02]. Otro libro, más especializada para complejos simpliciales abstractos, es [FP11].

**Nota 1.14.** En algunas de las referencias anteriores, los resultados que nosotros enunciarnos para “anillos graduados” aparecen enunciados para “anillos locales”.

Esto no es inconveniente: existe una profunda relación entre ambos conceptos. Más concretamente, muchos resultados estándar sobre anillos locales también resultan ser ciertos para anillos graduados. El papel del ideal maximal  $\mathfrak{m}$  lo pasa a tomar el ideal irrelevante  $R_+$ . Para más detalles, véase la discusión en [Ste10].

**Notación 1.15.** Durante este Trabajo de Fin de Máster, convenimos que todos los anillos son siempre conmutativos y unitarios.

Denotaremos por  $R$  a un anillo graduado por  $S$  un submonoide de  $\mathbb{N}^d$  para cierto  $d \geq 1$ . Recordemos que su ideal irrelevante se definía como

$$R_+ = \{r \in R : \deg_S r \neq 0\}.$$

Este ideal será maximal en todos los anillos graduados que manejaremos. En consecuencia,  $R_0 = R/R_+$  será un cuerpo.

### 1.2.1. Lema de Nakayama

El Lema de Nakayama es un resultado sorprendentemente versátil en Álgebra Conmutativa. La forma más común en la que aparece es la siguiente:

**Lema 1.16 (de Nakayama).** *Sea  $M$  un  $R$ -módulo graduado finitamente generado. Cualquier sistema de generadores  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$  del  $(R/R_+)$ -espacio vectorial  $M/R_+M$  se eleva a un sistema de generadores  $e_1, \dots, e_n$  de  $M$ .*

Aprovechando que hemos fijado que  $R_0 = R/R_+$  es un cuerpo, podemos decir algo más: toda base de  $M/R_+M$  se eleva a un sistema minimal de generadores de  $M$ . La minimalidad se debe a que si proyectamos de nuevo, obtenemos un sistema de generadores de  $M/R_+M$ . Además, como todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo número de elementos, deducimos que en este caso todos los sistemas minimales de generadores de un módulo graduado tienen el mismo número de elementos.

### 1.2.2. Módulos libres y proyectivos. Resoluciones

Recordemos que un  $R$ -módulo  $F$  es *libre* si es isomorfo a una suma directa de copias de  $R$  (si el número de copias es  $n < \infty$ , se dice que  $n$  es el rango de  $F$ ). Una noción relacionada es la de *módulo proyectivo*.

**Definición 1.17.** Un  $R$ -módulo  $P$  es proyectivo si para todo epimorfismo de  $R$ -módulos  $\alpha: M \twoheadrightarrow N$  y todo homomorfismo de  $R$ -módulos  $\beta: P \rightarrow N$  existe un homomorfismo de  $R$ -módulos  $\gamma: P \rightarrow M$  tal que  $\beta = \alpha \circ \gamma$ , como indica el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \swarrow \exists \gamma & \downarrow \beta \\ M & \xrightarrow{\alpha} & N \end{array}$$

Una caracterización equivalente es la siguiente:

**Proposición 1.18.** *Un  $R$ -módulo  $P$  es proyectivo si existe otro  $R$ -módulo  $M$  tal que*

$$F = P \oplus M$$

*es un  $R$ -módulo libre.*

Con cualquiera de las dos definiciones es inmediato ver que todos los módulos libres son proyectivos. El recíproco no es cierto en general. Por ejemplo, si tomamos  $R = \mathbb{Z}/(6) \cong \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(3)$ , y consideramos  $P = \mathbb{Z}/(2)$  como  $R$ -módulo, se comprueba que  $P$  es proyectivo pero no libre. Aún así, cuando el anillo  $R$  es “suficientemente bueno”, se puede esperar que los conceptos de “libre” y “proyectivo” coincidan. Esto es el caso cuando  $R = K$  un cuerpo, ya que los espacios vectoriales siempre son libres. Un resultado mucho más profundo, conjeturado por Serre en 1955, y probado por Quillen y Suslin en 1976, nos dice:

**Teorema 1.19 (de Quillen-Suslin).** *Sea  $R = K[x_1, \dots, x_n]$  un anillo polinomial sobre  $K$  un cuerpo. Todo  $R$ -módulo proyectivo finitamente generado es libre.*

Respecto a las resoluciones, recordemos que una *resolución libre* de un  $R$ -módulo  $M$  es una sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow F_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} F_i \xrightarrow{\varphi_i} F_{i-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\alpha} M \longrightarrow 0$$

donde los  $F_i$  son  $R$ -módulos libres y  $\alpha: F_0 \rightarrow M$  es un epimorfismo.

De igual modo, una *resolución proyectiva* de un  $R$ -módulo  $M$  es una sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow P_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} P_i \xrightarrow{\varphi_i} P_{i-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\varphi_1} P_0 \xrightarrow{\alpha} M \longrightarrow 0$$

donde los  $P_i$  son  $R$ -módulos proyectivos y  $\alpha: P_0 \rightarrow M$  es un epimorfismo.

En esta situación, se define la *dimensión proyectiva* de  $M$ , denotada por  $\text{pd}_R M$ , como la longitud mínima de una resolución proyectiva de  $M$  (si  $M$  no admite una resolución proyectiva de longitud finita entonces  $\text{pd}_R M = \infty$ ). Se podría definir también una “dimensión libre”, si bien en general resulta redundante (véase la discusión en [Ven10]).

**Notación 1.20.** Por otro lado, denotaremos la dimensión de Krull de un anillo por  $\text{Kdim}$ , para no confundirla con la dimensión  $\text{dim}$  de un espacio vectorial. Recordemos que la dimensión de Krull se define como la máxima longitud de una cadena de ideales primos.

En particular, cuando  $R = K[x_1, \dots, x_n]$  es un anillo polinomial sobre un cuerpo, ambos conceptos coinciden (ya sea por el Teorema de Quillen-Suslin, ya sea por el Corolario 1.8 en [Eis05]). Además, en ese caso, el Teorema de las Sizigias de Hilbert nos asegura que existe una resolución libre minimal de longitud a lo sumo  $n$  (por tanto,  $\text{pd}_R M \leq n$ ). En este mismo contexto de  $R = k[x_1, \dots, x_n]$ , es conocido que  $\text{pd}_R R = \text{Kdim } R = n$ .

Por otro lado, definimos los números de Betti  $\beta_i(M)$  como el rango (como  $R$ -módulo) del correspondiente  $P_i$ .

**Nota 1.21.** De aquí en adelante, supondremos que  $R$  es un anillo *graduado* y que  $M$  es un módulo *graduado* sobre  $R$ . En esta situación, sabemos que siempre existe una resolución libre graduada minimal, y será legítimo hablar también de números de Betti graduados  $\beta_{ij}(M)$ .

Por último, definimos la *regularidad de Castelnuovo–Mumford* de  $M$  como

$$\text{reg}_R M = \sup_{i,j} \{j - i : \beta_{ij}(M) \neq 0\}.$$

### 1.2.3. Functor Tor

Sabemos que tomar producto tensorial no es un functor exacto (tan solo lo es por la derecha). Para solventar eso, hace falta hablar de funtores derivados. No nos conviene meternos en tanto lío, así que utilizaremos la siguiente definición alternativa equivalente:

**Definición 1.22.** Sea  $M$  un  $R$ -módulo, sea  $\mathcal{P}$  una resolución proyectiva de  $M$ :

$$\cdots \xrightarrow{\varphi_2} P_1 \xrightarrow{\varphi_1} P_0 \xrightarrow{\alpha} M \longrightarrow 0$$

Consideramos otro  $R$ -módulo  $N$  y tomamos producto tensorial

$$\cdots \xrightarrow{\varphi_2 \otimes \text{id}} P_1 \otimes_R N \xrightarrow{\varphi_1 \otimes \text{id}} P_0 \otimes_R N \xrightarrow{\alpha \otimes \text{id}} M \otimes_R N \longrightarrow 0$$

En estas condiciones definimos

$$\text{Tor}_i^R(M, N) = H_i(\mathcal{P} \otimes_R N) = \ker(\varphi_i \otimes \text{id}) / \text{Im}(\varphi_{i+1} \otimes \text{id}).$$

**Teorema 1.23.** *La definición anterior no depende de la resolución proyectiva escogida.*

Así que este functor queda bien definido. Enunciamos un par de propiedades:

**Proposición 1.24.** *Se verifica:*

$$\text{Tor}_i^R(M, N) \simeq \text{Tor}_i^R(N, M).$$

**Proposición 1.25.** *Se verifica:*

$$\beta_i(M) = \dim_K \text{Tor}_i^R(M, K).$$

Cuando trabajamos con anillos y módulos graduados sobre un semigrupo  $S$ , se pueden refinar los dos resultados anteriores. Para todo  $m \in S$ :

$$\text{Tor}_i^R(M, N)_m \simeq \text{Tor}_i^R(N, M)_m, \quad (1.1)$$

$$\beta_{im}(M) = \dim_K \text{Tor}_i^R(M, K)_m. \quad (1.2)$$

## 1.2.4. Profundidad, Teorema de Auslander-Buchbaum y anillos Cohen-Macaulay

En cualquier anillo polinómico, claro que las variables  $x_1, \dots, x_n$  son “todo lo independientes posibles unas de otras”. El modo de generalizar y formalizar esta intuición viene dado por las *sucesiones regulares*:

**Definición 1.26.** Sea  $M$  un  $R$ -módulo, consideremos una sucesión  $r_1, \dots, r_n$  de elementos de  $R$  tal que  $(r_1, \dots, r_n)M \neq M$ . Se dice que esta sucesión es  $M$ -regular si  $r_i$  no es un divisor de cero de  $M/(r_1, \dots, r_{i-1})M$  para cada  $i = 1, \dots, n$ .

Existen múltiples conceptos para estudiar la “dimensión geométrica” de un anillo. Entre ellos, ya hemos visto la dimensión proyectiva y la dimensión de Krull. Ahora, armados con la anterior Definición, vamos a introducir el concepto de *profundidad*. Nótese que aquí nos estamos restringiendo a un caso muy particular de la definición general:

**Definición 1.27.** Sea  $M$  un  $R$ -módulo graduado finitamente generado tal que  $R_+M \neq M$ . Se puede probar que entonces toda sucesión  $M$ -regular maximal contenida en  $R_+$  tiene la misma longitud. Esta longitud se llama “la profundidad de  $M$ ” y se denota por  $\text{depth}_R M$ . En el caso  $R_+M = M$ , se considera  $\text{depth}_R M = \infty$  por definición.

Lo único que debemos saber es que, para anillos polinómicos (y similares, véase el  $A$ -módulo que llamaremos  $K[S]$  en el siguiente Capítulo), la profundidad coincide con el número de variables.

Continuemos. El Teorema de Auslander-Buchbaum, aprovecha el concepto de profundidad para obtener un refinamiento del Teorema de las Szigias de Hilbert:

**Teorema 1.28 (de Auslander-Buchbaum).** *Sea  $M$  un  $R$ -módulo graduado finitamente generado. La dimensión proyectiva de  $M$  es*

$$\text{pd}_R M = \text{depth}_R R - \text{depth}_R M.$$

En particular  $\text{pd}_R M \leq \text{depth}_R R$ . Esto inspira la siguiente definición:

**Definición 1.29.** *Sea  $M$  un  $R$ -módulo graduado finitamente generado. Decimos que  $M$  es Cohen-Macaulay si verifica*

$$\text{pd}_R M = \text{depth}_R M.$$

Considerados como módulos sobre si mismos, los anillos polinomiales son Cohen-Macaulay.

### 1.2.5. Complejo de Koszul

El complejo de Koszul es una herramienta extremadamente útil para realizar cálculos de homología:

**Definición 1.30.** *Suponemos  $A$  noetheriano. Sea  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_r)$  una sucesión de elementos de  $A$ . El complejo de Koszul  $\mathcal{K}(\underline{x})$  es el siguiente complejo de cadenas*

$$0 \longrightarrow \bigwedge^r A^r \xrightarrow{d_r} \dots \xrightarrow{d_{j+1}} \bigwedge^j A^r \xrightarrow{d_j} \dots \xrightarrow{d_2} \bigwedge^2 A^r \xrightarrow{d_1} \bigwedge^1 A^r \xrightarrow{d_0} R \longrightarrow 0.$$

donde para  $F = \{i_0 < \dots < i_p\} \subset \{1, \dots, r\}$ , definimos

$$d_p(e_F) = \sum_{j=0}^r (-1)^j x_{i_j} e_{F \setminus \{i_j\}},$$

donde  $e_F = e_{i_0} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$

Si  $R$  un  $A$ -módulo graduado, y supongamos que los elementos  $x_1, \dots, x_r$  son homogéneos para la graduación de  $A$ . Planteamos tan solo dos resultados:

**Proposición 1.31.** *Si  $\underline{x}$  es una sucesión  $R$ -regular, entonces*

$$\mathcal{K}(\underline{x}) \otimes_A R.$$

*es una sucesión exacta.*

**Proposición 1.32.** *Si llamamos  $J$  al ideal generado por  $x_1, \dots, x_r$ , entonces*

$$\text{Tor}_A^j(A/J, R) \simeq \tilde{H}_j(\mathcal{K}(\underline{x}) \otimes_A R).$$

### 1.2.6. Complejos simpliciales abstractos

Los complejos simpliciales aparecen de forma natural en Topología Algebraica, pues son los ejemplos más “manejables” de espacios con homología no trivial. El cálculo de esta homología es una cuestión puramente combinatoria, lo cuál permite reducir el estudio a versiones “abstractas” del problema.

Sea  $\Lambda = \{1, 2, \dots, n\}$  un conjunto finito. Llamamos *vértices* a los elementos de  $\Lambda$  y llamamos *caras* a los elementos de  $\mathcal{P}(\Lambda)$  (es decir, a los *subconjuntos* de  $\Lambda$ ).

**Definición 1.33.** *Un complejo simplicial abstracto sobre  $\Lambda$  es un conjunto de caras  $\Delta \subset \mathcal{P}(\Lambda)$  tal que para toda  $F \in \Delta$  y para toda  $F' \subset F$  se tiene también que  $F' \in \Delta$ .*

Las caras *maximales* (por la relación de inclusión) se denominan *facetas*. Denotamos por  $|F|$  al número de elementos de una cara. Por supuesto siempre  $|F| \leq n$ . La *dimensión* de una cara  $F$  es por definición  $|F| - 1$ . Dos complejos simpliciales abstractos especiales son la *bola* y la *esfera*  $n$ -dimensionales. Se definen respectivamente como:

$$\begin{aligned}\mathbb{B}^{n-1} &= \mathcal{P}(\Lambda) \\ \mathbb{S}^{n-1} &= \mathcal{P}(\Lambda) \setminus \Lambda\end{aligned}$$

Definimos el producto estrella  $*$  de dos complejos simpliciales abstractos como

$$\Delta_1 * \Delta_2 = \{F_1 \cup F_2 : F_1 \in \Delta_1, F_2 \in \Delta_2\},$$

Un *cono* (*centrado en  $v$* ) es un complejo simplicial que se puede escribir de la forma  $v * \Delta$  para cierto vértice  $v$ .

En ocasiones emplearemos la notación

$$\delta_{iF} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \notin F \\ 1 & \text{si } i \in F \end{cases}$$

Procedemos ahora a definir la homología reducida de un complejo simplicial abstracto. Por supuesto, esta coincide con la definición habitual para la homología reducida de los complejos simpliciales.

Fijaremos, por simplificar, como anillo de coeficientes el cuerpo  $\mathbb{R}$  (o cualquier otro cuerpo  $K$ ). Sea  $C_i(\Delta)$  el  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial generado por las caras de dimensión  $i$ , para  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Para  $i = 0$ , salvo en el caso trivial de que  $\Delta$  no tenga caras, siempre tenemos que  $\emptyset \in \Delta$  es la única cara de dimensión 0, por lo que escribimos directamente  $C_{-1}(\Delta) = \mathbb{R}$ . Planteamos el siguiente complejo de cadenas:

$$0 \longrightarrow C_{n-1}(\Delta) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_3} C_2(\Delta) \xrightarrow{\partial_2} C_1(\Delta) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\Delta) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{R} \longrightarrow 0.$$

Veamos como se definen las diferenciales  $\epsilon, \partial_1, \partial_2, \dots, \partial_{n-1}$ . Si  $|F| = i + 1$ ,  $F = \{j_0, \dots, j_i\}$  ordenados de menor a mayor, definimos

$$\partial_i(F) = \sum_{k=1}^i (-1)^{k+1} \{j_0, \dots, \widehat{j_k}, \dots, j_i\},$$

y definimos  $\epsilon = \partial_0$ .

En estas condiciones, los módulos de homología reducida asociados al complejo simplicial abstracto  $\Delta$  se definen como

$$\tilde{H}_i(\Delta) = \ker(\partial_i) / \text{Im}(\partial_{i+1}),$$

para  $i = -1, 0, 1, 2, \dots, n-1$ . Son  $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales de dimensión finita, así que lo único que los caracteriza es su dimensión, denotada por  $\tilde{h}_i(\Delta)$ . De aquí en adelante omitiremos el adjetivo “reducida”.

A continuación, enunciamos un par de resultados básicos que se emplearán más adelante:

**Proposición 1.34.** *Los conos son acíclicos, es decir, tienen todos sus módulos de homología nulos.*

Sea  $\Delta$  es un complejo simplicial abstracto con al menos un módulo de homología no nulo, y sea  $v$  un vértice arbitrario de  $\Delta$  (y con este abuso de notación, nos referimos a que  $v \in \Delta$  con  $\{v\} \in \Delta$ ). Como Corolario de la Proposición anterior, debe existir una faceta  $F \in \Delta$  tal que  $v \notin F$  (de lo contrario,  $\Delta$  sería un cono centrado en  $v$ ).

**Proposición 1.35.** *Las bolas son acíclicas. Una esfera de dimensión  $i$  tiene como módulo de homología  $i$ -ésimo  $R$ , mientras que el resto son nulos.*

Para terminar, mencionamos la *realización geométrica* de un complejo simplicial abstracto. Nos situamos en  $\mathbb{R}^n$ , y a cada elemento  $i \in \Lambda$  le asociamos un punto

$$x_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0).$$

Tomamos el siguiente conjunto, al que dotamos con la topología de subespacio de  $\mathbb{R}^n$ :

$$\mathcal{G}(\Delta) = \bigcup_{F \in \Delta} \{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n : \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1, \{i : \alpha_i \neq 0\} \subset F\}$$

Como ya adelantamos, la homología (simplicial o singular, la que se prefiera) de  $\mathcal{G}(\Delta)$  coincide con la homología simplicial abstracta de  $\Delta$ . En particular, se puede realizar razonamientos de tipo topológico para probar los tres resultados anteriores, si así se desea.

Este modo de proceder es particularmente útil para probar el siguiente resultado no tan estándar: basta considerar una homotopía entre la realización geométrica de ambos complejos simpliciales:

**Lema 1.36.** *Sea  $\Delta$  un complejo simplicial abstracto con dos vértices  $v, v'$  de forma que todas las facetas que contienen  $v$  también contienen  $v'$ . Entonces el siguiente complejo simplicial abstracto*

$$\Delta \setminus \{v\} = \{F \setminus \{v\} : v \in F\}$$

*tiene la misma homología que  $\Delta$ .*

# Capítulo 2

## Homología de semigrupos

Una de las vías más interesantes para el estudio de semigrupos consiste en emplear la maquinaria del Álgebra Homológica.

En este Capítulo, al igual que durante el resto del Trabajo de Fin de Máster, trataremos tan solo con submonoides  $(\mathbf{a})$  de  $\mathbb{N}$  y sus correspondientes subsemigrupos asociados  $(\bar{\mathbf{a}})$  de  $\mathbb{N}^2$ . No obstante, cabe mencionar que las mismas construcciones funcionan en un contexto mucho más general, aunque con un considerable aumento de la dificultad: véase [CG00].

### 2.1. Curvas monomiales: anillos, ideales y resoluciones

Comenzamos introduciendo las *curvas monomiales afines*, objeto que da una motivación geométrica para el estudio de los semigrupos numéricos.

**Definición 2.1.** Sea  $K$  un cuerpo. A cada submonoide  $(\mathbf{a})$  con  $\mathbf{a} = a_1 < \dots < a_n$  le asociamos la correspondiente curva monomial afín (sobre  $K$ ), que es la imagen  $\mathcal{C}$  de una parametrización con la forma

$$\begin{aligned}\gamma^{\mathbf{a}}: K &\rightarrow K^n, \\ t &\mapsto (t^{a_1}, \dots, t^{a_n}).\end{aligned}$$

Desde el punto de vista de la Geometría Algebraica, es más preciso escribir:

$$\begin{aligned}\gamma^{\mathbf{a}}: \mathbb{A}_K^1 &\rightarrow \mathbb{A}_K^n, \\ t &\mapsto (t^{a_1}, \dots, t^{a_n}).\end{aligned}$$

El estudio del anterior morfismo entre variedades es equivalente al estudio del siguiente homomorfismo de  $K$ -álgebras entre los anillos de coordenadas:

$$\begin{aligned}\gamma: K[x_1, \dots, x_n] &\rightarrow K[t], \\ x_i &\mapsto t^{a_i}.\end{aligned}$$

Para nuestros propósitos, será útil dotar al anillo  $A = K[x_1, \dots, x_n]$  con una graduación distinta de la estándar (¡atención: ahora denotamos por  $A$  al anillo sobre el que tomaremos módulos,  $R$  se reserva para otro anillo distinto!). Establecemos  $\deg_{(\mathbf{a})}(x_i) = a_i$ , lo cual proporciona lo que llamaremos la  $(\mathbf{a})$ -graduación para  $A$ , y convierte a  $\gamma$  en un homomorfismo  $(\mathbf{a})$ -graduado de grado 0.

Sea  $I = \ker \gamma$ , diremos que este es el *ideal asociado* al submonoide  $(\mathbf{a})$ .

**Proposición 2.2.** *El ideal  $I$  es primo y admite un sistema finito de generadores binomiales con coeficientes unidad.*

**Demostración.** Para comenzar,  $I$  es primo pues  $k[t]$  es un dominio de integridad.

También, como  $\gamma$  es un homomorfismo  $(\mathbf{a})$ -graduado, en particular  $I = \ker \gamma$  es un ideal  $(\mathbf{a})$ -homogéneo. Así que basta probar que los elementos  $(\mathbf{a})$ -homogéneos de  $I$  pueden ser escritos como combinación lineal de binomios.

Sea

$$f = u_1 f_1 + \dots + u_m f_m,$$

donde  $u_1, \dots, u_m \in K$ ,  $f_1, \dots, f_m$  monomios, un elemento  $(\mathbf{a})$ -homogéneo de  $I$  con grado  $d$ . Esto significa que  $\gamma(u_i f_i) = u_i t^d$  para todo  $i = 1, \dots, m$ . Como  $\gamma(f) = 0$ , deducimos que  $\sum_{i=1}^m u_i = 0$ : dicho de otro modo,  $u_m = -\sum_{i=1}^{m-1} u_i$ . Por tanto, podemos escribir el elemento anterior como

$$f = u_1(f_1 - f_m) + u_2(f_2 - f_m) + \dots + u_{m-1}(f_{m-1} - f_m).$$

En conclusión,  $I$  es generado por el conjunto  $\{f_i - f_j : f_i, f_j \text{ monomios con igual } (\mathbf{a})\text{-grado}\}$ . Y, por noetherianidad, se puede extraer un subconjunto de generadores finitos.  $\square$

**Observación 2.3.** Si

$$f = u_1 f_1 - u_2 f_2,$$

con  $u_1, u_2 \in K$ ,  $f_1, f_2$  monomios, es un elemento binomial de  $I$ , entonces debe ocurrir que  $u_1 = u_2$  y que los  $(\mathbf{a})$ -grados de  $f_1$  y  $f_2$  coincidan. Si además  $f$  es un generador minimal de  $I$  (es decir,  $f$  es parte de un sistema minimal de generadores de  $I$ ), cualquier variable  $x_i$  que aparezca en uno de los monomios no puede aparecer en el otro (de lo contrario, se podría sacar factor común).

Nos proponemos estudiar más a fondo el ideal  $I \subset A$ . Lo que haremos será considerarlo como  $A$ -módulo graduado, y plantear una resolución graduada minimal. Más concretamente, trabajaremos con el anillo de coordenadas  $R = A/I$ , también considerado como  $A$ -módulo graduado. No hay ningún problema en considerar  $R$  en vez de  $I$ , ya que los números de Betti de cualquiera de ellos se obtienen de forma trivial a partir de los números de Betti del otro.

Para empezar, notemos que, cómo cabría esperar, el anillo  $R$  guarda una estrecha relación con nuestro semigrupo  $S = (\mathbf{a})$ . De hecho, se dice que  $R$  es “el álgebra de  $S$  sobre  $K$ ”. La razón para ello es que, como consecuencia del primer Teorema de Isomorfía,  $R$  también se puede escribir como

$$R \simeq K[S] = \bigoplus_{m \in S} Kt^m.$$

De este modo, nos fijamos en que la  $(\mathbf{a})$ -graduación de  $A$  introducida anteriormente procede de tomar la graduación estándar en  $R$  visto como  $K[S]$ . Con esta graduación, consideramos una resolución graduada minimal de  $R$  como  $A$ -módulo:

$$0 \longrightarrow A^{\beta_n} \xrightarrow{\varphi_n} A^{\beta_{n-1}} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \dots \xrightarrow{\varphi_2} A^{\beta_1} \xrightarrow{\varphi_1} A^{\beta_0} \xrightarrow{\varphi_0} R \longrightarrow 0,$$

donde  $\beta_0 = 1$ ,  $\varphi_0 = \gamma$ .

Recordemos que, al tratar con módulos graduados, podemos hablar de “sizigias minimales”: con este término nos referimos al sistema de generadores escogido para los  $\ker \varphi_{i-1}$ , es decir, a las imágenes de los vectores de la base estándar de  $A^{\beta_i}$  por  $\varphi_i$ . Como la resolución entera es graduada, se puede hablar del  $(\mathbf{a})$ -grado de estas sizigias minimales también.

También recordemos que, si bien la resolución graduada minimal no es única, los números de Betti graduados correspondientes si lo son. Para acentuar este hecho, en ocasiones se escriben del siguiente modo

$$\beta_{im}(R) = \dim_K \operatorname{Tor}_i^A(R, K)_m,$$

$$\beta_i = \sum_{m \geq 0} \beta_{im}(R).$$

En la anterior fórmula, el índice  $i$  marca el paso, mientras que el índice  $m$  marca el grado. En este caso recorren  $i = 0, \dots, n$ ,  $m \in (\mathbf{a})$ .

Cerramos esta subsección con un par de comentarios:

**Observación 2.4.** Hemos asumido implícitamente que la resolución termina en exactamente  $n$  pasos. Esta es la conocida cota dada por el Teorema de las Sizigias de Hilbert. Pero aquí se puede decir más, aplicando la versión graduada de la fórmula de Auslander-Buchbaum:

$$\mathrm{pd}_A(R) = \mathrm{Kdim}(A) - \mathrm{depth}_A(R) = n - 1,$$

donde se ha utilizado implícitamente que  $A$  es Cohen-Macaulay y por tanto  $\mathrm{depth}_A(A) = \mathrm{pd}_A(A)$ , mientras que sabemos que  $\mathrm{pd}_A(A) = \mathrm{Kdim}(A) = n$ .

**Notación 2.5.** Sea  $\mathbf{S}_i \in \ker \varphi_i$  una sizigia  $i$ -ésima minimal. Sabemos que debe ser  $(\mathbf{a})$ -homogénea, sea  $m$  su  $(\mathbf{a})$ -grado. Si consideramos la imagen de  $\mathbf{S}_i$  por  $\varphi_i$ , obtenemos una c.l. nula de elementos de  $A^{\beta_{i-1}}$ , cada uno  $(\mathbf{a})$ -homogéneo con  $(\mathbf{a})$ -grado  $m$ . De este modo, aplicando sucesivamente  $\varphi_{i-1}, \varphi_{i-2}, \dots, \varphi_1$ , obtenemos una c.l. nula de monomios de  $A^{\beta_0} = A = K[x_1, \dots, x_n]$ , cada uno con grado  $m$ .

En este sentido, toda sizigia  $(\mathbf{a})$ -homogénea se puede ver como una c.l. nula de elementos de  $A$ . Decimos que en la sizigia  $\mathbf{S}_i$  no interviene una variable  $x_j$  si dicha variable no aparece en la c.l. nula de  $A$  correspondiente (dicho de otro modo, si al considerar la graduación más fina,  $\mathbf{S}_i$  tiene grado 0 en la componente  $j$ ).

## 2.2. Curvas monomiales: paso al caso proyectivo

Llamamos  $k = a_n$ . Asociada a la anterior curva monomial afín  $\mathcal{C}$ , definimos también una *curva monomial proyectiva*  $\bar{\mathcal{C}}$ , que será la imagen de una parametrización con la forma

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}^a: \mathbb{P}_K^1 &\rightarrow \mathbb{P}_K^n, \\ [s: t] &\mapsto [s^k: s^{k-a_1}t^{a_1}: \dots: s^{k-a_{n-1}}t^{a_{n-1}}: t^k]. \end{aligned}$$

También tenemos el siguiente (equivalente) homomorfismo de  $K$ -álgebras:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}: K[x_0, x_1, \dots, x_n] &\rightarrow K[s, t] \\ x_i &\mapsto s^{k-a_i}t^{a_i}, \end{aligned}$$

donde consideramos  $a_0 = 0$ . Tomando la carta  $[1: t]$  (o lo que es lo mismo, deshomogeneizando respecto a la variable  $s$ ), recuperamos la curva original. Esto justifica las definiciones dadas en la Subsección 1.1.2.

De nuevo, dotamos al anillo  $\bar{A} = K[x_0, \dots, x_n]$  con una (multi)graduación distinta de la estándar. Ahora establecemos

$$\mathrm{deg}_{(\bar{\mathbf{a}})}(x_i) = (1, k - a_i),$$

lo cuál proporciona lo que llamaremos la  $(\bar{\mathbf{a}})$ -graduación de este anillo. Notemos que tomar un monomio

$$f = x_0^{u_0} x_1^{u_1} \dots x_n^{u_n}$$

de  $(\bar{\mathbf{a}})$ -grado  $(\ell, r)$  es lo mismo que tomar una c.l. para  $(\ell, r)$ :

$$u_0 k + u_1 b_1 + \dots + u_n b_n = r$$

con  $\sum_{i=0}^n u_i = \ell$ .

**Nota 2.6.** Cabría esperar que se hubiera impuesto  $\deg_{(\bar{\mathbf{a}})}(x_i) = (k - a_i, a_i)$ , en vez de la definición que se ha proporcionado. Nuestra definición alternativa tiene como objetivo facilitar la comprensión de las pruebas del Capítulo 3, que siguen la misma notación que sigue [Vu14].

En todo caso, ambas graduaciones son lo más finas posibles sobre  $K[\bar{S}]$ , y se puede pasar de una a otra sin dificultad. En esa línea, a veces llamaremos  $u$  a  $\ell k - r$ : es la coordenada vertical, al igual que  $r$  era la horizontal.

Sea  $\bar{I} = \ker \bar{\gamma}$ , diremos que este es el ideal asociado al submonoide  $(\bar{\mathbf{a}})$ . La Proposición 2.2 y su Demostración son análogos aquí. Entre otras cosas,  $\bar{I}$  es un ideal  $(\bar{\mathbf{a}})$ -homogéneo, así que en particular es homogéneo.

Al igual que en la Sección anterior, consideramos el  $\bar{A}$ -módulo  $\bar{R} = \bar{A}/\bar{I}$ . También aquí

$$\bar{R} \simeq K[\bar{S}] = \bigoplus_{(x,y) \in \bar{S}} K s^x t^y.$$

En  $K[\bar{S}]$  tomamos una doble graduación. La primera es la estándar,  $\deg x = \deg y = 1$ . La segunda ignora la segunda variable, es decir  $\deg x = 1$ ,  $\deg y = 0$ . Entre ambas, inducen la  $(\bar{\mathbf{a}})$ -graduación (la primera corresponde a  $\ell$ , la segunda a  $r$ ). Con esta graduación, consideramos una resolución graduada minimal de  $\bar{R}$  como  $\bar{A}$ -módulo:

$$0 \longrightarrow \bar{A}^{\bar{\beta}_n} \xrightarrow{\Phi_n} \bar{A}^{\bar{\beta}_{n-1}} \xrightarrow{\Phi_{n-1}} \dots \xrightarrow{\Phi_2} \bar{A}^{\bar{\beta}_1} \xrightarrow{\Phi_1} \bar{A}^{\bar{\beta}_0} \xrightarrow{\Phi_0} \bar{R} \longrightarrow 0,$$

donde  $\bar{\beta}_0 = 1$ ,  $\Phi_0 = \bar{\gamma}$ .

Aquí también ocurre que los correspondientes submódulos  $i$ -ésimos de sizigias son  $\bar{A}$ -módulos  $(\bar{\mathbf{a}})$ -graduados. Podemos hablar de “sizigias minimales” y de su  $(\bar{\mathbf{a}})$ -grado. Tenemos también los números de Betti (respectivamente: multigraduados, graduados, globales):

$$\begin{aligned} \beta_{i(\ell,r)}(\bar{R}) &= \dim_K \operatorname{Tor}_i^{\bar{A}}(\bar{R}, K)_{(\ell,r)}, \\ \beta_{i\ell}(\bar{R}) &= \sum_{r \geq 0} \beta_{i(\ell,r)}(\bar{R}), \\ \bar{\beta}_i &= \sum_{\ell \geq 0} \beta_{i\ell}(\bar{R}), \end{aligned}$$

donde  $i = 0, \dots, n$ ,  $(\ell, r) \in (\bar{\mathbf{a}})$ . Asimismo, se pueden escribir análogos de la Observación 2.4 y la Notación 2.5.

Y, tras todos estos comentarios, cabría preguntarse: ¿Cómo se relaciona el  $A$ -módulo  $R$  con este  $\bar{A}$ -módulo  $\bar{R}$ ? Veamos. Fijémonos en las dos siguientes aplicaciones de “deshomogeneización”:

$$\begin{aligned} dh_{-1}: K[(\bar{\mathbf{a}})] &\rightarrow K[(\mathbf{a})], & dh_0: K[x_0, x_1, \dots, x_n] &\rightarrow K[x_1, \dots, x_n], \\ s &\mapsto 1, & x_0 &\mapsto 1, \\ t &\mapsto t, & x_i &\mapsto x_i, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Estas aplicaciones “unen”, “con buenas propiedades”, el paso 0 y 1 de la resolución de  $\bar{R}$  (como  $\bar{A}$  módulo) con los correspondientes pasos de la resolución de  $R$  (como  $A$ -módulo). Este es el primer indicio que nos hace pensar que ambas resoluciones están íntimamente relacionadas. A continuación procedemos a precisar esta idea.

**Observación 2.7.** Fijamos una resolución de  $\bar{R}$  (visto como  $\bar{A}$ -módulo) y una resolución de  $R$  (visto como  $A$ -módulo). Para  $i = 1, 2, \dots$ , llamamos  $\bar{\mathfrak{S}}_i = \ker \Phi_{i-1}$ ,  $\mathfrak{S}_i = \ker \varphi_{i-1}$ , a los módulos de sizigias  $i$ -ésimos correspondientes a  $\bar{R}$  y  $R$ , respectivamente. También abusamos de la notación y denotamos  $\bar{\mathfrak{S}}_0 = \bar{R}$ ,  $A^{\bar{\beta}-1} = \bar{R}$ ,  $\mathfrak{S}_0 = R$  y  $A^{\beta-1} = R$ . Notemos que  $R$  se puede ver como un  $\bar{R}$ -módulo a partir de  $dh_{-1}$ , así que los  $R^{\beta_i}$  también son  $\bar{R}$ -módulos.

Por inducción, probaremos que para cada  $i = -1, 0, \dots$  existe un homomorfismo de  $\bar{R}$ -módulos  $dh_i: \bar{R}^{\bar{\beta}_i} \rightarrow R^{\beta_i}$  tal que:

- $dh_i(\bar{\mathfrak{S}}_{i+1}) = \mathfrak{S}_{i+1}$ , de donde se deduce que  $\beta_i \leq \bar{\beta}_i$  (para  $i \geq 0$ ).
- $dh_{i+1}$  sea sobreyectivo.
- La imagen de un monomio de  $(\bar{\mathbf{a}})$ -grado  $(\ell, r)$  por  $dh_{i+1}$  sea un monomio de  $(\mathbf{a})$ -grado  $u = \ell k - r$ . A esta propiedad la llamamos “homogeneizar bien”.

Y, además, el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} \bar{A}^{\bar{\beta}_{i+1}} & \xrightarrow{\Phi_{i+1}} & \bar{A}^{\bar{\beta}_i} \\ \downarrow dh_{i+1} & & \downarrow dh_i \\ A^{\beta_{i+1}} & \xrightarrow{\varphi_{i+1}} & A^{\beta_i} \end{array}$$

El caso  $i = -1$  es trivial:  $dh_0$  deberá quedar tal y cómo la definimos, y todas las propiedades exigidas se cumplen. Ahora supongamos que el resultado es cierto para  $i - 1$ . Probémoslo para  $i$ .

Sea  $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}_{i+1}$  una sizigia minimal  $i + 1$ -ésima cualquiera de  $R$ . Sea  $u > 0$  su  $(\mathbf{a})$ -grado. Como  $dh_i(\bar{A}^{\bar{\beta}_i}) = A^{\beta_i}$ , podemos encontrar un elemento  $\bar{\mathfrak{s}} \in \bar{A}^{\bar{\beta}_i}$  tal que  $dh_i(\bar{\mathfrak{s}}) = \mathfrak{s}$ . Añadiendo la variable  $x_0$  donde y cuanto sea necesario, podemos lograr además que  $\bar{\mathfrak{s}}$  sea homogéneo. En esta situación, comprobaremos que  $\bar{\mathfrak{s}}$  es efectivamente una sizigia  $i$ -ésima de  $\bar{R}$ .

Si llamamos  $(\ell, r)$  al  $(\bar{\mathbf{a}})$ -grado de un monomio de  $\bar{\mathfrak{s}}$ , que sea  $\bar{\mathfrak{s}}$  homogéneo significa que todos los  $\ell$  sean iguales. Por otro lado, como  $dh_i$  homogeneiza bien, también ocurre que todos los  $\ell k - r$  son iguales a  $u > 0$ . En conclusión,  $\bar{\mathfrak{s}}$  es  $(\bar{\mathbf{a}})$ -homogéneo de grado  $(\ell, r)$ , con  $\ell k - r > 0$ . El elemento  $\Phi_{i-1}(\bar{\mathfrak{s}})$  también tendrá el mismo  $(\bar{\mathbf{a}})$ -grado, salvo en el caso en el que se anule (es decir, salvo en el caso en el que  $\bar{\mathfrak{s}}$  sea una sizigia  $i + 1$ -ésima  $\bar{R}$ ). Y como  $dh_{i-1}$  homogeneiza bien, el elemento  $dh_{i-1}(\Phi_{i-1}(\bar{\mathfrak{s}}))$  tendrá  $(\mathbf{a})$ -grado igual a  $u > 0$ , salvo que  $\Phi_{i-1}(\bar{\mathfrak{s}})$  sea nulo.

Para terminar, notemos que, por la conmutatividad del diagrama para  $i - 1$ ,

$$dh_{i-1}(\Phi_{i-1}(\bar{\mathfrak{s}})) = \varphi_i(dh_i(\bar{\mathfrak{s}})) = \varphi_i(\mathfrak{s}) = 0,$$

así que efectivamente  $\bar{\mathfrak{s}} \in \bar{\mathfrak{S}}_i$ .

El resultado anterior nos dice que  $dh_i(\bar{\mathfrak{S}}_{i+1}) = \mathfrak{S}_{i+1}$  (hemos probado  $\supset$ , la otra contención es obvia por la conmutatividad del diagrama para  $i - 1$ ). En consecuencia,  $dh_i(\Phi_{i+1}(\bar{A}^{\bar{\beta}_{i+1}})) = \mathfrak{S}_{i+1}$ . Por otro lado, sabemos que  $\varphi_{i+1}(R^{\beta_{i+1}}) = \mathfrak{S}_{i+1}$ . Con estos dos hechos, deducimos que existe al menos un homomorfismo de  $\bar{R}$ -módulos  $dh_{i+1}$  que hace conmutar el diagrama, y que este homomorfismo es sobreyectivo. Para terminar, la propiedad de “homogeneizar bien” se traslada de  $dh_i$  a  $dh_{i+1}$  por la conmutatividad del diagrama (teniendo en cuenta que  $\Phi_{i+1}$  respecta el  $(\bar{\mathbf{a}})$ -grado y  $\varphi_{i+1}$  respeta el  $(\mathbf{a})$ -grado).

**Nota 2.8.** Sea  $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{\bar{\beta}_i}\}$  la base estándar de  $R^{\bar{\beta}_i}$ , sea  $\{e_1, \dots, e_{\beta_i}\}$  la base estándar de  $R^{\beta_i}$ . Con una pequeña modificación en la prueba anterior, se puede lograr controlar la forma de los  $dh_i$ , de modo que, para todo  $i = -1, 0, \dots$ , se verifique

$$dh_i(\bar{e}_j) = e_j, \quad \text{para } j = 1, \dots, \beta_0.$$

La manera de lograrlo consistiría en tan solo fijar la resolución de  $\bar{R}$ , y luego ir construyendo una resolución de  $R$  que se acomode a esta condición.

Con todo esto, podremos hablar de “subir” sizigias de  $R$  a  $\bar{R}$  (tomar una de las infinitas contraímagenes por  $dh_i$ ) o “bajar” sizigias de  $\bar{R}$  a  $R$  (tomando la imagen por  $dh_i$ ). Esto nos permite estudiar la distinción entre las sizigias homogéneas y las sizigias no homogéneas de  $R$ :

**Observación 2.9.** Sea  $\mathfrak{S}_i$  una sizigia  $i$ -ésima de  $R$ , la subimos a  $\bar{\mathfrak{S}}_i$  una sizigia  $i$ -ésima de  $\bar{R}$  con grado mínimo. Entonces  $\bar{\mathfrak{S}}_i$  no involucra  $x_0$  si y solo si  $\mathfrak{S}_i$  es homogénea. En consecuencia, deducimos que combinar sizigias homogéneas da lugar a sizigias homogéneas, o lo que es lo mismo, las sizigias no homogéneas requieren combinar al menos una sizigia no homogénea.

De manera más exacta, decimos:

**Observación 2.10.** Dentro de los módulos  $i$ -ésimos de sizigias  $\bar{\mathfrak{S}}_1$  de  $\bar{R}$  deben aparecer al menos un elemento con  $x_i$  y al menos un elemento sin  $x_i$  para todo  $i = 0, \dots, n$ . Para ver esto, basta considerar los elementos  $x_0^{k-a_i} x_n^{a_i} - x_i^k$  para  $i = 1, \dots, n-1$ . En consecuencia, cada variable aparece en cada  $\bar{\mathfrak{S}}_i$ , debe haber una sizigia minimal donde intervenga. Este resultado también se traslada a  $R$ , teniendo en cuenta que, por la Observación 2.9, hablamos de no homogéneo/homogéneo en vez de hablar aparecer/no aparecer  $x_0$ .

Si bien los resultados anteriores se han enunciado en un contexto determinado, este se puede cambiar con facilidad:

**Nota 2.11.** Todas las ideas anteriores se pueden aplicar de forma análoga si decidimos homogeneizar “sobre la otra coordenada”.

**Nota 2.12.** También, en otras partes de este Trabajo de Fin de Máster se estudian las resoluciones de  $\bar{I}$  e  $I$ , en vez de con las resoluciones  $\bar{R}$  y  $R$ . Todo funciona igual, solo hace falta recordar que el paso “ $\dots \rightarrow \bar{A} \rightarrow \bar{A}/\bar{I} \rightarrow 0$ ” se reemplaza por “ $\dots \rightarrow \bar{I} \rightarrow 0$ ” (y análogamente para  $I$  y  $R$ ).

Para finalizar, a título de curiosidad, enunciaremos en la Nota siguiente un par de propiedades básicas de las curvas  $\mathcal{C}$  y  $\bar{\mathcal{C}}$  desde el punto de la Geometría Algebraica. Para probar estos resultados puede servir cualquier referencia introductoria como [Sha13] o [CLO15].

**Nota 2.13.** Supongamos que  $K$  es algebraicamente cerrado. Entonces ambas curvas son variedades algebraicas irreducibles de dimensión 1. Adicionalmente, la curva  $\mathcal{C}$  es la clausura de Zariski de la curva  $C$  en  $\mathbb{P}_K^n$ , que se obtiene añadiendo un solo punto en el infinito.

## 2.3. Complejos simpliciales asociados a un semigrupo

Sea  $S$  un semigrupo (afín o proyectivo) con un sistema de generadores fijo  $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_n\}$ , sea  $A = K[x_1, \dots, x_n]$ . En esta sección presentaremos una relación entre la resolución del  $A$ -módulo  $S$ -graduado  $K[S]$  y ciertos complejos simpliciales abstractos. Este es uno de los resultados más clásicos de la literatura, que proporciona una poderosa herramienta combinatoria para estudiar estos semigrupos.

Fijado cualquier elemento  $m \in S$ , es interesante preguntarse sobre cuáles son las diferentes maneras de obtenerlo como combinación lineal (con coeficientes en  $\mathbb{N}$ ) de los generadores. De forma más concreta, si partimos de una c.l.

$$m = u_1 a_1 + \dots + u_n a_n,$$

con  $u_1, \dots, u_n \geq 0$ , nos preguntamos sobre cuáles son los subconjuntos de índices  $J \subset \Lambda = \{1, \dots, n\}$  tales que se puede lograr  $u_j = 0$  simultáneamente para todo  $j \in J$ . Dicho de otro modo, los subconjuntos  $J \subset \Lambda$  tales que  $m - b_J \in S$ , donde  $b_J$  denota a la suma  $\sum_{j \in J} b_j$ . Estos subconjuntos de índices  $J$  asociados a  $m$  los llamaremos en ocasiones “razones” (en este caso, razones para que  $m$  pertenezca a  $S$ ). El conjunto de todas las razones se denomina “complejo de divisores libres de cuadrados”, y denotamos por

$$\Delta_m = \{j \subset J : m - b_j \in S\}.$$

Dada una razón  $J \in \Delta_m$ , es claro que cualquier subconjunto  $J' \subset J$  también es otra razón. Así que, efectivamente,  $\Delta_m$  es un complejo simplicial abstracto sobre  $\Lambda$ . Representa, “salvo multiplicidades” las posibles formas de obtener el elemento  $m$ .

Nuestro objetivo será pues estudiar las (dimensiones de las) homologías reducidas de estos  $\Delta_m$ , que nos servirán para deducir los números de Betti del  $A$ -módulo  $S$ -graduado  $K[S]$ .

**Nota 2.14.** En el caso proyectivo tendríamos  $\bar{S} = \{(k, 0), (k - a_1, a_1), \dots, (a_1, k - a_1), (0, k)\}$ ,  $\bar{A} = K[x_0, x_1, \dots, x_n]$ , una  $\bar{S}$ -graduación, y complejos simpliciales abstractos  $\Delta_{\ell, r}$  sobre  $\bar{\Lambda} = \{0, 1, \dots, n\}$ .

**Observación 2.15.** Si bien en  $\tilde{h}_i(\Delta_m)$  podemos considerar  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $m \in S$ , en realidad solo un número finito de ellas serán no nulas. Veamos por qué. Como manejamos  $g + 1$  puntos, los agujeros de los complejos simpliciales  $\Delta_m$  pueden tener dimensión  $g - 1$  a lo sumo, por lo que  $\tilde{h}_i(\Delta_m) = 0$  para  $i \geq g$ . Por otro lado, se verifica siempre que  $\tilde{h}_i(\Delta_m) = 0$  si  $i \leq 0$ , salvo en el caso especial de que  $\Delta_m = \emptyset$  y  $i = -1$ . En esa situación, como estamos considerando la homología reducida, tenemos  $\tilde{h}_{-1}(\Delta_m) = 1$ . Para terminar, se puede comprobar que  $\Delta_m$  es un símplice completo (que no tiene porqué ser el total) para  $m$  suficientemente alejado del origen, en esos casos  $\tilde{h}_i(\Delta_m) = 0$  para todo  $i$ .

Denotamos  $N_j = \ker \varphi_j$ . Los números de Betti se corresponden al número de elementos de un sistema minimal de generadores de los  $N_j$ . La versión graduada del Lema de Nakayama nos dice que este número coincide con la dimensión de los siguientes espacios vectoriales

$$V_j = N_j / A_+ N_j.$$

Estos a su vez se pueden descomponer en sus componentes graduados:

$$V_j = \bigoplus_{m \in S} V_j(m)$$

$$V_j(m) = (N_j)_m / (A_+ N_j)_m$$

Nuestro objetivo será pues calcular la dimensión de estos espacios  $V_j(m)$ . Esto es justamente lo que hace el Teorema principal de esta sección. Aparició por primera vez en [CM91], si bien nosotros tomaremos como referencia [MLLPC98]. Antes de enunciarlo, vamos a preparar el terreno <sup>1</sup>.

Consideramos la sucesión de elementos de  $A$  siguiente:  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$  (son justamente las variables de  $A = K[x_1, \dots, x_n]$ ). Esta sucesión es  $R$ -regular. Como consecuencia, el complejo de Koszul  $\mathcal{K}(\underline{x})$  es exacto. por otro lado, la definición de la aplicación borde para los complejos simpliciales abstractos es idéntica (en el criterio de signos) a la del complejo de Koszul. Esto nos permite deducir que, para cada  $m \in S$ :

$$\tilde{H}_j(\mathcal{K}(\underline{n}) \otimes_A R)_m \simeq \tilde{H}_j(\Delta_m),$$

donde  $\underline{n}$  es la sucesión de elementos de  $R$  formada por las imágenes de  $\underline{x}$  por  $\gamma: A \rightarrow R$ . Ya estamos listos para probar el Teorema:

**Teorema 2.16.** *Sea  $S$  un subsemigrupo de  $\mathbb{N}^n$ . Para todo  $j \geq 0$  y para todo  $m \in S$  se verifica*

$$V_j(m) \cong \tilde{H}_j(\Delta_m),$$

*y este homomorfismo es explícito.*

<sup>1</sup>Debido al poco dominio del Álgebra Homológica por parte del autor de este Trabajo de Fin de Máster, es posible que los razonamientos que prosiguen contengan errores.

**Demostración.** Observemos que  $A_+ = (x_1, \dots, x_n)$ , y recordemos que tanto  $R = A/I$  como  $K = A/A_+$  son  $A$ -módulos  $S$ -graduados.

Para empezar, sabemos que

$$\mathrm{Tor}_A^j(R, K)_m \simeq \mathrm{Tor}_A^j(K, R)_m$$

para cada componente  $S$ -graduado. Por definición,  $\mathrm{Tor}_A^j(R, K)_m$  se obtiene tensorizando una resolución minimal de  $R$  con  $K$ . Esto proporciona

$$\mathrm{Tor}_A^j(R, K)_m \simeq V_j(m).$$

Por otro lado,  $\mathrm{Tor}_A^j(K, R)_m$  se obtiene tensorizando el complejo de Koszul  $\mathcal{K}(\underline{x})$  por  $R$ :

$$\mathrm{Tor}_A^j(K, R) = \mathrm{Tor}_A^j(A/A_+, R) \simeq \tilde{H}_j(\mathcal{K}(\underline{x}) \otimes_A R) = \tilde{H}_j(\mathcal{K}(\underline{n}) \otimes_A R).$$

y sabemos  $\tilde{H}_j(\mathcal{K}(\underline{n}, R))_m \simeq \tilde{H}_j(\Delta_m)$ , lo que nos permite concluir

$$\mathrm{Tor}_A^j(K, R)_m \simeq \tilde{H}_j(\Delta_m).$$

Combinando los isomorfismos anteriores acaba la prueba.  $\square$

El anterior Teorema proporciona por tanto un modo puramente combinatorio de calcular los números de Betti:

**Corolario 2.17.** *Sea  $S$  un subsemigrupo de  $\mathbb{N}^n$ . Para todo  $j \geq 0$  y para todo  $m \in S$  se verifica*

$$\beta_{jm} = \dim_K \tilde{H}_j(\Delta_m).$$

**Demostración.** Obvio con lo discutido anteriormente.  $\square$

## 2.4. El grafo de Apéry

Para estudiar mejor los datos combinatorios asociados a los  $\Delta_m$ , introducimos otro nuevo objeto, un grafo  $\mathcal{G}$  que recibe el nombre de “grafo de Apéry”. Este grafo está íntimamente relacionado con  $\mathcal{Q}$ , el conjunto de Apéry del semigrupo  $S$ .

Para definirlo, tomamos  $\Lambda' \subset \Lambda$  un conjunto de generadores “permitidos”. Este conjunto depende del carácter afín o proyectivo del semigrupo  $S$ :

- Si  $S$  es afín,  $\Lambda' = \Lambda \setminus \{e\}$ , para cierto índice  $e$  arbitrario pero fijo.
- Si  $S$  es proyectivo  $\Lambda' = \Lambda \setminus \{(0, d), (d, 0)\}$ .

A si mismo, llamamos  $G(S) = \mathbb{Z}$  si  $S$  es afín, y a  $G(S) = \mathbb{Z}^2$  si  $S$  es proyectivo. Es el mínimo grupo abeliano que contiene a  $S$ .

**Definición 2.18.** El grafo de Apéry  $\mathcal{G}$  asociado a un semigrupo  $S$  es el grafo dirigido acíclico con aristas coloreadas:

- Cuyos vértices son los elementos  $v \in G(S)$  tales que existe un subconjunto de índices (una razón)  $I \subset \Lambda'$  de modo que  $v - a_I \in \mathcal{Q}$ .
- Cuyas aristas de un vértice  $v$  a otro  $w$  son los índices  $s$  tal que  $w = v + a_s$ .

Ahora fijamos un vértice  $v \in \mathcal{G}$ . Llamamos  $\mathcal{Q}_v$  al subconjunto de razones de  $v$  para ser vértice de  $\mathcal{G}$ . Aunque  $\mathcal{Q}_v$  no tiene porqué ser un complejo simplicial abstracto, podemos de todos modos calcular de nuevo la homología. Para ello, sea  $C_i(\mathcal{Q}_v)$  el  $K$ -espacio vectorial generado las razones de  $v$  de longitud  $i + 1$ . Tenemos el siguiente complejo de cadenas

$$0 \longrightarrow C_n(\mathcal{Q}_v) \xrightarrow{\delta_g} \dots \xrightarrow{\delta_3} C_2(\mathcal{Q}_v) \xrightarrow{\delta_2} C_1(\mathcal{Q}_v) \xrightarrow{\delta_1} C_0(\mathcal{Q}_v) \xrightarrow{\epsilon} \bar{R} \longrightarrow 0,$$

donde ahora los diferenciales son las proyecciones de los correspondientes  $\partial_{n-1}, \dots, \partial_1, \partial_1, \epsilon$  sobre los componentes que existan en el conjunto de llegada.

El siguiente Teorema muestra la utilidad del grafo de Apéry. Pero, en el contexto de este Trabajo de Fin de Máster, este resultado es tan solo complementario. Por tanto, no haremos la demostración: esta se puede ver en [CG97]:

**Teorema 2.19.** *Para semigrupos numéricos afines y para semigrupos numéricos proyectivos Cohen-Macaulay se verifica que*

$$\tilde{H}_i(\Delta_m) \cong H_i(\mathcal{Q}_m),$$

*y esta homología es explícita.*

Tanto el cálculo de  $\Delta_m$  como el cálculo de  $\mathcal{Q}_m$  son computacionalmente poco eficientes, si lo que nos interesa es obtener los números de Betti. El verdadero poder de estos resultados es facilitar la demostración de resultados de tipo teórico. Veremos en el siguiente Capítulo uno de esos resultados.

# Capítulo 3

## Prueba de Vu para la Conjetura de Herzog-Srinivasan

### 3.1. Introducción

#### 3.1.1. La conjetura

Sea  $(\mathbf{a})$  un submonoide de  $\mathbb{N}$  generado por  $\mathbf{a} = a_1 < \dots < a_n$ . Consideramos los distintos submonoides de  $\mathbb{N}$  que se obtienen a partir de un simple desplazamiento de los generadores:

$$(\mathbf{a}), (\mathbf{a} + 1), (\mathbf{a} + 2), \dots, (\mathbf{a} + j), \dots,$$

Sus ideales asociados son, respectivamente:

$$I(\mathbf{a}), I(\mathbf{a} + 1), I(\mathbf{a} + 2), \dots, I(\mathbf{a} + j), \dots$$

donde  $I(\mathbf{a} + j) = \ker \gamma_{(\mathbf{a}+j)}$  para todo  $j = 0, 1, 2, \dots$ . En estas condiciones, Jürgen Herzog y Hema Srinivasan planteaban el siguiente problema:

#### **Conjetura.**

*Los números de Betti de  $I(\mathbf{a} + j)$  son eventualmente periódicos en  $j$  con periodo  $a_n - a_1$ .*

Esta cuestión fue resuelta por Thanh Vu en [Vu14]:

#### **Teorema 3.1 (de Vu).**

*Los números de Betti de  $I(\mathbf{a} + j)$  son eventualmente periódicos en  $j$  con periodo  $a_n - a_1$ .*

Nuestro objetivo en este Capítulo final consiste en desglosar, detallar, modificar y ampliar donde proceda, la prueba de Vu. Tanto la estructura por secciones como la numeración de los Teoremas serán análogas a las del artículo.

#### 3.1.2. La idea

Como vimos en el Capítulo anterior, los números de Betti de  $I(\mathbf{a}) = \ker \gamma_{(\mathbf{a})}$  reflejan simplemente las distintas formas en que se pueden combinar los generadores  $a_1, \dots, a_n$  de  $(\mathbf{a})$ . Las correspondientes sizigias se dividen en dos tipos: las homogéneas y las no homogéneas.

Cuando consideramos un desplazamiento  $j$  de los generadores, suceden dos hechos remarcables. Las sizigias homogéneas permanecen invariantes, mientras que el grado las sizigias no homogéneas aumentan indefinidamente. En breve probaremos esto rigurosamente, pero realmente basta

con un ejemplo de juguete para entender por qué sucede esto. Supongamos que tenemos  $\mathbf{a} = \{1, 2, 3, 4\}$ : existen relaciones lineales de grado bajo entre los generadores:

$$1 + 4 = 2 + 3, \quad 2 + 2 = 4.$$

Consideramos ahora  $j = 100$ , buscamos nuevas relaciones:

$$\begin{aligned} 1 + 4 = 2 + 3 &\rightsquigarrow (1 + 100) + (4 + 100) = (2 + 100) + (3 + 100) \\ &\text{(la relación homogénea permanece invariante)} \\ 2 + 2 = 4 &\rightsquigarrow 51 \cdot (4 + 100) = 52 \cdot (2 + 100) \\ &\text{(la relación no homogénea se complica)} \end{aligned}$$

De este modo, para  $j$  suficientemente grande, se acaba escindiendo en dos la tabla de Betti. Este fenómeno también sucede cuando pasamos al caso proyectivo. Ahí el estudio se simplifica, pues todas las sizigias  $(\bar{\mathbf{a}})$ -homogéneas son necesariamente también homogéneas. Experimentos numéricos muestran que los correspondientes complejos simpliciales  $\Delta_{\ell,r}$  presentan una estructura de doble cono. Esta estructura permite mostrar el comportamiento de periodicidad, y también nos asegura que la homología no cambia al volver al caso afín.

En resumen, para  $j$  suficientemente grande:

- En la Sección 3.3 probaremos la estructura de doble cono de los  $\Delta_{\ell,r}$ .
- En la Sección 3.4 probaremos la periodicidad de los números de Betti de  $\bar{I}(\mathbf{a} + j)$ .
- En la Sección 3.5 probaremos la igualdad de los números de Betti de  $\bar{I}(\mathbf{a} + j)$  e  $I(\mathbf{a} + j)$ .

## 3.2. Preliminares técnicos

Antes de comenzar a probar los resultados, conviene adelantar algunas cuentas y consideraciones técnicas.

### 3.2.1. Sobre los casos triviales

Suponemos durante todo el Capítulo que  $n \geq 3$ . El caso  $n = 1$  es trivial (todos los números de Betti salvo el 0-ésimo se anulan), y el caso  $n = 2$  se puede arreglar sin demasiada dificultad.

### 3.2.2. El ideal $J(\mathbf{a})$

Llamamos  $J(\mathbf{a})$  al ideal generado por los elementos homogéneos de  $I(\mathbf{a})$  (cuando no ponemos nada, nos referimos siempre a la graduación estándar, en vez de la  $(\mathbf{a})$ -graduación).

Es fácil ver que que todos los  $I(\mathbf{a} + j)$  comparten los mismos elementos homogéneos. Es decir,  $J(\mathbf{a}) = J(\mathbf{a} + j)$  para todo  $j = 0, 1, \dots$ . De hecho se puede decir bastante más:

$$J(\mathbf{a}) = \bigcap_{j \geq 0} I(\mathbf{a} + j).$$

Vamos a comprobar todo esto. Sea  $j \geq 0$  arbitrario, sea  $F \in R$  un polinomio homogéneo con grado  $d$ . Sea  $f$  un término monomial cualquiera de  $F$ ,

$$f = \lambda x_1^{u_1} \dots x_n^{u_n},$$

donde necesariamente  $d = u_1 + \dots + u_n$ , y definimos también  $D = u_1 a_1 + \dots + u_n a_n$ . Veamos como cambia su imagen de  $f$  según cambia el morfismo  $\gamma$ :

$$\begin{aligned}\gamma_{(\mathbf{a})}(f) &= \lambda t^{u_1 a_1 + \dots + u_n a_n} = \lambda t^D, \\ \gamma_{(\mathbf{a}+j)}(f) &= \lambda t^{u_1(a_1+j) + \dots + u_n(a_n+j)} = \lambda t^{dj} t^D.\end{aligned}$$

Observemos que, por ser  $F$  homogéneo, el término  $t^{dj}$  que se añade al pasar de  $\gamma_{(\mathbf{a})}(f)$  a  $\gamma_{(\mathbf{a}+j)}(f)$  es siempre el mismo. Por tanto, las cancelaciones también serán iguales en  $\gamma_{(\mathbf{a})}(F)$  y  $\gamma_{(\mathbf{a}+j)}(F)$ , lo que nos permite concluir que  $F \in I(\mathbf{a})$  si y solo si  $F \in I(\mathbf{a} + j)$ . Es decir,  $J(\mathbf{a}) = J(\mathbf{a} + j)$  para todo  $j = 0, 1, \dots$

Para probar la otra contención, consideramos

$$F \in \bigcap_{j \geq 0} I(\mathbf{a} + j),$$

un polinomio de grado  $d$ .

Debemos probar que  $F$  es combinación lineal de polinomios homogéneos de  $I(\mathbf{a})$ . Para ello, consideraremos  $F_h$  la parte homogénea de mayor grado de  $F$ , y  $F_{hh}$  la parte  $(\mathbf{a})$ -homogénea de mayor  $(\mathbf{a})$ -grado de  $F_h$ . Nuestro objetivo será probar que  $F_{hh} \in I(\mathbf{a})$ . El mismo argumento se podrá repetir aplicado a  $F - F_h$ . De este modo, procediendo por inducción sobre el  $(\mathbf{a})$ -grado y el grado, se acaba probando el resultado en su totalidad.

Primero notemos que, según aumenta  $j$ , el  $(\mathbf{a} + j)$ -grado de los monomios de  $F_h$  aumenta en  $dj$  (como hemos visto en la prueba de la primera contención). Por otro lado, para los monomios de  $F$  que no están en  $F_h$ , lo máximo que puede aumentar su  $(\mathbf{a} + j)$ -grado es  $(d - 1)j$ .

Llamemos  $D$  al  $(\mathbf{a})$ -grado de  $F$ , es decir, el mayor de los  $(\mathbf{a})$ -grados de entre todos los monomios de  $F$ . A raíz de las observaciones anteriores, para  $j > D$ , cualquier término de  $F_h$  tendrá estrictamente mayor  $(\mathbf{a} + j)$ -grado que cualquier término de  $F - F_h$ . Más concretamente,  $F_{hh}$  será el término con estrictamente mayor  $(\mathbf{a} + j)$ -grado de  $F$ . Esto significa que, cuando tomemos la imagen de  $F$  por  $\gamma_{(\mathbf{a}+j)}$  (que debe ser 0, pues  $F \in I(\mathbf{a} + j)$ ),  $F_{hh}$  se tendrá que cancelar a sí mismo. Dicho de otro modo,  $F_{hh} \in I(\mathbf{a} + j)$ , y al ser homogéneo,  $F_{hh} \in I(\mathbf{a} + j')$  para todo  $j' \geq 0$ . En particular,  $F_{hh} \in I(\mathbf{a})$ , con lo que hemos acabado.

### 3.2.3. Notación

Establecemos la siguiente notación:

- Sea  $n \geq 3$ . El caso  $n = 1$  es trivial, y el caso  $n = 2$  se puede probar a mano con facilidad.
- $K$  es un cuerpo arbitrario.
- $(\mathbf{a})$  es el semigrupo que queremos estudiar, donde  $\mathbf{a} = a_1 < \dots < a_n$ . En particular  $n$  es el número de generadores. Suponemos que  $n \geq 3$ .
- $(\mathbf{b})$  es un único semigrupo asociado a todos los  $(\mathbf{a} + j)$ , para cualquier desfase  $j$ . Se define como  $\mathbf{b} = b_1 > \dots > b_n$ , con  $b_i = a_n - a_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Observemos que  $b_n = 0$ . También observemos que  $b_1 > 1$  (pues  $b_1 > b_2 > b_3 \geq 0$ ).
- $d$  es el máximo común divisor de  $b_1, \dots, b_n$ . En particular,  $d \mid b_1, \dots, b_n$ .
- $c$  es el conductor del semigrupo numérico generado por  $b_1/d < \dots < b_n/d$ .
- $B = \sum_{i=1}^n b_i + n + d$  es una constante algo extraña.
- $N = \max\{b_1(n + \text{reg } J(\mathbf{a})), b_1 b_2 \left(\frac{dc+b_1}{b_{n-1}} + B\right)\}$  es una constante bastante extraña. Es una cota definida de manera bastante fina.

- Por lo general nos situaremos en el caso  $j > N$ .
- Llamamos  $k = a_n + j$  la separación entre los niveles de  $(\overline{\mathbf{a} + j})$ , un semigrupo en  $\mathbb{N}^2$  que definiremos en breve.
- Llamamos  $e = d / \gcd(d, k)$ . Esto sirve para decir que si  $d \mid Ak$  para cierto  $A$  natural, entonces (de hecho, si y solo si)  $e \mid A$ . En particular,  $e \leq d \leq b_{n-1} < b_{n-2}, \dots, b_1$ .

### 3.2.4. Algunas desigualdades

Escribimos aquí algunas desigualdades que se derivan de forma directa de las definiciones. Estas se usarán asiduamente más adelante:

Como  $j > N$ , entonces también  $k > N$ . En particular se satisfacen

$$k/b_1 > n + \text{reg } J(\mathbf{a}) \quad (3.1)$$

$$\frac{k}{b_1 b_2} > \frac{dc + b_1}{b_{n-1}} + B \quad (3.2)$$

Puesto que  $b_1 b_2 > b_{n-1} \geq 1$ , tenemos que  $k > 2(dc + B)$ . Esto nos permite obtener algunas variantes de 3.2:

$$k > dc + B, \quad (3.3)$$

$$k > b_1 + \dots + b_{n-1} + dc + b_1 \quad (3.4)$$

Para terminar, notemos que como  $n \geq 3$ , se verifica que  $b_2 \geq b_{n-1} \geq d$  y que  $b_1 \geq b_{n-2} \geq 2d$ .

### 3.2.5. Representación de un elemento

Sea  $u$  un elemento que es divisible entre  $d$  y tal que  $u \geq dc$ . En particular,  $u \in (\mathbf{b})$ . Vamos a exponer un modo de representar este tipo de elementos que permita después obtener cotas con facilidad.

Sea  $t$  el mayor entero no negativo tal que  $dc < u - tb_1 < dc + b_1$ . Como  $d \mid (u - tb_1)$  (pues  $d \mid b_1$ ), deducimos que también  $u - tb_1 \in (\mathbf{b})$ . Tomamos una c.l. arbitraria para  $u - tb_1$ ,

$$u - tb_1 = w_1 b_1 + \dots + w_n b_n.$$

Abreviamos y despejamos  $u$ :

$$u = tb_1 + \mathbf{w} \cdot \mathbf{b}.$$

¿Qué tiene de especial esta representación? Tenemos las desigualdades:

$$t < \frac{u}{b_1}, \quad |\mathbf{w}| < \frac{dc + b_1}{b_{n-1}}.$$

La primera desigualdad es inmediata, pues  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{b} \geq 0$ . Para la segunda desigualdad, notemos que  $u - tb_1 = \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} \geq |\mathbf{w}| b_{n-1}$ , pues  $b_1, \dots, b_{n-2} > b_{n-1}$  y  $b_n = 0$ .

### 3.2.6. Significado de la cota con la regularidad

Observemos que, por definición de regularidad y de dimensión proyectiva, el grado de una sizigia minimal de  $J(\mathbf{a})$  viene siempre acotado superiormente por  $\text{reg } J(\mathbf{a}) + \dim J(\mathbf{a})$ . A su vez,  $\dim J(\mathbf{a}) \leq n$  por el Teorema de las Sizigias de Hilbert, ya que  $J(\mathbf{a})$  es un ideal de  $K[x_1, \dots, x_n]$ .

Esto nos servirá para realizar el siguiente razonamiento. Supongamos que tenemos una sizigia minimal de  $I(\mathbf{a} + j)$  con grado estrictamente mayor que  $\text{reg } J(\mathbf{a}) + n$ . Esta sizigia no puede ser homogénea. De lo contrario, también sería una sizigia minimal de  $J(\mathbf{a})$ . Pero su grado es estrictamente mayor que  $\text{reg } J(\mathbf{a}) + \dim J(\mathbf{a})$ , absurdo.

### 3.3. Estructura de “doble-cono”

En esta sección trataremos con los ideales  $\bar{I}(\mathbf{a} + j)$  y los complejos simpliciales asociados  $\Delta_{\ell,r}(j)$ . En este contexto, el Corolario 2.17 toma la siguiente forma:

**Teorema 3.2 (3.2).** *Para todo  $i$  y para todo  $\ell$  se verifica*

$$\beta_{i\ell}(\bar{I}(\mathbf{a} + j)) = \dim_K \operatorname{Tor}_i^{\bar{A}}(\bar{I}(\mathbf{a} + j), K)_\ell = \sum_{r \geq 0} \dim_K \tilde{H}_i(\Delta_{\ell,r}(j)).$$

El primer resultado que proponemos marca la separación de los números de Betti de  $\bar{I}(\mathbf{a} + j)$  en dos partes, cuando  $j$  es suficientemente grande. La primera parte es la correspondiente a  $J(\mathbf{a})$ , es decir, la procedente de las combinaciones lineales homogéneas. La segunda parte es la procedente de las combinaciones lineales no homogéneas

**Proposición 3.3 (3.3).** *Supongamos que  $j > N$ . Toda sizigia de  $\bar{I}(\mathbf{a} + j)$  en la que interviene  $x_0$  tiene grado estrictamente mayor que  $n + \operatorname{reg} J(\mathbf{a})$ .*

**Demostración.** Por la Notación 2.5 (realmente, por la adaptación a  $\bar{I}$  de esa nota), será suficiente probar que todo elemento de  $\bar{I}(\mathbf{a} + j)$  en el que aparece  $x_0$  cumple la propiedad. De hecho, basta con restringirnos a cualquier conjunto minimal de generadores binomiales de  $\bar{I}(\mathbf{a} + j)$ .

Sea pues

$$F = x_0^{u_0} x_1^{u_1} \dots x_n^{u_n} - x_0^{v_0} x_1^{v_1} \dots x_n^{v_n}$$

un generador binomial minimal de  $\bar{I}(\mathbf{a} + j)$  en el que aparece  $x_0$ . Sin pérdida de generalidad, suponemos que  $u_0 > 0, v_0 = 0$ . Ahora recordemos que, por definición,  $\bar{I}(\mathbf{a} + j) = \ker \bar{\gamma}_{(\mathbf{a}+j)}$ . En consecuencia, el  $(\bar{\mathbf{a}})$ -grado  $(\ell, r)$  de ambos monomios de  $F$  debe ser el mismo. Igualar en  $\ell$  e igualar en  $r$  proporcionan, respectivamente, las siguientes relaciones entre los exponentes:

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = v_1 + \dots + v_n \quad (\text{igualdad en } \ell), \quad (3.5)$$

$$u_0 k + u_1 b_1 + \dots + u_n b_n = v_1 b_1 + \dots + v_n b_n \quad (\text{igualdad en } r). \quad (3.6)$$

La primera relación 3.5 nos dice que  $F$  es homogéneo, mientras que la segunda 3.6 permite deducir que

$$v_1 b_1 + \dots + v_n b_n \geq u_0 k \geq k.$$

Con todo esto, estamos listos para acotar el grado de  $F$ :

$$\begin{aligned} \deg F &= v_1 + \dots + v_n && (\text{pues } f \text{ es homogéneo}) \\ &\geq k/b_1 && (\text{por 3.6, ya que } b_1 > b_2, \dots, b_n \text{ y } u_0 > 0) \\ &> n + \operatorname{reg} J(\mathbf{a}). && (\text{por 3.1}) \end{aligned}$$

□

Cuando nos reducimos al caso en el que la sizigia es minimal (es decir, da lugar a un número de Betti), el resultado anterior se convierte en una equivalencia:

**Proposición 3.4 (3.3’).** *Supongamos que  $j > N$ . En una sizigia minimal de  $\bar{I}(\mathbf{a} + j)$  interviene  $x_0$  si y solo si tiene grado estrictamente mayor que  $n + \operatorname{reg} J(\mathbf{a})$ .*

**Demostración.** La implicación  $\Rightarrow$  es un caso particular de la Proposición anterior. Para probar la otra implicación  $\Leftarrow$ , procederemos por reducción al absurdo.

Supongamos que  $S_i$  es una sizigia  $i$ -ésima minimal de  $\bar{I}(\mathbf{a} + j)$  en la que no interviene  $x_0$  y con grado estrictamente mayor que  $n + \operatorname{reg} J(\mathbf{a})$ . Entonces,  $dh_i(S_i)$  es una sizigia minimal homogénea de  $I(\mathbf{a} + j)$ , y por tanto también de  $J(\mathbf{a})$ . Pero como  $dh_i$  conserva el grado, tenemos que  $\deg dh_i(S_i) > n + \operatorname{reg} J(\mathbf{a})$ . En conclusión,  $dh_i(S_i)$  da lugar a un número de Betti  $\beta_{im}$  de  $J(\mathbf{a})$  no nulo con  $m > n + \operatorname{reg} J(\mathbf{a})$ , absurdo. □

**Observación 3.5 (3.3)**). En particular aparece un elemento con  $x_0$ . Esto nos dice que debe existir al menos un generador binomial minimal de  $\bar{I}(\mathbf{a} + j)$  que involucre  $x_0$ . En consecuencia, cuando  $j > N$ , la Proposición 3.4 nos dice que el grado  $\ell$  de ese generador binomial minimal es estrictamente mayor que  $n + \text{reg } J(\mathbf{a})$  y por tanto

$$\text{reg } I(\mathbf{a} + j) > n + \text{reg } J(\mathbf{a}),$$

hecho que se usará más adelante.

La anterior Proposición 3.3 nos permite afrontar la demostración de nuestro primer “Lema técnico”. Este nos muestra que los números de Betti de  $\bar{I}(\mathbf{a} + j)$  se restringen a una pequeña franja.

**Lema 3.6 (3.4)**. *Supongamos que  $j > N$ . Supongamos además que  $\ell > n + \text{reg } J(\mathbf{a})$ . Si el complejo simplicial  $\Delta_{\ell,r}$  tiene homología no trivial, entonces el par  $(\ell, r)$  verifica*

$$ek \leq r < ek + dc + B, \quad (3.7)$$

$$\ell \geq r/b_1. \quad (3.8)$$

**Demostración.** .

Supongamos que existe  $i \geq 0$  tal que  $H_i(\Delta_{\ell,r}) \neq 0$ . Por el Teorema 3.2, esto significa que existen sizigias minimales  $i$ -ésimas de  $\bar{I}(\mathbf{a} + j)$  con grado  $(\ell, r)$ . Por hipótesis del enunciado,  $\ell > n + \text{reg } J(\mathbf{a})$ , así que la Proposición 3.4 nos dice que debe intervenir  $x_0$  en la sizigia. En consecuencia, asociada a esta sizigia minimal,  $\Delta_{\ell,r}$  debe tener una cara (y por tanto, una faceta) con el vértice 0.

Además, para que la homología de  $\Delta_{\ell,r}$  sea no trivial, también debe haber facetas que no contengan al vértice 0. De lo contrario,  $\Delta_{\ell,r}$  sería un cono, que es acíclico por la Proposición 1.34.

Sabemos pues que existen al menos dos c.l:

$$y_0k + y_1b_1 + \dots + y_nb_n = r, \quad (3.9)$$

$$z_0k + z_1b_1 + \dots + z_nb_n = r, \quad (3.10)$$

donde  $y_0 > 0$ ,  $z_0 = 0$ , y  $\sum_{i=0}^n y_i = \sum_{i=0}^n z_i = \ell$ .

Como  $d \mid b_1, \dots, b_n$ , la relación 3.10 nos dice que  $d \mid r$ . Esta relación también nos muestra que  $\ell \geq r/b_1$ , puesto que  $b_1 > b_2, \dots, b_n$ . Pasando ahora a la otra relación 3.9, deducimos que  $d \mid y_0k$ , que es lo mismo que decir que  $e \mid y_0$ . También vemos que  $y_0k \leq r$ , y por tanto tenemos  $r \geq y_0k \geq ek$ .

La última desigualdad que falta por probar es  $r < ek + dc + B$ . Supongamos que tuviésemos  $r \geq ek + dc + B$ . Puesto que  $B > \sum_{i=1}^n b_i$  y  $b_n = 0$ , al reordenar obtenemos

$$r - ek - \sum_{i=1}^{n-1} b_i > dc.$$

Entonces podemos aplicar la Subsección 3.2.5 a  $r - ek$  para escribir

$$r = ek + \sum_{i=1}^{n-1} b_i + tb_1 + \mathbf{w} \cdot \mathbf{b},$$

con

$$t < \frac{r - ek}{b_1}, \quad |\mathbf{w}| < \frac{dc + b_1}{b_{n-1}}. \quad (3.11)$$

Ahora aplicamos 3.2,

$$\begin{aligned} \frac{dc + b_1}{b_{n-1}} + B + \frac{r - ek}{b_1} &< \frac{k}{b_1 b_2} - \frac{ek}{b_1} + \frac{r}{b_1} && \text{(por 3.2)} \\ &\leq \frac{r}{b_1} && \text{(obvio que } ek/b_1 \geq k/b_1 b_2) \\ &\leq \ell. && \text{(ya probado arriba)} \end{aligned}$$

Utilizando esta relación, 3.11 y que  $e + n < B$ , podemos obtener

$$|\mathbf{w}| + e + n + t < \frac{dc + b_1}{b_{n-1}} + e + n + \frac{r - ek}{b_1} < \ell. \quad (3.12)$$

Esta última desigualdad es la que nos permite llegar a contradicción. Veamos. Consideramos los siguientes coeficientes:

$$\begin{cases} u_0 &= e, \\ u_1 &= t + 1 + w_1, \\ u_i &= w_i + 1 \text{ para } i = 2, \dots, n-1, \\ u_n &= 1 + \ell - (t + e + n + |\mathbf{w}|). \end{cases}$$

Si uno mantiene en mente que  $b_n = 0$ , es fácil comprobar que  $\mathbf{u} = (u_0, \dots, u_n)$  es otra solución de 3.9 con  $\sum_{i=0}^n u_i = \ell$ . En esta solución es claro que  $u_0, u_1, \dots, u_{n-1} > 0$ . La desigualdad 3.12 nos dice que también  $u_n > 0$ . Por tanto, concluimos que la cara  $\{0, 1, \dots, n\}$  también pertenece a  $\Delta_{\ell, r}$ . Es decir,  $\Delta_{\ell, r} = \mathbb{B}^{n-1}$ , que por la Proposición 1.35 tiene homología nula, absurdo.  $\square$

Como consecuencia del Lema anterior, obtenemos una familia de relaciones que explican la procedencia e importancia de  $e$  en la periodicidad de los números de Betti.

Nótense las múltiples y sutiles diferencias entre las cuatro:

**Lema 3.7 (3.4').** *Supongamos que  $j > N$  y que  $\ell > n + \text{reg } J(\mathbf{a})$ .*

I) *Si  $\Delta_{\ell, r}(j)$  tiene homología no trivial, entonces cualquier c.l. para  $r$ ,*

$$y_0 k + y_1 b_1 + \dots + y_n b_n = r, \quad (3.13)$$

*con  $y_0 > 0$  debe tener  $y_0 = e$ .*

II) *Si  $\Delta_{\ell, r}(j)$  tiene homología no trivial, entonces cualquier c.l. para  $r + eb_1$  con  $k$  reemplazado por  $k + b_1$ ,*

$$y_0(k + b_1) + y_1 b_1 + \dots + y_n b_n = r + eb_1, \quad (3.14)$$

*con  $y_0 > 0$  debe tener  $y_0 = e$ .*

III) *Si  $\Delta_{\ell, r}(j + b_1)$  tiene homología no trivial, entonces cualquier c.l. para  $r - eb_1$  con  $k + b_1$  reemplazado por  $k$ ,*

$$y_0 k + y_1 b_1 + \dots + y_n b_n = r - eb_1, \quad (3.15)$$

*con  $y_0 > 0$  debe tener  $y_0 = e$ .*

IV) *Si  $\Delta_{\ell, r}(j + b_1)$  tiene homología no trivial, entonces cualquier c.l. para  $r$ ,*

$$y_0(k + b_1) + y_1 b_1 + \dots + y_n b_n = r, \quad (3.16)$$

*con  $y_0 > 0$  debe tener  $y_0 = e$ .*

**Demostración.** La prueba del Lema anterior nos mostraba que, en el primer caso,  $d \mid r$ , de donde se deducía que  $d \mid y_0 k$ , que a su vez equivale a decir que  $e \mid y_0$ . Este mismo argumento se puede emplear en los otros tres casos. La única diferencia consiste en la aparición de los sumandos adicionales  $y_0 b_1$  y  $eb_1$ . Pero recordemos que  $d \mid b_1$ , así que dichos términos pueden ser ignorados sin perjuicio alguno al argumento.

También son similares las cuatro cuentas que presentamos a continuación:

I) Sean  $y_0, y_1, \dots, y_n$  los coeficientes de la c.l. 3.13. Operamos:

$$\begin{aligned} y_0 &\leq \frac{r}{k} && \text{(obvia pues todos los sumandos son no negativos)} \\ &< \frac{ek + dc + B}{k} && \text{(por el Lema 3.4)} \\ &< e + 1. && \text{(pues } (dc + B)/k < 1 \text{ por 3.3)} \end{aligned}$$

Como  $e \mid y_0$ , la única opción posible es que  $y_0 = e$ .

II) Este caso se podría deducir del anterior. Pero también se puede simplemente hacer la cuenta. Sean  $y_0, y_1, \dots, y_n$  los coeficientes de la c.l. 3.14. Operamos:

$$y_0 \leq \frac{r + eb_1}{k + b_1} < \frac{ek + dc + B + eb_1}{k + b_1} = \frac{e(k + b_1) + dc + B}{k + b_1} < e + 1.$$

Con esto, deducimos de nuevo que  $y_0 = e$ .

III) Sean  $y_0, y_1, \dots, y_n$  los coeficientes de la c.l. 3.15. Operamos:

$$y_0 \leq \frac{r - eb_1}{k} < \frac{e(k + b_1) + dc + B - eb_1}{k} = \frac{ek + dc + B}{k} < e + 1.$$

Con esto, deducimos de nuevo que  $y_0 = e$ .

IV) Este caso se podría deducir del anterior. Pero también se puede simplemente hacer la cuenta. Sean  $y_0, y_1, \dots, y_n$  los coeficientes de la c.l. 3.16. Operamos:

$$y_0 \leq \frac{r}{k + b_1} < \frac{e(k + b_1) + dc + B}{k + b_1} < e + 1.$$

Con esto, deducimos de nuevo que  $y_0 = e$ .

□

A continuación, planteamos uno de los resultados más profundos del artículo de Vu. Proporciona una útil descripción de los complejos simpliciales que nos interesan:

**Teorema 3.8 (3.5, estructura de doble cono).** *Supongamos que  $j > N$ . Supongamos además que  $\ell > n + \text{reg } J(\mathbf{a})$  y que  $\Delta_{\ell, r}$  tiene homología no trivial. Dada una faceta  $F$  de  $\Delta_{\ell, r}$ , ocurre que:*

- o bien  $0 \notin F$ , y en ese caso  $1 \in F$ ,
- o bien  $0 \in F$ , y en ese caso  $n \in F$ .

En particular,  $\Delta_{\ell, r}$  es unión de un cono con vértice 0 y otro cono con vértice 1.

**Demostración.** Supongamos que existe una faceta  $F$  de  $\Delta_{\ell,r}$  con  $0, 1 \notin F$ . Esto significa que tenemos una c.l.:

$$y_0 k + y_1 b_1 + \dots + y_n b_n = r, \quad (3.17)$$

donde  $y_0 = y_1 = 0$  y  $\sum_{i=0}^n y_i = \ell$ . Como  $b_2 > b_3, \dots, b_n$ , deducimos que  $\ell \geq \frac{r}{b_2}$ .

Se pueden aplicar las hipótesis del Lema 3.6, así que  $r \geq ek$  por 3.7. Por otro lado, sabemos que  $B > \sum_{i=1}^n b_i > \sum_{i \in F} b_i$ . Estas dos desigualdades, junto con 3.3, proporcionan:

$$r - \sum_{i \in F} b_i > ek - B > dc.$$

Por tanto, podemos aplicar la Subsección 3.2.5 a  $r - \sum_{i \in F} b_i$  para escribir

$$r = \sum_{i \in F} b_i + t b_1 + \mathbf{w} \cdot \mathbf{b},$$

con

$$t < \frac{r}{b_1}, \quad |\mathbf{w}| < \frac{dc + b_1}{b_{n-1}}. \quad (3.18)$$

Notemos que en este caso debe ser  $t > 0$ , pues

$$\begin{aligned} \sum_{i \in F} b_i + dc + b_1 &< b_1 + \dots + b_{n-1} + dc + b_1 && \text{(obvio)} \\ &< k && \text{(por 3.4)} \\ &\leq r, && \text{(por 3.7, ya que } e \geq 1) \end{aligned}$$

y entonces  $r - \sum_{i \in F} b_i > dc + b_1$ . Buscamos una desigualdad parecida a la de la prueba del Lema 3.6:

$$\begin{aligned} |w| + n + t &< \frac{dc + b_1}{b_{n-1}} + B + \frac{r}{b_1} && \text{(por 3.18, y recordando que } B > n) \\ &< \frac{k}{b_1 b_2} + \frac{r}{b_1} && \text{(por 3.2)} \\ &\leq \frac{r}{b_1 b_2} + \frac{r}{b_1} && \text{(pues } k \leq r \text{ por 3.7)} \\ &\leq \frac{r}{b_2} && \text{(} b_2 r + 1 < b_1 r, \text{ ya que } b_1 > b_2) \\ &\leq \ell. && \text{(ya probado arriba)} \end{aligned}$$

La anterior desigualdad nos conduce a considerar los coeficientes:

$$\begin{cases} z_0 &= 0, \\ z_1 &= t + w_1 > 0, \\ z_i &= \delta_{i,F} + w_i \text{ para } i = 2, \dots, n-1, \\ z_n &= \ell - (|w| + t + |F|) > 0. \end{cases}$$

Observemos que  $\mathbf{z} = (z_0, \dots, z_n)$  es otra solución de 3.17 con  $\sum_{i=0}^n u_i = \ell$ . Esto nos muestra que  $F \cup \{1\} \subset \text{supp } z$  es una cara de  $\Delta_{\ell,r}$ , contradiciendo la maximalidad de  $F$ .

Ahora supongamos que existe una faceta  $F$  de  $\Delta_{\ell,r}$  con  $0 \in F$  y  $n \notin F$ . Esto significa que tenemos una c.l.

$$y_0 k + y_1 b_1 + \dots + y_n b_n = r \quad (3.19)$$

con  $y_0 = e$  (por 3.13 del Lema 3.7),  $y_n = 0$  y  $\sum_{i=1}^{n-1} y_i = \ell - e$ . Además  $\ell \geq \frac{r}{b_1}$ , por 3.7 del Lema 3.6.

Otra vez aplicamos 3.2 para deducir la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{b_1} - e\right) b_{n-1} &\geq \left(\frac{k}{b_1} - e\right) b_{n-1} && \text{(pues } k \leq r \text{ por 3.7)} \\ &> \left(\left(\frac{dc + b_1}{b_{n-1}} + B\right) b_2 - e\right) b_{n-1} && \text{(por 3.2)} \\ &\geq dc + B. && \text{(porque } b_1 b_2 \geq e b_{n-1} \text{ y } b_2 \geq 1) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} r &= ek + \sum_{i=1}^n y_i b_i && \text{(por 3.19)} \\ &\geq ek + \left(\frac{r}{b_1} - e\right) b_{n-1} && \left(\text{pues } \sum_{i=1}^n y_i b_i \geq (\ell - e) b_{n-1} \geq \left(\frac{r}{b_1} - e\right) b_{n-1}\right) \\ &> ek + dc + B, && \text{(por la desigualdad que acabamos de deducir arriba)} \end{aligned}$$

en contra de lo establecido en la otra desigualdad de 3.7, absurdo.  $\square$

Como descanso de los resultados técnicos, vamos a utilizar la maquinaria que hemos desarrollado para arrojar algo de luz sobre la forma de los generadores binomiales minimales de  $I(\mathbf{a} + j)$  para  $j$  suficientemente grande. Con este resultado termina esta sección:

**Corolario 3.9 (3.6).** *Supongamos que  $j > N$ . Cualquier generador binomial minimal no homogéneo de  $I(\mathbf{a} + j)$  tiene la forma*

$$x_1^u f - g x_n^v,$$

donde  $u, v > 0$ ,  $f$  y  $g$  son monomios en las variables  $x_2, \dots, x_{n-1}$  y además  $u + \deg f = v + \deg g + e$ .

**Demostración.** Recordemos que, a la vista de la discusión en Sección 2.2, todo generador binomial minimal no homogéneo  $f$  de  $I(\mathbf{a} + j)$  se obtiene deshomogeneizando un generador binomial minimal  $F$  de  $\bar{I}(\mathbf{a} + j)$  que involucre  $x_0$ .

Por la Proposición 3.3, el grado de este generador binomial minimal de  $\bar{I}(\mathbf{a} + j)$  es estrictamente mayor que  $n + \text{reg } J(\mathbf{a})$ , por lo que estamos en condiciones de aplicar el Lema 3.7 y el Teorema 3.8. Estos nos dicen que  $F$  tiene la forma:

$$F = x_1^u f - x_0^e g x_n^v,$$

con la notación del enunciado.

¿Por qué? Sea  $(\ell, r)$  el grado de ambos monomios (recordemos que su  $(\bar{\mathbf{a}})$ -grado debe coincidir). Cada monomio da lugar a una cara de  $\Delta_{\ell, r}$ , las denotamos respectivamente por  $F_1$  y  $F_2$ . Sin pérdida de generalidad,  $0 \in F_2$ .

El Teorema 3.8 nos dice entonces que  $n \in F_2$  y  $1 \notin F_2$ . Esto se traduce en que  $x_1$  no aparece en el segundo monomio mientras que  $x_n$  sí. Como  $F$  es un generador minimal, las variables que aparecen en un monomio no aparecen en el otro. Entonces,  $0 \notin F_1$ , así que, de nuevo por el Teorema 3.8,  $1 \in F_1$ , o lo que es lo mismo,  $x_1$  aparece en el primer monomio.

Para finalizar, notemos que 3.13 nos dice que  $e$  debe ser el coeficiente que acompañe a  $k$  en la c.l. que da lugar a  $(\ell, r)$ , es decir,  $x_0$  debe aparecer con exponente  $e$ .  $\square$

### 3.4. Periodicidad de los números de Betti para curvas monomiales proyectivas

En esta sección estudiaremos la esencia de la periodicidad. En particular, la Proposición 3.13 y la Proposición 3.14, junto con sus respectivas pruebas, muestran por qué el periodo es  $b_1$ . Juegan un papel fundamental al igual que lo hizo el Lema 3.6 que nos muestra la procedencia de  $e$  en el desplazamiento de la parte no homogénea de la tabla de Betti.

Comenzamos con un Lema que marca una pequeña franja de la forma  $Mr \leq \ell < Mr + N$  donde se encuentra toda la homología a partir de cierto nivel  $\ell$ .

**Lema 3.10 (4.1).** *Supongamos que  $j > N$ . Supongamos además que  $\ell > n + \text{reg } J(\mathbf{a})$ . Si el complejo simplicial  $\Delta_{\ell,r}(j)$  tiene homología no trivial, entonces el par  $(\ell, r)$  verifica*

$$\frac{r}{b_1} \leq \ell < \frac{r}{b_1} + \frac{dc + b_1}{b_{n-1}} + n.$$

**Demostración.** Para que  $\Delta_{\ell,r}(j)$  tenga homología no trivial, debe existir al menos una faceta  $F$  con  $n \notin F$ . Entonces, por el Teorema 3.8, también  $0 \notin F$ . Por tanto, tenemos una c.l. para  $(\ell, r)$ ,

$$\begin{cases} y_0 + y_1 + \dots + y_n = \ell, \\ y_0 k + y_1 b_1 + \dots + y_n b_n = r, \end{cases}$$

con  $\text{supp } \mathbf{y} = F$ , y, en particular,  $y_0 = y_n = 0$ . Ya con esto se sigue de forma inmediata la primera desigualdad, pues  $b_1 > b_2, \dots, b_{n-1}$  y entonces

$$r = y_1 b_1 + \dots + y_n b_n \leq (y_1 + \dots + y_n) b_1 = \ell b_1.$$

Para la segunda desigualdad, probaremos que si  $\ell$  es demasiado grande, entonces  $F \cup \{n\}$  también es una cara de  $\Delta_{\ell,r}(j)$ , contradiciendo la maximalidad de la faceta  $F$ . Por la Subsección 3.2.5, escribimos

$$r = \sum_{i \in F} b_i + t b_1 + \mathbf{w} \cdot \mathbf{b},$$

donde

$$t < \frac{r}{b_1}, \quad |\mathbf{w}| < \frac{dc + b_1}{b_{n-1}}.$$

Supongamos que se verificara  $\ell \geq \frac{r}{b_1} + \frac{dc + b_1}{b_{n-1}} + n$ . En ese caso, las desigualdades anteriores muestran que  $\ell > t + |\mathbf{w}| + n$ . Esto nos permite construir otra c.l. para  $(\ell, r)$ ,

$$\begin{cases} z_0 + z_1 + \dots + z_n = \ell, \\ z_0 k + z_1 b_1 + \dots + z_n b_n = r, \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} z_0 = 0, \\ z_1 = t + w_1, \\ z_i = \delta_{iF} + w_i & \text{para } i = 2, \dots, n-1, \\ z_n = \ell - t - |\mathbf{w}| - |F| \\ \geq \ell - t - |\mathbf{w}| - n > 0. \end{cases}$$

De este modo,  $\text{supp } \mathbf{z} \supset \text{supp } \mathbf{y} \cup \{n\} = F \cup \{n\}$ , así que la c.l. anterior muestra que  $F \cup \{n\}$  es también una cara de  $\Delta_{\ell,r}(j)$ , absurdo.  $\square$

Los dos Lemas siguientes son resultados técnicos, lo que se refleja en sus pruebas: sencillas pero tediosas. Aún así, merece la pena leerlas, pues ahí se encuentra el motor principal para la Demostración de la Conjetura.

**Lema 3.11 (4.2).** *Supongamos que  $j > N$ . Supongamos además que  $\ell > n + \text{reg } J(\mathbf{a})$ . Si el complejo simplicial  $\Delta_{\ell,r}(j)$  tiene homología no trivial, entonces*

$$\Delta_{\ell,r}(j) \subset \Delta_{\ell+e,r+eb_1}(j+b_1).$$

**Demostración.** Sea  $F$  una faceta de  $\Delta_{\ell,r}(j)$ . Debemos probar que  $F$  es una cara de  $\Delta_{\ell+e,r+eb_1}(j+b_1)$ . Distinguiamos dos casos:

- Si  $0 \notin F$ , tenemos una c.l. para  $(\ell, r)$ ,

$$\begin{cases} y_0 + y_1 + \dots + y_n = \ell, \\ y_0 k + y_1 b_1 + \dots + y_n b_n = r, \end{cases}$$

con  $\text{supp } \mathbf{y} = F$ , y, en particular,  $y_0 = 0$ . Esto último nos permite construir una nueva c.l., pero ahora para  $(\ell + e, r + eb_1)$  (y con  $k$  reemplazado por  $k + b_1$ , aunque no aparezca):

$$\begin{cases} z_1 + \dots + z_n = \ell + e, \\ z_1 b_1 + \dots + z_n b_n = r + eb_1, \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} (z_0 = 0), \\ z_1 = y_1 + e, \\ z_i = y_i \quad \text{para } i = 2, \dots, n. \end{cases}$$

De este modo,  $\text{supp } \mathbf{z} \supset \text{supp } \mathbf{y} = F$ , así que la c.l. anterior muestra que  $F \in \Delta_{\ell+e,r+eb_1}(j+b_1)$ .

- Ahora si  $0 \in F$ , tenemos una c.l. para  $(\ell, r)$ ,

$$\begin{cases} y_0 + y_1 + \dots + y_n = \ell, \\ y_0 k + y_1 b_1 + \dots + y_n b_n = r, \end{cases}$$

con  $\text{supp } \mathbf{y} = F$ , y, en particular,  $y_0 > 0$ . Más concretamente, por 3.13 del Lema 3.7,  $y_0 = e$ . Esto último nos permite construir una nueva c.l., pero ahora para  $(\ell + e, r + eb_1)$  y con  $k$  reemplazado por  $k + b_1$ :

$$\begin{cases} e + z_1 + \dots + z_n = \ell + e, \\ e(k + b_1) + z_1 b_1 + \dots + z_n b_n = r + eb_1, \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} (z_0 = e) \\ z_i = y_i \quad \text{para } i = 1, \dots, n-1 \\ z_n = y_n + e. \end{cases}$$

De este modo,  $\text{supp } \mathbf{z} \supset \text{supp } \mathbf{y} = F$ , así que la c.l. anterior nos muestra que  $F \in \Delta_{\ell+e,r+eb_1}(j+b_1)$ .

□

A continuación presentamos otro Lema muy parecido al anterior. Pero es recomendable prestar atención a las pequeñas diferencias entre los enunciados.

**Lema 3.12 (4.3).** *Supongamos que  $j > N$ . Supongamos además que  $\ell > n + \text{reg } J(\mathbf{a})$ . Si el complejo simplicial  $\Delta_{\ell,r}(j + b_1)$  tiene homología no trivial, entonces*

$$\Delta_{\ell-e,r-eb_1}(j) \subset \Delta_{\ell,r}(j + b_1).$$

**Demostración.** Esta demostración es idéntica a la del 3.11. Aún así, la escribimos aquí en aras de completitud.

Sea  $F$  una faceta de  $\Delta_{\ell-e,r-eb_1}(j)$ . Debemos probar que  $F$  es una cara de  $\Delta_{\ell,r}(j + b_1)$ . Distinguiamos dos casos:

- Si  $0 \notin F$ , tenemos una c.l. para  $(\ell - e, r - eb_1)$ ,

$$\begin{cases} y_0 + y_1 + \dots + y_n = \ell - e, \\ y_0 k + y_1 b_1 + \dots + y_n b_n = r - eb_1, \end{cases}$$

con  $\text{supp } \mathbf{y} = F$ , y, en particular,  $y_0 = 0$ . Esto último nos permite construir una nueva c.l., pero ahora para  $(\ell, r)$  (y con  $k$  reemplazado por  $k + b_1$ , aunque no aparezca):

$$\begin{cases} z_1 + \dots + z_n = \ell, \\ z_1 b_1 + \dots + z_n b_n = r, \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} (z_0 = 0), \\ z_1 = y_1 + e, \\ z_i = y_i \quad \text{para } i = 2, \dots, n. \end{cases}$$

De este modo,  $\text{supp } \mathbf{z} \supset \text{supp } \mathbf{y} = F$ , así que la c.l. anterior muestra que  $F \in \Delta_{\ell,r}(j + b_1)$ .

- Ahora si  $0 \in F$ , tenemos una c.l. para  $(\ell - e, r - eb_1)$ ,

$$\begin{cases} y_0 + y_1 + \dots + y_n = \ell - e, \\ y_0 k + y_1 b_1 + \dots + y_n b_n = r - eb_1, \end{cases}$$

con  $\text{supp } \mathbf{y} = F$ , y, en particular,  $y_0 > 0$ . Más concretamente, por 3.15 del Lema 3.7,  $y_0 = e$ . Esto último nos permite construir una nueva c.l., pero ahora para  $(\ell, r)$  y con  $k$  reemplazado por  $k + b_1$ :

$$\begin{cases} e + z_1 + \dots + z_n = \ell, \\ e(k + b_1) + z_1 b_1 + \dots + z_n b_n = r, \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} (z_0 = e) \\ z_i = y_i \quad \text{para } i = 1, \dots, n - 1 \\ z_n = y_n + e. \end{cases}$$

De este modo,  $\text{supp } \mathbf{z} \supset \text{supp } \mathbf{y} = F$ , así que la c.l. anterior nos muestra que  $F \in \Delta_{\ell,r}(j + b_1)$ . □

**Proposición 3.13 (4.4).** *Supongamos que  $j > N$ . Supongamos además que  $\ell > n + \text{reg } J(\mathbf{a})$ . Si el complejo simplicial  $\Delta_{\ell,r}(j)$  tiene homología no trivial, entonces*

$$\Delta_{\ell,r}(j) = \Delta_{\ell+e,r+eb_1}(j + b_1).$$

**Demostración.** La primera contención  $\subset$  ya se probó en el Lema 3.11. Aquí probaremos por tanto la segunda contención  $\supset$ .

Sea  $F$  una faceta de  $\Delta_{\ell+e, r+eb_1}(j+b_1)$ . Debemos probar que  $F$  es una cara de  $\Delta_{\ell, r}(j)$ . Distinguimos dos casos:

- Si  $0 \notin F$ , entonces tenemos una c.l para  $(\ell+e, r+eb_1)$ :

$$\begin{cases} y_0 + y_1 + \dots + y_n = \ell + e, \\ y_0(k+b_1) + y_1b_1 + \dots + y_nb_n = r + eb_1, \end{cases}$$

con  $\text{supp } \mathbf{y} = F$ , y, en particular,  $y_0 = 0$ . En estas condiciones, supongamos que  $y_1 \leq e$ . Operaremos hasta llegar a una contracción. Empecemos,

$$r = \sum_{i=1}^n y_i b_i - eb_1 \leq \sum_{i=2}^n y_i b_i \leq (\ell + e)b_2,$$

seguimos operando,

$$\begin{aligned} r &\leq (\ell + e)b_2 && \text{(lo acabamos de ver)} \\ &< \left( \frac{r}{b_1} + \frac{dc + b_1}{b_{n-1}} + n + e \right) b_2 && \text{(por el Lema 3.10)} \\ &< \left( \frac{r}{b_1} + \frac{r}{b_1 b_2} \right) b_2 && \text{(por 3.2, y teniendo en cuenta que } B > n + e) \\ &= \frac{(b_2 + 1)r}{b_1} \leq r, && \text{(pues } b_1 > b_2, \text{ por lo que } b_1 \geq b_2 + 1) \end{aligned}$$

absurdo. Por tanto, debe ser  $y_1 > e$ .

Esto último nos permite construir una nueva c.l., pero ahora para  $(\ell, r)$  (y con  $k+b_1$  reemplazado por  $k$ , aunque no aparezca):

$$\begin{cases} z_1 + \dots + z_n = \ell, \\ z_1 b_1 + \dots + z_n b_n = r, \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} (z_0 = 0) \\ z_1 = y_1 - e > 0 \\ z_i = y_i & \text{para } i = 2, \dots, n \end{cases}$$

De este modo,  $\text{supp } \mathbf{z} = \text{supp } \mathbf{y} = F$ , así que la c.l. anterior muestra que  $F \in \Delta_{\ell, r}(j)$ .

- Ahora si  $0 \in F$ , entonces tenemos una c.l para  $(\ell+e, r+eb_1)$ :

$$\begin{cases} y_0 + y_1 + \dots + y_n = \ell + e, \\ y_0(k+b_1) + y_1b_1 + \dots + y_nb_n = r + eb_1, \end{cases}$$

con  $\text{supp } \mathbf{y} = F$ , y, en particular,  $y_0 > 0$ . Más concretamente, por 3.14 del Lema 3.7,  $y_0 = e$ . Esto nos permite escribir:

$$\begin{aligned} e(k+b_1) + y_1b_1 + \dots + y_nb_n &= r + eb_1, \\ ek + y_1b_1 + \dots + y_nb_n &= r. \end{aligned}$$

En estas condiciones, supongamos que  $y_n \leq e$ . Operaremos hasta llegar a una contracción. Para empezar, aplicamos la suposición que acabamos de hacer a la parte sobre  $\ell$  de la c.l. para obtener:

$$\sum_{i=1}^{n-1} y_i \geq \ell - e.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} r - ek &= \sum_{i=1}^{n-1} y_i b_i && \text{(recordemos que } b_n = 0) \\ &\geq (\ell - e)b_{n-1} && \text{(por la parte sobre } r \text{ de la c.l.,} \\ &&& \text{junto con que } b_1, \dots, b_{n-2} > b_{n-1}) \\ &\geq \left(\frac{r}{b_1} - e\right) b_{n-1} && \text{(por 3.8 del Lema 3.6)} \\ &\geq \left(\frac{k}{b_1} - e\right) b_{n-1} && \text{(pues } k \leq r \text{ por 3.7 del Lema 3.6)} \\ &> b_2(dc + b_1 + Bb_{n-1}) - eb_{n-1} && \text{(por 3.2)} \\ &> dc + B. && \text{(pues } b_2 b_1 > eb_{n-1} \text{ y } b_2 \geq 1) \end{aligned}$$

En conclusión,  $r > ek + dc + B$ . Aplicando 3.7 del Lema 3.6, esto significa que  $\Delta_{\ell,r}(j)$  tiene homología trivial, absurdo.

Por tanto, debe ser  $y_n > e$ . Esto último nos permite construir una nueva c.l., pero ahora para  $(\ell, r)$  y con  $k + b_1$  reemplazado por  $k$ :

$$\begin{cases} z_0 + z_1 + \dots + z_n = \ell, \\ z_0 k + z_1 b_1 + \dots + z_n b_n = r, \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} z_i = y_i & \text{para } i = 0, \dots, n-1, \\ z_n = y_n - e > 0. \end{cases}$$

De este modo,  $\text{supp } \mathbf{z} = \text{supp } \mathbf{y} = F$ , así que la c.l. anterior nos muestra que  $F \in \Delta_{\ell,r}(j)$ .

□

**Proposición 3.14 (4.5).** *Supongamos que  $j > N$ . Supongamos además que  $\ell > n + \text{reg } J(\mathbf{a})$ . Si el complejo simplicial  $\Delta_{\ell,r}(j + b_1)$  tiene homología no trivial, entonces*

$$\Delta_{\ell-e, r-eb_1}(j) = \Delta_{\ell,r}(j + b_1).$$

**Demostración.** La primera contención  $\subset$  ya se probó en el Lema 3.12. Aquí probaremos por tanto la segunda contención  $\supset$ .

Sea  $F$  una faceta de  $\Delta_{\ell,r}(j + b_1)$ . Debemos probar que  $F$  es una cara de  $\Delta_{\ell-e, r-eb_1}(j)$ . Distinguiamos dos casos:

- Si  $0 \notin F$ , entonces tenemos una c.l. para  $(\ell, r)$ :

$$\begin{cases} y_0 + y_1 + \dots + y_n = \ell, \\ y_0(k + b_1) + y_1 b_1 + \dots + y_n b_n = r, \end{cases}$$

con  $\text{supp } \mathbf{y} = F$ ,  $y$ , en particular,  $y_0 = 0$ . En estas condiciones, supongamos que  $y_1 \leq e$ . Operaremos hasta llegar a una contracción. Empecemos,

$$r - eb_1 = \sum_{i=1}^n y_i b_i - eb_1 \leq \sum_{i=2}^n y_i b_i \leq \ell b_2,$$

hacemos una cuenta adicional,

$$r \leq \ell b_2 + eb_1 = [\ell + e(b_1/b_2)]b_2 \leq (\ell + b_1)b_2,$$

seguimos operando,

$$\begin{aligned} r &\leq (\ell + b_1)b_2 && \text{(lo acabamos de ver)} \\ &< \left( \frac{r}{b_1} + \frac{dc + b_1}{b_{n-1}} + n + b_1 \right) b_2 && \text{(por el Lema 3.10)} \\ &< \left( \frac{r}{b_1} + \frac{r}{b_1 b_2} \right) b_2 && \text{(por 3.2, y teniendo en cuenta que } B > n + b_1) \\ &= \frac{(b_2 + 1)r}{b_1} \leq r, && \text{(pues } b_1 > b_2, \text{ por lo que } b_1 \geq b_2 + 1) \end{aligned}$$

absurdo. Por tanto, debe ser  $y_1 > e$ .

Esto último nos permite construir una nueva c.l., pero ahora para  $(\ell - e, r - eb_1)$  (y con  $k + b_1$  reemplazado por  $k$ , aunque no aparezca):

$$\begin{cases} z_1 + \dots + z_n = \ell - e, \\ z_1 b_1 + \dots + z_n b_n = r - eb_1, \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} (z_0 = 0), \\ z_1 = y_1 - e, \\ z_i = y_i, & \text{para } i = 2, \dots, n. \end{cases}$$

De este modo,  $\text{supp } \mathbf{z} = \text{supp } \mathbf{y} = F$ , así que la c.l. anterior nos muestra que  $F \in \Delta_{\ell-e, r-eb_1}(j)$ .

- Ahora si  $0 \in F$ , entonces tenemos una c.l. para  $(\ell, r)$ :

$$\begin{cases} y_0 + y_1 + \dots + y_n = \ell, \\ y_0(k + b_1) + y_1 b_1 + \dots + y_n b_n = r, \end{cases}$$

con  $\text{supp } \mathbf{y} = F$ ,  $y$ , en particular,  $y_0 > 0$ . Más concretamente, por 3.16 del Lema 3.7,  $y_0 = e$ . Esto nos permite escribir:

$$\begin{aligned} e(k + b_1) + y_1 b_1 + \dots + y_n b_n &= r, \\ ek + y_1 b_1 + \dots + y_n b_n &= r - eb_1. \end{aligned}$$

En estas condiciones, supongamos que  $y_n \leq e$ . Operaremos hasta llegar a una contradicción. Para empezar, aplicamos la suposición que acabamos de hacer a la parte sobre  $\ell$  de la c.l. para obtener:

$$\sum_{i=1}^{n-1} y_i \geq \ell - 2e.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
r - e(k + b_1) &= \sum_{i=1}^{n-1} y_i b_i && \text{(recordemos que } b_n = 0) \\
&\geq (\ell - 2e)b_{n-1} && \text{(por la parte sobre } r \text{ de la c.l.,} \\
&&& \text{junto con que } b_1, \dots, b_{n-2} > b_{n-1}) \\
&\geq \left(\frac{r}{b_1} - 2e\right) b_{n-1} && \text{(por 3.8 del Lema 3.6)} \\
&\geq \left(\frac{k}{b_1} - 2e\right) b_{n-1} && \text{(pues } k \leq r \text{ por 3.7 del Lema 3.6)} \\
&> b_2(dc + b_1 + Bb_{n-1}) - 2eb_{n-1} && \text{(por 3.2)} \\
&\geq dc + B. && \text{(pues } b_2 b_1 \geq 2eb_{n-1} \text{ y } b_2 \geq 1)
\end{aligned}$$

En conclusión,  $r > e(k + b_1) + dc + B$ . Aplicando 3.7 del Lema 3.6, esto significa que  $\Delta_{\ell,r}(j + b_1)$  tiene homología trivial, absurdo. Por tanto, debe ser  $y_n > e$ .

Esto último nos permite construir una nueva c.l., pero ahora para  $(\ell - e, r - eb_1)$  y con  $k + b_1$  reemplazado por  $k$ :

$$\begin{cases} z_0 + z_1 + \dots + z_n = \ell - e, \\ z_0 k + z_1 b_1 + \dots + z_n b_n = r - eb_1, \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} z_i = y_i & \text{para } i = 0, \dots, n-1, \\ z_n = y_n - e > 0. \end{cases}$$

De este modo,  $\text{supp } \mathbf{z} = \text{supp } \mathbf{y} = F$ , así que la c.l. anterior nos muestra que  $F \in \Delta_{\ell-e, r-eb_1}(j)$ .

□

Armados con las dos Proposiciones anteriores, estamos ahora en condiciones de poder probar la relación entre la tabla de Betti de  $\bar{I}(\mathbf{a} + j)$  y la tabla de Betti de  $\bar{I}(\mathbf{a} + j + b_1)$ :

**Teorema 3.15 (4.6).** *Supongamos que  $j > N$ . Para todo  $i \geq 0$ , si  $\ell \leq n + \text{reg } J(\mathbf{a})$  entonces*

$$\beta_{i,\ell}(\bar{I}(\mathbf{a} + j + b_1)) = \beta_{i,\ell}(\bar{I}(\mathbf{a} + j)),$$

si  $n + \text{reg } J(\mathbf{a}) < \ell \leq n + \text{reg } J(\mathbf{a}) + e$  entonces

$$\beta_{i,\ell}(\bar{I}(\mathbf{a} + j + b_1)) = 0,$$

y si  $n + \text{reg } J(\mathbf{a}) + e < \ell$  entonces

$$\beta_{i,\ell}(\bar{I}(\mathbf{a} + j + b_1)) = \beta_{i,\ell-e}(\bar{I}(\mathbf{a} + j)).$$

**Demostración.** .

revisar la prueba entera

Si  $\ell \leq n + \text{reg } J(\mathbf{a})$  el resultado se deduce directo de la Proposición 3.4: las sizigias minimales de tanto  $\bar{I}(\mathbf{a} + j)$  como de  $\bar{I}(\mathbf{a} + j + b_1)$  con grado menor o igual que  $n + \text{reg } J(\mathbf{a})$  son precisamente las sizigias minimales en las que no interviene  $x_0$ . Dicho de otro modo, son justamente las que son homogéneas, es decir, las sizigias minimales de  $J(\mathbf{a})$ . Por tanto, los números de Betti correspondientes serán los números de Betti de  $J(\mathbf{a})$  (y, en particular, coinciden).

Para el segundo caso, supongamos que existe algún  $\beta_{i,(\ell,r)}(\bar{I}(\mathbf{a} + j))$  no nulo con

$$n + \text{reg } J(\mathbf{a}) < \ell \leq n + \text{reg } J(\mathbf{a}) + e.$$

Esto significa que existe una sizigia minimal  $i$ -ésima de  $\bar{I}(\mathbf{a} + j)$  con  $(\bar{\mathbf{a}})$ -grado  $(\ell, r)$ . En particular, por el mismo argumento que al principio de la prueba del Lema 3.6, el complejo simplicial  $\Delta_{\ell,r}(j + b_1)$  contiene el vértice 0. Ahora bien, si aplicamos la Proposición 3.14, obtenemos que  $\Delta_{\ell-e, r-eb_1}(j) = \Delta_{\ell,r}(j + b_1)$ .

Esto permite construir una sizigia de  $i$ -ésima de  $\bar{I}(\mathbf{a} + (j - b_1))$  con  $(\bar{\mathbf{a}})$ -grado  $(\ell - e, r - eb_1)$  en la que aparezca  $x_0$ . Pero  $\ell - e \leq n + \text{reg } J(\mathbf{a})$ , en contra de lo enunciado en la Proposición 3.3, absurdo.

Para finalizar, tratemos el caso  $\ell > n + \text{reg } J(\mathbf{a})$ . Por el Teorema 3.2, tenemos que

$$\begin{aligned} \beta_{i,\ell}(\bar{I}(\mathbf{a} + j)) &= \sum_{r \geq 0} \dim_k \tilde{H}_i(\Delta_{\ell,r}(j)), \\ \beta_{i,\ell+e}(\bar{I}(\mathbf{a} + j + b_1)) &= \sum_{r \geq 0} \dim_k \tilde{H}_i(\Delta_{\ell+e,r}(j + b_1)). \end{aligned}$$

Observemos que afirmar que un complejo simplicial  $\Delta$  tiene homología nula conlleva en particular que  $\tilde{H}_i(\Delta) = 0$ . Con esto en mente, el Lema 3.4 nos indica cuando encontramos los primeros términos no nulos en cada sumatorio, por lo que podemos afinar dónde comienza el índice  $r$ :

$$\begin{aligned} \beta_{i,\ell}(\bar{I}(\mathbf{a} + j)) &= \sum_{r \geq ek} \dim_k \tilde{H}_i(\Delta_{\ell,r}(j)), \\ \beta_{i,\ell+e}(\bar{I}(\mathbf{a} + j + b_1)) &= \sum_{r \geq e(k+b_1)} \dim_k \tilde{H}_i(\Delta_{\ell+e,r}(j + b_1)) \\ &= \sum_{r' \geq ek} \dim_k \tilde{H}_i(\Delta_{\ell+e,r'+eb_1}(j + b_1)). \end{aligned}$$

Por tanto, si probamos que para todo  $r \geq ek$  se verifica

$$\tilde{H}_i(\Delta_{\ell,r}(j)) = \tilde{H}_i(\Delta_{\ell+e,r+eb_1}(j + b_1)), \quad (3.20)$$

podremos deducir que ambos sumatorios son iguales, pues coincidirán término a término. Veamos:

- Si  $\dim_k \tilde{H}_i(\Delta_{\ell,r}(j)) = 0$  y  $\dim_k \tilde{H}_i(\Delta_{\ell+e,r+eb_1}(j + b_1)) = 0$ , la igualdad 3.20 es trivialmente cierta.
- Si  $\dim_k \tilde{H}_i(\Delta_{\ell,r}(j)) > 0$ , entonces  $\Delta_{\ell,r}(j)$  tiene homología no nula, así que la Proposición 3.13 nos dice que  $\Delta_{\ell,r}(j) = \Delta_{\ell+e,r+eb_1}(j + b_1)$ , y en particular se verifica 3.20.
- Si  $\dim_k \tilde{H}_i(\Delta_{\ell+e,r+eb_1}(j + b_1)) > 0$ , entonces  $\Delta_{\ell+e,r+eb_1}(j + b_1)$  tiene homología no nula, así que la Proposición 3.14 nos dice que  $\Delta_{\ell,r}(j) = \Delta_{\ell+e,r+eb_1}(j + b_1)$ , y en particular se verifica 3.20.

□

Para terminar esta sección, y como descanso de tanto Lema técnico, de nuevo presentamos un pequeño Corolario del Teorema anterior:

**Corolario 3.16 (4.8).** *Supongamos que  $j > N$ . Entonces*

$$\text{reg } \bar{I}(\mathbf{a} + j + b_1) = \text{reg } \bar{I}(\mathbf{a} + j) + e.$$

*En particular,  $\text{reg } \bar{I}(\mathbf{a} + j)$  es una función casi-lineal de  $j$  cuando  $j > N$ .*

**Demostración.** Como vimos en la Observación 3.5,  $\text{reg } \bar{I}(\mathbf{a} + j) > n + \text{reg } J(\mathbf{a})$ . Es decir, existe al menos un  $\beta_{i,\ell}(\bar{I}(\mathbf{a} + j))$  no nulo con  $\ell > n + \text{reg } J(\mathbf{a})$ . Llamemos  $\ell' = \ell + e$ : por el Teorema 3.15, cada uno de los  $\beta_{i,\ell'-e}(\bar{I}(\mathbf{a} + j))$  no nulos con  $\ell' > n + \text{reg } J(\mathbf{a}) + e$  se corresponde con un  $\beta_{i,\ell'}(\bar{I}(\mathbf{a} + j + b_1))$  no nulo, y viceversa. Para concluir, consideramos las sizigias de grado máximo de ambos ideales  $\bar{I}(\mathbf{a} + j)$  e  $\bar{I}(\mathbf{a} + j + b_1)$ : si  $\ell$  es el grado de la primera, entonces  $\ell + e$  es el grado de la segunda, y viceversa.  $\square$

### 3.5. Periodicidad de los números de Betti para curvas monomiales afines

Para terminar la prueba del Teorema 3.1 es necesario devolver el Teorema 3.15 al caso afín. Este es pues el objetivo de esta sección.

Para comenzar, de nuevo traemos el Corolario 2.17 al contexto que nos interesa:

**Teorema 3.17 (5.3).** *Para todo  $i$  y para todo  $m$  se verifica*

$$\beta_{im}(I(\mathbf{a} + j)) = \dim_K \text{Tor}_i^A(I(\mathbf{a} + j), K)_{m,(\mathbf{a} + j)\text{-graduación}} = \sum_{r \geq 0} \dim_K \tilde{H}_i(\Delta_m(j)).$$

**Notación 3.18.** A partir de ahora, como volverá a estar  $j$  fijo, dejaremos de especificarlo en los complejos simpliciales que aparezcan.

Comenzamos con una observación sobre las desigualdades 3.1 y 3.2. El lector atento habrá percibido que se han enunciado, aparentemente sin necesidad, de forma más débil de lo posible. Existe un motivo detrás de esta escritura, y ahora rectificamos esta “debilidad”:

**Observación 3.19 (4.7).** Todos los resultados de la Sección 3.3 y de la Sección 3.4 se podrían haber establecido bajo la condición más débil de que  $j > N - a_n$ . Para ver esto, basta notar que las desigualdades 3.1 y 3.2, que son las únicas propiedades que realmente se utilizan de  $k$ , siguen funcionando cuando se sustituye  $k$  por  $k - a_n$ .

A continuación plantearemos análogos a la Proposición 3.3 y la Proposición 3.4. Pero, al contrario que las anteriores, estas han requerido mucho más trabajo previo (pues es necesario el Teorema 3.15).

**Proposición 3.20 (5.4).** *Supongamos que  $j > N$ . Toda sizigia no homogénea de  $I(\mathbf{a} + j)$  tiene  $(\mathbf{a} + j)$ -grado estrictamente mayor que  $k(n + \text{reg } J(\mathbf{a}))$ .*

**Demostración.** .

revisar prueba entera

Por la Observación 2.10, será suficiente probar que todo elemento no homogéneo de  $I(\mathbf{a} + j)$  cumple la propiedad. De hecho, basta con restringirnos a cualquier conjunto minimal de generadores binomiales de  $I(\mathbf{a} + j)$ .

Sea pues

$$f = x_1^{u_1} \dots x_n^{u_n} - x_1^{v_1} \dots x_n^{v_n}$$

un generador minimal binomial no homogéneo de  $I(\mathbf{a} + j)$ . Sin pérdida de generalidad, suponemos que

$$\deg f = u_1 + \dots + u_n > v_1 + \dots + v_n.$$

Sabemos que  $f$  da lugar a un número de Betti  $\beta_{im}(j)$  no nulo, con  $m = \deg f > n + \text{reg } J(\mathbf{a})$  (pues por ser  $f$  no homogéneo, se considera una contraimagen por  $dh_1$  y se aplica la Proposición 3.3).

Supongamos primero que  $\deg f \leq n + e + \operatorname{reg} J(\mathbf{a})$ . En ese caso, si denotamos  $j' = j - e$ , como  $e < b_1 < a_n$ , resulta que

$$j' > j' + e - a_n = j - a_n > N - a_n.$$

Por tanto, la Observación 3.19 nos dice que podemos aplicar el Teorema 3.15 para deducir que  $\beta_{im}(j) = \beta_{im}(j' + e) = 0$ , absurdo.

En consecuencia, debe ser

$$\deg f > n + e + \operatorname{reg} J(\mathbf{a}). \quad (3.21)$$

Ahora, recordemos que  $f \in I(\mathbf{a} + j)$ , por lo que es  $(\bar{\mathbf{a}})$ -homogéneo. En particular, su  $(\mathbf{a} + j)$ -grado será

$$\deg_{(\mathbf{a}+j)} f = u_1(k - b_1) + \dots + u_n(k - b_n).$$

En esta situación, 3.21 junto con que  $k - b_1 > k - b_2, \dots, k - b_n$  nos permiten escribir

$$\deg_{(\mathbf{a}+j)} f \geq (k - b_1)(n + e + \operatorname{reg} J(\mathbf{a})). \quad (3.22)$$

Adicionalmente, puesto que  $k = a_n + j > b_1 + N$ , y recordando la definición de  $N$  y que  $e \geq 1$ , ocurre que

$$e(k - b_1) > eN > b_1(n + \operatorname{reg} J(\mathbf{a})). \quad (3.23)$$

Utilizando todo esto, probamos por fin la Proposición: el  $(\mathbf{a} + j)$ -grado de cualquier generador binomial minimal verifica

$$\begin{aligned} \deg_{(\mathbf{a})} f &\geq (k - b_1)(n + e + \operatorname{reg} J(\mathbf{a})) && \text{(esto es 3.22)} \\ &= k(n + \operatorname{reg} J(\mathbf{a})) + [e(k - b_1) - b_1(n + \operatorname{reg} J(\mathbf{a}))] && \text{(reorganizar términos)} \\ &> k(n + \operatorname{reg} J(\mathbf{a})). && ([\text{---}] \geq 0 \text{ por 3.23}) \end{aligned}$$

□

**Proposición 3.21 (5.4').** *Supongamos que  $j > N$ . Una sizigia minimal de  $I(\mathbf{a} + j)$  es no homogénea si y solo si tiene  $(\mathbf{a} + j)$ -grado estrictamente mayor que  $k(n + \operatorname{reg} J(\mathbf{a}))$ .*

**Demostración.** . revisar prueba entera

La implicación  $\implies$  es un caso particular de la Proposición anterior. Para probar la otra implicación  $\impliedby$ , procederemos por reducción al absurdo.

Supongamos que  $\mathbf{S}_i$  es una sizigia  $i$ -ésima minimal de  $I(\mathbf{a} + j)$  homogénea y con  $(\mathbf{a})$ -grado estrictamente mayor que  $k(n + \operatorname{reg} J(\mathbf{a}))$ .

Entonces  $\mathbf{S}_i$  es también una sizigia  $i$ -ésima minimal de  $J(\mathbf{a})$ . Pero

$$\begin{aligned} \deg f &> [k(n + \operatorname{reg} J(\mathbf{a}))]/(k - b_n) && \text{(ya que } k - b_n > k - b_{n-1}, \dots, k - b_1) \\ &= n + \operatorname{reg} J(\mathbf{a}), && \text{(pues } b_n = 0) \end{aligned}$$

absurdo. □

A continuación consideraremos otro Lema técnico, con el objetivo de probar la Proposición 3.23. Esta última relacionará los complejos simpliciales  $\Delta_{\ell,r}$  con los correspondientes  $\Delta_{\ell k - r}$ .

**Lema 3.22 (5.5).** *Supongamos que  $j > N$ ,  $\ell > n + \operatorname{reg} J(\mathbf{a})$  y que  $\Delta_{\ell,r}$  tiene homología no trivial. Sea  $m = \ell k - r$ . Si tenemos una c.l. para  $m$ ,*

$$y_1(a_1 + j) + \dots + y_n(a_n + j) = m,$$

entonces  $\sum_{i=1}^n y_i = \ell - e$  o  $\sum_{i=1}^n y_i = \ell$ .

**Demostración.** Es claro que  $\sum_{i=1}^n y_i b_i$  es divisible por  $d$ , pues  $d \mid b_1, \dots, b_n$ . Por otro lado, podemos reproducir el razonamiento que se hizo en el Lema 3.6 para deducir que también  $d \mid r$ .

En consecuencia, como  $\sum_{i=1}^n y_i(k - b_i) = \ell k - r$  entonces

$$\left( \sum_{i=1}^n y_i - \ell \right) k = \sum_{i=1}^n y_i b_i + \sum_{i=1}^n y_i(k - b_i) - \ell k = \sum_{i=1}^n y_i b_i - r$$

también es divisible por  $d$ , o lo que es equivalentemente,  $\sum_{i=1}^n y_i - \ell$  es divisible por  $e$ . Por lo tanto, si probamos que  $\ell - e \leq \sum_{i=1}^n y_i < \ell + e$  quedará demostrado el Lema.

Operemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n y_i &\geq \frac{\ell k - r}{k} && \text{(pues } \sum_{i=1}^n y_i(k - b_i) = \ell k - r \text{ y } k = k - b_n > k - b_{n-1}, \dots, k - b_1) \\ &> \frac{\ell k - ek - B - dc}{k} && \text{(por el Lema 3.6)} \\ &> \ell - e - 1. && \text{(pues } k > B + dc \text{ por 3.3)} \end{aligned}$$

Por otro lado, de igualdad  $\sum_{i=1}^n y_i(k - b_i) = \ell k - r$  también se deduce que

$$\sum_{i=1}^n y_i \leq \frac{\ell k - r}{k - b_1}. \quad \text{(pues } k - b_1 < k - b_2, \dots, k - b_n)$$

Queda probar que  $\frac{\ell k - r}{k - b_1} < \ell + e$ , o lo que es lo mismo, que

$$\ell b_1 + eb_1 < r + ek.$$

Veamos

$$\begin{aligned} \ell b_1 + eb_1 &< r + \left( \frac{dc + b_1}{b_{n-1}} + n + e \right) b_1 && \text{(por el Lema 3.10)} \\ &< r + \frac{k}{b_1 b_2} b_1 && \text{(por 3.2, recordando que } B > n + e) \\ &\leq r + ek && \text{(pues } 1/b_2 \leq e) \end{aligned}$$

□

**Proposición 3.23 (5.5').** *Supongamos que  $j > N$ ,  $\ell > n + \text{reg } J(\mathbf{a})$  y que  $\Delta_{\ell,r}$  tiene homología no trivial. Sea  $m = \ell k - r$ . El complejo simplicial  $\Delta_m$  se obtiene a partir de  $\Delta_{\ell,r}$  mediante el borrado del vértice 0, y de esto se deduce que ambos tienen la misma homología.*

**Demostración.** .

revisar prueba entera

Sea  $\Delta$  el complejo simplicial que se obtiene borrando el vértice 0 del complejo simplicial  $\Delta_{\ell,r}$ . Está claro que  $\Delta \subset \Delta_m$ : la presencia o ausencia de (múltiplos de)  $(k, 0)$  no afecta a la c.l. que se obtiene sumando sobre el eje vertical, esa c.l. sumará siempre  $m$ .

Falta ver que  $\Delta_m \subset \Delta$ . Sea  $F$  una faceta de  $\Delta_m$  correspondiente a la c.l.

$$y_1(a_1 + j) + \dots + y_n(a_n + j) = m,$$

es decir  $\text{supp } y = F$ . El Lema 3.22 nos dice que tan solo debemos estudiar dos casos:

- Si  $\sum_{i=1}^n y_i = \ell$ , entonces  $F$  es una cara de  $\Delta_{\ell,r}$  sin 0, es decir  $F \setminus \{0\} = F$  y por tanto  $F \in \Delta$ .

- Si  $\sum_{i=1}^n y_i = \ell - e$ , entonces  $F$  es una cara de  $\Delta_{\ell-e, r-ek}$  sin 0. Consideramos entonces una nueva c.l.

$$\begin{cases} z_0 + z_1 + \dots + z_n = \ell, \\ z_0 k + z_1 b_1 + \dots + z_n b_n = r, \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} z_0 = e, \\ z_i = y_i, \quad \text{para } i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Ahora sí  $\sum_{i=0}^n z_i = \ell$ . Esto demuestra que  $F \cup \{0\}$  es una cara de  $\Delta_{\ell, r}$ , por lo que  $F$  es una cara de  $\Delta$  y hemos acabado.

Finalmente, queda comentar por qué la homología es igual para ambos complejos simpliciales. Esto es en esencia consecuencia del Teorema 3.8: como todas las facetas con el vértice  $\{0\}$  tienen también el vértice  $\{n\}$ , el Lema 1.36 nos dice que  $\Delta_{\ell, r}$  y  $\Delta$  tienen la misma homología.  $\square$

Para el alivio de tanto el lector como el redactor de este Trabajo de Fin de Máster, aquí se encuentra el último Lema técnico que necesitaremos:

**Lema 3.24 (5.6).** *Supongamos que  $j > N$ . Sean  $(\ell_1, r_1), (\ell_2, r_2)$  dos pares con  $\ell_1, \ell_2 > n + \text{reg } J(\mathbf{a})$  y tales que  $\Delta_{\ell_1, r_1}, \Delta_{\ell_2, r_2}$  tienen homología no trivial.*

*En estas condiciones,  $\ell_1 k - r_1 = \ell_2 k - r_2$  si y solo si  $(\ell_1, r_1) = (\ell_2, r_2)$ .*

**Demostración.** La implicación  $\Leftarrow$  es trivial. Veamos ahora la implicación  $\Rightarrow$ .

Supongamos que  $\ell_1 k - r_1 = \ell_2 k - r_2$ . Entonces  $k \mid (r_1 - r_2)$ . Además, el Lema 3.6 nos dice que

$$ek \leq r_1, r_2 \leq ek + dc + B. \quad (3.24)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} |r_1 - r_2| &\leq dc + B && \text{(por 3.24)} \\ &< k && \text{(por 3.3)} \end{aligned}$$

Así que deducimos que  $r_1 = r_2$ , y como  $\ell_1 k - r_1 = \ell_2 k - r_2$ , también  $\ell_1 = \ell_2$ .  $\square$

Por la Proposición 3.4 y la Proposición 3.21, hay una biyección trivial entre las sizigias minimales de  $\bar{I}(\mathbf{a} + j)$  con  $\ell \leq n + \text{reg } J(\mathbf{a})$  (en las que no interviene  $x_0$ ) y las sizigias minimales de  $I(\mathbf{a} + j)$  con  $m \leq k(n + \text{reg } J(\mathbf{a}))$  (las homogéneas). Denotamos este hecho por  $(\#)$ .

Por otro lado, con la Proposición 3.23 hemos visto que cada homología no trivial de “arriba” con  $\ell > n + \text{reg } J(\mathbf{a})$  nos da una homología idéntica “abajo” con  $m > k(n + \text{reg } J(\mathbf{a}))$  (esta última desigualdad, de nuevo, por la Proposición 3.21). Mientras tanto, el Lema 3.24 nos dice que esto sucede de forma inyectiva. Este otro hecho lo denotamos por  $(\#\#)$ .

Usaremos ambos hechos para probar el siguiente Teorema. Es la última pieza del puzle.

**Teorema 3.25 (5.7).** *Supongamos que  $j > N$ . Para cada  $i \geq 0$ , se verifica que*

$$\beta_i(\bar{I}(\mathbf{a} + j)) = \beta_i(I(\mathbf{a} + j)).$$

**Demostración.** Recordemos que  $I(\mathbf{a} + j)$  es la deshomogeneización de  $\bar{I}(\mathbf{a} + j)$ . Entonces, por la Sección 2.2, tenemos que

$$\beta_i(\bar{I}(\mathbf{a} + j)) \geq \beta_i(I(\mathbf{a} + j)).$$

La otra desigualdad también es trivial con toda la maquinaria que se ha desarrollado:

$$\begin{aligned}
\beta_i(I(\mathbf{a} + j)) &= \sum_{m \geq 0} \dim_k \tilde{H}_i(\Delta_m) && \text{(por el Teorema 3.17)} \\
&= \sum_{m \leq k(n + \text{reg } J(\mathbf{a}))} \dim_k \tilde{H}_i(\Delta_m) + \sum_{m > k(n + \text{reg } J(\mathbf{a}))} \dim_k \tilde{H}_i(\Delta_m) && \text{(separamos)} \\
&\geq \sum_{\ell \leq n + \text{reg } J(\mathbf{a})} \dim_k \tilde{H}_i(\Delta_{\ell,r}) + \sum_{\ell > n + \text{reg } J(\mathbf{a})} \dim_k \tilde{H}_i(\Delta_{\ell,r}) && \text{(por (\#) y (\#\#))} \\
&= \sum_{\ell,r} \dim_k \tilde{H}_i(\Delta_{\ell,r}) = \beta_i(\bar{I}(\mathbf{a} + j)), && \text{(volvemos a juntar, y por el Teorema 3.17)}
\end{aligned}$$

con lo que hemos acabado.  $\square$

Finalmente, probamos el Teorema principal:

**Demostración (del Teorema 3.1).** Sea  $j > N$ .

- Por el Teorema 3.15, para todo  $i$  se tiene

$$\beta_i(\bar{I}(\mathbf{a} + j)) = \beta_i(\bar{I}(\mathbf{a} + j + \mathbf{b}_1)).$$

- Por el Teorema 3.25, para todo  $i$  se tienen

$$\begin{aligned}
\beta_i(\bar{I}(\mathbf{a} + j)) &= \beta_i(I(\mathbf{a} + j)), \\
\beta_i(\bar{I}(\mathbf{a} + j + \mathbf{b}_1)) &= \beta_i(I(\mathbf{a} + j + \mathbf{b}_1)).
\end{aligned}$$

Así que en conclusión, los números de Betti de  $I(\mathbf{a} + j)$  son iguales a los correspondientes números de Betti de  $I(\mathbf{a} + j + \mathbf{b}_1)$ .  $\square$

Como es costumbre ya, planteamos un pequeño Corolario para concluir:

**Corolario 3.26 (5.8 (del Teorema 3.1)).** *Existe una función  $B(n, b)$  tal que, para toda curva monomial  $I(\mathbf{a})$  cuyo correspondiente submonoide  $(\mathbf{a})$  satisface  $a_n - a_1 \leq b$ , verifica*

$$\beta_i(I(\mathbf{a})) \leq B(n, b).$$

**Demostración.** Sean  $n$  y  $b$  fijos. Para probar la existencia de  $B(n, b)$ , probaremos que  $\beta_i(I(\mathbf{a}))$  solo puede tomar una cantidad finita de valores. Entonces, bastará con tomar el mayor de todos ellos para obtener una cota.

Seguimos llamando  $b_i = a_n - a_i$ . Cada submonoide  $(\mathbf{a})$  se puede expresar como  $(a_n - \mathbf{b})$ . En particular, pretendemos imponer  $b_1 = a_n - a_1 \leq b$ . Esto limita a un número finito la cantidad de  $\mathbf{b}$  que se pueden escoger, ya que  $b \geq b_1 > \dots > b_{n-1} > b_n = 0$ .

Llamamos  $j = a_n$ . Falta ver que para  $\mathbf{b}$  fijado, existe tan solo una cantidad finita de posibles  $\beta_i(I(j - \mathbf{b}))$  cuando  $j = n, n+1, \dots$ . Mientras  $j \leq N$ , tenemos una cantidad finita de submonoides  $(j - \mathbf{b})$ , y por tanto una cantidad finita de números de Betti. Por otro lado, el Teorema 3.1 nos dice que comienza la periodicidad a partir de  $j > N$ . En particular, no aparecen nuevos números de Betti cuando  $j$  sobrepasa  $N + b_1$ . Con esto termina la prueba.  $\square$

### 3.6. Perspectivas

El resultado de Vu ha recibido considerable atención, inspirando otros numerosos artículos [CGH<sup>+</sup>18, KO20, OP18] en la misma línea.

El mismo autor de este trabajo ha sopesado algún tiempo una idea propia: en vez de considerar tan solo subsemigrupos de  $\mathbb{N}$  a los que se les suma  $j$ , consideraríamos subsemigrupos de  $\mathbb{N}^m$  a los que se les suma  $(j_1, \dots, j_m)$ . Desafortunadamente, por falta de tiempo, este “miniproyecto de investigación” todavía no ha alcanzado el nivel de madurez necesario para incluirlo en esta memoria. Aún así, los experimentos numéricos iniciales que hemos realizados son prometedores.

**Nota 3.27.** A tan solo breves instantes de entregar este Trabajo de Fin de Máster, hemos encontrado el espectacular preprint [BGW19]. Allí, el Teorema 1.5 generaliza completamente el artículo de Vu, y en particular cubre la idea anterior.

En vez de tan solo considerar una familia de subsemigrupos de  $\mathbb{N}$  con la forma

$$S_j = (a_1 + j, \dots, a_n + j), \quad j = 0, 1, \dots$$

lo que hace es considerar una familia de subsemigrupos de  $\mathbb{N}^m$  con la forma

$$S_j = (\mathbf{f}_1(j), \dots, \mathbf{f}_n(j)), \quad j = 0, 1, \dots$$

donde  $f_1, \dots, f_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^m$  son funciones eventualmente polinómicas, con cada polinomio componente creciente para  $j$  suficientemente grande.

Si antes los  $i$ -ésimos números de Betti de  $K[S_j]$  eran funciones eventualmente quasi-lineales en  $j$ , ahora son eventualmente quasi-polinómicas en  $j$ .

Como vemos, el resultado es contundente. La única pega es que la prueba que proporciona el preprint es estrictamente y altamente no constructiva (ni siquiera se puede extender a la aritmética de Peano). Por lo tanto, sigue quedando abierta la cuestión de encontrar una prueba más constructiva.

# Apéndice A

## Material adicional

### A.1. Código en Singular utilizado para el cálculo los números de Betti

```
// EJEMPLO PROYECTIVO ASOCIADO A (1,2,3,7,10)+J
ring A = 0,(u,v,w,x,y,z),lp;
ring R = 0,(t,s),lp;
proc mapj (int j){
  int k=10+j;
  map f = A,s(k),s(k-3)t3,s(k-7)t7,s(k-8)t8,s(k-9)t9,t(k);
  return(f);
}
//j=49, (50,51,52,56,59)
int j=49;
map f = mapj(j);
A,s59,s56t3,s52t7,s51t8,s50t9,t59;
//j=58, (50,51,52,56,59)
map f = A,s68,s65t3,s61t7,s60t8,s59t9,t68;
setring(A);
ideal I=kernel(R,f);
list T=res(I,0);
print(betti(T),"betti");

// EJEMPLO PROYECTIVO CON (0,12),(2,10),(3,9),(6,6),(7,5),(12,0)
ring A = 0,(x(1),x(2),x(3),x(4),x(5),x(6)),lp;
ring R = 0,(t,s),lp;
map f = A,s12,t2s10,t3s9,t6s6,t7s5,t12;
setring(A);
ideal I=kernel(R,f);
mres(I,0);
```

```

// EJEMPLO PROYECTIVO CON (0,7),(3,4),(4,3),(7,0)
ring A = 0,(w,x,y,z),lp;
ring R = 0,(t,s),lp;
map f = A,s7,s3t4,s4t3,t7;
setring(A);
ideal I=kernel(R,f);
res(I,0);

// EJEMPLO AFÍN CON 7,8,12
ring A = 0,(x,y,z),lp;
ring R = 0,(t),lp;
map f = A,t7,t8,t12;
setring(A);
ideal I=kernel(R,f);
res(I,0);

// EJEMPLO AFÍN CON 5,6,7,8
ring A = 0,(w,x,y,z),lp;
ring R = 0,(t),lp;
map f = A,t5,t6,t7,t8;
setring(A);
ideal I=kernel(R,f);
mres(I,0);

```

## A.2. Ejemplos

Presentamos algunos Ejemplos realizados a mano por el autor de este Trabajo de Fin de Máster. Aunque no vengan comentados, se entiende más o menos lo que se hace:

1. Se dibuja el semigrupo, hasta dónde cabe en el papel.
2. Se dibuja el grafo de Apéry sobre ellos.
3. Se calculan las homologías de cada  $\Delta_m$  (el cálculo es mental, salvo para un puñado de puntos complicados).

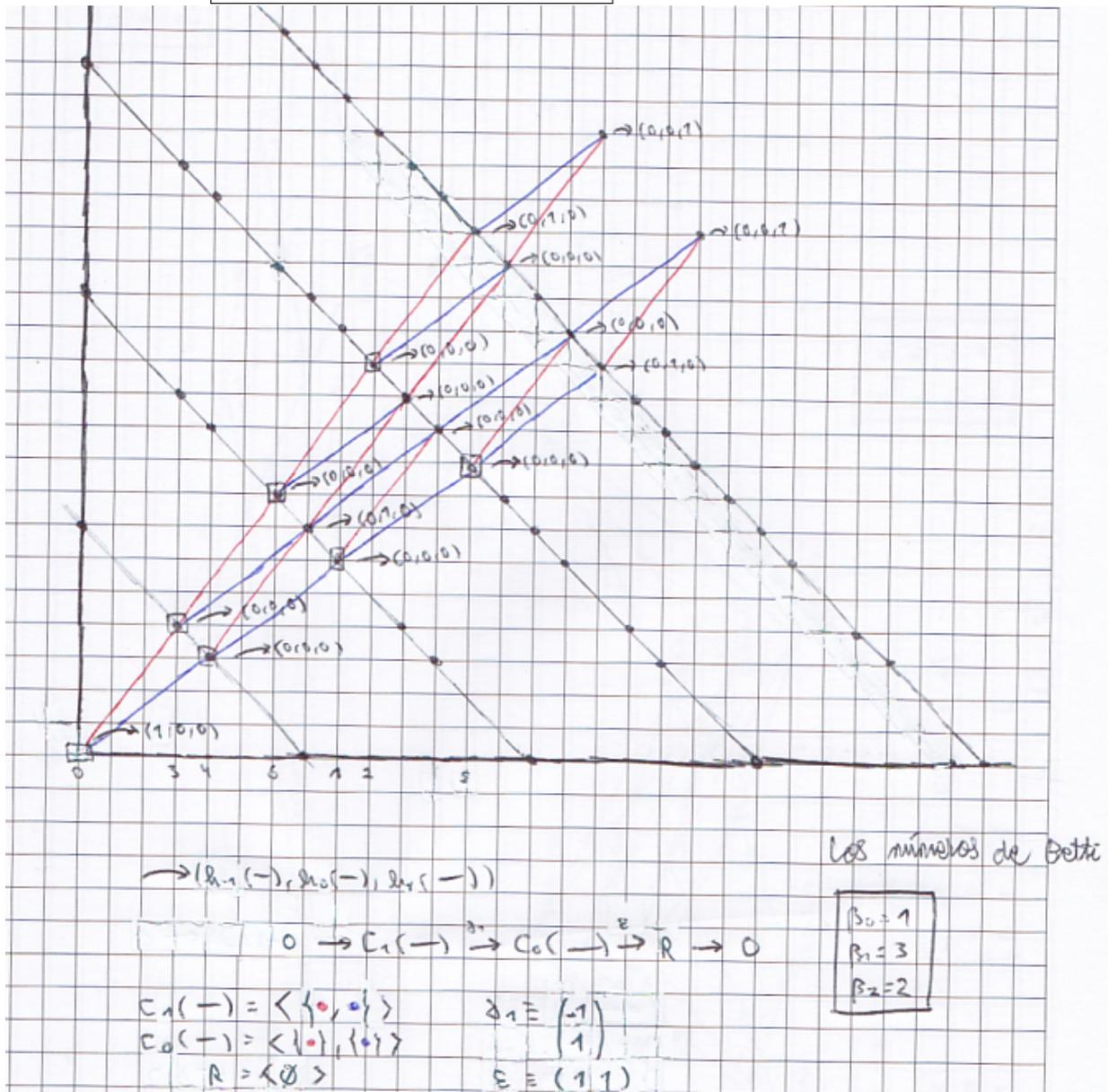
### A.2.1. Ejemplo 1

El semigrupo es  $\bar{S} = ( (0, 12), (2, 10), (3, 9), (6, 6), (7, 5), (12, 0) )$ .



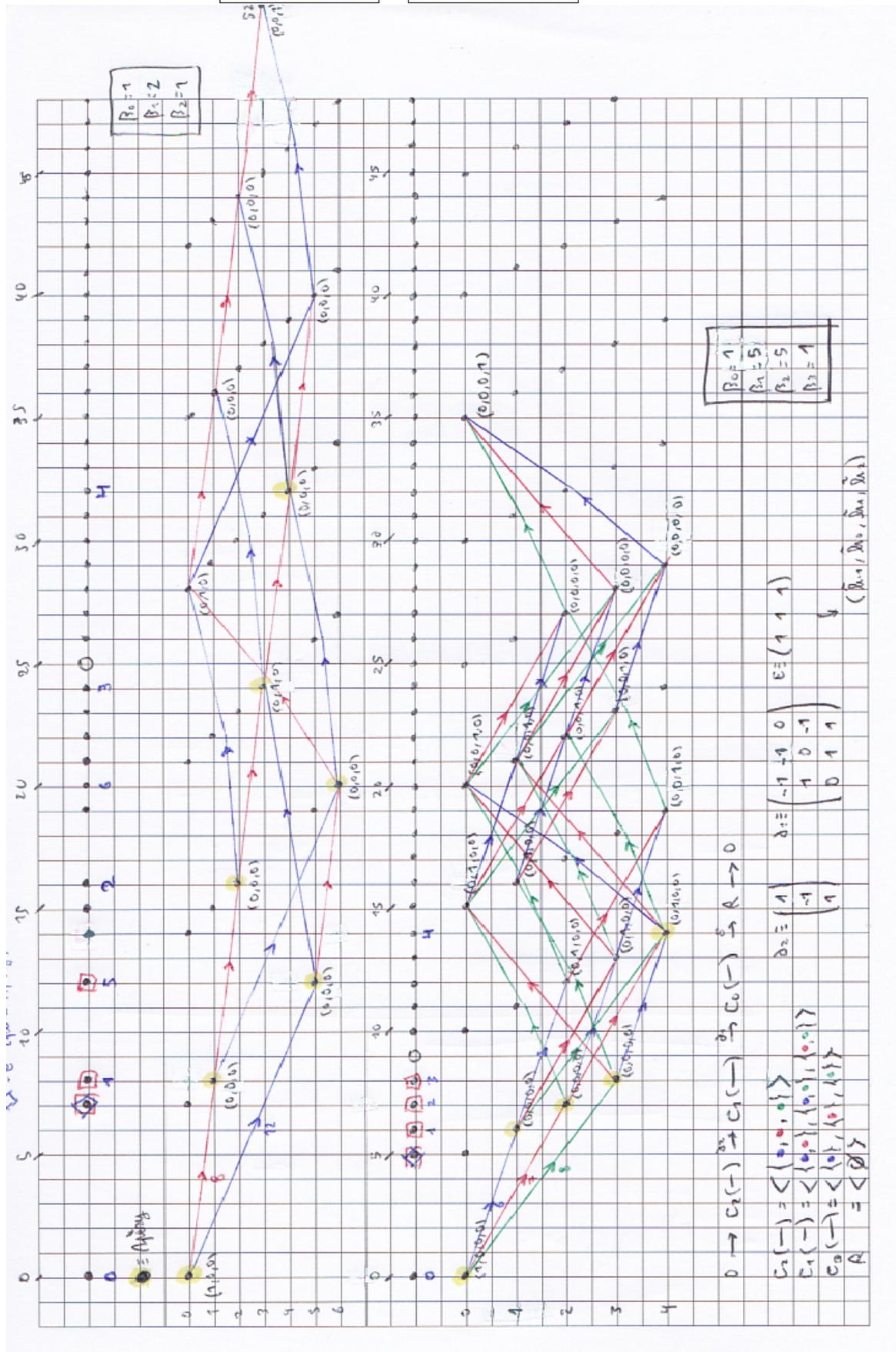
### A.2.2. Ejemplo 2

El semigrupo es  $\bar{S} = ( (0, 7), (3, 4), (4, 3), (7, 0) )$ .



### A.2.3. Ejemplo 3

Los semigrupos son  $S_1 = (7, 8, 12)$  y  $S_2 = (5, 6, 7, 8)$ .



# Bibliografía

- [ADGS20] Abdallah Assi, Marco D’Anna, and Pedro A García-Sánchez. *Numerical semigroups and applications*, volume 3. Springer Nature, 2020.
- [BCMP98] E. Briaies, A. Campillo, C. Marijuán, and P. Pisón. Minimal systems of generators for ideals of semigroups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 124(1):7–30, 1998.
- [BGMMC21] E. G. Barroso, Ignacio García-Marco, and Irene Márquez-Corbella. Factorizations of the same length in abelian monoids. *Ricerche Di Matematica*, pages 1–29, 2021.
- [BGW19] Tristram Bogart, John Goodrick, and Kevin Woods. Periodic behavior in families of numerical and affine semigroups via parametric presburger arithmetic, 2019.
- [CG97] Antonio Campillo and Philippe Gimenez. Graphes arithmétiques et syzygies. *Comptes Rendus De L Academie Des Sciences Serie I-mathematique*, 324:313–316, 1997.
- [CG00] Antonio Campillo and Philippe Gimenez. Syzygies of affine toric varieties. *Journal of Algebra*, 225(1):142–161, 2000.
- [CGH+18] Rebecca Conaway, Felix Gotti, Jesse Horton, Christopher O’Neill, Roberto Pelayo, Mesa Pracht, and Brian Wissman. Minimal presentations of shifted numerical monoids. *International Journal of Algebra and Computation*, 28(01):53–68, Feb 2018.
- [CLO15] David A Cox, John Little, and Donal Oshea. *Ideals, Varieties, and Algorithms*. Springer International Publishing, 2015.
- [CM91] Antonio Campillo and Carlos Marijuán. Higher order relations for a numerical semigroup. *Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux*, 3:249–260, 1991.
- [Eis05] David Eisenbud. *The Geometry of Syzygies*. Springer New York, 2005.
- [FP11] Davide L. Ferrario and Renzo A. Piccinini. *Simplicial Structures in Topology*. Springer New York, 2011.
- [GH18] Marvin J. Greenberg and John R. Harper. *Algebraic Topology*. CRC Press, mar 2018.
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [KO20] Franklin Kerstetter and Christopher O’Neill. On parametrized families of numerical semigroups. *Communications in Algebra*, 48(11):4698–4717, 2020.
- [Mat87] Hideyuki Matsumura. *Commutative Ring Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1987.

- [MLLPC98] Emilio Briales Morales, Antonio Campillo López, Carlos Marijuán López, and Pilar Pisón-Casares. Combinatorics of syzygies for semigroup algebras. *Collectanea Mathematica*, 49:239–256, 1998.
- [OP18] Christopher O’Neill and Roberto Pelayo. Apéry sets of shifted numerical monoids. *Advances in Applied Mathematics*, 97:27–35, Jun 2018.
- [Pee11] Irena Peeva. *Graded Syzygies*. Springer London, 2011.
- [RGS09] José Carlos Rosales and Pedro A García-Sánchez. *Numerical semigroups*, volume 20. Springer Science & Business Media, 2009.
- [Sha13] Igor R. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry 1*. Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [Ste10] Greg Stevenson. Free resolution dimension? <https://mathoverflow.net/questions/1159/graded-local-rings-versus-local-rings>, 2010. Último acceso: 23/09/2021.
- [Ven10] Kevin Ventullo. Free resolution dimension? <https://mathoverflow.net/questions/27406/free-resolution-dimension>, 2010. Último acceso: 23/09/2021.
- [Vu14] Thanh Vu. Periodicity of betti numbers of monomial curves. *Journal of Algebra*, 418:66–90, 2014.