Universidad de Valladolid

TRABAJO FIN DE MÁSTER

MÁSTER EN MATEMÁTICAS

Series de factoriales. Aplicaciones a la resolución de determinadas ecuaciones en diferencias con singularidad regular.

Pérez Iglesias, Jaime

Tutor: Jorge Mozo Fernández

Valladolid - 2021

Agradecimientos

Este trabajo no hubiera sido posible y su calidad se hubiese visto drásticamente mermada sin la ayuda de mi tutor, Jorge, a quien quisiera mencionar en primer lugar.

Por otro lado quisiera agradecer primero a mi madre, la única persona que siempre ha creído en mí, todo su esfuerzo y trabajo para darme la oportunidad de llegar hasta aquí; y a mi padre, quien entregó su vida para darme un futuro. Aunque me duela reconocerlo, también quisiera agradecer a mi hermana el haberme inspirado a superar mis propios límites y asomarme, mas de forma breve, al mundo de la investigación.

A su vez, todas las personas que me han hecho sentir feliz y con un mínimo de utilidad, entre las que destaco: mis Adrianes, quienes simplemente cambiaron mi forma de ver las cosas; Manu y la pandilla loca de Langreo, que a pesar de la distancia me han dado siempre su apoyo personal ante el regreso a mi ciudad natal; Juan, quien con sus finas ironías me ha ayudado en los momentos más dificiles; a Nathael, cuyos cafés y charlas absurdas me hicieron ver que hay algo de valor en mis pensamientos; a todos les debo la mayor cualidad que tiene el ser humano racional, la cordura.

Cómo no, me gustaría mencionar a Elvira y Jéssica, mis compañeras de seminario, el *team rocket* de Asturias, quienes aparte de darme todo su apoyo logístico durante la escritura de este trabajo, les debo mi mejor año de carrera, la compañía durante el aislamiento, y la oportunidad de sentirme realizado a través de nuestras míticas sinergias. A ellas les debo la mayor cualidad del ser humano pasional, el amor inquebrantable.

Resumen

Las series de factoriales entendidas como series funcionales, poseen propiedades de convergencia en semiplanos útiles para ser aplicadas en el contexto de la resolución de ciertas ecuaciones diferenciales y en diferencias cuyas soluciones formales, en serie de potencias resultan ser divergentes; y son convergentes como serie de factoriales. Se denomina singular-regular a esta propiedad. Comenzamos mostrando la caracterización de estas series, su relación con las series de potencias y generalizamos sus operaciones a través de los operadores diagonales. Los resultados de Gérard y Lutz supondrán la parte principal del trabajo en la que, de una manera inductiva, mostrarán condiciones (en términos de los ya citados operadores diagonales) suficientes para que un operador en diferencias sea singular-regular.

Abstract

The factorial series understood as functional series, have convergence properties in semi-planes useful to be applied in the context of the resolution of certain differential equations and in differences whose formal solutions, in power series, turn out to be divergent; and are convergent as a factorial series. This property is called singular-regular. We begin by showing the characterization of these series, their relationship with the power series, and we generalize their operations through the diagonal operators. The results of Gérard and Lutz will suppose the main part of the work in which, in an inductive way, they will show conditions (in terms of the already mentioned diagonal operators) sufficient for a difference operator to be singular-regular.

Contenidos

Índice de notaciones

- $\mathbb{C}[[x]]$: Anillo de series formales con coeficientes en $\mathbb{C}$.
- $\mathbb{C}((x))$: Cuerpo de fracciones de $\mathbb{C}[[x]]$.
- $\mathbb{C}\{x\}$: Anillo de series convergentes con coeficientes en $\mathbb{C}$.
- $\mathbb{C}(\{x\})$: Cuerpo de fracciones de $\mathbb{C}\{x\}$.
- $GL(\mathbb{C}\{x\})$: Grupo de matrices cuadradas invertibles con coeficientes en $\mathbb{C}\{x\}$.
- $\mathcal{F}_A[[x]]$: Anillo de series factoriales formales con coeficientes en A.
- $\mathcal{F}_A\{x\}$: Subanillo de series factoriales absolutamente convergentes con coeficientes en A.
- $\mathcal{M}[[x]]$: Anillo de series factoriales formales con coeficientes en $\mathbb{C}$ y sin término constante.
- $\mathcal{M}\{x\}$: Subanillo de series factoriales con coeficientes en $\mathbb{C}$ sin coeficiente constante absolutamente convergentes.

Introducción

En matemáticas uno no entiende las cosas, se acostumbra a ellas.

John von Neumann

La teoría clásica de puntos singulares en sistemas de ecuaciones diferenciales holomorfas distingue esencialmente dos tipos de singularidades. Asumiendo que dicho punto se encuentra en el origen y que el sistema está definido por:

$$x^{r+1}y'(x) = A(x)y(x), \tag{1}$$

con $A(x) \in M_n(\mathbb{C}\{x\})$, $A(0) \neq 0$, $r \geq 0$ denotado habitualmente como *rango de Poincaré*; entonces la singularidad se denomina:

- *Fuchsiana*, si $r = 0$.
- *De segundo tipo*, si $r > 0$.

Esta dicotomía presenta el inconveniente de no ser estable por cambios de variable. En efecto, si $T(x) \in GL_n(\mathbb{C}(\{x\}))$, y se modifica el sistema (1) mediante $y(x) = T(x)\omega(x)$, el nuevo sistema obtenido puede tener un rango de Poincaré diferente.

Una clasificación más acertada permite dividir las singularidades en regulares e irregulares. Un sistema de la forma (1) tiene una *singularidad regular* si existe un cambio de variable que lo transforma a un sistema *fuchsiano*. Si tal cambio no existe, la singularidad se dice que es *irregular*.

La regularidad de un sistema se puede caracterizar en función de sus soluciones. Así, dado el sistema (1), se puede definir el operador D_A actuando sobre el espacio $\mathbb{C}(\{x\})^n$ como sigue:

$$\begin{aligned} D_A \ : \ \mathbb{C}(\{x\})^n &\longrightarrow \mathbb{C}(\{x\})^n \\ y(x) &\mapsto x^{r+1}y'(x) - A(x)y(x). \end{aligned}$$

Dicho operador se extiende de manera trivial a $\mathbb{C}((x))^n$, extensión que se sigue denotando por D_A. En estas condiciones, dado $f(x) \in \mathbb{C}(\{x\})^n$ (ó a $\mathbb{C}((x))^n$), $D_A^{-1}(f(x))$ son las soluciones, en los correspondientes espacios, del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$x^{r+1}y'(x) = A(x)y(x) + f(x).$$

La singularidad es regular si y solo si para toda $f(x) \in \mathbb{C}(\{x\})^n$; si existe $y(x) \in \mathbb{C}((x))^n$ con $D_A(y(x)) = f(x)$, entonces $y(x) \in \mathbb{C}(\{x\})^n$.

Esta equivalencia puede probarse, por ejemplo, haciendo uso del *teorema del índice de operadores diferenciales* (véase [15]) y no va a abordarse en este trabajo. Por ello, de ahora en adelante asumiremos que una singularidad es regular si toda solución formal del sistema $x^{r+1}y'(x) = A(x)y(x) + f(x)$ es convergente.

Esta caracterización, en términos de la convergencia de las soluciones es intrínseca y puede extenderse a otros contextos. Así, R. Gérard, véase [11], estudia operadores diferenciales no lineales, y llama singular-regular a tal operador D si toda solución formal de un sistema $D\hat{u} = f(x)$ es convergente siempre que $f(x)$ lo sea. Aquél trabajo, lo dedica Gérard a demostrar que una clase amplia de operadores diferenciales gozan de esta propiedad.

Pasemos ahora al campo de las ecuaciones en diferencias. Un análogo en este contexto al operador diferencial de Euler $x \cdot d/dx$ es el operador:

$$\Delta y(x) := (x-1)(y(x) - y(x-1)),$$

según afirman Gérard y D.Lutz en [10]. Es natural considerar este operador actuando sobre funciones definidas en el infinito. Si lo hacemos actuar sobre el espacio de series convergentes en el infinito se obtienen soluciones que divergen. Así por ejemplo, en la Sección 3.2 de esta memoria se muestra cómo la única solución formal de $\Delta y = 1/(x-1)$ resulta ser una serie funcional divergente, lo que se puede explicar sin dificultad en términos de propagación de singularidades. Ocurre que el lugar natural de definición de solución de una ecuación en diferencias es el semiplano en vez del entorno del infinito.

Para considerar funciones definidas sobre semiplanos, las series de factoriales, objeto de estudio de esta memoria, resultan ser más adecuadas que las series de potencias en el infinito. De hecho, en el espacio de series factoriales, el operador Δ antes definido resulta ser singular-regular de acuerdo a las definiciones anteriores.

Esta memoria se dedica al estudio de las series de factoriales, así como a la extensión de los resultados de Gérard sobre operadores diferenciales singulares-regulares en este contexto. Dicha extensión se debe a Gérard y Lutz [10] quienes establecen condiciones para que un operador en diferencias sea singular-regular actuando sobre series de factoriales. Se trata de resultados de cierta complejidad técnica, pero que resultan ser una interesante aplicación de la teoría.

La caracterización de estas series factoriales en la literatura se encuentra sobre todo en textos clásicos como son los debidos a N.Nörlund ([20] y [19]), N.Nielsen ([17] y [18]) o Milne-Thomson ([16]). En general, usan notaciones fuera de lo habitual y parte del trabajo ha consistido en unificarlas y adaptarlas al lenguaje moderno usual. La memoria se estructura de la siguiente manera:

En el primer capítulo se presentarán las series de factoriales, sus propiedades como anillo, y se caracterizará su región de convergencia, llegando incluso a obtener un método con el que poder calcularlo en función de sus coeficientes. Una vez hecho esto, se dará un argumento con el que motivar por qué las series de factoriales inversas son más provechosas que las directas.

Posteriormente, el Capítulo 2 partirá de la identificación de las series factoriales con la función Beta y a partir de su desarrollo integral, se dará la primera relación directa entre las series de factoriales con las series de potencias a través de la integral de Mellin. Esto resultará útil para caracterizar la conocida como *fórmula de Waring* y la transformación $(x, x+m)$. Esta última permitirá solapar los términos de las series en su producto y por tanto servirá para motivar la forma y convergencia de éste. Con ello, se permitirán operaciones más complejas que introducirán una variante del *Teorema de la función implícita* adaptado a serie factoriales y cuya demostración a través de técnicas de series mayorantes se detallará en virtud de la ya citada *fórmula de Waring.*

El Capítulo 3 tratará de generalizar todas las transformaciones lineales de las series factoriales, se definirán y recalcarán las propiedades que convienen conservar a la hora de resolver ecuaciones en diferencias (y en particular, se probará cómo las series de potencias no lo hacen), y a través de ejemplos, se estandarizarán las modificaciones más habituales.

El Capítulo 4 será la primera aproximación a la resolución de ecuaciones en diferencias, particularizando para un tipo concreto de ecuación no lineal denominada ecuación de Briot-Bouquet, el ya comentado resultado acerca de la existencia y convergencia de soluciones formales en forma de serie de factoriales. También se dispondrán ejemplos para ver la potencia de lo que se pretende mostrar.

El último capítulo generalizará dicho principio para situaciones más generales. Se utilizará para la demostración, una técnica parecida a la del capítulo precedente, pero adaptado a unas hipótesis alternativas respecto a los operadores que estén involucrados en la ecuación.

Se hace notar que a lo largo de todo el trabajo, la variable en las series y en las propias regiones que se estudian pertenecen la mayor parte de las veces al plano complejo $\mathbb{C}$. Por ello, la notación x denotará escalares y/o variables complejas, y cuando se haga referencia a su parte real e imaginaria se indicará debidamente y se cambiará la notación.

Por último, existe otro problema de interés en relación a las series de factoriales y la sumabilidad de soluciones de ecuaciones diferenciales y en diferencias. Así, W.Balser (véase [3]) establece la equivalencia entre la $1-$sumabilidad de una serie formal en el infinito, y la sumación en forma de serie de factoriales. Barkatou y Duval (véase [4]) ahondan en esto, buscando funciones holomorfas , solución de ciertas ecuaciones, que admitan series de factoriales como desarrollo asintótico. Estimamos que la profundización en estos resultados es interesante, aunque no será abordado en este trabajo.

Capítulo 1

Estructura de las series factoriales

El análisis matemático es tan extenso como la propia naturaleza.

Jean-Baptiste Joseph Fourier

En este capítulo se estudiará la estructura algebraica de las series factoriales inversas, el anillo local (véase [6]) que forman, y en qué regiones tiene siquiera sentido plantear este tipo de objetos. Por ello, en esta parte se mostrarán los resultados clásicos de convergencia de series factoriales inversas, y veremos cómo en realidad son indistinguibles de las regiones de convergencia absoluta y condicional de las series factoriales no invertidas o directas. No obstante, al final del capítulo se romperá esta aparente equivalencia a través de un teorema de unicidad exclusivo para las series factoriales inversas que las hará ser más versátiles respecto a sus homólogas no inversas.

1.1. El anillo $\mathcal{F}_A[[x]]$

Se parte de una $\mathbb{C}-$álgebra conmutativa A con identidad.

Definición 1.1 *Una serie formal de factoriales inversa (o simplemente, una serie factorial formal) con coeficientes en A es una serie infinita de la forma:*

$$\Omega(x) := \frac{a_0}{x} + \frac{a_1 1!}{x(x+1)} + \frac{a_2 2!}{x(x+1)(x+2)} + \frac{a_3 3!}{x(x+1)(x+2)(x+3)} + ... = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{a_s s!}{x(x+1)...(x+s)}.$$

Donde $a_s \in A$ para todo s.

Con mayor generalidad, es habitual considerar un término constante $a_{-1} \in A$. De ahora en adelante, se denotará por $\mathcal{F}_A[[x]]$ al conjunto de series formales factoriales inversas con un término constante. Este conjunto ofrece las siguientes operaciones:

- Identidad. Dos series $a(x) := a_{-1} + \Omega(x)$ y $b(x) := b_{-1} + \tilde{\Omega}(x)$ pertenecientes a $\mathcal{F}_A[[x]]$ se dice que son iguales[1] si y solo si $a_s = b_s$ para todo $s \geq -1$.

- Adición. Dadas dos series $a(x), b(x) \in \mathcal{F}_A[[x]]$, se define su suma $(a+b)(x)$ como sigue:

$$(a+b)(x) := a_{-1} + b_{-1} + \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(a_s + b_s)s!}{x(x+1)...(x+s)}.$$

- Multiplicación por escalares. Para una serie $a(x) \in \mathcal{F}_A[[x]]$ y un elemento $\lambda \in A$, se define el producto por escalares $\lambda a(x)$ como sigue:

$$\lambda a(x) := \lambda a_{-1} + \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{\lambda a_s s!}{x(x+1)...(x+s)}.$$

- Multiplicación[2] de series factoriales. Dadas dos series $a(x), b(x) \in \mathcal{F}_A[[x]]$, el producto formal $(a \cdot b)(x)$ se define como sigue:

$$(a \cdot b)(x) := a_{-1}b_{-1} + a_{-1}\tilde{\Omega}(x) + b_{-1}\Omega(x) + \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{c_s s!}{x(x+1)...(x+s)}. \tag{1.1}$$

  Siendo:

$$s!c_s = \sum_{k=1}^{s} (s-k)!(k-1)!b_{s-k} \left[\sum_{p=0}^{k-1} \binom{p+s-k}{p} a_{k-1-p} \right]. \tag{1.2}$$

Proposición 1.1 *Con estas operaciones, el conjunto $\mathcal{F}_A[[x]]$ resulta ser un anillo local cuyo ideal maximal $\mathcal{I}$ es:*

$$\mathcal{I} := \{a_{-1} + \Omega(x) \ / \ a_{-1} \text{ no es invertible en } A\}.$$

Prueba.- Para la conmutatividad hay que hacer notar que en la expresión:

[1] Como se probará en la Sección 1.3, las series de factoriales directas pueden representar una misma función aun cuando tengan distintos coeficientes.

[2] Esta definición aparentemente arbitraria, recibirá justificación en la demostración del Teorema 2.2. No obstante, en [18] se encuentra una génesis alternativa.

$$s!c_s = \sum_{k=1}^{s}\sum_{p=0}^{k-1}(k-1)!b_{s-k}\frac{(p+s-k)!}{p!}a_{k-1-p}, \tag{1.3}$$

las variables $s-k$ y $k-1$ afectan a los términos de b y a respectivamente. Por ello, realicemos los siguientes cambios de variable $\lambda := s-k$ (notar que en este caso se invierte el orden de sumación) y $\nu := k-1$; de esta forma, la suma anterior resulta:

$$\sum_{\lambda=0}^{s-1}\sum_{p=0}^{\nu}\nu!b_\lambda\frac{(p+\lambda)!}{p!}a_{\nu-p} = \sum_{p=0}^{\nu}\nu!a_{\nu-p}\sum_{\lambda=0}^{s-1}\frac{(p+\lambda)!}{p!}b_\lambda.$$

De esta forma ya se ha visto que $\mathcal{F}_A[[x]]$ es un anillo conmutativo con identidad, veamos la localidad. Sea $\mathcal{A}$ un ideal no contenido en $\mathcal{I}$ de forma que exista un elemento $a(x) \in \mathcal{A}$ para el que a_{-1} es invertible. Veamos que de esta forma $a(x)$ resultaría un elemento inversible de $\mathcal{F}_A[[x]]$. Veamos que es condición necesaria, en efecto, si $a_{-1} + \Omega(x)$ es un elemento inversible de $\mathcal{F}_A[[x]]$, existirá otro elemento $b_{-1} + \tilde{\Omega}(x)$ de ese mismo anillo que verifica:

$$a_{-1}b_{-1} + a_{-1}\tilde{\Omega}(x) + b_{-1}\Omega(x) + \sum_{s=1}^{+\infty}\frac{c_s s!}{x(x+1)...(x+s)} \equiv 1.$$

Siendo c_s los coeficientes definidos en (1.2). De esta forma, aplicando la propiedad de igualdad (véase *principio de unicidad* en la sección 1.3) es evidente que $a_{-1}b_{-1} = 1$ y por tanto, el término constante es invertible. Por último, compruébese la suficiencia mediante un argumento de inducción. En efecto, se puede construir una serie factorial invertible con coeficientes surgidos a partir de a_{-1}^{-1} como sigue:

$$\left(a_{-1} + \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x(x+1)} + ...\right)\cdot\left(b_{-1} + \frac{b_0}{x} + \frac{b_1}{x(x+1)} + ...\right) =$$
$$= a_{-1}b_{-1} + \frac{a_{-1}b_0 + a_0b_{-1}}{x} + \frac{b_0a_0 + b_1a_{-1} + a_1b_{-1}}{x(x+1)} + \frac{b_1a_0 + b_0(a_1+a_0) + b_{-1}a_2 + a_{-1}b_2}{x(x+1)(x+2)} + ...$$

Tomando $b_{-1} = a_{-1}^{-1}$ y haciendo $a_{-1}b_0 + a_0b_{-1} = 0$, $a_0b_0 + b_1a_{-1} + a_1b_{-1} = 0$, $b_1a_0 + b_0(a_1+a_0) + b_{-1}a_2 + a_{-1}b_2 = 0$ resulta en un sistema compatible determinado en virtud de la invertibilidad de a_{-1}. Replicando este mismo argumento para el resto de términos de la multiplicación se ha construido la serie inversa de $a_{-1} + \Omega(x)$.

De esta forma, hemos probado que un ideal en estas condiciones verifica $1 \in \mathcal{A}$ y consecuentemente $\mathcal{A} = \mathcal{F}_A[[x]]$. Por ello, $\mathcal{I}$ es el único ideal maximal de $\mathcal{F}_A[[x]]$.

Q.E.D.

1.2. Región de convergencia

Para el estudio de la convergencia es trascendental una norma con la que poder dotar este concepto, por ello, supóngase que además A es una $\mathbb{C}-$álgebra normada.

Definición 1.2 *Una serie factorial formal inversa $a(x) \in \mathcal{F}_A[[x]]$ se dice que es absolutamente convergente en $x \in \mathbb{C}$ cuando:*

$$\|a_{-1}\| + \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{\|a_s\|\, s!}{x(x+1)...(x+s)},$$

converge. Se denota por $\mathcal{F}_A\{x\}$ al conjunto de series factoriales inversas que convergen absolutamente en algún punto $x \in \mathbb{C}$.

Los resultados que obtendremos en esta sección para $A = \mathbb{C}$ pueden extenderse a $\mathcal{F}_A\{x\}$, el cual es de nuevo, un anillo local cuyo ideal maximal vuelve a ser $\mathcal{M}$. Por ello, para el estudio de la convergencia de una serie factorial inversa podemos limitarnos a dicho caso $A = \mathbb{C}$. Evidentemente, los términos constantes no van a afectar a la convergencia y por comodidad, en esta sección serán obviados. Al conjunto de series factoriales sin coeficiente constante se denota por $\mathcal{M}[[x]]$ y $\mathcal{M}\{x\}$ al subanillo de series factoriales sin coeficiente constante absolutamente convergentes.

Por otro lado, se introduce una variante de las *series formales de factoriales directas* denotadas habitualmente por:

$$W(x) := \frac{x}{a_0} + \frac{x(x+1)}{a_1 1!} + \frac{x(x+1)(x+2)}{a_2 2!} + \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{a_3 3!} + ... = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{x(x+1)...(x+s)}{a_s s!}.$$

En particular, un resultado debido a Landau va a mostrar cómo la convergencia condicional de estas series es equivalente a la convergencia de las series factoriales inversas exceptuando los valores enteros. Para ello es necesario introducir el concepto de *serie asociada.*

Definición 1.3 *Dada la sucesión de coeficientes $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ correspondientes a $\Omega(x)$, se denomina serie factorial asociada a la siguiente serie:*

$$\begin{aligned} & a_0 - a_1\frac{(x-1)}{1!} + a_2\frac{(x-1)(x-2)}{2!} - a_3\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{3!} + ... = \\ & = \sum_{s=0}^{+\infty}(-1)^s a_s \frac{(x-1)(x-2)...(x-s)}{s!} = \sum_{s=0}^{+\infty}(-1)^s a_s \binom{x-1}{s}. \qquad (1.4) \end{aligned}$$

El siguiente resultado liga la convergencia de una serie factorial inversa con la convergencia condicional de una serie factorial del tipo $W(x)$.

Teorema 1.1 (Teorema de Landau de las series asociadas) *Las series factoriales asociadas convergen o divergen simultáneamente para cada valor de x no entero.*

PRUEBA.- Sea $\Omega(x)$ una serie factorial inversa en la que la suma de las siguientes cantidades:

$$b_s := \frac{a_s s!}{x(x+1)...(x+s)},$$

converge. Considérese la siguiente cuantía:

$$c_s := \frac{(-1)^s x(x^2-1)...(x^2-s^2)}{s!s!} = x\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)...\left(1-\frac{x^2}{s^2}\right).$$

Como $\lim_{s\longrightarrow+\infty} c_s = \sin \pi x/\pi$, existe una constante K_x dependiente de x tal que $|c_s| < K_x$. Por otro lado se verifica:

$$c_s - c_{s+1} = \frac{x^2}{(s+1)^2}c_s \;\Rightarrow\; |c_s - c_{s+1}| < K_x\frac{|x|^2}{(s+1)^2}.$$

De esta forma, para un valor de x cualquiera pero fijo, la serie $\sum(c_s - c_{s+1})$ es absolutamente convergente. Entonces, puesto que por hipótesis la serie $\sum b_s$ converge, por el *test de du Bois-Reymond* (Proposición (A.3)) , la serie $\sum b_s c_s$ converge; lo cual es equivalente a decir que (1.4) converge.

Ahora supóngase que (1.4) converge y considérense las siguientes cantidades:

$$d_s := (-1)^s a_s \binom{x-1}{s} \quad ; \quad f_s := \frac{(-1)^s s!s!}{x(x^2-1)...(x^2-s^2)}.$$

De la misma manera se tiene $\lim_{s\longrightarrow+\infty} f_s = \pi/\sin \pi x$ y de nuevo, va a existir una constante K_x para la que se verifique $|f_s| < K_x$. Además:

$$f_s - f_{s+1} = f_s\frac{x^2}{x^2-(s+1)^2}.$$

De la misma manera, para un valor cualquiera pero fijo de x la serie $\sum(f_s - f_{s+1})$ converge absolutamente y de nuevo por el *test de du Bois-Reymond* la serie $\sum d_s f_s$ converge, lo cual equivale a decir que Ω lo hace.

Q.E.D.

Este resultado será aplicado a la hora de estudiar la convergencia de una serie factorial inversa; como veremos en los siguientes teoremas, resulta más operativo demostrar la convergencia de la serie factorial asociada que la de la original.

El siguiente lema sobre acotación también resultará de utilidad.

Lema 1.1 *Dada una constante $x_0 \in \mathbb{C}$, las siguientes cantidades:*

$$u_s := \frac{x_0(x_0+1)...(x_0+s)}{x(x+1)...(x+s)} = \frac{\Gamma(x_0+s+1)\Gamma(x)}{\Gamma(x+s+1)\Gamma(x_0)},$$

$$v_s := \frac{(x-1)...(x-s)}{(x_0-1)...(x_0-s)} = \frac{\Gamma(s-x+1)\Gamma(1-x_0)}{\Gamma(s-x_0+1)\Gamma(1-x)},$$

verifican, siendo $\sigma := Re(x-x_0)$ la siguiente acotación:

$$|u_s| = s^{-\sigma}\left|\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x_0)}\right|(1+o(1)). \tag{1.5}$$

$$|v_s| = s^{-\sigma}\left|\frac{\Gamma(1-x_0)}{\Gamma(1-x)}\right|(1+o(1)). \tag{1.6}$$

PRUEBA.- En virtud de la *fórmula de Stirling* compleja $(A.7)$ se tiene:

$$\Gamma(s+x) = \sqrt{2\pi}(s+x)^{s+x-\frac{1}{2}}e^{-s-x}(1+o(1)).$$

Por ello:

$$\frac{\Gamma(s+x)}{\Gamma(s+y)} = \frac{(s+x)^{s+x-\frac{1}{2}}}{(s+y)^{s+y-\frac{1}{2}}}e^{y-x}(1+o(1)).$$

Se trata de hacer s lo suficientemente grande. Por ello, a la hora de tomar límites resulta evidente que:

$$\frac{\Gamma(s+x)}{\Gamma(s+y)} = s^{x-y}(1+o(1)).$$

Por ello, tomando módulos:

$$\left|\frac{\Gamma(s+x)}{\Gamma(s+y)}\right| = s^{\sigma}(1+o(1)).$$

Siendo $\sigma := Re(x-y)$. Con un argumento similar se prueba que:

$$\left|\frac{\Gamma(s-x)}{\Gamma(s-y)}\right| = s^{\sigma}(1+o(1)). \tag{1.7}$$

Por ello, substituyendo x por x_0 e y por x (en este caso, la variable de la serie factorial Ω) basta tomar estas igualdades con $s+1$ para obtener (1.5) y (1.6) respectivamente.

Q.E.D.

La cota de este lema condiciona los valores finitos para $\sigma > 0$, lo cual empieza a intuir la convergencia de las series factoriales en semiplanos. Los siguientes resultados dan prueba de ello:

Teorema 1.2 *Si una serie factorial converge para $x = x_0$, la serie converge para cada x cumpliendo $Re(x) > Re(x_0)$.*

Prueba.- En el caso de tratar con la cantidad u_s, se supone que x no toma toma los valores $0, -1, -2, -3, \ldots$ (en este caso la variable x será el valor de sustitución en $\Omega(x)$, por lo que en realidad se escogen los valores en los que la serie factorial formal tiene sentido plantearla); mientras que para las cantidades v_s se supondrá que x_0 es distinto a $1, 2, 3, \ldots$ (de forma que la serie factorial asociada tenga sentido analizarla). Con estas asunciones resulta claro, a partir del Lema (1.1) que para valores de x y x_0 fijos, las cantidades u_s y v_s están acotadas.

Además se cumplen las siguientes igualdades:

$$\frac{u_{s+1}}{u_s} = \frac{x_0+s+1}{x+s+1} = 1 - \frac{x-x_0}{x+s+1} = 1 - \left(\frac{x-x_0}{s}\right)\left[1 - \frac{x+1}{s} + \left(-\frac{x+1}{s}\right)^2 - \ldots\right].$$

$$\frac{v_{s+1}}{v_s} = \frac{x-s}{x_0-s} = 1 + \frac{x-x_0}{x_0-s} = 1 - \left(\frac{x-x_0}{s}\right)\left[1 + \frac{x_0}{s} + \left(\frac{x_0}{s}\right)^2 + \ldots\right].$$

De esta forma, si denotamos por ω_s indistintamente las dos cantidades u_s y v_s, resulta evidente ver que se verifica la siguiente tendencia asintótica en cualesquiera de los dos casos:

$$\frac{\omega_{s+1}}{\omega_s} = 1 - \frac{x-x_0}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right).$$

De esta forma, a partir del *criterio de Weierstrass* (Proposición (A.2)) se obtiene la siguiente casuística (se retoma la notación $\sigma := Re(x-x_0)$):

- Si $0 < \sigma \leq 1$ entonces la serie:

$$\sum_{s=0}^{+\infty} (\omega_s - \omega_{s+1}), \tag{1.8}$$

  es absolutamente convergente.

- Si $\sigma > 1$ entonces la serie:

$$\sum_{s=0}^{+\infty} \omega_s,$$

converge absolutamente, y en particular, (1.8) también.

De esta forma, se tratará de trabajar con una serie $\sum_{s=0}^{+\infty} \alpha_s$ convergente (no necesariamente de forma absoluta) a la que poder aplicar el *test de du Bois-Reymond* (Proposición A.3) y poder afirmar que la serie $\sum_{s=0}^{+\infty} \alpha_s \omega_s$ converge.

Si se toma:

$$\alpha_s = \frac{a_s s!}{x_0(x_0+1)...(x_0+s)} \quad , \quad \omega_s = u_s,$$

cuya suma por hipótesis converge, obtenemos:

$$\alpha_s \omega_s = \frac{a_s s!}{x(x+1)...(x+s)}.$$

De forma que la convergencia de $\sum_{s=0}^{+\infty} \alpha_s \omega_s$ garantizada otorga la convergencia para $\Omega(x)$ y por ende el resultado.

Q.E.D.

Teorema 1.3 *Si una serie factorial converge para $x = x_0$, la serie converge absolutamente para cada x cumpliendo $Re(x) > Re(x_0 + 1)$.*

PRUEBA.- Como ya ha sido recalcado, las cantidades ω_s se encuentran acotadas, en efecto, el Lema 1.1 garantiza:

$$|\omega_s| < Cs^{-\sigma},$$

con la constante C independiente de s. Además, puesto que por hipótesis $\sum_{s=0}^{+\infty} \alpha_s \omega_s$ converge se tiene que $|\alpha_s|$ es acotada; por ello se verifica:

$$\sum_{s=n}^{m} |\alpha_s \omega_s| < \tilde{C} \sum_{s=n}^{m} \frac{1}{s^\sigma},$$

siendo $\tilde{C}$ independiente[3] de s. Por tanto, si $\sigma > 1$ dado que $\sum s^{-\sigma}$ converge, se tiene la convergencia absoluta de $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_s \omega_s$ dada la completitud de $\mathbb{C}$ (*criterio de Cauchy*).

Q.E.D.

[3]Notar que tomar las sumas parciales garantiza dicha independencia para las cotas de α_s.

Corolario 1.1 *Si una serie factorial converge absolutamente para $x = x_0$, la serie converge absolutamente para cada x cumpliendo $Re(x) > Re(x_0)$.*

Prueba.- En estas condiciones la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_s|$ converge; y puesto que ω_s se encuentran acotadas se tiene:

$$\sum_{s=n}^{m} |\alpha_s \omega_s| < M \sum_{s=n}^{m} |\alpha_s|.$$

Siendo en este caso M una constante positiva mayor que cada $|\omega_s|$ (la toma de sumas parciales garantiza dicha constante). Así que de nuevo, en virtud de la completitud de $\mathbb{C}$ (y en última instancia, del *criterio de Cauchy*) se llega al resultado.

Q.E.D.

El método de demostración usado, consistente evaluar cocientes de términos consecutivos puede aplicarse para estudiar la convergencia de series sin necesidad de conocer un punto x_0 en el que converja. Por ejemplo:

Ejemplo 1.1 Considérese la serie:

$$\sum_{s=0}^{+\infty} \frac{s!}{x(x+1)...(x+s)}.$$

Evaluemos entre cociente el término $s+1$ y s:

$$\frac{s+1}{x+s+1} = 1 - \frac{x}{x+s+1} = 1 - \frac{x}{s}\left(1 - \frac{x+1}{s} + \left(\frac{x+1}{s}\right)^2 - ...\right) = 1 - \frac{x}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right).$$

Entonces, simplemente aplicando el *criterio de Weierstrass* (A.2), la región de convergencia absoluta de esta serie es el semiplano $Re(x) > 1$; además como veremos a continuación, coincide además con la abscisa de convergencia, en efecto, sea $x \in \mathbb{R}$ verificando $0 < x < 1$, entonces:

$$s\left(1 - \frac{u_{s+1}}{u_s}\right) = s\left(1 - \frac{s+1}{x+s+1}\right) = \frac{sx}{x+s+1} \xrightarrow[s\to\infty]{} x < 1.$$

Basta aplicar el *criterio de Raabe* para ver que en esa región $\Omega(x)$ diverge (pues si convergiese para un punto de dicha franja con parte imaginaria no nula, entraría en contradicción con el Teorema 1.2). De esta forma la abscisa de convergencia coincide con la abscisa de convergencia absoluta. Más adelante veremos casos en los que esto no ocurre.

Con estos resultados ya se está en condiciones de afirmar que la región de convergencia de las series factoriales es un semiplano. No obstante, lo que acontecerá a continuación tratará de dar con exactitud los límites de dicha región. Tomando el límite inferior de la frontera del semiplano, tenemos un número real λ para el cual una serie factorial converge para $x = \lambda + \epsilon$ y diverge para $x = \lambda - \epsilon$ para cualquier contante positiva ϵ arbitrariamente pequeña.

Definición 1.4 *Si existe un número real λ para el cual una serie factorial converge en $Re(x) > \lambda + \epsilon$ para cada $\epsilon > 0$; y diverge para cada $\epsilon < 0$, entonces λ se denomina abscisa de convergencia de la serie factorial.*

Nota 1.1 Si una serie factorial diverge en todo el plano complejo, se considera $\lambda = +\infty$. En caso contrario, de que la serie converja en todo el plano complejo (excluyendo los enteros), entonces se toma $\lambda = -\infty$.

Nota 1.2 Por el *Teorema de Landau de las series asociadas* (1.1), se puede afirmar que dos series factoriales asociadas tienen la misma abscisa de convergencia.

A continuación procederemos a determinar el valor de λ a través de un resultado debido a Landau.

Teorema 1.4 *Considérense las siguientes cantidades:*

$$\alpha := \begin{cases} \limsup\limits_{n\to+\infty} \left(\log \left|\sum_{s=0}^{n} a_s\right| \Big/ \log n\right) & \text{si} \quad \left|\sum_{s=0}^{n} a_s\right| \neq 0 \\ -\infty \quad \text{si} \quad \left|\sum_{s=0}^{n} a_s\right| = 0 \end{cases} \tag{1.9}$$

$$\beta := \limsup_{n\to+\infty} \left(\log \left|\sum_{s=n}^{+\infty} a_s\right| \Big/ \log n\right). \tag{1.10}$$

Entonces, la abscisa de convergencia λ es igual a α si $\lambda \geq 0$; e igual a β si $\lambda < 0$ (en este último caso, hay que excluir del dominio de convergencia los puntos 0 -1 -2, ...).

Nota 1.3 Cabe destacar que este último teorema puede enunciarse de una manera alternativa, ie, se puede decir que $\lambda = \alpha$ cuando la serie $\sum a_s$ diverge y que $\lambda = \beta$ cuando dicha serie converge a un valor no nulo. Si tal es el caso para todo s, se trata o de la serie factorial idénticamente nula o de un polinomio factorial cuyos coeficientes dan suma nula; convergentes ambos para todo $x \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$ (en el primer caso obviamente convergente en todo el plano complejo) y por ende $\lambda = -\infty$.

Prueba del Teorema 1.4.- Va a probarse este resultado para la serie asociada (1.4). Por lo comentado en la Nota 1.2 se tendrá el resultado. Supóngase que la serie factorial converge en un punto x que no es entero. La prueba está divida en cuatro partes. No obstante, hágase la siguiente observación. Partiendo de una sucesión $\{x_n\}_n$ y de la cantidad $\lambda := \limsup_{n\to+\infty} \log|x_n| \Big/ \log n$, si se verifica:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n^\sigma} = 0,$$

para cierto $\sigma \geq 0$, entonces $\lambda \leq \sigma$. En efecto, dado $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeño, por la hipótesis $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ para el cual si $n \leq n_0$:

$$\frac{x_n}{n^\sigma} \leq \epsilon \Rightarrow \log x_n \leq \log\epsilon + \sigma \log n.$$

Dividiendo ambos miembros por $\log n$ y tomando el límite se llega rápidamente a que $\lambda \leq \sigma$. Esta observación va a ser de utilidad en la demostración.

1. Vamos a probar que si $Re(x) := \sigma \geq 0$ entonces $\alpha \leq \sigma$ y consecuentemente $\alpha \leq \lambda$ si $\lambda \geq 0$.

   Considérese la siguiente cantidad:

$$c_s := \frac{(-1)^s s!}{(x-1)...(x-s)} = \frac{\Gamma(s+1)}{(1-x)...(s-x)} = \frac{\Gamma(s+1)\Gamma(1-x)}{\Gamma(s-x+1)}. \tag{1.11}$$

   De esta forma es fácil ver que:

$$c_{s+1} - c_s = \left(\frac{s+1}{s-x+1} - 1\right) c_s = \frac{x}{s-x+1} c_s.$$

   Entonces recordando la acotación obtenida en el Lema 1.1; en concreto, a partir de (1.7) con $s+1$ se tiene:

$$c_s = \Gamma(1-x)s^x(1+o(1)) \;\Rightarrow\; c_{s+1} - c_s = x\Gamma(1-x)s^{x-1}(1+o(1)).$$

   Por tanto, se puede encontrar una constante K independiente de s verificando:

$$|c_s| < Ks^\sigma \quad ; \quad |c_{s+1} - c_s| < Ks^{\sigma-1}.$$

   Ahora considérese la siguiente cantidad:

$$b_s := (-1)^s a_s \binom{x-1}{s}.$$

Entonces tomando $B_s := b_s + b_{s+1} + b_{s+2} + ...$, la cual, por el Teorema 1.1 converge, si se aplica la segunda *identidad de Abel* (A.2) teniendo en cuenta que $a_s := b_s c_s$, se obtiene:

$$\sum_{s=p}^{m} a_s = \sum_{s=p}^{m-1} (c_{s+1} - c_s) B_{s+1} + c_p B_p - c_m B_{m+1}.$$

Por ello:

$$A_{m,p} := \left| \sum_{s=p}^{m} a_s \right| \leq \sum_{s=p}^{m-1} |c_{s+1} - c_s| \cdot |B_{s+1}| + |c_p B_p| \, .$$

Por hipótesis $\sum b_s$ converge, por lo que para un $\epsilon > 0$ se puede encontrar un entero p para el que $|B_s| < \epsilon$ si $s \geq p$. Por tanto:

$$A_{m,p} < \epsilon K \left(\sum_{s=p}^{m-1} s^{\sigma-1} + m^\sigma + p^\sigma \right). \tag{1.12}$$

Por otro lado, $\int_s^{s+1} x^{\sigma-1} dx$ se encuentra acotada entre los valores $s^{\sigma-1}$ y $(s+1)^{\sigma-1}$, dependiendo de la monotonía del integrando, en este caso, determinado por si σ es mayor o igual a 1. Por tanto, el valor de $\int_p^m x^{\sigma-1} dx$ se encuentra acotado entre los valores $\sum_{s=p}^{m-1} s^{\sigma-1}$ y $m^{\sigma-1} - p^{\sigma-1} + \sum_{s=p}^{m-1} s^{\sigma-1}$, también en función de lo que vale σ. Más concretamente:

- Si $\sigma \geq 1$:

$$\sum_{s=p}^{m-1} s^{\sigma-1} \leq \frac{m^\sigma - p^\sigma}{\sigma} < \frac{m^\sigma}{\sigma}.$$

- Si $0 < \sigma \leq 1$:

$$-p^{\sigma-1} + \sum_{s=p}^{m-1} s^{\sigma-1} < m^{\sigma-1} - p^{\sigma-1} + \sum_{s=p}^{m-1} s^{\sigma-1} \leq \frac{m^\sigma - p^\sigma}{\sigma}.$$

Por último, basta darse cuenta de que $p^{\sigma-1} - p^\sigma/\sigma < p^{\sigma-1} - p^\sigma < 0$.

Con todo ello, es fácil llegar en cualesquiera de los casos, ie $\sigma > 0$, a la siguiente desigualdad:

$$\sum_{s=p}^{m-1} s^{\sigma-1} < \frac{m^\sigma}{\sigma}.$$

Por ello:

$$A_{m,p} < \epsilon K \left(p^\sigma + m^\sigma \left(1 + \frac{1}{\sigma} \right) \right). \tag{1.13}$$

A través de la desigualdad triangular inversa $|a| - |b| \leq |a - b|$ resulta inmediato obtener $A_{m,0} - A_{p-1,0} \leq A_{m,p}$; por ello:

$$\frac{A_{m,0}}{m^\sigma} < \frac{A_{p-1,0}}{m^\sigma} + \epsilon K \left(\frac{p^\sigma}{m^\sigma} + 1 + \frac{1}{\sigma} \right).$$

Ahora, haciendo tender $m \longrightarrow +\infty$, dado que p es fijo se obtiene el siguiente límite:

$$\lim_{m \to +\infty} \frac{A_{m,0}}{m^\sigma} = 0. \tag{1.14}$$

Este hecho es suficiente para ver que $\alpha \leq \sigma$; en efecto, basta aplicar la observación con la que se abrió la demostración.

Este hecho también ocurre cuando $\sigma = 0$, pues en este caso cuando $s < x < s + 1$ se tiene:

$$\frac{1}{s} > \int_s^{s+1} \frac{dx}{x} > \frac{1}{s+1}.$$

Por ello, por un argumento similar al anterior se obtiene:

$$\sum_{s=p}^{m-1} s^{-1} > \log m - \log p > \sum_{s=p}^{m-1} s^{-1} + \frac{1}{m} - \frac{1}{p}.$$

De esta forma, si p es suficientemente grande[4] se tiene:

[4] En concreto, para $p \geq 3$; los enteros positivos que hacen $\log p - 1/p > 0$. En otro caso, basta añadir una constante para que se cumpla la desigualdad (1.15) que no afectará al resultado cuando $m \longrightarrow +\infty$. Por tanto, el resultado al que se llegará se cumple en todos los casos.

$$\sum_{s=p}^{m-1} s^{-1} < \log m. \tag{1.15}$$

Así, recapitulando con lo obtenido en (1.13) se tiene:

$$A_{m,p} < \epsilon K(2 + \log m).$$

Por el mismo argumento usado en el caso $\sigma > 0$ se llega a la siguiente desigualdad:

$$\frac{A_{m,0}}{\log m} < \frac{A_{p-1,0}}{\log m} + \epsilon K \left(\frac{2}{\log m} + 1 \right).$$

Que tomando el límite $m \longrightarrow +\infty$ se llega:

$$\lim_{m \to +\infty} \frac{A_{m,0}}{\log m} = 0.$$

De nuevo, esto vuelve a implicar que $\alpha \leq \sigma$, en virtud de la observación inicial. La primera parte está completa.

2. En esta parte se va a probar que cuando α es finito la serie factorial converge para $x = \alpha + \epsilon$ para cualquier constante arbitraria ϵ arbitrariamente pequeña y por ello $\lambda \leq \alpha$.

   Sea la siguiente cantidad:

   $$d_s := \frac{(-1)^s (x-1)...(x-s)}{s!} = \frac{\Gamma(s-x+1)}{\Gamma(s+1)\Gamma(1-x)}.$$

   Siendo exactamente la inversa de (1.11) usada en la parte precedente. Por ello, de la misma manera, usando el Lema 1.1 se obtiene:

   $$d_s = \frac{s^{-x}}{\Gamma(1-x)}(1+o(1)) \quad ; \quad d_s - d_{s+1} = \frac{s^{-x-1}}{\Gamma(1-x)}(1+o(1)).$$

   Ahora bien, si $x = \alpha + \epsilon$, por estas identidades es posible encontrar una constante K positiva e independiente de s verificando:

   $$|d_s| < K s^{-\alpha-\epsilon} < K s^{-\alpha-\frac{\epsilon}{2}} \quad ; \quad |d_s - d_{s+1}| < K s^{-\alpha-1-\epsilon} < K s^{-\alpha-1-\frac{\epsilon}{2}}.$$

Por otro lado, por la definición de límite superior, tomando $\epsilon/4$, la forma de α nos indica que va a existir un s:

$$\left|\sum_{n=0}^{s} a_n\right| < s^{\alpha+\frac{\epsilon}{4}}.$$

Considérese a continuación $A_s := a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_s$; entonces, puesto que se verifica $b_s = a_s d_s$ por la primera *identidad de Abel* se tiene:

$$\sum_{s=p}^{m} b_s = \sum_{s=p}^{m} (d_s - d_{s+1}) A_s - d_p A_{p-1} + d_{m+1} A_m.$$

De esta forma:

$$\left|\sum_{s=p}^{m} b_s\right| < K \left(\sum_{s=p}^{m} s^{-1-\frac{\epsilon}{4}} + \frac{(p-1)^{\alpha+\frac{\epsilon}{4}}}{p^{\alpha+\frac{\epsilon}{2}}} + \frac{m^{\alpha+\frac{\epsilon}{4}}}{(m+1)^{\alpha+\frac{\epsilon}{2}}}\right).$$

Todos los términos tienden a 0 cuando $p \longrightarrow +\infty$ de forma que $\sum b_s$ converge, que es lo que se pretendía probar.

Combinando estos dos apartados tenemos que para $\lambda \geq 0$ entonces $\alpha \leq \lambda$; y que cuando α es finito entonces $\lambda \leq \alpha$. Todo ello implica en resumen $\lambda = \alpha$ si $\lambda \geq 0$.

3. A continuación, se considera el caso $\sigma < 0$. En estas condiciones vamos a probar que $\beta \leq \sigma$ y por ello $\beta \leq \lambda$.

   En el caso $\sigma < 0$ tomando el límite $m \longrightarrow +\infty$ en (1.12) se llega a la siguiente igualdad:

$$A_{+\infty,p} = \left|\sum_{s=p}^{+\infty} a_s\right| < \epsilon K \left(p^{\sigma} + \sum_{s=p}^{+\infty} s^{\sigma-1}\right).$$

   Por otro lado, si $s < x < s+1$, puesto que $\sigma < 0$ se tiene:

$$s^{\sigma-1} > \int_{s}^{s+1} x^{\sigma-1} dx > (s+1)^{\sigma-1}.$$

   Por tanto, por los razonamientos ya expuestos, es fácil concluir que:

$$\sum_{s=p}^{+\infty} s^{\sigma-1} < p^{\sigma-1} - \frac{p^{\sigma}}{\sigma}.$$

Por ello:

$$p^{-\sigma}A_{+\infty,p} < \epsilon K\left(1-\frac{1}{\sigma}\right).$$

Y de aquí se deduce que:

$$\lim_{p\to+\infty}\frac{1}{p^{\sigma}}\left|\sum_{s=p}^{+\infty}a_s\right| = 0.$$

Por tanto, *mutatis mutandis* a los pasos seguidos a partir del límite (1.14), se deduce finalmente que $\beta \le \sigma$, que es lo que se pretendía probar.

4. Por último, se va a probar que caundo β es finito la serie factorial converge para $x = \beta + \epsilon$ con ϵ arbitrariamente pequeño y por ello, $\lambda \le \beta$.

   Considérese $A'_s := a_s + a_{s+1} + a_{s+2} + \dots$. Entonces, con la notación aplicada en la segunda parte $b_s = a_s d_s$ y a través de la segunda *identidad de Abel* (A.2) se tiene:

$$\sum_{s=p}^{m} b_s = \sum_{s=p}^{m-1}(d_{s+1}-d_s)A'_{s+1} + d_pA'_p - d_mA'_{m+1}.$$

   De nuevo, por la definición de límite superior tomando $\epsilon/4$ arbitrariamente pequeño, va a existir un s cumpliendo:

$$\left|\sum_{n=s}^{+\infty}a_n\right| < s^{\beta+\frac{\epsilon}{4}}.$$

   Por ello, se verifica la siguiente desigualdad:

$$\left|\sum_{s=p}^{m}b_s\right| < K\left(\sum_{s=p}^{m}s^{-1-\frac{\epsilon}{4}} + \frac{p^{\beta+\frac{\epsilon}{4}}}{p^{\beta+\frac{\epsilon}{2}}} + \frac{(m+1)^{\beta+\frac{\epsilon}{4}}}{m^{\beta+\frac{\epsilon}{2}}}\right).$$

   De nuevo, haciendo tender $m \longrightarrow +\infty$ se tiene la deseada convergencia en $x = \beta + \epsilon$.

   De esta forma, en los dos últimos apartados se ha probado que si $\lambda < 0$ entonces $\beta \le \lambda$ y que cuando β es finito $\lambda \le \beta$; lo cual es equivalente a afirmar que $\lambda = \beta$ cuando $\lambda < 0$. Por ello, la prueba es completa.

Q.E.D.

Por último, trataremos de hablar sobre la convergencia uniforme de las series factoriales, y cómo ésta también ocurre en semiplanos. No obstante, será necesario presentar un resultado auxiliar previo a dicho resultado:

Teorema 1.5 *Si una serie factorial converge en un punto x_0, entonces lo hace uniformemente sobre el conjunto A definido como sigue:*

$$A := \left\{ x \in \mathbb{C} \; : \; -\frac{\pi}{2} + \eta \leq arg(x - x_0) \leq \frac{\pi}{2} - \eta \right\}.$$

Siendo η una constante positiva arbitrariamente pequeña.

Prueba.- Sea la siguiente cantidad:

$$u_s := \frac{x_0(x_0+1)...(x_0+s)}{x(x+1)...(x+s)}.$$

Y fijemos la notación:

$$Re(x_0) := \sigma_0 \quad ; \quad arg(x - x_0) := \theta \quad ; \quad |x - x_0| := r.$$

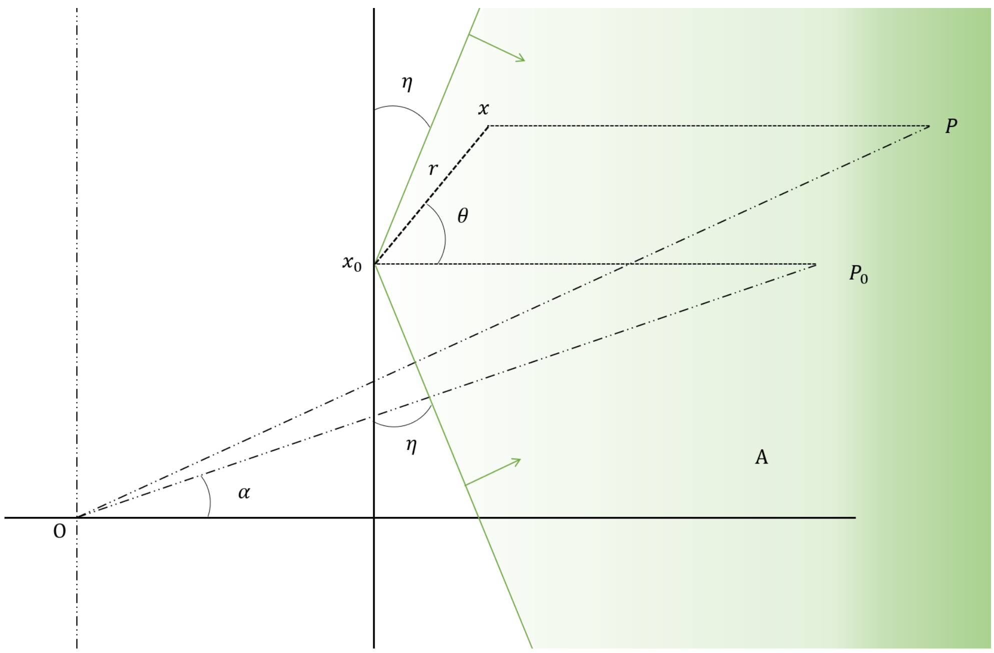

Figura 1.1: Esquema de los elementos utilizados para la demostración del Teorema 1.5.

Es evidente a partir de la Figura 1.1 que se puede encontrar un entero positivo n para el cual:

$$\alpha := |arg(x_0+s)| < \frac{\eta}{2} \quad ; \quad \text{si} \;\; s \geq n.$$

Evidentemente, cuanto menor sea η, mayor será n. En la Figura 1.1 se marcan por P y P_0 los puntos $x+s$ y x_0+s respectivamente. Entonces, la longitud de OP no es menor que la proyección de OP sobre OP_0 , ie:

$$|x+s| \geq |x_0+s| + r\cos(\theta-\alpha) = |x_0+s| + r\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta+\alpha\right).$$

De esta forma, si $s \geq n$, puesto que $\theta < \phi/2 - \eta$:

$$|x+s| > |x_0+s| + r\sin(\eta+\alpha) > |x_0+s| + r\sin\frac{\eta}{2}. \tag{1.16}$$

Haciendo uso de $1/2\sin\eta < \sin\eta/2$ se obtienen las siguientes desigualdades:

$$\left|\frac{x_0+s}{x+s}\right| < \frac{|x_0+s|}{|x_0+s| + r\sin\frac{\eta}{2}} \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha} < \frac{\sigma_0+s}{\sigma_0+s+r\sin\frac{\eta}{2}\cos\alpha}.$$

Así, puesto que $\cos\alpha > \cos\eta/2$ se verifica $\sin\eta/2\cos\alpha > 1/2\sin\eta$ de forma que se cumple la siguiente desigualdad:

$$\left|\frac{x_0+s}{x+s}\right| < \frac{\sigma_0+s}{\sigma_0+s+\frac{r}{2}\sin\eta}. \tag{1.17}$$

Por otro lado:

$$\left|\frac{x-x_0}{x+s+1}\right| < \frac{r}{|x_0+s+1| + r\sin\frac{\eta}{2}} \leq \frac{r}{\sigma_0+s+1+\frac{r}{2}\sin\eta}. \tag{1.18}$$

Aquí se han usado conjuntamente las desigualdades $|x_0| \geq \sigma_0$ y $\sin\eta/2 \geq \sin\eta/2\cos\eta/2 = 1/2\sin\eta$. Por otra parte:

$$u_s = u_{n-1}\frac{(x_0+n)...(x_0+s)}{(x+n)...(x+s)}.$$

De esta forma a partir de (1.17):

$$\left|\frac{(x_0+n)...(x_0+s)}{(x+n)...(x+s)}\right| < \frac{(\sigma_0+n)...(\sigma_0+s)}{(\sigma_0+n+\frac{r}{2}\sin\eta)...(\sigma_0+s+\frac{r}{2}\sin\eta)} := U_s.$$

Cuando $x \in A$ la cantidad u_{n-1} se encuentra acotada al encontrarse n fijo, y no considerar los puntos $0, -1, -2, ...$. De esta forma supongamos $|u_{n-1}| < K$, se tiene:

$$|u_s| < KU_s \quad ; \quad U_s < 1.$$

De esta manera, las cantidades u_s se encuentran uniformemente acotadas en A. De nuevo, tomando:

$$u_s - u_{s+1} = u_s \frac{x - x_0}{x + s + 1},$$

se llega, aplicando la desigualdad (1.18)

$$|u_s - u_{s+1}| < KU_s \frac{r}{\sigma_0 + s + 1 + \frac{r}{2}\sin\eta} = \frac{2K}{\sin\eta}(U_s - U_{s+1}).$$

La última igualdad se obtiene de la propia definición de U_s. Considerando la cantidad:

$$b_s := \frac{a_s s!}{x_0(x_0+1)...(x_0+s)},$$

que por hipótesis, su suma converge; entonces para un $\epsilon > 0$ cualquiera pero fijo, se puede encontrar un un entero positivo N para el que, si $p \geq N$, entonces:

$$\left|\sum_{s=p}^{m} b_s\right| < \frac{\epsilon \sin\eta}{2K}.$$

Entonces, para $B_s := b_p + b_{p+1} + ... + b_s$, se tiene, transformando ligeramente[5] la primera *identidad de Abel* (A.1), que si $p \geq N$, entonces:

$$\left|\sum_{s=p}^{m} b_s u_s\right| \leq \sum_{s=p}^{m-1} |B_s||u_s - u_{s+1}| + |B_m||u_m| < \epsilon \sum_{s=p}^{m-1}(U_s - U_{s+1}) + \epsilon U_m = \epsilon U_p < \epsilon.$$

Lo cual es equivalente a decir que $\sum b_s u_s$ converge uniformemente en A, ie, que $\Omega(x)$ converge uniformemente en A.

Q.E.D.

De este teorema se sigue que la función suma $\Omega(x)$ converge uniformemente en cualquier región interior al semiplano de convergencia siempre que aquélla y su frontera se encuentren en el interior del ángulo A. Dicha región de convergencia uniforme es incluso más general tal y como atestigua el siguiente paso al límite:

Teorema 1.6 *Si una serie factorial converge en un punto $x = x_0$, entonces lo hace uniformemente en el semiplano $Re(x) \geq Re(x_0) + \epsilon$ con $\epsilon > 0$ una constante arbitrariamente pequeña.*

[5] En este caso, las sumas parciales no empiezan en 1, sino en p. No obstante, la identidad es la misma que (A.1) a excepción del término $p - 1$, el cual es nulo.

PRUEBA.- Sin pérdida de generalidad supóngase que x_0 es real, de forma que $Re(x_0) = \sigma_0$. Entonces tomando un entero positivo tal que $n + \sigma_0 > 0$, variando la desigualdad (1.16) por $|x+s| \geq |\sigma_0 + s| + \epsilon$ y sustituyendo $r/2 \sin\eta$ por ϵ en las desigualdades restantes del último resultado, el resultado se obtiene *mutatis mutandis* a la demostración anterior.

Q.E.D.

De esta forma, a partir del resultado precedente se prueba que $\Omega(x)$ define una función holomorfa en todo punto del semiplano de convergencia a excepción de los puntos $0, -1, -2, -3, ...$ en caso de que pertenezcan a dicha región. De esta forma, la función de $\Omega(x)$ se puede expresar como sigue:

$$\Omega(x) = \Gamma(x) \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{a_s s!}{\Gamma(x+s+1)}. \tag{1.19}$$

Además, puesto que $1/\Gamma(x)$ es una función entera (para mayor detalle, véase el anexo A), la función $\Omega(x)$ tendrá polos simples donde $\Gamma(x)$ los posea, ie en los puntos de la forma $x = -n$ con $n \in \mathbb{N}$. Sabido el residuo de $\Gamma(x)$ se tiene:

$$Res(\Omega, -n) = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{a_s s!}{\Gamma(s-n+1)} = (-1)^n \sum_{s=n}^{+\infty} a_s \binom{s}{n}.$$

La última igualdad se obtiene al saber que $1/\Gamma(s-n+1)$ es cero para $s = 0, 1, 2, ..., n-1$.

1.3. Principio de unicidad

En esta sección se romperá la aparente equivalencia entre series factoriales inversas y directas a través de la siguiente propiedad de unicidad que cumplen únicamente aquéllas primeras.

Teorema 1.7 *Una función que puede ser desarrollada por una serie de factoriales inversa se desarrolla de manera única.*

PRUEBA.-Supóngase que para una misma función se admiten distintos desarrollos. Partimos entonces de la siguiente igualdad:

$$\sum_{s=0}^{+\infty} \frac{a_s s!}{x(x+1)...(x+s)} = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{b_s s!}{x(x+1)...(x+s)}.$$

Procédase mediante un argumento de inducción. Si ambas funciones difieren en el término de orden 0, si λ y λ' son sus abscisas de convergencia; multiplíquense ambas igualdades por x y hágase tender x a ∞ de forma que $Re(x) \to \infty$ en los semiplanos $Re(x) > \lambda$ y $Re(x) > \lambda'$. De esta forma se obtiene $a_0 = b_0$.

En caso de que difieran en el término de orden n con $n > 0$, multiplicando ambas igualdades por $(x+n)$, haciendo tender $Re(x)$ a ∞ de la misma manera se obtiene $a_n = b_n$. La hipótesis de inducción hace que los términos de orden menor sean iguales y por tanto, las dos series coincidan exactamente.

Q.E.D.

Una consecuencia de este resultado es que una serie factorial inversa no puede anularse idénticamente salvo que todos y cada uno de sus coeficientes sean también nulos. Las series factoriales directas no presentan dicha propiedad como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.2 Sea $x > 0$ una cantidad no entera y α una constante. Entonces por el desarrollo de Taylor de $(1+\alpha)^x$ en $\alpha = 0$:

$$(1+\alpha)^x = \sum_{s=0}^{+\infty} \alpha^s \binom{x}{s} = \sum_{s=0}^{+\infty} \alpha^s \frac{x(x-1)...(x-s+1)}{s!}.$$

Basta entonces substituir $\alpha = -1$ para obtener una serie de factoriales directa nula cuyos coeficientes no lo son.

Capítulo 2

Representación de funciones mediante series factoriales

Sé paciente, pues el mundo es ancho y extenso.

Edwin A. Abbott

La convergencia uniforme deducida al final del capítulo precedente, en particular, la relación funcional (1.19), permite establecer una primera correspondencia entre las series factoriales y las series de potencias. Este capítulo consistirá en presentar dicha correspondencia y poner de manifiesto las numerosas ventajas que supone.

2.1. Integral de Mellin

Proposición 2.1 *Sea una serie factorial inversa* $\Omega(x)$ *, existe una función holomorfa* $\varphi(t)$ *en* $D(1;1)$ *denominada función generatriz tal que:*

$$\Omega(x) = \int_0^1 t^{x-1}\varphi(t)dt. \tag{2.1}$$

Verificando además que la serie $t^{x-1}\varphi(t)$ *converge uniformemente en* $0 \leq t \leq 1$.

Una integral de la forma (2.1) se denomina *integral de Mellin* y su representación para las series factoriales implica la primera correspondencia entre éstas y las series de potencias a través de su transformada.

Prueba.- En vista de la Ecuación (1.19), por la propiedad (A.9) de la función Beta se tiene:

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{a_s s!}{x(x+1)...(x+s)} = \sum_{s=0}^{+\infty} a_s B(x, s+1).$$

Siendo $B(x, s+1)$ la función Beta de Euler. De esta forma, usando la expresión integral (A.9) de la función Beta en $Re(x) > 0$ se tiene:

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{+\infty} a_s \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^s dt.$$

Esta expresión sugiere tomar como función generatriz:

$$\varphi(t) := a_0 + a_1(1-t) + a_2(1-t)^2 + a_3(1-t)^3 + ... \tag{2.2}$$

Previo a cualquier consideración, veamos que realmente esta serie de potencias converge y por tanto define una función holomorfa. Para ello, puesto que por hipótesis la serie $\Omega(x)$ está bien definida y converge se cumple:

$$\lim_{s \longrightarrow +\infty} \frac{|a_s| s!}{|x(x+1)...(x+s)|} = 0 \Rightarrow |a_s| < \epsilon \frac{|x(x+1)...(x+s)|}{s!} = \epsilon \left| \frac{\Gamma(x+s+1)}{\Gamma(s+1)\Gamma(x)} \right|.$$

Para un s suficientemente grande y dependiente de ϵ. Entonces, a partir del infintésimo (A.8) que ofrece la función Gamma se tiene:

$$|a_s| \leq C \frac{s^{Re(x)}}{\Gamma(x)}.$$

Siendo C una constante fruto del infinitésimo. Basta entonces aplicar el criterio de la raíz para ver que la serie $\varphi(1-t)$ tiene radio de convergencia al menos 1 y por tanto, $\varphi(t)$ define una función holomorfa. A continuación probemos que la serie $t^{x-1}\phi(t)$ es uniformemente convergente en $0 \leq t \leq 1$ y por ello, la propia función $\varphi(t)$ también lo hará. Para ello sea $\sigma := max\{3, \lambda + 3\}$ con λ la abscisa de convergencia de $\Omega(x)$ y tómese $Re(x) = \sigma$. Entonces en el punto $x = \sigma - 2$, por construcción la serie factorial converge. Por ello, de nuevo su término de orden s tiende a 0 cuando $s \longrightarrow +\infty$ y consecuentemente[1]:

$$\lim_{s \longrightarrow +\infty} \frac{|a_s| s!}{(\sigma - 1)\sigma...(\sigma + s - 2)} = \lim_{s \longrightarrow +\infty} |a_s| \Big/ \binom{\sigma + s - 2}{s} = 0.$$

De esta forma, para un $\epsilon > 0$ se puede encontrar un entero n tal que para cada $s \geq n$:

[1] Notar que en el límite no se considera $\sigma - 2$ correspondiente a $1/x$; el motivo consiste en que así, el límite toma la forma de un cociente de números combinatorios de forma cerrada y que será útil más adelante. En cualquier caso, se trata de una constante por un infinitésimo y la igualdad sigue siendo cierta.

$$|a_s| < \epsilon \binom{\sigma + s - 2}{s} = \epsilon \binom{x + s}{s}. \tag{2.3}$$

Así:

$$\left| \sum_{s=n}^{+\infty} a_s t^{x-1} (1-t)^s \right| < \epsilon t^{\sigma-1} \sum_{s=n}^{+\infty} \binom{\sigma + s - 2}{s} (1-t)^s.$$

Por ello, a partir de la igualdad (A.6) se tiene:

$$\left| \sum_{s=n}^{+\infty} a_s t^{x-1} (1-t)^s \right| < \epsilon t^{\sigma-1} [1 - (1-t)]^{-\sigma+1} = \epsilon.$$

Y por ende, la convergencia uniforme ha sido probada. Por ello, se puede "intercambiar" el orden de la integral y de la suma, obteniendo la expresión (2.1).

Q.E.D.

Este resultado indica que la existencia de una función generatriz en forma de serie de potencias es una condición característica, o en otras palabras, necesaria, de las series factoriales. Se tratará ver que el recíproco también es cierto, ie, que a partir de una serie de potencias convergente, es condición suficiente para estar biunívocamente asociada a una serie factorial convergente. No obstante, a dicha serie de potencias se le habrá de imponer una serie de restricciones que permitan afirmar este hecho. Dichas características vendrán "inspiradas" por las siguientes propiedades esenciales para series de potencias en su frontera de convergencia.

Definición 2.1 *Sea $f(t) := \sum a_s t^s$ una serie de potencias holomorfa en el disco unidad abierto $D := D(0;1)$. Se denomina orden de f sobre D a la cantidad:*

$$\nu := 1 + \limsup_{n \to +\infty} \left(\log |a_n| \middle/ \log n \right). \tag{2.4}$$

Nota 2.1 En caso de verificarse $\nu < +\infty$, para un $\epsilon > 0$ dado, se tiene que existe un natural n_0 para el cual, si $n \geq n_0$:

$$|a_n| < n^{\nu - 1 + \epsilon}.$$

De esta forma, el orden de una serie de potencias mide en cierta manera el crecimiento de los coeficientes de ésta. Esta medida[2] permite inferir resultados parciales sobre la

[2]Aunque los lemas que se presentan a continuación no hacen uso de esta nueva cantidad, en el Teorema 2.1 se relacionarán estos resultados con el orden y se permitirá asociar de manera biunívoca el orden de la serie de potencias con la abscisa de convergencia de la serie de factoriales que definen mediante la *integral de Mellin* (2.1).

convergencia de la serie en las citadas condiciones en su frontera.

Lema 2.1 *Si para cierto número $\omega > 0$, los coeficientes de la serie de potencias en las condiciones de la serie $f(t)$ antes definida verifican la siguiente tendencia:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n^{\omega-1}} = 0. \tag{2.5}$$

Entonces se cumple:

$$\lim_{|t|\to 1} (1-|t|)^{\omega} f(t) = 0.$$

Prueba.- En primer lugar se hace notar que para todo α se cumple:

$$\binom{n+\alpha}{n} = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)} \sim \frac{n^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}. \tag{2.6}$$

Donde se ha hecho uso del límite (A.8) que ofrece la función Gamma. Entonces, puesto que $1/\Gamma(\alpha+1)$ se trata de una constante finita, la condición[3] (2.5) se traduce en:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \Big/ \binom{n+\omega-1}{n} = 0.$$

De esta forma, dado un $\epsilon > 0$ existe un natural n_0 para el cual si $n \geq n_0$ se tiene:

$$|a_n| < \epsilon \binom{n+\omega-1}{n}. \tag{2.7}$$

Y por ello:

$$\left| \sum_{s=n_0}^{+\infty} a_s t^s \right| < \epsilon \sum_{s=0}^{+\infty} \binom{s+\omega-1}{s} |t|^s = \epsilon (1-|t|)^{-\omega}.$$

Donde en la última igualdad se ha hecho uso del Teorema del binomio (A.6). De esta forma se obtiene finalmente:

$$(1-|t|)^{\omega} |f(t)| < (1-|t|)^{\omega} \left| \sum_{s=0}^{n_0-1} a_s t^s \right| + \epsilon.$$

Q.E.D.

El siguiente resultado prepara el terreno para la deseada correspondencia entre series factoriales y series de potencias.

[3]Se llama la atención que para la función generatriz se explotó esta condición sin necesidad de pasar por (2.5).

Lema 2.2 *Si existe $\omega > 0$ verificando la siguiente igualdad:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n^{\omega-1}} = 0.$$

Entonces la serie:

$$\sum_{s=0}^{+\infty} a_s t^s (1-t)^\omega,$$

es uniformemente convergente en toda curva interior de D sin ser tangente[4] *a ésta, salvo, a lo sumo, en el punto $t = 1$.*

PRUEBA.- En cualquier recorrido que evite ser tangente al disco unitario verifica que la siguiente cantidad:

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} < C,$$

se encuentra acotada[5] por una constante positiva y finita C. Entonces, por lo visto en la demostración del Lema 2.1, se verifica la desigualdad (2.7) para cierto n_0. Por ello se verifica:

$$\left|\sum_{s=n_0}^{+\infty} a_s t^s (1-t)^\omega\right| < \epsilon C^\omega (1-|t|)^\omega \sum_{s=n_0}^{+\infty} \binom{\omega+s-1}{s} |t|^s < \epsilon C^\omega.$$

Donde en la última desigualdad se ha tenido en cuenta que se está tratando con una serie de términos positivos y además se aplicó de nuevo el Teorema del binomio (A.6).

Q.E.D.

Este resultado tiene un potente paralelismo con lo visto en la Proposición 2.1. De hecho estos resultados son consistentes entre sí; en efecto, si $\Omega(x)$ converge en un punto $\sigma := Re(x) > \lambda$, repitiendo el argumento de precisamente dicha proposición, ie, que se verifica (2.3) para un s lo suficientemente grande, es fácil ver que $|t^\alpha \varphi(t)|$ se acota por $\epsilon t^{\alpha-\sigma-1}$. Por ello, aplicando este último lema se tiene convergencia uniforme en $0 \leq t \leq 1$ (notar que este camino no es tangente a la circunferencia unidad) si $\alpha \geq \sigma + 1$. Sustituyendo α por $x - 1$ se obtiene justamente la Proposición 2.1.

[4] Recordemos que con el lema anterior se obtuvo el orden crecimiento de $f(t)$ en las proximidades del posible punto singular $t = 1$. Esta condición evita realizar dicha aproximación tomando puntos de la corona, donde también pueden existir puntos singulares.

[5] Esta delimitación se conoce como *región de Stolz* y se puede demostrar [8] que $f(1)$ coincide con $\lim_{t\to 1^-} f(t)$ siempre que se aproxime por una *región de Stolz*. Este resultado se debe a Abel.

Con estos preliminares, ya se está en condiciones de probar el deseado recíproco, en el que a partir de series de potencias con un orden fijo, es posible identificarlas con una serie de factoriales.

Teorema 2.1 *Dada $\varphi(1-t)$ una serie de potencias holomorfa en D de orden finito, la integral de Mellin definida como en (2.1) admite una representación como serie de factoriales $\Omega(x)$. Es más, si $\sum a_s$ diverge, la abscisa de convergencia λ de $\Omega(x)$ es no negativa y verifica $\lambda = h-1$ con h el orden de la serie $\varphi(1-t)/(1-t)$. Alternativamente, si $\sum a_s$ converge a un valor no nulo, $\lambda < 0$ y además $\lambda = h'-1$ siendo h' el orden de $(\varphi(1-t)-\varphi(1^+))/(1-t)$.*

Prueba.- Dadas las condiciones del enunciado, en virtud de lo comentado en la Nota 2.1, para un natural n_0 y un $\epsilon > 0$, si ν denota el orden de $\varphi(1-t) = \sum a_s t^s$ finito por hipótesis se tiene que para $n \geq n_0$ se cumple $|a_n| < n^{\nu-1+\epsilon}$, con lo que si $\epsilon' > \epsilon$ se verifica:

$$\frac{|a_n|}{n^{\nu+1+\epsilon'}} < n^{\epsilon-\epsilon'} \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

En consecuencia, haciendo tender $\epsilon' \to \epsilon$, se cumple:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n^{\nu-1+\epsilon}} = 0,$$

si $\epsilon > 0$. Por ello, en virtud del Lema 2.2, la serie[6]:

$$\sum_{s=0}^{+\infty} a_s(1-t)^s t^{\nu+\epsilon}.$$

Es uniformemente convergente en $0 \leq |t| \leq 1$ (notar que este camino no es tangente al disco de definición) y define una función holomorfa en $D(1;1)$ puesto que para todo $\epsilon > 0$ se tiene $\nu+\epsilon > 0$. De esta forma, la función $t^{x-1}\phi(t)$ converge uniformemente si $Re(x) > \nu+1$. En tal caso, puesto que la convergencia uniforme permite el intercambio de sumas infinitas e integrales se tiene:

$$\int_0^1 t^{x-1}\phi(t)dt = \sum_{s=0}^{+\infty} a_s \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^s dt = \sum a_s B(x,s+1) = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{a_s s!}{x(x+1)...(x+s)}.$$

Con lo que tenemos la deseada reconstrucción de la serie factorial. Cabe destacar que la condición $Re(x) > \nu+1$ relaciona parcialmente la región de convergencia de $\Omega(x)$ con el orden de la función generatriz. La segunda parte del enunciado va más allá y establece una

[6]Se hace notar que se ha cambiado la variable a $1-t$ con respecto al enunciado de dicho Lema 2.2.

relación biunívoca de la abscisa de convergencia y el orden de la función generatriz pero en este caso, corregida para $\varphi(1-t)/(1-t)$ o $(\varphi(1-t)-\varphi(1^-))/(1-t)$ en función del signo.

Por lo comentado en la Nota 1.3, si la serie $\sum a_s$ diverge se tiene que $\lambda = \alpha$ con α definido como en (1.9). Por otro lado, en virtud de (A.5):

$$\frac{\varphi(1-t)}{1-t} = (1-t)^{-1}\sum_{s=0}^{+\infty} a_s t^s = \sum_{s=0}^{+\infty}(a_0+...+a_s)t^s.$$

Por ello, si llamamos h al orden de $\varphi(1-t)/(1-t)$, por la definición vista en (2.4):

$$h = 1 + \limsup_{n\to+\infty}\left(\log\left|\sum_{s=0}^{n} a_s\right| \Big/ \log n\right) = 1+\alpha.$$

De forma que si $\lambda \geq 0$ la función $\phi(1-t)/(1-t)$ es holomorfa en D y de orden $1+\lambda$.

Por último, de nuevo, según lo comentado en la Nota 1.3, si la serie $\sum a_s$ converge se verifica $\lambda = \beta$ siendo β la cantidad definida en (1.10). Por ello, teniendo en cuenta que $\varphi(1^+) = \sum a_s$, en vista de lo deducido anteriormente:

$$\frac{\varphi(1-t)-\varphi(1^+)}{1-t} = \sum_{s=0}^{+\infty}(a_0+...+a_s)t^s - \left(\sum_{s=0}^{+\infty} a_s\right)\sum_{s=0}^{+\infty} t^s = -\sum_{s=0}^{+\infty}(a_{s+1}+a_{s+2}+...)t^s.$$

Por ello, si denotamos por h' el orden de la serie, según la Definición (2.4) se tiene:

$$h' = 1 + \limsup_{n\to+\infty}\left(\log\left|\sum_{s=n}^{+\infty} a_s\right| \Big/ \log n\right) = 1+\beta.$$

Así, la función $(\varphi(1-t)-\varphi(1^-))/(1-t)$ resulta holomorfa en D y de orden $h' = 1+\lambda$ si $\lambda < 0$. La prueba es completa.

Q.E.D.

Vista ya la correspondencia entre series de potencias y de factoriales mediante la transformada de Mellin, se destaca que resulta admisible una fórmula de inversión (véase [7] y [21]). En efecto, a partir de la transformada de Fourier:

$$A(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} a(t)e^{i\omega t}dt.$$

Efectuando el cambio de variables $x := e^t$ y $p := i\omega$ se obtiene:

$$A(-ip) := F(p) = \int_0^{+\infty} a(\log x)x^{p-1}dx := \int_0^{+\infty} f(x)x^{p-1}dx.$$

De esta forma es fácil ver que se obtiene una fórmula de inversión para las series factoriales a través de estos cambios de variable sin más que partir de la transformada de Fourier. De esta manera, a partir de una serie de factoriales $\Omega(x)$, una manera para obtener la función generatriz es a partir de la siguiente fórmula de inversión:

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l-i\infty}^{l+i\infty} t^{-x} \Omega(x) dx. \tag{2.8}$$

Siendo l una cantidad mayor a la abscisa de convergencia absoluta de $\Omega(x)$.

Veamos una serie de ejemplos en los que se pone de manifiesto esta correspondencia:

Ejemplo 2.1 Considérese la siguiente serie de factoriales:

$$\sum_{s=1}^{+\infty} \frac{(s-1)!}{x(x+1)...(x+s)}.$$

Con la notación habitual se tiene $a_s = 1/s$. Por ello, no es necesario aplicar a priori la fórmula de inversión, sino que bastará con aplicar (2.2).

$$\varphi(t) = \frac{1-t}{1} + \frac{(1-t)^2}{2} + \frac{(1-t)^3}{3} + ... = -\log t.$$

De esta forma:

$$\Omega(x) = -\int_0^1 t^{x-1} \log t dt = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x^2}.$$

En definitiva:

$$\frac{1}{x^2} = \frac{0!}{x(x+1)} + \frac{1!}{x(x+1)(x+2)} + \frac{2!}{x(x+1)(x+2)(x+3)} + ...$$

A partir de su definición, el cociente entre el término de orden $s+1$ y s resulta:

$$\frac{s}{x+1+s} = 1 - \frac{x+1}{x+1+s} = 1 - \frac{x+1}{s} \left(\frac{1}{1+\frac{x+1}{s}} \right) = 1 - \frac{x+1}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right).$$

De esta forma, según el *criterio de Weiertrass* (A.2), la serie converge absolutamente para $Re(x) > 0$. Por otro lado:

$$\sum_{s=0}^{n} a_s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} \sim \log n. \tag{2.9}$$

Por ello, a partir del Teorema 1.4 se tiene:

$$\lambda = \limsup_{n\to+\infty} \log(\log n)\Big/ \log n = 0.$$

Se ha obtenido así el primer ejemplo particular en el que la abscisa de convergencia λ coincide con la abscisa de convergencia absoluta.

Ejemplo 2.2 (Fórmula de Waring) En este caso, vamos a intentar expandir la función $(x-a)^{-1}$ en serie de factoriales, para ello, puesto que:

$$\frac{1}{x-a} = \int_0^1 t^{x-a-1}dt,$$

resulta evidente, a partir de (2.1) que $\phi(t) = t^{-a}$ sin necesidad de recurrir a la fórmula de inversión (2.8). Entonces, a partir de (A.6):

$$t^{-a} = (1-(1-t))^{-a} = \sum_{s=0}^{+\infty} \binom{a+s-1}{s} (1-t)^s.$$

De esta forma, a partir de la formulación de la *integral de Mellin* (2.1), aplicando la expresión integral (A.9) de la función Beta se obtiene:

$$\frac{1}{x-a} = \frac{1}{x} + \sum_{s=1}^{+\infty} \binom{a+s-1}{s} B(x, s+1) = \frac{1}{x} + \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{(a+s-1)!}{(a-1)!} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+s+1)}.$$

Notar que se ha usado la correspondencia (A.9) entre la función Gamma y Beta. De esta forma se obtiene la conocida como *fórmula de Waring*:

$$\frac{1}{x-a} = \frac{1}{x} + \frac{a}{x(x+1)} + \frac{a(a+1)}{x(x+1)(x+2)} + \frac{a(a+1)(a+2)}{x(x+1)(x+2)(x+3)} + ... \tag{2.10}$$

Procédase a evaluar el cociente del término de orden $s+1$ frente al de orden s:

$$\frac{u_{s+1}}{u_s} = \frac{a+s}{x+s+1} = 1 - \frac{x+1-a}{x+s+1} = 1 - \frac{x+1-a}{s}\left(\frac{1}{1+\frac{x+1}{s}}\right) =$$
$$= 1 - \frac{x+1-a}{s}\left(1 - \frac{x+1}{s} + \left(\frac{x+1}{s}\right)^2 - ...\right) = 1 - \frac{x+1-a}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right).$$

Entonces, a partir del *criterio de Weierstrass* (A.2), la convergencia absoluta se obtiene para $Re(x+1-a) > 1 \Rightarrow Re(x) > Re(a)$. Entonces, puesto que la función $(x-a)^{-1}$ tiene un polo en el punto $x = a$ en particular también se verifica $\lambda = Re(a)$.

A continuación considérese la siguiente serie de factoriales:

$$\Omega(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{x(x+1)} + \frac{a(a+1)}{x(x+1)(x+2)} - \frac{a(a+1)(a+2)}{x(x+1)(x+2)(x+3)} + ... \tag{2.11}$$

Se puede aplicar el *criterio de Weierstrass* (A.2) a la serie compleja de valores absolutos de forma que el cociente entre términos consecutivos sea idéntico al de la *Fórmula de Waring* (2.10). Por ello, la abscisa de convergencia absoluta es $Re(a)$ mientras que la convergencia condicional se tiene para $0 < Re(x+1-a) \leq 1$. De esta forma $\lambda = Re(a-1)$.

2.2. La transformación $(x, x+m)$

Entre las transformaciones susceptibles de ser aplicadas a las series factoriales, la transformación $(x, x+m)$ va a resultar de utilidad para diferentes propiedades en estudio tales como la región de convergencia del producto de series factoriales y su derivabilidad, además de definir una extensión analítica de $\Omega(x)$ más allá de la frontera definida por la abscisa de convergencia. Para presentar esta transformación partimos de nuevo de la representación de $\Omega(x)$ como integral de Mellin:

$$\Omega(x) = \int_0^1 t^{x-1}\varphi(t)dt = \int_0^1 t^{x+m-1}t^{-m}\varphi(t)dt.$$

Haciendo uso del Teorema del binomio (A.6), se efectúa la siguiente identificación:

$$t^{-m}\varphi(t) = (1-(1-t))^{-m}\sum_{s=0}^{+\infty} a_s(1-t)^s := \sum_{s=0}^{+\infty} b_s^{(m)}(1-t)^s.$$

Siendo en este caso:

$$b_s^{(m)} = a_s + \binom{m}{1}a_{s-1} + \binom{m+1}{2}a_{s-2} + ... + \binom{m+s-1}{s}a_0 = \sum_{\nu=0}^{s}\binom{m+\nu-1}{\nu}a_{s-\nu}. \tag{2.12}$$

Bajo estas condiciones se tiene:

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{b_s^{(m)} s!}{(x+m)(x+m+1)...(x+m+s)}.$$

A esta reescritura de la serie factorial se la denomina transformación $(x, x+m)$. A continuación se va a dar una discusión acerca de su región de convergencia. Para ello, en primer lugar supóngase que $m = 1$, de forma que:

$$b_s^{(1)} = a_0 + a_1 + ... + a_s. \tag{2.13}$$

Consideremos una serie cuya abscisa de convergencia $\lambda \geq 0$ no coincida con su abscisa de convergencia absoluta. El Ejemplo 2.11 es válido. A partir del Teorema 1.4 es sabido que $\lambda = \alpha$ siendo esta constante la definida como en (1.9). De esta forma:

$$\lambda = \limsup_{s\to+\infty} \left(\log \left| \sum_{\nu=0}^{s} a_\nu \right| \Big/ \log s \right) = \limsup_{s\to+\infty} \log |b_s| \Big/ \log s.$$

Por ello, dado un $\epsilon > 0$ existirá un índice s_0 para el cual si $s \geq s_0$ se verifica $|b_s| \geq s^{\lambda+\epsilon}$. Por consiguiente:

$$\left| \frac{b_s^{(1)} s!}{(x+1)...(x+s+1)} \right| \leq K s^{\lambda+\epsilon} s^{-Re(x)-1} = K s^{\lambda+\epsilon-Re(x)-1}.$$

Notar que la constante proviene de aplicar el infinitésimo (A.8). De esta forma, la serie transformada converge absolutamente si $\lambda + \epsilon - Re(x) - 1 < -1$, ie, si $Re(x) > \lambda + \epsilon$. En otras palabras, la abscisa de convergencia absoluta de la serie transformada es λ. Esta condición implica en particular, en virtud de (2.3):

$$|b_s^{(1)}| = \left| \sum_{p=0}^{s} a_p \right| < M \binom{\alpha+\epsilon+s}{s}. \tag{2.14}$$

El siguiente ejemplo da debida cuenta del proceso de extensión:

Ejemplo 2.3 Sea la siguiente serie:

$$\frac{1}{x-i} = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{i(i+1)...(i+s-1)}{x(x+1)...(x+s)}$$

Cuyos coeficientes según se comprobó para la *fórmula de Waring* (2.10) son, para este caso particular:

$$a_s = \binom{i+s-1}{s};$$

entonces, según lo comentado en el Ejemplo 2.2, el criterio de Weiertrass permite afirmar que $\lambda = 0$. Esto se puede deducir alternativamente a partir del Teorema 1.4. En efecto, según (2.6) es inmediato ver que $\lim a_s \neq 0$ y por tanto su suma no converge; así, en vista de lo comentado en la Nota 1.3:

$$\lambda = \limsup_{s\to+\infty} \left(\log \left| \sum_{\nu=0}^{s} \binom{i+\nu-1}{\nu} \right| \Big/ \log s \right) = \limsup_{s\to+\infty} \left(\log \left| \binom{s+i}{s} \right| \Big/ \log s \right) \sim$$

$$\sim \limsup_{s\to+\infty} \left(\log |1/\Gamma(i+1)| \Big/ \log s \right) = 0 \qquad .$$

Se hizo uso de la *identidad de Pascal* y de (2.6). A continuación apliquemos la transformación $(x, x-i)$; en virtud de (2.12):

$$b_s^{(-i)} = \sum_{\nu=0}^{s} \binom{-i+\nu-1}{\nu} \binom{i+s-\nu-1}{s-\nu}.$$

Aplicando propiedades elementales de los números combinatorios se obtiene:

$$b_s^{(-i)} = (-1)^s \sum_{\nu=0}^{s} \binom{i+\nu}{\nu} \binom{-1}{s-\nu} = \begin{cases} 1 \text{ si } s = 0 \\ 0 \text{ si } s > 0 \end{cases}$$

Notar que la última igualdad se obtiene al aplicar la *identidad de Vandermonde.* En definitiva, la serie transformada resulta idénticamente $1/(x-i)$, no ha cambiado la serie, pero no obstante, con la forma que toman los coeficientes resulta tener una abscisa de convergencia igual a $-\infty$; en otras palabras, resulta una función meromorfa.

Este fenómeno se explica teniendo en cuenta que en la fórmula original, el polo simple $x = i$ no se sitúa en la recta de enteros negativos. No obstante, tras la transformación, el polo se "traslada" al origen obteniendo un representación meromorfa de la serie factorial.

De esta forma, y de manera general, si denotamos por λ_1 a la abscisa de convergencia de la serie $\Omega(x)$ tras aplicarle la transformación $(x, x+1)$ y considerar el criterio del límite superior resulta evidente que $\lambda_1 \leq \lambda$ si $\lambda \geq 0$. Mediante un argumento se puede probar de forma inductiva esta misma propiedad para cualquier $m \in \mathbb{N}$. Esto sin embargo no ocurre si $\lambda < 0$, veámoslo a través del siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.4 Sea la serie:

$$\sum_{s=0}^{+\infty} \frac{2^{-s-1}s!}{x(x+1)...(x+s)}.$$

La suma de los coeficientes es una serie geométrica que converge y verificando $\sum a_s = 1$; por ello, en vista de lo comentado en la Nota 1.3, $\lambda = -\infty$ por ende estamos ante una función meromorfa. Apliquemos la transformación $(x, x+1)$, según (2.13)*:*

$$b_s^{(1)} = \frac{1-2^{-s-2}}{1-1/2} - 1 = 1 - 2^{-s-1}.$$

Entonces, puesto que $\lim b_s^{(1)} = 1 \neq 0$ se tiene que $\sum b_s^{(1)}$ no converge, y según lo comentado en la Nota 1.3 su abscisa de convergencia λ_1 cumple $\lambda_1 \geq 0$. Es más, puesto que:

$$\sum_{\nu=0}^{s} b_s^{(1)} = s + 2^{-s-1} \Rightarrow \lambda_1 = \limsup_{s\to+\infty} \left(\log\left|s+2^{-s-1}\right| \Big/ \log s\right) = 1,$$

se tiene convergencia en el semiplano $Re(x+1) > 1$; ie, la serie transformada converge si $Re(x) > 0$. Así se tiene un ejemplo en el que si $\lambda < 0$, la serie transformada tiene un semiplano de convergencia más pequeño.

De nuevo, hay que recurrir a la representación de la función como serie de factoriales para dar debida cuenta de este fenómeno. Al aplicar la transformación $(x, x+1)$, la nueva representación no tiene un polo en 0 (por no estar dividido por un término x), lo cual no es compatible con una abscisa de convergencia $-\infty$.

Un "refinamiento" de estas cotas permite obtener un resultado clave acerca de la región de convergencia del producto de series factoriales; es más, se verá cómo la definición de producto de series factoriales dada en (1.2) es en realidad, la más natural conservando las propiedades de convergencia.

Teorema 2.2 *Dadas dos series de factoriales $\Omega(x)$ y $\tilde{\Omega}(x)$ con abscisas de convergencia λ y $\tilde{\lambda}$ respectivamente; entonces, su producto definido como en (1.1) es desarrollable en serie de factoriales convergente en $Re(x) > \max\left\{0, \lambda, \tilde{\lambda}\right\}$.*

Prueba.- Iterando dos veces la Identidad (2.12) para $(x, x+m'+1)$ y $(x+m'+1, x+m'+m+2)$, siendo m, m' dos naturales cualesquiera se obtiene:

$$b_s^{(m+m'+2)} = \sum_{\nu=0}^{s} \binom{m+\nu}{\nu} b_{s-\nu}^{(m'+1)}.$$

De forma que, identificando los coeficientes de a_0 en ambas expresiones, es fácil ver que:

$$\binom{m+m'+s+1}{s} = \sum_{\nu=0}^{s} \binom{m+\nu}{\nu}\binom{m'+s-\nu}{s-\nu}. \tag{2.15}$$

A partir de la desigualdad (2.14) se tiene que para un $\epsilon > 0$ y $\lambda' := \text{máx}\left\{0, \lambda, \tilde{\lambda}\right\}$ se verifica, cuando $m' = 0$ la siguiente desigualdad:

$$|b_s^{(m+2)}| < C\sum_{\nu=0}^{s} \binom{m+\nu}{\nu}\binom{\lambda'+\epsilon+s-\nu}{s-\nu} = C\binom{\lambda'+\epsilon+m+1+s}{s}. \tag{2.16}$$

Donde en la igualdad final se ha aplicado (2.15). A continuación, estas desigualdades auxiliares se van a aplicar al caso de las series $\Omega(x)$ y $\tilde{\Omega}(x)$, en las cuales, para poder extraer propiedades de convergencia absoluta, según el Teorema 1.3, es conveniente considerar la transformación $(x, x+1)$. Por ello, en lo sucesivo de la demostración se tratará a las series $\Omega(x)$ y $\tilde{\Omega}(x)$ como:

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{b_s^{(1)} s!}{(x+1)(x+2)...(x+s+1)}.$$

$$\tilde{\Omega}(x) = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{\tilde{b}_s^{(1)} s!}{(x+1)(x+2)...(x+s+1)}.$$

Considérese la siguiente cantidad:

$$u_{p,q} := \frac{b_p^{(q+2)}\tilde{b}_q^{(1)} p!q!}{(x+1)(x+2)...(x+p+q+2)} \quad ; \quad p, q = 0, 1, 2, ...$$

Se tratará de considerar la serie doble $\sum_{p,q} u_{p,q}$, para ello, en primer lugar téngase en cuenta que a partir de la desigualdad (2.16) se puede ver:

$$|u_{p,q}| < C^2 \frac{\binom{\lambda'+\epsilon+m+1+p}{p}\binom{\lambda'+\epsilon+q}{q} p!q!}{(\sigma+1)(\sigma+2)...(\sigma+p+q+2)}.$$

Donde se ha tenido en cuenta además que $|x| \geq \sigma := Re(x) > \lambda' \geq 0$. Desarrollando los números combinatorios:

$$C^2\frac{(\lambda'+\epsilon+p+q+1)...(\lambda'+\epsilon+q+2)(\lambda'+\epsilon+q)...(\lambda'+\epsilon+1)}{(\sigma+1)(\sigma+2)...(\sigma+p+q+2)}=$$
$$=C^2\frac{\lambda'+\epsilon+1}{(\sigma+1)(\sigma+2)}\frac{1}{\lambda'+\epsilon+q+1}\frac{\binom{\lambda'+\epsilon+p+q+1}{p+q}}{\binom{\sigma+p+q+2}{p+q}}.$$

Aplicando (2.6), no es difícil ver que la última identidad es equivalente a:

$$\frac{C'}{q+1}\frac{(p+q)^{\lambda'+\epsilon+1}}{(p+q)^{\sigma+2}}=C'\frac{(p+q)^{\lambda'+\epsilon-\sigma-1}}{q+1}.$$

En donde en C' se han englobado la constante asintótica de (2.6) y el resto de constantes con las que se completaron los números combinatorios. En resumen:

$$|u_{p.q}|<C'\frac{(p+q)^{\lambda'+\epsilon-\sigma-1}}{q+1}.$$

Por ello, es inmediato comprobar que:

$$\sum_{p=0}^{s}|u_{p,s-p}|<C's^{\lambda'+\epsilon-\sigma-1}\sum_{p=0}^{s}\frac{1}{p+1}\sim C''s^{\lambda'+\epsilon-\sigma-1}\log{(1+s)}.$$

Donde se volvió a usar la relación asintótica (2.9). De esta forma, es inmediato comprobar que se tiene convergencia absoluta en $\sigma>\lambda'$ y en estas condiciones están admitidas las reordenaciones de coeficientes, por lo que la siguiente identidad es cierta:

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}u_{q,p}=\sum_{s=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{s}u_{p,s-p}.$$

Véase cómo realmente la primera suma doble coincide exactamente con el producto $\Omega(x)\tilde{\Omega}(x)$ y así obtendremos una génesis del producto definido en (1.2) a la par de la deseada convergencia citada en el enunciado. En efecto:

$$\frac{\tilde{b}_q^{(1)}q!}{(x+1)(x+2)...(x+q+1)}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{b_p^{(q+2)}p!}{(x+q+2)(x+q+3)...(x+p+q+2)}=$$
$$=\frac{\tilde{b}_q^{(1)}q!}{(x+1)(x+2)...(x+q+1)}\Omega(x).$$

Dónde para la identificación con $\Omega(x)$ se ha realizado la transformación $(x,x+q+2)$. La suma con el otro índice restante q permite identificar $\tilde{\Omega}(x)$ a través de la transformación

$(x, x+1)$. De esta forma, es evidente que el producto definido en (1.2) tiene sentido y conserva las regiones de convergencia. Esto se debe a que:

$$\tilde{\Omega}(x)\Omega(x) = \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{c_s s!}{(x+1)(x+2)...(x+s+1)}, \tag{2.17}$$

con:

$$c_s := \sum_{p=0}^{s-1} \frac{p!(s-1-p)!}{s!} b_p^{(s-p)} \tilde{b}_{s-p-1}^{(1)},$$

coincide exactamente con el producto (1.2) bajo la transformación $(x, x+1)$. Esta identificación permite probar la convergencia del producto, puesto que por (2.2):

$$|c_s| < \left| \frac{(x+1)(x+2)...(x+s+1)}{s!} \right| \sum_{p=0}^{s-1} |u_{p,s-1-p}| < C'' s^{\lambda' + \epsilon} \log s.$$

Por ello, el producto (2.17) converge absolutamente si $\sigma > \lambda'$, y bajo la transformación $(x, x+1)$ el producto (1.2) converge en la misma región. La prueba es completa.

Q.E.D.

Nota 2.2 Notar que si los coeficientes a_s, $\tilde{a}_s$ de las series $\Omega(x)$ y $\tilde{\Omega}(x)$ respectivamente son positivos, entonces los coeficientes c_s del producto según (1.1) también lo son.

Una primera consecuencia de este teorema es que las potencias de una serie factorial $\Omega^2(x), \Omega^3(x), ...$ pueden representarse como una serie de factoriales convergentes en el semiplano $Re(x) > \text{máx}\{0, \lambda\}$; ie:

$$\Omega^\nu(x) = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{s! c_{\nu s}}{x(x+1)...(x+s)} \quad ; \quad \nu = 1, 2, 3, ..., \tag{2.18}$$

converge en dicha región y además si los coeficientes $a_s = c_{1,s}$ son positivos entonces para todo ν las cantidades $c_{\nu,s}$ son también positivas. Además, puesto que cada vez que se itera el producto sobre sí mismo, según (1.2) se "pierde" el primer término factorizado, se tiene siempre $c_{\nu,0} = c_{\nu,1} = ... = c_{\nu,\nu-1} = 0$.

La representación de series factoriales mediante la integral de Mellin ofrece un método alternativo para calcular su producto a partir de las funciones generatrices. En efecto, sea:

$$\Omega(x) = \int_0^1 \alpha^{x-1} \varphi(\alpha) d\alpha \quad ; \quad \tilde{\Omega}(x) = \int_0^1 \beta^{x-1} \psi(\beta) d\beta.$$

De esta forma:

$$\Omega(x)\tilde{\Omega}(x) = \int_0^1 \int_0^1 (\alpha\beta)^{x-1}\varphi(\alpha)\psi(\beta)d\alpha d\beta.$$

Realizando el cambio de variable $\alpha\beta = t$ se tiene:

$$\Omega(x)\tilde{\Omega}(x) = \int_0^1 t^{x-1}\chi(t)dt.$$

Donde se verifica:

$$\chi(t) := \int_t^1 \psi\left(\frac{t}{\alpha}\right)\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}d\alpha = \int_t^1 \varphi\left(\frac{t}{\beta}\right)\frac{\psi(\beta)}{\beta}d\beta. \tag{2.19}$$

.

Veamos la potencia de este método a través del siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.5 A partir de la *fórmula de Waring* (2.10) se tiene:

$$\frac{1}{x-p} = \frac{1}{x} + \frac{p}{x(x+1)} + \frac{p(p+1)}{x(x+1)(x+2)} + ... = \int_0^1 t^{x-p-1}dt. \tag{2.20}$$

$$\frac{1}{x-q} = \frac{1}{x} + \frac{q}{x(x+1)} + \frac{q(q+1)}{x(x+1)(x+2)} + ... = \int_0^1 t^{x-q-1}dt. \tag{2.21}$$

Aplicando la igualdad (2.19):

$$\chi(t) = \int_t^1 \alpha^{-p-1}\left(\frac{t}{\alpha}\right)d\alpha = \frac{t^{-p}-t^{-q}}{p-q}.$$

Para obtener los coeficientes se requeriría expandir $\chi(t)$ en potencias de $(1-t)$, no obstante resulta más sencillo escribir:

$$\frac{1}{x-p}\cdot\frac{1}{x-q} = \int_0^1 \frac{t^{x-p-1}-t^{x-q-1}}{p-q}dt.$$

De esta forma, resulta inmediata la solución restando de la serie (2.20), la serie (2.21) y dividiendo por $p-q$; por ello:

$$\frac{1}{x-p}\cdot\frac{1}{x-q} = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{p+q+1}{x(x+1)(x+2)} + \frac{p^2+pq+q^2+3(p+q)+2}{x(x+1)(x+2)(x+3)} + ...$$

En particular si $p = q$ se tiene:

$$\frac{1}{(x-p)^2} = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{2p+1}{x(x+1)(x+2)} + \frac{3p^2+6p+2}{x(x+1)(x+2)(x+3)} + ... \tag{2.22}$$

En este caso resulta más sencillo obtener el resultado a partir del desarrollo en potencias de $(1-t)$ de $\chi(t)$; en efecto:

$$\chi(t) = \int_t^1 \alpha^{-1} t^{-p} d\alpha = -t^{-p} \log t.$$

Entonces, a partir de los desarrollos (2.23) y (A.6):

$$\chi(t) = \left[1 + p(1-t) + \frac{p(p+1)}{2!}(1-t)^2 + ...\right] \cdot \left[(1-t) + \frac{(1-t)^2}{2} + \frac{(1-t)^3}{3} + ...\right] =$$
$$= (1-t) + \left(p + \frac{1}{2}\right)(1-t)^2 + \left(\frac{p^2}{2} + p + \frac{1}{3}\right)(1-t)^3 + ...$$

Lo cual resulta la misma serie que (2.22).

2.3. Diferenciabilidad de series factoriales

A partir de la representación (2.1) que ofrece una serie factorial, se obtiene:

$$\Omega'(x) = \int_0^1 t^{x-1} \log t \phi(t) dt.$$

De hecho, a partir del desarrollo en serie de potencias del logaritmo y de la propia función generatriz:

$$\log t = -(1-t) - \frac{1}{2}(1-t)^2 - \frac{1}{3}(1-t)^3 - ... \tag{2.23}$$

$$\phi(t) = a_0 + a_1(1-t) + a_2(1-t)^2 + ...$$

es posible ver que (basta identificar los nuevos coeficientes como los que acompañan al término $(1-t)^s$):

$$\Omega'(x) = -\sum_{s=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s-1} + ... + \frac{a_{s-1}}{1}\right) s!}{x(x+1)(x+2)...(x+s)}. \tag{2.24}$$

Nótese que en este caso la suma comienza en $s=1$.

Si $\lambda < 0$ es sabido que el punto $x = 0$ es un polo simple de $\Omega(x)$ y por ello, resulta en un polo doble de $\Omega'(x)$ lo que impide tener una abscisa de convergencia estrictamente menor que 0. De esta forma en general cuando $\lambda < 0$ la abscisa de convergencia de $\Omega'(x)$ es cero.

2.4. Dominancia término a término

La técnica de series mayorantes encuentra tal y como afirma [10] y [13], múltiples aplicaciones en el estudio de operadores y de la convergencia para las series de potencias. Como pondremos de manifiesto en la Sección 2.5, esta técnica será de utilidad para la demostración de una versión del *Teorema de la función implícita* adaptada al caso de las series factoriales (Teorema 2.4).

Con la notación del Teorema 1.4, se había encontrado que cuando la abscisa de convergencia λ es positiva coincide con la cantidad α definida según (1.9), mientras que si resulta estrictamente negativa, la serie $\sum a_s$ converge implicando $\alpha = 0$ si dicho valor es no nulo. De esta forma si tomamos $\lambda' := \max\{0, \lambda\}$ se garantiza:

$$\lambda' = \limsup_{n\to+\infty} \left(\log \left| \sum_{s=0}^{n} a_s \right| \Big/ \log n \right).$$

Entonces, de nuevo, por la propia definición de límite, para un $\epsilon > 0$ existirá un entero N para el que:

$$\left| \sum_{s=0}^{n} a_s \right| < n^{\lambda'+\epsilon} \quad \text{si} \quad n \geq N.$$

Por otro lado, a partir de la técnica asintótica (2.6):

$$\binom{\lambda' + \epsilon + n}{n} = \frac{\Gamma(\lambda' + \epsilon + n + 1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\lambda' + \epsilon + 1)} \sim \frac{n^{\lambda'+\epsilon}}{\Gamma(\lambda' + \epsilon + 1)},$$

y por ello, es posible encontrar una constante positiva M independiente de n para la cual:

$$\left| \sum_{s=0}^{n} a_s \right| < M \binom{\lambda' + \epsilon + n}{n}. \tag{2.25}$$

De esta forma, a partir de la *fórmula de Waring* (2.10) se puede considerar la siguiente serie:

$$\frac{M}{x - \lambda' - \epsilon} = \frac{M}{x} + \frac{M(\lambda' + \epsilon)}{x(x+1)} + \frac{M(\lambda' + \epsilon)(\lambda' + \epsilon + 1)}{x(x+1)(x+2)} + \ldots \tag{2.26}$$

Además, a partir del *criterio de Weierstrass* habíamos probado que esta serie converge absolutamente para $Re(x) > \lambda' + \epsilon$. El término de orden s de esta serie es:

$$\frac{d_s s!}{x(x+1)...(x+s)} \quad ; \quad d_s = M\binom{\lambda' + \epsilon + s}{s}.$$

Cabe destacar que los coeficientes son positivos para todo s y además su suma verifica, a partir del equivalente a la *identidad de Pascal* que ofrecen las combinaciones con repetición:

$$M\sum_{s=0}^{n}\binom{\lambda' + \epsilon + s}{s} = M\binom{\lambda' + \epsilon + n + 1}{n}.$$

De esta forma, para cada valor de n, la suma de los $n+1$ coeficientes de (2.26) es estrictamente mayor que el módulo de la suma de los $n+1$ coeficientes de $\Omega(x)$. Y además esta dominancia se traduce a cada uno de los coeficientes por separado, ie $|a_s| \leq d_s$ para todo s, tal y como muestra (2.3) para $x = \lambda' + \epsilon$ (en este caso la serie $\Omega(x)$ converge y tiene sentido afirmar que el término general tiende a cero). En este caso se dice que hay dominancia término a término.

A la serie (2.26) se la denomina *serie mayorante*, y por lo que hemos comentado, cada serie factorial convergente posee una serie factorial mayorante que define una función holomorfa[7] para $Re(x) > \lambda' + \epsilon + 1$. Esta propiedad va a ser de utilidad en la próxima sección y en el siguiente resultado. Es por ello evidente que a la hora de realizar transformaciones de una serie factorial mediante un operador, va a resultar interesante que se conserve esta propiedad (véase la definición de *operador bueno*).

Una primera utilidad de esta propiedad la ofrece el siguiente resultado de representación de series factoriales que generaliza todas operaciones de potenciación ya introducidas. Además tiene un equivalente con las series potencias (véase [13]).

Teorema 2.3 *Si la función:*

$$G(t) := \sum_{\nu=0}^{+\infty} g_\nu t^\nu,$$

es analítica en un entorno del origen de radio r y $\Omega(x)$ representa una serie de factoriales inversa en un semiplano, entonces la función:

$$G(\Omega(x)) - G(0),$$

[7]Aunque la serie mayorante converja absolutamente para $Re(x) > \lambda' + \epsilon$, se añade una unidad para garantizar la convergencia absoluta de $\Omega(x)$.

también admite una representación como serie factorial inversa convergente en algún semiplano.

Prueba.- Supóngase sin pérdida[8] de generalidad que la abscisa de convergencia λ es estrictamente positiva. En primer lugar, se verifica la siguiente igualdad:

$$G(\Omega(x)) = g_0 + \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{s!d_s}{x(x+1)..(x+s)}. \tag{2.27}$$

Siendo en este caso:

$$d_s := \sum_{\nu=1}^{+\infty} g_\nu c_{\nu s}.$$

Con $c_{\nu s}$ los coeficientes de la serie factorial de la potencia $\nu-$ésima (2.18) de $\Omega(x)$. Entonces, puesto que la serie factorial es convergente absolutamente en el semiplano $Re(x) > \alpha + 1 + \epsilon$, por lo que ha sido demostrado, admite una serie mayorante (2.26) denotada por $L(x)$ a la que se puede considerar cualquier potencia ν de forma que:

$$L^\nu(x) = \frac{M^\nu}{(x-\alpha-\epsilon-1)^\nu} := \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{s!d_{\nu s}}{x(x+1)...(x+s)}$$

Con $d_{\nu s}$ los coeficientes de la serie factorial de la potencia $\nu-$ésima de la serie mayorante (2.26). Por construcción se verifica $d_{\nu s} > |c_{\nu s}|$. Tómese $\sigma \in \mathbb{R}$ una cantidad mayor estrictamente que $\alpha + \epsilon + 1 + M/r$. Entonces se cumple la siguiente desigualdad:

$$L^\nu(\sigma) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{s!d_{\nu s}}{\sigma(\sigma+1)...(\sigma+s)} = \frac{M^\nu}{(\sigma-\alpha-\epsilon-1)^\nu} < r^\nu.$$

Entonces, puesto que por hipótesis $\sum g_\nu r^\nu$ converge. la siguiente serie doble:

$$\sum_{\nu=0}^{+\infty}\sum_{s=0}^{+\infty} \frac{s!|g_\nu|d_{\nu s}}{\sigma(\sigma+1)...(\sigma+s)},$$

converge y domina término a término a:

$$\sum_{\nu=0}^{+\infty}\sum_{s=0}^{+\infty} \frac{s!g_\nu c_{\nu s}}{\sigma(\sigma+1)...(\sigma+s)}.$$

[8] En otro caso basta sustituir α por $\lambda' := \text{máx}\{0, \lambda\}$.

Puesto que la convergencia es absoluta, cualquier reordenamiento es admisible y la convergencia se mantiene. Por ello, se ha probado que la serie (2.27) es convergente en $Re(x) > \alpha + \epsilon + 1 + M/r$ que es lo que se pretendía probar.

Q.E.D.

Como consecuencia, se obtiene este otro resultado de representación.

Corolario 2.1 *Si la función:*

$$H(x) := \sum_{\nu=0}^{+\infty} g_\nu x^{-\nu},$$

es analítica en $x = \infty$, entonces la función $H(z) - H(\infty)$ puede ser representada como una serie factorial convergente en algún semiplano.

PRUEBA.- Con la notación del Teorema 2.3, basta aplicar tal resultado a las funciones $G(t) := H(1/t)$ y en este caso particular a $\Omega(x) = 1/x$.

Q.E.D.

2.5. Teorema de la función implícita

Teorema 2.4 (Teorema de la función implícita) *Sea una sucesión $\Omega_\nu(x)$ ($\nu = 0, 1, 2, ...$) de series factoriales inversas convergentes en un semiplano $Re(x) > \lambda$. Sea $\epsilon > 0$ y $\lambda' := \max\{0, \lambda\}$. Por ello, denótese por $L_\nu(x)$ a la serie mayorante $M_\nu/(x - \lambda' - \epsilon - 1)$ asociada a la convergencia absoluta de $\Omega_\nu(x)$. Por otro lado, sea la siguiente sucesión de constantes $\alpha_1, \alpha_2, ...$ para la cual $\alpha_1 \neq 0$ y además la serie $\sum_{\nu=1}^{+\infty} |\alpha_\nu| u^\nu$ converge para $|u| \leq r$ con $r > 0$. Además supóngase que $\sum_{\nu=0}^{+\infty} M_\nu u^\nu$ también converge para $|u| \leq r$. De esta manera la serie:*

$$F(x, u) := \Omega_0(x) + \sum_{\nu=1}^{+\infty} (\alpha_\nu + \Omega_\nu(x)) u^\nu, \tag{2.28}$$

converge para $|u| \leq r$ y $Re(x) > \lambda' + \epsilon + 1$. La ecuación $F(x, u) = 0$ tiene solución analítica $u = S(x)$ que puede ser representada como una serie de factoriales inversa convergente en algún semiplano.

´ PRUEBA.- Para no confundir al lector con las distintas transformaciones que se han realizado a lo largo del capítulo, se especifica a continuación la notación que se va a usar en la demostración y que es exclusiva a ésta.

$$\Omega_\nu(x) = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{s! g_{\nu s}}{x(x+1)...(x+s)} \quad ; \quad \nu = 1, 2, ...$$

Con esta notación, como ya fue comentado en la sección anterior, para $\lambda' + \epsilon$ existe una sucesión de constantes $M_0, M_1, ...$ para las cuales:

$$|g_{\nu s}| < M_\nu \binom{\lambda' + \epsilon + s}{s},$$

y sus respectivas series $\Omega_\nu(x)$ están dominadas término a término por:

$$L_\nu(x) = \frac{M_\nu}{x - \lambda' - \epsilon - 1} = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{s! d_{\nu s}}{x(x+1)...(x+s)}. \tag{2.29}$$

Series las cuales convergen absolutamente[9] para $Re(x) > \lambda' + \epsilon + 1$ y además $d_{\nu s} \geq |g_{\nu s}|$. De esta forma, si se toma $\sigma > \lambda' + \epsilon + 1$ entonces:

$$|\Omega_\nu(x)| \leq \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{s! |g_{\nu s}|}{|x||x+1|...|x+s|} \leq \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{s! d_{\nu s}}{\sigma(\sigma+1)...(\sigma+s)} = \frac{M_\nu}{\sigma - \lambda' - \epsilon - 1}.$$

De esta forma:

$$|F(x,u)| \leq |\Omega_0(x)| + \sum_{\nu=1}^{+\infty} \left(|\alpha_\nu| + |\Omega_\nu(x)|\right) |u|^\nu \leq \frac{1}{\sigma - \lambda' - \epsilon - 1} \sum_{\nu=0}^{+\infty} M_\nu |u|^\nu + \sum_{\nu=1}^{+\infty} |\alpha_\nu||u|^\nu.$$

Por ello, si $|u| \leq r$ y $Re(x) > \lambda' + \epsilon + 1$, la serie (2.28) converge por las hipótesis y define una función holomorfa $F(x,u)$. Falta entonces hallar la solución de la ecuación $F(x,u) = 0$. Buscamos entonces soluciones $u = S(x)$ de la forma:

$$u = S(x) = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{s! h_{1s}}{x(x+1)...(x+s)}, \tag{2.30}$$

que sean convergentes en algún semiplano. Para ello, primero se procede[10] como sigue:

[9]De nuevo, se hace notar que también se tiene convergencia absoluta para $Re(x) > \lambda' + \epsilon$, pero añadir una unidad garantiza la convergencia absoluta de $\Omega_\nu(x)$.

[10]En este caso, para no complicar la notación se toma $h_{v,s}^{(m)} = h_{m,v,s}$.

$$S^{\nu}(x)=\sum_{s=\nu-1}^{+\infty}\frac{s!h_{\nu s}}{x(x+1)...(x+s)}=\sum_{s=\nu-1}^{+\infty}\frac{s!h_{m\nu s}}{(x+m)(x+m+1)...(x+m+s)}.$$

En donde, una vez tomada la potencia $\nu-$ésima se ha aplicado la transformación $(x, x+m)$, de forma que los coeficientes $h_{\nu s}$ y $h_{m\nu s}$ se relacionan según (2.12). Además puesto que los términos factorizados hasta $x+\nu-1$ son nulos se tiene que $h_{\nu 0}=h_{\nu 1}=...=h_{\nu,\nu-2}=0$ y $h_{m\nu 0}=h_{m\nu 1}=...=h_{m,\nu,\nu-2}=0$ para todo $\nu=2,3,...$ y $m=1,2,....$ Además, según lo expuesto en la Nota 2.2, si se supone además que $h_{10}, h_{11}, ...h_{1,n-1}$ son no negativos, por un argumento de inducción se tiene:

$$h_{\nu,\nu-1}, h_{\nu,\nu}, ..., h_{\nu,n+\nu-2}\geq 0 \qquad \text{para } \ \nu=1,2,... \quad ; \quad n=1,2,...,$$

y, gracias a (2.12) se deduce también que:

$$h_{m,\nu,\nu-1}, h_{m,\nu,\nu}, ..., h_{m,\nu,n+\nu-2}\geq 0 \qquad \text{para } \ \nu=1,2,... \quad ; \quad n=1,2,... \quad ; \quad m=1,2,...$$

Para computar de una forma cerrada las constantes h_{1s}, a continuación se substituirá la serie (2.30) en la ecuación $F(x,u)=0$.

$$0=F(x,S(x))=\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{s!g_{0s}}{x(x+1)...(x+s)}+\sum_{\nu=0}^{+\infty}\alpha_{\nu}\sum_{s=\nu-1}^{+\infty}\frac{s!h_{\nu s}}{x(x+1)...(x+s)}+$$
$$+\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{s=1}^{+\infty}\frac{s!g_{ns}}{x(x+1)...(x+s)}\sum_{\nu=n-1}^{+\infty}\frac{\nu!h_{s+1,n,\nu}}{(x+s+1)(x+s+2)...(x+s+1+\nu)}. \qquad (2.31)$$

Anulando toda la suma de coeficientes de $1/x(x+1)...(x+s)$ en virtud del Teorema 1.7, se tiene:

$$\alpha_1 h_{10}+g_{00}=0.$$

$$\alpha_1 h_{11}+g_{01}+g_{10}h_{10}+\alpha_2 h_{21}=0.$$

Con $h_{21}=h_{10}^2$ y en general:

$$s!\alpha_1 h_{1s} + s!g_{0s} + \sum_{\nu=2}^{s+1} s!\alpha_\nu h_{\nu s} + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\eta=0}^{s-\nu} \eta! g_{\nu\eta}(s-1-\eta)! h_{\eta+1,\nu,s-1-\nu} = 0.$$

Estas igualdades sugieren considerar la siguiente ecuación dominante:

$$K(x,u) := (|\alpha_1| - L_1(x))u - L_0(x) - \sum_{\nu=2}^{+\infty}(|\alpha_\nu| + L_\nu(x))u^\nu = 0.$$

Efectúese el cambio de variable $1/x := t$:

$$\begin{aligned} K(1/t,u) := N(t,u) &= \frac{M_0 t}{(\lambda' + \epsilon + 1)t - 1} + \left(|\alpha_1| + \frac{M_1 t}{(\lambda' + \epsilon + 1)t - 1}\right) u - \\ -\sum_{\nu=2}^{+\infty} |\alpha_\nu| u^\nu &+ \sum_{\nu=2}^{+\infty} \frac{M_\nu t u^\nu}{(\lambda' + \epsilon + 1)t - 1} = 0. \end{aligned}$$

Nótese que esta serie converge para $|u| \leq r$ y $|t| < 1/(\lambda' + \epsilon + 1)$, y entonces, por el *Teorema de la función implícita* clásico, queda garantizada la existencia de una solución $u = Q(t)$ analítica en un entorno de de $t = 0$ para el cual $Q(0) = 0$. Por tanto, $u = Q(1/x) := T(x)$ es solución de la ecuación dominante y es analítica en un entorno de ∞ verificando $T(\infty) = 0$.

Entonces, por el Corolario 2.1, $T(x)$ tiene una representación como serie factorial inversa:

$$T(x) = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{s! e_s}{x(x+1)...(x+s)},$$

convergente en algún semiplano. Esta serie puede hallarse substituyendo la serie (2.29) y esta última en la ecuación dominante. Una vez hecho, los coeficientes $e_1, e_2, ...$ pueden ser obtenidos como un sistema de ecuaciones como el que ya ha sido mostrado. La construcción permite afirmar que $e_s \geq |h_{1s}|$ para cada s; y por ello, la serie factorial (2.30) converge absolutamente y por ello, representa una función $S(x)$ analítica en al menos, el mismo semiplano de convergencia de $T(x)$.

Si $Re(x)$ es lo suficientemente grande no solo la serie $S(x)$ es absolutamente convergente, sino que las series simple, doble y triple de (2.31) son también absolutamente convergentes y por ello, la reagrupación de términos es posible. Entonces, puesto que los coeficientes h_s fueron escogidos para verificar $F(x, S(x)) \equiv 0$, ya es claro que así es el caso y la prueba es completa.

Q.E.D.

Nota 2.3 La ecuación $F(x,u) = 0$ también tendrá una solución representable como serie de factoriales inversa convergente si F es de la forma:

$$F(x,u) = \sum_{\nu=1}^{+\infty} \alpha_\nu u^\nu + \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{s! g_s(u)}{x(x+1)...(x+s)} \quad ; \quad \alpha_1 \neq 0,$$

donde $g_s(u)$ es una función analítica para $|u| \leq r$ y la serie del primer sumando converge uniformemente para $|u| \leq r$ y $Re(x) > \lambda$. En efecto, basta darse cuenta que en este caso las cotas resultan:

$$|g_s(u)| < M \binom{\lambda' + \epsilon + s}{s} \quad ; \quad |g_{\nu s}| < \frac{M}{r^\nu} \binom{\lambda' + \epsilon + s}{s},$$

y por ello basta aplicar el *Teorema de la función implícita* 2.4 para obtener el resultado.

Capítulo 3

Operadores sobre series factoriales

Uno debe estar bien seguro de que ha permitido a la ciencia hacer un gran progreso, si va a sobrecargarla con una multitud de términos nuevos y a exigir que los lectores sigan una investigación que les ofrece tantas cosas extrañas.

Augustin-Louis Cauchy

En primer lugar se va a introducir la notación que generalice las transformaciones de una serie factorial mediante operadores $\varphi : \mathcal{M}[[x]] \longrightarrow \mathcal{M}[[x]]$. Esto se hará a través de la siguiente operación:

$$\varphi\left(\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{a_s s!}{x(x+1)...(x+s)}\right)=\sum_{s=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{s}\varphi_k(s-k)a_{s-k}\right)\frac{s!}{x(x+1)...(x+s)},$$

siendo para todo k una aplicación $\varphi_k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$. Este tipo de operadores denotados por $\mathscr{L}_0$, se les denominan como *operadores triangulares inferiores* al tener como representación matricial una matriz triangular inferior respecto a la representación de $\mathcal{M}[[x]]$. Veamos unos ejemplos:

Ejemplo 3.1 (Operador identidad) Éste se define como sigue:

$$\varphi\left(\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{a_s s!}{x(x+1)...(x+s)}\right)=\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{a_s s!}{x(x+1)...(x+s)}.$$

Que con la notación ya introducida se verifica $\varphi_k = 0$ para todo $k \neq 0$ y $\varphi_0 = 1$.

Ejemplo 3.2 (La clase de operadores diagonales) En la tónica del ejemplo precedente, un operador se dice *diagonal* cuando verifica:

$$\varphi\left(\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{a_s s!}{x(x+1)...(x+s)}\right)=\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{\varphi_0(s)a_s s!}{x(x+1)...(x+s)}.$$

De nuevo se cumple $\varphi_k = 0$ para todo $k \neq 0$.

Ejemplo 3.3 (Operador multiplicación) A partir de otra serie factorial:

$$\tilde{\Omega}(x)=\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{b_s s!}{x(x+1)...(x+s)}, \tag{3.1}$$

se trata de construir el operador que represente el producto por $\beta+\tilde{\Omega}(x)$, ie:

$$\varphi\left(\Omega\right)=\beta\Omega(x)+\tilde{\Omega}(x)\cdot\Omega(x),$$

siendo β una constante. En virtud de los coeficientes del producto de series definidos en (1.2) se sigue que para $k \neq 0$:

$$\varphi_k(s-k)=\frac{(s-k)!(k-1)!}{s!}C_{s-k,k-1}.$$

Siendo en este caso:

$$C_{s-k,k-1}:=\sum_{p=0}^{k-1}\binom{p+s-k}{p}b_{k-1-p}.$$

Mientras que para $k=0$ se tiene $\varphi_0(s)=\beta$.

Ejemplo 3.4 (Operador traslación) Se trata de computar $\tau(\Omega(x)) \longrightarrow \Omega(x+1)$, ie:

$$\tau\left(\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{a_s s!}{x(x+1)...(x+s)}\right)=\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{a_s s!}{(x+1)(x+2)...(x+s+1)}.$$

Entonces, a partir de la forma que toman los coeficientes de la transformación $(x, x+m)$ en el caso $m=1$ (2.13) se tiene:

$$\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{a_s s!}{(x+1)(x+2)...(x+s+1)}=\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{(a_s-a_{s-1})s!}{x(x+1)...(x+s)}. \tag{3.2}$$

Se hace notar que para $s=0$ el término a_{s-1} se considera nulo. Por ello, resulta inmediato ver que en este caso $\tau_k(s-k)=0$ para $k \neq 0$ y $k \neq 1$ mientras que $\tau_0(s)=1$ y $\tau_1(s-1)=-1$.

Ejemplo 3.5 (Operador traslación inverso) En este caso $\tau^{-1}(\Omega(x)) \longrightarrow \Omega(x-1)$. Entonces, puesto que:

$$\tau^{-1}(\Omega) = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(a_0 + a_1 + ... + a_s)s!}{x(x+1)...(x+s)},$$

es inmediato comprobar que para todo k se cumple $\left(\tau^{-1}\right)_k (s-k) = 1$.

Ejemplo 3.6 (Operador θ) Se trata de computar $\theta = xd/dx \ : \ \mathcal{M}[[x]] \longrightarrow \mathcal{M}[[x]]$. Retomando los coeficientes (2.24) de la derivada de una serie factorial se tiene:

$$x\Omega'(x) = -\sum_{s=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s-1} + ... + \frac{a_{s-1}}{1}\right)s!}{(x+1)(x+2)...(x+s)} = -\sum_{s=0}^{+\infty} \frac{A_s s!}{(x+1)(x+2)...(x+s+1)}.$$

Siendo en este caso:

$$A_s := (s+1)\left[\frac{a_0}{s+1} + \frac{a_1}{s} + ... + \frac{a_s}{1}\right].$$

En vista de los coeficientes del operador τ se tiene:

$$\begin{aligned} A_s - A_{s-1} = (s+1)\left[\frac{a_s}{1} + ... + \frac{a_{s-k}}{k+1} + ... \frac{a_0}{s+1}\right] - s\left[\frac{a_{s-1}}{1} + ... + \frac{a_{s-k}}{k} + ... \frac{a_0}{s}\right] = \\ = (s+1)a_s + \sum_{k=1}^{s} a_{s-k} \frac{k-s}{k(k+1)}. \end{aligned}$$

De esta forma se puede escribir:

$$x\Omega'(x) = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{\alpha_s s!}{x(x+1)...(x+s)},$$

siendo:

$$\alpha_s := -(s+1)a_s + \sum_{k=1}^{s} a_{s-k} \frac{s-k}{k(k+1)}. \tag{3.3}$$

De esta forma resulta evidente que para todo $k \neq 0$ se tiene $\theta_k(s-k) = (s-k)/k(k-1)$ mientras que $\theta_0(s) = -(s+1)$.

Ejemplo 3.7 (Operador Δ) En este caso $\Delta(\Omega(x)) \longrightarrow (x-1)(\Omega(x) - \Omega(x-1))$. De nuevo, usando los coeficientes del operador traslación:

$$\Omega(x) = \Omega((x-1)+1) = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(a_s - a_{s-1})s!}{(x-1)x...(x+s-1)}.$$

De esta forma:

$$\Delta(\Omega(x)) = -\sum_{s=1}^{+\infty} \frac{a_{s-1}s!}{x(x+1)...(x+s-1)}. \tag{3.4}$$

Por ello, tras un cambio de variables en s, el operador Δ resulta en un operador diagonal $\Delta_k(s-k) = 0$ si $k \neq 0$ con $\Delta_0(s) = -(s+1)$.

Ejemplo 3.8 (El operador $-\tau\Delta$) De la propia definición es fácil comprobar que $-\tau\Delta(\Omega(x)) \longrightarrow x(\Omega(x) - \Omega(x+1))$. Usando las propiedades de sendos operadores involucrados:

$$-\tau\Delta(\Omega(x)) = -\tau\left(-\sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(s+1)a_s s!}{x(x+1)...(x+s)}\right) = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{((s+1)a_s - s a_{s-1})s!}{x(x+1)...(x+s)}. \tag{3.5}$$

Por ello se sigue fácilmente que $(-\tau\Delta)_0(s) = s+1$ y $(-\tau\Delta)_1(s-1) = s$ mientras que $(-\tau\Delta)_k(s-k) = 0$ para todo $k \geq 2$.

3.1. Dominancia y operadores *buenos*

Una vez se han visto ejemplos de cómo actúan los operadores $\mathscr{L}_0$ sobre las series de factoriales inversas, interesa que ciertas propiedades estudiadas en el Capítulo 2 se conserven a la hora de transformar dichas series. Tal y como afirma [10], los operadores *buenos* en el contexto de series de potencias están relacionados directamente con las propiedades de dominancia inferidas en la Sección 2.4. No obstante, en nuestro contexto de series factoriales hay que dejar en primer lugar claro a qué nos referimos con operador *bueno* y especificar qué tipo de dominancia interesa conservar. En estos dos aspectos basaremos esta sección.

Definición 3.1 *Sea $\varphi : \mathcal{M}[[x]] \longrightarrow \mathcal{M}[[x]]$ un operador de $\mathscr{L}_0$ con coeficientes $\varphi_k(s-k)$ y $0 \leq k \leq s$. El operador diagonal asociado a φ se define como sigue:*

$$(diag)(\varphi)(\Omega(x)) := \varphi_0(\Omega(x)) := \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{\varphi_0(s) a_s s!}{x(x+1)...(x+s)}.$$

Por otro lado, en las mismas condiciones se define el operador $|\varphi_0|$ como sigue:

$$|\varphi_0|(\Omega(x)) := \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{|\varphi_0(s)||a_s|s!}{x(x+1)...(x+s)}.$$

Definición 3.2 (Operador *bueno*) *Un operador φ se dice que es bueno si:*

1. *Existe una serie factorial $c(x)$ inversa convergente con abscisa de convergencia $\rho > 0$.*
2. *Para toda serie $\Omega(x) \in \mathcal{M}\,[[x]]$, $\varphi(\Omega(x))$ está dominada término a término por el producto $c(x)|\varphi_0|(\Omega(x))$.*

Notar que a partir de la fórmula del producto (1.2):

$$c(x)|\varphi_0|(\Omega(x)) = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{c_{-1}|\varphi_0(s)||a_s|s!}{x(x+1)...(x+s)} + \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{B_s s!}{x(x+1)...(x+s)},$$

con:

$$s!B_s = \sum_{k=1}^{s} (s-k)!(k-1)!|\varphi_0(s-k)||a_{s-k}|C_{s-k,k-1},$$

y:

$$C_{s-k,k-1} := \sum_{p=0}^{k-1} \binom{p+s-k}{p} c_{k-1-p}. \tag{3.6}$$

Por ello, se tiene dominancia término a término si:

$$|\varphi_k(s-k)| \leq \frac{(s-k)!(k-1)!|\varphi_0(s-k)|C_{s-k,k-1}}{s!} \quad ; \quad 1 \leq k \leq s. \tag{3.7}$$

Y en el caso $k = 0$ se tiene $|\varphi_0(s)| \leq c_{-1}|\varphi_0(s)|$.

Nota 3.1 Por un proceso de normalización se puede tomar $c_{-1} = 1$ de forma se que evite la última casuística. De forma que es suficiente que exista una serie:

$$c(x) = 1 + \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{c_s s!}{x(x+1)...(x+s)} \qquad c_s \geq 0, \tag{3.8}$$

convergente para todo x con $Re(x) \geq \rho$ y verificando para todo $1 \leq k \leq s$ la desigualdad (3.7). De esta forma, obtenemos una condición que en la práctica es fácil de verificar, ya sea por fallar para valores fijos de k y valores grandes de s; o por obtener una manera sencilla de construir la candidata $c(x)$. Los siguientes ejemplos ponen a prueba estos procedimientos.

- El operador identidad es *bueno*. Basta tomar $c(x) = 1$.

- Cualquier operador diagonal es *bueno*. De nuevo, es suficiente con tomar $c(x) = 1$.

- La multiplicación por una serie factorial convergente es un operador *bueno*, en efecto, basta tomar:

$$c(x) = 1 + \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{|b_s| s!}{x(x+1)...(x+s)}.$$

  Siendo $|b_s|$ el valor absoluto de los coeficientes (3.1) de la serie $\tilde{\Omega}(x)$ por la que se multiplica la serie original. En la notación del Ejemplo 3.3, la elección de $c(x)$ corresponde al caso $\beta = 1$. Se hace notar que en el caso $\beta = 0$ la condición (3.7) no sería satisfecha y el operador no sería *bueno*.

- El operador traslación τ no es un operador *bueno*. En efecto, fue visto que $\tau_0(s) = 1$ y $\tau_1(s-1) = -1$ y por ello la condición (3.7) se traduce en:

$$1 = |\tau_1(s-1)| \leq \frac{(s-1)!0!|\tau_0(s-1)|C_{s-1,0}}{s!} = \frac{(s-1)!c_0}{s!} = \frac{c_0}{s}.$$

  Lo cual, para valores grandes de s no puede cumplirse.

- El operador θ no es un operador *bueno*. En efecto, habíamos probado que $\theta_0(s) = -(s+1)$ y $\theta_k(s-k) = (s-k)/k(k+1)$ para $1 \leq k \leq s$. En particular, para $k = 1$ la condición (3.7) se transforma en:

$$|\theta_1(s-1)| \leq \frac{(s-1)!(1-1)!|\theta_0(s-1)|C_{s-1,1-1}}{s!} \Rightarrow \frac{s-1}{2} \leq \frac{(s-1)!s}{s!} c_0 = c_0.$$

  Condición de nuevo no válida para valores grandes de s.

- El operador $-\tau\Delta$ tampoco es un operador *bueno*. Efectivamente, recordando que $(-\tau\Delta)_0(s) = s+1$ y $(-\tau\Delta)_1(s-1) = s$ mientras que $(-\tau\Delta)_k(s-k) = 0$ para todo $k \geq 2$, basta tomar $k = 1$ para ver que la condición (3.7) no se verifica:

$$|(-\tau\Delta)_1(s-1)| = s \leq \frac{(s-1)!(1-1)!|(-\tau\Delta)_0(s-1)|C_{s-1,1-1}}{s!} = c_0$$

  Lo cual no es cierto para valores grandes de s.

Más adelante, a la hora de aplicar estas generalizaciones de transformación de series factoriales a la resolución de ecuaciones en diferencias, será vital especificar en qué sentido los operadores conservan la dominancia. A este respecto, se definen los siguientes conceptos de dominancia para dos operadores $\varphi, \psi \in \mathscr{L}_0$.

Definición 3.3 *Se dice que ψ está dominado término a término por φ si para todo s y $0 \leq k \leq s$ se verifica:*

$$|\psi_k(s-k)| \leq |\varphi_k(s-k)|.$$

Definición 3.4 *Se dice que ψ está correctamente dominado por φ ($\psi \prec \varphi$) si ψ está dominado por un operador de la forma $c(x) \cdot diag(\varphi)$ siendo $c(x) \in \mathcal{F}_A[[x]]$ una serie factorial en las mismas condiciones de* (3.8).

Nota 3.2 Este caso equivale a afirmar que para todo s $|\psi_0(s)| \leq |\varphi_0(s)|$ y además, que para todo $1 \leq k \leq s$ se verifica:

$$|\psi_k(s-k)| \leq \frac{(s-k)!(k-1)!|\varphi_0(s-k)|C_{s-k,k-1}}{s!}, \tag{3.9}$$

con los coeficientes $C_{s-k,k-1}$ definidos en (3.6).

Definición 3.5 *Se dice que ψ está estrictamente dominado por φ ($\psi \preccurlyeq \varphi$) si ψ está correctamente dominado por φ y además:*

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{\psi_0(s)}{\varphi_0(s)} = 0.$$

Este cociente tiene sentido plantearlo pues para una serie de infinitos términos su serie estrictamente dominante también los tiene y por tanto $\varphi_0(s) \neq 0$ para cierto s. En caso de que la serie original sea de finitos términos el límite es 0.

Nota 3.3 A partir de la condición de dominancia (3.7) resulta evidente que todo operador *bueno* está correctamente dominado por si mismo.

- Considérese el operador $(-\tau\Delta)^{-1}$, el cual consiste en aplicar el operador traslación inverso y a continuación Δ^{-1}, que, al ser diagonal, su inverso se obtiene simplemente invirtiendo sus coeficientes. Por ello, resulta evidente:

$$(-\tau\Delta)^{-1}(\Omega(x)) = \sum_{s=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{s+1} \left(\sum_{k=0}^{s} a_{s-k} \right) \right) \frac{s!}{x(x+1)...(x+s)}.$$

Por otro lado, a partir de la *fórmula de Waring* (2.10) particularizada para $a = 1$, la fórmula del producto de series (1.2) permite afirmar:

$$\frac{1}{x-1}\cdot\Omega(x) = \sum_{s=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{s}\frac{(s-k)!(k-1)!a_{s-k}}{s!}\left[\sum_{p=0}^{k-1}\binom{p+s-k}{p}\right]\right)\frac{s!}{x(x+1)...(x+s)}.$$

La aplicación iterada de la *identidad de Pascal*[1] permite afirmar:

$$\frac{1}{x-1}\cdot\Omega(x) = \sum_{s=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{s}\frac{a_{s-k}}{s-k+1}\right)\frac{s!}{x(x+1)...(x+s)}.$$

Por ello es evidente que:

$$\left(1+\frac{1}{x-1}\right)\cdot\Omega(x) = \sum_{s=0}^{+\infty}\left(a_s+\sum_{k=1}^{s}\frac{a_{s-k}}{s-k+1}\right)\frac{s!}{x(x+1)...(x+s)}.$$

Puesto que trivialmente para todo $k = 1, 2, ..., s$ se verifica $1/(s+1) \leq 1/(s-k+1)$ es evidente que el operador $(-\tau\Delta)^{-1}$ está dominado término a término por el operador $\Omega(x) \longrightarrow (1+1/(x-1))\Omega(x)$. Es más, aplicando de nuevo iteradas veces la *identidad de Pascal* en la condición (3.9), resulta evidente, a partir de la última desigualdad, que el operador $(-\tau\Delta)^{-1}$ está correctamente dominado[2] por la identidad. Puesto que asimismo $1/(s+1) \longrightarrow 0$ cuando $s \longrightarrow +\infty$ se tiene que además la dominancia es estricta.

- A partir de las relaciones (3.3) obtenidas para el operador θ, se pueden obtener los coeficientes de su inverso θ^{-1} a través de los siguientes despejes:

[1]En particular, se trata de ver que $\sum_{p=0}^{k-1}\binom{p+s-k}{p} = \binom{s}{k-1}$.

[2]En este caso, basta tomar $c(x) = 1 + \sum_{s=0}^{+\infty}\frac{s!}{x(x+1)...(x+s)}$.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= -\alpha_0. \\
a_1 &= -\frac{1}{2}\alpha_1. \\
a_2 &= -\frac{1}{3}\left(\alpha_2 + \frac{1}{2\cdot 2}\alpha_1\right). \\
a_3 &= -\frac{1}{4}\left(\alpha_3 + \frac{1\cdot 2}{2\cdot 3}\alpha_2 + \frac{1\cdot 2}{3\cdot 2\cdot 2\cdot 2}\alpha_1\right).
\end{aligned}
$$

Y de forma recursiva se obtiene:

$$
a_s = -\frac{1}{s+1}\left(\alpha_s - \sum_{k=1}^{s}\frac{s-k}{k(k+1)}a_{s-k}\right). \tag{3.10}
$$

Lo que en general no da una expresión cerrada para los coeficientes de θ^{-1}. No obstante, lo que vamos a intentar probar por un argumento de inducción a partir de la última igualdad es la siguiente desigualdad para todo s:

$$
|a_s| \leq \frac{1}{s+1}\left(\sum_{k=0}^{s}|\alpha_s|\right) \tag{3.11}
$$

Las identidades anteriores hacen evidente esta desigualdad para $s = 0, 1, 2$. De esta forma se asumirá para todo $k = 1, 2, ...s-1$ que:

$$
|a_{s-k}| \leq \frac{1}{s-k+1}\left(\sum_{p=0}^{s-k}|\alpha_p|\right).
$$

Aplicando esta hipótesis de inducción a la identidad (3.10):

$$
|a_s| \leq \frac{1}{s+1}\left(|\alpha_s| + \sum_{k=1}^{s}\frac{s-k}{(s-k+1)k(k+1)}\left(\sum_{p=0}^{s-k}|\alpha_p|\right)\right).
$$

De esta forma, reordenando los términos, es evidente que el término de $|\alpha_p|$ toma la forma:

$$\sum_{n=1}^{s-p} \frac{s-n}{(s-n+1)n(n+1)}.$$

Entonces, puesto que $(s-n)/(s-n+1) < 1$ y que:

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p(p+1)} = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) = 1,$$

se sigue naturalmente la desigualdad (3.11). Este cálculo permite afirmar que el operador θ^{-1} está dominado término a término por el operador $(-\tau\Delta)^{-1}$; y puesto que éste estaba a su vez correctamente dominado por la identidad, lo mismo se puede decir sobre θ^{-1}.

Nota 3.4 Para todo operador $\varphi \in \mathscr{L}_0$ con coeficientes $\varphi_k(s-k)$ con $0 \leq k \leq s$, si se introduce una nueva función $\psi_0(s)$ para la que todo s verifique $\psi_0(s) > 0$ y $(s+1)|\varphi_0(s)| \leq \psi_0(s)$; entonces el operador diagonal definido por ψ_0 es un operador *bueno* que domina correctamente[3] a φ. Es más, tal y como se ha realizado en el ejemplo del operador $(-\tau\Delta)^{-1}$, φ está dominado término a término por la composición del operador ψ_0 con la multiplicación por $(1 + 1/(x-1))$.

Nota 3.5 Este último comentario implica que cada operador de $\mathscr{L}_0$ está correctamente y estrictamente dominado por algún operador *bueno*. No obstante, que un operador esté correctamente dominado por un operador *bueno*, no implica que aquél también lo sea.

3.2. Operadores analíticos y la propiedad singular-regular

Se tratará de establecer un nuevo tipo de operadores actuando sobre $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}[[x]]$ generados por combinaciones finitas de operadores $\mathscr{L}_0$ con series factoriales como coeficientes.

Definición 3.6 (Operador *analítico*) *Un operador $D : \mathcal{F}_{\mathbb{C}}[[x]] \to \mathcal{F}_{\mathbb{C}}[[x]]$ se dice $\mathscr{L}_0$-analítico si es de la forma:*

$$D(\Omega) = F(x, \Omega, \theta_1\Omega, ..., \theta_n\Omega),$$

con:

[3] De nuevo, basta tomar $c(x) = 1 + \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{s!}{x(x+1)...(x+s)}$ para que dicha dominancia sea correcta.

1. *$F(x,\Omega,\theta_1\Omega,...,\theta_n\Omega)$ una función holomorfa en $Re(x)>\lambda$ y con $z:=(z_0,...,z_n)$ en algún polidisco de $\mathbb{C}^{n+1}$ centrado en el origen y teniendo alguna de las siguientes expansiones, equivalentes entre sí:*

$$F(x,z)=\sum_{|s|=1}^{+\infty} b_s z^s + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m! b_m(z)}{x(x+1)...(x+m)},$$

con $b_m(z)$ funciones holomorfas en el mismo polidisco; o:

$$F(x,z)=\sum_{|s|=1}^{+\infty} \left(b_s + a_s(x)\right) z^s,$$

con $a_m(x)\in \mathcal{M}\{x\}$ (se recuerda que es el conjunto de series factoriales inversas absolutamente convergentes en el punto $x\in\mathbb{C}$) con una abscisa de convergencia común para todo m. Notar que en ambos casos se considera $s:=(s_0,...,s_n)$, $z^s:=z_0^{s_0}\cdot z_1^{s_1}\cdot ...\cdot z_n^{s_n}$ y $|s|:=s_0+...+s_n$.

2. *$\theta_1,\theta_2,...,\theta_n$ son operadores de $\mathscr{L}_0$ en $\mathcal{M}[[x]]$.*

De ahora en adelante se denotará por $\mathscr{D}(\mathscr{L}_0)$ al conjunto de operadores $\mathscr{L}_0$-analíticos .

Nota 3.6 Se hace notar que en ambas expansiones, el término constante es nulo. Es más, en cualesquiera expansiones, el operador puede representarse como:

$$D(\Omega)=\sum_{|s|=1}^{+\infty} b_s\Omega^{s_0}\cdot(\theta_1(\Omega))^{s_1}\cdot...\cdot(\theta_n(\Omega))^{s_n} + \sum_{r+|s|=0}^{+\infty}\frac{a_{r,s} r!\Omega^{s_0}\cdot(\theta_1(\Omega))^{s_1}\cdot...\cdot(\theta_n(\Omega))^{s_n}}{x(x+1)...(x+r)}.$$

Definición 3.7 *Dado un operador $D\in\mathscr{D}(\mathscr{L}_0)$ se denomina parte afín de D a la cantidad:*

$$D_a(\Omega):=\sum_{|s|=1} b_s\Omega^{s_0}\cdot(\theta_1(\Omega))^{s_1}\cdot...\cdot(\theta_n(\Omega))^{s_n}+\frac{a_{0,0}}{x}.$$

Equivalentemente, para un operador $D\in\mathscr{D}(\mathscr{L}_0)$ se define la parte lineal de D a:

$$D_0(\Omega):=D_a(\Omega)-\frac{a_{0,0}}{x}.$$

Definición 3.8 (Operador singular) *Un operador $D\in\mathscr{D}(\mathscr{L}_0)$ se dice que es singular si su aplicación elimina los términos constantes y resulta en una serie factorial pura; ie, si verifica:*

$$D \; : \; \mathcal{F}_{\mathbb{C}}\left[[x]\right] \to \mathcal{M}\left[[x]\right].$$

A pesar de que los operadores introducidos en la sección anterior todavía no se probó que fuesen $\mathscr{L}_0-$analíticos , es inmediato que esta propiedad *singular* la poseen tanto los operadores Δ y θ como sus inversas; mientras que la identidad, τ y su inverso no la poseen.

Definición 3.9 (Operador singular-regular) *Un operador singular se denomina singular-regular si para todo $f(x) \in \mathcal{M}\{x\}$ cada serie factorial inversa formal $\Omega(x)$ satisfaciendo $D(\Omega) = f(x)$ es convergente.*

Definición 3.10 (Operador singular-irregular) *Un operador singular se dice que es singular-irregular si existe un $f(x) \in \mathcal{M}\{x\}$ y al menos una serie factorial inversa $\Omega(x)$ no convergente verificando $D(\Omega) = f(x)$.*

Observando el crecimiento de los coeficientes de la solución $\Omega(x)$, se puede probar que los operadores $\theta, \Delta, -\tau\Delta$ y sus inversas son operadores singulares-regulares.

En efecto, si denotamos por f_s al coeficiente de $f(x) \in \mathcal{M}\{x\}$, para el operador θ se verifica, en virtud de (3.3):

$$-(s+1)a_s + \sum_{k=1}^{s} \frac{a_{s-k}(s-k)}{s(s+1)} = f_s.$$

Que, en virtud de la desigualdad (3.11) se cumple, con la notación $\sigma = Re(x)$:

$$|a_s| \leq \frac{1}{s+1}\left(\sum_{k=0}^{s}|f_s|\right) \leq \frac{C}{s+1}\binom{\sigma+s+1}{s} = \frac{C}{\sigma+1}\binom{\sigma+s+1}{s+1} \sim \frac{s^{\sigma}}{\Gamma(\sigma+1)(\sigma+1)}.$$

Notar que tras suponer que $f(x)$ es absolutamente convergente y que por tanto verifica (2.3), se ha aplicado la *identidad de Pascal* para que el infinitésimo (2.6) diese lugar a la última expresión. Por ello, basta aplicar el criterio de la raíz para ver que $\sum a_s$ converge, y por lo comentado en la Nota 1.3, la serie $\Omega(x)$ converge en algún semiplano.

Para el operador Δ, en virtud de (3.4) se verifica $a_s = -f_{s-1}$ para $s > 0$, por lo que, si $f(x)$ converge, $\Omega(x)$ también *a fortiori*.

A su vez, para el operador $-\tau\Delta$, en virtud de (3.5) se tiene para $s > 0$:

$$(s+1)a_s - sa_{s-1} = f_s.$$

Por ello, sumando telescópicamente los términos f_s se verifica:

$$|a_s| \leq \frac{1}{s+1}\left(|a_0| + \sum_{k=1}^{s} |f_s|\right).$$

Y con un argumento similar al utilizado para el operador θ, en virtud de la convergencia de $f(x)$ se tiene la convergencia de $\Omega(x)$.

La propiedad singular-regular se conserva para sus inversos en caso de que exista tal inverso. No obstante, a lo largo de la Sección 3.1 se vio cómo las inversas de los operadores tratados están bien definidas y se dio debida cuenta de su construcción.

El problema que atañerá al siguiente capítulo consistirá en saber cuándo un operador $\mathscr{L}_0-$analítico D posee la propiedad singular-regular, o equivalentemente, cuándo las soluciones formales de la ecuación $F(x, \theta_0\Omega, \theta_1\Omega, ..., \theta_n\Omega) = 0$ son convergentes, tomando θ_0 el operador identidad.

Se hace notar que no es suficiente con imponer que los operadores constituyentes $\theta_1, ..., \theta_n$ sean singulares-regulares. Esto se debe a que dicha propiedad singular regular no se preserva bajo combinaciones lineales y no lineales de operadores con esta propiedad. Por ejemplo, el operador $E : \Omega(x) \to \Omega(x) - \Omega(x+1)$ es singular-regular por serlo $-\tau\Delta$. No obstante, los operadores $(1/x)E$ y $(b/x)I$ con I el operador identidad y b una constante son ambos operadores singulares-regulares mientras que su diferencia no lo es. En efecto, considérese:

$$E(\Omega)/x - b\Omega/x = 1/x^2, \tag{3.12}$$

entonces, tras multiplicar[4] por x ambas igualdades, en virtud de (3.2):

$$(1-b)\Omega(x) - \Omega(x+1) = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(1-b)a_s}{x(x+1)...(x+s)} - \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{a_s - a_{s-1}}{x(x+1)...(x+s)} = \frac{1}{x}.$$

Entonces, puesto que las series factoriales inversas admiten una única expresión (Teorema 1.7) se verifica:

$$\begin{aligned}(1-b)a_0 - a_0 = 1 &\Rightarrow a_0 = -\frac{1}{b}\\ (1-b)a_s - a_s + a_{s-1} = 0 &\Rightarrow a_s = \frac{a_{s-1}}{b}.\end{aligned}$$

Por lo que la solución formal de (3.12) resulta ser:

[4]De hecho, el problema original puede considerarse simplificado, con la salvedad de que el operador identidad no es singular.

$$\Omega(x) = -\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{b^{-(m+1)}m!}{x(x+1)...(x+m)},$$

la cual es divergente para cualquier valor complejo si $|b| < 1$.

Para finalizar este capítulo, se mostrará, tal y como se anticipó en la introducción, cómo la propiedad singular-regular no se verifica si se consideran estos mismos operadores sobre series de potencias.

Ejemplo 3.9 Sea la ecuación:

$$\Delta y = \frac{1}{x-1},$$

para la cual se intentará construir formalmente una serie de potencias convergente en el infinito $y(x) = \sum y_s/x^s$. Si $s \geq 1$ téngase en cuenta:

$$\frac{1}{x^s} = \frac{1}{(x-1+1)^s} = \frac{1}{(x-1)^s}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^s} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\binom{k+s-1}{k}\frac{1}{(x-1)^{s+k}}.$$

Donde en la última se ha aplicado (A.5). Téngase en cuenta la siguiente identidad:

$$\begin{aligned}\binom{\alpha}{k} &= \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!} = \\ = (-1)^k\frac{(-\alpha)(-\alpha+1)...(-\alpha+k-1)}{k!} &= (-1)^k\binom{k-\alpha-1}{k}.\end{aligned} \tag{3.13}$$

De esta forma, a la hora de efectuar $y(x) - y(x-1)$ y eliminar el término constante se obtiene, a partir de la última igualdad para $\alpha = -s$:

$$y(x) - y(x-1) = \sum_{s=1}^{+\infty} y_s\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{-s}{k}\frac{1}{(x-1)^{s+k}} - \frac{1}{(x-1)^s}\right).$$

El coeficiente de $(x-1)^{-1}$ es nulo, mientras que para $N \geq 2$ el coeficiente de $(x-1)^{-N}$ resulta:

$$\sum_{s=1}^{N} y_s\binom{-s}{N-s} - y_N = \sum_{s=1}^{N-1} y_s\binom{-s}{N-s}.$$

Por tanto, tras multiplicar por $x-1$ se tiene:

$$\Delta y = \sum_{N=1}^{+\infty} \left(\sum_{s=1}^{N} y_s \binom{-s}{N+1-s} \right) \frac{1}{(x-1)^N} = \sum_{N=1}^{+\infty} \left(\sum_{s=1}^{N} y_s (-1)^{N+1-s} \binom{N}{N+1-s} \right) \frac{1}{(x-1)^N}.$$

Para la última igualdad se volvió a recurrir a (3.13). Entonces, si igualamos la expresión precedente a $1/(x-1)$ se obtiene $y_1 = -1$ y para $N > 1$:

$$0 = \sum_{s=1}^{N} y_s \binom{N}{N+1-s} (-1)^s = \sum_{s=1}^{N} y_s \binom{N}{s-1} (-1)^s = \sum_{s=0}^{N-1} y_{s+1} \binom{N}{s} (-1)^{s+1}.$$

Notar que se ha realizado un cambio de variable en la última igualdad, utilizado la simetría de los números combinatorios en la antepenúltima y se ha considerado el término $(-1)^{N+1-s}$ como dependiente únicamente de s, esto se permite puesto que se está igualando a cero y no importa en qué orden se incluyan los términos negativos.

Denotando por $z_s := (-1)^{s+1} y_{s+1}$ se deduce que $z_0 = -y_1 = 1$ y en general:

$$\sum_{s=0}^{N-1} \binom{N}{s} z_s = 0.$$

Por ello, en virtud de la Proposición A.4 son los números de Bernoulli los únicos verificando la igualdad y por ende se cumple $y_s = (-1)^s B_{s-1}$. De esta forma, la serie solución resulta:

$$y(x) = \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{(-1)^s B_{s-1}}{x^s} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{B_{2s}}{x^{2s+1}}.$$

Notar que en la última igualdad se han usado las igualdades $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$ y $B_{2k+1} = 0$ si $k \geq 1$ debidamente demostradas en la Sección A.2. La serie solución es divergente; en efecto, como se probará también en esa sección, los números de Bernoulli verifican (de hecho, son una manera alternativa de definirse que resulta equivalente a la que se da en el anexo):

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B_k}{k!} x^k.$$

Por ello, el radio de convergencia de la última serie es 2π puesto que se encuentra con polos simples a ambos extremos de la región imaginaria pura. Si la serie solución fuera convergente, la función generatriz sería entera y por tanto, la serie que define los números de Bernoulli tendría un radio de convergencia infinito, lo cual no es el caso.

Es en este sentido, vista la propiedad singular-regular de Δ para las series de factoriales, en que son éstas más idóneas para la resolución de ecuaciones en diferencias que sus homólogas en serie de potencias. Los capítulos que siguen a continuación darán fé de este hecho.

Capítulo 4

Aplicación a la resolución de ecuaciones en diferencias con parte lineal no nula

En la vida, utilizamos la proposición matemática solo para deducir de proposiciones que no pertenecen a la matemática otras proposiciones que tampoco pertenecen a ella.

Ludwig Wittgenstein

En este capítulo se intentará dar respuesta a qué condiciones permiten soluciones convergentes a ecuaciones analíticas $F(x, \theta_0\Omega, \theta_1\Omega, ..., \theta_n\Omega) = 0$ vistas al final del capítulo precedente. Estos resultados generalizarán el *Teorema de la función implícita.*

4.1. Ecuaciones no lineales con parte lineal no nula

En esta sección, partimos del siguiente desarrollo analítico:

$$F(x, X_0, X_1, ..., X_n; Y_1, Y_2, ..., Y_M) = \frac{a_{0,0}}{x} + \sum_{|s|=1} b_s(X_0)^{s_0}(X_1)^{s_1}...(X_n)^{s_n} +$$
$$+ \sum_{r+|s|\geq 0\,,\,|s|\neq 0} \frac{a_{r,s}r!}{x(x+1)...(x+r)}(X_0)^{s_0}(X_1)^{s_1}...(X_n)^{s_n}(Y_1)^{s_{n+1}}...(Y_M)^{s_M}.$$

Se tratará de estudiar la ecuación $D(\Omega) = F(x, \theta_0\Omega, \theta_1\Omega, ..., \theta_n\Omega; \varphi_1\Omega, \varphi_2\Omega, ..., \varphi_M\Omega) = 0$, donde $\{\theta_i\}_{i=0}^n$ y $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$ son operadores de $\mathscr{L}_0$. Se recuerda que θ_0 es el operador identidad.

Con intención de simplificar la notación, se identificará la suma $\sum_{|s|=1} b_s(X_0)^{s_0}(X_1)^{s_1}...(X_n)^{s_n}$ con $\sum_{j=0}^n a_jX_j$. De esta forma, para tratar el caso de las ecuaciones en diferencias lineales basta que $a_{0,0} = a_{r,s} = 0$ para todo $r + |s| > 0$. No obstante, para el siguiente resultado que otorga condiciones suficientes para que la solución de $D(\Omega) = 0$ sea convergente, no requiere un aumento excesivo de esfuerzo ni son necesarias técnicas distintas considerar los términos no lineales. Es por ello que directamente se estudia el caso de las ecuaciones no lineales sin necesidad de tratar previamente el caso lineal.

Teorema 4.1 *Dada la ecuación $D(\Omega) = 0$ supóngase que se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Entre los operadores $\{\theta_i\}_{i=1}^n$ existe un operador bueno θ_μ que domina estrictamente al resto de operadores $\{\theta_i\}_{i=1}^n$ y además domina correctamente a la identidad.*

2. *Dicho operador θ_μ domina correctamente a los operadores $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$.*

3. *$a_\mu \neq 0$.*

En estas condiciones, cada solución en forma de serie de factoriales inversa de la ecuación $D(\Omega) = 0$ es convergente.

Prueba.-La demostración de este resultado tiene dos etapas, una primera en la que se construye la solución, y la última en la que se prueba su convergencia.

1. Construcción de solución formal. Reescríbase la ecuación $D(\Omega) = 0$ como sigue:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \theta_j \Omega + \frac{a_{0,0}}{x} = R_2(x, \theta_0\Omega, \theta_1\Omega, ..., \theta_n\Omega; \varphi_1\Omega, \varphi_2\Omega, ..., \varphi_M\Omega).$$

   En R_2 se recogen todos los términos de orden cuadrático y superior. De esta forma, introduciendo en la ecuación la expresión candidata a solución en serie de factoriales[1]:

$$\Omega = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{u_m m!}{x(x+1)...(x+m)},$$

   se recuerda que para todo $j = 0, 1, ...n$:

$$\theta_j \Omega = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\left(\sum_{k=0}^{m} \theta_{j,k}(m-k) u_{m-k} \right) \frac{m!}{x(x+1)...(x+m)} \right).$$

[1]Nótese que la notación utilizada para los coeficientes de la serie factorial y los índices de sumación es distinta a la utilizada a lo largo del trabajo. Esto se debe a que aquéllas se encuentran ya utilizadas para la ecuación $D(\Omega) = 0$.

En virtud de la unicidad que ofrecen las series factoriales inversas (Teorema 1.7), identificando coeficientes se obtiene:

$$u_0 \sum_{j=0}^{n} a_j \theta_{j,0}(0) + a_{0,0} = 0,$$

mientras que para $m \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} a_j \left(\sum_{k=0}^{m} \theta_{j,k}(m-k) u_{m-k} \right) &= f_m \Big\{ u_0, u_1, ..., u_{m-1}; \\
\theta_{1,0}(0)u_0; \theta_{1,1}(1)u_1 + \theta_{1,0}(0)u_0, ..., \sum_{k=0}^{m-1} \theta_{1,k}(m-k-1) u_{m-k-1}&; \\
...; \theta_{j,0}(0)u_0, ..., \sum_{k=0}^{m-1} \theta_{j,k}(m-k-1) u_{m-k-1}&; \\
...; \theta_{n,0}(0)u_0, ..., \sum_{k=0}^{m-1} \theta_{n,k}(m-k-1) u_{m-k-1}&; \\
\varphi_{1,0}(0)u_0, \varphi_{1,1}(1)u_1 + \varphi_{1,0}(0)u_0, ..., \sum_{k=0}^{m-1} \varphi_{1,k}(m-k-1) u_{m-k-1}&; \\
...; \varphi_{j,0}(0)u_0, ..., \sum_{k=0}^{m-1} \varphi_{j,k}(m-k-1) u_{m-k-1}&; \\
...; \varphi_{M,0}(0)u_0, ..., \sum_{k=0}^{m-1} \varphi_{M,k}(m-k-1) u_{m-k-1}; R &\Big\}.
\end{aligned}$$

En este caso R representa el conjunto de coeficientes de R_2 y f_m es un polinomio de los argumentos indicados; nótese que se involucran una cantidad finita de éstos. Reescríbase la primera cantidad como sigue:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \left(\sum_{k=0}^{m} \theta_{j,k}(m-k) u_{m-k} \right) = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j \theta_{j,0}(m) \right) u_m + \sum_{j=0}^{n} a_j \left(\sum_{k=1}^{m} \theta_{j,k}(m-k) u_{m-k} \right).$$

Defínase la siguiente cantidad:

$$F_1(m) := \sum_{j=0}^{n} a_j \theta_{j,0}(m).$$

Si se verifica $F_1(m) \neq 0$ para todo m, se trata de un sistema de ecuaciones recursivo con el que poder determinar de forma biunívoca los coeficientes de Ω; en tal caso la solución existe y es única. Tal y como afirma [11], aún cuando para algún m se verifica $F_1(m) = 0$ en ocasiones sigue siendo posible encontrar una solución, en este caso no única. En el caso de que los términos restantes del polinomio f_m sean no nulos no existe solución. Estas casuísticas se mostrarán en el Ejemplo 4.1. Notar que no han sido necesarias todavía las hipótesis sobre los operadores.

2. Convergencia de la solución formal. Puesto que θ_μ domina estrictamente al resto de operadores θ_j con $j \neq \mu$ se verifica:

$$\lim_{m \to +\infty} \frac{F_1(m)}{\theta_{\mu,0}(m)} = a_\mu \neq 0.$$

En efecto, la dominancia estricta implica:

$$\lim_{m \to +\infty} \frac{\theta_{j,0}(m)}{\theta_{\mu,0}(m)} = 0 \quad ; \quad j \neq \mu,$$

y puesto que $F_1(m)$ se compone de sumas de dichos operadores, se obtiene el anterior límite. De esta manera, puesto que a_μ es no nulo, se verifica, para un m suficientemente grande:

$$|F_1(m)| \geq \sigma |\theta_{\mu,0}(m)|,$$

con σ una cantidad positiva ($\sigma := |a_\mu| + \epsilon$ con $\epsilon > 0$); de esta forma $F_1(m) \neq 0$.

Por otro lado, la dominancia correcta de θ_μ respecto al resto de operadores φ_j con $j = 1, ..., M$ implica que para todo j, φ_j está dominado por el producto de:

$$d_j(x) = 1 + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{d_m^j m!}{x(x+1)...(x+m)}, \tag{4.1}$$

por $diag|\theta_\mu|$. Lo mismo ocurre con los operadores θ_j, los cuales, su dominancia estricta con respecto a θ_μ implica que estén dominados por el producto de:

$$c_j(x) = 1 + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{c_m^j m!}{x(x+1)...(x+m)}, \tag{4.2}$$

por $diag|\theta_\mu|$.

A su vez, por el hecho de ser θ_μ un operador *bueno*, se siguen las siguientes relaciones entre coeficientes:

$$|\theta_{j,k}(m-k)| \leq \frac{(m-k)!(k-1)!}{m!}|\theta_{\mu,0}(m-k)|C^j_{m-k,k-1}, \tag{4.3}$$

con:

$$C^j_{m-k,k-1} := \sum_{p=0}^{k-1} \binom{p+m-k}{p} c^j_{k-1-p}.$$

Y alternativamente:

$$|\varphi_{j,k}(m-k)| \leq \frac{(m-k)!(k-1)!}{m!}|\theta_{\mu,0}(m-k)|D^j_{m-k,k-1}, \tag{4.4}$$

siendo en este caso:

$$D^j_{m-k,k-1} := \sum_{p=0}^{k-1} \binom{p+m-k}{p} d^j_{k-1-p}.$$

Una vez establecidas las notaciones y traducido numéricamente las hipótesis del enunciado, comencemos por considerar la siguiente ecuación analítica mayorante:

$$\sigma_1 Y = \frac{\rho}{x} + \left(\sum_{j=0}^{n} |a_j| c_j(x)\right) Y + |R_2|(x, Y, c_1(x)Y, ..., c_n(x)Y; d_1(x)Y, ..., d_M(x)Y), \tag{4.5}$$

donde $|R_2|(x, X_0, X_1, ..., X_n; Y_1, ..., Y_M)$ denota la serie mayorante convergente (en virtud de la analiticidad de D) (2.26) de $R_2(x, X_0, X_1, ..., X_n; Y_1, ..., Y_M)$ definida de la misma manera que en el primer paso, como el conjunto de términos de orden cuadrático y superior. Los parámetros σ_1 y ρ se escogerán adecuadamente a continuación para que otorguen las propiedades de convergencia deseadas. Por ello, partamos de una solución formal del sistema mayorante (4.5) de la forma:

$$Y = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{Y_m m!}{x(x+1)...(x+m)}. \tag{4.6}$$

Para obtener los coeficientes Y_m se tiene, de una manera análoga al caso visto en el primer paso de la demostración, tras la sustitución de Y en (4.5), las siguientes ecuaciones:

$$\left(\sigma_1 - \sum_{j=0}^{n} |a_j|\right) Y_0 = \rho,$$

y para $m \geq 1$:

$$\begin{aligned}\left(\sigma_1 - \sum_{j=0}^{n} |a_j|\right) Y_m = \sum_{j=0}^{n} \frac{|a_j|}{m!} \left(\sum_{k=1}^{m} (m-k)!(k-1)! Y_{m-k} C^{j}_{m-k,k-1}\right) + \\ + f^* \left\{ Y_0, Y_1, ..., Y_{m-1}; \left\{ \frac{1}{m!} \sum_{k=q}^{m} (m-k)!(k-1)! Y_{m-k} C^{0}_{m-k,k-1} \right\}_{q=0}^{m} ; \right. \\ ...; \left\{ \frac{1}{m!} \sum_{k=q}^{m} (m-k)!(k-1)! Y_{m-k} C^{n}_{m-k,k-1} \right\}_{q=0}^{m} ; \\ \left\{ \frac{1}{m!} \sum_{k=q}^{m} (m-k)!(k-1)! Y_{m-k} D^{0}_{m-k,k-1} \right\}_{q=0}^{m} ; \\ \left. ...; \left\{ \frac{1}{m!} \sum_{k=q}^{m} (m-k)!(k-1)! Y_{m-k} D^{M}_{m-k,k-1} \right\}_{q=0}^{m} \right\}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

En este caso, f^*_m denota la serie mayorante (2.26) de f_m.

A continuación, tomemos las siguientes elecciones en los parámetros σ_1 y ρ. En primer lugar, escójase un número real σ_1 verificando:

$$0 < \sigma_1 - \sum_{j=0}^{n} |a_j| < \sigma. \tag{4.8}$$

Por último, en la ecuación obtenida para Y_0, escójase un número real ρ verificando:

$$Y_0 = \rho / \left(\sigma_1 - \sum_{j=0}^{n} |a_j|\right) \geq |\theta_{\mu,0}(0)||u_0| \geq |u_0|/c_{0,0}.$$

Por un proceso de normalización se puede tomar $c_{0,0} = 1$. Nótese que la última desigualdad es la condición de dominancia correcta de θ_μ sobre la identidad en el caso

$k = 0$. Ahora probemos por inducción fuerte la siguiente desigualdad:

$$|u_m| \leq |\theta_{\mu,0}(m)||u_m| \leq Y_m.$$

Para ello, asumamos que:

$$|u_p| \leq |\theta_{\mu,0}||u_p| \leq Y_p \quad ; \quad 0 \leq p \leq m-1,$$

la cual ya ha sido probada para $p = 0$. Para ello, téngase en cuenta la siguiente fórmula de recursión para u_m, que es con la que se definirá en lo sucesivo de la demostración:

$$\begin{aligned}
|u_m| \leq \frac{1}{\sigma|\theta_{\mu,0}|} \Bigg[\sum_{j=0}^{n} \frac{|a_j|}{m!} \left(\sum_{k=1}^{m} (m-k)!(k-1)! Y_{m-k} C^{j}_{m-k,k-1} \right) + \\
+ f^* \Bigg\{ Y_0, Y_1, ..., Y_{m-1}; \left\{ \frac{1}{m!} \sum_{k=q}^{m} (m-k)!(k-1)! Y_{m-k} C^{0}_{m-k,k-1} \right\}_{q=0}^{m} ; \\
...; \left\{ \frac{1}{m!} \sum_{k=q}^{m} (m-k)!(k-1)! Y_{m-k} C^{n}_{m-k,k-1} \right\}_{q=0}^{m} ; \\
\left\{ \frac{1}{m!} \sum_{k=q}^{m} (m-k)!(k-1)! Y_{m-k} D^{0}_{m-k,k-1} \right\}_{q=0}^{m} ; \\
...; \left\{ \frac{1}{m!} \sum_{k=q}^{m} (m-k)!(k-1)! Y_{m-k} D^{M}_{m-k,k-1} \right\}_{q=0}^{m} \Bigg\} \Bigg].
\end{aligned}$$

Entonces, a partir de la fórmula (4.7) obtenida para Y_m es fácil ver:

$$|u_m| \leq \frac{\left(\sigma_1 - \sum_{j=0}^{n} |a_j| \right) Y_m}{\sigma |\theta_{\mu,0}(m)|} \Rightarrow |\theta_{\mu,0}(m)||u_m| \leq Y_m,$$

donde en la última igualdad se ha aplicado (4.8). Esto prueba la desigualdad que estábamos buscando, puesto que $|u_m| \leq |\theta_{\mu,0}(m)||u_m|$ de nuevo, en virtud de la dominancia correcta de θ_μ sobre la identidad.

De esta manera, hemos probado para todo m que $|u_m| \leq Y_m$; ie, que la serie factorial $\Omega(x)$ está dominada término a término por la serie $Y(x)$, entonces, dada la versión alternativa del *Teorema de la función implícita* vista en la Nota 2.3 aplicada a la ecuación:

$$\sigma_1 Y = \frac{\mu}{x} + \left(\sum_{j=0}^{n} |a_j| c_j(x) \right) Y + |R_2|(x, Y, c_1(x)Y, ..., c_n(x)Y; d_1(x)Y, ..., d_M(x)Y),$$

implica la convergencia de la serie $Y(x)$, y con ello, la de $\Omega(x)$.

De esta forma, la prueba es completa.

Q.E.D.

4.2. Ecuaciones de tipo Briot-Bouquet

En esta sección se va a dar un enfoque práctico al Teorema 4.1, viendo cómo resolver cierto tipo de ecuaciones en diferencias. Bajo las asunciones de dicho teorema, las expresiones analíticas concretas que se van a analizar reciben el nombre de ecuaciones de tipo Briot-Bouquet. En particular, éstas tienen la siguiente expresión:

$$F(x, X_0, X_1, ..., X_n; Y_1, Y_2, ..., Y_M) = \frac{a_{0,0}}{x} + \sum_{j=0}^{n} a_j X_j + R_2(x, X, Y),$$

siendo:

$$R_2(x, X, Y) = \sum_{r+|s|\geq 0, |s|\neq 0}^{+\infty} \frac{a_{r,s} r!}{x(x+1)...(x+r)} (X_0)^{s_0} (X_1)^{s_1} ... (X_n)^{s_n} (Y_1)^{s_{n+1}} ... (Y_M)^{s_M}.$$

Ejemplo 4.1 Considérese la siguiente ecuación en diferencias:

$$\Delta y = \frac{a}{x} + by + R_2(x, y). \tag{4.9}$$

En principio $R_2(x, y)$ no está sujeto a ninguna condición. Con la notación utilizada hasta el momento, la ecuación se traduce en:

$$F(x, id, \Delta) = \frac{a_{0,0}}{x} + a_0 y + a_1 \Delta y + R_2(x, y),$$

con $a_{0,0} = a$, $a_0 = b$ y $a_1 = -1$. De esta forma, si b no es un entero positivo, la ecuación (4.9) tiene solución única en forma de serie de factoriales pues en este caso $F_1(m) = \sum a_j(\theta_{j,0}(m)) = b + m + 1 \neq 0$ para todo $m \geq 1$. Además dicha solución es convergente puesto que Δ es un operador *bueno* (se recuerda que todos los operadores diagonales son *buenos*) que domina estrictamente a la identidad. De esta forma, puesto que

$a_1 = a_\mu \neq 0$, se verifican las condiciones del Teorema 4.1 que garantizan dicha existencia y convergencia.

Para analizar las distintas casuísticas derivadas en la demostración del Teorema 4.1 cuando $F_1(m) = 0$ para algún m, veamos cómo se comporta este ejemplo si $b + m + 1 = 0$ para algún $m \geq 1$ y $R_2(x, y) = 0$. En este caso, la ecuación 4.9 resulta, en virtud de (3.4):

$$-\sum_{s=1}^{+\infty} \frac{y_{s-1}s!}{x(x+1)...(x+s-1)} = \frac{a}{x} + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{by_s s!}{x(x+1)...(x+s)}.$$

Identificando los coeficientes se obtiene para $s \geq 1$:

$$-y_s(s+1) = by_s,$$

condición trivial para el término $m \geq 1$; mientras que para $s = 0$:

$$-y_0 = a + by_0.$$

En este caso, $b + 1 \neq 0$ y el primer término de la serie solución puede despejarse. Así, bajo la hipótesis de que $b + m + 1 = 0$ para un $m \geq 1$ la solución a (4.9) no es única. Si $b = -1$ no existe solución. Estas casuísticas también se verifican si $R_2(x, y) \neq 0$.

Ejemplo 4.2 En este caso considérese la ecuación:

$$(-\tau\Delta)y = \frac{a}{x} + by + R_2(x, y). \tag{4.10}$$

De nuevo, para que exista solución única en serie de factoriales es necesario que b sea distinto a un entero negativo. No obstante, no se puede aplicar directamente el Teorema 4.1 puesto que como se comprobó en la Sección 3.1, $-\tau\Delta$ no es un operador *bueno*. No obstante, el operador identidad sí lo es y domina estrictamente a $(-\tau\Delta)^{-1}$ (también comprobado en dicha sección). Por ello, efectuando el cambio de variable $z := -\tau\Delta y$, la ecuación se transforma en:

$$z = \frac{a}{x} + b(-\tau\Omega)^{-1}z + R_2(x, (-\tau\Omega)^{-1}z).$$

En estas condiciones, el Teorema 4.1 garantiza la convergencia de la solución en forma de serie de factoriales para z. Entonces, puesto que tal y como se demostró en la Sección 3.2, el operador $(-\tau\Delta)^{-1}$ es *singular-regular*, la solución y de (4.10) también es convergente en algún semiplano.

Nota 4.1 Estos razonamientos son análogos y ciertos si las ecuaciones (4.9) y (4.10) toman la siguiente forma:

$$\Delta y = \frac{a}{x} + by + R_2(x, y, \Delta y).$$

$$(-\tau\Delta)y = \frac{a}{x} + by + R_2(x, y, (-\tau\Delta)y).$$

Ejemplo 4.3 Con el ánimo de generalizar los ejemplos anteriores, considérense las siguientes ecuaciones:

$$\Delta^n y + a_1\Delta^{n-1}y + ... + a_n\Delta^0 y = \frac{a}{x} + R_2(x, y, \Delta y, ..., \Delta^n y); \tag{4.11}$$

$$(-\tau\Delta)^n y + a_1(-\tau\Delta)^{n-1}y + ... + a_n(-\tau\Delta)^0 y = \frac{a}{x} + R_2(x, y, (-\tau\Delta)y, ..., (-\tau\Delta)^n y). \tag{4.12}$$

Notar que los exponentes se consideran este caso como composiciones y no como potencias. A su vez téngase en cuenta que para todo i, $a_1 \in \mathbb{C}$. Por ello, es trivial probar que Δ^n es un operador *bueno* que domina estrictamente al resto, y por ello, el Teorema 4.1 garantiza una única solución en forma de serie de factoriales convergente a la ecuación (4.11). Para la última ecuación se replica la técnica vista en el Ejemplo 4.2, se realiza el cambio de variable $z := (-\tau\Delta)^n y$ de forma que la ecuación (4.12) resulta:

$$z + a_1(-\tau\Delta)^{-1}z + ... + a_n(-\tau\Delta)^{-n}z = \frac{a}{x} + R_2(x, (-\tau\Delta)^{-n}z, ..., z).$$

De nuevo, no es difícil notar que la identidad domina estrictamente a los operadores $(-\tau\Delta)^{-p}$ con $p = 1, 2, ...n$ y por ello, el Teorema 4.1 se aplica otorgando solución convergente a la última ecuación en forma de serie de factoriales. Puesto que la propiedad *singular-regular* se conserva con las potencias enteras, las soluciones de (4.12) también convergen.

Ejemplo 4.4 Considérese la ecuación:

$$\theta^n y + a_1\theta^{n-1}y + ... + a_n\theta^0 y = \frac{a}{x} + R_2(x, y, \theta y, ..., \theta^n y). \tag{4.13}$$

De nuevo, puesto que ya fue probado en la Sección 3.1 que el operador θ no es *bueno*, no se puede aplicar directamente el Teorema 4.1 No obstante, con el cambio de variable $z := \theta^n y$, la ecuación original resulta:

$$z + a_1\theta^{-1}z + ... + a_n\theta^{-n}z = \frac{a}{x} + R_2(x, \theta^{-n}z, ..., z).$$

Puesto que la identidad domina estrictamente a los operadores θ^{-p} para $p = 1, 2, ...n$, el Teorema 4.1 junto con la propiedad *singular-regular* de θ y sus potencias enteras; garantizan la existencia y convergencia de las soluciones de (4.13) en forma de serie de factoriales.

Ejemplo 4.5 Considérese una ecuación de la forma:

$$a_0\varphi^n y + a_1\varphi^{n-1}y + ... + a_n\varphi^0 y = \frac{a}{x} + R_2(x, y, \varphi y, ..., \varphi^n y). \tag{4.14}$$

Donde φ es un operador diagonal cualquiera, y por tanto, *bueno*. Éste estará determinado biunívocamente por su parte diagonal φ_0 y en función de su comportamiento asintótico, se ofrecen dos casuísticas relevantes:

- Si $\lim_{m\to+\infty} \varphi_0(m) = 0$ y $a_0 \neq 0$, el operador φ^n domina estrictamente al resto de operadores y el Teorema 4.1 garantiza solución convergente en forma de serie de factoriales de la ecuación (4.14).
- Si $\lim_{m\to+\infty} \varphi_0(m) = \infty$ y $a_n \neq 0$, el operador identidad domina estrictamente al resto de operadores y por ende, se puede aplicar el Teorema 4.1 otorgando soluciones convergentes en forma de serie de factoriales a la ecuación (4.14).

Capítulo 5

Aplicación a la resolución de ecuaciones en diferencias no lineales generales

Las ideas matemáticas tienen su origen en el mundo empírico. Sin embargo, una vez han sido concebidas, esas ideas adquieren una peculiar vida propia y son más comparables con el ámbito creativo, gobernado casi totalmente por motivaciones estéticas. A medida que una disciplina matemática se difunde, o después de mucha endogamia "abstracta", corre el peligro de degenerar. Cuando se alcanza ese estadio, me parece que no cabe otro remedio que regresar a las fuentes en busca de regeneración, es decir, volver a inyectar ideas más o menos directamente empíricas.

John von Neumann

En este capítulo se tratará de extender el resultado ofrecido por el Teorema 4.1 para ecuaciones no lineales más generales cuya parte lineal puede resultar nula. Esto nos obligará a modificar las asunciones sobre los operadores pero resultará de nuevo en la existencia y convergencia de soluciones en forma de series factoriales. Para ello, en primer lugar partimos de la ecuación $D(\Omega) = F(x, \theta_0\Omega, \theta_1\Omega, ..., \theta_n\Omega; \varphi_1\Omega, \varphi_2\Omega, ..., \varphi_M\Omega) = 0$ escrita de la siguiente forma:

$$F(x, X_0, X_1, ..., X_n; Y_1, Y_2, ..., Y_M) = F_q(x, X) - R_{q+1}(x, X, Y),$$

con:

$$F_q(x, X) := \sum_{|s|=q} b_s (X_0)^{s_0} (X_1)^{s_1} ... (X_n)^{s_n} + \sum_{r+|s|=q-1\,,\,|s|\neq 0} \frac{a_{r,s} r!}{x(x+1)...(x+r)} (X_0)^{s_0} (X_1)^{s_1} ... (X_n)^{s_n}.$$

$$R_{q+1}(x,X,Y) := \sum_{|s|>q} b_s (X_0)^{s_0}(X_1)^{s_1}...(X_n)^{s_n}(Y_1)^{s_{n+1}}...(Y_M)^{s_M} +$$

$$+ \sum_{r+|s|\geq 0\,,\,|s|\neq q-1} \frac{a_{r,s} r!}{x(x+1)...(x+r)} (X_0)^{s_0}(X_1)^{s_1}...(X_n)^{s_n}(Y_1)^{s_{n+1}}...(Y_M)^{s_M}.$$

Notar que si $b_s = 0$ para todo $|s| > 1$, si tomamos $q = 1$ retomamos la ecuación de Briot-Bouquet tratada en la Sección 4.2. En general, para $q > 1$ la ecuación es no lineal sin parte lineal. La porción de menor grado es el operador:

$$F_q(x,\theta)(\Omega) = \sum_{|s|=q} b_s (\theta_0\Omega)^{s_0}(\theta_1\Omega)^{s_1}...(\theta_n\Omega)^{s_n} +$$
$$+ \sum_{r+|s|=q-1\,,\,|s|\neq 0} \frac{a_{r,s} r!}{x(x+1)...(x+r)} (\theta_0\Omega)^{s_0}(\theta_1\Omega)^{s_1}...(\theta_n\Omega)^{s_n},$$

donde se ha usado el convenio usual de los operadores $D(\Omega) = F_q(x,\theta)(\Omega) - R_{q+1}(x,\theta\Omega,\varphi\Omega)$. De dicho operador $F_q(x,\theta)$ se pueden construir los siguientes polinomios:

$$C_q(D)(T) := \sum_{|s|=q} b_s (T)^{s_0}(\theta_{1,0}(0)T)^{s_1}...(\theta_{n,0}(0)T)^{s_n} +$$
$$+ \sum_{r+|s|=q-1} a_{r,s}(T)^{s_0}(\theta_{1,0}(0)T)^{s_1}...(\theta_{n,0}(0)T)^{s_n}.$$

En este caso la variable polinómica es T y se hace notar que se obtiene de $F_q(x,X)$ substituyendo para todo $j = 1,...,n$ cada X_j por $\theta_{j,0}(0)T$; y para cada r cambiando $r!/x(x+1)...(x+r)$ por 1. De la misma manera se define:

$$C_{q,\mu}(D)(T) := \left(\frac{\partial F_q(x,X)}{\partial X_\mu}\right)(\{1\}\,,\theta_{0,0}(0)T, \theta_{1,0}(0)T...\theta_{n,0}(0)T).$$

En este caso la evaluación $\{1\}$ indica que de nuevo, los términos $r!/x(x+1)...(x+r)$ de $\partial F_q(x,X)/\partial X_\mu$ se substituyen por 1.

Será sobre estos polinomios donde se realizarán asunciones que permitan demostrar la existencia y convergencia de soluciones de $D(\Omega) = 0$ en forma de serie de factoriales.

Teorema 5.1 *Dada la ecuación $D(\Omega) = 0$ supóngase que se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Entre los operadores $\{\theta_i\}_{i=1}^n$ existe un operador bueno θ_μ que domina estrictamente al resto de operadores $\{\theta_i\}_{i=1}^n$ y además domina correctamente a la identidad.*
2. *Dicho operador θ_μ domina correctamente a los operadores $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$.*
3. *Los dos polinomios $C_q(D)(T)$ y $C_{q,\mu}(D)(T)$ no tienen raíces comunes.*

Entonces, bajo estas condiciones, cada solución de $D(\Omega) = 0$ en forma de serie de factoriales inversas es convergente.

Prueba.- De nuevo, al igual que para la demostración del Teorema 4.1, la prueba consta de dos pasos.

1. Construcción de solución formal. La condición $D(\Omega) = 0$ se puede expresar de la siguiente manera:

$$F_q(x, \theta\Omega) = R_{q+1}(x, \theta\Omega, \varphi\Omega).$$

   Entonces, tal y como se realizó en la demostración del Teorema 4.1, sustituimos en esta condición la solución formal a determinar:

$$\Omega = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{u_m m!}{x(x+1)...(x+m)}.$$

   Entonces, en virtud del carácter diagonal de los operadores se tiene, para todo $j = 0, 1, ..., n$:

$$\theta_j\Omega = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\Theta_{j,m} m!}{x(x+1)...(x+m)}.$$

   Siendo:

$$\Theta_{j,m} := \sum_{k=0}^{m} \theta_{j,k}(m-k)u_{m-k}.$$

   Y, para todo $p = 1, 2, ..., M$:

$$\varphi_p \Omega = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\Phi_{j,m} m!}{x(x+1)...(x+m)}.$$

Con:

$$\Phi_{p,m} := \sum_{k=0}^{m} \varphi_{j,k}(m-k) u_{m-k}.$$

De esta manera, igualando coeficientes, el término de menor grado u_0 se puede calcular por medio de la siguiente expresión:

$$\sum_{|s|=q} b_s \prod_{j=0}^{n} (\Theta_{j,0})^{s_j} + \sum_{r+|s|=q-1} a_{r,s} \prod_{j=0}^{n} (\Theta_{j,0})^{s_j} = 0.$$

Esta expresión ofrece una reescritura más explícita:

$$\sum_{|s|=q} b_s \prod_{j=0}^{n} (\theta_{j,0}(0))^{s_j} (u_0^{|s|}) + \sum_{r+|s|=q-1} a_{r,s} \prod_{j=0}^{n} (\theta_{j,0})^{s_j} (u_0^{|s|}) = 0.$$

ie, cada raíz de $C_q(D)(T)$ es susceptible de ser el primer término de la serie factorial Ω, esto, como se verá en la siguiente sección no garantiza la unicidad de solución aún en óptimas condiciones. Para determinar el resto de coeficientes u_m, igualando los coeficientes de $(m+q-1)!/x(x+1)...(x+m+q-1)$ se obtiene[1]:

$$\sum_{|s|=q} b_s \sum_{j=0}^{n} s_j \Theta_{j,m} (\Theta_{j,0})^{s_j-1} \prod_{p \neq j} (\Theta_{p,0})^{s_p} (\Theta_{p,0})^{s_p} +$$

$$+ \sum_{r+|s|=q-1} a_{r,s} \sum_{j=0}^{n} s_j \Theta_{j,m} (\Theta_{j,0})^{s_j-1} \prod_{p \neq j} (\Theta_{p,0})^{s_p} =$$

$$G_m(\Theta_{0,0}, \Theta_{0,1}, ..., \Theta_{0,m-1}; \Theta_{1,0}, \Theta_{1,1}, ..., \Theta_{1,m-1}; ...; \Theta_{n,0}, \Theta_{n,1}, ...\Theta_{n,m-1};$$
$$\Phi_{1,0}, \Phi_{1,1}, ..., \Phi_{1,m-1}; \Phi_{2,0}, \Phi_{2,1}, ..., \Phi_{2,m-1}; ...; \Phi_{M,0}, \Phi_{M,1}, ..., \Phi_{M,m-1}; R).$$

[1] Se hace notar que en virtud de la transformación $(x, x+q+1)$ aplicado al término $a_p p!/x(x+1)...(x+p)$, se puede demostrar que aquél multiplicado por el término $b_q q!/x(x+1)...(x+q)$ resulta en una serie factorial $c_{p+q+1}(p+q+1)!/x(x+1)...(x+p+q+1)$ con $c_{p+q+1} = a_p b_q (p!q!)/(p+q+1)!$. Para la identificación de coeficientes de la ecuación siguiente se toman los términos con $p=0$ o $q=0$.

En este caso G_m es un polinomio de los argumentos indicados. El término R corresponde a los términos de orden superior de $R_{q+1}(x, X, Y)$. Entonces, a partir de la fórmula explícita de $\Theta_{j,m-k}$ y $\Phi_{j,m-k}$:

$$\begin{aligned}
u_m \Bigg(\sum_{|s|=q} b_s \sum_{j=0}^{n} s_j \theta_{j,0}(m)(\theta_{j,0}(0)u_0)^{s_j-1} \prod_{p\neq j} (\theta_{p,0}(0)u_0)^s_p + \\
+ \sum_{r+|s|=q-1} a_{r,s} \sum_{j=0}^{n} s_j \theta_{j,0}(m)(\theta_{j,0}(0)u_0)^{s_j-1} \prod_{p\neq q} (\theta_{p,0}(0)u_0)^{s_p} \Bigg) + \\
+ \sum_{|s|=q} b_s \sum_{j=0}^{n} s_j \sum_{k=1}^{m} \theta_{j,k}(m-k)u_{m-k}(\theta_{j,0}(0)u_0)^{s_j-1} \prod_{p\neq j} (\theta_{p,0}(0)u_0)^{s_p} + \\
+ \sum_{r+|s|=q-1} a_{r,s} \sum_{j=0}^{n} s_j \sum_{k=1}^{m} \theta_{j,k}(m-k)u_{m-k}(\theta_{j,0}(0)u_0)^{s_j-1} \prod_{p\neq j} (\theta_{p,0}(0)u_0)^{s_p} = \\
f_m \Bigg\{ u_0, u_1, ..., u_{m-1}; \theta_{1,0}(0)u_0, \theta_{1,0}(1)u_1 + \theta_{1,1}(0)u_0, ..., \sum_{k=0}^{m-1} \theta_{1,k}(m-k-1)u_{m-k-1}; \\
...; \theta_{j,0}(0)u_0, \theta_{j,0}(1)u_1 + \theta_{j,1}(0)u_0, ..., \sum_{k=0}^{m-1} \theta_{j,k}(m-k-1)u_{m-k-1}; \\
...; \theta_{n,0}(0)u_0, \theta_{n,0}(1)u_1 + \theta_{n,1}(0)u_0, ..., \sum_{k=0}^{m-1} \theta_{n,k}(m-k-1)u_{m-k-1}; \\
\varphi_{1,0}(0)u_0, \varphi_{1,0}(1)u_1 + \varphi_{1,1}(0)u_0, ..., \sum_{k=0}^{m-1} \varphi_{1,k}(m-k-1)u_{m-k-1}; \\
...; \varphi_{M,0}(0)u_0, \varphi_{M,0}(1)u_1 + \varphi_{M,1}(0)u_0, ..., \sum_{k=0}^{m-1} \varphi_{M,k}(m-k-1)u_{m-k-1}; R \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

En este caso, f_m vuelve a significar una función de los argumentos indicados y defínase a continuación la cantidad:

$$\begin{aligned}
F_{q,m}(u_0) := \sum_{|s|=q} b_s \sum_{j=0}^{n} s_j \theta_{j,0}(m)(\theta_{j,0}(0)u_0)^{s_j-1} \prod_{p\neq j} (\theta_{p,0}(0)u_0)^s_p + \\
+ \sum_{r+|s|=q-1} a_{r,s} \sum_{j=0}^{n} s_j \theta_{j,0}(m)(\theta_{j,0}(0)u_0)^{s_j-1} \prod_{p\neq q} (\theta_{p,0}(0)u_0)^{s_p}.
\end{aligned}$$

De esta forma, la ecuación (5.1) se puede escribir de la siguiente manera:

$$F_{q,m}(u_0)u_m = f_m^* \left\{ \{u_p\}_{0\leq p\leq m-1}; \left\{ \sum_{0\leq k\leq p} \theta_{1,k}(p-k)u_{p-k} \right\}_{0\leq p\leq m-1}; ...; \right.$$
$$\left\{ \sum_{0\leq k\leq p} \theta_{n,k}(p-k)u_{p-k} \right\}_{0\leq p\leq m-1}; \left\{ \sum_{0\leq k\leq p} \varphi_{1,k}(p-k)u_{p-k} \right\}_{0\leq p\leq m-1}$$
$$\left. ; ...; \left\{ \sum_{0\leq k\leq p} \varphi_{M,k}(p-k)u_{p-k} \right\}_{0\leq p\leq m-1}; R \right\}.$$

Siendo en este caso f_m^* un nuevo polinomio. Al igual que en la demostración del Teorema 4.1, si $F_{q,m}(u_0) \neq 0$, se obtiene una serie de ecuaciones recurrentes con las que construir una solución al problema $D(\Omega) = 0$. Y asimismo, que para algún m se verifique $F_{q,m}(u_0) = 0$ no es impedimento para poder construir una solución susceptible de verificar la ecuación.

2. Convergencia de la solución formal. Entre las asunciones que se proponen para el teorema, se tiene el operador θ_μ domina correctamente a la identidad (pues θ_μ domina estrictamente a $\theta_0 \equiv id$), lo que es equivalente a afirmar que:

$$1 \leq c_{0,0}|\theta_{\mu,0}(m)|,$$

para todo $m = 0, 1, ...$ y $c_{0,0} \neq 0$,; con un proceso de normalización se puede asumir que $c_{0,0} = 1$, esto se usará más adelante. De momento, téngase en cuenta que:

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{F_{q,m}(u_0)}{\theta_{\mu,0}(m)} = \sum_{|s|=q} b_s s_\mu (\theta_{\mu,0}(0))^{s_\mu-1} \prod_{p\neq j} (\theta_{p,0}(0))^{s_p} u_0^{|s|-1} +$$
$$+ \sum_{r+|s|=q-1} a_{r,s} s_\mu (\theta_{\mu,0}(0))^{s_\mu-1} \prod_{p\neq j} (\theta_{p,0}(0))^{s_p} u_0^{|s|-1} = C_{q,\mu}(D)(u_0) \neq 0.$$

Por ello, existe un número $\sigma > 0$ con el cual, para todo $m \geq N$ se cumple:

$$|F_{q,m}(u_0)| \geq \sigma |\theta_{\mu,0}(m)|. \tag{5.2}$$

De esta manera $F_{\mu,m}(u_0) \neq 0$ para todo m, y se puede escoger otro número (puede ser el propio σ) positivo en el que la desigualdad (5.2) se dé efectiva[2] para todo m.

De nuevo, en vista de la dominancia correcta de θ_μ sobre el resto de operadores, se tiene que para los θ_j están dominados término a término por series de la forma (4.2) multiplicadas por $diag|\theta_\mu|$ y por tanto verificando (4.3); al igual que para los φ_j están dominados término a término por el producto de series del tipo (4.1) por $diag|\theta_\mu|$ y que verifican (4.4).

Puesto que el caso $q = 1$ se trató en la demostración del Teorema 4.1 (aunque $b_s \neq 0$ para $|s| > 1$ la demostración resulta idéntica), a lo largo del resto de la demostración se supone $q > 1$. Considérese pues la siguiente ecuación:

$$\frac{\sigma_1 Y}{x(x+1)...(x+q-2)} = \frac{\rho}{x(x+1)...(x+q-1)} +$$
$$+ \sum_{|s|=q} |b_s| \prod_{j=0}^{n} (c_j(x)Y)^{s_j} + \sum_{r+|s|=q-1} \frac{|a_{r,s}| r!}{x(x+1)...(x+r)} \prod_{j=0}^{n} (c_j(x)Y)^{s_j} +$$
$$+ |R_{q+1}|(x, Y; c_1(x)Y; ...; c_n(x)Y; d_1(x)Y; ...; d_M(x)Y; |R|),$$

donde σ_1 y ρ denotan números reales y $|R_{q+1}|$ la serie mayorante (2.26) de R_{q+1}. Entonces, a partir del *Teorema de la función implícita* (2.4), esta ecuación tiene una solución convergente de Y en forma de serie de factoriales (4.6) convergente en algún semiplano. La tónica de la demostración es la misma que en la del Teorema 4.1, esto es, escoger adecuadamente las cantidades σ_1 y ρ para que la solución Y mayore a todas las soluciones de $D(\Omega) = 0$. Para ello, tras la sustitución de Y en la ecuación precedente se obtiene, para $m = 0$:

$$\sigma_1 Y_0 = \mu + \sum_{|s|=q} |b_s| \prod_{j=0}^{n} (Y_0)^{s_j} + \sum_{r+|s|=q-1} |a_{r,s}| \prod_{j=0}^{n} (Y_0)^{s_j},$$

y para el resto:

[2] Como comenta [10], incluso en el caso de tener $F_{\mu,m}(u_0) = 0$ para algún $m < N$, la prueba que sigue no cambia y se da efectiva; basta con cambiar términos finitos en una serie convergente que no altera dicha convergencia. Es más, tampoco implica que no existan soluciones formales.

$$\left(\sigma_1-\sum_{|s|=q}|b_s|\sum_{j=0}^{n}s_j(Y_0)^{s_j-1}\prod_{p\neq j}(Y_0)^{s_p-1}-\sum_{r+|s|=q-1}|a_{r,s}|\sum_{j=0}^{n}s_j(Y_0)^{s_j-1}\prod_{p\neq j}(Y_0)^{s_p-1}\right)Y_m$$
$$=\sum_{|s|=q}|b_s|G_s(Y_0,Y_1,...,Y_{m-1})+\sum_{r+|s|=q-1}|a_{r,s}|H_{r,s}(Y_0,Y_1,...,Y_{m-1})+$$
$$f_m^*\left\{x,Y_0,Y_1,...,Y_{m-1};\left\{\sum_{k=q}^{m}\frac{(m-k)!(k-1)!Y_{m-k}}{m!}C^0_{m-k,k-1}\right\}_{0\leq q\leq m};...\right.$$
$$;\left\{\sum_{k=q}^{m}\frac{(m-k)!(k-1)!Y_{m-k}}{m!}C^n_{m-k,k-1}\right\}_{0\leq q\leq m};\left\{\sum_{k=q}^{m}\frac{(m-k)!(k-1)!Y_{m-k}}{m!}D^0_{m-k,k-1}\right\}_{0\leq q\leq m};$$
$$\left....;\left\{\sum_{k=q}^{m}\frac{(m-k)!(k-1)!Y_{m-k}}{m!}D^M_{m-k,k-1}\right\}_{0\leq q\leq m};|R|\right\}.$$

En este caso, $G_s(Y_0,Y_1,...,Y_{m-1})$ denota el coeficiente $(m+q-1)!/x(x+1)...(x+q-1)$ en $\prod_{j=0}^{n}(c_j(x)-1)Y^{s_j}$ y $H_{r,s}(Y_0,Y_1,...,Y_{m-1})$ el coeficiente $r!/x(x+1)...(x+r)$ de aquel mismo producto. A continuación háganse las siguientes elecciones:

- Escójase un número real σ_1 verificando:

$$0<\sigma_1-\sum_{|s|=q}|b_s|\sum_{j=0}^{n}s_j(Y_0)^{s_j-1}\prod_{p\neq j}(Y_0)^{s_p-1}-$$
$$-\sum_{r+|s|=q-1}|a_{r,s}|\sum_{j=0}^{n}s_j(Y_0)^{s_j-1}\prod_{p\neq j}(Y_0)^{s_p-1}<\sigma.$$

- Elegir un número real ρ para el que, dada una raíz Y_0 de $C_q(D)(T)$ se verifique:

$$Y_0=\rho\Big/\left\{\sigma_1-\sum_{|s|=q}|b_s|\sum_{j=0}^{n}s_j(Y_0)^{s_j-1}\prod_{p\neq j}(Y_0)^{s_p-1}-\right.$$
$$\left.-\sum_{r+|s|=q-1}|a_{r,s}|\sum_{j=0}^{n}s_j(Y_0)^{s_j-1}\prod_{p\neq j}(Y_0)^{s_p-1}\right\}\geq|\theta_{\mu,0}(0)||u_0|\geq|u_0|,$$

  donde la última desigualdad se tiene en vista de la dominancia correcta de θ_μ sobre la identidad.

A continuación probaremos de nuevo por un argumento de inducción fuerte la siguiente desigualdad para todo m:

$$|u_m| \leq |\theta_{\mu,0}(m)||u_m| \leq Y_m.$$

Para ello supondremos que es cierta para todo $p = 0, 1, ..., m-1$, notar que para $p = 0$ es cierta en virtud de la construcción del número real ρ. Para ello, a partir de la fórmula (5.1) para u_m se tiene:

$$|u_m| \leq \frac{\sum_{|s|=q} |b_s| G_s(Y_0, Y_1, ..., Y_{m-1})}{\sigma|\theta_{\mu,0}(m)|} + \sum_{r+|s|=q-1} |a_{r,s}| H_{r,s}(Y_0, Y_1, ..., Y_{m-1}) +$$
$$f_m^* \left\{ x, Y_0, Y_1, ..., Y_{m-1}; \left\{ \sum_{k=q}^{m} \frac{(m-k)!(k-1)! Y_{m-k}}{m!} C^0_{m-k,k-1} \right\}_{0 \leq q \leq m}; ... \right.$$
$$; \left\{ \sum_{k=q}^{m} \frac{(m-k)!(k-1)! Y_{m-k}}{m!} C^n_{m-k,k-1} \right\}_{0 \leq q \leq m}; \left\{ \sum_{k=q}^{m} \frac{(m-k)!(k-1)! Y_{m-k}}{m!} D^0_{m-k,k-1} \right\}_{0 \leq q \leq m};$$
$$\left. ...; \left\{ \sum_{k=q}^{m} \frac{(m-k)!(k-1)! Y_{m-k}}{m!} D^M_{m-k,k-1} \right\}_{0 \leq q \leq m}; |R| \right\}.$$

Estas desigualdades provienen de las condiciones de dominancia. De esta forma:

$$|u_m| \leq \frac{1}{\sigma|\theta_{\mu,0}(m)|} \left(\sigma_1 - \sum_{|s|=q} |b_s| \sum_{j=0}^{n} s_j (Y_0)^{s_j - 1} \prod_{p \neq j} (Y_0)^{s_p - 1} - \right.$$
$$\left. - \sum_{r+|s|=q-1} |a_{r,s}| \sum_{j=0}^{n} s_j (Y_0)^{s_j - 1} \prod_{p \neq j} (Y_0)^{s_p - 1} \right) Y_m \leq Y_m.$$

Entonces, puesto que $|u_m| \leq |\theta_{\mu,0}(m)||u_m|$, la prueba por inducción es completa. Por ello, tenemos que la serie de factoriales que define la solución de la ecuación $D(\Omega) = 0$ está dominada término a término por Y, la cual ya ha sido probada su convergencia. Por ello, la propiedad de convergencia se hereda para las soluciones.

De esta forma, la prueba es completa.

Q.E.D.

5.1. Aplicaciones

Cabe notar que durante la construcción de la solución formal de Ω en la demostración del Teorema 5.1, el término inicial, y con ello, los sucesivos, surgieron como una de las soluciones del polinomio $C_q(D)(T)$. Por ello, a priori no se puede garantizar la unicidad de soluciones. Veamos un caso en el que ocurre, sea la siguiente ecuación en diferencias sin parte lineal:

$$\frac{1}{x}\Delta y + ay^2 + \frac{b}{x^2} = 0.$$

Si $a \neq 0$, existen exactamente dos soluciones, estas son $y = c/x$ con c solución de la ecuación $c + ac^2 + b = 0$. En caso de ser $a = 0$ sí existe solución única con $c = -b$. Para aplicar directamente el Teorema 5.1 hay que tener en cuenta que Δ/x no es *bueno*. No obstante, las condiciones se satisfacen puesto que Δ sí es *bueno*, domina correctamente a la identidad y los dos polinomios no poseen raíces en común (el polinomio derivado se trata de una contante no nula).

Ejemplo 5.1 Sea la ecuación:

$$\frac{1}{x}\Delta y + by = 1/x,$$

la cual, tal y como se vio en la Sección 3.2, tiene soluciones formales divergentes si $|b| < 1$. Esto se debe a que no verifica las hipótesis del Teorema 5.1. En efecto, aunque la identidad sea un operador *bueno*, no domina al operador Δ. A su vez, si se realiza el cambio de variable $w(x) := \Delta y(x)$ la ecuación resulta:

$$\frac{1}{x}w + b\Delta^{-1}w = \frac{1}{x}.$$

Esta ecuación cuenta con la ventaja de tener parte lineal, y poder aplicarse en este caso el Teorema 4.1. No obstante, el operador Δ^{-1} no domina a la identidad y por tanto no puede aplicarse. Esto muestra que en ningún caso, se puede sustituir la condición de dominancia estricta de uno de los operadores por tener la propiedad singular-regular.

Apéndice A

Resultados auxiliares de análisis

En este apéndice se tratará de dar unas notas acerca de los resultados y propiedades del análisis que se han utilizado en el trabajo, pero cuya demostración no resulta de interés para el hilo del discurso, o se consideran lo suficientemente elementales como para derivar su demostración a un curso básico de análisis (en tal caso se adjuntará una posible referencia).

Proposición A.1 (Identidades de Abel)

- *Sea* $A_s := a_0 + a_1 + ... + a_s$ *entonces se verifica:*

$$\sum_{s=p}^{m} a_s b_s = \sum_{s=p}^{m} (b_s - b_{s+1}) A_s - b_p A_{p-1} + b_{m+1} A_m. \tag{A.1}$$

- *Sea* $A'_s := a_s + a_{s+1} + a_{s+2} + ...$ *entonces se verifica:*

$$\sum_{s=p}^{m} a_s b_s = \sum_{s=p}^{m-1} (b_{s+1} - b_s) A'_{s+1} + b_p A'_p - b_m A'_{m+1}. \tag{A.2}$$

Este resultado se considera clásico de la teoría de series, y una posible demostración se puede consultar en [1].

Proposición A.2 (Criterio de Weierstrass) *Dada una serie* $\sum u_s$ *de términos complejos para la cual:*

$$\frac{u_{s+1}}{u_s} = 1 - \frac{\alpha}{s} + O\left(\frac{1}{s^\lambda}\right).$$

Siendo $\lambda > 1$ *y* α *independiente de s; entonces la serie es absolutamente convergente si y solo si* $Re(\alpha) > 1$. *Para* $Re(\alpha) \leq 0$ *la serie resulta inevitablemente divergente; y si* $0 < Re(\alpha) \leq 1$ *ambas series:*

$$\sum_{s=0}^{+\infty} |u_s - u_{s+1}| \quad ; \quad \sum_{s=0}^{+\infty} (-1)^s u_s,$$

son convergentes.

Prueba.- A lo largo de esta prueba se adoptará la notación $\alpha = \beta + i\gamma$ y K será la constante asintótica de la O de Landau. Se tratará cada una de las tres casuísticas por separado:

1. $\beta = Re(\alpha) > 1$, según la hipótesis, aplicando la desigualdad triangular:

$$\left| \frac{u_{s+1}}{u_s} \right| \leq \left| 1 - \frac{\beta + i\gamma}{s} \right| + \frac{K}{s^\lambda}$$

   Entonces tomando β' un número verificando $1 < \beta' < \beta$, para un s suficientemente grande se cumple:

$$\left| \frac{u_{s+1}}{u_s} \right| \leq 1 - \frac{\beta'}{s} \Rightarrow \left| \frac{u_s}{u_{s+1}} \right| \geq \frac{s}{s - \beta'}.$$

   De esta forma, a partir de la desigualdad triangular:

$$\left| \frac{u_s}{u_{s+1}} - 1 \right| \geq \frac{s}{s - \beta'} - 1 = \frac{\beta'}{s - \beta'} > \frac{\beta'}{s} \Rightarrow \lim_{s \to +\infty} s \left| \frac{u_s}{u_{s+1}} - 1 \right| \geq \beta' > 1.$$

   Por ello, a partir del *criterio de Raabe*, la serie $\sum |u_s|$ converge.

2. $\beta = Re(\alpha) \leq 0$, según la hipótesis se llega:

$$\left| \frac{u_{s+1}}{u_s} \right| \geq 1 - \frac{\beta}{s} - \frac{K}{s^\lambda} = 1 - \frac{1}{s} \left(\beta + \frac{K}{n^\lambda} \right). \tag{A.3}$$

   De esta forma, si $\beta < 0$ entonces basta tomar $s > \sqrt[\lambda]{-K/\beta}$ de forma que:

$$\beta + \frac{K}{n^\lambda} < 0 \Rightarrow \left| \frac{u_{s+1}}{u_s} \right| > 1.$$

   Y según el *criterio del cociente* $\sum u_s$ no converge. De la misma manera, para $\beta = 0$ se tiene:

$$\left|\frac{u_{s+1}}{u_s}\right| = \left|1 - \frac{i\gamma}{s} - \frac{K_s}{s^\lambda}\right| \geq \left|1 - \frac{Re(K_s)}{s^\lambda}\right| \geq 1 - \frac{|K_s|}{s^\lambda} \geq 1 - \frac{c}{s^\lambda} > 0.$$

Denotando por K una cota admisible e independiente de s. Entonces para cada $s \geq m$ se sigue por el siguiente criterio de multiplicación:

$$\left|\frac{u_s}{u_m}\right| = \left|\frac{u_{m+1}}{u_m}\right| ... \left|\frac{u_s}{u_{s-1}}\right| > \prod_{n=m}^{s-1}\left(1 - \frac{c}{n^{\lambda'}}\right) > \prod_{n=m}^{+\infty}\left(1 - \frac{c}{n^{\lambda'}}\right) := C_m > 0$$

Por la forma de $\lambda' > 1$ se sabe[1] que el último producto infinito converge. Por ello $|u_s| > C_m|u_m|$ para cada $s > m$ y por ello u_s no puede tender a 0 cuando $s \longrightarrow +\infty$ y por ello, la serie $\sum u_s$ diverge.

3. $0 < \beta \leq 1$. En este caso:

$$\left|\frac{u_{s+1}}{u_s}\right| < 1 - \frac{\beta'}{s}. \tag{A.4}$$

Para cierto β' verificando $0 < \beta' < \beta$. Entonces, para un $s \geq m$:

$$|u_s| = |u_m|\left|\frac{u_{m+1}}{u_m}\right| ... \left|\frac{u_{s+1}}{u_s}\right| \leq |u_m|\left(1 - \frac{\beta'}{m}\right) ... \left(1 - \frac{\beta'}{s-1}\right) \leq$$
$$\leq |u_m| \exp\left(-\beta'\left(\frac{1}{m} + ... + \frac{1}{s-1}\right)\right) \xrightarrow[s\to\infty]{} 0.$$

En consecuencia, la serie telescópica $\sum(|u_s| - |u_{s+1}|)$ converge y como:

$$\frac{|u_s - u_{s+1}|}{|u_s| - |u_{s+1}|} = \frac{\left|1 - \frac{u_{s+1}}{u_s}\right|}{1 - \left|\frac{u_{s+1}}{u_s}\right|} \leq \frac{\left|\frac{\alpha}{s} + \frac{K_s}{s^\lambda}\right|}{\frac{\beta'}{s}} \xrightarrow[s\to\infty]{} \frac{\alpha}{\beta'} \neq 0,$$

se obtiene la deseada convergencia de $\sum |u_s - u_{s+1}|$. Considérese la serie:

$$(u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + ... = \sum_{s=0}^{+\infty}(u_{2s} - u_{2s+1}).$$

Se trata de una subserie de $\sum(u_{s+1} - u_s)$ y por lo que se ha demostrado, se obtiene su convergencia. Esto es equivalente a decir que la serie $\sum(-1)^s u_s$ es convergente.

Q.E.D.

[1]Para una información más rigurosa se puede consultar el Capítulo 17, Proposición 17.3 de [2].

Proposición A.3 (Test de du Bois-Reymond) *Dadas dos series* $\sum a_s$ *y* $\sum b_s$ *de forma que* $\sum(b_s - b_{s+1})$ *sea absolutamente convergente y* $\sum a_s$ *converja al menos de forma condicional; entonces la serie* $\sum a_s b_s$ *es convergente.*

Prueba.- Por hipótesis, la cantidad $A_s := a_0 + a_1 + ... + a_s$ es acotada y por ello, $\sum A_s(b_s - b_{s+1})$ es en particular, una serie convergente[2]. Entonces puesto que la serie $\sum(b_s - b_{s+1})$ es telescópica, el término b_s tenderá a un valor finito cuando $s \longrightarrow +\infty$. Entonces, puesto que por hipótesis $\lim_{s\to+\infty} A_s$ existe, también lo hará $\lim_{s\to+\infty} A_s b_{s+1}$ por ser producto de límites finitos. Entonces basta aplicar la *primera identidad de Abel*[3] (A.1) para obtener el resultado.

Q.E.D.

A su vez, ha sido necesario desarrollar en serie de potencias expresiones de la forma $1/(1-t)^a$ con $a \in \mathbb{N}$. Para ello, por un argumento de inducción es fácil probar que:

$$\left(\frac{1}{1-t}\right)^{(a-1)} = \frac{(a-1)!}{(1-t)^a}.$$

Por otro lado, derivando término a término la serie $1 + t + t^2 + t^3 + ... = 1/(1-t)$ se obtiene:

$$\frac{(a-1)!}{(1-t)^a} = \sum_{j=a-1}^{+\infty} j(j-1)...(j-a+2)t^{j-a+1} = \sum_{j=a-1}^{+\infty} \frac{j!}{(j-a+1)!} t^{j-a+1}.$$

Efectuando el cambio de variable $s := j - a + 1$ se tiene:

$$\frac{(a-1)!}{(1-t)^a} = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(s+a-1)!}{s!} t^s.$$

Por lo que finalmente:

$$\frac{1}{(1-t)^a} = \sum_{s=0}^{+\infty} \binom{s+a-1}{s} t^s. \tag{A.5}$$

En particular:

$$t^{-a} = (1-(1-t))^{-a} = 1 + \sum_{s=1}^{+\infty} \binom{a+s-1}{s} (1-t)^s. \tag{A.6}$$

[2]Es sabido que para una sucesión $\{\alpha_s\}$ acotada la serie $\sum \alpha_s(b_s - b_{s+1})$ es absolutamente convergente, véase [14].

[3]Particularizada según la notación de (A.1) para $p = 0$ y $m \longrightarrow +\infty$.

A.1. Función Gamma y Beta de Euler

A su vez, han sido necesarios conceptos y resultados acerca de la función Gamma y Beta que se especificarán a continuación. En primer lugar partimos de la definición clásica de la función Gamma definida en forma integral:

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt,$$

la cual resulta ser una función analítica en el semiplano $Re(x) > 0$; que admite prolongación analítica al plano complejo salvo los enteros no positivos $-k, k = 0, 1, 2, ...$ con polos simples en esos puntos de residuo:

$$Res(\Gamma(x); -k) = \frac{(-1)^k}{k!}$$

A su vez se recuerda que ha sido necesario considerar $1/\Gamma(x)$ como una constante para cualquier valor pero fijo de $x \in \mathbb{C}$. Esto es debido a la siguiente identidad (véase [2]):

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{-\gamma x}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{x}{k}\right)e^{-x/k}.$$

Siendo γ la conocida como *constante de Euler-Mascheroni*. De esta forma, es evidente que la inversa algebraica de la función Gamma es una función entera que para cualquier valor de z permanece acotada.

También se ha recurrido al comportamiento asintótico de la función Gamma, en particular, la *formula de Stirling* (ver [9]) permite afirmar para $x + h \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$:

$$\Gamma(x + h) = \sqrt{2\pi}(x + h)^{x+h-\frac{1}{2}}e^{-x-h}(1 + o(1)). \tag{A.7}$$

En particular, si h es una cantidad real comprendida entre 0 y 1:

$$\left|\frac{\Gamma(x + h)}{\Gamma(x)}\right| = x^h(1 + o(1)).$$

De esta forma se hace evidente la siguiente tendencia:

$$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{\Gamma(x + h)}{x^h\Gamma(x)} = 1 \quad ; \quad 0 \leq h \leq 1. \tag{A.8}$$

Por último, se hizo uso de la función Beta[4]:

$$B(x,s) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{s-1}dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{A.9}$$

A.2. Números de Bernoulli

En la construcción del Ejemplo 3.9 en el que mostrábamos cómo el operador Δ no conserva la propiedad singular-regular, se han utilizado los números de Bernoulli y sus propiedades. Esta sección tratará de revisar su definición y las propiedades usadas.

Definición A.1 *Los números de Bernoulli son los términos de la serie de Taylor de la función:*

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{+\infty} B_k \frac{t^k}{k!}. \tag{A.10}$$

De esta forma no es difícil verificar $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_3 = 0$, etc. De hecho, los números de Bernoulli siguen la siguiente regla de recurrencia con la que poder obtenerlos de una manera más operativa.

Proposición A.4 *Los números de Bernoulli verifican la siguiente relación de recurrencia:*

$$\sum_{n=0}^{k-1} \binom{k}{n} B_n = 0 \quad ; \quad \text{para } k \geq 2.$$

PRUEBA.-En vista de (A.10) se tiene que los números de Bernoulli son los únicos cumpliendo:

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{+\infty} B_k \frac{t^k}{k!} \Rightarrow t = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} B_k \frac{t^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}\right).$$

Haciendo uso de la expresión del producto de Cauchy:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} B_n \frac{t^n}{n!} \frac{t^{k+1-n}}{(k+1-n)!}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} \frac{(k+1)!}{n!(k+1-n)!} B_n\right) \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \equiv t.$$

Para $k = 0$ se obtiene $B_0 = 1$ de lo cual se había partido y por tanto es cierto. Para $k \geq 1$ se tiene:

[4]Para la última igualdad puede consultarse [12].

$$\sum_{n=0}^{k} \binom{k+1}{n} B_n = 0.$$

Basta cambiar la variable para obtener el resultado.

Q.E.D.

La relación anterior permite calcular cada número de B_k con $k \geq 1$ a partir de los anteriores $\{B_n/n < k\}$. En virtud de la definición, se puede escribir:

$$\frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{t}{2} + \sum_{k=2}^{+\infty} B_k \frac{t^k}{k!} \Rightarrow 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} B_k \frac{t^k}{k!} = \frac{t}{2} \frac{e^t + 1}{e^t - 1}.$$

La última función es par, lo que implica que para todo $k \geq 1$ se verifica $B_{2k+1} = 0$.

Estas cantidades ofrecen generalizaciones a través del concepto de polinomio de Bernoulli con las que se pueden inferir propiedades más completas, no obstante, no han sido necesarias durante la realización del trabajo. Para más información puede consultarse [5].

Bibliografía

[1] APOSTOL, T. *Análisis matemático* 2ª edición. Barcelona: Reverté, 1993.

[2] BACK, J.; NEWMAN, D.J. *Complex Analysis.* 3ª edición. San Francisco: Springer, 2010.

[3] BALSER, W. *Formal Power Series and Linear Systems of Meromorphic Ordinary Differential Equations.* Nueva York: Springer, 2000.

[4] BARKATOU, M.; DUVAL, A. *Sur la somme de certaines séries de factorielles.* Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques 6.1, 7-58 (1997).

[5] BESHENOV, A. *La función generatriz para B_k. Polinomios de Bernoulli.* (2017). Disponible en: http://cadadr.org/san-salvador/2017-02-bernoulli/2017-02-28.pdf [Consulta: 26 de mayo de 2021].

[6] CHARRIERE, H.; GERARD, R. *The Rings of Formal and Convergent Inverse Factorial Series.* Kumamoto Journal of Mathematics, Vol 5, 1-20 (1992).

[7] DAVIES, B. *Integral Transforms and Their Applications.* 3ª edición. Canberra: Springer, 2002.

[8] DIENES, P. *The Taylor Series. An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable.* E.E.U.U. : Dover, 1957.

[9] DIEUDONNÉ, J. *Calcul Infinitésimal.* París : Hermann, 1980.

[10] GERARD, R.; LUTZ, D.A. *Convergent Factorial Series Solutions of Singular Operator Equations.* University of Penssylvania: Analysis 10, 99-145 (1990).

[11] GERARD, R. *Une classe d'équations différentielles non linéaires à singularité réguliere.* Université Louis Pasteur: Funkcialaj Ekvacioj 26, 55-76 (1986).

[12] GUELFOND, A.Ó. *Residuos y sus Aplicaciones.* Moscú: URSS, 2010.

[13] Harris, W.A.; Turrittin, H.L. *Reciprocals of Inverse Factorial Series.* University of Minnesota: Funkcialaj Ekvacioj 6, 37-46 (1964).

[14] Knopp, K. *Theory and Application of Infinite Series.* 2ª edición. Glasgow: Blackie & son limited, 1954.

[15] Malgrange, B. *Sur les Points Singuliers des Équations Différentielles.* L'enseignement mathématique: Vol 20, 147-176 (1974).

[16] Milne-Thomson, L.M. *The Calculus of Finite Differences.* Londres: McMillan and Co. limited, 1933.

[17] Nielsen, N. *Recherches sur les séries de factorielles.* Copenhague: Elsevier, 1902.

[18] Nielsen, N. *Sur la Multiplication de deux Séries de Factorielles.* Rendicoti della Reale Accademia dei Lincei: Vol 13, 70-77 (1904).

[19] Nörlund, N.E. *Leçons sur les Séries d'interpolation.* París: Gauthier-Villars et Fils éditeurs, 1926.

[20] Nörlund, N.E. *Sur les Séries de Facultés.* Lund, 1912.

[21] Wasow, W. *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations.* E.E.U.U. : Dover Publications, Inc, 1987.

Índice onomástico