UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Sociales y de la Matemática

INICIACIÓN AL LENGUAJE ALGEBRAICO EN SECUNDARIA MEDIANTE ACTIVIDADES LÚDICAS Y JUEGOS

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad de Matemáticas.

Alumna: Ana Acebrás Bouza

Tutor: Edgar Martínez Moro

Valladolid, Junio de 2021

Índice general

Resumen **1**

Introducción **2**

Justificación y objetivos del trabajo 2

1. Marco legislativo **5**

1.1. La legislación vigente en la actualidad. 7

1.1.1. Las matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria. Los contenidos de álgebra en los dos primeros cursos de la ESO 7

2. Marco teórico **11**

2.1. Algunas consideraciones del *Libro blanco de las matemáticas* 11

2.2. Corrientes generales de aprendizaje 12

2.2.1. La corriente transmisiva o empirista 12

2.2.2. La corriente constructivista 13

2.3. Algunas teorías constructivistas relevantes 14

2.3.1. Jean Piaget y la epistemología genética 14

2.3.1.1. Los estadios de la construcción del conocimiento 15

2.3.2. Lev Vygotsky y el constructivismo sociocultural 16

2.3.3. Jerome Bruner y el aprendizaje por descubrimiento 17

2.3.4. David Ausubel y el aprendizaje significativo 18

2.4. La necesidad de la didáctica de la matemática. 19

2.5. Algunos enfoques y teorías propios de la didáctica de la matemática 22

2.5.1. La didáctica francesa 22

2.5.2. La teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau 22

2.5.3. La transposición didáctica de Chevallard 24

2.5.4. El contrato didáctico 25

2.6. Enfoque discursivo del aprendizaje de las matemáticas. 26
2.6.1. Características del discurso matemático 26
2.6.2. Tipos de desarrollo del discurso matemático. 27
2.6.3. Educación matemática realista 27
2.7. Teorías del aprendizaje en matemáticas 29
2.7.1. El aprendizaje de las matemáticas es individual, pero también social 29
2.7.2. La construcción de los objetos matemáticos 30
2.7.3. Las trayectorias hipotéticas de aprendizaje 33
2.8. Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas 33
2.8.1. Caracterizción e interpretación de errores 34
2.8.2. El error en la práctica docente del profesor de matemáticas 35
2.9. La influencia del dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas 36
2.10. El conocimiento que debe tener un profesor de matemáticas 38
2.10.1. El conocimiento pedagógico del contenido 38
2.10.2. El conocimiento tecnológico en la educación (TPACK) 39
2.11. Modelos de conocimiento del profesor de matemáticas 40
2.11.1. Conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) 40
2.11.2. Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) 42
2.12. Algunas metodologías para la enseñanza de las matemáticas 44
2.12.1. Aprendizaje basado en problemas y proyectos 45
2.12.2. La enseñanza de las matemáticas en Singapur 45
2.13. Atención a la diversidad en clase de matemáticas 46
2.14. El razonamiento, la argumentación y la demostración en matemáticas 48
2.14.1. Tipos de razonamiento matemático 48
2.15. La demostración en el currículo de Educación Secundaria 49
2.16. Los esquemas de prueba del alumno 50
2.17. Los esquemas de prueba en los libros de texto 51
2.18. Funciones de la demostración en matemáticas 51
2.19. Tareas matemáticas 52
2.19.1. Demanda cognitiva de una tarea. La clasificación de Smith y Stein 52

3. Aprendizaje y enseñanza del álgebra **55**
3.1. Los enfoques del álgebra escolar 55
3.2. El paso de la aritmética al álgebra. Cambios y rupturas en el pensamiento del alumno. . . 56

3.3. Las expresiones algebraicas como procesos y objetos 57
3.4. La interpretación de las letras 57
3.5. Las interpretaciones del signo igual 58
3.6. Las diferencias al resolver problemas aritméticos y algebraicos 59

4. Recursos para la iniciación al álgebra. Actividades lúdicas y juegos **60**
4.1. Los materiales manipulativos 60
4.2. Lecturas con contenido matemático y recursos audiovisuales 61
4.3. El humor en clase de matemáticas. Las historietas gráficas y los chistes 62
4.3.1. Clasificación de las viñetas 62
4.4. Juegos y divertimentos matemáticos 63
4.4.1. El juego como actividad de enseñanza y aprendizaje en matemáticas 63
4.4.2. Tipos de juegos 64
4.4.3. Funciones de los juegos en matemáticas 65
4.5. Las apps educativas 66

5. Propuesta didáctica **67**
5.1. Introducción 67
5.2. Motivación de la propuesta 67
5.3. Contribución a las competencias básicas 68
5.4. Objetivos generales 69
5.5. Metodología 70
5.6. Evaluación de la propuesta didáctica 70
5.7. Colección de actividades 79
5.7.1. Las identidades notables con material manipulativo 79
5.7.2. La balanza y las ecuaciones 81
5.7.3. El análisis de una viñeta 82
5.7.4. Un truco fácil 83
5.7.5. La pirámide numérica 83
5.7.6. Los cuadrados mágicos 84
5.7.7. Subir al cero 87
5.7.8. El problema de la sandía 88
5.7.9. Perros y gatos 89
5.7.10. La clave secreta de la caja fuerte 90

5.7.11. Sistemas con dibujos 91
5.7.12. Otras actividades 91

6. Conclusiones **92**
6.1. Análisis crítico de la propuesta 92
6.2. Limitaciones de la propuesta y futuras líneas de trabajo 94

Bibliografía **96**

Resumen

El presente trabajo versa sobre la implementación de actividades lúdicas y juegos para la enseñanza del álgebra en el primer ciclo de la ESO. Consta del marco legislativo, un marco teórico sobre las teorías didácticas más relevantes, un capítulo sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, donde mostramos las dificultades más habituales con las que se encuentran los alumnos, y un capítulo dedicado a las actividades lúdicas y juegos que podemos emplear en clase de matemáticas.

Finalmente, presentamos nuestra propuesta didáctica, la cual consideramos que va a contribuir en el incremento del interés y la motivación del alumnado hacia el álgebra, a fomentar el aprendizaje significativo y a mejorar sus resultados académicos.

Palabras clave: actividades lúdicas, juegos, humor, materiales manipulativos, aprendizaje significativo, motivación, propuesta didáctica.

Abstract

This work focuses on the implementation of recreational activities and educational games in the area of algebra in the middle school. The work consists on the legislative framework and the theorical framework about the most relevant theories in mathematics education, a chapter about the teaching and learning of algebra and the dificulties which students have with it and a chapter about the recreative activites and games which we could use in mathematics lessons.

Finally, we present our educational proposal, which we consider that it will contribute to increase the interest and the motivation of students towards algebra, develop their significative learning and improve their academic results.

Key words: recreational activities, educational games, humour, manipulative materials, significaative learning, motivation, educational proposal.

Introducción

El presente Trabajo de Fin de Máster gira en torno al diseño de una propuesta didáctica para 2º de ESO basada en la implementación de actividades lúdicas y juegos como elementos motivadores, que sirvan como medio para alcanzar las competencias básicas. Se detallan a continuación la motivación que hay detrás de este trabajo y los objetivos que se persiguen.

Justificación y objetivos del trabajo

El aprendizaje del álgebra supone un gran reto para muchos estudiantes de ESO.

Los procesos de generalización de la aritmética y la complejidad del concepto de variable hacen que muchos alumnos fracasen en la parte de álgebra y que sientan frustración, ansiedad y desmotivación hacia las matemáticas.

Para la comprensión del álgebra, los estudiantes requieren un nivel de abstracción al que no están acostumbrados, superior al de la aritmética.

Cuando los alumnos se ven la primera vez con el álgebra, comienzan por el estudio de la *aritmética generalizada*. Luego conocerán el concepto de *incógnita* o *variable* y encontraran dificultades con los distintos significados del signo igual, en particular, con el significado relacional.

En el álgebra, muchos alumnos cometen errores persistentes y repetitivos, que no se deben al descuido (Esteve-Tomás, 2014).

El juego tiene un papel muy importante en nuestra cultura desde todos los tiempos y pueden ser una herramienta muy poderosa en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra (Bishop, 2010).

En cuanto a los juegos matemáticos, las investigaciones de Gairín (1990), entre otras muchas, muestran que estos recursos son una potente herramienta para la enseñanza de las matemáticas.

Otro tipo de actividades lúdicas son el empleo de materiales manipulativos y el uso del humor en el aula. Los materiales manipulativos suelen atraer a los alumnos ya que son coloridos y sirven para experimentar con las manos, trabajando, así, distintos contenidos. El humor también es otro recurso potente, pues mostrar una viñeta o contar un chiste sirven para crear un ambiente más distendido en el aula, no tan aburrido y conseguir que los alumnos estén atentos.

La inclusión de actividades lúdicas y juegos supone una innovación, una forma de que los estudiantes salgan de la rutina diaria de la clase magistral, lo que servirá para captar la atención , conseguir una mayor motivación e interés por las matemáticas. Nuestro objetivo fundamental es que los estudiantes pierdan el miedo a las matemáticas, en particular, al álgebra y desterrar su visión de que son una asignatura difícil y aburrida. Se ha tenido alguna experiencia lúdica durante el Prácticum y ha resultado satisfactoria.

Toda innovación y experimentación supone un reto. Hay profesores que aún se resisten a cambiar su metodología, en parte debido a la falta de conocimiento de nuevas formas de enseñar o a la consideración de que no son efectivas. Para cambiar la mentalidad se necesita mucho tiempo.

Con el presente TFM daremos unas breves pinceladas sobre las teorías didácticas más destacadas, las teorías más relevantes en didáctica de la matemática, algunas metodologías activas, los recursos que se pueden utilizar en el aula, y por supuesto, crearemos una propuesta de intervención, donde emplearemos ciertos juegos y actividades lúdicas.

Cada una de las asignaturas del máster ha contribuido a este trabajo. Sería considerar de manera especial las siguientes

- *Didáctica de la matemática.* Esta asignatura ha aportado a este trabajo las diferentes teorías didácticas y la importancia de las pruebas visuales sin palabras para la comprensión de ciertos conceptos matemáticos por por parte de los alumnos.

- *Innovación docente en matemáticas.* Esta asignatura ha aportado la necesidad de innovar en la enseñanza de las matemáticas y la consideración del material manipulativo en la era digital como un recurso atemporal que resulta muy útil para comprender diversos conceptos de las matemáticas.

- *Iniciación a la investigación educativa en matemáticas.* Ha contribuido en la revisión de la literatura necesaria para elaborar este trabajo y en elaborar una metodología con la que evaluar la propuesta didáctica.

- *Prácticas externas.* Por supuesto, el practicum ha contribuido a la percepción de la necesidad de utilizar juegos y humor en el aula para dinamizar la clase

Otras asignaturas que también han contribuido en cierta manera a la elaboración de este trabajo

- *Diseño curricular y Metodología y evaluación en matemáticas.* Han contribuido a enmarcar la propuesta dentro del currículo y y a la importancia de conocer distintas metodologías docentes.

- *Ideas y conceptos matemáticos a través de la historia.* Ha ayudado a considerar la historia y el arte como un recurso necesario para humanizar a las matemáticas.

- *Modelos matemáticos en educación secundaria.* No está de forma explícita representada en ninguna parte de este trabajo, pero sí como trasfondo de la educación matemática realista.
- Las asignaturas del módulo genérico: *Aprendizaje y desarrollo de la personalidad, Procesos y contextos educativos* y *Sociedad, familia y educación.* La primera ha aportado a este trabajo la consideración del aprendizaje desde un punto de vista psicológico y la importancia de la motivación del alumnado, la segunda ha aportado el diseño del marco legislativo, y la tercera ha contribuido en la importancia del contexto social del alumnado.

Capítulo 1

Marco legislativo

En el primer capítulo del *Libro blanco de las matemáticas* se hace un breve recorrido por las leyes que han regulado la educación en España desde 1990, por lo que se ha utlizado esta fuente para obtener información legislativa. Desde 1990, el currículo de matemáticas en la Educación Secundaria en España ha experimentado cinco importantes reformas. La LOGSE, en 1990, estableció el derecho a la escolarización en la Educación Secundaria Obligatoria. Eso implicó el reto de la determinación de los contenidos mínimos necesarios para asegurar la alfabetización matemática de todo el alumnado. Pero, como se pudo extraer de los resultados de las pruebas PISA del año 2000, los alumnos participantes mostraron dificultades para reconocer e interpretar problemas en contextos personales, sociales y laborales. Estas pruebas mostraron las diferencias entre la organización del currículo de la LOGSE y la visión fenomenológica de las pruebas PISA 2000, que adjudicaban tres niveles de complejidad cognitiva: reproducción, conexión y reflexión, para los fenómenos organizadores de la evaluación, que eran cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones e incertidumbre.

Los resultados de PISA 2000 hicieron que se cuestionasen los principios de universalidad y comprensibilidad de la educación matemática vigente hasta el momento y la concreción de un nuevo currículo LOCE 2003, donde se enfatizó aún más en que la universalización de la educación matemática debía asegurar la comprensibilidad para todo el alumnado de manera que le aportase conocimientos para la vida. Con esta ley se eliminaron algunos contenidos por carecer de funcionalidad para la vida cotidiana, pero que se consideraban fundamentales para la transición a la universidad. La amplitud de los contenidos se ha reproducido en las reformas del Bachillerato incluidas en la LOE 2003 y la LOMCE 2014. El currículo real del aula y el contenido evaluado en las pruebas de acceso a la universidad eran diferentes, por lo que el currículo se reduce a reproducir actividades matemáticas tipo y asigna un rol decorativo a los axiomas, definiciones y demostraciones.

La LOCE 2003 incluía que la enseñanza de la matemática debía tratarse de manera cíclica. Se introducían contenidos nuevos, pero también, en cada curso se repasaban los de los cursos anteriores y se ampliaba su campo de aplicación y se enriquecían con nuevas relaciones.

Existen posiciones del profesorado contrapuestas. Hay profesores que consideran que si se tratasen los contenidos de una manera profunda en un curso no haría falta repetirlos en cursos posteriores y otros consideran que se debe mejorar el enfoque de la enseñanza en espiral, de forma que además sea una forma de atender a la diversidad del alumnado. Esta última postura es la que apoya la Real Sociedad Matemática Española (RSME).

Hasta los decretos asociados a la reforma de la LOE, no se observa en España una intención manifiesta en los diseños curriculares de la ESO por superar la visión cíclica de la adquisición del conocimiento, a partir de la repetición de los contenidos del curso anterior hacia una propuesta en espiral que plantea la evolución a niveles superiores de desarrollo de las competencias

En España, una vez asegurada, al menos en papel la alfabetización matemática en etapas escolares obligatorias, los marcos teóricos de las evaluaciones PISA (OCDE, 2019) 2003, 2006, 2009 y 2012 influenciaron la reforma de los sistemas educativos de la Unión Europea con el objetivo de asegurar el desarrollo y la evaluación de las competencias básicas y claves, concretadas en España en la LOE 2006 y en la LOMCE 2014. Estas dos leyes orgánicas decretaron la necesidad de la realización de pruebas de diagnóstico de carácter muestral o poblacional para la comunidad autónoma.

En el currículo de matemáticas para la ESO de la LOE 2006 se puede ver la primera influencia del desarrollo de competencias en la organización curricular. Este documento contenía un bloque de contenidos comunes que coinciden con las competencias matemáticas evaluadas en PISA 2003. Estos contenidos comunes eran la resolución de problemas, la verbalización de los procesos de resolución, la interpretación de mensajes y el uso de herramientas tecnológicas y el desarrollo de actitudes matemáticas de autoconfianza, flexibilidad de pensamiento y perseverancia.

El Plan Bolonia para las universidades también cuestionaba la necesidad de desarrollar y evaluar las competencias profesionales, pero en el currículo dictaminado para Bachillerato en 2007 por el MEC no se hablaba sobre dicho desarrollo competencial, sino que se anclaba en el desarrollo disciplinar de la materia.

Para las matemáticas de la modalidad del Bachillerato de Ciencias Sociales no se exigía una gran abstracción simbólica, ni un gran rigor sintáctico ni se exigían demostraciones. Con la LOMCE 2014 ha pasado algo similar. En Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas se deberá profundizar en el desarrollo de las habilidades de pensamiento matemático. En Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas se deberán adquirir algunas habilidades de pensamiento matemático como el análisis, la interpretación y la comunicación de técnicas.

La LOMCE 2014 introdujo un bloque llamado “Procesos, métodos y actitudes en matemáticas", que se configura como el articulador de los procesos básicos imprescindibles en el quehacer matemático en las etapas escolares. Los contenidos de este bloque son, para toda la etapa, los llamados por PISA competencias específicas o capacidades matemáticas. Estos procesos son la resolución de problemas, los proyectos de investigación matemática, la matematización y la modelización, las actitudes adecuadas para desarrollar el trabajo científico y la utilización de medios tecnológicos .

En el *Libro blanco de las matemáticas* se dice que " En la Educación secundaria obligatoria se enfatiza en que el alumnado desarrolle los procesos de resolución de problemas, mientras que en Bachillerato se da más importancia a los procesos de investigación. En el Bachillerato de Ciencias y Tecnología se incluye la realización de demostraciones sencillas de propiedades o teoremas"

> **Ejemplo 1.1.** Hemos podido observar en el centro donde ha tenido lugar Practicum la realización de algunas pruebas sencillas. En concreto, en 1º de Bachillerato se han deducido las *fórmula canónicas* o *reducidas* de todas las cónicas.

Según el *Libro blanco de las matemáticas*, realizar este tipo de pruebas sencillas es insuficiente para una adecuada transición a los estudios universitarios.

1.1. La legislación vigente en la actualidad.

La ley educativa vigente es la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE). En el preámbulo de la LOMCE se hace referencia a mejorar los resultados en matemáticas en las pruebas internacionales, como PISA.

En el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato se determinan los aspectos básicos a partir de los cuales las distintas Administraciones educativas deberán fijar para su ámbito de gestión la configuración curricular y la ordenación de las enseñanzas en dichas etapas. En el caso de Castilla y León, la ley que establece el currículo y regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación secundaria obligatoria es la ORDEN EDU/362/2015, de 4 de mayo. .

1.1.1. Las matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria. Los contenidos de álgebra en los dos primeros cursos de la ESO

La LOMCE estructura la Enseñanza Secundaria Obligatoria en dos ciclos, el primero formado por primero, segundo y tercero de ESO y el segundo formado por cuarto de ESO. En todos estos cursos, los alumnos tienen que cursar una asignatura de matemáticas dentro del bloque de materias troncales, algo común para todo el territorio español.

En 1º y 2º de ESO, estas asignaturas se denominan *Matemáticas*, y son obligatorias para todo el alumnado. En 3º y 4ª de ESO existen dos asignaturas de matemáticas *Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas* y *Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas* (en la LOE recibían el nombre de Opción B y solo se diferenciaban en 4º de ESO). Los padres, madres o tutores legales o, en su caso, los alumnos y alumnas tienen que decidir cual de estas dos asignaturas cursar dependiendo de sus intereses al finalizar la ESO. Si el alumno o alumna se va a decantar por la formación profesional, es preferible que se decante por las *Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas*.

El RD 1105/2014 establece que al menos la mitad del horario se debe de dedicar a las asignaturas troncales. La mayoría de las Administraciones educativas autonómicas han optado por dedicar cuatro horas semanales a cada una de estas asignaturas de matemáticas.

Todas las asignaturas de matemáticas se organizan en cinco bloques, que en la ESO son: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas (de carácter transversal), Números y álgebra, Geometría, Funciones y Estadística y Probabilidad. Para cada uno de ellos se detallan los contenidos, los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables.

En algunas comunidades autónomas, como Castilla y León, se ofertan asignaturas de refuerzo de matemáticas, principalmente en los primeros cursos. En el caso del currículo de la Orden EDC/65/2015 existe una asignatura que se puede ofertar desde primero a cuarto curso y cuyo carácter de refuerzo o ampliación. Ofertarlas se decide en cada centro para cada año escolar, pudiendo sufrir cambios de un año escolar a otro.

En España el álgebra se introduce en 1º de ESO. Las lecciones sobre álgebra se encuadran en todos los cursos de la ESO y del Bachillerato en el bloque 2, de números y álgebra. El Boletín Oficial del Estado (BOE) no especifica de forma separada que contenidos se deben enseñar en 1º de ESO y en 2º de ESO, mientras que en el Boletín Oficial de Castilla y León (BOCyL) sí aparece una separación. En las siguientes tablas aparecen, para las lecciones de álgebra, los contenidos, los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables de 1º y 2º de ESO que vienen detallados en el BOCyL del 8 de mayo de 2015.

En cuanto a las competencias básicas, según el Libro Blanco de las Matemáticas, en Castilla y León no se considera la competencia matemática, pero sí la científica, en la cual suponemos que se engloba la competencia matemática.

En las siguientes tablas aparecen, para las lecciones de álgebra, los contenidos, los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables de 1º y 2º de ESO que vienen detallados en el BOCyL del 8 de mayo de 2015.

CUADRO 1.1: BOCyL Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje de evalables de álgebra de 1º de ESO.

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Iniciación al lenguaje algebraico. Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa. Valor numérico de una expresión algebraica Operaciones con expresiones algebraicas sencillas. Transformación y equivalencias. Identidades. Operaciones con polinomios sumas, restas y multiplicaciones por números enteros. Ecuaciones de primer grado con una incógnita (métodos algebraico y geométrico). Transformaciones elementales; ecuaciones equivalentes. Resolución. Interpretación de las soluciones. Resolución de problemas, análisis e interpretación crítica de las soluciones. Valoración del lenguaje algebraico para plantear y resolver problemas de la vida cotidiana.	6. Analizar procesos numéricos cambiantes, identificando los patrones y leyes generales que los rigen, utilizando el lenguaje algebraico para expresarlos, comunicarlos, y realizar predicciones sobre su comportamiento al modificar las variables, y operar con expresiones algebraicas 7. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar y resolver problemas mediante el planteamiento de ecuaciones de primer grado, aplicando para su resolución métodos algebraicos o gráficos y contrastando y comprobando los resultados obtenidos.	6.1. Describe situaciones o enunciados que dependen de cantidades variables o desconocidas y secuencias lógicas o regularidades, mediante expresiones algebraicas, y opera con ellas. 6.2. Identifica propiedades y leyes generales a partir del estudio de procesos numéricos recurrentes o cambiantes, las expresa mediante el lenguaje algebraico y las utiliza para hacer predicciones. 6.3. Utiliza las propiedades de las operaciones para transformar expresiones algebraicas. 7.1. Comprueba, dada una ecuación, si el número (o números) es (son) solución de la misma. 7.2. Formula algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer grado, las resuelve e interpreta el resultado obtenido.

CUADRO 1.2: BOCyL. Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje de evalables álgebra de 2º de ESO.

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
El lenguaje algebraico. Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales al algebraico y viceversa. El lenguaje algebraico para generelalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. Valor numérico de una expresión algebraica. Operaciones con expresiones algebraicas sencillas. Transformación y equivalencias. Identidades notables. Operaciones con polinomios en casos sencillos. Ecuaciones de primer grado con una incógnita (método algebraico). Transformaciones elementales. Resolución. Interpretación de las soluciones. Ecuaciones sin solución. Resolución de problemas, análisis e interpretación crítica de las soluciones. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Métodos algebraicos de resolución y método gráfico. Resolución de problemas, análisis e interpretación crítica de las soluciones. Valoración del lenguaje algebraico para plantear y resolver problemas de la vida cotidiana.	6. Analizar procesos numéricos cambiantes, identificando los patrones y leyes generales que los rigen, utilizando el lenguaje algebraico para expresarlos, comunicarlos, y para realizar predicciones sobre su comportamiento al modificar las variables, y operar con expresiones algebraicas 7. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar y resolver problemas mediante el planteamiento de ecuaciones de primer, segundo grado y sistemas de ecuaciones, aplicando para su resolución métodos algebraicos o gráficos y contrastando los resultados obtenidos.	6.1. Describe situaciones o enunciados que dependen de cantidades variables o desconocidas y secuencias lógicas o regularidades, mediante expresiones algebraicas, y opera con ellas. 6.2. Identifica propiedades y leyes generales a partil del estudio de procesos numéricos recurrentes o cambiantes, las expresa mediante el lenguaje algebraico y las utiliza para hacer predicciones. 6.3. Utiliza las identidades algebraicas notables y las propiedades de las operaciones para transformar expresiones algebraicas. 7.1. Comprueba, dada una ecuación (o un sistema), si el número (o números) es (son) solución de la misma. 7.2. Formula algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer y segundo grado, y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, las resuelve e interpreta el resultado obtenido.

Capítulo 2

Marco teórico

2.1. Algunas consideraciones del *Libro blanco de las matemáticas*

Según el *Libro blanco de las matemáticas* se debería considerar una introducción al álgebra en el currículo de primaria. En muchos países, como Estados Unidos, Canadá o Singapur, ya existe esta introducción al álgebra, también llamada preálgebra, que se realiza en en los cursos correspondientes a los últimos años de la educación primaria en España. Eso permitiría que el alumnado dispusiese del tiempo necesario para desarrollar la capacidad de pensamiento abstracto, fundamental para el posterior estudio de las Matemáticas. En España se pasa de la nula presencia de los razonamientos algebraicos en apenas dos cursos a desarrollos quizá excesivamente técnicos en 2º y 3º de ESO.

La comunidad educativa parece considerar necesario un cambio en la enseñanza de las matemáticas. En los años recientes han aparecido métodos alternativos como Entusiasmat, Jumpmath, Smartick, ABN o Matemáticas Singapur. Merece especial atención esta última, la "metodología Singapur" por las siguientes características:

- Se basa en ideas bien contrastadas en el área de la didáctica de la matemática. Destaca el aprendizaje en tres etapas de Jerome Bruner.
- Se enfoca hacia las actividades de mayor valor cognitivo, como son las de comprensión, razonamiento y resolución de problemas.
- Se lleva utilizando en Singapur desde hace aproximadamente treinta años, dando excelentes resultados en las pruebas internacionales, como PISA.
- Se está empezando a implementar en países de nuestro entorno, como Reino Unido o Francia.

Existe una falta de conexión entre el álgebra y otras disciplinas de la matemática y una ausencia de significado cotidiano en el aprendizaje adquirido por el alumnado, que se reduce muchas veces a las operaciones con polinomios y con matrices. Según el *Libro blanco de las matemáticas* "Se aboga por una transición entre los dos últimos cursos de la Educación Primaria y los dos primeros grupos de la Educación Secundaria Obligatoria que fomente una evolución natural en la forma de pensar y actuar con objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas"(p.20).

Se debe fomentar que el alumnado explore, modelice, haga predicciones, discuta, argumente, compruebe ideas y que también practique habilidades de cálculo. Según Kaput (1999) citado en el *Libro blanco de las matemáticas*, este proceso se llama *algebratización del currículo*, es decir, la inclusión del pensamiento algebraico en las matemáticas en edades escolares. Esto significaría otorgar una visión multidimensional al álgebra de acuerdo con la comprensión de patrones, las relaciones entre las cantidades y las funciones, la representación de las relaciones matemáticas, el análisis de situaciones usando símbolos algebraicos, el uso de modelos para representar y comprender relaciones cuantitativas y el análisis. Desde el punto de vista epistemológico, permitiría conectar los fenómenos de cantidad, cambio y relaciones. Pero tammbién aportaría significado al álgebra lineal de Bachillerato de Ciencias, pues aparecería de manera natural la necesidad de unificar los problemas a los que históricamente han dado respuesta las funciones, los sistemas de ecuaciones y las sucesiones.

2.2. Corrientes generales de aprendizaje

Tal y como se indica en Arce et al. (2019) el área de las ciencias de la educación existen dos corrientes o modelos contrapuestos, que tratan de explicar cómo se producen los procesos de enseñanza y aprendizaje en el ámbito escolar: la corriente empirista o transmisiva y la corriente constructivista. En Arce et al. (2019) se realiza un cuadro comparativo entre ambas corrientes en las que se pueden observar las diferencias. Inspirándondonos en éste, veamos en que consiste cada una de ellas.

2.2.1. La corriente transmisiva o empirista

- El alumno aprende lo que explica el profesor en clase.
- El alumno adquiere, asimila y acumula el conocimiento que el docente le transmite.
- El profesor tiene el rol principal como transmisor del conocimiento. Lo fundamental es el proceso de enseñanza.
- El alumno tiene un rol pasivo ante los conocimientos que explica el docente, y que luego tendrá que memorizar y aplicar para resolver ejercicios.

- El conocimiento se organiza de forma lineal teniendo en cuenta la lógica de la disciplina que se está impartiendo, y se expone estructurado y cerrado.
- El error es considerado una señal de fracaso, ya sea en la transmisión por parte del docente o en el registro del alumno. El error es algo que se debe evitar.
- El proceso de enseñanza es unidireccional: del profesor al alumno.

Vemos que en estos aspectos se basa una clase magistral, como las que todos conocemos.

Algunos representantes de la corriente empirista autores conductistas como Paulov, Skinner o Bandura.

2.2.2. La corriente constructivista

- El alumno aprende de forma activa en las situaciones planteadas por el docente.
- El conocimiento se desarrolla, organiza e integra a través de conflictos que el alumno debe superar. Así se produce una evolución de sus estructuras cognitivas y conocimientos.
- El alumno tiene el rol principal. Tienen más importancia los procesos de aprendizaje, que serán distintos para cada persona.
- El papel fundamental del docente es crear situaciones de aprendizaje, orientar la acción del alumno, plantear preguntas sobre los aspectos más importantes o modificar algunos aspectos de la situación.
- Cada alumno construye, desarrolla y organiza su conocimiento a partir de las situaciones planteadas por el docente, y es un agente activo en este proceso.
- El error se percibe como una fuente de aprendizaje. Aparecen conflictos cognitivos y eso indica que se deben reorganizar los conocimientos anteriores.
- Importancia de las interacciones profesor-alumno y de los alumnos entre sí.

Las dos corrientes son claramente distintas, pero no es conveniente pensar en versiones extremas de las mismas. Quizá lo más adecuado sea considerar aspectos de ambas. El constructivismo es el modelo imperante en la segunda mitad del siglo XX y en la actualidad. Existen muchas versiones dentro del constructivismo, pero todas comparten, como se señala en Arce et al. (2019):

- El papel activo que ha de tener el alumno para conseguir aprender y desarrollar su conocimiento. No obstante, las posibilidades de construir conocimiento dependerán del conocimiento pretendido, su dificultad y su naturaleza.

- Las mayores posibilidades de acceder a la información y al conocimiento que existen hoy en día: el docente ya no es la única fuente posible de conocimiento. Otros temas son la selección y la calidad de las diferentes fuentes, y su gestión para que el alumno llegue a construir conocimiento.

En la siguiente sección trataremos algunas de las teorías costructivistas más importantes.

2.3. Algunas teorías constructivistas relevantes

Existen multitud de teorías enmarcadas en la corriente constructivista. Muchos autores se basaron en estudios empíricos para intentar explicar cómo se desarrolla el aprendizaje y cómo se construye el conocimiento. Como se indica en Arce et al. (2019), las teorías difieren dónde se sitúan el foco principal que permite ese aprendizaje y construcción.

Aquí se expondrán las teorías de cuatro autores con gran impacto: Piaget, Vygotsky, Bruner y Ausubel.

2.3.1. Jean Piaget y la epistemología genética

Jean Piaget (1896-1980) elaboró la teoría denominada *epistemología genética* o *teoría del desarrollo cognitivo*. Es una teoría de corte constructivista ya que la actividad del alumno es clave para la construcción del conocimiento. La construcción se produce en la mente del estudiante, es esencialmente cognitiva. Piaget (1979) define la *epistemología genética* como el estudio del paso de los estados de menor conocimiento a los estados de conocimiento más avanzado.

La organización. Los esquemas.

Los esquemas son estructuras de conocimiento o patrones de pensamiento Arce et al. (2019). Son las unidades básicas para la construcción del conocimiento Las *estructuras cognitivas* son conjuntos de esquemas relacionados que presentan unas reglas de composición determinadas, y cuya suma de propiedades es mayor que la suma de las propiedades de cada esquema componente.

La adaptación

Los procesos de adaptación hacen referencia a ciertas *estructuras*. Aplicados al conocimiento, estos procesos se producen mediante la acción del organismo. Para éstos, estructura clave involucrada es la *estructura cognitiva*.

La *adaptación* consiste en la equilibración progresiva entre dos mecanismos: la *asimilación* y la *acomodación* (Rivero, 2012).

La posición de Piaget es contraria a las posturas empiristas. Su visión acerca de cómo se produce el conocimiento es *constructivista*. El conocimiento es el resultado de las interaciones del sujeto con el medio, es decir de una *construcción*.

El conocimiento, entendido como construcción, no constituye una copia de la realidad. Conocer el objeto es transformarlo en función de los esquemas del organismo (Piaget, 1986) citado por Rivero (2012).

2.3.1.1. Los estadios de la construcción del conocimiento

A lo largo del desarrollo de la persona (en este caso, del alumno), existen al menos dos factores que determinan esa construcción del conocimiento: el nivel de desarrollo de los esquemas cognitivos y la estimulación externa y la influencia sensorial.

El nivel de desarrollo de los esquemas cognitivos (Arce et al., 2019)

1. Etapa sensomotora (aproximadamente de 0 a 2 años): caracterizada por una inteligencia práctica, unida a la acción sensorial sobre objetos.

2. Etapa preoperacional (aproximadamente de 2 a 7 años): caracterizada por un razonamiento intuitivo y el desarrollo de los primeros símbolos y representaciones (palabras, imágenes mentales de objetos, etc.).

3. Etapa de las operaciones concretas (aproximadamente de 7 a 11 años): caracterizada por un razonamiento lógico sobre objetos concretos, basado en inferencias obtenidas a partir de observaciones.

4. Etapa de las operaciones formales (aproximadamente de 11 a 16 años): caracterizada por un razonamiento de tipo hipotético-deductivo, sobre objetos abstractos y basada en la acción reflexiva sobre objetos conocidos.

La estimulación externa y la influencia sensorial

El docente puede proponer actividades que inciten los procesos de adaptación en la mente del alumno.

Se indica en Arce et al. (2019) que la idea fundamental para la construcción del conocimiento es la adaptación. Cuando a un estudiante se le propone una tarea, éste intentará resolverla “aplicando sus conocimientos y esquemas cognitivos existentes en esos momentos” (p.30), es decir, intentará asimilar la situación. En caso de que esto no sea posible, se producirá un desequilibrio y un conflicto cognitivo. El alumno, para hacerle frente, “deberá reconstruir o expandir sus esquemas y conocimientos previos para acomodar esta nueva situación dentro de ellos” (p.30). Los procesos de la mente por los que se desarrollan conocimientos y esquemas de razonamiento más avanzados de los existentes se denominan procesos de *abstracción reflexiva* y son fundamentales para la construcción y el desarrollo del conocimiento en la mente humana.

En (Arce et al., 2019) se dice que la teoría de Piaget "tiene una marcada componente cognitiva y de autorregulación del desarrollo del conocimiento por parte de cada individuo a través del razonamiento" (p.30). Pero es clave que el profesor diseñe y seleccione las situaciones óptimas para estimular las adaptaciones y provocar conflictos cognitivos para fomentar el desarrollo de los alumnos.

2.3.2. Lev Vygotsky y el constructivismo sociocultural

La teoría de Lev Vygotsky (1896-1934) sobre la construcción del conocimiento podría denominarse, tal y como se dice en Arce et al. (2019) como *constructivismo sociocultural*. En la teoría del desarrollo del conocimiento de Vygotsky el conocimiento se entiende como un producto de la interación social. Esto es una diferencia con el constructivismo de Piaget, que se basaba en un egocentrismo del pensamiento del niño, lo que hacía que no se adaptase al pensamiento de los adultos. Según Vygotsky (1995), "el habla egocéntrica es un fenómeno de la transición del niño del funcionamiento interpsíquico al intrasípquico, es decir, de su actividad social y colectiva a su actividad más individualizada [...] El habla egocéntrica se desarrolla a lo largo de una curva ascendente, no descendente; pasa por una evolución, no una involución. Al final, se transforma en habla interna"(p. 209).

En el desarrollo son muy importantes los procesos de internalización provocados por la interaccción social como por la mediación cultural de la sociedad. Estos procesos favorecen la apropiación de la cultura del grupo social, y provocan una transformación y reconstruccíon interna del sujeto y, por tanto, en el desarrollo de procesos psicológicos superiores como pueden ser el pensamiento, la reflexión, la argumentación o la abstracción. Luego, ese desarrollo vuelve a revertir en la sociedad a partir de las interaciones en las que participe el sujeto, lo que supone una evolución de la sociedad. (Arce et al., 2019).

Según Vygotsky, el niño nace con las habilidades mentales elementales, como la percepción, la atención y la memoria. Mediante las relaciones con compañeros y con adultos, estas habilidades "innatas" se transforman en funciones mentales superiores.

En los procesos de interacción son fundamentales los instrumentos de mediación. Para Vygotsky, el lenguaje es el instrumento primordial, estableciéndose así una relación entre el pensamiento (el desarrollo cognitivo y la reflexión) y el lenguaje. El lenguaje es el vehículo por el cual el pensamiento llega a la mente y por el que se expresa el pensamiento hacia el exterior.

Otra idea relevante de Vygotsksy es la de *zona de desarrollo próximo*. Ésta consiste en la distancia entre el nivel de desarrollo real del alumno y el nivel de desarrollo potencial.

- *Nivel de desarrollo real del alumno*: es aquello que el alumno ya sabe y es capaz de desarrollar de forma independiente y autónoma.

- *Nivel de de desarrollo potencial*: aquello que el alumno podría llegar a saber con ayuda del profesor o de otros alumnos.

Para Vygotsky, los procesos de enseñanza-aprendizaje deben tener lugar en esta zona de desarrollo próximo y no sobre lo que el alumno ya sabe o lo que está muy alejado de sus conocimientos actuales. En esos casos no produce ninguna evolución y el nivel de desarrollo potencial no podrá convertirse en un nivel de desarrollo real del estudiante Arce et al. (2019).

2.3.3. Jerome Bruner y el aprendizaje por descubrimiento

Jerome Bruner(1915-2016) fue el más destacado artífice de la teoría conocida como *aprendizaje por descubrimiento* (Bruner et al., 2001). El desarrollo del aprendizaje está centrado en la actividad del alumno, como en las anteriores teorías.

Los profesores tienen que selecionar y presentar a los estudiantes actividades situaciones, problemas o enigmas que les den oportunidades para implicarse de forma activa en su resolución, con suficiente motivación y curiosidad. Mientras los alumnos trabajan en la situación o el problema planteado, tienen lugar procesos como la observación, la experimentación, la comparación, la discriminación, o la formulación de hipótesis y conjeturas. El aprendizaje por descubrimiento consiste en que el alumno se enfrente a algunos procesos de investigación propios de las disciplinas, para que lleguen a generar aprendizaje y conocimiento por sí mismos. Así se estimula el desarrollo de heurísticas y estrategias metacognitivas (Arce et al., 2019).

El trabajo inicial en este tipo de situaciones y problemas se basará siempre en la intuición o en razonamientos de tipo inductivo, realizando algunas especulaciones y obteniendo algunas relaciones, patrones concretos o conjeturas iniciales. Es necesario un posterior pensamiento de tipo más analítico. Por ejemplo, intentar comprobar si estas ideas y relaciones concretas se pueden formular de forma más general, si puede comprobarse o deducirse su veracidad o llegar a formularse como un patrón o como un enunciado, y abstraerse como un conocimiento descubierto por los alumnos. Esta fase es de mayor complejidad cognitiva, pero es clave para que lo descubierto llegue a ser conocimiento y para que el alumno lo asimile y lo integre Arce et al. (2019). A Bruner le preocupaban poco los errores. Cometer errores no debe producir vergüenza. Es una forma de reorientar las hipótesis que tiene resultados muy efectivos (Lemos, 2019).

Según Bruner (1988) "el alumno no debe hablar de física, historia, matemáticas... sino hacer física, historia o matemáticas. El conocimiento verdaderamente adquirido es aquel que se redescubre (p.247)." Además, para Bruner (1988) " Un currículo se basa en pasos sucesivos por un mismo dominio de conocimiento y tiene el objetivo de promover el aprendizaje de la estructura subyacente de forma cada vez más poderosa y razonada; este concepto se ha dado en llamar currículo en espiral" (p. 247).

El *currículo en espiral* consiste en trabajar los mismos conceptos en muchos cursos. se El tratamiento de los contenidos ha de tener una mayor complejidad debido a una evolución del desarrollo cognitivo del estudiante.

El currículo español es un ejemplo de currículo en espiral. Muchos conceptos se tratan en varios cursos con diferente nivel de desarrollo. Existen profesores en contra y a favor de esta organización del currículo, pues consideran que es mejor tratar los conceptos sólo una vez y con toda profundidad. La opción sugerida por el *Libro Blanco de las Matemáticas* es enfocar esta espiral para atender a la diversidad.

En la teoría de la *espiral* vuelve a ser fundamental la labor del profesor. El docente tiene que diseñar, seleccionar y plantear situaciones de aprendizaje y problemas, que pretendan activar al alumno y que sirvan para provocar el aprendizaje por descubrimiento. Además, partiendo de la teoría de Vygotsky sobre la zona de desarrollo próximo, Bruner se plantea que, en muchas ocasiones, ese descubrimiento ha de ser guiado por el docente; sobre todo cuando los alumnos tengan grandes dificultades. Posibles acciones en este proceso guiado son: realizar observaciones a los alumnos, alentar la elaboración de hipótesis y conjeturas, así como su comprobación y establecimiento, identificar los posibles errores, gestionar los intentos frustrados, etc .(Arce et al., 2019). Es habitual comparar la función de guía del profesor con la posición y la función de un andamio al construir un edificio: el andamio tiene que colocarse sobre lo ya construido, para que con su apoyo uno se pueda mover por encima y levantar más plantas al edificio. En este caso, se trataría de llegar a descubrir y desarrollar un conocimiento más amplio. Esta metáfora del andamio originalmente fue idea de Wood, Bruner y Ross.

2.3.4. David Ausubel y el aprendizaje significativo

David Ausubel (1918-2008) formuló una teoría cuya idea central era la de *aprendizaje significativo*. Para considerar que un estudiante ha desarrollado un aprendizaje, este tiene que ser significativo, es decir, el estudiante deberá integrar la nueva información se integre con sus conocimientos previos (Arce et al., 2019).

Cuántas más asociaciones se produzcan entre los conocimientos previos del alumno y los conocimientos nuevos, el aprendizaje será más significativo, será de mayor calidad y profundidad, y durará más en el tiempo. Formará parte de una estructura mental y de la memoria a largo plazo del alumno.

Si no tienen lugar asociaciones entre la información previa con la nueva, el aprendizaje será de tipo memorístico y mecánico, carente de significado para el alumno al no ser capaz de relacionarlo con otros conocimientos.

El aprendizaje significativo puede ser adquirido y fomentado mediante distintas metodologías. Es habitual asociar esta teoría con metodologías de tipo expositivo-participativo, es decir, con clases magistrales participativas. El docente debe conocer y tener en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes para presentar y desarrollar los nuevos contenidos, y tiene que plantear actividades para intentar generar las asociaciones en los alumnos.

La siguiente cita de Ausubel et al. (1983) refleja muy bien en qué consiste el aprendizaje significativo: "Si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un solo principio, enunciaría este: el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñele consecuentemente" (p.1).

Los organizadores previos. "Un organizador previo es un recurso instruccional presentado en un nivel más alto de abstracción, generalidad e inclusividad con relación al material de aprendizaje" (Moreira, 2012).

Suelen establecerse las siguientes tres condiciones para facilitar la construcción del aprendizaje significativo (Arce et al., 2019):

- El docente tiene que tener en cuenta cuáles son los conocimientos previos de los alumnos, ya sean conocimientos válidos, parciales, generales o erróneos.
- El alumno debe tener disposición para realizar las asociaciones de los conocimientos nuevos con los previos para poder incorporar los conocimientos de forma significativa a su bagajes.
- El docente tiene que plantear presentaciones o tratamientos de los nuevos contenidos de una forma que puedan resultar potencialmente significativos para los alumnos.

Es preciso tener en cuenta que cuando se tiene un nuevo contacto con el contenido, éste se efectúa con lo que ya se conoce previamente. " Cuando el alumno se enfrenta a un nuevo contenido a aprender lo hace siempre armado con una serie de conceptos, concepciones, representaciones y conocimientos, adquiridos en el transcurso de sus experiencias previas que utiliza como instrumentos de lectura e interpretación y que determinan en buena parte que informaciones seleccionará, como las organizará y que tipos de relaciones se establecen entre ellas"(Coll, 1990) citado por Martín (2005). Por esta razón es de suma importancia que los alumnos adquieran aprendizajes duraderos en el tiempo puesto que tendrán más conocimiento con el que relacionar los nuevos contenidos, siendo así más alta la posibilidad de que se produzcan aprendizajes significativos.

2.4. La necesidad de la didáctica de la matemática.

En la actualidad, podemos acceder a una gran cantidad de datos y de información que nos ayudan a comprender globalmente le mundo y la sociedad. Es necesaria una alfabetización matemática para toda la ciudadanía, para que esta pueda detectar, por ejemplo, manipulaciones o tendenciosidades en argumentaciones Arce et al. (2019).

Es fundamental en la sociedad actual democratizar el conocimiento matemático (Bishop, 2010) citado por Arce et al. (2019). Las matemáticas deben dejar de verse como una materia elitista que sirve para conocer cuáles son los alumnos con mayores capacidades en procesos excesivamente complejos como la abstracción, la generalización o el razonamiento. En la sociedad se expresa admiración por alguien al que se le dan bien las matemáticas o se admiten disculpas ante la falta de alfabetización matemática básica, como por ejemplo "es que yo soy de letras". Teniendo en cuenta la complejidad de los procesos anteriores, hay que intentar gestionar adecuadamente la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para que todas las personas tengan una alfabetización matemática suficiente que les permita desarrollarse como ciudadanos independientes, críticos y refexivos. El problema que hay que resolver, en palabras de Bishop (2010, p.3) citado por Arce et al. (2019), es cómo llegar a ofrecer la mejor educación matemática al mayor número de personas.

En la sección anterior hemos visto teorías didácticas, pero todas ellas muy generales, al no tener en cuenta el contenido que se va a enseñar o a aprender.

Muy pocos matemáticos se han preocupado por la enseñanza de las matemáticas. Los escasos trabajos que se han hecho en este campo eran de corte filosófico o basados en la propia experiencia del autor al hacer matemáticas. Ejemplos importantes son *Matemática elemental desde un punto de vista superior*, de Felix Klein o *How to solve it?* de George Pólya.

La educación, y en concreto la didáctica de la matemática necesitó mucho más tiempo que las matemáticas para consolidarse como disciplina científica y académica.

Para enseñar matemáticas es necesario conocer sus características específicas, como su carácter abstracto o los procesos para desarrollar comprensión y generar y validar conocimiento en matemáticas (visualización, generalización, razonamiento hipotético deductivo, etc).

En palabras de Puig (2016) " [...]la investigación en educación matemática es necesaria. [...] Lo que para mí es una necesidad real es que investigar en educación matemática llegue a ser una actividad normal en las universidades –y no sólo en ellas".

Dada la necesidad de conocer cómo se enseñan las matemáticas, en la segunda mitad del siglo XX ha surgido y se ha desarrollado la didáctica de la matemática. Poco a poco se ha ido consolidando como disciplina científica. En la actualidad existen muchos investigadores y profesores expertos en didáctica de la matemática, y existen sociedades, congresos, simposios y revistas dedicadas a este área.

La didáctica de la matemática es una disciplina que se enmarca en las ciencias sociales puesto que debe tener en cuenta el contexto social y educativo de los alumnos. Se trata de un campo de estudio complejo.

Según Rico et al. (2002), "la Didáctica de la Matemática se ocupa de indagar metódica y sistemáticamente sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, proporcionar fundamentos teóricos y sostener planes para la formación profesional de los educadores matemáticos"(p.37).

Un problema pertenece a la didáctica de la matemática cuando en él están implicados procesos de comunicación, enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Rico et al., 2002). La disciplina es muy reciente, está en la frontera con las matemáticas o las ciencias de la educación por lo que es difícil reconocerla como algo específico. La evolución de esta ciencia ha provocado el desarrollo de múltiples teorías que son propias de ella, y que ayudan a entender y a fundamentar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Arce et al., 2019).

Para (Bishop, 2010, pp. 8-9), citado por Arce et al. (2019), existen tres grandes focos de interés en didáctica de la matemática, teniendo siempre en cuenta el contexto en en que se desarrollan los procesos (figura 1).

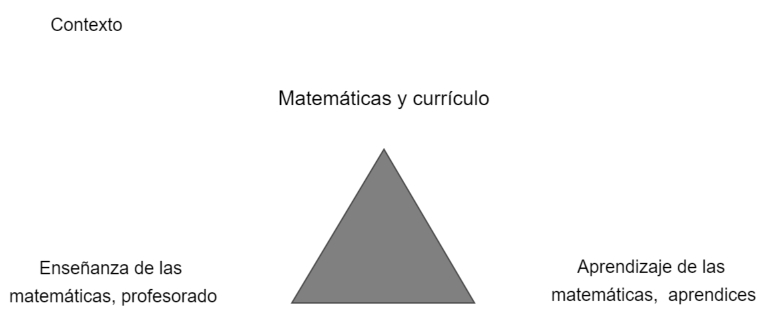


Figura 2.1: Grandes focos de interés en didáctica de la matemática.

Fuente: Elaboración propia. Imitación de una figura de Arce et al. (2019)

Según Bishop tres grandes focos de interés en didáctica de la matemática son los siguientes: las matemáticas y su currículo, la enseñanza de las matemáticas y el profesorado,, y el aprendizaje de las matemáticas y sus aprendices. Los procesos relacionados con estos tres focos están situados en un contexto social que ayuda a entenderlos mejor. Son temas relevantes la relación entre matemáticas, escuela y familia, la influencia del contexto socioeconómico en el aperendizaje de las matemáticas, su aprendizaje en contextos mulitculturales y multilingües, etc. (Arce et al., 2019).

2.5. Algunos enfoques y teorías propios de la didáctica de la matemática

Existen múltiples modos de entender las matemáticas y su epistemología, es decir sus características como rama de conocimiento. Las distintas corrientes constructivistas de aprendizaje y las distintas condiciones sociales, históricas y culturales de las diferentes regiones condicionan las necesidades de los alumnos, por lo que surge la necesidad de formular diferentes teorías didácticas. En esta sección destacaremos tres con alta repercusión.

2.5.1. La didáctica francesa

En los últimos 40 años, un importante grupo de investigadores franceses entre los que destacan Yves Chevallard y Guy Brousseau, ha estado desarrollando un marco teórico con la finaliidad de analizar y explicar los procesos de enseñanza y aprendizaje en las aulas. Para este grupo, la enseñanza de las matemáticas es un sistema que conforman esencialmente tres subsistemas: el saber enseñar, el docente y el alumno (se puede observar cierta similitud con los tres focos de la figura 1). Este grupo de investigadores se dedica a intentar analizar y entender mejor cuáles son las relaciones que se producen entre los tres subsistemas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

2.5.2. La teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau

La contribucición más destacada es probablemente la *teoría de situaciones didácticas* de Guy Brousseau ya que involucra las relaciones entre los tres subsistemas. Es una teoría de inspiración constructivista, pero se construye a partir de las especifidades del conocimiento y la interacción en matemáticas Arce et al. (2019).

Guy Bousseau propone un modelo en el que se centra en la producción de los conocimientos matemáticos. Producir conocimientos implica establecer nuevas relaciones, transformar y reorganizar otras. Brousseau toma las ideas principales de la epistemología genética de Piaget como marco para construir el conocimiento. Sostiene también que el conocimiento matemático se va contruyendo a partir de reconocer, abordar y resolver problemas que son generados por otros problemas. Concibe además las matemáticas como un conjunto de saberes producidos por la cultura. El alumno produce el conocimiento adaptándose al medio en el que actúa. (Sadovsky, 2005).

La matemática es un producto de la cultura. El conocimiento comienza a construirse en una situación particular. A medida que van apareciendo nuevas situaciones particulares, el conocimiento se va descontextualizando y generalizando.

La teoría de Brousseau parte de la búsqueda de situaciones, por ejemplo problemas o juegos que los alumnos no puedan resolver aplicando sus conocimientos previos o para las cuales éstos sean ineficaces aplicados directamente. Se pretende que los alumnos desarrollen el conocimiento como solución óptima a la actividad que se les proponga. El conocimiento tiene que poder se construido por los alumnos. Esas situaciones se llaman *situaciones fundamentales* asociadas a ese conocimiento matemático, y ayudan a caracterizarlo y a motivar su aprendizaje.

Las situaciones didácticas.
El docente elige problemas al alcance de los alumnos. "Las situaciones didácticas preparadas con fines didácticos determinan el conocimiento enseñado en un momento dado y el sentido que este conocimiento va a tomar por efecto de las restricciones y deformaciones aportadas a la situación fundamental" (Brousseau, 2007, p.32). Ese problema elegido por el profesor lo involucra en el juego con el sistema de interacciones del alumno con su medio. Este juego más amplio es una *situación didáctica* (Brousseau, 2007).

El planteamiento de una situación fundamental genera *situaciones didácticas*, en las que se produce, de forma implícita o explícita, una serie de relaciones en el alumno, otros alumnos, el problema planteado y el profesor, que busca que los estudiantes construyan el conocimiento matemático que se pretende que adquieran.

La situación empezará con el diseño previo y el planteamiento inicial del problema o el juego por parte del profesor. El docente debe conocer cuáles son las variables didácticas del problema, es decir, aquellos elementos que pueden modificarse o gestionarse al avanzar la situación didáctica, y que afectan a la jerarquía de las estrategias de solución que pueden proponer los alumnos debido a su validez, complejidad o el coste de su implementación (Arce et al., 2019).

Al principio tendrán lugar *situaciones de acción*, en las que cada alumno trabajará de forma individual en el problema aplicando sus conocimientos previos e intentará resolverlo y de obtener resultados que le acerquen a desarrollar un nuevo conocimiento. El profesor no interviene de manera directa. El problema tiene que permitir al alumno esbozar una primera solución, basada en sus conocimientos previos. Esa solución será insuficiente, y le ofrecerá retroalimentación, así como un medio para validar sus respuestas y avances (Arce et al., 2019).

Luego se producen *situaciones de formulación*, generalmente en grupos pequeños o en el grupo aula. Estas consisten en que cada estudiante expone a los otros estudiantes y al profesor los avances en la resolución del problema o juego. La comunicación de estos avances puede hacerse de forma oral o escrita. Lo importante es controlar la participación de todos los alumnos y el lenguaje que utilizan para expresar sus nuevos conocimientos.

Después tienen lugar las *situaciones de validación*. En éstas los alumnos que han participado han de argumentar y justificar la validez de sus estrategias al resto de los compañeros y al docente. Los interlocutores pueden preguntar sus dudas, pedir más explicaciones o mostrar su desacuerdo de manera argumentada.

Al final se producen las *situaciones de institutonalización*, que consisten en la intervención del docente para terminar de perfilar los avances y elevar los conocimientos construidos al estatus de conocimiento o de saber matemático. Han de destacarse los resultados más importantes ligados al conocimiento construido, su papel como solución óptima al problema planteado y la terminología que se debe utilizar, si no se había hecho ya (Arce et al., 2019).

Ejemplo (Arce et al., 2019, p.38).

Posible situación fundamental para los sistemas de ecuaciones lineales (2º de ESO).

> Se plantea inicialmente esta tarea: " 75 alumnos de un instituto han acudido al Parque de las Ciencias de su ciudad. Allí decidieron cuál de los dos museos interactivos quería ver cada uno: el de Historia de la Humanidad, cuya entrada valía 5€ o el de Ciencia Experimental, que costaba 7€. El gasto de los 75 alumnos fue de de 441€. ¿Cuántos alumnos visitaron el museo de Historia? ¿Y el de ciencia?".

En la situación de acción, los alumnos podrían probar dando valores y utilizando una estrategia de tipo ensayo-error como estrategia inicial, controlando los cambios para obtener las incógnitas. Para evolucionar esa estrategia sería muy útil cambiar la variable didáctica del conjunto numérico del conjunto de los números naturales a los racionales (por ejemplo), en una nueva tarea. También sería útil que los alumnos dispusiesen del *software* GeoGebra para intentar incitarles a representar gráficamente los datos de las situaciones (especialmente si conocen algo de funciones afines y su representación) y llegar a interpretar qué significan las rectas y su punto de corte en este contexto.

2.5.3. La transposición didáctica de Chevallard

Se considera que existe un *saber sabio* matemático, formado por el conocimiento y la cultura desarrollada por la humanidad, que ya está construido, ordenado y organizado. Este conocimiento se transforma en *saber a enseñar.*

Según Chevallard (1997), " un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas para hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza". El proceso por el cual se transforma un objeto de saber enseñar a un objeto de enseñanza se denomina *transposición didáctica.*

La transposición didáctica en sentido estricto es la transformación del saber preciso en una versión didáctica. Pero el estudio científico consiste en una transformación diáctica en sentido amplio, que la escuela, como institución, adapta y transforma el saber sabio en un saber matemático diferente: el *saber a enseñar*. Este proceso se da en dos niveles: diferentes:

- Grupos de expertos seleccionan parte del saber sabio que los ciudadanos deben conocer y diseñan el currículo de acuerdo con ello y las transformaciones que se han de realizar en ese saber para que pueda ser enseñado. El currículo, además, viene concretado en materiales educativos. Por ejemplo, los libros de texto.

- Mediante el currículo y materiales como los libros de texto, el saber llega a todas las escuelas, y el profesor es el mediador para terminar de configurar ese saber a enseñar y llegar a convertirlo en un saber enseñado a sus estudiantes (Arce et al., 2019).

El saber sabio se presenta descontextualizado, construido, organizado a partir de una validez ligada a razonamientos hipotético deductivos, ocultando los procesos asociados a su construcción, la lógica y la razón de ser de su descubrimiento (Arce et al., 2019).

En el proceso de transformación del saber sabio al saber a enseñar se pueden producir efectos perjudiciales para el aprendizaje de los alumnos. A veces, la transformación puede llevar a enseñar conceptos a partir de objetos que no existen en el saber sabio matemático.

2.5.4. El contrato didáctico

La idea del *contrato didáctico* está ligada a situar los procesos de enseñanza y aprendizaje en la institución escolar. Cuando el profesor presenta una determinada situación, el alumno espera unos hábitos determinados por parte del docente y el docente espera unos comportamientos determinados por parte de los alumnos, que median en la resolución y en las respuestas que puedan darse. Esas reglas implícitas que organizan las relaciones entre el contenido, los alumnos y el profesor en el aula de matemáticas constituyen el contrato didáctico (Arce et al., 2019).

Lo habitual es que el contrato permanezca oculto, los alumnos no lo conocen hasta que se produce una ruptura de éste debida a un comportamiento inesperado. En ese momento se debe renegociarse dicho contrato para evitar un sentimiento de rechazo.

Existen diversos estudios dónde se ponen de manifiesto algunas “cláusulas” implícitas en el contrato didáctico que habitualmente son asumidas por los estudiantes, y que se derivan de los hábitos del profesor de matemáticas.

El surgimiento de una ruptura del contrato didáctico ante una situación no es es algo negativo puesto que ayuda a avanzar de un conocimiento o resolución aparentemente satisfactoria, hacia resoluciones más relacionadas con la comprensión.

Ejemplo 2.1.

Un ejemplo que se suele citar cuando se habla de la ruptura del contrato didáctico es el problema llamado

"La edad del Capitán", que aparece en las investigaciones de Stella Baruk (1985). Una forma típica de enunciarlo es la siguiente:

" Un barco mide 37 metros de largo y 5 metros de ancho. ¿Cuál es la edad del capitán?"

Ejemplo 2.2. En el Practicum, la autora de este TFM, ha roto el contrato didático. Los alumnos estaban acostumbrados a hacer las ecuaciones de forma rutinaria, sin tener en cuenta que se pudiese simplificar en los cocientes. Un día para resolver una ecuación del tipo de la siguiente

$$\frac{6x+3}{3} = 11$$

se efectuó el cociente en el primer miembro

$$2x + 1 = 11.$$

Los alumnos se quedaron desconcertados ante lo imprevisto. No entendían lo que se había hecho. Se ha creado una situación de conflicto con sus ideas previas.

2.6. Enfoque discursivo del aprendizaje de las matemáticas.

El enfoque discursivo está inspirado en Vygotsky, entre otros. La comunicación en matemáticas es la fuente que genera y evidencia el aprendizaje. Una de las investigadoras que más está contribuyendo al desarrollo de este enfoque es Anna Sfard.

Según Anna Sfard, el pensamiento y el aprendizaje están ligados a la participación (*learning-as-participation*). Para Sfard los procesos cognitivos y los de comunicación interpersonal son dos manifestaciones de un mismo fenómeno. Para referirse a la unidad de los dos procesos, utiliza la palabra *comognición*.

Para Sfard, la comunicación es una actividad colectiva que sigue unos patrones determinados, con un conjunto de acciones de un individuo que se consideran comunicativas, a las que siguen reacciones de otros individuos de acuerdo con la acción, la situación y la identidad de los participantes.Si la comunicación es suficientemente espeífica, se provocan *discursos*, formándose comunidades en las que se incluyen personas que conocen dicha comunicación.

2.6.1. Características del discurso matemático

(Arce et al., 2019)

- Un conjunto de *palabras clave* especiales.

- Unos *objetos* denominados objetos matemáticos.
- Un conjunto de *mediadores visuales* específicos.
- Un conjunto de *narrativas*, válidas y aceptadas por la comunidad matemática.
- Un conjunto de *rutinas* o reglas de actuación.

Los objetos matemáticos se crean a través de objetos tangibles que, mediante el discurso, se convierten en objetos discursivos.

Ejemplo 2.3. Cuando vamos a resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas podemos utilizar un método algebraico, a saber, sustitución, igualación, reducción o reducción doble. Pero también lo podemos resolver de forma gráfica calculando el punto de corte de las dos rectas, si es que existe. En caso de que las rectas sean coincidentes, el sistema tendrá infinitas soluciones. En caso de que no existan puntos de corte, el sistema no tendrá solución.

2.6.2. Tipos de desarrollo del discurso matemático.

Según Sfard, el desarrollo del discurso matemático está ligado a dos tipos de desarrollo de naturaleza muy diferente.

- Desarrollo a nivel de un objeto. Se expande lo que se conoce sobre él. Esto se consigue formulando y validando nuevas narrativas que lo involucran.
- Desarrollo que va más allá del discurso existente en ese momento. Se generan nuevos discursos, asociados a una mayor abstracción.

El aprendizaje es social, pero solo puede alcanzarse con la participación individual (*learnig-as-participation*).

2.6.3. Educación matemática realista

Hans Freudenthal sentó las bases para fundamentar la corriente de la matemática realista y la fenomenología didáctica. Una de sus obras más destacadas es *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* de 1983. Para Freudenthal, los conceptos y estructuras matemáticas sirven para organizar fenómenos de la vida real y de la propia matemática. La enseñanza de la matemática debe de ser organizada en base a estos fenómenos para los que la estructura sirve como medio de organización.

Para Freudenthal existen varios tipos de fenomenología. La más importante aquí es la *fenomenología didáctica*, que se centra en los fenómenos presentes en el mundo de los estudiantes.

Ejemplo 2.4. Podemos distinguir dos grandes grupos de fenómenos que organizan a las ecuaciones de primer grado.

a) Fenómenos relacionados con la necesidad hallar cantidades desconocidas a partir de cantidades conocidas. Por ejemplo, cuando alguien va a una tienda de productos a granel y le da al dependiente 20€ y le dice quiero que me pongas 10kg de harina, pero no me des las vueltas; con el dinero que sobre me llevo lentejas. ”

b) Fenómenos matemáticos. Las ecuaciones de primer grado tienen utilidad en la resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas del tipo $2x^2 + x = 12$, ecuaciones de grado superior que puedan resolverse utilizando la factorización o sistemas de ecuaciones lineales.

La fenomenología y la educación matemática realista surgieron a partir de una crítica al modo en que, muchas veces, se enseñan las matemáticas. Se suelen presentar como un producto ya terminado y cerrado, algo que sabemos que no es así. Como muestra de ello, existen múltiples problemas abiertos como la hipótesis de Riemann, la conjetura de Collatz o la conjetura de Goldbach. Los enunciados de estas dos últimas conjeturas los puede entender perfectamente un estudiante de secundaria.

Tradicionalmente, el profesor muestra el conocimiento organizado. Parte de definiciones, enuncia teoremas y propiedades y finalmente se proponen y se resuelven algunas actividades para aplicar lo aprendido. Freudhental propone el enfoque contrario.

En Holanda se ha desarrollado una teoría más general que Van der Heuvel-Panhuizen y Drijvers denominaron *educación matemática realista*. Freudenthal fue uno de los mayores exponentes de esta teoría, que recoge muchas de las ideas de las teorías anteriores.

La teoría de la educación matemática realista defiende, como su propio nombre indica, que los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas han de partir de situaciones “realistas” en un doble sentido. Las actividades tienen que contextualizarse en la vida real y llegar a ser reales en la mente del estudiante. Otra cuestión importante de esta teoría es que considera las matemáticas como una actividad humana. Cuando los alumnos se enfrentan a una situación-problema asociado a la fenomenología de algún concepto, ocurren procesos de *reinvención guiada*.

Según Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers (2014), los seis principios de la educación matemática realista son:

- El *principio de actividad*. En la matemática realista, los alumnos son participantes activos en su proceso de aprendizaje. Las matemáticas se aprenden mejor haciendo matemáticas.

- El *principio de realidad*. Puede interpretarse de dos maneras. Una de ellas es el fomento de la capacidad de los alumnos para resolver problemas de la vida cotidiana. La otra forma de entenderlo es presentar a los alumnos situaciones que sean significativas para los estudiantes. En lugar de empezar enseñando definiciones o teoremas para ser posteriormente aplicados, la matemática realista consiste en empezar con problemas contextualizados, que tienen que ser matematizados por los alumnos.

- El *principio de nivel*. Para aprender matemáticas, los estudiantes tienen que pasar por varios niveles de entendimiento, desde las soluciones informales relacionadas con el contexto de la situación presentada hasta la adquisición de los conceptos y las estrategias.

- El *principio de interrelación*. Los contenidos no se han de considerar capítulos aislados, sino que deben relacionarse unos contenidos con los otros.

- El *principio de participación*. Significa que aprender matemáticas no es una actividad individual, sino que es una actividad social. Los debates en clase son muy enriquecedores al ofrecer a los alumnos compartir las estrategias que hayan utilizado con sus compañeros. Además ayudan a que los estudiantes reflexionen sobre el problema presentado y sobre sus ideas por lo que llevarán a los estudiantes a alcanzar un nivel más alto de entendimiento.

- El *Principio de guía*. Está inspirado en la idea de Freudenthal del redescubrimiento guiado de las matemáticas. Los docentes han de mantener un rol activo en los procesos de aprendizaje de los alumnos. Los programas deben contener situaciones que permitan que se produzcan cambios en el entendimiento de los estudiantes.

2.7. Teorías del aprendizaje en matemáticas

Uno de los principales objetivos de un docente de matemáticas en su profesión es promover y estimular el aprendizaje de sus alumnos en la medida de sus posibilidades y desarrollar todas sus capacidades y talentos. La profesión de un docente no es enseñar, es conseguir que los alumnos aprendan.

El aprendizaje depende del alumno, de su intención, de su interés y de su capacidad para ello. Es un fenómeno individual que depende de la disposición de cada estudiante, pero se produce en un contexto determinado que lo configuran y lo hacen posible (Arce et al., 2019).

2.7.1. El aprendizaje de las matemáticas es individual, pero también social

El aprendizaje en matemáticas es un fenómeno complejo. Es un fenómeno individual, pero también social. Es importante tener esto en cuenta ya que nos ayudará a entender el aprendizaje desde una perspectiva global.

La interpretación del aprendizaje en matemáticas como fenómeno social ha ganado relevancia en el ámbito de la educación matemática. En clase de matemáticas se pueden dar muchas situaciones en las que el desarrollo del aprendizaje pueda hacerse efectivo Arce et al. (2019).

Desde esta perspectiva no se habla directamente de aprendizaje, se habla de *oportunidad de aprendizaje* matemático. Para Morera (2013), las oportunidades de aprendizaje son las situaciones, que se dan en los procesos de resolución de actividades que permitan a los alumnos reorganizar sus estructuras conceptuales o procedimentales, sobre la gestión de su conocimiento o las formas de participación en un determinado contexto de enseñanza y aprendizaje.

Teniendo en cuenta lo anterior, siguiendo a Arce et al. (2019), un profesor de matemáticas ha de gestionar la enseñanza de de tal manera que se prime la generación de buenas oportunidades de aprendizaje y la explotación de otras oportunidades que puedan surgir en el aula. Los procesos de interacción entre el docente y los estudiantes o entre los propios estudiantes están muy relacionados con esa explotación.

La componente social también está relacionada con la validación de los aprendizajes conseguidos por cada estudiante. Mediante producciones verbales o escritas, los alumnos muestran evidencias de si han conseguido avances en su aprendizaje, aspecto que es evaluado y validado por el docente como experto conocedor de la matemática escolar que un alumno ha de aprender en un determinado nivel educativo (Arce et al., 2019)

2.7.2. La construcción de los objetos matemáticos

Hemos mostrado que aprendizaje no es únicamente una cuestión individual, sino que también está influido por el contexto social en el que se produce.

No es algo trivial llegar a conocer cómo se produce el aprendizaje en matemáticas. Es un proceso que consta de varias fases de desarrollo. Además es muy complicado pensar en que se pueda llegar a un “total” conocimiento de un conocimiento matemático.

El proceso de construcción de un objeto matemático no es algo predeterminado. Constará de avances y retrocesos y puede diferir de unas personas a otras. Aún así, existen múltiples teorías que intentan explicar como se produce el desarrollo de la comprensión, que son fruto de la experiencia y de la investigación. En estas teorías pueden detectarse algunas ideas compartidas (Arce et al., 2019).

Muchos expertos en educación matemática distinguen dos grandes bloques en el conocimiento de un contenido matemático, los aspectos *conceptuales* y los aspectos *procedimentales*, pero no existe una única forma de caracterizarlas. Los aspectos conceptuales están relacionados con los hechos, los conceptos, las generalizaciones y los principios; mientras que los procedimentales están ligados a las acciones y las manipulaciones para completar una tarea (Baroody, Feil y Johnson, 2007) citados en Arce et al. (2019).

Según Rico et al. (2008), dentro de los aspectos conceptuales se distinguen tres niveles de complejidad creciente: hechos, conceptos y estructuras; y dentro de los aspectos procedimentales: destrezas, razonamientos y estrategias.

Ejemplo 2.5. Un ejemplo ilustrativo ligado al contenido de álgebra de cursos como 1º o 2º de ESO.

En el CUADRO 2.1 y en el CUADRO 2.2, se muestra la diversidad de aspectos necesarios para que un contenido matemático sea comprendido. Dominar un concepto matemático no se limita a conocer su definición o definiciones. Una definición puede memorizarse y ser una información de tipo conceptual aislada e inoperativa si el alumno no es capaz de interpretarla, darle sentido y permitir su uso del concepto en las situaciones que lo requieran (Arce et al., 2019). Existen definiciones complejas que no pueden ser tratadas en secundaria, por ejemplo, en el caso del álgebra, la definición de espacio vectorial. En Bachillerato, la estructura antes nombrada podría definirse, aunque es difícil de comprender.

De la misma manera, un estudiante puede conseguir aplicar correctamente distintas acciones, reglas y algoritmos asociados a una noción matemática, como los mostrados en el cuadro 2.2 para el caso del álgebra. Pero estas unidades son de tipo procedimental que se mantienen aisladas si se desconoce, por ejemplo, en el caso de la resolución de un sistema de ecuaciones lineales, su interpretación geométrica o su utilidad.

CUADRO 2.1: *Niveles y categorías para los aspectos conceptuales.* Elaboración propia

Niveles	Categorías	Algunos ejemplos
Primer nivel: unidades de información	Términos	Polinomio, grado, ecuación, incógnita, identidad, solución, primer miembro, segundo miembro
	Notaciones	x, y (incógnitas) , $x+1=3$ (ecuación)
	Convenios	$x+1=3$ se lee “x más uno igual a 3"
	Resultados	Una ecuación de la forma $ax+by=c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ tiene infinitas soluciones reales
Segundo nivel: abstracción, relación y generalización de unidades de información	Conceptos	Polinomio de grado n ecuación de segundo grado, ecuación de grado n, sistema de ecuaciones
	Relaciones entre conceptos	Discutir cuántas soluciones tiene un sistema de ecuaciones lineales
Tercer nivel: estructuras	Estructuras matemáticas	Los polinomios de grado n tienen estructura de espacio vectorial de dimensión n

En Arce et al. (2019), se habla de la diferenciación clásica de Skemp(1976), entre dos tipos de com-

CUADRO 2.2: *Niveles y categorías para los aspectos procedimentales.* Elaboración propia

Niveles	Categorías	Algunos ejemplos
Primer nivel: unidades de información destrezas	Operaciones	Suma, diferencia, producto y cociente de polinomios. Resolución de ecuaciones
	Reglas	Fórmula para resolver la ecuación de segundo grado
	Algoritmos	Métodos para resolver sistemas de ecuaciones
Segundo nivel: abstracción, relación y generalización de unidades de información	Razonamientos	Resolución de problemas con ecuaciones o sistemas de ecuaciones
Tercer nivel: Estructuras	Estrategias	Simplificación de expresiones algebraicas

prensión de un concepto matemático: la *comprensión instrumental*, ligada al dominio, habilidad y fluidez al operar o aplicar reglas o algoritmos asociados al concepto matemático, y la *comprensión relacional*, que implica conocer qué representan esos procesos en relación al concepto y por qué son válidos.

Los objetivos de aprendizaje establecidos por un determinado docente y el modo de evaluarlo pueden acentuar uno de los dos tipos de comprensión. En la actualidad, con el desarrollo de los recursos y herramientas tecnológicas, como las calculadoras y *software* de cálculo, los profesores deberían centrarse en el desarrollo de la comprensión relacional más que en la comprensión meramente instrumental.

En las primeras etapas del aprendizaje de un concepto se "tiende poseer una serie de unidades de información (primer nivel de complejidad)" (Arce et al., 2019,p.88). Éstas pueden ser términos o definiciones memorizadas cuando se requiere explícitamente. Suelen ser unidades aisladas de conocimiento, por lo que se éste se mantiene en un estadio muy superficial y limitado. La superación progresiva de este estadio superficial se coneguirá estableciendo relaciones y conexiones entre esas definiciones aisladas. Estas relaciones y conexiones son fundamentales para la construcción de un concepto matemático por parte del alumno y su comprensión relacional.

Las conexiones y las relaciones organizan y estructuran los conocimientos del alumno acerca de un determinado concepto matemático. "Se generan esquemas, que, como indica Skemp (1976) actúan como agentes de ese desarrollo al motivar y facilitar al alumno la integración y la acomodación de nuevos conocimientos e ideas" (Arce et al., 2019, p.89). El conocimiento de un concepto requiere de un esquema rico y variado donde se integren y conecten todos los aspectos conceptuales, incluida la definición, y procedimentales que estén relacionados con el concepto, mostrándose la dependencia entre lo conceptual y lo procedimental.

Para que los estudiantes desarrollen un esquema rico y variado sobre un concepto, el docente debe planificar y proyectar previamente cuál es el esquema que pretende alcanzar. También debe proyectar un esquema hipotético inicial (teniendo en cuenta el currículo). De la comparación entre esos dos esquemas surgirán los objetivos didácticos y la planificación de actividades para desarrollar dicho esquema. El conocimiento de algunos aspectos reales del esquema de cada alumno ayudará a realizar adaptaciones de esa planificación.

2.7.3. Las trayectorias hipotéticas de aprendizaje

En 1995, Martín Simón planteó el constructo de *trayectoria hipotética de aprendizaje* en su artículo *Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructive Perspective.* Simon abordaba la forma de superar la tensión entre una visión constructivista del aprendizaje que requiere que el profesor tenga en cuenta y se adapte a las actuaciones de los alumnos y la de una idea tradicional de la planificación de la docencia basada el la búsqueda de unos objetivos predeterminados y el diseño de unas tareas para lograrlos (Gómez y Lupiáñez, 2007).

El constructo de trayectoria hipotética de aprendizaje, aunque ha sido interpretado y aplicado de múltiples maneras en la educación matemática, se considera compuesto por tres componentes. Esta es la traducción de Arce et al. (2019) de Simón(1995, p. 136):

> Una trayectoria hipotética de aprendizaje está compuesta por tres componentes: el objetivo de aprendizaje que define la dirección, las actividades de aprendizaje y el proceso hipotético de aprendizaje -una predicción sobre el pensamiento y la comprensión de los estudiantes evolucionarán en el contexto de las actividades de aprendizaje-

2.8. Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas

En toda actividad humana existe la posibilidad de cometer errores. En el proceso del aprendizaje de las matemáticas no iba a ser distinto. En las teorías conductistas, el error se concibe como algo que hay que corregir, bien por parte del profesor o por lo que el alumno registra durante las explicaciones. Para Rico (1995), el error puede contribuir positivamente el proceso de aprendizaje del alumno. Se debe desterrar la idea de culpabilizar al estudiante por haber cometido errores, reemplázando esta postura por la de prevención de errores y su consideración en el aprendizaje. En las teorías constructivistas el error es visto como una aplicación de un concepto en un contexto inadecuado. Estas teorías defienden que el aprendizaje se consigue mediante situaciones que creen conflictos cognitivos en el alumno para que tenga lugar una modificación o adaptación de los conocimientos previos. En Arce et al. (2019), aparece la siguiente afirmación de Brousseau:

> El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, según se creía en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje; sino el efecto de un conocimiento anterior, que tuvo su interés y que ahora se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de ese tipo no son fortuitos e imprevisibles, su origen se constituye en un obstáculo.

Los errores han de ser considerados como algo natural en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. Han sido un frecuente objeto de estudio en la educación matemática. Se contempla la posibilidad de que el profesor no se los espere o la de que sean producto del azar o de despistes.

Las investigaciones que buscan detectar, caracterizar e interpretar errores han sido habituales en didáctica de la matemática, pero no han sido tan frecuentes aquéllas que traten del aprovechamiento del error por parte del docente.

2.8.1. Caracterizción e interpretación de errores

Muchos autores han tratado de caracterizar los errores que pueden cometer los estudiantes en matemáticas. Dos clasificaciones de amplia influencia son la de Brousseau y la de Socas (Arce et al., 2019).

Para Brousseau existen tres tipos de obstáculos que pueden dar lugar a errores en la actividad matemática. Para realizar la clasificación se basa en el triángulo saber-alumno-docente y distingue tres tipos de obstáculos según el origen o la causa que explique error:

- *Obstáculos epistemológicos* (saber). Tienen lugar cuando se aplica un conocimiento matemático válido en un contexto en otro en el que no tiene sentido, produciéndose respuestas incorrectas.
- *Obstáculos ontogénicos* (alumno). El error es provocado por las limitaciones y las características del alumno.
- *Obstáculo didáctico* (docente). El error se debe a las elecciones que realiza un profesor o una institución educativa al plantear la enseñanza de un objeto matemático.

La clasificación de Socas sobre las dificultades que pueden surgir en el aprendizaje de las matemáticas consta de las siguientes cinco categorías:

- Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos, que pueden ser de tipo conceptual, ligadas a la naturaleza de los contenidos matemáticos que representan o de tipo operacional, relacionadas con la sintaxis de la manipulación simbólica.

- Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático, ligadas a la la naturaleza lógica de las matemáticas y a la presencia de rupturas relacionadas con el modo de pensamiento matemático.
- Dificultades relacionadas con los procesos de enseñanza, la institución escolar, el currículo y los métodos de enseñanza seguidos por el docente.
- Dificultades ligadas al desarrollo cognitivo de los alumnos.
- Dificultades relacionadas con las actitudes afectivo-emocionales hacia las matemáticas, y la presencia de factores de este tipo que dificultan el aprendizaje de las matemáticas.

Como vemos, en el trabajo de un alumno un error puede aparecer por diversas razones. El docente tiene que conseguir utilizarlo como una fuente para el desarrollo del aprendizaje.

2.8.2. El error en la práctica docente del profesor de matemáticas

El profesor debe prever cuáles son los errores más habituales o esperados en un determinado tema y conocer las causas que los provocan para intentar plantear conflictos cognitivos que permitan avanzar en el conocimiento a los alumnos y conocer las concepciones que cada uno tiene sobre él.

Como indica Rico (1995), es de gran utilidad realizar una evaluación inicial o diagnóstica que se base en una serie de tareas que los alumnos han de realizar para que el docente pueda conocer las concepciones erróneas mediante las respuestas y las explicaciones de éstas por parte de cada estudiante.

Ejemplo 2.6. Puesto que ya se hace una introducción al álgebra en 1º de ESO, algunas preguntas iniciales que se podrían hacer en 2º de ESO son las siguientes:

a) ¿Todas las ecuaciones de primer grado tienen solución?

b) Si llegamos, al final del proceso de resolución de una ecuación, a una igualdad del tipo 0=0, ¿qué significa?

c) ¿Qué creéis que significa el signo igual en una ecuación?

La orientación de la docencia hacia la superación de concepciones erróneas tiene como finalidad que los estudiantes busquen el sentido de sus errores y que sean capaces de generar un conocimiento evolucionado y coherente. (Arce et al., 2019).

.

2.9. La influencia del dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas

Hay dos maneras de mirar a un grupo de clase en la escuela.
Una es mirar un grupo de cabezas y la otra
es mirar un grupo de corazones.
A. S. Neill

Los aspectos propios del dominio afectivo tienen consecuencias en el aprendizaje y en la actividad matemática de los alumnos.

McLeod (1992) distingue tres grandes constructos: las *creenccias*, las *actitudes* y las *emociones.*

Las creencias son las ideas que un alumno va a adquiriendo a partir de las experiencias vividas durante el aprendizaje de matemáticas, que provocan en el alumno distintas reacciones emocionales(Blanco, 2012). Se requiere un largo periodo para que un estudiante forme sus creencias y esto provoca que sean estables en el tiempo y difíciles de cambiar. McLeod (1992) distingue los siguientes cuatro tipos de creencias:

- *Creencias sobre las matemáticas como disciplina.*
- *Creencia sobre sí mismo como aprendiz.* Estas incluyen el autoconcepto, es decir, la percepción propia que tiene un alumno sobre su habilidad matemática; la autoeficacia, que consiste en la percepción propia del individuo hacia tareas concretas, o las causas que a las que el estudiante atribuye sus éxitos y fracasos. En secundaria, muchos alumnos comienzan a ver las matemáticas como algo muy abstracto y muy difícil, decreciendo su confianza en sus posibilidades. En estas circunstancias, los fracasos se tienden a atribuir a la supuesta falta de capacidad y los éxitos a la facilidad de las tareas.
- *Creencias acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Normalmente se piensa que el profesor debe presentar los hechos, reglas y procedimientos y que el aprendizaje consiste en memorizar toda esta información y realizar las actividades “tipo” en las que estos se aplican.
- *Creencias sobre el contexto familiar y social hacia las matemáticas.* Un ejemplo es creer que el desarrollo de la habilidad matemática está relacionado con tener unas capacidades especiales que no tiene todo el mundo. Eso produce disculpas ante la falta de competencia matemática como la famosa “es que yo soy de letras”.

Entendemos por *actitudes* las predisposiciones positivas o negativas que condicionan a un sujeto a percibir y a reaccionar de un modo determinado ante las situaciones con las que se relaciona Hidalgo et al. (2004). En Arce et al. (2019) aparece la clasificación de las actitudes de Blanco (2012), que es la siguiente:

- *Las actitudes matemáticas.* Están ligadas a la manera en que se relacionan las capacidades cognitivas que son importantes en la resolución de actividades en matemáticas. Por ejemplo, la flexibilidad de pensamiento o el espíritu crítico.

- *Las actitudes hacia las matemáticas.* Se manifiestan mediante la valoración y el aprecio que se tiene hacia las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje. Existen actitudes positivas, con el gusto, la satisfación, el interés y la curiosidad hacia las tareas propuestas y existen actitudes negativas, como el rechazo, la frustración o su evitación en el itinerario escolar.

Como las creencias, las actitudes hacia las matemáticas son bastante estables; pero, a diferencia de las primeras, éstas son más intensas, con mayor carga efectiva y más ligadas a sentimientos. Las actitudes hacia las matemáticas suelen consolidarse durante la secundaria, produciéndose un considerable rechazo hacia esta materia. Para Hidalgo et al. (2004), estudiante al que no le gustan las matemáticas no nace, sino que se hace. Estos autores observan que las matemáticas son una asignatura que gusta cuando parecen divertidas y fáciles. En caso contrario, se genera rechazo hacia ellas. Según Blanco (2012) e Hidalgo et al. (2004),las emociones son estados afectivos de alta intensidad y de corta duración que experimentan los alumnos ante la actividad matemáticas. Pueden ser positivas o negativas. No tienen un carácter estable, pueden aparecer y desaparecer o cambiar rápidamente, lo que hace complicado estudiarlas, medirlas e interpretarlas. Algunas emociones comunes son las situaciones de bloqueo o de desbloqueo durante oa resolución de un problema, o sentimientos de satisfación, disfrute, descubrimiento, miedo o pánico durante dicha resolución.

Un constructo que ha recibido mucha atención en el campo de la educación matemática es la *ansidedad*, que es considerada una actitud o una emoción, dependiendo si es algo estable en el tiempo o si es algo esporádico. La ansiedad matemática se entiende como un sentimiento de tensión, miedo o aprehensión que surge al enfrentarse a las matemáticas y al trabajo matemático (Palacios et al., 2013). El control de las emociones, como evitar el miedo al fracaso, ansiedad por dar respuesta a una tarea o el miedo a equivocarse, y la visión del trabajo matemático como un desafío que se afronta con las técnicas adecuadas (por ejemplo, las heurísticas) ayudarán a mejorar el aprendizaje matemático (Arce et al., 2019).

Se han validado generado y validado en el campo de la educación matemática diferentes escalas para obtener información sobre el dominio afectivo en matemáticas, especialmente, sobre las creencias y las actitudes de los alumnos. La aplicación de estas escalas ha permitido detectar relaciones entre aspectos del dominio afectivo y y entre éstos y el rendimiento en matemáticas. Un ejemplo de escala validada en castellano es la Escala de Actitudes hacia las Matemáticas (EAM), creada por de Palacios, Arias y Arias en 2014 (Arce et al., 2019).

En la actualidad, no existen dudas acerca de la influencia entre el dominio afectivo y el cognitivo en matemáticas. Pero, pueden detectarse algunos aspectos para los cuales se necesita un mayor foco en la investigación en educación matemática.

Un aspecto es la interacción entre cognición y afecto en el proceso del trabajo matemático, para lo que no se recurre a escalas de medida. En los trabajos de Gómez Chacón se diferencia una estructura de afecto local (relaciones emocionales que interacúan con procesos cognitivos en la resolución de un determinado problema) y una global, en la que se configuran las actitudes a partir de la forma que toman las interacciones más presentes y de la realidad social y cultural en la que se encuentra el individuo con respecto a las matemáticas (Arce et al., 2019).

Otro aspecto es el diseño, la implementación y la evaluación de programas de intervención educativa en las que se integren aspectos afectivos y cognitivos, tratando de encontrar una mejora en ambos dominios en el alumnado.

2.10. El conocimiento que debe tener un profesor de matemáticas

Un profesor de matemáticas debe tener poseer un conocimiento variado, como veremos en esta sección.

2.10.1. El conocimiento pedagógico del contenido

Shulman, en 1987 establece las distintas categorías de conocimiento que ha de tener un docente. Son las siguientes:

- Conocimiento pedagógico general. Se incluyen aquí los principios generales y estrategias de organización y de gestión de la clase que trascienden del ámbito de la asignatura.
- Conocimiento de los alumnos y sus características.
- Conocimiento de los contextos educativos. Incluyen el funcionamiento del grupo o de la clase, la gestión y financiación de los centros o los contextos sociales y culturales.
- Conocimiento de las finalidades, propósitos y valores de la educación y sus fundamentos filosóficos e históricos.
- Conocimiento del contenido (*Content Knowledge*, CK).
- Conocimiento del currículo. Abarca los conocimientos curriculares y el dominio de los materiales y los programas que sirven como herramientas en el oficio del profesor.
- Conocimiento didáctico del contenido (*Pedagogical Content Knolewdge*, PCK). Se trata de una amalgama entre conocimientos de la materia y la pedagogía. Se incluyen los conocimientos sobre la materia

que tiene un docente y que no posee un investigador en la materia, son conocimientos propios del profesor. Mediante este conocimiento se llega a una comprensión de cómo determinados temas se organizan, se representan, se adaptan a los distintos intereses y capacidades de los alumnos y se preparan para la instrucción.

La principal aportación teórica de Shulman es identificar y señalar la importancia del conocimiento didáctico del contenido (PCK), que se define a partir del conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico general. Según Shulman, el docente tiene que conocer las mejores explicaciones, las mejores ilustraciones o los mejores ejemplos; pero también conocer las dificultades, los errores más habituales en los alumnos y los conocimientos previos que habitualmente tienen sobre un determinado tema Arce et al. (2019).

2.10.2. El conocimiento tecnológico en la educación (TPACK)

Los trabajos de Shulman han tenido un fuerte impacto en la investigación en formación del profesorado. Distintos investigadores han tratado de ampliar ese modelo. Mishra y Koehler (2006) incluyen el conocimiento tecnológico como un tercer ámbito igual de importante que el conocimiento pedagógico y el conocimiento del contenido, creando así el *modelo TPACK (Technological Pedagogical Content Knowlwdge)*. Este modelo está motivado en parte por las directrices curriculares oficiales actuales que hacen necesaria la introducción de las herramientas tecnológicas y de la competencia digital a desarrollar. El *conocimiento pedagógico del contenido (TPACK)* es el contenido que surge de la intersección de los tres dominios: el matemático, el pedagógico y el tecnológico(Arce et al., 2019). Se representa en la figura 2.2 el esquema de los dominios y subdominios que forman el TPACK.

¿Qué podemos entender por tecnología?

Cuando hablamos de tecnología, normalmente pensamos en las TIC, pero la tecnología se puede entender como cualquier material, por ejemplo, los materiales manipulativos, o cualquier tipo de técnica que sirva para alcanzar un fin determinado.

Una de las acepciones del término *tecnología* en el diccionario de la RAE es la siguiente: "conjunto de teorías y de técnicas que permiten el aprovechamiento práctico del conocimiento científico".

A la vista de esta definición, las actividades lúdicas y los juegos son una teccnología, por lo que las consideraremos dentro del conocimiento tecnológico del contenido.

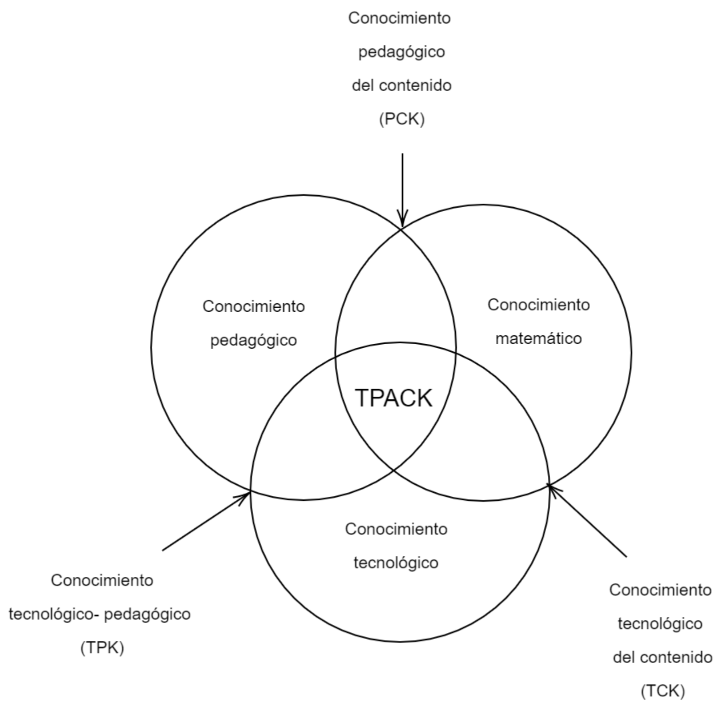


Figura 2.2: Esquema del marco TPACK.
Elaboración propia copiado de Arce et al. (2019)

2.11. Modelos de conocimiento del profesor de matemáticas

La aparición de la noción del conocimiento didáctico de matemáticas supuso un avance importante en la investigación en la formación de los profesores de matemáticas. A partir del modelo de Shulman, se han propuesto algunos otros modelos que intentan superar sus limitaciones. Presentaremos aquí dos modelos, el conocimiento matemático de la enseñanza (Mathematical Knolewdge for Teaching, MKT) y el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Mathematics Teachers' Knowledge, MTSK).

2.11.1. Conocimiento matemático para la enseñanza (MKT)

Un equipo de investigadores de la Universidad de Michigan liderados por Deborah Ball analizó con detalle las prácticas de una gran cantidad de profesores de Educación Primaria y de Educación Secundaria desde un enfoque empírico, mediante la observación directa, el análisis de vídeos y la realización de entrevistas.

La propuesta del equipo de Ball engloba el conocimiento del contenido (CK) y el conocimiento didáctico del contenido (PCK) en una categoría de conocimiento mayor, el *conocimiento matemático para la* *enseñanza* (MKT, por sus siglas en inglés). Mediante el análisis de las prácticas de los distintos profesores de matemáticas Ball et al. (2008) dividen cada una de estas dos categorías en tres dominios distintos. El modelo MKT presenta avances con respecto al modelo de Shulman por ser el resultado de una investigación empírica. Además se detallan mejor las categorías referidas al CK y al PCK y se dentro de ellas introduce la dimensión curricular.

Los subdominios referidos al conocimiento del contenido (CK) propuestos por Ball et al. (2008) son los siguientes:

- *Conocimiento común del contenido*, (CCK). Conocimiento matemático, es decir, los conceptos, los procedimientos o las propiedades que posee cualquier persona con formación matemática, que son utilizados no exclusivamente por los docentes. Los profesores hacen uso de este conocimiento cuando resuelven correctamente una tarea, cuando reconocen que la respuesta de un alumno es correcta o incorrecta o cuando en emplean correctamente los términos y las notaciones matemáticas en la pizarra.

- *Conocimiento especializado del contenido*, (SCK). Aquí se incluye aquel conocimiento que sólo es empleado en contextos de enseñanza de las matemáticas y que no es necesario en otros contextos. Por ejemplo, el análisis de los motivos matemáticos por los que se producen errores en una tarea o evaluar el alcance que puede tener un procedimiento estándar de resolución de un problema.

- *Conocimiento del horizonte matemático*, (HCK). Conocimiento que aparece cuando el profesor se da cuenta de cómo se encuentran conectados los contenidos con los contenidos de cursos posteriores o con los contenidos de las matemáticas avanzadas, e intenta orientar la instrucción en ese curso para ayudar a los alumnos a la posterior adquisición de los nuevos conocimientos.

Ahora describiremos brevemente en qué consisten los tres subdominios incluidos en la categoría de conocimiento didáctico del contenido (PCK).

- *Conocimiento del contenido y la enseñanza*,(KCT). Ball et al. (2008) indican que muchas de las tareas de la práctica docente están relacionadas con el diseño instruccional. En este dominio se mezclan el conocimiento sobre las matemáticas y el conocimiento sobre la enseñanza para afrontar tareas dónde se tiene que dominar un conocimiento matemático específico y comprender las cuestiones pedagógicas que afectan al aprendizaje de los alumnos. Habitualmente, se emplea para secuenciar unos contenidos determinados, elegir un ejemplo o una actividad para empezar un tema o explicación, o cuando proponer una tarea que permita el avance del aprendizaje.

- *Conocimiento del contenido y de los estudiantes*,(KCS). Como indican Ball et al. (2008), éste es el conocimiento que permite afrontar las tareas que “requieren una interacción entre la comprensión de la matemática específica y la familiaridad con los estudiantes y su pensamiento matemático”(p.401). Aquí se incluyen el conocimiento que permite a los profesores anticiparse a lo que los alumnos piensan y lo que encuentran confuso, prever si un determinado ejemplo puede interesarles y motivarles o la dificultad de las tareas, o poder interpretar su pensamiento incluso si no lo expresan totalmente. También permite conocer los errores y las dificultades de los alumnos para cada contenido (Arce et al., 2019).

- *Conocimiento del contenido y del currículo*, (KCC). Es el conocimiento sobre el plan de estudios de matemáticas, de las normativas sobre su enseñanza y de los programas vigentes.

2.11.2. Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)

El modelo MKT supuso un gran avance, por ejemplo, no tiene en cuenta las creencias de los docentes sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje, lo que influye de forma considerable en las acciones del profesor y de su desempeño profesional. Algunos investigadores no tienen claro que conocimientos deben incluirse en el conocimiento especializado del contenido, SCK.

Un equipo de investigadores de la Universidad de Huelva, liderados por José Carrillo han organizado, desde hace dos décadas, un grupo de trabajo colaborativo con profesores de matemáticas de distintos niveles para analizar el conocimiento utilizado durante su práctica. Las investigaciones realizadas les han llevado a modificar el modelo MKT, asumiendo que la especialización del conocimiento afecta a todos los dominios del modelo, no solo al SCK. Con ello han reestructurado las categoría del conocimiento del contenido del MKT, refinar las definiciones de los subdominios y proponer descriptores para mejorar la identificación de conocimientos en la práctica.

En Arce et al. (2019) se explica el modelo que diseñaron Carrillo et al. en 2018, llamado modelo del *conocimiento especializado del profesor de matemáticas* o modelo MTSK (Mathematics Teachers’ Specialised Knowledge). Aquí presentamos los tres subdominios correspondientes al MK, incluyendo los descriptores de ellos.

- *Conocimiento de los temas* (KoT). Este subdominio describe qué y de que manera el profesor sabe los temas que enseña. El subdominio está formado por el profundo conocimiento de los temas matemáticos, tales como los contenidos conceptuales, las propiedades y sus fundamentos matemáticos o los procedimientos relacionados con un contenido, las representaciones asociadas a dichos contenidos (por ejemplo, gráficas, algebraicas, aritméticas o verbales). Se contemplan dentro del KoT aspectos fenomenológicos como los contextos y las situaciones problemáticas que se resuelven con ellos, incluyendo aplicaciones en la vida cotidiana.

- *Conocimiento de la estructura de las matemáticas* (KSM). Se trata del conocimiento del profesor sobre las conexiones de tipo interconceptual, entre los distintos contenidos matemáticos (las conexiones dentro de un mismo contenido se incluyen en el subdominio anterior, KoT). Estos autores distinguen cuatro tipos de conexiones. Dos son de naturaleza temporal, basadas en la conexión de un contenido con otro más simple o con otro más complejo. Las otras son de tipo auxiliar, que se dan cuando tiene lugar la participación de un contenido en otro mayor o transversal, cuando en varios contenidos se encuentra implícitamente un contenido común.

- *Conocimiento de la práctica matemática*(KPM). Se incluyen aquí los conocimientos de los profesores de matemáticas sobre la práctica matemática, sobre el propio trabajo de construir matemáticas. Es decir, conocimientos sobre definir, ejemplificar, razonar, demostrar, comunicar o usar estrategias para resolver problemas.

Para el dominio PCK, se exponen aquí los subdominios y los descriptores propuestos por Carrillo et al.(2018) citados por Arce et al. (2019):

- *Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* (KMT). Se incluyen los conocimientos específicos que se relacionan con la enseñanza de las matemáticas. Se consideran tres descriptores de conocimientos en este subdominio. Uno general, sobre teorías de enseñanza de las matemáticas y dos específicos, sobre conocer y evaluar críticamente distintos recursos, técnicas, tareas o metáforas para facilitar la comprensión de un determinado conocimiento.

- *Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas* (KFLM). Comprende el conocimiento relacionado con las características relativas al aprendizaje de las matemáticas, centrándose en el contenido matemático más que en el propio alumno. Aquí se consideran cuatro descriptores: conocer las teorías de aprendizaje matemático que permitan entender el proceso seguido al desarrollar la comprensión de diferentes contenidos, conocer los errores y las dificultades que puedan cometer los estudiantes durante el aprendizaje de un contenido determinado, percibir las diferentes maneras en las que los estudiantes interactúan con el contenido matemático y tener en cuenta los aspectos emocionales involucrados en el aprendizaje de las matemáticas.

- *Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas* (KMLS). Se trata del conocimiento de cuáles son los contenidos matemáticos que un alumno debe lograr en un nivel particular, junto con lo que ha estudiado previamente y lo que debería conseguir niveles posteriores. Este conocimiento proviene de las especificaciones del currículo vigente y de investigaciones u opiniones de expertos en logros de aprendizaje. Los tres descriptores considerados aquí son los resultados de aprendizaje esperados, el nivel esperado de desarrollo de conceptos y procedimientos y la secuenciación de los temas.

La figura siguiente representa un esquema del modelo y sus subdominios. En ella se observa la división en dos dominios distintos: el conocimiento matemático, MK, que se corresponde con el CK de los anteriores modelos y el conocimiento didáctico del contenido, PCK. Además se observa la inclusión en el centro de las creencias sobre las matemáticas y sobre su enseñanza y aprendizaje, pues afectan a todos los subdominios del conocimiento del profesor.

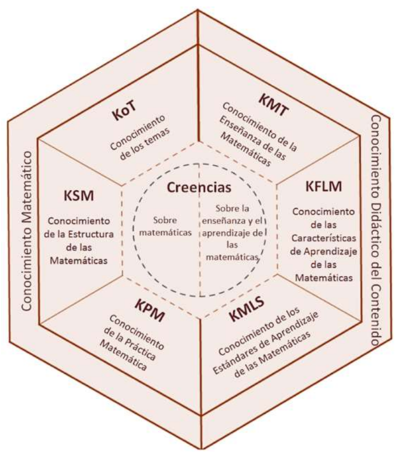


Figura 2.3: Componentes del modlelo MTSK.
Fuente: Sosa, Flores Medrano y Carrillo (2016)

2.12. Algunas metodologías para la enseñanza de las matemáticas

En esta sección se van a presentar algunas metodologías para enseñar matemáticas que están adquiriendo relevancia en Educación Secundaria, como el *aprendizaje basado en problemas y proyectos* o el llamado *método Singapur*

2.12.1. Aprendizaje basado en problemas y proyectos

En el currículo de la LOMCE, el aprendizaje basado en problemas aparece ligado a los proyectos de investigación. En la página 48 del RD 1105/2014 se dice “ La resolución de problemas y los proyectos de investigación constituyen ejes fundamentales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas”. Pero este documento legal no ofrece a los docentes pautas para poder emplear esta metodología, sólo en los contenidos y en los criterios de evaluación de algunas asignaturas de Bachillerato aparece información adicional sobre los proyectos de investigación. Además, en ciertos libros de texto y en literatura sobre el tema se encuentran tareas, a veces llamadas problemas, otras investigaciones, otras proyectos, etc. (Arce et al., 2019).

Los proyectos y las investigaciones son tareas *matemáticamente ricas*, puesto que ofrecen a los estudiantes la posibilidad de aprender nuevos contenidos matemáticos o de desarrollar procesos como las habilidades analíticas, la creatividad o la metacognición. Son tareas abiertas que admiten distintas respuestas correctas. No se proporciona a los alumnos una guía que deban seguir para completar estas tareas, los estudiantes deben elaborar planes para su resolución, establecer objetivos parciales, elaborar conjeturas y contrastarlas. El profesor tiene que monitorizar y tutelar el establecimiento y el alcance de éstos pasos (Arce et al., 2019).

Las tareas de investigación matemática son más abstractas que los proyectos y poseen un alto nivel de demanda cognitiva, basándonos en la clasificación de **?**. Pueden ser ampliadas y generalizadas a otras actividades posteriores. A veces, la resolución de un problema puede dar lugar a una investigación.

Los proyectos son tareas a largo plazo, situadas en contextos reales y significativas para el estudiante. No es necesario que tengan un nivel elevado de demanda cognitiva, aunque requieren la búsqueda de información o datos en fuentes externas. En los proyectos, los alumnos tienen que realizar un informe final incluyendo distintos tipos de lenguajes, como el algebraico, el gráfico, el geométrico o el estadístico; y presentar el trabajo delante de toda la clase. Es aconsejable que los proyectos se realicen en grupos colaborativos. Dado que están contextualizados en la vida cotidiana se pueden trabajar interdisciplinarmente con otras asignaturas de ciencias o ciencias sociales(Arce et al., 2019) e incluso con las artes o la música. Es una metodología especialmente apropiada para trabajar la modelización matemática y la estadística.

2.12.2. La enseñanza de las matemáticas en Singapur

Desde la década de los noventa, Singapur ocupa los primeros puestos en las distintas pruebas internacionales, como TIMSS o PISA. Arce et al. (2019). Distintos investigadores, como Kaur señalan que éste buen rendimiento que presentan los estudiantes de Singapur se debe a la reforma del currículo de matemáticas realizada en la década de los noventa y que han mantenido con muy pocas modificaciones hasta la actualidad (Arce et al., 2019).

Algunas características de la enseñanza de las matemáticas en Singapur son las siguientes:

- Características del currículo. Tiene menos bloques de contenidos que el currículo español. Muchos de los contenidos se imparten en un solo curso y se pone énfasis en los aspectos conceptuales y los procedimentales. Los libros de texto están próximos a las orientaciones didácticas del currículo oficial.

- La resolución de problemas. Principal foco de atención de la acción del profesor en clase. Se prriorizan los procesos a los resultados y se promueve la comprensión antes que la repetición. Para la la resolución de problemas se resaltan los siguientes aspectos: actitudes, metacognición, procesos, habilidades y conceptos.

- Basándose en las ideas de Bruner, se fomenta una metodología de resolución basada en tres fases secuenciadas con diferentes tipos de representación: concreta, donde los estudiantes emplean materiales manipulativos, pictórica, donde los estudiantes emplean modelos gráficos o pictóricos; y finalmene, abstracta, donde los estudiantes traducen las experiencias anteriores con signos y símbolos matemáticos.

2.13. Atención a la diversidad en clase de matemáticas

Siempre existe la creencia de que la atención a la diversidad significa apoyar a los alumnos con peor rendimiento académico. En parte es cierto, pero no se trata sólo de eso. La atención a la diversidad es un verdadero reto para el docente.

En las aulas hay estudiantes con distintos niveles de conocimientos, de capacidades y de actitudes hacia las matemáticas. Además, en muchas ocasiones, se puede añadir la diversidad de contextos sociales, económicos y culturales de los alumnos.Teniendo en cuenta toda la diversidad que puede existir en un aula de matemáticas, el docente debe dedicar mucha preparación de las tareas y de las estrategias instruccionales (Arce et al., 2019). Sin embargo, podemos ver la heterogeneidad en el aula desde otra perspectiva, pues ofrece oportunidades para generar el aprendizaje en matemáticas (Prediger, 2005).

Todas las leyes educativas desde la LOGSE han tenido en cuenta la diversidad. Actualmente, la LOMCE, dedica el artículo 9 al “ alumnado con necesidad específica de apoyo educativo” y los artículos del 16 al 19 a presentar medidas para la a atención a la diversidad en Educación Secundaria que pueden ser tomadas por las Administraciones o los centros educativos. Son medidas de distintos tipos, como las adaptaciones curriculares o los programas de mejora del aprendizaje y del rendimiento (PMAR) Arce et al. (2019).

Ahora nos centramos a la atención a la diversidad a nivel del aula, es decir, el ámbito de un profesor que trata su clase diversa en cuanto a las capacidades o contextos sociales, culturales, económicos o étnicos. Herzig (2005) indica que la forma para que los alumnos de diversos colectivos alcancen el objetivo de aprender matemáticas de manera significativa es fomentar su participación en las actividades realizadas durante el curso y desarrollar un sentido de pertenencia a la comunidad de prácticas formada por el profesor y los alumnos. Según Herzig (2005) y NCTM (sf) algunas medidas para fomentar la participación son las siguientes:

- Respetar los ritmos de aprendizaje de cada estudiante.
- Conocer el entorno individual del alumno y utilizar ese conocimiento para conectar e integrar a los contenidos a enseñar y los contextos de las tareas con los verdaderos intereses de los estudiantes.
- Implementar tareas ricas, abiertas y flexibles que den lugar a respuestas y estrategias distintas, donde surjan oportunidades de aprendizaje.
- Mantener las expectativas altas para todos los estudiantes y valorar las distintas ideas, estrategias y procedimientos utilizados por los estudiantes durante la resolución de los problemas.
- Gestionar de forma adecuada las preguntas y las técnicas de escucha en clase. Dejar tiempo de respuesta suficiente para que todos los alumnos participen y aprovechar las intervenciones para enriquecer el aprendizaje.
- Identificar los prejuicios que puedan haberse adquirido para posteriormente olvidarlos.
- Emplear distintas metodologías activas y distintos recursos para adaptarse a las capacidades y necesidades de los estudiantes. El trabajo en grupos colaborativos o cooperativos puede ser útil para el aprendizaje mutuo. Como este TFM trata en sobre la introducción al álgebra mediante actividades lúdicas y juegos, parece conveniente destacar que éstos pueden generar dinámicas que favorecen la participación en el aula, como se dice en (Civil et al., 2000).
- Romper algunos de los estereotipos dominantes sobre las matemáticas. Un estereotipo común es el de ser un varón blanco de clase media, con falta de habilidades sociales y sin intereses más allá de las matemáticas. Estos estereotipos desincentivan la participación de los alumnos, y alejan a estudiantes talentosos que no desean ser catalogados de esa manera.
- Planificar la evaluación para que todos los estudiantes tengan oportunidades de demostrar la comprensión de sus conocimientos.

2.14. El razonamiento, la argumentación y la demostración en matemáticas

Según la RAE, un *razonamiento* es una serie de conceptos encaminados a demostrar algo o a persuadir o mover a oyentes o lectores, una *argumentación* es la acción de aducir, alegar, dar argumentos, y una *demostración* es una prueba de algo, partiendo de verdades universales y evidentes. Estos tres procesos son diferentes pero están íntimanente ligados en matemáticas, pues en los tres se encandenan conceptos, argumentos o verdades mediante inferencia lógica (Arce et al., 2019).

2.14.1. Tipos de razonamiento matemático

El razonamiento es un proceso fundamental en matemáticas que se puede realizar de tres formas distintas. Estas tres formas distintas de proceder dan lugar a los tres tipos de razonamiento: el *razonamiento abductivo,* el *razonamiento inductivo* y *razonamiento deductivo.*

Veamos en que consisten los tres tipos de razonamiento

- *Razonamiento abductivo.* Consiste en explicar la validez de una explicación a partir de dar por supuesto un conocimiento del que no se tiene certeza y que se piensa como hipótesis o conjetura plausible.

  Ejemplo 2.7 (Una versión del chiste del viaje en tren por Escocia.)**.** Van un ingeniero, un físico y un matemático en tren por Escocia una vaca pastando desde la ventanilla. A esta vaca sólo le ven un lado.

  Exclama el ingeniero:

  -¡en Escocia todas las vacas son marrones!

  A lo que el físico reacciona con lo siguiente:

  - querrás decir que algunas vacas escocesas son marrones.

  Y, finalmente, dice el matemático:

  -No. Lo único que sabemos es que existe al menos una vaca en Escocia tal que al menos uno de sus costados es marrón.

  En este chiste, el razonamiento que hace el ingeniero es claramente abductivo dando por supuesto que todas las vacas escocesas son marrones al ver sólo un lado de una única vaca escocesa. También el razonamiento del físico es abductivo, pues afirma con seguridad que algunas vacas escocesas son marrones viendo un sólo costado de la vaca.

- *Razonamiento inductivo* (no confundir con el método de inducción matemática). Consiste en mostrar uno o varios casos particulares para los cuales se cumple una afirmación y a partir de los que se establece la validez de dicha afirmación.

  Ejemplo 2.8 (La Conjetura de Goldbach)**.** Todo número par mayor que dos puede escribirse como suma de dos números primos.

  Se observa que $4 = 2 + 2, 6 = 3 + 3, 8 = 3 + 5, \cdots$, por lo que parece que todo número par mayor que 2 se puede expresar como la suma de dos números primos.

- *Razonamiento deductivo.* Consiste en llegar a conclusiones a partir del uso de unos datos y la aplicación de un principio, propiedad o conocimiento que actúa como regla de inferencia y que debe ser considerado válido.

  Ejemplo 2.9. Por ejemplo la demostración de que la suma de los ángulos de un triángulo es 180º. En general, la demostración de cualquier propiedad, proposición o teorema matemáticos.

El único razonamiento válido desde una perspectiva matemática es el razonamiento deductivo. Pero, dado que en la matemática escolar, muchos razonamientos de tipo deductivo son inalcanzables para una gran parte de los alumnos cobran relevancia los razonamientos abductivo e inductivo, ya que permiten a los alumnos explorar, conjeturar y generalizar ciertos resultados. Son, por tanto, una parte importante de la práctica matemática y son un paso previo para la justificación esos resultados.

Los razonamientos abductivos e inductivos no tienen porque conducir a informaciones verdaderas, ni necesariamente falsas. Sin embargo, dan pie a realizar afirmaciones en clase y a generar debates acerca de ellas para comprobar su certeza o su falsedad por lo que promueve la búsqueda de justificaciones que induzcan a la necesidad de un razonamiento deductivo. Si los razonamientos inductivos o abductivos dan lugar a una afirmación verdadera, entonces la búsqueda de la confirmación de esa veracidad se vuelve una tarea más compleja. (Arce et al., 2019).

2.15. La demostración en el currículo de Educación Secundaria

Desde la Educación Primaria, en los documentos curriculares correspondientes se considera ciertos elementos relacionados con los procesos de razonar, argumentar y demostrar; principalmente relacionados con los procesos de resolución de problemas. Uno de los estándares de aprendizaje evaluables es que el alumno elabore conjeturas y busque argumentos que las validen o refuten para acercarse al método científico. En la Educación Secundaria se propone el desarrollo de tales habilidades asociadas al quehacer matemático.

En el currículo correspondiente a la LOMCE (en la Orden ECD/1361/2015 que establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato), se hace referencia a pensar, razonar, argumentar de forma rigurosa y a modelar. El currículo de matemáticas español está de acuerdo con la filosofía de los *Principios y estándares para la educación matemática* (NCTM, 2003).

2.16. Los esquemas de prueba del alumno

La demostración matemática, aunque es el texto argumentativo por excelencia, no tiene por que convencer a los estudiantes de Educación Secundaria de que una afirmación determinada es cierta. La demostración es un razonamiento deductivo que probablemente sea excesivamente difícil para algunos alumnos. Además puede suceder que no entiendan la necesidad de demostrar un enunciado para garantizar su veracidad. Diversos autores como Harey y Sowder e Ibañes y Ortega citados por Arce et al. (2019) han investigado sobre los esquemas de prueba de los alumnos. Un *esquema de prueba* de una persona se trata de lo que constituye la persuasión y el convenciminto para esa persona, entendiendo el *convencimiento* como un proceso utilizado por un individuo para eliminar las dudas sobre la certeza de una afirmación y la *persuasión* como el proceso utilizado por una persona para eliminar las dudas de otras sobre la certeza de una afirmación. La definición de esquema de prueba engloba distintas formas de convencimiento por parte de los alumnos. En Arce et al. (2019) se indican las siguientes:

- Esquemas de prueba de *convicción externa.* Los alumnos eliminan sus dudas a partir de elementos ajenos al razonamiento. Se clasifican en *rituales, autoritarios* y *simbólicos.* Este tipo de esquemas deberían ser sustituidos por otros que impliquen razonamiento.

- Esquemas de prueba *empíricos.* Se trata de esquemas en los que las conjeturas se validan o rechazan en función de hechos físicos o experiencias sensoriales. Pueden ser *experimentales* o *inductivos*, dependiendo si los alumnos necesitan manipulación física, real o virtual para argumentar o evaluar cuantitativamente algunos casos particulares. Los razonamientos inductivos pueden ser *auténticos* o *falsos*, de *uno varios casos* y *sistemáticos* o no *sistemáticos.*

- Esquemas de prueba *analíticos.* Son las propias demostraciones matemáticas, pues son aquellos en los que la validación de las conjeturas tiene lugar a partir de la deducción lógica. Se clasifican en *transformacionales* o *axiomáticos.* Los primeros consisten en la transformación lógica de imágenes por medio de la deducción. Los segundos son aquellos en los que el estudiante entiende que una demostración matemática viene dada por medio de términos ya definidos o axiomas.

Por último, cabe mencionar un tipo de razonamiento que no se ha incluido en la clasificación de los esquemas de prueba que se denomina *prueba preformal.*. Este tipo de razonamiento fue estudiado en profundidad por González (2012).

Una prueba preformal es un tipo de razonamiento, que podría formalizarse a una prueba formal, y en cual se refleja la idea de la demostración. Consiste en presentar los pasos de una demostración formal a partir de un ejemplo concreto. En este tipo de pruebas el nivel de abstración necesario no es tal alto como en las pruebas formales, pero permite reflejar el proceso de la demostración.

Ejemplo 2.10. Dado que en 2º de ESO el nivel de abstracción no es muy alto, durante el Practicum se ha tenido la tenido la oportunidad de realizar la demostración de la imposibilidad de dividir por cero. A partir de un ejemplo concreto se ha llegado a la conocida conclusión de que $1 = 2$.

2.17. Los esquemas de prueba en los libros de texto

Los libros de texto muestran esquemas de prueba. Estos son los procesos que aparecen en los libros de texto que tienen como finalidad convencer al lector de la veracidad de los resultados, y que se pueden utilizar para persuadir de dicha veracidad. Heredan características de las pruebas preformales y de los esquemas de prueba personales (Arce et al., 2019).

La demostración matemática ha ido desapareciendo de los libros de texto y se ha ido sustituyendo por demostraciones de tipo inductivo.

2.18. Funciones de la demostración en matemáticas

Las funciones de la demostración matemática fueron descritas primero por Bell (1976) y ampliadas más tarde por De Villiers (1993). Son las siguientes:

- Función de *verificación.*
- Función de *explicación.*
- Función de *sistematización.* Se trata de la organización de los resultados dentro de un sistema de axiomas, conceptos fundamentales y teoremas.
- Función de *descubrimiento.* Ocurre cuando en la demostración de un teorema hace que se descubran nuevos resultados.
- Función de *comunicación.* Se refiere a la transmisión del conocimiento matemático.

Según De Villiers la convicción nace de la intuición o de razonamientos de tipo abductivo o inductivo que llevan a una persona a creer en la veracidad de un resultado y a intentar realizar la demostración para establecerlo. Hersh (1993) distingue entre la finalidad que tiene la demostración para los matemáticos, que es la de convencer, y la finalidad que tiene en el aula, que es la de explicar porque un resultado es cierto. Pero las matemáticas que se estudian a nivel escolar consisten en el estudio de resultados que ya se han demostrado siglos atrás y cuyo convencimiento, por tanto, se puede producir de forma autoritaria. Es necesario profundizar en el por qué de una afirmación (Arce et al., 2019).

La función de sistematización también es muy importante en Educación Secundaria. Dado que los currículos se desarrollan en espiral, cuando se presentan los contenidos se suele hacer de una forma más informal; pero en niveles posteriores los contenidos se tratan con más profundidad, más rigor y se establecen relaciones entre ellos. La demostración de un determinado teorema necesita de esos resultados previos, por lo que se produce una sistematización (Arce et al., 2019).

Las funciones de comunicación y descubrimiento también tienen gran importancia. Sobre la primera cabe destacar el papel de las demostraciones como portadoras del conocimiento matemático, de las herramientas, estrategias y conceptos necesarios para la resolución de problemas. Esa comunicación debe ser fomentada en el aula como una práctica social del razonamiento. Sobre la función de descubrimiento, es importante destacar que dado que las demostraciones son portadoras de conocimiento matemático, sirven para descubrir métodos o resultados nuevos. (Arce et al., 2019).

2.19. Tareas matemáticas

En clase de matemáticas, una gran parte del tiempo está destinada al trabajo del estudiante, de forma individual o en grupo. Vamos a denominar *tareas* a todas las propuestas de acción que un profesor formula a sus alunmos, con una determinada intencionalidad, en su proceso de aprendizaje de las matemáticas. Las tareas son fundamentales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas al determinar el tipo de actividad matemática, por ejemplo contenidos o procesos, que se invita al estudiante *a priori* a poner en juego en su resoluciónArce et al. (2019).

Las tareas propuestas por un profesor se convierten en generadoras de aprendizaje en los estudiantes. Las tareas pueden tener una gran diversidad de formas, por lo que esas oportunidades pueden diferir mucho. Arce et al. (2019).

2.19.1. Demanda cognitiva de una tarea. La clasificación de Smith y Stein

Un aspecto fundamental es valorar el nivel y el tipo de pensamiento que una tarea puede provocar en el estudiante. Eso se denomina *demanda cognitiva* de la tarea(Smith y Stein, 1998).

Resumimos aquí las características de los cuatro niveles de *demanda cognitiva* de una tarea enunciados por Smith y Stein (1998).

- *Nivel 1: tareas de memorización.* Se trata de tareas que consisten en la reproducción de definiciones, hechos, fórmulas o reglas previamente trabajadas o aprendidas. Tienen un propósito claramente establecido, sin ambigüedades y en las que no existe conexión con los conceptos o con el significado ímplicito de los hechos, fórmulas o reglas reproducidas.

- *Nivel 2: tareas de procedimientos sin conexiones.* Son tareas algorítmicas en las que se pide la utilización de un procedimiento de forma muy evidente. La finalidad de estas tareas es la producción de respuestas correctas más que el desarrollo de comprensión matemática. Estas tareas no requieren explicaciones, como mucho el procedimiento usado.

- *Nivel 3: tareas de procedimientos con conexiones.* Se centran en el significado de un concepto o procedimiento, buscando el desarrollo de la comprensión de los conceptos o ideas matemáticas. Estas tareas sugieren pautas a seguir de forma explícita o implícita, aunque son procedimientos más generales que tienen conexión con el significado o con las distintas representaciones de un concepto. Requieren cierto nivel de demanda cognitiva al necesitar establecer una relación con las ideas conceptuales subyacentes para poder realizar correctamente la tarea.

- *Nivel 4: Tareas de "hacer matemáticas".* Estas tareas necesitan un pensamiento complejo y no algorítmico. No sugieren ningún para seguir ni responden a un camino previamente definido o ensayado. Son tareas que exigen la exploración y la comprensión de los conceptos, procesos y relaciones matemáticas; y la autorregulación del propio proceso cognitivo: acceso y selección de conocimientos y experiencias relevantes, análisis de las posibles estrategias de resolución diseñadas para la tarea y sus condiciones. Por todas estas razones, se trata de tareas de alta demanda cognitiva y que pueden pueden provocar una ansiedad inicial dada la naturaleza impredecible del proceso de resolución requerido.

Muchas veces se consideran dos grandes niveles. El primero de ellos, de *baja demanda cognitiva*, formado por los niveles 1 y 2, y el segundo, de *alta demanda cognitiva*, formado por los niveles 3 y 4.

Un profesor de matemáticas debe de tener presente el constructo de a demanda cognitiva para el diseño o la selección de tareas. Dependiendo de los objetivos de aprendizaje que se pretendan alcanzar, la proporción de tareas de los diferentes niveles puede variar. Si un docente quiere que sus alumnos desarrollen agilidad en algún procedimiento o destreza (por ejemplo, en la resolución de ecuaciones) será adecuado proponer tareas de procedimientos sin conexiones. Pero, el profesor debe proponer tareas de los niveles superiores para desarrollar la comprensión de los conceptos Arce et al. (2019).

Cabe señalar que las tareas que en un principio eran de “hacer matemáticas” para los alumnos, después de que el docente las resuelva bajan al nivel inferior. Decía cierto profesor: “lo que al principio es idea feliz, después se convierte en rutina”.

Capítulo 3

Aprendizaje y enseñanza del álgebra

En los primeros cursos de la ESO se introduce el lenguaje algebraico, para generalizar propiedades y simbolizar expresiones y se comienzan a estudiar las ecuaciones de primer grado, las ecuaciones de segundo grado y los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Este capítulo se dedica a tratara algunos aspectos sobre la enseñanza del álgebra en Educación secundaria.

3.1. Los enfoques del álgebra escolar

Cuando los estudiantes se enfrentan por primera vez al álgebra, ven otra cara de las matemáticas. Ya no son todo números. Aparecen las letras. El álgebra habitualmente se identifica con de un lenguaje simbólico, se dedica al estudio de objetos como las incógnitas, los polinomios, las expresiones algebraicas o las matrices y se caracteriza por la emergencia de tareas de generalizació, transformación, justificación y modelización, asi como por la aplicación de nuevos procedimientos y técnicas para la resolución de tareas. El contenido de álgebra se ha mantenido más o menos estable en los documentos curriculares en los últimos años, no obstante, existen distintos enfoques o interpretaciones del álgebra escolar.

Usukin (1988) indica que para identificar y clasificar diferentes concepciones del álgebra escolar, es necesario conocer el papel que tienen las letras como *variables*, entendidas como símbolos de una expresión que pueden ser sustituidos por cualquier elemento de un determinado conjunto de números (como los números reales, un subconjunto de ellos, o los números complejos) o por otros objetos matemáticos (como, por ejemplo las matrices u otras expresiones algebraicas) .

Usukin (1988) y Socas, Camacho, Paralea y Hernández citados por Arce et al. (2019) sugieren cuatro enfoques o interpretaciones del álgebra en el currículo escolar según el papel que juegan las variables.

- *Aritmética generalizada*. En este caso, el álgebra consiste en los procesos de generalización donde se utilizan las letras como números generalizados para identificar, revelar y describir patrones y estructura. Molina (2015) distingue dos tendencias. Por un lado, aritmética generalizada, que surge de identificar patrones y leyes numéricas relativas a la estructura aritmética, la cuál es en general "análoga a la estructura del álgebra" (p.2). Un ejemplo es el siguiente: $4^2 - 2^2$ lleva a la expresión $a^2 - b^2$). Por otro lado, el proceso de generalización de patrones asociados a situaciones no numéricas o situaciones numéricas específicas como los números figurados o el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.1.

$$1^3 + 2^3 = 9 = (1 + 2)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2$$

Esta secuencia nos lleva a la siguiente generalización

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$$

- *Resolución de ecuaciones.* Consiste en utilizar el álgebra para resolver problemas que pueden ser modelizados con ecuaciones. Las variables aparecen como incógnitas o constantes, cuyo valor, basándonos en el enunciado del problema, hay que averiguar. Esta es la razón por la que apareció y se desarrolló el álgebra a través de la historia. Dentro de esta interpretación también se incluyen las inecuaciones y los problemas de programación lineal.

- *Funcional.* Se trata del álgebra como el estudio de las relaciones entre cantidades variables. Para este enfoque, el álgebra es un medio para formular e investigar las relaciones entre las variables, lo que implica estudiar la covarianza entre ellas.

- *Estructural.* Este enfoque consiste en el estudio de las estructuras algebraicas, donde las letras son símbolos abstractos que pertenecen a estructuras algebraicas como grupos, anillos, cuerpos, espacios vectoriales o módulos.

3.2. El paso de la aritmética al álgebra. Cambios y rupturas en el pensamiento del alumno.

La introducción del álgebra provoca que los estudiantes cambien la manera de hacer y de pensar. Hasta ese momento, los alumnos están anclados en las formas de proceder de la aritmética.

Para desarrollar el pensamiento algebraico en estudiantes que están acostumbrados a trabajar en entornos aritméticos, Kieran (2004) sugiere lo siguiente:

- Centrarse en los aspectos relacionales, no sólo en el cálculo de una respuesta numérica.
- Trabajar de forma prioritaria la representación y posteriormente resolver el problema, no sólo resolverlo.
- Trabajar con números y letras.
- Replantearse el significado del signo igual y de los signos operacionales.

3.3. Las expresiones algebraicas como procesos y objetos

Las dificultades que se producen al pasar de la aritmética al álgebra se deben a la dualidad operacional-estructural de los conceptos. En la aritmética, se posee una versión de tipo operacional, donde los números solo pueden entenderse como objetos, mientras que en el álgebra los números pueden ser entendidos como objetos y como procesos. Por ejemplo, la expresión $2(x+1)$ puedes ser interpretada como un proceso de cálculo o secuencia de instrucciones del tipo " suma 1 y luego multiplica por 2", de naturaleza dinámica. Sin embargo, también puede ser entendida como objeto, desde una visión estructural, como el resultado de un cálculo de un número no especificado, como una función donde el número cambia en lugar de ser fijo o como una cadena de símbolos que puede ser manipulada y combinada con otras expresiones (Arce et al., 2019).

Para aquellos estudiantes que no sean capaces de comprender que una expresión algebraica como objeto, es difícil considerar que esa expresión pueda ser la solución de un problema puesto que el trabajo no dan el trabajo por terminado hasta que obtienen una solución numérica. Este tipo de fenómenos se denominan *necesidad de clausura* (Arce et al., 2019).

3.4. La interpretación de las letras

Una de las dificultades más grandes que tienen los estudiantes cuando comienzan a estudiar el álgebra es el uso y el significado de las letras. Éstas pueden tomar distintos valores, como incógnitas, números generalizados, argumentos, parámetros, etc. Las letras se utilizan habitualmente como etiquetas cuando hay que denotar, por ejemplo unidades de medida (10m) o cuando se trata de nombrar a un tipo de objetos (por ejemplo, hay 100 personas se denota como hay 100p). Esta interpretación tiene como consecuencia algunos errores al interpretar enunciados. Por ejemplo, el siguiente:

" En el instituto vamos a hacer una excursión. Por cada 100 estudiantes se necesitan 2 autobuses "

Esto podría ser denotado por $100e = 2a$. Pero la e es una etiqueta, no es una incógnita.

3.5. Las interpretaciones del signo igual

Knuth et al. (2006) distinguen dos tipos de interpretaciones que puede tener el signo igual. Por un lado la *comprensión operacional*, propia de la aritmética y que consiste en entender el signo igual como un botón de una calculadora. Por otro lado, la *comprensión relacional*, que es propia del álgebra y que se trata de entender al signo igual como un símbolo que relaciona dos expresiones algebraicas equivalentes.

Molina et al. (2009) distingue once interpretaciones del signo igual. En Arce et al. (2019) se destacan las siguientes:

- *Propuesta de actividad.* Tiene función operacional. El igual es como una tecla de calculadora. Se emplea en expresiones incompletas con una cadena de números o símbolos vinculados por operaciones a la izquierda del igual y un espacio vacío a la derecha.

  Ejemplo 3.2. $3 + 4 =$, $x^2(x - 3) =$

- *Operador.* De tipo operacional. El igual separa una cadena de operaciones que suelen situarse a la derecha y un resultado, que ha de situarse a la izquierda.

  Ejemplo 3.3. $3 + 4 = 7$, $x^2(x - 3) = x^3 - 3x^2$

- *Separador.* De uso erróneo, pero muy común en las producciones de los estudiantes. Las distintas expresiones deben de disponerse en columna o separarse mediante flechas de implicación.

  Ejemplo 3.4. $3x + 5 + 7x = 2 - 1 = 10x = -8$

- *Expresión de una identidad (equivalencia).* De tipo relacional. El igual relaciona dos representaciones numéricas, simbólicas o por definición.

  Ejemplo 3.5. $4 + 5 = 3 + 6$, $a + b = b + a$, $2x^2 + 4x = 2x(x + 2)$, $1000ml = 1l$

- *Expresión de una ecuación(equivalencia condicional).* De tipo relacional. Este significado del signo igual se da cuando la equivalencia es cierta para algún o algunos valores de x.

  Ejemplo 3.6. $x^2 - 1 = 0$

- *Expresión de una relación funcional o de dependencia.* De tipo relacional. El signo igual indica la relación o dependencia en funciones o fórmulas.

  Ejemplo 3.7. $y = x^2 + 1$ o $f(x) = x^2 + 1$, $A = \pi r^2$

- Aproximación. De tipo relacional. El signo igual relaciona una expresión aritmética y una aproximación de su valor numérico.

  Ejemplo 3.8. $\frac{1}{3} = 0,33$

Ejemplo 3.9. En el prácticum se ha podido observar la dificultad que tienen los alumnos al pasar de la interpretación del signo igual como un símbolo relacional y condicional a su interpretación como una relación de dependencia.

3.6. Las diferencias al resolver problemas aritméticos y algebraicos

Para Cid, existen diferencias entre resolver un problema aritmético y uno algebraico. En Arce et al. (2019), se contemplan las siguientes:

1. La resolución de los problemas aritméticos depende en todo momento del contexto, mientras que en la resolución algebraica existen fases contextualizadas y descontextualizadas.

2. En la resolución de problemas aritméticos, lo desconocido está al final del problema, al contrario que en los problemas algebraicos, dónde lo desconocido está al principio del problema.

3. El control de la validez de la resolución de un problema aritmético es semántico, el contexto permite justificar el proceso seguido para resolverlo. El control de la validez en un problema algebraico es semántico y sintáctico, pues existen fases contextualizadas y descontextualizadas.

Capítulo 4

Recursos para la iniciación al álgebra. Actividades lúdicas y juegos

En este capítulo presentaremos distintos tipos de recursos y actividades lúdicas útiles para para la introducción al álgebra de los alumnos de los primeros cursos de la Educación Secundaria.

4.1. Los materiales manipulativos

Los *materiales manipulativos* son materiales físicos que permiten manipular conceptos o propiedades matemáticas para que el alumno pueda tener experiencias concretas relacionadas con los conceptos y las propiedades, previas a la abstracción. No se deben confundir con los juegos o divertimentos matemáticos, en los que no tiene que haber necesariamente una manipulación, pero consideramos que este tipo de materiales sirven para realizar actividades lúdicas puesto que jugar con piezas físicas siempre es algo que a los alumnos les atrae y les parece novedoso en una asignatura de naturaleza abstracta, como las matemáticas.

El objetivo de las actividades que se realizan con materiales manipulativos no es ganar, sino que el alumno experimente con dichos materiales. Ejemplos de materiales manipulativos son las regletas de Cuisenaire, los bloques multibase, los ábacos, el tangram, los espejos de simetrías o cualquier otro recurso físico que permita tocar y tener experiencias físicas al alumno como pueden ser piezas realizadas con goma eva. Para la adquisición de muchos conceptos es realmente necesario el trabajo con materiales manipulativos. Existen los dos siguientes tipos de materiales manipulativos:

- Los materiales manipulativos *estructurados*, que han sido preparados con un fin educativo. Ejemplos de este tipo son las regletas, los espejos de simetría, los geoplanos o los bloques multibase.

- Los materiales manipulativos *no estructurados*, que no han sido concebidos inicialmente como un proósito educativo, pero que pueden ser utilizados para estudiar distintos conceptos. Ejemplos de este tipo de materiales son el tangram, los instrumentos de medida y de dibujo o el papel para plegar (papiroflexia).

No está muy claro donde clasificar algunos recursos, como la goma eva. En principi, es un material manipulativo no estructurado, pero, cuando cortamos la piezas, las preparamos para un determinado fin didáctico, por ejemplo, la construcción de *algebra tiles* para resolución de ecuaciones, y entonces este material se convierte en un material manipulativo estructurado.

Existen también los materiales manipulativos *virtuales*, con los que se trabaja en el ordenador. Por ejemplo, las *algebra tiles* virtuales. Dado que se hace complicado trabajar con materiales físicos cuando los grupos son muy numerosos porque el profesor tendría que pasarse por las mesas para explicar la actividad o explicarla en la pizarra de manera pictórica con tizas de colores, las *algebra tiles* virtuales pueden ser una opción. Disponiendo de una pizarra digital interactiva (PDI), el profesor puede manipular en ella y los alumnos en su ordenador. Otra opción es que el docente utilice la PDI y los alumnos material manipulativo físico.

4.2. Lecturas con contenido matemático y recursos audiovisuales

El uso de lecturas en clase de matemáticas tiene un doble papel. Por un lado, sirve para que los alumnos mejoren la comprensión lectora y mejoren la competencia lingüística. Por otro lado, las lecturas con contenido matemático contribuyen a humanizar esta asignatura bien porque se relaciona con contextos reales y se dan a conocer personajes históricos relacionados con el desarrollo de esta ciencia o bien porque se les presentan los conceptos matemáticos de una forma más amena (Arce et al., 2019). Estas lecturas pueden ser, por ejemplo, libros de divulgación matemática, de historia de las matemáticas o cómics relacionados con las matemáticas.

La historia de las matemáticas sirve para presentar que no son un constructo cerrado, sino que están en constante evolución, que la matemática es razonamiento y que evolucionó debido a que la humanidad pretendía resolver problemas que le surgían. A partir de estos problemas se han ido formando las diferentes teorías y han ido evolucionando los diferentes métodos. La historia se puede introducir en clase mediante, por ejemplo, mediante anécdotas (Arce et al., 2019).

Las películas, series o vídeos suelen despertar el interés y la curiosidad por aprender los conceptos en los estudiantes.

Todo material que rompa con la rutina habitual hará que los alumnos estén más motivados y atentos. En nuestro caso tendríamos que buscar recursos relacionados con el álgebra. En el libro *El curioso incidente* *del perro a medianoche*, de Mark Haddon, el protagonista, que es un apasionado de las matemáticas y de la física resuelve ecuaciones de segundo grado para entretenerse

4.3. El humor en clase de matemáticas. Las historietas gráficas y los chistes

Una *historieta* es una secuencia de viñetas organizadas de forma secuencial. Las viñetas son el soporte gráfico para transmitir la historia, empleando la representación icónica con mensajes literales. El arte del cómic (o tebeo, en español) se emplea en revistas y periódicos para representar de manera plástica noticias y relatos de nuestro entorno. Existen viñetas relacionadas con las matemáticas, bien porque las usan en sus mensajes o bien porque tienen un fin divulgativo (Flores, 2003).

Según Eisner, citado en Flores (2003), la historieta o cómic "consiste en un montaje de palabra e imagen, y por tanto exigen al lector el ejercicio tanto de su facultad visual como verbal [...]es un acto de doble vertiente: percepción estética y recreación intelectual."

Las matemáticas no han permanecido ajenas al arte dl cómic. Muchos matemáticos, como el divulgador Ian Stewart han realizado viñetas sobre matemáticas, con títulos tan atractivos como *¡Ah los bonitos grupos!* relacionado con las estructuras algebraicas. El periodista y divulgador Martin Gardner también ha creado viñetas en algunas ocasiones. Otro ejemplo es *Última lección en Gotinga*, un cómic de Davide Osenda, ambientado en la dictadura nazi y que trata temas como la hipótesis del continuo o los teoremas de incompletitud de Gödel.

Algunos autores no matemáticos han recurrido a las matemáticas para incluir en sus historietas. Resaltar su trabajo nos permite conocer la forma en que la sociedad ve los aspectos matemáticos y la manera en la que los dibujantes los emplean.

4.3.1. Clasificación de las viñetas

Flores (2003) distingue tres variables con vista a colaborar en la creación de una base de viñetas relacionadas con la educación matemática: el fin que tienen las viñetas en relación al mensaje que transmite el texto, su papel comunicativo y el soporte físico.

- ***Fin de la viñeta*** Las viñetas se diferencian por el propósito por el que se han creado. Las cualidades comunicativas de las imágenes hace que las viñetas sean útiles con fines *divulgativos*, bien para presentar al gran público o con fines didácticos. Flores (2003) las clasifica de la siguiente manera:

  a) *Divulgativas*, de teorías matemáticas, sin relación con un currículo concreto de matemáticas.

b) *Didácticas*, atendiendo a finalidades educativas (desde apoyo a la docencia hasta la investigación).

c) *De ficción*, que se valen o emplean elementos matemáticos.

- ***Papel comunicativo.*** En los tebeos las viñetas ayudan a *relatar los acontecimientos* ya que muestran la acción mediante imágenes y palabras. Otras veces la viñeta puede *acompañar el relato*, colaborando en la contextualización del mensaje transmitido de forma verbal.

- ***Soporte físico***. Las viñetas pueden aparecer en papel, en forma de vídeo o en un soporte informático, animadas o no. Nos centraremos en las viñetas realizadas sobre papel.

Podemos utilizar viñetas, pero también podemos emplear chistes matemáticos, para que los alumnos analicen situaciones reales en las que se emplean conceptos matemáticos (Flores, 2003), o simplemente por hacer una gracia. Quizá aprendan mejor el concepto que el profesor les ha explicado al recordar el chiste.

Ejemplo 4.1 (Ejemplo de chiste algebraico)**.**
Una persona pregunta a otra (podemos poner unos nombres cualesquiera a los individuos para personificar más el chiste):

-¿Te gustan los polinomios?

El otro individuo responde

- Sí. Hasta cierto grado

4.4. Juegos y divertimentos matemáticos

Muchos autores defienden que existe una relación en entre el quehacer matemático y los juegos. La historia de las matemáticas muestra que muchos descubrimientos matemáticos tuvieron lugar debido a la búsqueda de la solución de un acertijo o un juego. El uso del juego en clase de matemáticas aporta un elemento motivador y altera las rutinas diarias. En un juego no tiene porque haber manipulación, pero pueden servir para practicar una determina destreza (Arce et al., 2019). De Guzmán (2007) considera que las matemáticas han tenido desde siempre una componente lúdica, que a dado lugar a muchas importantes creaciones que han surgido.

4.4.1. El juego como actividad de enseñanza y aprendizaje en matemáticas

Una obra de referencia sobre el tema del juego es *Homo ludens*, de Huizinga, escrita en 1968. En esta obra Huizinga afirma que “ el espíritu de concepción del juego es, como impulso social, más antigua que la cultura misma y se extiende por todas las etapas de la vida como un fermento cultural”, según se dice en

Esteve-Tomás (2014). El juego es muy importante en la actividad humana por lo que debe ser considerado en el ámbito educativo.

Los juegos educativos tienen como finalidad principal desarrollar ciertas funciones mentales del niño o adolescente y permitir la atención, la retención y la comprensión

Los juegos educativos contribuyen a la educación general del niño o el adolescente, pero son los *juegos didácticos* aquellos que proporcionan un mejor estudio y comprensión del currículo escolar. Dentro de los juegos didácticos se encuentran los juegos matemáticos .

Los juegos didácticos y, en particular, los juegos matemáticos, ofrecen un aprendizaje más lúdico, pero su finalidad es aprender unos determinados contenidos. Muchas veces resulta complicado distinguir un juego didáctico de una actividad académica. Las diferencias se aprecian en el la actitud percepción con la que se realiza la actividad, que en la propia actividad.

4.4.2. Tipos de juegos

Existen tantas clasificaciones de los juegos como autores que estudiaron los juegos (Esteve-Tomás, 2014).

Piaget clasifica los juegos en tres tipos: *juego-ejercicio*, *juego simmbólico* y *juego con reglas*. En los tres tipos predomina la asimilación, pero la realidad es asimilada de distintas maneras distintas de acuerdo con los diferentes esquemas (Esteve-Tomás, 2014).

Decroly y Monchamp clasifican los juegos en dos categorías: *juegos de percepción sensorial y actitud motriz* y *juegos de ideas generales* Esteve-Tomás (2014) .

Dentro de los juegos de percepción sensorial y actitud motriz, Decroly y Monchamp distinguen los juegos visuales motores, los juegos auditivos motores y los juegos visuales espaciales.

Los juegos visuales motores desarrollan la atención mediante el ejercicio sensorial y la lógica elemental. Ejemplos son los juegos de bloques o los de construcción y montaje.

Los juegos motores y auditivos tienen como objetivo concienciar al niño de sus movimientos u de las sensaciones de ellos mismos. Ejemplos de juegos de este tipo son las cajas sonoras o los juegos de selección.

Los juegos visuales sirven para desarrollar las actividades sensoriales y a discriminar las cualidades de los objetos. Un ejemplo es el de formar parejas.

Los juegos de relaciones espaciales contribuyen a la orientación y a reconocer en el plano de forma abstracta la tercera dimensión. Ejemplos son los juegos de reconocimiento de la posición de un objeto con respecto a un punto fijo.

En los juegos de ideas generales o de asociaciones inductivas y deductivas intervienen factores como el tiempo, el origen o las relaciones de causa-efecto. Los juegos de deducción fomentan los procesos de abstracción y generalización. Consisten en buscar las relaciones entre conjuntos u objetos o las cualidades comunes a distintos objetos. Como ejemplos, podemos poner juegos de buscar los objetos que faltan o los juegos de clasificaciób.

Atendiendo al número de participantes en los juegos, éstos se clasifican en juegos colectivos, individuales o de pequeño grupo.

Martín et al. (2009) clasifican los juegos de una manera sencilla, en las dos siguientes categorías:

- *juegos de conocimiento.* La finalidad de este tipo de juegos es introducir y trabajar contenidos específicos. Probablemente son los más empleados por los docentes puesto que no suponen romper con los contenidos cásicos.
- *Juegos de estrategia.* Siguiendo a Gairín, (Martín et al., 2009), define los juegos de estrategia como aquellos que coloquialmente se dice que son "más de pensar". En este tipo de juegos se necesitan las técnicas heurísticas. Ejemplos de juegos de estrategia son el ajedrez, las damas o el tres en raya. Los juegos de estrategia tienen unas reglas y un objetivo final que puede ser vencer al propio juego (si es solitario) o vencer a un oponente.

en Arce et al. (2019) se añade una nueva categoría que es la de *juegos de procedimiento conocido.*

4.4.3. Funciones de los juegos en matemáticas

Gairín (1990) señala que los juegos como recurso didáctico se pueden utilizar para los propósitos siguientes:

- El desarrollo de conceptos o estructuras conceptuales matemáticas.
- Práctica de algoritmos y experimentación.
- Desarrollo de la percepción y el razonamiento.
- Uso del pensamiento lógico y de técnicas heurísticas para la resolución de problemas.

En Esteve-Tomás (2014) se recogen las funciones de los juegos contempladas por Corbalán:

- *Función motivadora.* Al implementar juegos en el aula se rompe con la rutina habitual de enseñanza.
- *Función socializadora.* Si se realizan los juegos entre varios alumnos, se da la interacción social.
- *Función integradora.* Los juegos son una oportunidad para la atención a la diversidad. Según Bishop (1998), los docentes tienen que implementar juegos conocidos universalmente. Así tendría lugar el contacto entre niños (o adolescentes) de los distintos continentes.

4.5. Las apps educativas

El término *app* es una abreviatura de la palabra inglesa *application*. Las apps son aplicaciones que han sido diseñadas para ser utilizadas en un *smartphone*, en una *tablet* u otro diispositivo móvil. Existen aplicaciones para ludificar/gamificar el aula y existen aplicaciones móviles con un objetivo específico matemático. Aquí nos vamos a centrar las primeras(Arce et al., 2019).

Las *aplicaciones para ludificar/gamificar el aula* sirven para el propósito para el que están diseñadas. La ludificación o gamificación se basa en introducir técnicas, elementos o dinámicas propias de los juegos en otro tipo de actividad para conseguir la motivación de los alumnos. Algunos ejemplos de aplicaciones de este tipo son Kahoot! o Socrative, que permiten crear cuestionarios que se proyectan en una pantalla y se contestan en un dispositivo móvil. Estas aplicaciones registran a los usuarios que se han conectado mediante una clave que les ha proporcionado el profesor y que los alumnos deben introducir en su móvil. Así, el cuestionario se convierte en un concurso de preguntas y respuestas en tiempo real, en el que se asignan puntos a los participantes en función de si la respuesta es correcta y la velocidad de la respuesta(Arce et al., 2019). Sería interesante dar un premio o subir una determinada puntuación en la calificación final al ganador del concurso. Otro ejemplo similar es Plickers, en la que los alumnos, en lugar de contestar en un dispositivo móvil mueven un código QR hacia el lado donde está la letra que creen que es la respuesta correcta, y el profesor escanea los distintos códigos con un dispositivo móvil.

Capítulo 5

Propuesta didáctica

5.1. Introducción

En esta propuesta didáctica innovadora se pretenden incluir las actividades lúdicas y los juegos en 2º de ESO. Hemos visto, mediante la revisión de la literatura que aprender de una forma más lúdica es beneficioso para los estudiantes. Como hemos indicado previamente, los juegos tienen múltiples funciones, desde el desarrrollo del pensamiento lógico a funciones motivadoras y socializadoras.

Tal y como hemos dicho anteriormente, el álgebra cuesta a los alumnos, por lo que introducirla de manera más divertida va a hacer que cambien en parte sus percepciones y creencias acerca del álgebra.

Las tareas que vamos a encontrar aquí van a ser actividades manipulativas, un breve análisis de una viñeta y juegos. Expondremos los objetivos que pretendemos conseguir con dichas tareas, las dificultades que pueden presentar y las clasificaremos según la dificultad que presenten, para lo que nos basaremos niveles de demanda cognitiva de Smith y Stein (1998). Además tendremos en cuenta que no todos los alumnos tienen el mismo ritmo de aprendizaje.

Cabe destacar que, con las actividades que proponemos aquí, nunca nos saldremos de los contenidos exigidos para 2º de ESO. Los juegos nos servirán para fomentar el desarrollo de múltiples competencias y para trabajar aspectos del bloque 1 de *Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.*

5.2. Motivación de la propuesta

Ya hemos visto en capítulos anteriores que el paso de la aritmética al álgebra supone un reto para los estudiantes de secundaria y que el lenguaje simbólico y los distintos significados del signo igual son dos aspectos difíciles para los alumnos.

Al principio, el álgebra se estudia como aritmética generalizada, haciendo operaciones del tipo $x^2 +$

$x+2x^2+y$, lo que ya parece difícil a los alumnos y hay que recurrir a frases del tipo " no se pueden juntar las peras con los plátanos". Luego se pasa a la resolución de ecuaciones, dónde a les cuesta entender el significado relacional del signo igual y qué es despejar la x. Otro aspecto fundamental que genera rechazo hacia el álgebra es que los estudiantes la consideran inútil haciéndose preguntas del tipo: ¿para qué sirve ésto?

El álgebra, en general, parece difícil y aburrida en primeros niveles de la Educación Secundaria. Los estudiantes suelen tener malos resultados en las pruebas de estas lecciones. Muchos alumnos a los que les gustaban las matemáticas, empiezan a verlas como una asignatura sin sentido. Algunos se encuentran muy perdidos o desmotivados, otros sienten ansiedad porque no comprenden cómo se despeja la x en una ecuación.

Consideramos que las actividades lúdicas y los juegos son potentes recursos para bajar la ansiedad matemática. Nos parece que pueden ayudar a los alumnos a cambiar su percepción del álgebra. Además, utilizar este tipo de actividades es una forma de atención a la diversidad. Pueden incrementar la motivación del alumnado con más bajo rendimiento y a la vez desarrollar las capacidades de los estudiantes más aventajados. Además, para aquéllos que son tímidos, pueden ser un buen recurso para que hagan preguntas y tomen decisiones.

Debido a todas estas razones planteamos esta propuesta didáctica innovadora, con juegos y actividades lúdicas. Desearíamos que los estudiantes desterrasen su visión de que el álgebra es fea y aburrida, y que empiecen a ver que las matemáticas no son una asignatura a la que hay que temer.

Sin grandes pretensiones, nos gustaría que nuestro TFM fuese una pequeña guía para que los docentes se animen a introducir la componente lúdica de las matemáticas en el aula.

5.3. Contribución a las competencias básicas

- ***Competencia en comunicación lingüística***. El lenguaje simbólico del álgebra es un lenguaje nuevo que los alumnos deben aprender a utilizar, tanto de forma oral como de forma escrita. Durante la realización de los juegos, los alumnos desarrollarán su expresión escrita; al hacer preguntas al profesor y al debatir con el resto de la clase, desarrollarán su expresión oral.

- ***Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología***. Durante la realización de los juegos, los alumnos estarán utilizando distintos tipos de razonamiento matemático. Se pretende que adquieran destrezas matemáticas que les permitan ser usadas en la vida real.

- ***Competencia digital***. Algunos juegos se realizarán utilizando aplicaciones móviles educativas. Además en algún caso tendrán que utilizar los recursos digitales para la búsqueda y el tratamiento de la información.

- ***Aprender a aprender***. Con los juegos se pretende que cada alumno vaya tomando conciencia de los factores que afectan a su aprendizaje. Los estudiantes tienen que darse cuenta de qué es lo que deben hacer y cómo proceder para dar respuesta a las tareas propuestas. Durante la resolución de la actividad pueden darse cuenta de que han elegido una estrategia equivocada. Deben aprender a interpretar sus errores como una fuente de aprendizaje.

- ***Competencias sociales y cívicas***. En algunos casos, las actividades se desarrollarán en pequeños grupos y se harán debates entre toda la clase, por lo que habrá lugar para la interacción y el desarollo de las habilidades sociales.

- ***Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.*** El alumno se convierte en protagonista de su propio aprendizaje, ya que tiene que planificar estrategias y tomar decisiones sobre como proceder para la realización de la actividad o el juego. Así, promovemos actitudes como la creatividad y la autocrítca.

- ***Conciencia y expresiones culturales***. El juego ha estado presente en la cultura desde tiempo inmemorial. Algunos juegos, como el cuadrado mágico, atrajeron el interés del pintor Durero y del arquitecto Gaudí. Las historietas gráficas están presentes en la cultura popular, apareciendo incluso en la prensa. Además, son muy cercanas a los alumnos, pues muchos de ellos leen cómic o manga.

5.4. Objetivos generales

Los objetivos generales que se pretenden alcanzar mediante las actividades lúdicas y los juegos son

- Incrementar la motivación y el interés por las matemáticas mediante juegos que no exigen conocimientos superiores a los del currículo.

- Favorecer las competencias implicadas en los procesos del desarrollo del juego, como la comprensión del enunciado (competencia lingüística) y, si es necesaria, la traducción de los enunciados al lenguaje matemático.

- Crear situaciones en las que el alumno pueda cometer errores y pueda aprender de ellos.

- Creación de situaciones donde el alumno tenga que tomar decisiones, fomentando así la competencia de sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor.

- Potenciar el aprendizaje cooperativo y el aprendizaje basado en proyectos para ayudar al desarrollo de las competencias sociales y cívicas.
- Favorecer el aprendizaje significativo y el desarrollo de la competencia de aprender a aprender.

Además de éstos objetivos genererales, se concretarán los objetivos específicos para cada actividad.

Todos nuestros objetivos pretenden ir en líneas de trabajo marcadas por la OCDE, la Comisión Europea y la legislación nacional y regional.

5.5. Metodología

Para poder justificar metodológicamente esta propuesta se hará uso de gran parte de lo expuesto en capítulos anteriores. Seguiremos una metodología mixta combinando la metodología tradicional con las actividades lúdicas y los juegos y el aprendizaje basado en proyectos. El uso del ABP, en pequeños grupos tiene grandes ventajas, como el incremento de la motivación de los alumnos, la superación de los bloqueos y el trabajo de múltiples competencias.

Utilizaremos el humor, los materiales manipulativos, los juegos, entre los que consideramos, los acertijos de ingenio. Se alternarán las sesiones dónde el profesor expone los contenidos con sesiones más divertidas para romper con la rutina habitual.

El profesor no debe pretender que los alumnos permanezcan callados durante la realización de las actividades lúdicas. Lo que se pretende con las ellas es generar debates y crear la necesidad de hacer preguntas.

La estructura de cada tema de la unidad didáctica será variable. Normalmente empezaremos por la teoría, luego haremos actividades tradicionales y finalmente los juegos. Pero, a veces, podremos empezar por una actividad lúdica que nos sirva para motivar un nuevo tema. Además se mostrarán viñetas a ver que opinión tienen los alumnos acerca de los hechos de la historieta o se contará algún chiste para relajar un poco la clase en determinados momentos. Se pondrán tareas para casa, aunque no muchas, que habitualmente se corregirán al principio de cada sesión.

5.6. Evaluación de la propuesta didáctica

Nuestra posición paradigmática es pragmática y transformadora, pues nos centramos en la práctica y deseamos un cambio en la enseñanza del álgebra.

Para evaluar la propuesta didáctica vamos a utilizar un diseño de investigación mixto embebido, dónde lo cualitativo va a estar embebido en lo cuantitativo y cuasi-experimental porque los grupos están formados de antemano. Podremos comparar, así, nuestra propuesta con la metodología tradicional.

Dado que estamos trabajando con estudiantes de 2º de ESO y que éstos han visto una introducción al álgebra en 1º de ESO, preguntaremos mediante un cuestionario con escala tipo Likert (puede ser con emoticonos con rango muy triste-muy sonriente, para hacer el cuestionario más divertido) por su motivación y sus visiones del álgebra, si les parece fácil, diícil, divertida o si tiene utilidad. Así conoceremos un poco sus percepciones .

El docente será el investigador, por tanto, la metodololgía cualitativa que vamos a seguir va a ser la de investigación-acción. Realizaremos nuestro estudio en dos ciclos. Además de la observación sistemática en clase, utilizaremos instrumentos como cuestionarios abiertos para conocer opiniones individuales, haremos un *focus group*, que grabaremos en vídeo, para extraer información sobre si los alumnos se sienten más motivados, si tienen más interés por las matemáticas, y, en particular, si cambiaron sus creencias acerca del álgebra y por qué.

Recogeremos dos pruebas escritas "sorpresa", porque sino los alumnos van a preparar el examen a clases particulares y no estaría claro si los resultados de la investigación se deben a nuestra intervención o a la ayuda externa, de preguntas sobre el contenido, para ver cómo evoluciona nuestra propuesta didáctica y si resuelven bien los problemas. Observaremos los errores que cometen los alumnos, tanto desde una perspectiva cuantitativa como cualitativa. El análisis cualitativo de la primera prueba, de los cuestionarios abiertos y de los *focus group* servirá para replantearse las actividades que hay que introducir en clase y proseguir con el segundo ciclo de la investigación-acción.

Antes de la última prueba escrita, haremos otro cuestionario tipo Likert para conocer si han cambiado las percepciones acerca del álgebra y si ha incrementado su motivación.

En el grupo de control haremos los cuestionarios con escalas tipo Likert sobre las percepciones acerca del álgebra y haremos las pruebas "sorpresa.", para ver si varían la motivación y el aprendizaje introduciendo las actividades lúdicas y los juegos.

Nuestras preguntas de investigación son las siguientes: El empleo de actividades lúdicas y juegos...

- ¿incrementa el interés y la motivación de los alumnos acerca del álgebra?
- ¿mejora el aprendizaje y los resultados académicos del alumnado?

Otra pregunta que nos queremos hacer es si existe una correlación entre la motivación hacia el álgebra y los resultados académicos del alumnado.

Fiabilidad y validez. En cuanto al ámbito cualitativo tenemos que considerar la credibilidad, la trasferibilidad, la fiabilidad y la confirmabilidad. En cuanto al ámbito cuantitativo, debemos tener en cuenta la validez interna (la validez de los cuestionarios, de las pruebas "sorpresa", la presencia de variables extrañas, y las creencias del investigador) y la validez externa, es decir, si podemos replicar el estudio en otras situaciones.

La mirada ética: la grabación de vídeo es más intrusiva que la de audio, pero aporta mayor información. Tenemos que pedir los consentimientos pertinentes a las familias. Los vídeos no se difundirán, sólo se utilizarán para la investigación. Se intentará que los alumnos tengan un beneficio formativo y se hará una interpretación honesta de los datos.

En las Prácticas externas se ha tenido la oportunidad de utilizar instrumentos cualitativos, como la observación sistemática. Cuando se realizaban juegos, los alumnos mostraban interés por hacerlos, preguntaban dudas y debatían. Se pasó también un cuestionario en los dos grupos dónde se ha hecho la intervención, llamémosles grupo 1 y grupo 2, para saber si les habían gustado los juegos y por que razón, y cuáles les habían gustado más. Los juegos que hemos propuesto a los alumnos han sido un cuadrado mágico algebraico, una pirámide numérica y un juego que trataba sobre descifrar la clave secreta de una caja fuerte. Todos ellos figuran en la colección de actividades.

En las siguientes tablas figuran las razones por qué han gustado los juegos y cuáles han sido los que han gustado más. Cabe tener en cuenta que a la primera pregunta algunos alumnos han dado varias razones.

CUADRO 5.1. *Razones por qué han gustado o no han gustado los juegos a los alumnos del grupo 1*
Elaboración propia

<table>
<tr><th colspan="2">Razones por las que gustan los juegos</th><th>Número de alumnos que da esas razones</th></tr>
<tr><td rowspan="7">Gustan los juegos</td><td>Relacionados con el tema
Aprender matemáticas</td><td>8</td></tr>
<tr><td>Aprender matemáticas de
una forma mas tranquila</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Divertidos/entretenidos</td><td>14</td></tr>
<tr><td>Cambiar la forma de dar
clase/ salir de lo común</td><td>6</td></tr>
<tr><td>Gustan las matemáticas</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Se hacen cortas las clases</td><td>1</td></tr>
<tr><td>No da razones</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">No gustan los juegos</td><td>No entender nada</td><td>1</td></tr>
<tr><td>No sabia hacerlo</td><td>1</td></tr>
</table>

CUADRO 5.2: Razones por qué han gustado o no los juegos a los alumnos del grupo 2

Razones por las que gustan los juegos		Número de alumnos que da esas razones
Gustan los juegos	Relacionados con el tema, practicar, aprender y entender	9
	Hacer cálculos / cálculo mental	2
	Divertidos/entretenidos/me lo pasé muy bien	13
	Forma distinta a la habitual, otro enfoque de dar la clase	3
	Ayudan a pensar	1
	Aunque no se me dan bien las matemáticas, lo entendí	1
	No da razones	1
No gustan los juegos	Eran complicados, los tiene que haber mas divertidos	1
	No me gustan las matemáticas eso es lo único negativo	1

CUADRO 5.3: *Respuesta a la pregunta ¿Que juego te ha gustado más?* Elaboración propia

Juego	Número de de alumnos a los que les ha gustado
Cuadrado mágico	8
Pirámide numérica	5
Clave secreta de la caja fuerte	8

CUADRO 5.4: *Respuesta a la pregunta: ¿Qué juegos te han gustado más?* Elaboración propia

Juego	Número de alumnos a los que les ha gustado
Cuadrado mágico	9
Pirámide numérica	8
Clave secreta de la caja fuerte	5

No figuran en la tabla el número de alumnos a los que no les han gustado los juegos. Tanto en el grupo 1 como en el grupo 2 ha habido un alumno al que no le han gustado los juegos.

Cuando viene acompañada por un razonamiento, la respuesta a la pregunta ¿que juego te ha gustado más?, suele ser del tipo: porque era más fácil, porque me ha parecido entretenido o divertido. Un alumno ha contestado que le había gustado el cuadrado mágico porque le recuerda al colegio.

En las siguientes páginas vamos a mostrar cuatro de los 45 cuestionarios cubiertos por los alumnos de forma totalmente anónima. El anonimato tenía dos finalidades. La primera se debe a que los alumnos son menores de edad, por lo que no se puede difundir ninguna información sin el consentimiento de su familia o tutor legal. La segunda razón por la que queremos el anonimato de los cuestionarios es la esperanza de que los alumnos contesten la verdad sin tener miedo ni vergüenza, pues de otro modo podrían sentirse intimidados ante tener que responder estas preguntas. Es de agradecer la participación de los alumnos en esta pequeña encuesta para que podamos tener un poco de información real, en primera persona que nos confirme que, aunque con excepciones, los juegos motivan al alumnado.

Cuestionario sobre los juegos algebraicos

¿Recordáis que clase hemos realizado un cuadrado mágico algebraico, una pirámide numérica y un juego de descifrar la clave una caja fuerte? Estas actividades involucraban ecuaciones de primer grado y sistemas de ecuaciones. lineales?

1. ¿Te han gustado los juegos realizados? Tu respuesta puede ser afirmativa o negativa, pero debes justificarla.

Sí, porque eran entretenidos y hemos cambiado un poco de lo que hacíamos en clase.

2. Si te han gustado, ¿Qué juego te ha gustado más? ¿Por qué?

El de la pirámide porque era bastante fácil y divertido

Cuestionario sobre los juegos algebraicos

¿Recordáis que clase hemos realizado un cuadrado mágico algebraico, una pirámide numérica y un juego de descifrar la clave una caja fuerte? Estas actividades involucraban ecuaciones de primer grado y sistemas de ecuaciones. lineales?

1. ¿Te han gustado los juegos realizados? Tu respuesta puede ser afirmativa o negativa, pero debes justificarla.

Si, me gusto mucho por que eran muy divertidos

2. Si te han gustado, ¿Qué juego te ha gustado más? ¿Por qué?

La caja fuerte por que era lo mas facil

Cuestionario sobre los juegos algebraicos

¿Recordáis que clase hemos realizado un cuadrado mágico algebraico, una pirámide numérica y un juego de descifrar la clave una caja fuerte? Estas actividades involucraban ecuaciones de primer grado y sistemas de ecuaciones. lineales?

1. ¿Te han gustado los juegos realizados? Tu respuesta puede ser afirmativa o negativa, pero debes justificarla.

Sí, me han gustado porque son divertidos, y te ayudan a pensar.

2. Si te han gustado, ¿Qué juego te ha gustado más? ¿Por qué?

Me ha gustado el cuadrado mágico porque me recuerdan al colegio

Cuestionario sobre los juegos algebraicos

¿Recordáis que clase hemos realizado un cuadrado mágico algebraico, una pirámide numérica y un juego de descifrar la clave una caja fuerte? Estas actividades involucraban ecuaciones de primer grado y sistemas de ecuaciones. lineales?

1. ¿Te han gustado los juegos realizados? Tu respuesta puede ser afirmativa o negativa, pero debes justificarla.

Me han gustado, a sido una buena forma de aprender matemáticas

2. Si te han gustado, ¿Qué juego te ha gustado más? ¿Por qué?

El que mas me a gustado a sido una pirámide numérica por que me parecio muy entretenido

5.7. Colección de actividades

Esta colección de actividades pretende ser un compendio de juegos de diferentes tipos y niveles de dificultad, pues no todos los alumnos tienen el mismo ritmo de aprendizaje y responden a las actividades de la misma manera. También se intentará utilizar la mayor variedad de recursos posibles, como ordenadores, dispositivos móviles (si están permitidos en el centro), PDI, materiales manipulativos, hojas físicas de problemas de ingenio o tableros de juego.

Algunas tareas se realizarán de manera individual, otras en pequeño grupo y otras con todos los alumnos del aula.

5.7.1. Las identidades notables con material manipulativo

Es un juego de procedimiento conocido

Cuadrado de una suma: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Ponemos un cudarado de lado a y en el vértice derecho superior de éste colocamos el vértice izquierdo inferior del cuadrado de lado b y completamos el cuadrado con lo que falta: dos rectángulos de lados a y b y tenemos un cuadrado grande de lado $(a+b)$, por lo que su área es $(a+b)^2$. Se tiene la igualdad.

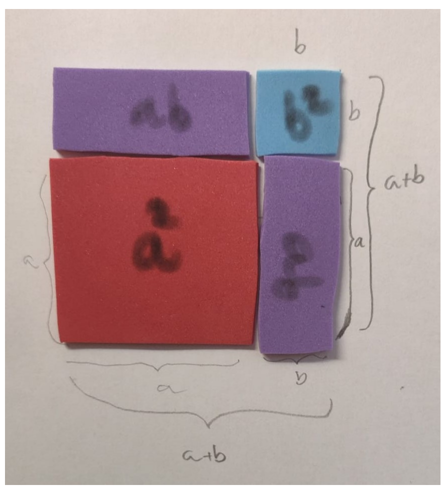


Figura 5.1: Fuente: Elaboración propia

Cuadrado de una diferencia: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

A un cuadrado de lado a le quitamos un cuadrado de lado b. Para obtener un cuadrado tenemos que quitar los dos rectángulos de lados a y b y nos queda un cuadrado de lado $(a-b)$, por lo que su área es $(a-b)^2$ Se tiene la igualdad.

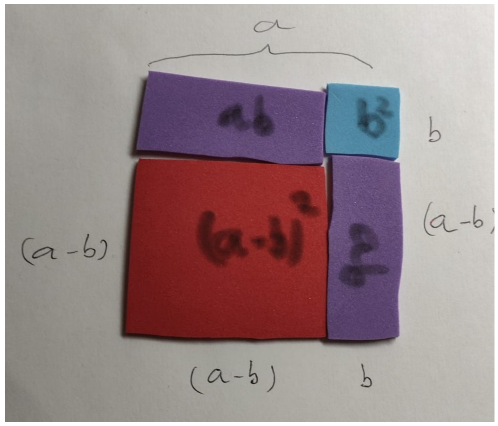
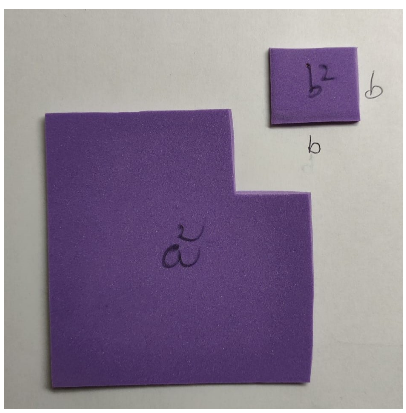


Figura 5.2: Fuente: Elaboración propia

Suma por diferencia: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

A un cuadrado de área a^2 le quitamos un cuadrado de área b^2, es decir $a^2 - b$. Nos olvidamos del cuadrado de área b^2. Construimos un cuadrado recortando los dos rectángulos sobrantes cuyos lados son $a - b$y b. Finalmente, colocamos el cuadrado y los dos rectángulos en fila y obtenemos un rectángulo de base $a+b$ y de altura $a-b$.



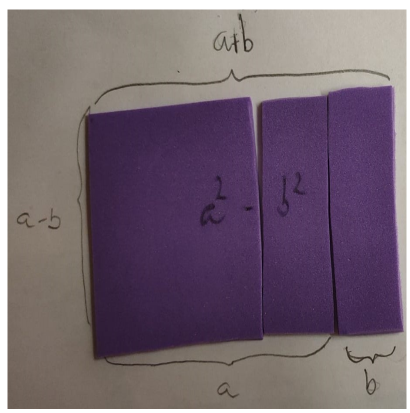


Figura 5.3: Fuente: Elaboración propia

Momento de hacer esta actividad: en clase, cuando expliquemos las identidades notables. En gran grupo, siguiendo las indicaciones del docente, cada alumno hará sus manipulaciones.

Objetivo de esta actividad: que los alumnos conozcan una demostración geométrica y manipulativa de las identidades notables, y que entiendan el significado relacional del signo igual.

Tiempo estimado: 10 minutos para cada identidad notable.

Nivel de dificultad: nivel 3 ya que, aunque la actividad sea guiada, necesitan comprender lo que están haciendo.

5.7.2. La balanza y las ecuaciones

Se trata de un juego de procedimiento conocido.

Una de las actividades manipulativas más conocidas en el estudio de las ecuaciones es el símil de la balanza. Para conseguir que una balanza de dos platillos esté en equilibrio se debe poner el mismo peso en los dos platillos. En el Practicum se ha tenido la oportunidad de hacer esta actividad, después de aprender el método algebraico para resolver ecuaciones. La actividad que proponemos consiste en los siguientes pasos:

1. Dibujamos una balanza de dos platillos en un papel, cada platillo representa un miembro.

2. Podemos utilizar regletas de madera, pero dado que a veces los centros no disponen de ellas o no hay suficientes, vamos a utilizar goma eva de colores rojo y azul. Además es un material más económico.

3. Cortamos rectángulos rojos, rectángulos azules, cuadrados rojos y cuadrados azules Los rectángulos representan a las x y los cuadrados son las unidades. El color rojo representa lo positivo y el color azul representa lo negativo (calor y frío, como en un grifo o en un termómetro).

4. Se colocan piezas distintas en ambos platillos de la balanza.

5. Se dice a los alumnos la siguiente regla del juego: en la balanza debe quedar una único rectángulo de color rojo en uno de los dos platillos. Para conseguirlo, un rectángulo rojo (azul) se quita añadiendo uno azul (rojo), pero para ello necesitamos añadir un rectángulo azul (rojo) en el otro platillo porque sino se desequilibra la balanza. Un cuadradito rojo (azul) se quita añadiendo uno azul (rojo), pero para que no se desequilibre la balanza hay que añadir un cuadradito azul (rojo) en el otro platillo.

Al principio no es necesario hablar a los alumnos de x, de incógnitas ni de ecuaciones, simplemente lo planteamos como un juego. Otro día ponemos en lenguaje simbólico, los pasos que hemos realizado con la balanza.

Vamos a resolver de forma manipulativa la siguiente ecuación $2x - 1 - 3x = -2x + 2$.

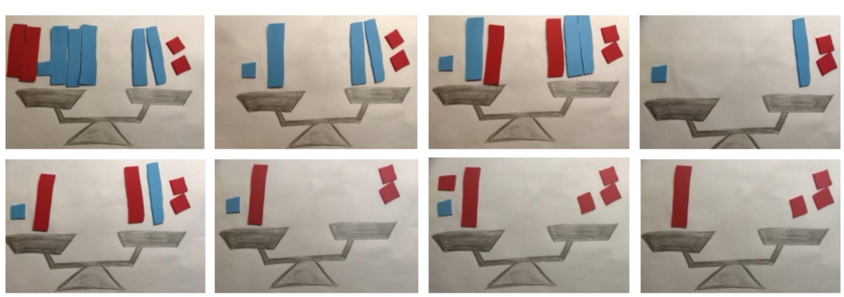


Figura 5.4: Fuente: Elaboración propia

Momento de hacer esta actividad: en clase, antes de explicar las ecuaciones, de forma individual. Luego, traduciremos estas expresiones al lenguaje algebraico, también de forma individual, y se hará una puesta en común.

Objetivo de esta actividad: que los alumnos entiendan por qué las letras y los números cambian de signo al cambiar de miembro y que conozcan el significado condicional del igual en las ecuaciones.

Tiempo estimado: 30 minutos para hacerlo y 30 minutos para traducir algunas manipulaciones al lenguaje algebraico.

Nivel de dificultad: nivel 2 cuando se está trabajando de forma manipulativa. Nivel 4 cuando mandamos a los alumnos que traduzcan las manipulaciones al lenguaje algebraico.

5.7.3. El análisis de una viñeta

Presentamos aquí una viñeta matemática, en este caso relacionada con la parte de álgebra de los primeros cursos de la Educación Secundaria, debido a la temática de este TFM. Joséphine Guidy Wandja es una profesora de la universidad nacional de la Costa de Marfil, que goza de un merecido prestigio en Francia. Publicó en 1985 un libro de cómic titulado Yao crack en math, con los dibujos de Jess Sah Bi. La misma autora indica que desde el momento en que un profesor de matemáticas dice al niño que "salga a la pizarra", se pone nervioso como Yao.

Yao es un niño africano en clase de matemáticas. Las escenas se corresponden con situaciones reales y recogen respuestas habituales de los alumnos.

La viñeta fue traducida por Flores (2003)

Figura 5.5: Fuente: Flores (2003)

Momento de hacer esta actividad: en clase, cuando estemos realizando problemas con ecuaciones. Se realizará mediante un debate en gran grupo.

Objetivo de esta actividad: que los alumnos aprendan a dar significado en la resoluci´on de problemas a las soluciones de las ecuaciones.

Tiempo estimado: 5 minutos

Nivel de dificultad: nivel 3

5.7.4. Un truco fácil

Para esta actividad nos hemos inspirado en el truco fácil de BBC (2018).

El profesor ordena los alumnos lo siguiente:

1. Elige un número
2. Multipícalo por 3
3. Sumále 6 al resultado
4. Divide este resultado entre 3
5. Réstale el número que elegiste al principio.

El profesor dice a los alumnos:

- Os ha dado dos como resultado, ¿a que sí?

El profesor pide a los alumnos la justificación algebraica.

Momento de hacer esta actividad: en clase, cuando estemos trabajando las operaciones con polinomios. Se realizará en gran grupo.

Objetivo de esta actividad: que los alumnos aprendan a traducir expresiones del lenguaje natural al algebraico.

Tiempo estimado: 10 minutos

Nivel de dificultad: nivel 2

5.7.5. La pirámide numérica

Es un juego de conocimiento y de estrategia

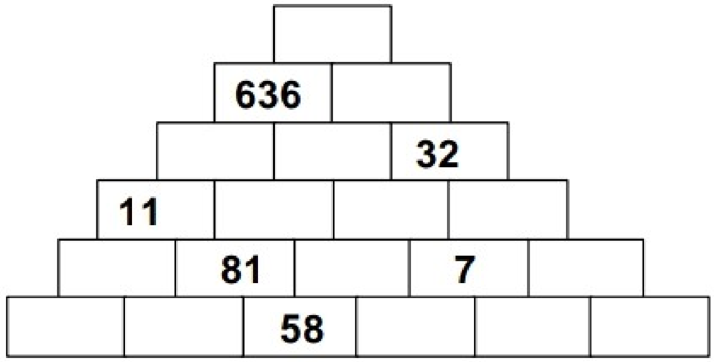


Figura 5.6: Fuente: Villagrán y Olfos (2001)

En una pirámide numérica, la suma de dos números de dos rectángulos de abajo es el número del rectángulo inmediatamente superior a esos dos rectángulos.

En esta pirámide numérica se requiere de las ecuaciones de primer grado para resolverla. Lo más difícil aquí es darse cuenta en que rectángulo poner la primera x. En este caso, sale fácil si se coloca la primera x en el tercer rectángulo de la segunda fila (contando de abajo arriba).

Momento de hacer esta actividad: en clase, mientras estamos estudiando las ecuaciones de primer grado. Se realizará de manera individual.

Objetivo de esta actividad: hacer pensar a los alumnos para que sean capaces de crear estrategias y que desarrollen su sentido de la iniciativa.

Tiempo estimado: 30 minutos

Nivel de dificultad: nivel 4, ya que es difícil saber dónde colocar la primera x. Es de "idea feliz".

5.7.6. Los cuadrados mágicos

Es un juego de conocimiento y de estrategia.

Un cuadrado mágico es un objeto matemático formado por cuadrados más pequeños con números, en el que cada fila, columna y diagonal suman lo mismo. Ejemplos de cuadrados mágicos famosos son el que aparece en el grabado *Melancolía I* de Durero, el de la fachada posterior de la Sagrada Familia o el cuadrado mágico apocalíptico, en el que cada fila, suma y diagonal suma 666, el llamado número de la Bestia.

Para trabajar la metodología del aprendizaje basado en proyectos se propondrá los alumnos un proyecto en pequeños grupos sobre los cuadrados mágicos y su historia. Tendrán que construir cuadrados mágicos 3x3 con ecuaciones cuyas soluciones sean los números del cuadrado mágico. Se les pedirá extenderlo a una dimensión mayor y también se les pedirá que construyan un sudoku con ecuaciones. Finalmente, todos los grupos expondrán en clase sus hallazgos y sus logros.

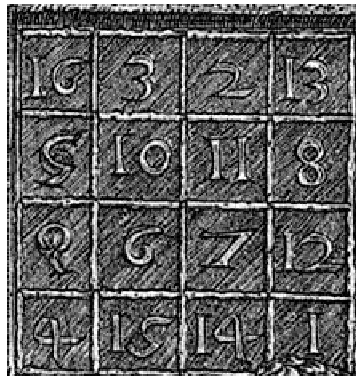


Figura 5.7: Fuente: Gaussianos (2012)

Momento de hacer esta actividad: En clase y en casa, mientras estamos estudiando ecuaciones de primer grado.

Objetivo de esta actividad: hacer pensar a los alumnos para que sean capaces de crear estrategias y que desarrollen su sentido de la iniciativa. Como es un proyecto colaborativo, también se busca desarrollar las habilidades sociales.

Tiempo estimado: dos semanas. Cada grupo tendrá que presentar sus hallazgos al resto de la clase en una sesión.

Nivel de dificultad: nivel 4, ya que es difícil encontrar ecuaciones cuya solución den los números del cuadrado mágico.

En el Practicum se ha podido resolver un cuadrado mágico algebraico que no tenía números, los números eran las soluciones de ecuaciones. No era una actividad tan compleja como la que proponemos aquí. Era el siguiente ejercicio individual:

Cuadrado mágico algebraico.

Un **cuadrado mágico** es una tabla donde se dispone de una serie de números enteros en un cuadrado de forma tal que la suma de los números por columnas, filas y diagonales principales sea la misma.

1. Rellena el cuadrado mágico resolviendo las ecuaciones que aparecen abajo.
2. Encuentra los valores de y, z, v y w.

a)	b)	c)	¿y?
d)	¿z?	e)	f)
g)	h)	i)	¿v?
j)	q)	¿w?	l)

a) $-(x-1) = -15$

b) $x + 7 = 12x - 3 - 8x + 1$

c) $\frac{3x}{2} - 1 = \frac{3x+2}{4}$

d) $\frac{x+1}{6} - \frac{x+3}{4} = -1$

e) $-x -(2 - 4 - 2x) = 13$

f) $x = 5x + 2(-3x + 8)$

g) $\frac{x+5}{2} = \frac{2x+3}{3}$

h) $\frac{x+1}{4} - \frac{4x-5}{36} = \frac{x+5}{9}$

i) $\frac{x-1}{6} - \frac{x-3}{2} = -1$

j) $2(2x - 3) = 6 + x$

q) $2(x - 5) = 20$

l) $2(x+1) - 3(x - 2) = x + 6$

Figura 5.8: Fuente: Motimatematicas (2015)

5.7.7. Subir al cero

Este es un juego de procedimiento conocido. Se juega entre dos personas

Necesitamos un tablero de “subir al cero”, un dado y dos fichas, una para cada jugador.

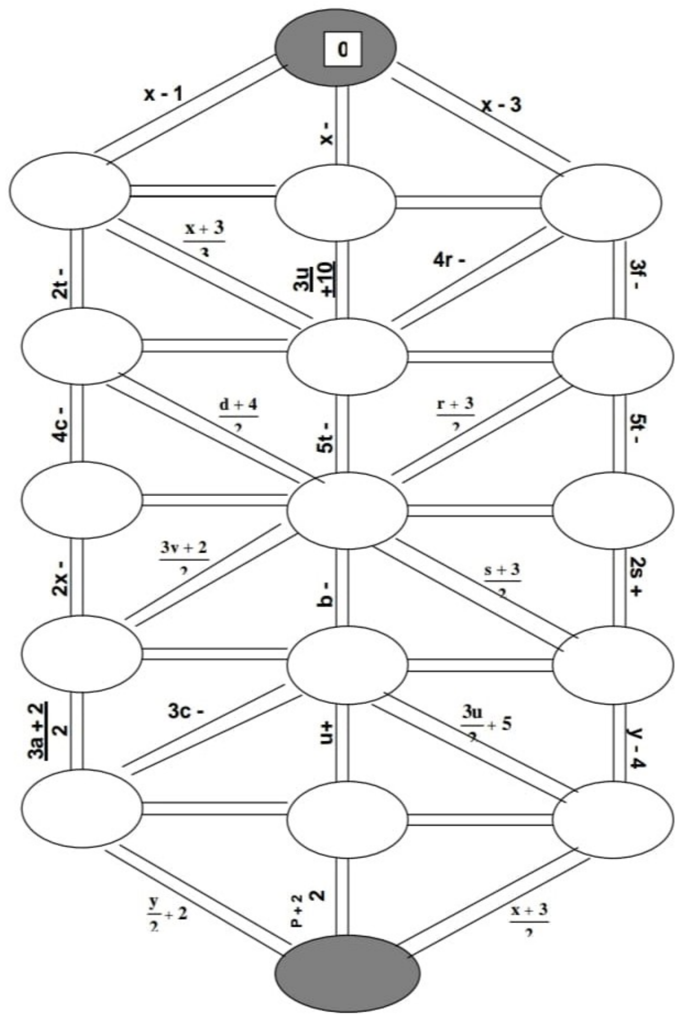


Figura 5.9: Fuente: Villagrán y Olfos (2001)

Las reglas del juego son las siguientes:

1. Los dos jugadores tiran el dado para decidir quien empieza el juego.
2. El primer jugador lanza un dado y con el resultado del dado calcula el valor de la expresión de alguno de los caminos que salen de la casilla negra inferior. Este jugador apunta como puntuación el valor de la expresión obtenida. Para ser válido este valor debe ser un número entero.
3. El segundo jugador hace lo mismo.
4. Las casillas pueden ser ocupadas por los dos jugadores.

5. Después de cinco turnos, los jugadores llegan al último nivel antes del cero. Tienen que intentar sacar con el dado las raíces del correspondiente polinomio $x-1$, $x-2$o $x-3$.

6. El juego termina cuando los dos jugadores han subido al cero. El que haya subido primero obtiene 10 puntos adicionales.

Gana el jugador que más puntuación haya obtenido.

Las sucesivas puntuaciones se van apuntando en la siguiente tabla:

Jugada nº	Puntos primer jugador	Puntos segundo jugador
1		
2		
3		
4		
5		
Puntos adicionales		
Total		

Figura 5.10: Fuente: Villagrán y Olfos (2001)

Momento de hacer esta actividad: en clase, durante las explicaciones sobre polinomios. Se formarán parejas para realizar esta actividad.

Objetivo de esta actividad: que los alumnos practiquen la sustitución de números en expresiones algebraicas.

Tiempo estimado: Una sesión.

Nivel de dificultad: nivel 2, puesto que sólo se trata de sustituir valores en las expresiones algebraicas correspondientes.

5.7.8. El problema de la sandía

Hemos adaptado el acertijo que aparece en la página 207 de Pickover (2002).

María fue a una frutería y pregunta:

-¿Cuánto cuesta esta sandía?

El frutero le contesta:

- Si usted es capaz de responder a esta pregunta matemática de manera correcta en menos de 15 segundos y sin utilizar lápiz y papel, tendrá gratis un kilo de cerezas. Si su respuesta es incorrecta me pagará 8 euros.

Es un buen trato, pues me encantan las cerezas - dijo María- pero debo advertirle que soy doctora en matemáticas.

El frutero le dio a María una tarjeta con la siguiente pregunta:

Si esta sandía pesa 10 kilogramos más la mitad de su propio peso, ¿cuánto pesa?

¿Pueden ayudar a María en esta rara pregunta?

Nuestros alumnos podrán utilizar papel y lápiz y más de 15 segundos. Daremos 10 minutos para que piensen en este problema.

Momento de hacer esta actividad: en clase, mientras estemos estudiando ecuaciones de primer grado, De manera individual y puesta en común.

Objetivo de esta actividad: hacer pensar a los alumnos. Traducir el enunciado a notación algebraica y resolver la ecuación resultante.

Tiempo estimado: 10 minutos

Nivel de dificultad: nivel 3.

La siguiente pregunta es un poco más difícil. Tabién está inspirada en (Pickover, 2002).

Si la sandía pesa 10 kilogramos más dos veces su propio peso, ¿cuánto pesa?

¿Pueden nuestros alumnos resolverla sin lápiz y papel?

Al plantear este enunciado a nuestros alumnos, estamos rompienedo el contrato didáctico. Por un lado, piensan que las matemáticas no se pueden hacer sin lápiz y papel. Por otro lado, el problema no tiene solución, algo a lo que los alumnos no están acostumbrados los estudiantes. Pero sólo hay que darse cuenta de que cualquier cosa no puede pesar dos veces su propio peso más 10 kilogramos. Es un absurdo. Si permitimos a nuestros alumnos que planteen la ecuación, llegarán a una solución que es un peso negativo, por lo que tendrán que pensar si eso es admisible como solución del problema.

El objetivo de esta actividad es fomentar el espíritu crítico ante un problema y que se planteen al principio si tiene sentido resolverlo.

5.7.9. Perros y gatos

Acertijo basado en el acertijo de la página 210 de Pickover (2002).

María vive en un pueblo alejado de las grandes ciudades. En ese pueblo hay animales de todo tipo, hay pájaros, hay ardillas y, por supuesto perros y gatos.

El número de perros más diez gatos es dos veces menor que cinco veces el número de perros, ¿cuántos perros hay en el pueblo?

Al plantear este acertijo también estamos rompiendo el contrato didáctico. En el enunciado de este problema tenemos datos que sobran. Nos preguntan el número de perros que hay en el pueblo y nos hablan de que también hay gatos por lo que los alumnos van a denotar p a los perros y por g a los gatos y plantearán la siguiente ecuación

$$p + 10g = 5p - 2$$

y dirán que el problema tiene infinitas soluciones. Pero no nos importa si esos diez animales son gatos o no, simplemente no son perros por lo que la ecuación que hay que resolver es esta:

$$p + 10 = 5p - 2.$$

Momento de hacer esta actividad: en clase, mientras estemos estudiando ecuaciones de primer grado. De manera individual y puesta en común.

Objetivo de esta actividad: hacer pensar a los alumnos y que conozcan problemas con más datos de los necesarios. Traducir el enunciado a notación algebraica y resolver la ecuación resultante.

Tiempo estimado: 10 minutos

Nivel de dificultad: nivel 3 .

5.7.10. La clave secreta de la caja fuerte

Este juego está inspirado en Juegos y matemáticas. Pasatiempos y juegos en clase de matemáticas (2013). Se ha tenido la oportunidad de hacer esta actividad en el Practicum y algunos alumnos lo resolvieron por "la cuenta de la vieja". Pero se puede resolver mediante sistemas de ecuaciones con más de dos ecuaciones y con más de dos incógnitas. Eso no impide que los alumnos de 2º de ESO puedan resolver el acertijo, por ejemplo aplicando el método de reducción varias veces. El acertijo es el siguiente:

Pepa se olvidó la clave de su caja fuerte. Pero seguro que vosotros podéis ayudarle a recordarla, pero se acuerda de algunos detalles que pueden ser de ayuda:

- La clave tiene 5 cifras. Podéis denotar a estas cifras con las letras a, b, c, d y e.
- La primera cifra y la segunda suman 17.
- La segunda y la tercera suman 15.
- La tercera y la cuarta suman 15
- La cuarta y la quinta suman 9.
- La primera y la última suman 8.

Momento de hacer esta actividad: en clase, mientras estemos sistemas de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas. De manera individual y puesta en común.

Objetivo de esta actividad: que los alumnos traduzcan las expresiones del lenguaje natural al algebraico y que desarrollen estrategias para poder resolverla con éxito.

Tiempo estimado: 20 minutos

Nivel de dificultad: nivel 3.

5.7.11. Sistemas con dibujos

Este tipo de sistema es habitual encontrarlo en redes sociales como un reto. Eso hará que los alumnos muestren interés por aprender a resolverlos.

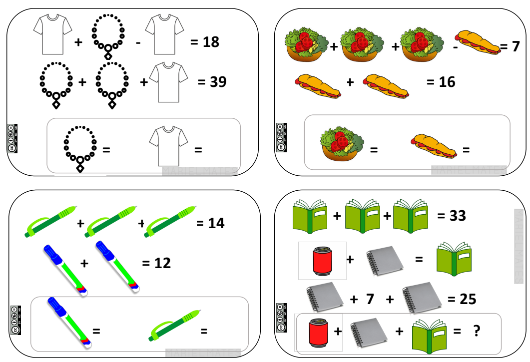


Figura 5.11: Fuente: Las mates de Mariel (2019)

Momento de hacer esta actividad: en clase, mientras estemos estudiando sistemas de ecuaciones. De manera individual y puesta en común.

Objetivo de esta actividad: que los alumnos escriban los dibujos en lenguaje algebraico, que cojan agilidad en la resolución de sistemas de ecuaciones y que piensen cómo resolverlos

Tiempo estimado: 20 minutos

Nivel de dificultad: nivel 3

5.7.12. Otras actividades

Se pueden realizar gymnkhanas matemáticas, batallas matemáticas o Kahoot!.

Una muestra de Kahoot! de elaboración propia se puede ver en el siguiente enlace:

https://create.kahoot.it/details/cf09a023-0655-4018-8238-3eb57bf7b035

Se asignó para casa, puesto que estaba prohibido llevar dispositivos móviles y, debido a la pandemia los alumnos no podían moverse mucho de su clase. El plazo para hacerlo fue de tres días. Al final, tiene algunas preguntas sobre el bloque de funciones porque ya habían empezado a estudiarlo cuando se hizo la actividad.

Capítulo 6

Conclusiones

6.1. Análisis crítico de la propuesta

Es clara la importancia del álgebra en el currículo de secundaria, tal y como se desprende de la legislación. En este capítulo vamos a hacer una reflexión crítica de nuestra propuesta de implementación de actividades lúdicas y juegos para la enseñanza del álgebra en 2º de ESO. Aunque este análisis se vería enriquecido si pudiésemos llevar a cabo la investigación de forma rigurosa, la literatura y las experiencias propias dan cuenta del potencial que tienen las actividades lúdicas, como el humor o los materiales manipulativos, y los juegos en la enseñanza de las matemáticas.

Los beneficios del empleo del humor en clase de matemáticas viene soportado por las investigaciones de Flores (2003).

Las ventajas del uso de los materiales manipulativos para aprender el álgebra están respaldadas por las investigaciones de Long et al. (2020), Bouck y Park (2018) y Carbonneau et al. (2013).

El potencial que tienen los juegos para aprender el álgebra se ve sustentado por las entrevistas que hizo Esteve-Tomás (2014) a Gairín, Deulofeu y Mallart, quien da mucha importancia al control del grupo, además de las investigaciones de Gairín (1990) y los estudios de Gardner (1988) y Corbalán (1994) citados por el mismo.

Además las experiencias propias durante el periodo de prácticas han sido muy enriquecedoras en cuanto al uso de actividades lúdicas y juegos. Las actividades que se han podido realizar han sido bien recibidas por los alumnos, que mostró interés por ellas. En el cuestionario anónimo que les hemos pasado se ve reflejado que les han gustado.

Vamos a reflexionar sobre algunas ventajas de nuestra propuesta de implementación de actividades lúdicas y juegos.

- Hacen la clase más dinámica y más divertida, muestran una cara de las matemáticas totalmente desconocida por los alumnos.

- Incrementan el interés y la motivación de los estudiantes hacia las matemáticas.
- Algunas de las actividades que hemos propuesto se relacionan con la vida cotidiana y la cultura popular.
- Favorecen el aprendizaje autónomo del estudiante al no depender siempre de un profesor, la creatividad, la investigación, el sentido crítico, la estrategia y la autogestión del aprendizaje.
- Facilitan el trabajo en grupo y la generación de debates.
- Muestran el error como una poderosa fuente de aprendizaje. El error no es señal de fracaso, el error significa que uno se ha dado cuenta de que no iba por el buen camino.
- La implementación de actividades lúdicas y juegos hace que se produzca una mayor comprensión de los contenidos y potencia el aprendizaje significativo.
- Los juegos colaborativos requieren de la unidad de todos los componentes del grupo para resolver la actividad con éxito. Favorecen el desarrollo de las habilidades sociales y de los procesos de toma de decisiones.
- Los materiales manipulativos son muy útiles para realizar demostraciones visuales o introducir las ecuaciones.

Aunque, la implementación de actividades lúdicas y juegos tiene grandes ventajas, también presenta ciertos inconvenientes.

- La falta de tiempo. Es muy difícil introducir innovaciones en clase cuando el profesor tiene prisa porque debe dar el programa completo. Sin embargo, con una estricta planificación, se podrían realizar actividades de carácter más lúdico.
- Aunque se proporcionen guías con recursos, muchos profesores no se ven capaces para introducir los juegos en un primer momento. Algunos incluso pensarán que realizar este tipo de actividades es una pérdida de tiempo.
- Los estudiantes están acostumbrados a metodologías tradicionales, por lo que trabajar con material manipulativo les parecerá algo infantil o resolver juegos de ingenio les parecerá difícil, sobre todo cuando requieren del espíritu crítico.

- Muchos estudiantes cuando oyen la palabra “juego” se les viene a la cabeza algo fácil, pero los juegos matemáticos requieren esfuerzo.

- En los juegos y proyectos cooperativos se requiere la participación de todos los integrantes del grupo para poder resolver la actividad con éxito, lo que, a veces, no funciona, por ejemplo, debido enemistades de un alumno con otro compañero o a la existencia de un líder que piensa saberlo todo y los demás componentes se dejan llevar por las decisiones que él toma.

El docente deberá transmitir a los alumnos las bondades del trabajo con actividades lúdicas y juegos para poder salvar todas estas desventajas y deberá apoyar a los alumnos en el desarrollo de las actividades.

Pero el mayor obstáculo es la percepción de cada profesor. Si el docente no cree que las actividades lúdicas y los juegos pueden incrementar la motivación y el interés de los alumnos por las matemáticas y, en particular, por el álgebra, no importa la información que haya disponible acerca de esta metodología ni la formación que haya recibido sobre ella.

6.2. Limitaciones de la propuesta y futuras líneas de trabajo

La propuesta que aquí presentamos fue adaptada para 2º de ESO, por lo que las actividades lúdicas y los juegos que planteamos están adaptados a este nivel.

Confiamos en el interés que muestren los alumnos hacia las actividades para que la implementación de las actividades que proponemos dé sus frutos.

Aunque ya se ha tenido la oportunidad de realizar algunos juegos con los alumnos durante el periodo de prácticas, eso no ha sido el desarrollo completo de nuestra propuesta. Aún así hemos observado cierta motivación en clase y cierto gusto por los juegos tal y como transmiten los resultados del cuestionario que les hemos mandado cubrir.

Sería muy interesante poder llevar nuestra propuesta de investigación teórica a la práctica y ver cuál es el impacto real de los juegos y las actividades lúdicas de una manera más rigurosa.

Dejamos varias líneas de investigación abiertas.

- Una línea abierta que dejamos que el investigador interesado estudie si funcionan los mismos juegos en todo contexto social o de aula o si, por el contrario, en algunos centros o aulas funcionan mejor unos que otros.

- Investigar sobre la incorporación de juegos que no sólo tengan que ver con el álgebra, sino que al mismo tiempo estén relacionados con otras ramas de la matemática y con otras asignaturas.

- Investigar acerca de la divulgación matemática de temas más complejos en el nivel dónde impartamos la clase, intentando hacer asequibles estos temas para un público más joven.

- Investigar sobre la humanización de la asignatura que puede aportar la relación de las matemáticas con la historia, con el arte, con la música o la literatura.

Bibliografía

Arce, M., Conejo, L., y Muñoz-Escolano, J. M. (2019). *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.* Madrid, Síntesis.

Ausubel, D. P., Novak, J. D., y Hanesian, H. (1983). *Psicologiía educativa: un punto de vista cognoscitivo.* México, Trillas.

Ball, D. L., Thames, M. H., Phelps, G., et al. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special. *Journal of teacher education*, 59(5)389–407.

BBC (2018). 5 sencillos trucos de matemáticas que te harán parecer un genio. Disponible en: https://www.bbc.com/mundo/noticias-43731190.

Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7(1/2)23–40.

Bishop, A. (1998). El papel de los juegos en educación matemática. *Uno. Revista de didáctica de las matemáticas*, 189–19.

Bishop, A. J. (2010). *Mathematics Education.* Major themes in Education. London, Routledge.

Blanco, L. (2012). Teoría, crítica y práctica de la Educación Matemáticaen Planas, N (coord.) *Influencias del dominio afectivo en la enseñanza y el aprendizaje delas matemáticas.* Barcelona, Graó, pp. 171-185.

Bouck, E. C. y Park, J. (2018). A systematic review of the literature on mathematics manipulatives to support students with disabilities. *Education and Treatment of Children*, 41(1)65–106.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didaácticas.* Buenos Aires, Libros del Zorzal.

Bruner, J. S. (1988). *Desarrollo cognitivo y educación.* Madrid, Morata.

Bruner, J. S., Goodnow, J. J., y Austin, G. (2001). *El proceso mental del aprendizaje.* Madrid, Narcea.

Carbonneau, K. J., Marley, S. C., y Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, 105(2)380.

Chevallard, Y. (1997). *La trasposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires, Aique.

Civil, M., Planas, N., y Fonseca, J. D. (2000). La atención a la diversidad en el aula de matemáticas: hacia una participación pedagógica y matemática. *UNO-Revista de Didáctica de las Matemáticas*, (23)29–42.

Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León (2015). Orden edu/362/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación secundaria obligatoria en la comunidad de castilla y león, boletín oficial de castilla y león, número 86 , de 8 de mayo.

De Guzmán, M. (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista iberoamericana de educación*, 4319–58.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas *José María Álvarez Falcón (trad.).* (26)15–30.

Esteve-Tomás, O. (2014). Juegos matemáticos para la enseñanza de álgebra en el segundo ciclo de la eso, Trabajo de Fin de Máster, Universidad Internacional de La Rioja.

Flores, P. (2003). Viñetas relacionadas con las matemáticas. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, (56)243–258.

Gairín, J. (1990). Efectos de la utilización de juegos educativos en la enseñanza de las matemáticas. *Educar*, (17)105–118.

Gaussianos (2012). El cuadrado mágico del pintor. Disponible en: https://www.gaussianos.com/el-cuadrado-magico-del-pintor/.

Gómez, P. y Lupiáñez, J. L. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA*, 1(2)79–98.

González, J. (2012). *Estudio de contraste sobre la preferencia y significación de pruebas formales y pre-formales.* Tesis doctoral, Universidad de Valladolid.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4)389–399.

Herzig, A. H. (2005). Goals for achieving diversity in mathematics classrooms. *Mathematics Teacher*, 99(4)253–259.

Hidalgo, S., Maroto, A., Picos, y Palacios, A. (2004). ¿ por qué se rechazan las matemáticas? análisis evolutivo y multivariante de actitudes relevantes hacia las matemáticas. *Revista de educación*, 334,75–95.

Juegos y matemáticas. Pasatiempos y juegos en clase de matemáticas (2013). La clave secreta de la caja fuerte: sistemas de ecuaciones en forma de pasatiempos. Disponible en: https://anagarciaazcarate.wordpress.com/2013/01/05/la-clave-de-la-caja-fuerte-sistemas-de-ecuaciones-en-forma-de-pasatiempos/.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The mathematics educator*, 8(1)139–151.

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., y Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? evidence from solving equations. *Journal for research in Mathematics Education*, 37(4)297–312.

Las mates de Mariel (2019). Actividades para sistemas de ecuaciones. Disponible en https://marielmatesblog.wordpress.com/2019/01/21/actividades-para-sistemas-de-ecuaciones/.

Lemos, R. (2019). La mente es maravillosa. ¿qué es el currículo en espiral? Recuperado el 16-05-2021 de https://lamenteesmaravillosa.com/que-es-el-curriculum-en-espiral/.

Long, H., Bouck, E., y Domka, A. (2020). Manipulating algebra: Comparing concrete and virtual algebra tiles for students with intellectual and developmental disabilities. *Exceptionality*, 0(0)1–18.

López, M., Albarracín, L., Fernando, I., Montejo-Gámez, J., Ramos, P., Serradó, A., Thibauthtadeo, E., y Mallavibarrena, R. (2020). La educación matemática en las enseñanzas obligatorias y el Bachillerato en Real Sociedad Matemática Española (ed.), *Libro Blanco de las Matemáticas.* Madrid, Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, pp. 1-62.

Martín, J., Muñoz-Escolano, J. M., y Oller, Antonio, M. (2009). Empleo didáctico de juegos que se materializan mediante grafos: una experiencia. *Contextos Educativos. Revista de Educación*, (12)137–164.

Martín, S. M. (2005). Los conocimientos previos de los estudiantes de tercer curso de magisterio acerca de la organización escolar: implicaciones para la docencia universitaria. *Aula Abierta*, 85,85–104.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualizationen en Grouws, D. A. (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* New York, MacMillan, pp. 575-596.

MEC (2013). Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa. Boletín Oficial del Estado, número 295 , de 10 de diciembre.

MECD (2015). - Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato se determinan los aspectos básicos a partir de los cuales las distintas Administraciones educativas deberán fijar para su ámbito de gestión la configuración curricular y la ordenación de las enseñanzas en dichas etapas. Boletín Oficial del Estado, número 3 , de 3 de enero.

Mishra, P. y Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, 108(6),1017–1054.

Molina, M. (2015). Concepciones del álgebra escolar. Manuscrito no publicado, Universidad de Granada.

Molina, M., Castro, E., y Castro, E. (2009). Elementary students' understanding of the equal sign in number sentences. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 17(7 (1))341–368.

Moreira, M. A. (2012). ¿Al final, qué es aprendizaje significativo? Universidad de La Laguna. Servicio de Publicaciones.

Morera, L. (2013). *Contribución al estudio de la enseñanza y del aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología.* Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona.

Motimatematicas (2015). Cuadrados mágicos. Disponible en https://motimatematicas.wordpress.com/2015/05/01/cuadrados-magicos/.

NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática.* (Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, trad.), Granada, Servicio de publicaciones de las SAEM (obra original publicada en el 2000).

NCTM (s.f.). Supporting each and every student: Equity and diversity. Disponible en: https://www.nctm.org/conferences-and-professional-development/Tips-for-Teachers/Tips-on-Supporting-All-Students _-Equity-and-Diversity/.

OCDE (2019). Better policiees for better lives. pisa programme for international student assesment. Disponible en http:/http://www.oecd.org/pisa/aboutpisa/.

Palacios, A., Hidalgo, S., Maroto, A., Picos, y Ortega, T. (2013). Causas y consecuencias de la ansiedad matemática mediante un modelo de ecuaciones estructurales. *Enseñanza de las ciencias*, 31(2),93–111.

Piaget, J. (1979). *Tratado de lógica y conocimiento científico: Naturaleza y métodos de la epistemología.* Buenos Aires, Paidós.

Pickover, C. A. (2002). *El prodigio de los números.* RBA Coleccionables, 2007.

Prediger, S. (2005). Diversity as a chance in mathematics classrooms. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, (1)0–8.

Puig, L. (2016). *De nobis ipsis silemus.* conferencia invitada al seminario Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico, Granada.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. *Educación Matemática*, , 69–108. México, Grupo Editorial Iberoamericana.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L., Gómez, P., et al. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. el caso de los números naturales. *Suma*, 58,7–23.

Rico, L., Sierra, M., y Castro, E. (2002). El área de conocimiento de didáctica de la matemática. *Revista de Educación*, (328),35–58.

Rivero, M. M. (2012). Teoría genética de piaget: constructivismo cognitivo.

Sadovsky, P. (2005). La teoría de situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. *Reflexiones teóricas para la educación matemática*, 513–66.

Smith, M. S. y Stein, M. K. (1998). Reflections on practice: Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics teaching in the middle school*, 3(5),344–350.

Usukin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables en Coxford, A.F y Shuttle, A.P. (eds.) *The Ideas of Algebra, K-12.* Rston, NCTM, pp. 8-19.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. y Drijvers, P. (2014). Realistic Mathematics Education en Lerman, S. (ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education.* New York, Springer., pp. 521-525.

Villagrán, E. y Olfos, R. (2001). Actividades lúdicas y juegos en la iniciación al álgebra. *Revista Integra*, 539–50.

Vygotsky, L. (1995). *Pensamiento y lenguaje.* Barcelona, Paidós.