

16 DE JULIO DE 2021



Universidad de Valladolid

Departamento de Matemática Aplicada

Trabajo Final de Máster

ANÁLISIS Y PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA
GEOMETRÍA DE POLÍGONOS EN LA ESO.

Alumno ZHIVKO ZHIVKOV BEREMSKI

Tutora MARÍA ENCARNACIÓN REYES IGLESIAS

MÁSTER EN PROFESOR DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA Y BACHILLERATO, FORMACIÓN
PROFESIONAL Y ENSEÑANZAS DE IDIOMAS
Universidad de Valladolid

Resumen

Este trabajo nace de la motivación de redactar una propuesta para la enseñanza de la geometría de polígonos en Educación Secundaria. Para que el diseño de la propuesta esté bien fundamentado se realiza un estudio previo, que consta de dos partes.

La primera parte consiste en presentar un marco teórico de la Matemática, la Geometría, la Enseñanza Secundaria, etc. En la segunda, se van estableciendo una serie de intenciones, a modo de análisis crítico, que sirven de nexo entre el marco y la propuesta.

Finalmente, la Unidad Didáctica se presenta como el resultado último de ese estudio y a la vez es una herramienta aplicable a la práctica docente.

Palabras clave: Unidad Didáctica, Geometría, Polígonos, Educación Secundaria, Enseñanza.

Abstract

This work arises from the motivation to write a proposal for the teaching of polygon geometry in Secondary Education. In order for the design of the proposal to be well founded, a preliminary study is carried out, which consists of two parts.

The first part consists of presenting a theoretical framework of Mathematics, Geometry, Secondary Education, etc. In the second, a series of intentions are established, as a critical analysis, that serve as a link between the framework and the proposal.

Finally, the Didactic Unit is presented as the result of this study and at the same time, it is a tool applicable to teaching practice.

Keywords: Didactic Unit, Geometry, Polygons, Secondary Education, Teaching.

Índice

1	Introducción	7
2	Marco teórico: Geometría en la E.S.O.....	13
3	Análisis crítico.....	37
4	Propuesta: Unidad Didáctica.....	53
5	Conclusiones.....	99
6	Bibliografía y Referencias	103
	ANEXO 1 Objetivos y Competencias del Máster	107
	ANEXO 2 Objetivos didácticos ESO – LOMCE.....	111
	ANEXO 3 Currículo Académico LOMCE	115
	ANEXO 4 Índice de figuras y cuadros	125

1 INTRODUCCIÓN

ÍNDICE

1.1 Objeto del trabajo	7
1.2 Objetivos.....	8
1.2.1 Objetivos Generales y Competencias.....	8
1.2.2 Objetivos Propios	8
1.2.2.1 Personales	8
1.2.2.2 Prácticos	8
1.2.2.3 Intelectuales	8
1.3 Justificación	9
1.3.1 Relación con las asignaturas del máster	10

1.1 OBJETO DEL TRABAJO

El presente trabajo se realiza en el marco del Máster en Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas de la Universidad de Valladolid. Las competencias adquiridas al superar el máster deben dotar al titulado con las herramientas mínimas necesarias para desempeñar la labor docente en Educación (secundaria, bachillerato, formación profesional y/o enseñanza de idiomas).

El Trabajo Final de Máster, como se indica en su propia guía docente, se presenta como una reflexión final por parte del alumno en la que se demuestra la adquisición de las competencias anteriormente mencionadas. Procede también una defensa oral frente a un tribunal, en la que se expone el trabajo escrito.

En general, se puede afirmar que un TFM puede tener multitud de temáticas, pero en todos los posibles casos deberá servir de una prueba global que cuente con contenidos de todas las asignaturas cursadas del máster. Es, por tanto, un compendio de todas las competencias adquiridas, y en la medida de lo posible, se intentará plasmar como tal, demostrando ese hecho.

El tema propuesto es el siguiente: análisis y propuesta didáctica para la enseñanza de la geometría de polígonos en la Educación Secundaria Obligatoria. A partir de esta premisa se plantea la división del trabajo en dos bloques principales, uno de análisis y otro de propuesta, desarrollando en ellos los diversos temas relacionados con todas las asignaturas del máster. Así pues, en la primera parte de análisis, se reflejarán sobre todo conceptos relacionados con la educación en la sociedad, la psicología de la educación, la legislación vigente, la enseñanza de las matemáticas, el aprendizaje y enseñanza de la geometría, y un largo etcétera, en definitiva, relacionado con el bloque común del máster y los aspectos genéricos del bloque específico. En la segunda parte se pondrán sobre la mesa cuestiones de diseño curricular, metodología y evaluación, innovación, investigación, didáctica, etc.

Se concluye pues, que independientemente de la temática (en este caso la enseñanza y aprendizaje de la geometría de polígonos) se plasmarán, a modo de demostración, aptitudes adquiridas en todas las asignaturas del curso.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivos Generales y Competencias

Los objetivos generales, las competencias generales y las competencias específicas de cada módulo del máster, según la legislación vigente, se recogen en el “ANEXO 1 Objetivos y Competencias del Máster”.

1.2.2 Objetivos Propios

Los objetivos que se persiguen con un escrito de las presentes características son múltiples. Desde el primer momento existe una intención de acotar estos, tanto en número como en contenido. Si se cuenta con muchos objetivos se corre el riesgo de diluirlos y dificultar su cumplimiento. Por otro lado, si la lista es reducida, el trabajo puede resultar poco ambicioso y no contar con una base suficiente a la hora de desarrollarlo. En cuanto al contenido, conviene que la temática también sea lo más concreta posible: innovación, investigación, programación didáctica, psicología de la educación, etc.

En este caso, el autor se centrará en los siguientes objetivos:

1.2.2.1 Personales

- Revisar el papel de la Geometría en la enseñanza de las matemáticas.
- Ampliar el conocimiento sobre recursos didácticos para la enseñanza de la geometría de polígonos.
- Diseñar una Unidad Didáctica completa, con la elaboración de los correspondientes materiales.

1.2.2.2 Prácticos

- Elaborar material docente replicable para la enseñanza de la Geometría en Secundaria.
- Definir y poner en práctica una distribución espaciotemporal para la transmisión del contenido didáctico.
- Implantación de materiales manipulativos y TIC en el bloque de Geometría.

1.2.2.3 Intelectuales

- Aportar a la comunidad educativa unas conclusiones que ayuden a mejorar la enseñanza de la Geometría, combatiendo dificultades del alumnado, innovando en actividades del aula, etc.
- También como investigador, la divulgación de resultados para concienciar al resto de la sociedad y mundo docente.

Con lo expuesto anteriormente se puede deducir que este TFM se presenta, en cierta medida, como un trabajo de investigación, que posteriormente desarrolla una serie de herramientas de acción. La primera parte de análisis crítico contará con revisiones bibliográficas que reflejen el contexto histórico y social del campo, que llevará a una posterior extracción de conclusiones y crítica, y que finalmente desembocará en la elaboración de una Unidad Didáctica completa y su puesta en práctica en el aula.

1.3 JUSTIFICACIÓN

La asignatura de matemáticas, y la matemática como ciencia en general, tradicionalmente ha producido cierto rechazo en los alumnos de Secundaria. Dicha animadversión hacia la asignatura se extiende consecuentemente al sentir de la sociedad hacia la ciencia. Se perciben las matemáticas como algo difícil, abstracto, sin utilidad práctica real, etc. La geometría no escapa al citado sentir.

Uno de los justificantes más importantes a la hora de elaborar trabajos del presente estilo es el de elaborar un discurso docente sólido y eficaz para la transmisión de un conocimiento tan vital como el matemático. Como es sabido, el fin casi único de las matemáticas, es el de enseñar a pensar y razonar, enseñar el discurso lógico, la resolución de problemas de la vida real, pero la mente de los individuos funciona de manera muy diversa. Según las distintas teorías cognitivas, cada individuo, a través de un proceso de aprendizaje propio, llega a comprender y resolver problemas de manera diferente. Y la geometría es un ejemplo idóneo para ilustrar esta cuestión. Los autores difieren en el foco, algunos lo ponen sobre el docente y otros en el discente, pero nadie cuestiona que el proceso del aprendizaje es propio del individuo: la información llega al sujeto de manera más o menos eficiente dependiendo del formato, la metodología, el enfoque del docente, etc.¹

Para algunos alumnos la complicación de la geometría nace de la necesidad de comprender todas las cuestiones de manera visual. Otros alumnos, sin embargo, comprenden las matemáticas de manera más analítica y menos visual. Es importante desarrollar un discurso que contemple todas las diferencias de aprendizaje y no dejar atrás a ningún alumno. La elaboración de material didáctico con ese fin ya es justificación casi suficiente.

Otro pilar justificativo es, como se ha mencionado implícitamente en el apartado de objetivos, el de elaborar material didáctico propio, como primer ejercicio docente, con aplicación práctica real en la fase de intervención del Practicum.

A su vez, se procurará aplicar conocimientos de todas las asignaturas cursadas durante el máster en un ejercicio de síntesis del curso. En el siguiente apartado se justifica esa relación de cada una de las asignaturas con el trabajo.

Finalmente, las conclusiones acreditarán la Unidad Didáctica, validando y estimando su eficiencia y eficacia, y sentarán las bases para la futura labor docente del autor.

¹ (Arce Sánchez, Conejo Garrote, & Muñoz Escolano, 2019)

1.3.1 Relación con las asignaturas del máster

Desde el punto de vista académico es necesario establecer una relación entre este trabajo y las asignaturas del máster cursado. El documento debe ser una pieza fundamental de esta etapa de formación del docente. Aportará tanto una reflexión personal final, como un conjunto de conocimientos y experiencias generales enfocados a toda la comunidad educativa, académica, y a la sociedad en global. Son los objetivos últimos de la formación universitaria, y más en la formación de posgrado.

La relación del trabajo con las asignaturas cursadas es como sigue:

1. Módulo Común

a. Aprendizaje y Desarrollo de la Personalidad:

De los contenidos de esta asignatura se incluyen temas relacionados con el desarrollo psicológico del alumnado, la atención a la diversidad, los estilos de aprendizaje, la adecuación de metodologías acordes con la realidad del aula, entre otros. Se ha realizado cierta revisión bibliográfica que contiene información al respecto, que se plasma en los apartados de marco teórico y análisis crítico.

b. Procesos y Contextos Educativos:

Los contenidos relacionados con esta asignatura son los de índole legislativo, curricular, etc. Se reflejan en la reseña histórica que se hace de la legislación educativa (marco teórico) y también en el apartado de análisis crítico. A su vez, la Unidad Didáctica contiene también información al respecto.

c. Sociedad, Familia y Educación:

De Sociedad, Familia y Educación se extraen competencias para justificar la necesidad de la enseñanza en la sociedad moderna, la atención al entorno social del centro educativo para el que se elabora la Unidad Didáctica, también cuestiones relacionadas con la diversidad, etc. Todos estos contenidos se reflejan en primer lugar en el marco teórico y después en la UD.

2. Módulo Específico

a. Complementos de Matemáticas:

Es la asignatura más relacionada con el contenido matemático de la UD. Cursarla ha enriquecido el conocimiento matemático del autor en teoría de números, geometría, análisis matemático, y estadística y probabilidad. Estos conceptos se trabajan en la reseña histórica de la geometría, en el marco teórico, y también en el desarrollo de la UD (contenidos, diseño de actividades...).

b. Didáctica de la Matemática:

Los estilos de aprendizaje y su integración en el aula, las dificultades que presentan los alumnos, los niveles de Van Hiele para la enseñanza de la geometría, entre otros, son los conceptos de didáctica incluidos en el trabajo. Se menciona también en el marco teórico el surgimiento de la Didáctica de la Matemática como ciencia independiente de las Ciencias de la Educación.

c. Diseño Curricular en Matemáticas:

Se han plasmado conocimientos adquiridos de esta asignatura en la elaboración de la UD, desde el propio esquema vertebrador de la unidad hasta el desarrollo de apartados concretos como los contenidos, la justificación de las competencias clave, etc.

d. Ideas y Conceptos Matemáticos a través de la Historia (O):

Esta optativa ha sido clave en la elaboración del recorrido histórico de la geometría, en el apartado de marco teórico.

- e. **Iniciación a la Investigación Educativa en Matemáticas:**
La revisión bibliográfica revisada, tanto de libros como de artículos académicos, páginas web, etc., precisa de conocimientos iniciales adquiridos durante el curso de esta asignatura. Cómo, dónde y qué buscar son cuestiones relacionadas con la autonomía que debe tener un docente en su formación continua: la competencia de aprender a aprender, como profesional.
 - f. **Innovación Docente en Matemáticas:**
La inclusión de las TIC en el aula, los ejercicios de material manipulativo (papiroflexia), el trabajo de metodologías activas (ABP, portafolio...) beben de las competencias adquiridas de esta materia.
 - g. **Metodología y Evaluación en Matemáticas:**
Los apartados de metodología y evaluación de la UD se han elaborado gracias a esta asignatura, que de hecho es homónima a dichos apartados...
 - h. **Modelos Matemáticos en Educación Secundaria (O):** modelos matemáticos ayuda a dar una visión práctica al contenido de la unidad didáctica. Hay innumerables modelos geométricos que se pueden mostrar en clase para concienciar en la importancia de la geometría: su uso en arquitectura, ingeniería, medicina, botánica...
3. **Módulo Práctico**
- a. **Practicum:** el Practicum es quizás una de las partes que más ha aportado a este trabajo, ya que se pudo poner en práctica parte de la Unidad Didáctica. Ha sido útil para sacar conclusiones, hacer autocrítica, elaborar modificaciones y correcciones, etc.
 - b. **Trabajo Final de Máster.**

2 MARCO TEÓRICO: GEOMETRÍA EN LA E.S.O.

ÍNDICE

2.1 Definición del objeto matemático.....	13
2.1.1 Historia	14
2.2 La Geometría en Educación Secundaria.....	19
2.2.1 ¿Por qué geometría?	19
2.2.2 ¿Qué se enseña? El currículo académico	21
2.2.2.1 Contextualización histórica	22
2.2.2.2 Currículo en España.....	25
2.2.3 ¿Cómo se enseña la Geometría?.....	30
2.2.3.1 Didáctica de la Matemática.....	31
2.2.3.2 Didáctica de la Geometría	32

2.1 DEFINICIÓN DEL OBJETO MATEMÁTICO

Etimológicamente la palabra *geometría* procede del griego: $\gamma\epsilon\omega\mu\epsilon\tau\rho\acute{\iota}\alpha = \gamma\eta$ [gē], “tierra”, + $\mu\epsilon\tau\rho\acute{\iota}\alpha$ [metría], “medida”. Es una rama de las matemáticas que se ocupa de estudiar los elementos del espacio, ya sea éste de dos, tres, o más dimensiones, como pueden ser los puntos, las rectas, los planos y los politopos (polígonos, poliedros, etc.), y sus dimensiones y relaciones.

Se trata de un campo extensísimo para abarcar en un trabajo de las presentes características, por lo tanto, procede acotarlo. El presente escrito se centrará solo en la enseñanza de polígonos.

Al igual que el término *geometría*, la palabra *polígono* también procede del griego: $\rho\acute{o}\lambda\upsilon\gamma\omega\nu\omicron\varsigma$ [polúgōnos] = $\rho\acute{o}\lambda\upsilon$ [polú], “muchos” + $\gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha$ [gōnía], “ángulo”. Se trata de un elemento del espacio bidimensional, geometría del plano, que tiene un número finito de lados, segmentos rectilíneos, que encierran una región del plano. Es, en definitiva, un politopo del espacio bidimensional.

Desde un punto de vista propio del autor, la enseñanza y aprendizaje de la geometría de polígonos en Educación Secundaria tiene dos objetivos principales:

1. Objetivo académico: sentar los conceptos base de cara a la geometría de Bachillerato y Universidad.
2. Objetivo aplicado: aplicación matemática al mundo real para estudiar formas, dimensiones, proporciones, semejanza, etc., pero también esa enseñanza transversal que desarrolla el pensamiento lógico deductivo, el sentido crítico, el pensar matemático, en definitiva.

Es importante recalcar que un aspecto muy destacable de la geometría es el hecho de que en el origen del conocimiento matemático fue uno de los campos principales de la ciencia que nos ocupa. Los antiguos griegos no disponían de los números arábigos que conocemos hoy en día y expresaban las matemáticas principalmente de manera gráfica: geométrica. Transmitir este hecho al alumnado puede aportar una perspectiva interesante a la hora de enseñar matemáticas.

Tradicionalmente, la matemática ha servido de herramienta para resolver problemas de cálculo en el comercio, las mediciones de la Tierra y la predicción de los acontecimientos astronómicos, entre otras cosas.² Se puede ver que estos tres ámbitos, salvo quizás el primero, tienen una fuerte componente de representación gráfica, que se mantiene incluso en la actualidad, estableciendo una estrecha relación con la Geometría. Tampoco se debe obviar que la geometría, con las notaciones actuales, también se puede estudiar de manera analítica.

2.1.1 Historia

En el propio origen de las matemáticas la geometría está muy presente. Según diversas fuentes consultadas³, no hubo una formalización de las matemáticas hasta la Antigua Grecia, donde se comenzó a establecer un proceder racional de la materia. Los griegos comenzaron a enunciar axiomas, demostrar teoremas, aplicar fórmulas, etc. Nació la primera noción del rigor, la conceptualización de la matemática.

Sin embargo, el ser humano ya había utilizado matemáticas con anterioridad en otras culturas, como pueden ser las civilizaciones de Babilonia, Egipto... Las necesidades que despertaron la creación de las matemáticas fueron principalmente tres: el comercio (aritmética básica), la medición de la tierra y las cosas (**geometría**) y el estudio de los astros, que desembocó en la medición del tiempo a través de calendarios (**geometría** y aritmética). Numerosos autores recogen ese viaje histórico en sus trabajos.⁴

Si analizamos los restos arqueológicos de los que disponemos, se puede ver que ya, desde la **Prehistoria**, aunque sea de manera intuitiva, el ser humano ya manejaba conceptos geométricos. Las formas de utensilios, armas, adornos, vestimenta, etc., exigían de un estudio de la forma y la dimensión. A su vez, recipientes cerámicos y otros objetos cuentan con dibujos decorativos basados en conceptos de geometría plana.

Al progresar en el tiempo encontramos importantes avances. Los egipcios desarrollaron modelos matemáticos para calcular áreas mediante triangulación, aproximación de área del círculo, volúmenes de pirámides y poliedros, etc. En **Egipto** era vital el control del terreno cultivable en las inmediaciones del Nilo, impulsando la geometría como herramienta fundamental de supervivencia, a través de la cual se podrían predecir y utilizar las inundaciones de manera provechosa. Algunos de los vestigios históricos más importantes con los que contamos de aquella época, y que dan fe de los conocimientos de geometría que poseían los humanos, son el papiro de Ahmes (o papiro de Rhind) y el papiro de Moscú.

² (Galán Atienza, 2012)

³ En diversos escritos, artículos, libros, páginas web, etc., los hitos mencionados siempre se repiten: los huesos de Lebombo e Ishango, las civilizaciones babilónica, egipcia y griega, como origen de las matemáticas, primero de manera informal y después formalizadas, principalmente por la griega.

⁴ (Santos Rubio & Reyes Iglesias, 2018)



Figura 2.1 - Olla de barro. Neolítico.

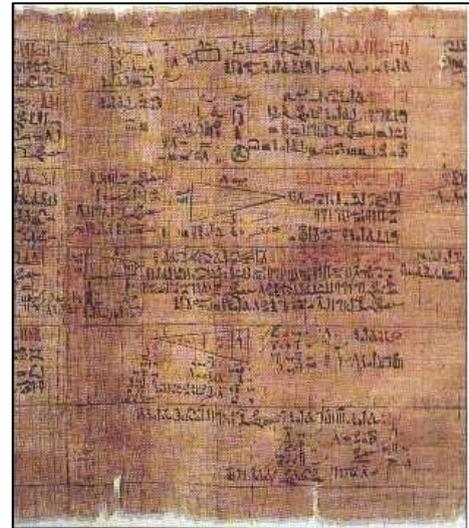


Figura 2.2 - Papiro de Ahmes.

La civilización babilónica plasmó ternas pitagóricas, entre otras fórmulas, en tablillas cuneiformes. En **Babilonia** se resolvían problemas relacionados con la geometría de manera algebraica. Al igual que los egipcios, conocían ternas pitagóricas y también resolvieron problemas de semejanza de triángulos. Se constata, por lo tanto, que el teorema de Tales y el teorema de Pitágoras se conocían antes que los griegos, aunque no se hubieran demostrado.

En la Antigua **Grecia** se vivió una auténtica revolución matemática. Revisar todos los avances aportados por esta civilización es contenido suficiente para un trabajo aparte. Para empezar, la propia palabra “polígono” procede del griego πολύγωνος (polúgōnos), a su vez formado por πολύ (polú), “muchos” y γωνία (gōnía), “ángulo”. Para no sufrir un desvío del tema que nos ocupa se procurará citar lo más importante referente a geometría de polígonos. El primero en introducir la doctrina en Grecia fue Tales, que había viajado a Egipto. Rápidamente le seguirían otras figuras relevantes como Pitágoras, Heráclito de Éfeso, Hipócrates de Quío, Eudoxo, Euclides, Arquímedes, Apolonio, etc. Entre todos dieron el salto del empirismo al carácter científico. *Los Elementos* de Euclides, primera obra cumbre de la época, recopiló todo el saber geométrico de la época, pero lo hace de una manera innovadora: los contenidos se estructuran de manera lógico-deductiva.⁵ En este momento se comienza a trabajar con axiomas, postulados, teoremas... A Tales se atribuyen teoremas importantes relacionados con los triángulos: semejanza, suma de ángulos, triángulo inscrito en circunferencia, etc. Pitágoras propuso maneras de encontrar ternas pitagóricas, su esposa Teano escribió sobre el número áureo. Hipaso de Metaponto, pitagórico, divulgó la irracionalidad de $\sqrt{2}$, deducida a partir de un triángulo rectángulo de catetos unitarios. También se introdujo el álgebra geométrica, a través de la cual se expresaron de manera gráfica identidades notables, proporciones, etc. Propiedades de polígonos como pentágonos y hexágonos fueron estudiadas: en relación con el número áureo en el primer caso y los panales de abejas en el segundo (por Pappus de Alejandría). De esta manera se podrían incluir muchos otros logros por parte de los antiguos matemáticos griegos, en gran medida relacionados con la geometría plana.⁶

⁵ (Alsina Catalá, Fortuny Aymemí, & Pérez Gómez, 1997, pág. 15)

⁶ Extracto histórico basado en los apuntes de la asignatura Ideas y Conceptos Matemáticos a través de la Historia, de María Encarnación Reyes Iglesias.

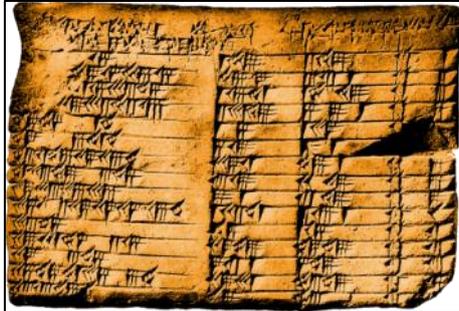


Figura 2.3 - Tablilla Plimpton.



Figura 2.4 - "La escuela de Atenas", fresco de Rafael.

Otra civilización antigua de la que tenemos obra escrita sobre matemáticas desde hace milenios es **China**. La obra más antigua que se conoce es el *I Ching* (~1.200 a.C.), donde se plasman trigramas y hexagramas. Si nos centramos en geometría de polígonos contamos con la obra *Zhoubi Suanjing* (500~300 a.C.), del que se pueden extraer 246 problemas con su respuesta y algoritmo aritmético asociado, y en el que se encuentra una de las primeras demostraciones del Teorema de Pitágoras.

No se puede omitir la aportación a la historia de las matemáticas de la antigua civilización hindú, aunque en relación con la geometría de polígonos se puede decir poco. En la **India** los avances sobre todo estaban centrados en los sistemas de numeración, donde se dieron los primeros pasos para la invención del cero. En cuanto a geometría polígonos, estaban fuertemente influenciados por los babilonios y, por lo tanto, encontramos tablas de ternas pitagóricas, aproximación de áreas círculo – cuadrado, aproximación de $\sqrt{2}$, etc.

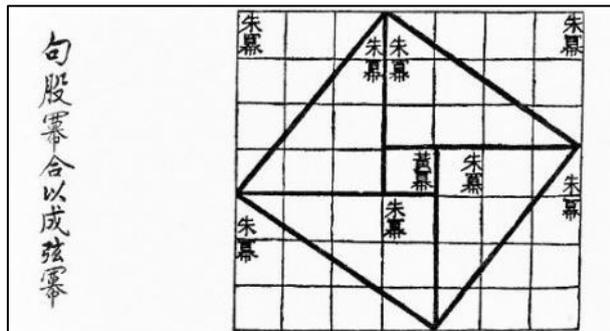


Figura 2.5 - T. de Pitágoras en Zhoubi Suanjing.

El **Imperio Romano**, aunque llega a dominar militarmente gran parte del mundo conocido, se ve conquistado culturalmente por los griegos. Los saberes griegos son heredados por los romanos, pero también existen aportaciones propias en geometría. En relación con los polígonos podemos mencionar el sistema de proporciones propio que implantan: un abanico de relaciones matemáticas que emanan de las propiedades del octógono regular. Se denomina *Corte Sagrado* a una reducción de una longitud en un factor $1/\sqrt{2}$, y tiene una construcción geométrica basada en el octógono regular.

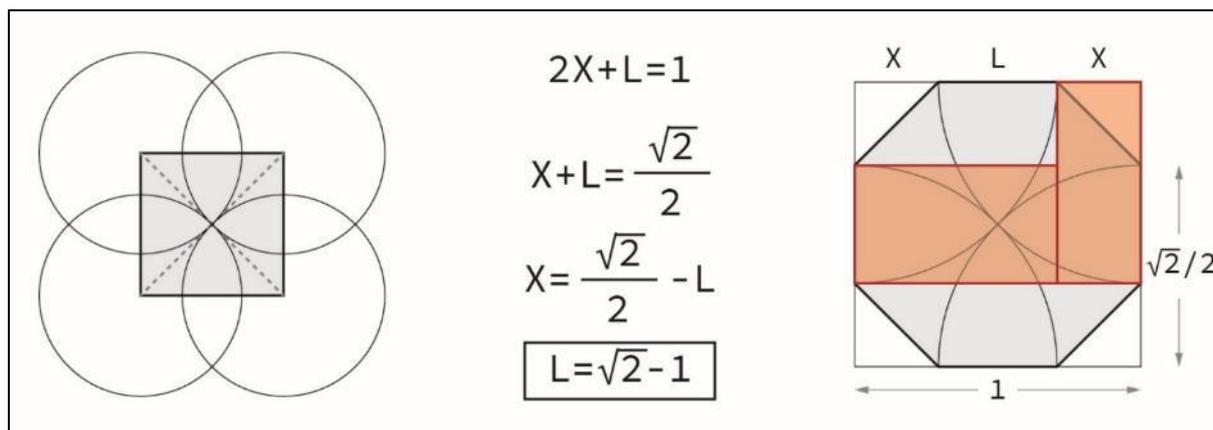


Figura 2.6 - Construcción del Corte Sagrado.

Durante la **Alta Edad Media** occidental se vive un auténtico auge de las matemáticas en China, India y sobre todo en el mundo árabe. Se asientan nuevas ciencias como la Óptica, la Geodesia, la Astronomía, etc. En India se implanta símbolo para el cero, aparece el sistema de numeración posicional... En este período hay que hacer mención especial a Al-Khwarizmi, matemático árabe nacido en Bagdad que, entre otros hitos, explica la numeración posicional hindú, impulsa el álgebra, la trigonometría, etc. Resuelve ecuaciones de segundo grado mediante construcciones geométricas: álgebra geométrica.

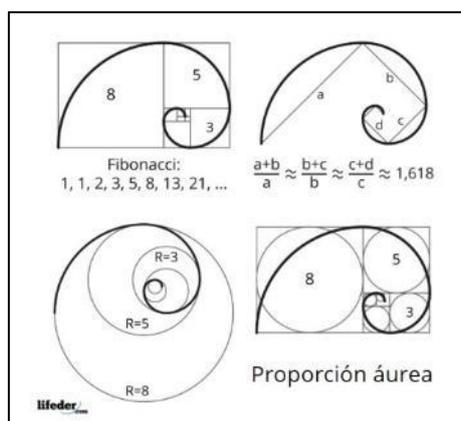


Figura 2.7 - Espirales basadas en la sucesión de Fibonacci.

Durante la **Baja Edad Media** en Europa hay un gran impulso del saber: nacen las universidades. La población comienza a vivir en ciudades cada vez más grandes, dejando el modelo feudal, que era predominantemente rural. El comercio favorece el impulso de la aritmética. El primer gran matemático europeo de ese período es Leonardo Pisano "Fibonacci" (1170-1250), famoso por la sucesión que publica para explicar la reproducción de los conejos. Está relacionada con la proporción áurea y la geometría del pentágono.

Durante el **Renacimiento**, comenzando incluso antes, se vive una auténtica revolución del saber en general, y en las matemáticas en particular. Ya no podemos hablar de avances por países o civilizaciones, la lista de matemáticos importantes y sus aportes comienza a ser difícil de manejar para el apartado que nos ocupa. Cabe destacar de este período el impulso de la trigonometría y la invención de la perspectiva. Los avances tienen multitud de aplicaciones prácticas en arte y arquitectura, ingeniería, astronomía, etc. Algunos nombres relevantes que podemos citar: Regiomontano, Pacioli, Leonardo da Vinci, Alberto Durero, Copérnico, Gaspar Lax, Tartaglia, Cardano, Viète, Napier, Galileo y Kepler, entre otros.

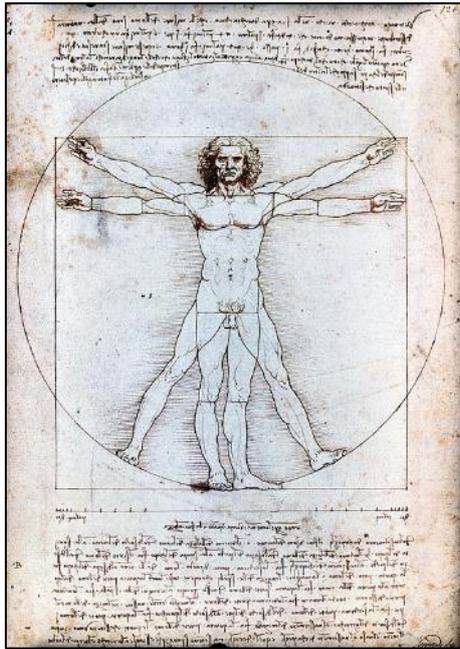


Figura 2.8 - Ilustración de los X Libros de Arquitectura de Vitruvio, por Leonardo da Vinci. Basado en la proporción áurea.

Durante la **Ilustración** continúa el avance de la matemática moderna, donde es ya difícil establecer una cronología clara de aportes en geometría de polígonos. Podemos citar nombres, como los de Descartes y Fermat, desarrolladores de la Geometría Analítica. También son matemáticos muy importantes Cavalieri, Viviani, Blas Pascal, Newton, Leibniz, etc.

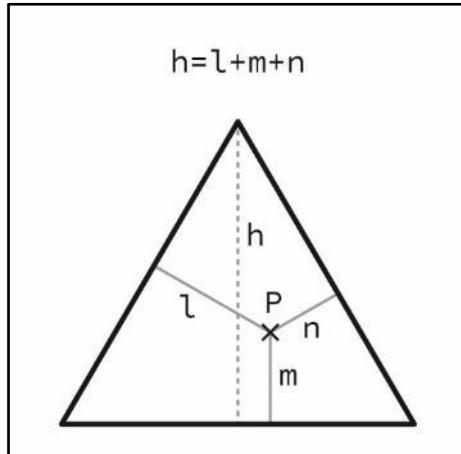


Figura 2.9 - Teorema de Viviani.

Es complicado, como se ha mencionado, a partir de aquí establecer un orden concreto de los aportes en geometría de polígonos. Es posible, pero exigiría una labor innecesaria para el trabajo de las presentes características. Estamos ya en el período de la matemática moderna, donde hoy en día hay más de 50 apartados geométricos.⁷ El repaso histórico sirve para sacar una conclusión clara: la doble vertiente de la geometría, que por un lado es ciencia en sí misma y, por el otro, una herramienta de representación visual de fenómenos matemáticos y de la realidad.

⁷ (Alsina Catalá, Fortuny Aymemí, & Pérez Gómez, 1997)

2.2 LA GEOMETRÍA EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

Se pretende elaborar una imagen de la manera en la que se transmite el conocimiento geométrico en la escuela secundaria: las exigencias de la ley, las metodologías más extendidas, las más tradicionales, la innovación en el campo, etc.

2.2.1 ¿Por qué geometría?

“¿Por qué geometría?” es quizás la primera pregunta que es preciso responder: por qué hay que aprender, y por lo tanto enseñar, geometría en educación obligatoria. Esta pregunta es también el título del libro escrito por Claudi Alsina Catalá, Josep M^a Fortuny Aymemí y Rafael Pérez Gómez, amantes de la geometría como ellos mismos indican en el prólogo.⁸

Hacen una reseña histórica, al igual que la plasmada en este trabajo, llegando a la misma conclusión: la geometría está en el origen mismo de las matemáticas como resultado de unas necesidades básicas del ser humano: de medir, calcular, planificar... Y ya desde el prólogo, previo a su análisis histórico, plantean una pregunta: ¿qué es exactamente la geometría? Al parecer no hay una definición clara, concreta, independiente de lo que llamaríamos “el resto de las matemáticas”. Este problema de la definición, para los comprometidos en el mundo matemático, se complica cuando se formula la pregunta al revés: ¿qué partes de las matemáticas **no** son geometría? Al parecer todo, o casi todo, lo matemático podría tener relación con la geometría. Esto se describe como una dicotomía entre Geometría raquíta y Geometría desbordante.⁹ La solución que ofrecen los autores es la siguiente: una división conceptual. Por un lado, los apartados de las matemáticas que se consideran relacionados con la geometría (citan a Joseph Malkevitch, quien enumera hasta 50 de esos apartados¹⁰), y por otro lado, las aplicaciones de la geometría en problemáticas del mundo real (de elaboración propia). La conclusión es clara, la geometría es importante por dos razones: primero porque es relevante como parte de las matemáticas y segundo porque es relevante como aplicación al mundo real.

“Por todo ello la educación matemática tiene la obligación (o al menos la posibilidad) de considerar como imprescindible ofrecer a los futuros ciudadanos una cierta cultura geométrica, una cultura que requiere desarrollar unas habilidades específicas, tener un vocabulario adecuado y poseer una visión global de las aplicaciones actuales y una sensibilidad por el buen razonar, por la belleza y por la utilidad.”

(Alsina Catalá, Fortuny Aymemí, & Pérez Gómez, 1997, pág. 13)

Se podrían citar muchas otras fuentes y autores, con conclusiones parecidas, defendiendo la imperiosa necesidad de que la geometría siga siendo parte del currículo académico...

Según (Alsina Catalá, Fortuny Aymemí, & Pérez Gómez, 1997) la geometría debería tener tres aspectos fundamentales en educación, que podríamos decir que constituyen el ‘para qué’, el sentido que tiene enseñarla:

- La Geometría como ciencia del espacio.
- La Geometría como método para visualizar conceptos y procesos matemáticos.

⁸ (Alsina Catalá, Fortuny Aymemí, & Pérez Gómez, 1997)

⁹ (Alsina Catalá, Fortuny Aymemí, & Pérez Gómez, 1997, págs. 11, 12)

¹⁰ (Malkevitch, 1991)

- La Geometría como punto de encuentro entre la Matemática como teoría y la Matemática como modelo.

En el primero de los aspectos se define la Geometría como ciencia con entidad propia, al igual que las demás ciencias que podríamos considerar importantes para la educación secundaria. En este caso se trata del estudio de la forma, del aspecto de las cosas, estableciendo categorías, clasificaciones, características y procesos matemáticos relacionados con éstos, entre otros. Sin embargo, la necesidad de implantar una disciplina en la escuela no se justifica por su mera existencia. Aquí entra en juego la relevancia sociocultural de este saber, apoyándonos en la reseña histórica previamente hecha.

El segundo aspecto se centra en una herramienta con aplicación práctica real y directa. Enseñar Geometría dota al discente de una capacidad de visualización de los conceptos y procesos matemáticos, y eso es dar forma, formalizar un saber. Este proceso ayuda al pensamiento lógico deductivo y a la memoria. En contraposición al punto anterior, como dicen los propios autores, hablamos de los aspectos procesales frente a los procesos declarativos de la disciplina.

Finalmente, la Geometría es descrita como el punto de encuentro entre la Matemática como teoría y la Matemática como modelo, porque desde una consideración epistemológica se entiende la Matemática como la ciencia de los modelos. En este caso la Geometría se convierte en el medio a través del cual se visualizan dichos modelos. Permite a los procesos de inducción y deducción interactuar.

En consecuencia, estos tres aspectos son los que los autores consideran indispensables para la enseñanza de geometría en secundaria, hasta el punto de defenderlos como los pilares que deben regir dicho proceso.¹¹

Aparte de los citados autores, se pueden recopilar muchas justificaciones más sobre la importancia de la geometría en la educación (y también en la matemática como disciplina). Esta justificación inicial se da por suficiente, pero en el apartado de “Didáctica de la Geometría” (dentro de “¿Cómo se enseña la Geometría?”) se citarán otros autores (y alguna institución, como la NCTM), que también dan su punto de vista en este aspecto.

¹¹ (Alsina Catalá, Fortuny Aymemí, & Pérez Gómez, 1997, pág. 26)

2.2.2 ¿Qué se enseña? El currículo académico

La pregunta “¿por qué enseñar geometría?” quedó contestada en un apartado anterior, quedando constatada la importancia de la geometría en la vida en general, y en consecuencia en la enseñanza también.

Abordemos el contenido... Si tenemos clara la necesidad de la geometría en la escuela, ahora cabe preguntarse qué contenidos se deben impartir, ya que también se ha hecho constar que es una rama matemática amplísima.

Para indagar en ello debemos centrarnos en el currículo, que es un concepto algo complejo de acotar. Algunas definiciones recopiladas¹² podrían ser:

- “El esfuerzo total de la escuela para producir los resultados deseados en situaciones intra y extraescolares” (Saylor y Alexander).
- “Básicamente el currículo es lo que ocurre a los niños en la escuela como consecuencia de la actuación de los profesores. Incluye todas las experiencias de los niños por las que la escuela debe aceptar responsabilidades” (Tyler, Wheeler, Foshay).
- “Una serie de unidades de contenidos susceptibles de ser adquiridas bajo un conjunto singular de condiciones de aprendizaje” (Gagne).
- “Es el conjunto y planificación de toda la escuela, destinado a conducir el aprendizaje de los alumnos hacia resultados de aprendizaje predeterminados” (Inlow).
- “El currículo estaría constituido por todas las oportunidades de aprendizaje que proporciona la escuela” (Saylor y Alexander).
- “Currículo es una serie estructurada de objetivos del aprendizaje que se aspira lograr” (Johnson).
- “La suma de las experiencias que los alumnos realizan mientras trabajan bajo la supervisión de la escuela” (Johnson).
- “El currículo, es en esencia un plan para el aprendizaje... planificar el currículo es el resultado de decisiones que afectan a tres asuntos diferentes:
 - selección y ordenación del contenido;
 - elección de experiencias de aprendizaje;
 - planes para lograr condiciones óptimas para que se produzca el aprendizaje” (Taba).
- “Se define el currículo como un documento que planifica el aprendizaje” (Taba, McDonald, Beauchamp).
- “Por currículo entendemos las experiencias planificadas que se ofrecen al alumno bajo la tutela de la escuela” (Wheeler).
- “La reconstrucción del conocimiento y la experiencia, desarrollada sistemáticamente bajo el auspicio de la escuela, para capacitar al alumno e incrementar su control sobre el conocimiento y la experiencia” (Tanner).
- “Conjunto de experiencias educativas programadas por la escuela en función de sus objetivos y vividas por el alumno bajo la responsabilidad de los maestros” (Nassif).

Quizás para comprender mejor el concepto se debe hacer un recorrido histórico: desde el surgir mismo de la escuela obligatoria moderna, con el currículo de matemáticas incluido, hasta nuestros días.

¹² Extracto de los apuntes de Diseño Curricular en Matemáticas, siendo autor de estos, y profesor de la asignatura, Cesáreo Jesús González Fernández.

2.2.2.1 Contextualización histórica

Tras la Segunda Guerra Mundial, y todo lo acontecido durante ese período, se vivió una revolución social. Desde la educación se pretendía construir un entramado de valores (éticos, sociales y políticos) para que no se repita la barbarie causada por la propaganda y difusión de ideologías nocivas. La democratización de la enseñanza se torna prioritaria. A ese objetivo se une el del avance técnico, que precisa conocimiento matemático como ningún otro. En consecuencia, en 1950 se funda la CIEAEM (*Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques*), Comisión Internacional para el estudio y mejora de la enseñanza de las matemáticas, presidida por G. Choquet y J. Piaget, con destacados educadores matemáticos como miembros, que fueron de gran relevancia para la reforma de la educación en sus respectivos países.¹³

Para hacernos una idea del espíritu de la comisión, veamos los temas que trataron en las primeras reuniones:

- *Relaciones entre el programa matemático de las escuelas secundarias y el desarrollo de las capacidades intelectuales del adolescente*. Debden (Inglaterra). Abril de 1950.
- *La enseñanza de la geometría en las primeras clases de la escuela secundaria*. Keerbergen (Bélgica). Abril de 1951.
- *El programa funcional: de la escuela maternal a la Universidad*. Herzberg del Arau (Suiza). Agosto de 1951.
- *Estructuras matemáticas y estructuras mentales*. La Rochette sur Melum (Francia). Abril de 1952.
- *Las relaciones entre la enseñanza de las matemáticas y las necesidades de la ciencia y la técnica moderna*. Weilebarch (Luxemburgo). Abril de 1953.
- *Las relaciones entre el pensamiento de los alumnos y la enseñanza de las matemáticas*. Calw (RFA). Julio de 1953.
- *Las matemáticas modernas en la escuela*. Oosterbeek (Holanda). Agosto de 1954.
- *El alumno frente a las matemáticas. Una pedagogía que libera*. Bellano (Italia). Abril de 1955.
- *La enseñanza de la probabilidad y la estadística en la Universidad y en la escuela*. Ramsau (Austria). Agosto de 1955.
- *La formación matemática de las profesoras de párvulos*. Novi (Yugoslavia). Agosto de 1955.
- *El material de enseñanza*. Madrid (España). Abril de 1957.¹⁴

Aparte de la CIEAEM, que tuvo gran relevancia en el posterior desarrollo de la enseñanza de las matemáticas, cabe destacar otros sucesos que tuvieron impacto internacional. Por un lado, el UICSM (*University of Illinois Committee on School Mathematics*), creado en 1952 y dirigido por E. G. Begle. Por otro lado, el Coloquio de Royaumont, patrocinado por la OCDE en 1959, a raíz de la preocupación surgida en el mundo occidental de perder la hegemonía científica tras el lanzamiento del satélite Sputnik en 1957 por parte de la URSS.

Con esta contextualización expuesta, y los sucesos históricos citados, se asientan las bases para el desarrollo del currículo de las Matemática Moderna. Sin embargo, el movimiento reformador se pondría en entredicho rápidamente, ya que al parecer una lectura parcial y apresurada de trabajos en el área de la psicología (sobre todo de Piaget y Bruner) provocó una interpretación errónea de la relación entre desarrollo cognitivo y la enseñanza de las matemáticas. Los currículos de la época se desarrollaron a partir

¹³ (Castro Martínez, y otros, 1997)

¹⁴ (Castro Martínez, y otros, 1997, págs. 22, 23)

de trabajos de G. Papy. La difusión de sus ideas fue muy influyente, de alcance internacional. La reforma de Papy consistió en un currículo de las siguientes características:

- ❖ Secundaria inferior (12-15 años)
 - Conjuntos.
 - Relaciones y funciones.
 - Números naturales y enteros.
 - Geometría (Estructura de Π_0 como espacio vectorial euclídeo definido sobre el cuerpo de los números reales).
 - 12-13 años: axiomas de incidencia y orden y traslaciones.
 - 13-14 años: estructura del plano como espacio vectorial real.
 - 14-15 años: estructura de espacio vectorial euclídeo.
- ❖ Secundaria superior (15-18 años)
 - Álgebra lineal.
 - Espacios vectoriales de dimensión finita.
 - El plano vectorial euclídeo.
 - Geometría del espacio y formas bilineales y cuadráticas.
 - Análisis.
 - Números reales.
 - Elementos de topología.
 - Continuidad de funciones, límites y derivadas.
 - Fórmula de Taylor, continuidad uniforme, integración, medida de ángulo y funciones circulares.
 - Aritmética.
 - Combinatoria.
 - Aritmética de números enteros.
 - Anillos conmutativos.
 - Cuerpos.

Esta reforma fue apoyada por otros medios pedagógicos, pero como se ha señalado, no tardó en ser criticada.

A pesar de ello surge la acepción del currículo, como toda actividad de *planificar una formación*.¹⁵ Como se puede observar en el siguiente diagrama, la elaboración de todo documento relacionado con currículo académico consta de una serie de factores, agentes, instituciones, etc., que poseen estrechas relaciones entre sí y son parte de un proceso complejo. El currículo es, por lo tanto, un Plan de Formación.

¹⁵ (Stenhouse, 1984)

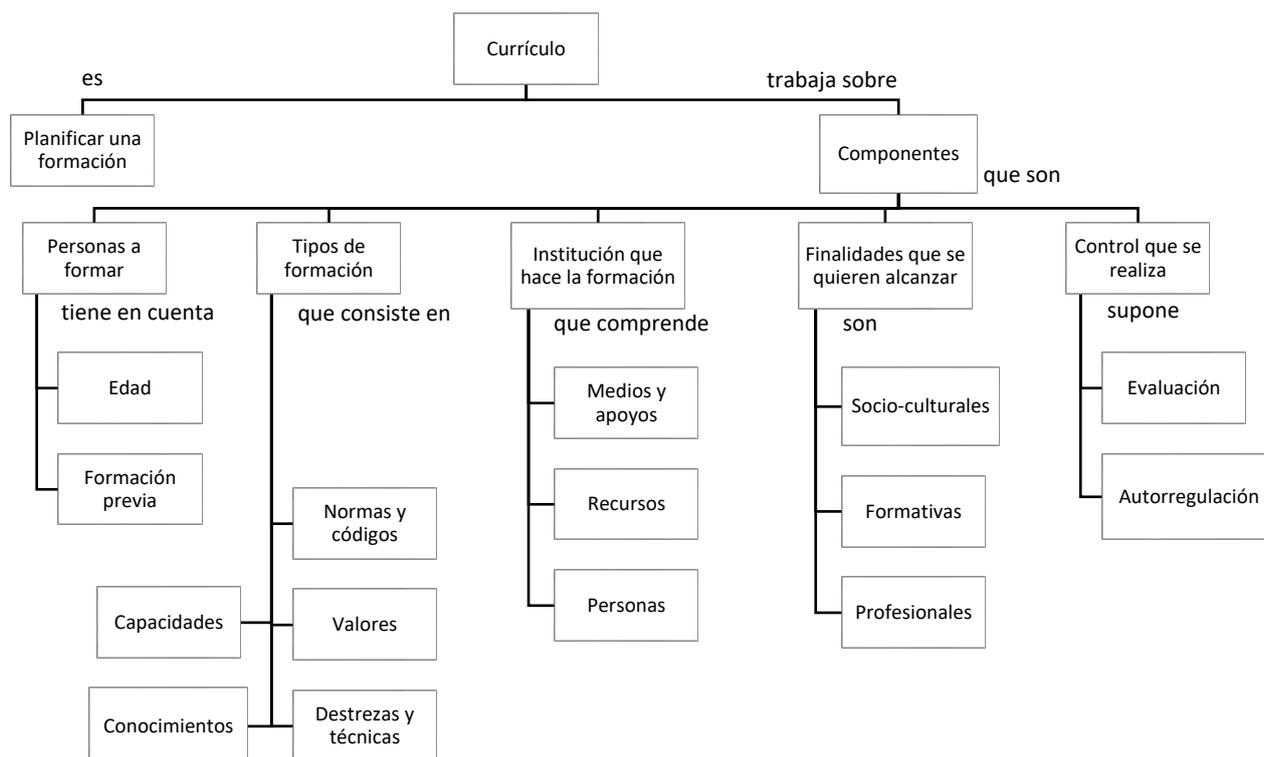


Figura 2.10 - Noción de Currículo.

En este contexto histórico inicial de la Matemática Moderna, se hacen también unas reflexiones sobre la situación que se vive en España. En la década de los años 60 la sociedad española es testigo de un auge económico y social, que por fin comienza a sacar a la población de la crisis vivida desde la Guerra Civil y la posterior Guerra Mundial. Este crecimiento se ve acompañado por reformas legislativas en materia de educación, siendo reseñable el hecho de que la reforma del currículo en matemáticas copa bastante del esfuerzo intelectual del momento. Según (Castro Martínez, y otros, 1997) hay un defecto en la reforma española: el esfuerzo por recuperar el atraso científico y cultural, junto con el deseo de integrarse en el desarrollo europeo provocan una importación de reformas de manera acrítica, sin reflexión propia, ni adaptación previa a las necesidades españolas. Se introduce así el programa de las Matemáticas Modernas en España.¹⁶

Sin ánimo de extender más esta contextualización previa se puede concluir que el período de posguerra trajo en Europa una democratización de la educación y provocó el inicio de un largo proceso que culminó con la educación tal y como la conocemos ahora. Sin embargo, hasta llegar a la actualidad se atraviesa un largo período de reflexiones, debates y reformas. A partir de ahora nos centramos en el caso de España.

¹⁶ (Castro Martínez, y otros, 1997)

2.2.2.2 Currículo en España

El período de la década de los años 60 mencionado antes, en el que comienza un movimiento reformista en la educación, culmina en la Ley General de Educación (LGE) y el Financiamiento de la Reforma Educativa, promulgada el 4 de agosto de 1970. Nos tenemos que remontar a 1857, a la Ley Moyano, para dar con la anterior legislación española en materia de educación. Más de un siglo sin modificaciones significativas en el ámbito educativo es mucho tiempo, sobre todo teniendo en cuenta el período convulso vivido en Europa durante ese tiempo. El impulso definitivo para la EGB fue el informe crítico publicado por el ministro Villar Palasí en 1969, *La Educación en España. Bases para una política educativa*, financiado por el Banco Mundial e impulsado por expertos de la UNESCO.

La primera modalidad de la estructura del sistema educativo español según la LGE queda de la siguiente manera:

- Educación Preescolar. De 2 a 5 años. No obligatoria.
- Educación General Básica (EGB). De 6 a 14 años, en dos etapas. Obligatoria.
- Bachillerato Unificado Polivalente (BUP). De 14 a 17 años. No obligatorio. Acceso selectivo.
- Curso de Orientación Universitaria (COU) + Universidad. Tres ciclos: Diplomatura, Licenciatura y Doctorado.

Una segunda modalidad estaba relacionada con la formación profesional y la educación de adultos. Se impartía en paralelo al BUP.

En una tercera modalidad se recogían estudios especializados o con alguna peculiaridad (educación a distancia, conservatorio de música...).

Se puede observar que esta primera ley moderna de educación en España tiene una peculiaridad que nos atañe de manera directa: si hablamos de Educación Secundaria y Bachillerato, tal y como los entendemos hoy en día (12 a 18 años) podemos concluir que en la LGE no están comprendidos como una etapa definida y cerrada, sino que se componen de diferentes partes de varios procesos de enseñanza. La segunda etapa de EGB (12-14 años), BUP (14-17 años) y COU (17-18 años) serían tres períodos formativos distintos de la vida del alumnado, que se desarrollan en instituciones distintas, con profesorado diferente y sin un marco normativo, de recursos, etc., común. Es, por lo tanto, muy complicado establecer un paralelismo con la Educación Secundaria y Bachillerato que conocemos ahora. Vayamos por partes.

En la segunda etapa de la EGB se puede afirmar que en el currículo hay predominio de los contenidos algebraicos. Hay una clara influencia de esa Matemática Moderna mencionada en el apartado anterior. Los profesores responsables de este nivel de enseñanza tenían el título de Diplomado.

En BUP la enseñanza se estructura en tres cursos: primero uno de materias comunes, después materias optativas y finalmente enseñanzas técnico – profesionales de libre elección. Las matemáticas son obligatorias en los tres cursos, aunque posteriormente en tercero pasarían a optativas. Se continúa con la predominancia algebraica de la EGB y se incluye el análisis matemático, donde hay una orientación formalista y estructuralista... geometría afín y métrica en el plano, probabilidad y estadística escasas y fragmentadas. Clara orientación bourbakista. El profesorado de este nivel debía contar con el título de Licenciado, impartir una materia afín tras superar el Curso de Aptitud Pedagógica (CAP), por algunos calificado de trámite administrativo más que de formación académica real.¹⁷

¹⁷ (Castro Martínez, y otros, 1997)

El bachillerato que se aprueba en el año 1975¹⁸ se ha criticado por sus deficiencias estructurales, de contenidos y métodos pedagógicos, así como por las altas tasas de fracaso y abandono¹⁹ que se producen durante estos estudios. Muchos de los esfuerzos de renovación del sistema educativo, posteriores a la implantación de la LGE, han estado centrados en encontrar una mejor opción para este nivel.

(Castro Martínez, y otros, 1997)

El Curso de Orientación Universitaria (COU) tenía unos contenidos, desarrollo metodológico y criterios de evaluación que eran responsabilidad exclusiva de la Universidad.

Es fácil concluir que la LGE tenía una organización muy fragmentada para el alumnado de la etapa de Educación Secundaria. Sin embargo, es una legislación que la práctica estuvo vigente hasta 1996 y, por tanto, tiene una influencia muy fuerte en la educación española. Muchos de los profesores y maestros en la actualidad se han formado en EGB, BUP y COU. Fue el primer paso a una alta tasa de escolarización, aunque tuviera como defecto principal la altísima tasa de fracaso y abandono escolar. En lo relativo a las matemáticas se puede afirmar que hay coherencia y continuidad metodológica a pesar de lo fragmentario en la organización institucional. Se debe principalmente a tres factores; primero, el planteamiento de las Matemáticas Modernas, de carácter formalista y estructuralista; segundo, la percepción del aprendizaje matemáticas como una serie de operaciones, actitudes, hechos, que se deben memorizar y aprender para el desarrollo del conocimiento individual; y tercero, la consideración de las matemáticas como necesarias para el desarrollo del intelecto, por encima de las cuestiones prácticas.

Nivel	Educación General Básica. Segunda Etapa	Bachillerato	Curso de Orientación Académica
Edad de los estudiantes	12 – 14 años	14 – 17 años	17 – 18 años
Institución	Colegio Nacional o Público	Institutos de Bachillerato	Universidad, pero impartido en los Institutos
Profesores	Maestros especialistas, con formación didáctica	Licenciados en Matemáticas o Ciencias, sin formación didáctica	Licenciados en Matemáticas o Ciencias, sin formación didáctica
Tipo de formación	Educación general, obligatoria y comprensiva	Educación no obligatoria, con inicio a la especialización	Educación especializada y selectiva, necesaria para la Universidad
Evaluación	Formativa y continua	Sumativa y orientada a la promoción	Selectiva

Tabla 1 - Educación Secundaria Española (1970-1990).

Tras la Constitución de 1978 se vio necesaria la implantación de una legislación que se desarrolle en el marco de esta. Sin embargo, como se ha indicado, aunque se sucedieron numerosas legislaciones (LOECE, que no llegó a entrar en vigor, LODE, que desarrolló el artículo 27 de la Constitución...) no fue hasta 1990 que la LGE dejara de regir de manera oficial y práctica la enseñanza del país, con la llegada de la LOGSE

¹⁸ La Ley General de Educación fue promulgada en 1970, pero el currículo de BUP se publica en el Decreto de 23 de enero de 1975 (BOE 13-II-75), con posterioridad Orden Ministerial de 22 de marzo de 1975 (BOE-IV-75).

¹⁹ Se estimaba un 35% de fracaso escolar en EGB. De los titulados solo el 75% continuaba los estudios en BUP, y lo finalizaba un 50% de los que lo iniciaban. (Castro Martínez, y otros, 1997)

(Ley de Ordenación General del Sistema Educativo). Y aunque durante esos 20 años se hayan vivido muchos cambios curriculares, la programación en la enseñanza de las matemáticas ha permanecido prácticamente invariante, tal como sostienen (Castro Martínez, y otros, 1997). Lo que ocurre a partir de 1978 es que la Constitución trae consigo una serie de preceptos de los que emanan los imperativos legales que se pretenden cumplir a través del currículo como instrumento.

Las características principales de esta nueva etapa democrática en España, que surgen tras la Constitución y que se materializan en una serie de leyes educativas que se suceden con posterioridad, son las siguientes:

- La educación como derecho social, garantizado por los poderes públicos mediante una programación general de la enseñanza, con la participación de todos los sectores afectados.
- El objetivo de la educación, según la Constitución: facilitar el desarrollo de todos los españoles sin distinción.
- La libertad de enseñanza: pluralismo, libertad ideológica y libertad de cátedra.
- Las competencias autonómicas: la educación pasa a ser responsabilidad de los gobiernos autonómicos.
- Se eleva la educación obligatoria hasta la edad de 16 años.
- La constatación de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria (12-16 años) y la etapa de Bachillerato (16-18 años), impartidos en los mismos centros.
- Las matemáticas permanecen en el conjunto de conocimientos básicos y, por lo tanto, siguen siendo parte fundamental del currículo, tanto en Educación Primaria como en Educación Secundaria.

Después de la entrada en vigor de la LOGSE 1990 se suceden numerosas leyes educativas que la derogan y/o modifican total o parcialmente, de tal manera que actualmente (2021) está en vigor LOMCE 2013 (Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa), que modifica la anterior LOE 2006 (Orgánica de Educación) y que se desarrollan en el marco de la LODE 1985 (Ley Orgánica reguladora del Derecho a la Educación), reformada casi en su totalidad por la LOPEG 1995 (Ley Orgánica de Participación, Evaluación y Gobierno de los Centros Docentes). Y ya está aprobada la siguiente reforma de la LOE, LOMLOE 2020 (Ley Orgánica de Modificación de la LOE), que no se comentará en el presente escrito ya que aún no está en vigor.

Tras esta breve exposición de los hitos históricos cabe hacer una aclaración: LODE y LOPEG no afectan a la estructura del sistema educativo, sino que regulan otras cuestiones relativas al desarrollo del artículo 27 de la Constitución Española. Son las demás leyes educativas las que interesan si el tema central es el currículo. Veamos cómo lo definen:

- L.O.G.S.E. Artículo 4 define el currículo como “el conjunto de objetivos, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación en cada uno de los niveles, etapas, ciclos, grados y modalidades del sistema educativo que regulan la práctica docente”.
- L.O.E. Artículo 6: “se entiende por currículo el conjunto de objetivos, competencias básicas, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación de cada una de las enseñanzas reguladas en la presente Ley”.
- L.O.M.C.E. Artículo 2 el currículo es “regulación de los elementos que determinan los procesos de enseñanza y aprendizaje para cada una de las enseñanzas y etapas educativas”.
- El experto en teorías fundamentales del currículo César Coll, entiende el currículo como “un proyecto que preside las actividades educativas escolares, precisa sus intenciones y proporciona

guías de acción adecuadas y útiles para los profesores que tienen responsabilidad directa de su ejecución”.

- Otra definición de currículo podría ser: “una explicitación de los aspectos del desarrollo de los alumnos que la educación escolar debe promover y, a su vez, una formulación de las orientaciones que han de determinar todas las actividades educativas que tienen lugar en la escuela”.²⁰

El hito significativo en este período es el de la inclusión de las competencias básicas en la educación española, concepto que se aprecia en la definición de la LOE. Este hecho cambia el foco en la educación, de transmitir contenido a dotar de herramientas. La creación de las competencias básicas comienza con la publicación de *La educación encierra un tesoro*, informe de la UNESCO de 1996, conocido también como *Informe Delors*, por ser Jacques Delors el presidente de la organización en aquel momento. En el informe se enuncia que la educación se apoya en cuatro pilares: aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a ser y aprender a convivir. Esto despierta el interés de medir el estado de la educación, de evaluarlo, y la OCDE lanza el programa PISA. Sin embargo, para poder hacerlo se necesitan saber las variables a medir, y ahí es donde surgen las competencias, que no son más que capacidades, aptitudes, herramientas intelectuales. Es el proyecto DeSeCo (Definición y Selección de Competencias) el que promueve su uso desde 1999.

La enseñanza de la Geometría en ese período se convierte en un valor al alza, que toma cada vez más protagonismo. Diversos debates, estudios y teorías sobre el currículo en matemáticas, que se mantuvieron a nivel internacional, influenciaron para producir esta cantidad de cambios en la década de los 90.

Si nos centramos en la geometría de polígonos dentro de la enseñanza de las matemáticas en Educación Secundaria podremos afirmar lo siguiente:

- El enfoque de la Matemática Moderna había logrado anularla casi por completo, enseñándola con un enfoque abstracto y estructuralista.
- La etapa Bourbaki consiguió influir negativamente incluso mucho después de la LGE. El modelo vectorial, algebraico, siguió empleándose para enseñar cierta geometría.
- La Geometría ha ido tomando protagonismo dentro de la asignatura hasta alcanzar el estatus de bloque autónomo (junto con otros como Funciones, Estadística y Probabilidad, etc.) actualmente en el currículo de la LOMCE. La mayor parte de este bloque en Secundaria se dedica a polígonos (clasificación, construcciones, elementos...).
- Las reformas curriculares y el impacto de la tecnología han conseguido mejorar la situación en cierto sentido. Sin embargo, sigue sin imponerse un desarrollo lineal deductivo de la teoría. El modelo imperante en aquella época seguía primando el uso de lenguajes diversos, técnicos, etc., centrados en estructuras rígidas más que en pensamiento deductivo.²¹

Así también lo indican (Arce Sánchez, Conejo Garrote, & Muñoz Escolano, 2019), coincidiendo en una reseña histórica parecida:

Tras la aprobación de la Constitución española surge la necesidad de reformar de nuevo el sistema educativo, y a nivel curricular este cambio toma forma en el Diseño Curricular Base (DCB, Ministerio de Educación y Ciencia, 1989) y en la Ley Orgánica de Ordenación

²⁰ La lista es un extracto de los apuntes de Diseño Curricular en Matemáticas, siendo autor de estos, y profesor de la asignatura, Cesáreo Jesús González Fernández.

²¹ (Alsina Catalá, Fortuny Aymemí, & Pérez Gómez, 1997)

General del Sistema Educativo (LOGSE, 1990). Por otro lado, los estudios internacionales realizados en las décadas de los setenta y ochenta habían demostrado el fracaso del currículo de las New Mathematics. Así pues, las orientaciones del DCB y de los currículos de la LOGSE viran hacia unas matemáticas que están alejadas del formalismo que las caracterizaba en la época anterior y cuyo enfoque se dirige ahora hacia el saber hace, es decir, hacia las destrezas procedimentales. Además, a raíz de la instauración de las comunidades autónomas (CCAA), durante los años noventa se transfieren las competencias en materias de educación a las correspondientes Administraciones educativas autonómicas, así pues, van estableciéndose diferentes documentos curriculares particulares de cada comunidad autónoma.

(Arce Sánchez, Conejo Garrote, & Muñoz Escolano, 2019, pág. 55)

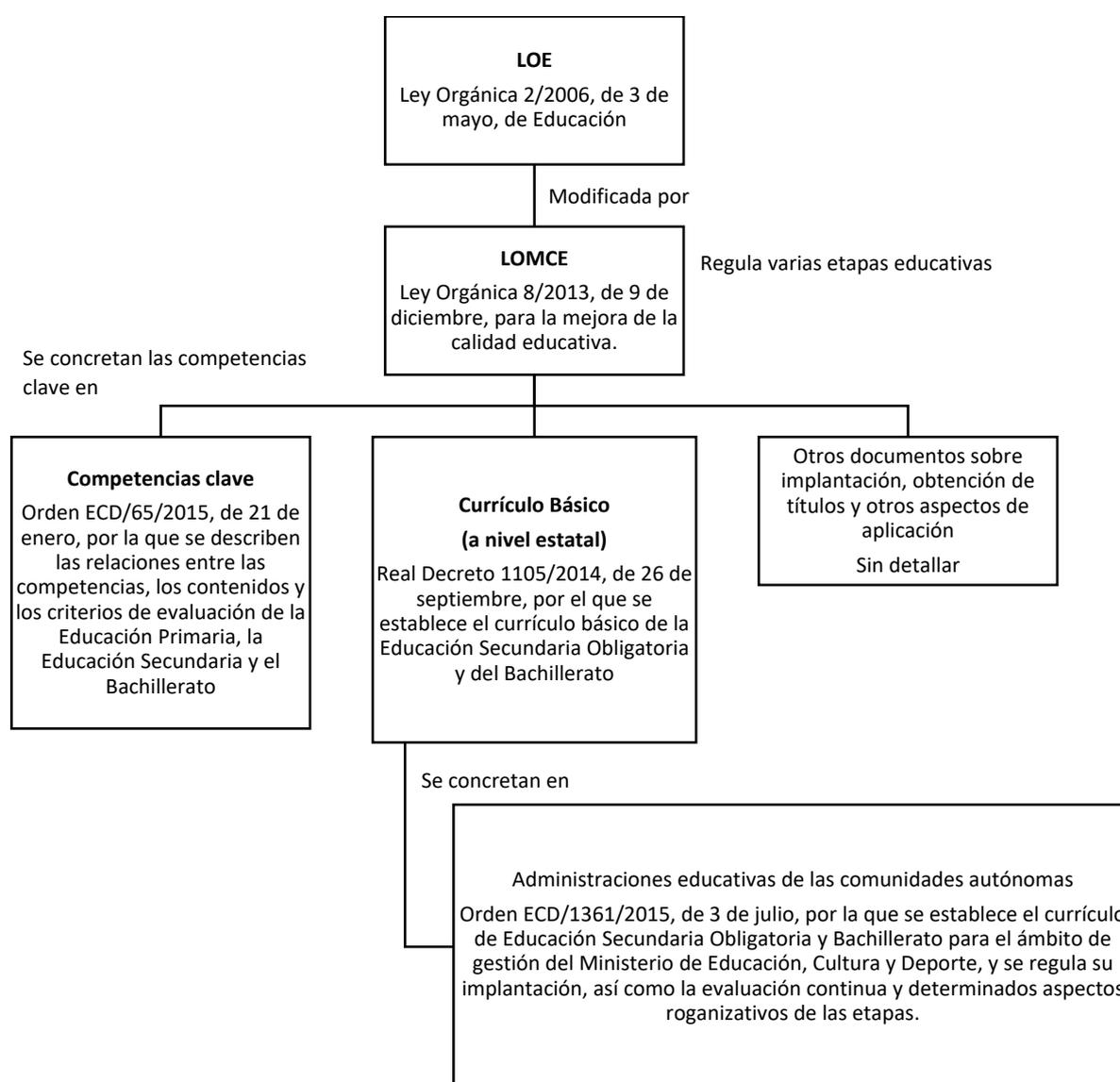


Figura 2.11 - Legislación y documentos curriculares actuales en España.

En “ANEXO 3 Currículo Académico LOMCE” se pueden consultar los contenidos, los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables mínimos exigidos del bloque de Geometría, según la legislación vigente.²²

2.2.3 ¿Cómo se enseña la Geometría?

Si hablamos de la enseñanza en general se debe comenzar por esbozar cierto marco teórico, es decir, mencionar las distintas teorías del aprendizaje que las ciencias de la educación han elaborado. Éstas se pueden clasificar en dos grandes corrientes: empirista (o transmisiva) y constructivista. Se consideran contrapuestas.²³

<i>Corriente empirista o transmisiva</i>	<i>Corriente constructivista</i>
El alumno aprende lo que el docente explica en clase	El alumno aprende a través de su acción en situaciones planteadas por el docente.
El conocimiento se adquiere a través del trasvase de este del docente al alumno, que lo va asimilando y acumulando.	El conocimiento se desarrolla, organiza e integra a través de conflictos o desequilibrios que el alumno debe superar: evolución de sus estructuras cognitivas y conocimientos.
Rol central del docente como transmisor de conocimientos: énfasis en el proceso de enseñanza.	Rol central del alumno como agente principal: énfasis en los procesos de aprendizaje, que variarán de unos alumnos a otros.
Rol pasivo del alumno como receptor de los conocimientos expuestos por el docente, y que luego habrá de mostrar o aplicar.	Rol clave del docente: crea situaciones de aprendizaje, orienta la acción del alumno, plantea preguntas sobre aspectos clave, modifica aspectos de la situación, etc.
El conocimiento se organiza de forma lineal, a partir de la lógica de la disciplina de conocimiento, y se presenta ya organizado y cerrado.	Cada alumno construye, desarrolla y organiza su conocimiento a partir de las situaciones planteadas por el docente, y es un agente activo de ese proceso.
El error se relaciona con el fracaso, en la transmisión del docente o en el registro por parte del alumno. El error es algo que evitar.	El error es precursor del desarrollo del aprendizaje: la emergencia de conflictos cognitivos en situaciones incita superar y reorganizar los conocimientos anteriores.
Proceso de enseñanza unidireccional: del profesor al alumno.	Importancia de las interacciones profesor-alumno, y de los alumnos entre sí.

Tabla 2 - Supuestos en los que se apoya cada corriente.

²² (Junta de Castilla y León, 2015)

²³ (Arce Sánchez, Conejo Garrote, & Muñoz Escolano, 2019)

Expuestas así, las dos vertientes pueden parecer extremos opuestos, pero cabe resaltar que la realidad es mucho más compleja y rica; no se debe caer en la caricatura de los extremos, aunque es verdad que el constructivismo se erige como corriente dominante, a raíz de publicaciones de autores relevantes a lo largo de la segunda mitad del siglo XX y principios del siglo XXI. Las teorías constructivistas más destacadas son:

- Epistemología genética (o teoría cognitiva del desarrollo) de Jean Piaget.
- El constructivismo sociocultural de Lev Vygotsky.
- El aprendizaje por descubrimiento de Jerome Bruner.
- El aprendizaje significativo de David Ausubel.

2.2.3.1 Didáctica de la Matemática

Las teorías anteriormente enumeradas, junto con muchos otros trabajos escritos en el ámbito de la educación, se han visto limitadas para explicar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

La sociedad actual en la que vivimos, dominada por la tecnología y el acceso a ingentes cantidades de información, precisa una educación matemática básica para formar ciudadanos no manipulables y capaces de gestionar, organizar, cuantificar, cualificar, etc., toda la información matemática recibida. Se exige una democratización de la matemática para la alfabetización de los ciudadanos en ese sentido. Sobre este tema se ha escrito muy poco a lo largo de la historia. Algunos matemáticos se han preocupado por la enseñanza de la disciplina, aunque no hayan sido muchos (exceptuando algunos autores como pueden ser Felix Klein o George Pólya, entre otros, que escribieron libros de carácter didáctico o contenido similar). El carácter general de las teorías de aprendizaje ha resultado en una aplicación práctica poco satisfactoria para la enseñanza de las matemáticas. Finalmente, para dar respuesta al problema de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, nace la Didáctica de la Matemática, disciplina científica independiente que se ocupa de estudiar los procesos, los planes y de la formación del profesorado.²⁴

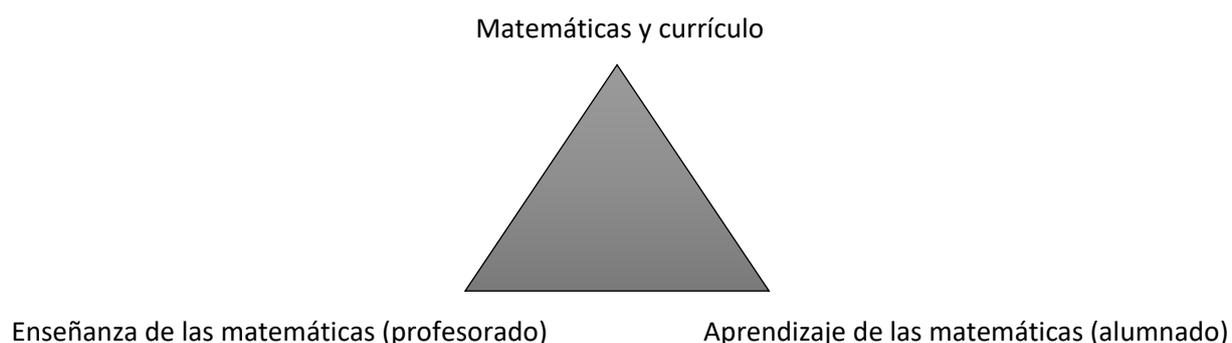


Figura 2.12 - Grandes focos de interés en didáctica de la matemática.

Los tres grandes focos de la Didáctica de la Matemática serían:

- El **currículo**. Donde se estudiaría la selección del contenido, la secuenciación, la relación transversal con otras asignaturas, etc.

²⁴ (Arce Sánchez, Conejo Garrote, & Muñoz Escolano, 2019)

- El **profesorado**. La formación del colectivo docente, las metodologías, los procesos de comunicación y explicación, la evaluación, etc., serían temas objeto de estudio.
- El **alumnado**. Los procesos de aprendizaje, la relación de estos con el dominio afectivo y emocional, el entorno social, la diversidad, etc.

Aun siendo una disciplina joven, la didáctica de la matemática ha desarrollado ya algunas teorías propias, como pueden ser:

- La didáctica francesa. Nace con un importante grupo investigador que a su vez ha terminado dando subteorías propias:
 - Teoría de las situaciones didácticas. Se trata de la teoría más destacada de la didáctica francesa, que consiste en situar a los alumnos en problemas (situaciones fundamentales) que no se puedan resolver con el conocimiento previo adquirido (generando situaciones didácticas), derivando en intentos de generación de nuevo conocimiento (situaciones de acción). Las propuestas de solución generan una situación de formulación, que exige de una situación de validación (para comprobar) y finalmente el profesor enuncia el saber adquirido como parte de la disciplina matemática (situación de institucionalización).
 - Trasposición didáctica. Tiene un enfoque antropomórfico de la enseñanza, considerando el proceso como parte de una interacción entre un saber propio de la materia (las matemáticas) que la escuela adapta para un saber distinto (saber a enseñar).
 - Contrato didáctico.
- El enfoque discursivo del aprendizaje de las matemáticas. Se inspira en las ideas de Vygotsky. Consiste en conectar el aprendizaje con la participación. Se entienden los procesos cognitivos como forma de comunicación, aunque no expresada, y se explota esa comunicación (entendida como la serie de acciones, interacciones, etc., que se dan entre los conocedores del código de la comunicación) para generar discursos. Dan lugar a palabras clave, rutinas, narrativas...
- Fenomenología y educación matemática realista. Entiende que los conceptos y estructuras matemáticas sirven para organizar fenómenos, ya sean del mundo cotidiano, del saber matemático o de cualquier otro saber.

2.2.3.2 Didáctica de la Geometría

Ya se ha mencionado anteriormente que el movimiento de la matemática moderna, surgido en los 60, casi terminó por erradicar la geometría de los planes de estudio, por desgracia. Afortunadamente el movimiento fue criticado, como se ha expuesto antes, y finalmente superado.

La escasa formación geométrica que se recibía consistía en resolución de problemas relacionados con medidas, áreas, etc., y primaba la memorización y aplicación de fórmulas. Actualmente se defiende un modelo de enseñanza de la geometría completamente distinto, afortunadamente. Tal y como se expuso en el apartado “¿Por qué geometría?”, los autores (Alsina Catalá, Fortuny Aymemí, & Pérez Gómez, 1997) defienden la enseñanza de la geometría con tres objetivos:

- La Geometría como ciencia del espacio.
- La Geometría como método para visualizar conceptos y procesos matemáticos.
- La Geometría como punto de encuentro entre la Matemática como teoría y la Matemática como modelo.

La organización de educadores de matemáticas más grande del mundo, el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), también recoge en cuatro bloques lo que considera que debería consistir la

Geometría en Educación Secundaria. Así lo plasman (Arce Sánchez, Conejo Garrote, & Muñoz Escolano, 2019, pág. 280):

- Analizar características y propiedades de figuras geométricas de dos y tres dimensiones y desarrollar razonamientos matemáticos sobre relaciones geométricas.
- Localizar y describir relaciones espaciales utilizando coordenadas geométricas y otros sistemas de representación.
- Aplicar transformaciones y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas.
- Utilizar la visualización, el razonamiento matemático y la modelización geométrica para resolver problemas.

Estos cuatro bloques son posteriormente desglosados por el NCTM en niveles, estableciendo en cada nivel una serie de expectativas de aprendizaje. También hay que recalcar que la organización defiende la geometría como la rama vital para el desarrollo del razonamiento y el trabajo de demostraciones, a la vez que defienden la transversalidad de la disciplina con otras áreas. Sin lugar a duda, la Geometría se considera importante para el NCTM.

Si reflexionamos sobre nuestra actividad cotidiana nos daremos cuenta de que hay innumerables actividades que exigen destrezas relacionadas con la geometría: orientación espacial, estimaciones de medidas, áreas y volúmenes, reconocimiento de formas y figuras, etc. Diversos autores²⁵ describen teorías cognitivas sobre las habilidades relacionadas con la geometría: sentido espacial, orientación, visualización, etc. En todos los trabajos, el término más recurrente es el de *visualización*. Es un concepto que abarca mucho más allá de la Geometría y está relacionado con la interpretación de la realidad, la imaginación, e incluso con otras áreas de las matemáticas, además de la Geometría. Dentro de la Geometría podemos identificar tres elementos: procesos de visualización, que son aquellos que establecen relación bidireccional entre la información externa y la imagen interna, imágenes mentales, que son las que generamos en nuestra mente a la hora de representar gráficamente algo, y las habilidades de visualización, que se precisan para llevar a cabo los procesos visuales.

A la hora de aplicar todo esto a la enseñanza es necesario crear un modelo. Aquí es donde entra en juego Pierre Marie Van Hiele, profesor holandés de enseñanza secundaria. Van Hiele, junto con su esposa Dina Van Hiele-Geldof, estudió la teoría de que hay diferentes niveles de pensamiento en el aprendizaje de la geometría. Es una teoría que él mismo conjeturó a partir de su experiencia como docente. Los resultados de la investigación dieron lugar al modelo que lleva su nombre, y que fue perfeccionado por estudios posteriores. Las hipótesis del modelo son las siguientes²⁶:

1. Existen diferentes niveles de razonamiento en geometría, y en general, en matemáticas.
2. Un estudiante solo podrá comprender aquello que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento.
3. Si unos conceptos, relaciones o propiedades se encuentran en un nivel superior al nivel de razonamiento del alumno, es necesario esperar a que alcancen dicho nivel superior para presentárselos.
4. No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada forma, solo puede aprender mediante la experiencia, pero sí se puede ayudar a esa persona, por medio de una enseñanza adecuada, a que adquiera la experiencia necesaria para que llegue a razonar de esa manera.

²⁵ Mencionados en (Arce Sánchez, Conejo Garrote, & Muñoz Escolano, 2019).

²⁶ Extraídas de (Arce Sánchez, Conejo Garrote, & Muñoz Escolano, 2019).

Los niveles del modelo son los siguientes:

NIVEL 0 – Reconocimiento	– Se reconocen formas y figuras de manera meramente descriptiva. No se usa razonamiento propiamente dicho. No se reconocen las propiedades del objeto geométrico. Se organizan por similitud.
NIVEL 1 – Análisis	– Se reconocen propiedades de los objetos, pero sigue siendo de manera descriptiva. No se relacionan las propiedades de distintos objetos. No se es capaz de dar definiciones. No se consiguen extraer las propiedades mínimas necesarias. Las clasificaciones inclusivas no se elaboran.
NIVEL 2 – Ordenación clasificación	– La capacidad deductiva se empieza a desarrollar. Las propiedades comienzan a relacionarse y se deducen unas de otras. Se pueden entender demostraciones, pero no se es capaz de elaborar una. Tampoco se entiende el papel de los axiomas.
NIVEL 3 – Deducción formal	– Se pueden establecer razonamientos lógicos. Se admiten las definiciones para clasificar los objetos. La demostración se convierte en la única vía para comprobar la veracidad. Se aceptan los axiomas matemáticos, pero no se es capaz de analizarlos.
NIVEL 4 – Rigor	Este último nivel se entiende como propio de los matemáticos profesionales. Es el máximo nivel de razonamiento. No se corresponde con ninguna etapa en la educación fuera del nivel universitario.

Tabla 3 - Niveles de Van Hiele.

Los niveles de Van Hiele son una secuencia, lo que implica que no se puede alterar el orden. De eso se deduce que son recursivos, lo que consiste en que el conocimiento implícito en un nivel se hace explícito en el siguiente²⁷. En el siguiente cuadro se puede ver esta afirmación (se excluye el nivel 4):

	Elementos explícitos	Elementos implícitos
NIVEL 0	Figuras y objetos	Partes y propiedades de las figuras y objetos
NIVEL 1	Partes y propiedades de las figuras y objetos	Implicaciones entre propiedades de figuras y objetos
NIVEL 2	Implicaciones entre propiedades de figuras y objetos	Deducción formal de teoremas
NIVEL 3	Deducción formal de teoremas	Relación entre los teoremas (sistemas axiomáticos)

Tabla 4 - Recursividad de los niveles de Van Hiele.

Es obvio que el nivel 4 no se espera alcanzar en secundaria. De hecho, aunque el nivel 3 es el objetivo para alcanzar, la experiencia dice que los alumnos en esta etapa suelen moverse entre el 0 y el 1, alcanzando en los mejores casos el 2.

Según (Corberán Salvador, y otros, 1994), la enseñanza de la geometría basada en los niveles de Van Hiele se debe impartir siguiendo unas fases. Para avanzar de un nivel a otro el alumno debe pasar por todas ellas. Son las siguientes:

- Fase 1: se facilita *información* necesaria para la elaboración de las actividades posteriores. Este proceso es bilateral: el alumno obtiene lo necesario (conceptos básicos) para desempeñarse en

²⁷ (Fouz), y también (Arce Sánchez, Conejo Garrote, & Muñoz Escolano, 2019)

la resolución de problemas y desafíos, y el profesor se informa sobre los errores más comunes en el aprendizaje y enseñanza del tema.

- Fase 2: en una *orientación dirigida* el profesor coloca a los alumnos en situaciones que generan conflictos cognitivos. De esto surgen oportunidades de aprendizaje, donde los conocimientos previos sirven para construir otros nuevos y ordenarlos.
- Fase 3: se presenta más como una actitud común a todo el proceso, se trata de un comportamiento de *explicitación*. Los alumnos deben expresar lo aprendido, a través de diálogo con los compañeros u otras actividades, donde la exigencia es expresarse con claridad y rigor. Esto exige comprender los conceptos y la relación entre ellos.
- Fase 4: se plantean más situaciones de tareas, ejercicios, problemas... Pero en esta ocasión se trata de una *orientación libre*, en la que el alumno aplica lo asentado en los procesos anteriores, explorando situaciones de demanda cognitiva más alta, soluciones diferentes, planteamientos alternativos, etc.
- Fase 5: fase de integración, en la que no se plantean conocimientos nuevos, sino que se establece el asentamiento de todo lo adquirido en las fases anteriores. Se ordena y solidifica lo aprendido como último paso antes de pasar al siguiente nivel, logrando una visión global del contenido.

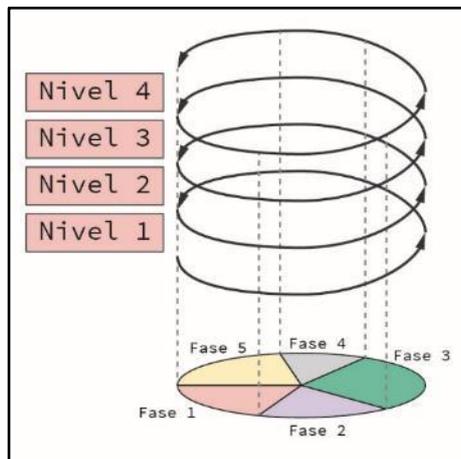


Figura 2.13 - Fases en los niveles de Van Hiele.

Tal y como se plasma en (Arce Sánchez, Conejo Garrote, & Muñoz Escolano, 2019, pág. 291), uno de los saltos importantes en la enseñanza de la geometría es pasar de una geometría sintética (euclídea) a una geometría analítica (cartesiana). En los niveles iniciales del aprendizaje se enseña una geometría que llamamos sintética, basada en la construcción de figuras de manera gráfica. El problema surge en los niveles posteriores, donde se hace trabajar al estudiante con operaciones algebraicas en el plano cartesiano, produciendo una ruptura con lo anterior. Los estudiantes al final tienen la impresión de trabajar distintas geometrías, en vez de una sola:

- Geometría descriptiva: los niveles más básicos de enseñanza. Puramente gráfico.
- Geometría sintética: basada en los razonamientos axiomáticos básicos.
- Geometría analítica: inclusión de operaciones matemáticas algebraicas, los ejes cartesianos, etc.

Hay diversos autores que sugieren actividades que mitigarían esta ruptura, tal y como indican (Arce Sánchez, Conejo Garrote, & Muñoz Escolano, 2019).²⁸ En todo caso, lo importante es establecer relaciones entre las operaciones gráficas (regla y compás, papiroflexia...) y las operaciones algebraicas

²⁸ Se recomiendan artículos de (Gascón, 2002) y (Gaita, 2014).

(matrices, ecuaciones...), para no generar una brecha conceptual y caer en la resolución mecánica algorítmica.

Finalmente, cabe destacar la importancia de trabajar la transversalidad. Se ha hablado de la geometría como ciencia, la geometría como matemática y por último conviene recordar la geometría como modelo. Las operaciones que se realizan en el bloque de álgebra, el de probabilidad y estadística, e incluso en teoría de números, se pueden representar de manera gráfica. Esto convierte a la geometría en una herramienta útil y muy transversal, tanto en matemáticas como en otras asignaturas. El NCTM (2003) recomienda integrar a la geometría en las demás ramas de las matemáticas, tal y como indican (Arce Sánchez, Conejo Garrote, & Muñoz Escolano, 2019).

3 ANÁLISIS CRÍTICO

ÍNDICE

3.1 El concepto de ‘Análisis Didáctico’	37
3.2 Análisis de contenido	39
3.3 Análisis cognitivo	42
3.4 Análisis instruccional	49
3.5 Libros de texto revisados.....	51

3.1 EL CONCEPTO DE “ANÁLISIS DIDÁCTICO”

El concepto de Análisis Didáctico se define como un procedimiento que el docente sigue para diseñar, implementar y posteriormente evaluar las unidades didácticas. Se trata de un proceso necesariamente cíclico, que además debe atender a las características concretas del tema a impartir, el lugar en el que se inscribe, la sociedad a la que se imparte, etc.²⁹ Consta de cuatro pilares:

Análisis	Foco de atención
De contenido	Contenido
Cognitivo	Enseñanza
Instruccional	Aprendizaje
De actuación	Evaluación

Tabla 5 - Pilares del Análisis Didáctico.

En este trabajo el contenido a analizar fue parcialmente expuesto en el apartado de Marco teórico: Geometría en la E.S.O., y en los siguientes bloques se procederá a comentarlo de manera crítica. Se trata de revisar los contenidos contemplados en el currículo, los libros de texto con los que trabajan los docentes actualmente y, en definitiva, lo que toda la comunidad educativa considera parte esencial de la enseñanza de la

geometría en España.

Los análisis cognitivo e instruccional se refieren a las metodologías más comunes, las actividades del aula, la implantación de las TIC, el estilo docente y el estilo de aprendizaje discente, etc. Se analizarán de manera crítica a continuación, en su correspondiente apartado.

La evaluación de la Unidad Didáctica se incluye en su bloque correspondiente (Propuesta: Unidad Didáctica, Conclusiones y evaluación de la Unidad Didáctica).

En el siguiente esquema se puede observar el ciclo del Análisis Didáctico, según (Gómez, 2002).

²⁹ (Martín García & Artés Rodríguez, 2012)

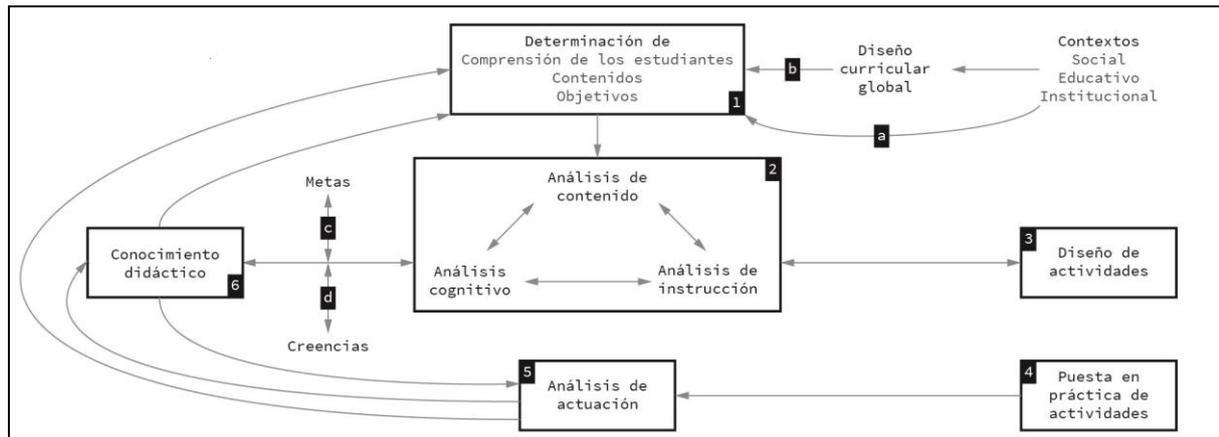


Figura 3.1 - Ciclo de análisis didáctico.

El análisis didáctico se inicia con la determinación del contenido que se va a tratar y de los objetivos que se quieren lograr, a partir de la percepción que el profesor tiene de la comprensión de los escolares con motivo de los resultados del análisis de actuación del ciclo anterior y teniendo en cuenta los contextos social, educativo e institucional en los que se enmarca la instrucción (cuadro 1 de la Figura 3.1 - Ciclo de análisis didáctico.). A partir de esta información, el profesor inicia la planificación con el análisis de contenido. La información que surge del análisis de contenido sustenta el análisis cognitivo. A su vez, la realización del análisis cognitivo puede dar lugar a la revisión del análisis de contenido. Esta relación simbiótica entre los análisis también se establece con el análisis de instrucción. Su formulación depende de y debe ser compatible con los resultados de los análisis de contenido y cognitivo, pero, a su vez, su realización puede generar la necesidad de corregir las versiones previas de estos análisis (cuadro 2). La selección de tareas que componen las actividades debe ser coherente con los resultados de los tres análisis y la evaluación de esas tareas a la luz de los análisis puede llevar al profesor a realizar un nuevo ciclo de análisis, antes de seleccionar definitivamente las tareas que componen las actividades de enseñanza y aprendizaje (relación entre cuadros 2 y 3). El profesor pone en práctica estas actividades (cuadro 4) y, al hacerlo, analiza las actuaciones de los escolares para obtener información que sirve como punto de inicio de un nuevo ciclo (cuadro 5). El conocimiento didáctico (cuadro 6) es el conocimiento que el profesor pone en juego durante este proceso.

(Gómez, 2002)

En el presente trabajo se aprovechará el concepto de Análisis Didáctico, como herramienta práctica asentada y bien definida teóricamente, para la elaboración de un análisis del contexto social, el contexto legislativo, las prácticas didácticas actuales, los libros de texto, etc., que ayude a la elaboración de la Unidad Didáctica tras las conclusiones extraídas.

3.2 ANÁLISIS DE CONTENIDO

Cuando hablamos de contenido nos referimos a todo el conjunto de conocimientos, aptitudes, procesos, etc., que se consideran relevantes para ser enseñados en Secundaria. Si nos ceñimos al tema del presente trabajo, el contenido sería todo el conocimiento matemático relacionado con los polígonos, que a su vez es parte de la geometría como rama matemática. Este contenido se acota y materializa finalmente en lo que establece la legislación: en “ANEXO 3 Currículo Académico LOMCE” se pueden consultar los contenidos, junto con los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables.³⁰

Expuesto lo anterior, junto con lo plasmado en “¿Qué se enseña? El currículo académico”, conviene exponer cómo se concreta ese contenido en la legislación, quién y de qué manera decide lo que debe ser enseñado.

En primer lugar, gracias a la perspectiva histórica, se puede afirmar que las inquietudes sociales de posguerra, surgidas en Europa durante la segunda mitad del siglo XX, generaron una serie de ciencias de la educación. Por lo tanto, el primer paso fue abordar el debate de la educación y formación de las generaciones futuras a través de la razón, desde el método científico. Esto deriva en décadas de modelos educativos, teorías de aprendizaje, etc., que ya establecen un primer acercamiento a la concreción de los currículos educativos en los países europeos (qué se debe enseñar, cómo se debe enseñar, qué dificultades superar, cómo hacerlo, etc.). Así es como comienza la definición de los contenidos en educación que conocemos actualmente.

Sin embargo, a pesar de un enfoque racional y científico en este sentido, ya vimos que la enseñanza de las matemáticas comenzó con un enfoque demasiado formalista y estructuralista. También se vio insuficiente la investigación general en educación y provocó el nacimiento de la Didáctica de la Matemática.

El siguiente paso en la concreción de los contenidos recae en cada nación, donde se tiene un debate social y político, tras el que se elaboran las diversas leyes educativas. En el caso de España, como ya se expuso en la perspectiva histórica, la primera implantación de una ley educativa moderna vino sin debate o análisis, adoptando la tendencia europea de manera directa. Fue con posterioridad, con las sucesivas leyes educativas cuando se comenzó a reformar de manera activa el sistema educativo. Sin embargo, hoy en día se siguen sin acotar cuestiones radicales, y se suceden leyes que responden a la ideología del gobierno de turno, aunque esto no afecta de manera directa a los contenidos, más bien a temas organizativos. Los contenidos que conocemos hoy en día llevan vigentes bastante tiempo y sufren modificaciones puntuales tras cada modificación legislativa.

3.2.1 Concreción curricular

En España el desarrollo del currículo en educación recae en las Comunidades Autónomas, ya que es una competencia de los gobiernos regionales. Conviene, por tanto, desarrollar los pasos del proceso por el que se concreta el contenido mínimo que debe impartir el profesor en el aula. Se denominan “niveles de concreción curricular”.

El primer nivel de la concreción curricular es la ley educativa de carácter estatal, tras la cual el Gobierno de la Nación dicta los mínimos exigidos para todas las Comunidades Autónomas. En el segundo nivel cada Autonomía desarrolla el documento elaborando el currículo oficial que, por lo tanto, puede ser distinto

³⁰ (Junta de Castilla y León, 2015)

entre las distintas regiones, pero siempre dentro del marco de la ley. Finalmente, los Centros Educativos elaboran un Proyecto Educativo, y las Áreas de estos lo desarrollan en las Programaciones Didácticas.³¹

Como se puede observar, la realidad política, social y cultural de cada país influye de manera directa en la actividad educativa. Por ello, el debate público es más que necesario, para elaborar un sistema robusto, eficaz, realista y eficiente.

3.2.2 Contenido de geometría

La geometría, como se ha plasmado anteriormente, ha sido una disciplina denostada en los currículos académicos de la historia reciente. Gracias a los movimientos críticos con la Matemática Moderna y la investigación posterior en educación, se ha terminado por implantar de manera definitiva dentro de los contenidos de matemáticas, e incluso está llegando a ser uno de los bloques más importantes para el desarrollo del alumno. La influencia de los bourbakistas en educación está desapareciendo y el profesorado formado en los sistemas antiguos tiene cada vez menor presencia.

Hoy en día se considera la geometría no solo como un bloque teórico dentro de la asignatura, sino también como una herramienta auxiliar para explicar otros conceptos matemáticos. También es una de las vías más directas para desarrollar el razonamiento matemático deductivo.

Para lograr todo esto se va abandonando el discurso anterior y los contenidos actuales recuerdan mucho a la geometría de la antigüedad: discurso lógico que construye los conocimientos desde elementos básicos, elaborando axiomas, demostrando teoremas, etc. Posteriormente se incluyen las operaciones y lenguajes más técnicos, puramente matemáticos (álgebra, plano cartesiano...), intentando que haya una continuidad entre ambas fases.

Para poder abarcar todo esto, la geometría se debe implantar en el aula con cuidadosa planificación, sobre todo por una cuestión: la representación. A diferencia de los demás bloques de la asignatura, en este tenemos diferentes maneras de contar, de mostrar, los mismos conceptos. Así pues, una idea u operación matemática puede ser descrita de manera verbal, de manera gráfica, de manera algebraica, de manera manipulativa, etc. A continuación se muestra un cuadro ejemplo que resume esta peculiaridad en el caso del concepto de triángulo.³²

³¹ Basado en los apuntes de Diseño Curricular en Matemáticas, siendo autor de estos y profesor de la asignatura Cesáreo Jesús González Fernández.

³² (Martín García & Artés Rodríguez, 2012).

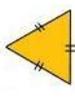
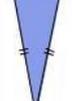
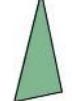
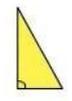
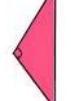
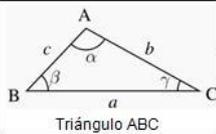
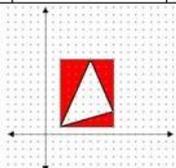
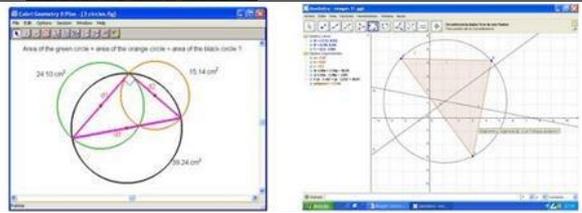
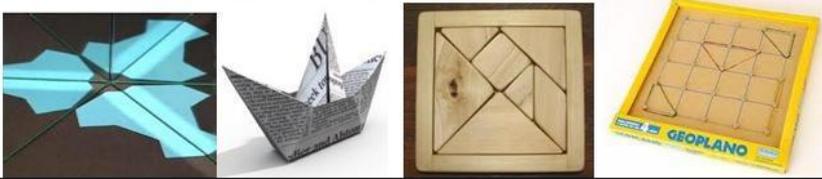
REPRESENTACIONES			NUMÉRICA					
			3 lados			3 ángulos		
			MÉTRICA					
VERBAL	definición y tipos	Un triángulo, o trígono es un polígono determinado por tres rectas que se cortan dos a dos en tres puntos que no se encuentran alineados (vértices).	Equilátero 3 lados iguales	Isósceles 2 lados iguales	Escaleno ningún lado igual	Rectángulo 1 ángulo recto	Obtusángulo 1 ángulo obtuso	Acutángulo 3 ángulos agudos
GRÁFICA	dibujo							
SIMBÓLICA	notación	 Triángulo ABC	Lados como segmento BC AC AB	Lados como longitudes a b c	Ángulos $\hat{\alpha} = \widehat{A} = \widehat{BAC}$ $\hat{\beta} = \widehat{B} = \widehat{ABC}$ $\hat{\gamma} = \widehat{C} = \widehat{ACB}$			
CARTESIANA	ejes de coordenadas							
FIGURATIVA	fenomenología							
TECNOLÓGICA	TIC							
MANIPULATIVA	modelos y materiales							

Figura 3.2 - Representaciones en geometría.

3.3 ANÁLISIS COGNITIVO

Una vez analizada la selección de los contenidos y su implantación en el marco educativo, centrémonos en el alumno, en el nivel de la etapa que nos ocupa, en las expectativas de aprendizaje, etc.

Primero se muestra un mapa conceptual de los conocimientos (la geometría euclídea en general y la geometría de polígonos en particular). Posteriormente se extraen unos objetivos que se quieren lograr a través de la Unidad Didáctica (expectativas de aprendizaje). Se plasma también el perfil competencial que relaciona los contenidos, los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables, con las Competencias Clave. Estos objetivos se desarrollan con más detalle en las actividades diseñadas para el aula. Finalmente se muestra una explicación de los errores más comunes.

En este punto es vital conocer también las circunstancias socioculturales del alumnado, el centro, el entorno familiar, etc., pero esto se desarrollará con más detalle en la introducción contextual de la Unidad Didáctica. En este punto se pretende hacer un esbozo más genérico del análisis cognitivo en la enseñanza de la geometría de polígonos en Educación Secundaria.

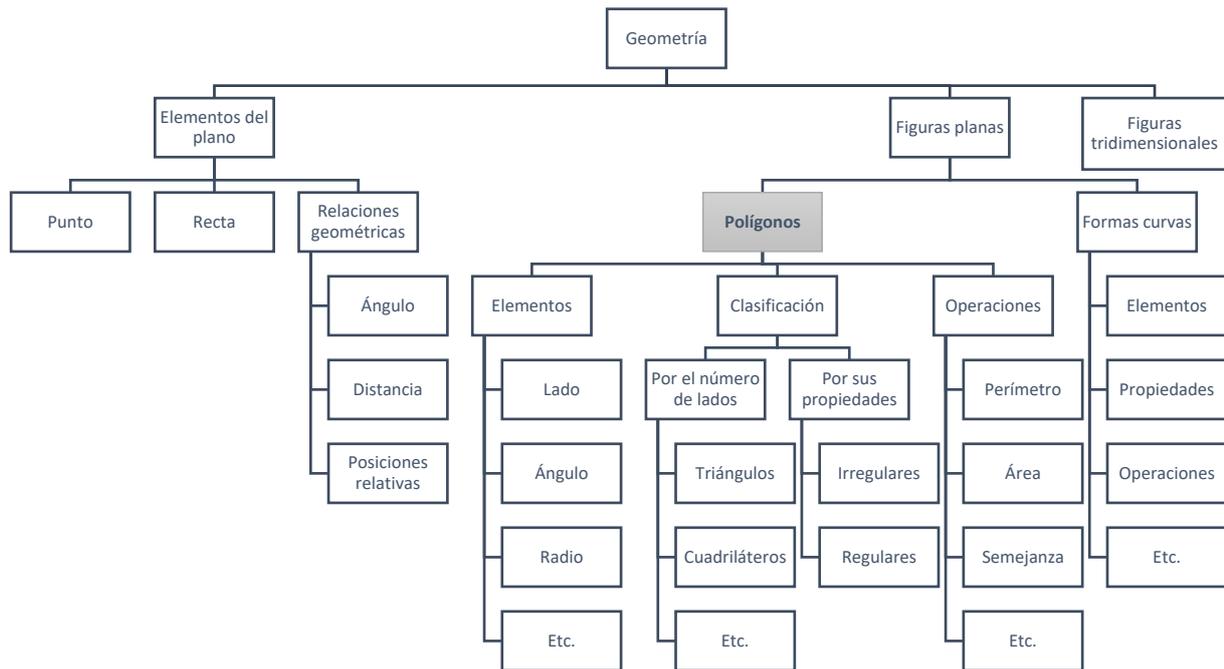


Figura 3.4 - Mapa conceptual.

3.3.2 Expectativas de aprendizaje

Objetivos didácticos	Competencias						
	<u>CCL</u>	<u>CMCT</u>	<u>CD</u>	<u>CAA</u>	<u>CSC</u>	<u>SIE</u>	<u>CC</u>
Conocer los elementos básicos de la geometría plana.		X		X	X		X
Dominar y usar la nomenclatura de los elementos geométricos.	X	X					X
Reconocer la posición relativa entre dos elementos geométricos.	X	X					
Conocer la definición de ángulo y su clasificación.	X	X		X			
Conocer las construcciones geométricas básicas y sus propiedades.		X					
Operar con distintos recursos (regla y compás, papiroflexia, medios informáticos...) para hallar los lugares geométricos relevantes.		X		X		X	X
Reconocer las distintas figuras geométricas y sus propiedades, en sus representaciones gráfica y figurativa.	X	X		X			
Identificar los elementos más importantes de las figuras: vértices, lados, ángulos y elementos notables.	X	X				X	X
Utilizar con corrección las notaciones simbólicas de los elementos configuradores de las figuras geométricas.	X	X					
Conocer los criterios de clasificación de las figuras.		X		X			X
Proporcionar argumentos para justificar a qué tipo pertenece una figura geométrica.	X	X				X	
Ejemplificar figuras geométricas a partir de su definición.		X					
Describir situaciones y contextos en los que se encuentren figuras geométricas.	X	X			X	X	X
Apreciar la aportación de la geometría a otros ámbitos del conocimiento humano, como el arte y la arquitectura.		X		X	X		X
Planificar, elaborar y defender individualmente un proyecto gráfico en el que se incluya la geometría como medio de expresión de ideas y conceptos.	X	X			X	X	
Utilizar las figuras geométricas y sus propiedades como medio de resolución de problemas sencillos de la vida cotidiana.		X		X		X	

Tabla 6 - Objetivos didácticos con competencias asociadas.

3.3.3 Perfil competencial

A continuación, se presenta la tabla del perfil competencial para el bloque de geometría de la asignatura de Ámbito Científico y Matemático I: relaciona lo dispuesto en la legislación³³ con las Competencias Clave.

CONTENIDOS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES	COMPETENCIAS CLAVE ASOCIADAS							
			CCL	CMCT	CD	CAA	CSC	SIE	CEC	
Figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales. Circunferencia, círculo, arcos y sectores circulares. Cálculo de áreas y perímetros. Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples.	1. Reconocer y describir figuras planas, sus elementos y propiedades características que permiten clasificarlas, identificar situaciones, describir el contexto físico, y abordar problemas de la vida cotidiana.	1.1. Reconoce y describe las propiedades características de los polígonos regulares: ángulos interiores, ángulos centrales, diagonales, apotema, simetrías, etc.	X						X	
		1.2. Define los elementos característicos de los triángulos, trazando los mismos y conociendo la propiedad común a cada uno de ellos, y los clasifica atendiendo tanto a sus lados como a sus ángulos.	X	X		X			X	
		1.3. Clasifica los cuadriláteros y paralelogramos atendiendo al paralelismo entre sus lados opuestos y conociendo sus propiedades referentes a ángulos, lados y diagonales.		X		X			X	
		1.4. Identifica las propiedades geométricas que caracterizan los puntos de la circunferencia y el círculo.		X		X				
Uso de herramientas informáticas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.	2. Utilizar estrategias, herramientas tecnológicas y técnicas simples de la geometría analítica plana para la resolución de problemas de perímetros, áreas y ángulos de figuras planas. Utilizar el lenguaje matemático	2.1. Resuelve problemas relacionados con distancias, perímetros, superficies y ángulos de figuras planas, en contextos de la vida real, utilizando las herramientas tecnológicas y las técnicas geométricas más apropiadas		X	X	X	X	X		

³³ (Junta de Castilla y León, 2016). Se puede consultar en “ANEXO 3 Currículo Académico LOMCE”.

CONTENIDOS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES	COMPETENCIAS CLAVE ASOCIADAS							
			CCL	CMCT	CD	CAA	CSC	SIE	CEC	
	adecuado para expresar los procedimientos seguidos en la resolución de los problemas geométricos.	2.2. Calcula la longitud de la circunferencia, el área del círculo, la longitud de un arco y el área de un sector circular, y las aplica para resolver problemas geométricos.		X					X	
Revisión de los triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Aplicaciones.	3. Reconocer el significado aritmético del Teorema de Pitágoras (cuadrados de números, ternas pitagóricas) y emplearlo para resolver problemas geométricos.	3.1. Comprende los significados aritmético y geométrico del Teorema de Pitágoras y los utiliza para la búsqueda de ternas pitagóricas.	X	X		X			X	
		3.2. Aplica el teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas en la resolución de triángulos y áreas de polígonos regulares, en contextos geométricos o en contextos reales.		X		X	X	X		
Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales. Semejanza: Figuras semejantes. Criterios de semejanza. Razón de semejanza y escala. Aplicación a la resolución de problemas en contextos reales.	4. Utilizar el Teorema de Tales y las fórmulas usuales para obtener medidas. Analizar e identificar figuras semejantes, calculando la escala o razón de semejanza. Calcular las dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos.	4.1. Reconoce figuras semejantes y calcula la razón de semejanza utilizando el teorema de Tales para el cálculo indirecto de longitudes.		X		X				
		4.2. Utiliza la escala para resolver problemas de la vida cotidiana sobre planos, mapas y otros contextos de semejanza.		X			X	X	X	
Poliedros y cuerpos de revolución. Elementos característicos, clasificación. Áreas y volúmenes. Propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros. Cálculo de longitudes, superficies y volúmenes en el mundo físico.	5. Analizar distintos cuerpos geométricos (cubos, ortoedros, prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas) e identificar sus elementos característicos (vértices, aristas, caras y desarrollos planos)	5.1. Analiza e identifica las características de distintos cuerpos geométricos, utilizando el lenguaje geométrico adecuado.		X		X			X	
		5.2. Identifica los cuerpos geométricos a partir de sus desarrollos planos y recíprocamente.		X					X	
	6. Resolver problemas que conlleven el cálculo de longitudes, superficies y volúmenes del mundo físico, utilizando propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros.	6.1. Resuelve problemas de la realidad mediante el cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos, utilizando los lenguajes geométrico y algebraico adecuados.		X		X	X	X	X	X

Tabla 7 - Perfil competencial.

3.3.4 Limitaciones y errores

Las dificultades de los alumnos en el proceso de aprendizaje de la geometría son múltiples y variados. De hecho, es quizás el bloque de las matemáticas en el que más errores se cometen. Tras todo lo expuesto en el apartado de marco teórico, podemos resumir las siguientes afirmaciones como causas³⁴ de este hecho:

- La matemática moderna ha influido mucho en la enseñanza de la geometría de manera lineal y deductiva. Esto contradice la propuesta de Van Hiele, ya que un alumno no será capaz de comprender deducciones en niveles superiores al que se encuentre.
- Tampoco es recomendable el enfoque de memorizar fórmulas u operaciones para obtener longitudes, áreas, etc. Sin embargo, también es un hecho que se da con frecuencia. En este caso también se contradicen los niveles de Van Hiele.
- Por último, es habitual ver que los docentes priman los otros bloques de matemáticas, muchas veces impartiendo geometría en poco tiempo, o incluso prescindiendo de partes del temario.

Aparte de estas tres causas señaladas, existen otros fenómenos que pueden generar confusión entre los alumnos (la representación de las figuras en los libros siempre en la misma posición, las rupturas y los saltos que se producen en el cambio de etapa, etc.).

Se plasma a continuación una lista de los errores³⁵ más habituales en el aprendizaje de la geometría:

- Identificación de los conceptos geométricos con sus representaciones.
Es habitual confundir el concepto de un objeto geométrico con su representación, ya que este siempre se cuenta en el aula mediante dicha representación. Con los medios informáticos se puede mitigar esta dificultad. (Ejemplo: la representación de una recta es finita, pero la recta es infinita).
- Dificultades asociadas a la tridimensionalidad.
Aunque no están en relación con el tema de este trabajo conviene tenerlos en cuenta. Son numerosos, pero muchos de los errores surgen de la enseñanza de figuras tridimensionales a través de representaciones bidimensionales. Una manera de solucionarlo sería el trabajo de materiales manipulativos tridimensionales (maquetas), por ejemplo.
- Orientación y posicionamiento.
Estos problemas surgen sobre todo a la hora de pasar de una geometría euclídea a una analítica, cartesiana. También se encuentran múltiples dificultades en los temas de geometría terrestre (esférica), que está en el currículo.
- Transición hacia la geometría analítica.
Ya se ha comentado con anterioridad. Este cambio trae consigo múltiples errores y dificultades. Por un lado, las geometrías descriptiva y analítica se entienden como dos cosas diferentes. Por otro lado, se arrastran dificultades del álgebra, de la aritmética... lenguajes y operaciones que se incluyen.
- Conceptos geométricos que involucran otras áreas.
Cuestiones como la relación entre proporcionalidad en geometría y proporcionalidad entre magnitudes (progresiones geométricas y aritméticas), entre otras.

³⁴ Causas extraídas de (Arce Sánchez, Conejo Garrote, & Muñoz Escolano, 2019).

³⁵ Errores y dificultades de (Arce Sánchez, Conejo Garrote, & Muñoz Escolano, 2019, pág. 297).

3.4 ANÁLISIS INSTRUCCIONAL

Partiendo de la dicotomía “constructivismo vs empirismo” planteada por (Arce Sánchez, Conejo Garrote, & Muñoz Escolano, 2019), y sin perder de vista que no se trata de extremos rígidos, contrapuestos e incompatibles, la mejor manera de abordar la enseñanza de la geometría es comenzar por un enfoque constructivista, desde los conceptos más básicos, sumando al proceso de enseñanza del contenido otro aprendizaje: el del discurso lógico deductivo. Para conceptos más elevados y complejos se puede optar por un enfoque empírico, presentando construcciones, clasificaciones, teoremas, conceptos, etc., más elevados. Finalmente, convirtiendo la geometría en ciencia, método y modelo.³⁶

Es importante tener en cuenta el modelo de niveles de Van Hiele, ya que hay muchas ideas que el alumnado comprenderá solo si está en el nivel de aprendizaje idóneo. Por poner un ejemplo: es posible que un alumno de 2º de ESO no pueda comprender una clasificación de los triángulos por inclusión (y lo más probable es que esa sea la razón por la que ninguno de los libros de texto la incluyen). ¿Quiere decir eso que no lo podremos enseñar en el aula? No. Dependerá del nivel del alumnado. El docente deberá analizar a los estudiantes para diseñar las actividades de la manera más adecuada.

En definitiva, habrá que adecuar el discurso al nivel del alumnado, y el enfoque podrá ser constructivista solo con aquellos discursos deductivos que el alumno pueda entender para su nivel.

3.4.1 Metodologías elegidas

Las metodologías seleccionadas para el diseño de la UD son las siguientes:

- Lección magistral
- Aprendizaje Basado en Problemas
- Resolución de Problemas
- Tareas y ejercicios
- Actividades manipulativas
- Geogebra
- Portafolio

Se detallan de manera pormenorizada en el apartado Metodología del bloque Propuesta: Unidad Didáctica. Todas se caracterizan por buscar una actitud activa por parte del alumnado.

Esta decisión de mantener al alumno activo durante la actividad del aula, y sobre todo la de explotar al máximo los primeros minutos de clase, se debe al siguiente hecho, constatado por John Medina³⁷:

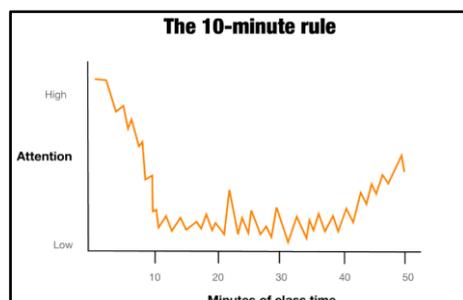


Figura 3.5 - La regla de los 10 minutos, según John Medina.

³⁶ (Alsina Catalá, Fortuny Aymemí, & Pérez Gómez, 1997)

³⁷ (Medina, 2008)

La regla de los 10 minutos. Publicado en su libro “Brain rules”. Se trata de ver cómo la atención de los alumnos decae a lo largo de las clases. Sufre un pequeño repunte al final, que también se plantea aprovechar mediante las actividades en clase.

Aparte de la atención, la actitud activa ayuda a otras cuestiones:

- Memorización: el hecho de copiar las definiciones, dibujar las figuras, realizar todas las operaciones, etc., ayuda a memorizarlas mucho más que estudiando de un libro.
- Deducción: el planteamiento de problemas y ejercicios genera el conflicto cognitivo necesario para crear oportunidades de aprendizaje. En el proceso de resolución el alumno intenta generar un discurso matemático.
- Motivación: trabajar con las manos, o elaborar los apuntes propios, mantiene al discente mucho más motivado que escuchando un discurso teórico. Se pueden incluir también componentes de gamificación si se desea.

Se ha descartado la inclusión de aprendizaje cooperativo, u otras actividades que impliquen contacto, aunque se está convencido de las bondades de estas metodologías, por razones de salud pública. La situación actual con la pandemia de la COVID-19 se decide aprovechar por parte del autor como una oportunidad, un desafío, de diseñar una UD igual de eficiente que las implantadas con anterioridad al virus.

3.4.2 Actividades de enseñanza y aprendizaje

Las actividades se desarrollan detalladamente en el apartado Actividades de aprendizaje y enseñanza del bloque Propuesta: Unidad Didáctica. Están descritas mediante una serie de fichas que contienen toda la información necesaria para desarrollarla.

Se dividen en dos bloques: teóricas y prácticas. Algunas incluso contienen ambas características. Están enfocadas en un objetivo principal: que el alumno trabaje en su portafolio.

Algunas cuestiones se explican mediante lección magistral, donde el alumno escucha y refleja el conocimiento en su portafolio, a su manera y con su estilo, aprendiendo a seleccionar y categorizar la información. Otros temas, también teóricos, tienen un enfoque más basado en ABP: se comienza con una pregunta, o un problema. Se puede incluir un pequeño repaso a conocimientos previos, o una introducción teórica, pero el objetivo es generar conflicto cognitivo. En las actividades de enfoque práctico sobre todo se proponen problemas, ejercicios... Todo esto apoyado por Geogebra, sirviendo de apoyo en muchas de las actividades.

3.5 LIBROS DE TEXTO REVISADOS

Los libros que se han revisado son los siguientes:

- Sánchez Ruiz, M., & Solís Fraile, R. (2019). *Ámbito Científico y Matemático I*. Editex.
- Colera, J., García, J., Gaztelu, I., & Oliveira, M. (1998). *Matemáticas, 3: Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: Anaya.
- Colera, J., Gaztelu, I., de Guzmán, M., & García, J. (1996). *Matemáticas, 1 : Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: Anaya.
- Colera, J., Gaztelu, I., de Guzmán, M., & García, J. (1997). *Matemáticas, 2: Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: Anaya.
- Marea Verde. (abril de 2020). *Apuntes Marea Verde*. Recuperado el 10 de 12 de 2020, de <https://www.apuntesmareaverde.org.es/>

Los libros de texto han ayudado en el diseño de las actividades, la revisión y el desarrollo del contenido, etc. Han sido más una herramienta de trabajo que un objeto de investigación. No se ha hecho un análisis crítico y exhaustivo del material, aunque se han detectado algunas erratas, omitido contenidos, incluido otros, etc. Esta labor no se encontraba entre las intenciones de este trabajo, aunque podría haber formado parte de este bloque de Análisis Crítico perfectamente.

Otros libros consultados, que también contienen actividades de geometría y contenido teórico son:

- Alsina Catalá, C., Fortuny Aymemí, J., & Pérez Gómez, R. (1997). *¿Por qué geometría? Propuestas Didácticas para la ESO*. Madrid: Síntesis.
- Chamoso Sánchez, J., Fernández Benito, I., & Reyes Iglesias, M. (2009). *Burbujas de arte y matemáticas*. Tres Cantos: Nivola.
- Fernández Benito, I., & Reyes Iglesias, M. (2018). *Periplo por la geometría de Valladolid*. Valladolid: Ayuntamiento de Valladolid.
- Reyes Iglesias, E., & Fernández Benito, I. (2015). *Pentágonos: Construcciones. Mosaicos. Geometría sagrada*. Valladolid: Universidad de Valladolid.

4 PROPUESTA: UNIDAD DIDÁCTICA

ÍNDICE

4.1 Reflexión previa	54
4.2 Introducción contextual	54
4.3 Competencias clave	55
4.4 Objetivos didácticos	57
4.4.1 Objetivos generales	57
4.4.2 Objetivos propios	57
4.4.3 Objetivos didácticos	57
4.4.4 Perfil competencial.....	57
4.5 Contenidos.....	57
4.5.1 Contenidos mínimos según la legislación vigente	57
4.5.2 Desarrollo del bloque de Geometría en temas	58
4.6 Metodología	58
4.6.1 Lección magistral y debate teórico	58
4.6.2 Aprendizaje Basado en Problemas	59
4.6.3 Resolución de Problemas	59
4.6.4 Tareas y ejercicios	59
4.6.5 Actividades manipulativas.....	59
4.6.6 Geogebra	59
Portafolio.....	60
4.7 Recursos	60
4.8 Distribución temporal y secuenciación de contenidos	61
4.9 Actividades de aprendizaje y enseñanza.....	62
4.10 Planes complementarios	94
4.11 Evaluación.....	96
4.11.1 Procedimientos de evaluación	96
4.11.2 Instrumentos de evaluación	97
4.12 Atención a la diversidad	97
4.13 Conclusiones y evaluación de la Unidad Didáctica.....	98
4.14 Bibliografía y Referencias	98

4.1 REFLEXIÓN PREVIA

La Unidad Didáctica desarrollada a continuación se presenta como el instrumento práctico, aplicable a la realidad, en el que desemboca el análisis crítico previamente desarrollado siendo, por lo tanto, una conclusión más de este.

Desde un primer momento la intención ha sido probar este instrumento en el aula, experimentarlo. En el momento que se comenzó a redactar este trabajo aún no se conocían los detalles de la asignatura de Practicum del máster. Una vez iniciada esa fase práctica se ha constatado que la UD efectivamente puede aplicarse en el aula. El tutor del centro es docente de un grupo con características adecuadas (nivel del alumnado, asignatura, bloque de geometría aún no impartido en el presente curso, etc.) para la implantación, aunque de forma parcial, de esta programación. El grupo que se ha elegido es el de 2º de ESO – PMAR (Programa de Mejora del Aprendizaje y el Rendimiento) del centro. Se detallará más sobre esta cuestión en el apartado de Introducción Contextual.

Llegados hasta aquí, huelga decir que el bloque de geometría, aun siendo solo el de polígonos, de toda la Educación Secundaria es inabarcable. Desarrollar la unidad de solo un curso es una acotación necesaria. Además, en el caso que nos ocupa, el grupo afectado estudió durante el curso anterior este temario en el peor momento de la pandemia de COVID-19 (confinamiento de la primera ola, con muchas ausencias en las clases en red, y tratándose de alumnos de bajo rendimiento académico). Dicho esto, parece obvio que se trata de un 2º de ESO en el que se precisa una adaptación previa del temario:

- Se comenzará desde los conceptos de 1º de ESO, intentando asentar estos antes de alcanzar el nivel de la etapa.
- Se procurará recalcar los conceptos más básicos, los axiomas desde los que se construye la geometría euclídea.

4.2 INTRODUCCIÓN CONTEXTUAL

Centro: Colegio Nuestra Señora del Carmen (Valladolid).

La presente Unidad Didáctica está dirigida a un grupo de 2º de ESO (PMAR) del Colegio de Nuestra Señora del Carmen, con el contenido del bloque 3: Geometría.

Según ORDEN EDU/362/2015, de 4 de mayo, el contenido del currículo en matemáticas para 2º de ESO se estructura en los siguientes bloques:

1. Contenidos comunes
2. Números y álgebra
- 3. Geometría**
4. Funciones
5. Estadística y Probabilidad

Según ORDEN EDU/590/2016, de 23 de junio, el contenido del currículo en Ámbito Científico y Matemático para 2º de ESO – PMAR se estructura en los siguientes bloques:

1. La actividad científica
2. La materia
3. El movimiento y las fuerzas
4. Energía
5. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas

6. Números y álgebra
- 7. Geometría**
8. Funciones
9. Estadística y probabilidad

En este caso, al tratarse de un grupo PMAR (Programa de Mejora del Aprendizaje y del Rendimiento), las matemáticas están incluidas en la asignatura de Ámbito Científico y Matemático. Esto permite desarrollar una gran cantidad de horas lectivas en poco tiempo, pudiendo concentrar un bloque completo de matemáticas en un mes, y siguiendo después con la programación habitual que incluye otras materias como biología, tecnología, física y química, etc. Esta es una circunstancia que se aprovechará para la intervención.

Expuesto todo lo anterior, la división en temas del bloque que se impartirá queda de la siguiente manera:

1. **Elementos del Plano.**
2. **Polígonos: triángulos.**
3. **Polígonos: cuadriláteros.**
4. La Circunferencia.
5. **Áreas y Perímetros.**
 - a. Descomposición de formas complejas.
 - b. Polígonos regulares.
6. **Teorema de Pitágoras.**
7. **Teorema de Tales.**
8. Poliedros y cuerpos de revolución.
 - a. Volumen.

En negrita se resaltan los temas que tratan de manera directa los polígonos, o contienen aspectos esenciales para su enseñanza. Son los temas que se desarrollarán en contenidos y actividades de enseñanza y aprendizaje.

4.3 COMPETENCIAS CLAVE

4.3.1 Competencia en Comunicación Lingüística

Al trabajar con elementos muy visuales, es importante aprender a expresarse con rigor y exactitud cuándo describimos lo que vemos. Se hará hincapié en esa capacidad de poder describir algo con precisión, sin la necesidad de dibujarlo. Para ello, también será necesario enriquecer el vocabulario con términos específicos del campo (lado, apotema, diagonal, radio...).

4.3.2 Competencia Matemática y Competencias Básicas en Ciencia y Tecnología

Al tratarse de un bloque de la asignatura de matemáticas, esta es quizás la competencia que más se trabaja de manera explícita. La geometría permite, y en este caso más, construir una lógica desde elementos muy fáciles de presentar y comprender: punto, recta... Las matemáticas por lo general son complejas por su componente abstracto, que en la geometría se mitiga gracias a la aplicabilidad del mundo real: medir, dibujar... acciones que están en el mismo origen de la geometría como ciencia y, por tanto, en las propias matemáticas.

4.3.3 Competencia Digital

En todo momento se trabajará desde la plataforma de Google Classroom, que es la que utiliza el colegio. Los alumnos cuentan con tableta digital, cuenta de usuario y acceso a todos los recursos que se presentarán en clase. También se trabajará Geogebra para demostraciones, ejercicios y dibujos.

4.3.4 Competencia de Aprender a Aprender

La selección de metodologías activas, la necesidad de elaborar un portafolio y el ABP son factores que influyen en la adquisición de esta competencia. Se fomentará en todo momento la autonomía del alumno a la hora de aprender. En ningún momento se prohíbe la consulta del libro de texto u otras fuentes, a pesar de estar trabajando en un portafolio. Sin embargo, se debe hacer hincapié en hacerlo con sentido crítico.

4.3.5 Competencias Sociales y Cívicas

Esta es la competencia que más desafíos plantea en los tiempos actuales. Debido a la pandemia de la COVID-19 se hace muy difícil implantar trabajos grupales, aprendizaje cooperativo, u otras actividades que fomenten la interacción social y el trabajo en equipo. Se trabajará la adquisición de la competencia a través de los debates teóricos (consensuar definiciones, resoluciones de problemas...) y las actividades complementarias de excursiones y visitas (actividades fuera del aula).

4.3.6 Competencia en Sentido de la Iniciativa y Espíritu Emprendedor.

La gran ventaja de la geometría es la estrecha relación con contextos del “mundo real”, de la vida cotidiana y el día a día, así como de la economía de la gente. En geometría se pueden plantear cuestiones relacionadas con el mercado inmobiliario (áreas, perímetros, edificabilidad...), elementos de diseño industrial (empaquetamiento eficiente, volúmenes, formas...), conceptos del mundo del arte y la arquitectura, etc. Estas cuestiones pueden resultar interesantes a la hora de poner ejemplos que faciliten la comprensión e importancia de los conceptos geométricos. En muchos casos concretos, a lo largo de la historia, se han visto éxitos empresariales basados en innovaciones geométricas.

4.3.7 Competencia en Conciencia y expresiones Culturales.

Al igual que se ha mencionado en la competencia anterior, este es otro ámbito en el que la geometría se relaciona de manera directa con la vida cotidiana. La expresión gráfica, o analítica, de cuestiones geométricas ha aparecido en diversas culturas a lo largo de la historia: desde las ternas pitagóricas talladas por los babilonios, hasta los mosaicos de la Alhambra. Es interesante que los alumnos conozcan ese dato.

4.4 OBJETIVOS DIDÁCTICOS

4.4.1 Objetivos generales

Los objetivos generales de la Educación Secundaria, los objetivos generales de matemáticas y los objetivos específicos del bloque de geometría, según la legislación vigente, se plasman en “ANEXO 2 Objetivos didácticos ESO – LOMCE”.

4.4.2 Objetivos propios

Debido a las circunstancias generales provocadas por la pandemia, y las circunstancias particulares del grupo de alumnos concreto, junto con las exigencias legislativas comunes que se exigen, los objetivos principales de esta intervención serán:

- Repasar los conceptos más elementales de la geometría plana.
- Construir conocimiento geométrico duradero, gracias a ejercicios prácticos y a partir de los axiomas más básicos.
- Reforzar el hábito de trabajo y estudio en los alumnos de PMAR.
- Trabajo con TIC: Geogebra, herramientas Google (presentaciones, hojas de cálculo...), etc.

4.4.3 Objetivos didácticos

Los objetivos didácticos que se proponen para esta Unidad Didáctica se pueden consultar en el apartado “Expectativas de aprendizaje” del bloque de “Análisis crítico”. Se ha decidido omitir para evitar duplicidad de información.

4.4.4 Perfil competencial

Los objetivos didácticos que se proponen para esta Unidad Didáctica se pueden consultar en el apartado “Perfil competencial” del bloque de “Análisis crítico”. Se ha decidido omitir para evitar duplicidad de información.

4.5 CONTENIDOS

4.5.1 Contenidos mínimos según la legislación vigente

Según ORDEN EDU/362/2015³⁸, de 4 de mayo, el contenido mínimo de este bloque es el siguiente:

- Figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales.
- Circunferencia, círculo, arcos y sectores circulares. Cálculo de áreas y perímetros.
- Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples.
- Uso de herramientas informáticas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.
- Revisión de los triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Justificación geométrica y aplicaciones.
- Semejanza: figuras semejantes. Criterios de semejanza. Razón de semejanza y escala. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.

³⁸ (Junta de Castilla y León, 2015)

- Poliedros y cuerpos de revolución. Elementos característicos, clasificación. Áreas y volúmenes. Propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros. Cálculo de longitudes, superficies y volúmenes en el mundo físico.

Como se ha mencionado anteriormente, estos alumnos de PMAR presentan una gran carencia en la comprensión de conceptos básicos de geometría, debido principalmente a dos razones: la impartición telemática de este bloque el curso anterior, a causa de la pandemia, y la falta de hábitos de estudio y trabajo que arrastran de cursos anteriores. Por tanto, los contenidos presentados en la intervención son de elaboración propia, basados primordialmente en el libro de texto que se plasma en la Programación Didáctica del curso (Sánchez Ruiz & Solís Fraile, 2019).

4.5.2 Desarrollo del bloque de Geometría en temas

TEMA 0	Elementos del plano: punto y recta. Relaciones entre ellos: pertenencia, ángulos y posiciones relativas. Ejercicios de papiroflexia.
TEMA 1	Polígonos: concepto y partes. Primer polígono: el triángulo. Concepto y propiedades. Clasificación. Ejercicios con regla y compás. Geogebra.
TEMA 2	Polígonos: el cuadrilátero. Concepto y propiedades. Clasificación. Ejercicios de clasificación. Geogebra.
TEMA 3	Circunferencia: concepto, elementos, propiedades, el círculo.
TEMA 4	Áreas y perímetros. Concepto, definición. Áreas y perímetros de polígonos y círculos. Descomposición de formas complejas. Los polígonos regulares, particularidades.
TEMA 5	Teorema de Pitágoras. Enunciado y demostraciones. Aplicaciones y ejercicios.
TEMA 6	Teorema de Tales. Enunciado y demostraciones. Aplicaciones y ejercicios: semejanza.
TEMA 7	Poliedros y cuerpos de revolución. Concepto, clasificaciones, partes y propiedades. Volúmenes. Ejercicios: cálculo de longitudes, áreas y volúmenes.

4.6 METODOLOGÍA

4.6.1 Lección magistral y debate teórico

El debate teórico se presenta como una alternativa a la tradicional y clásica lección magistral. Se trata de presentar los contenidos más teóricos de manera interactiva con el alumno: sesiones de pregunta-respuesta donde se le guíe a la elaboración de las definiciones, enunciados de los teoremas, etc. Esta actividad en realidad es una combinación de lección magistral y aprendizaje basado en problemas, llegando en ocasiones a ser puramente una u otra cosa. En esos precisos instantes de enunciado puro, o solución de un problema, surgirán los axiomas, las definiciones y los teoremas que se reflejarán en el portafolio de manera formal.

Preguntas como “¿Qué es geometría?”, “¿Qué es una recta?”, “¿Cuántos lados tiene un triángulo?”, etc., son las que forzarán al alumnado a construir el discurso teórico.

Aprovechando los primeros minutos de clase, en los que el alumnado muestra máxima atención y disposición, se presentarán estos contenidos teóricos (ya sea en discurso de lección magistral, aprendizaje basado en problemas o una combinación de ambas).

4.6.2 Aprendizaje Basado en Problemas

El ABP es una metodología muy activa que precisa de un alto nivel de motivación para funcionar. El objetivo es generar un conflicto cognitivo a través de un problema a resolver. Esta situación abre una oportunidad de aprendizaje.

A diferencia de la resolución de problemas, el ABP se caracteriza por el hecho de que el problema se presenta previo a los conocimientos teóricos necesarios para resolverlo. De ahí la oportunidad de aprendizaje. Dependiendo del contenido se podría precisar un repaso de conocimientos previos, o una introducción de conceptos clave.

4.6.3 Resolución de Problemas

Durante las explicaciones teóricas se intercalarán problemas de los que se extraerán conceptos e ideas.

Resolución de problemas para practicar la aplicación de las fórmulas demostradas en clase: papiroflexia, regla y compás, dibujo a mano alzada, cálculo de magnitudes aplicando los teoremas de Pitágoras, de Tales, áreas y perímetros, descomposición en partes...

La característica más importante de la resolución de problemas es que impliquen metodología activa (regla, compás, papiroflexia, TIC...), relacionando el saber con el hacer. Además, es interesante incluir en cada problema una novedad respecto a los anteriores, para no caer en la aplicación mecánica algorítmica.

4.6.4 Tareas y ejercicios

Se proponen ejercicios simples de cálculo de una o más variables (lado, altura, área, volumen), para ejemplificar la aplicación práctica de las fórmulas, los teoremas, etc.

4.6.5 Actividades manipulativas

Se trabajará fundamentalmente con regla y compás (o a mano alzada), papiroflexia y Geogebra. Todas las actividades se adaptarán a la exigencia de los protocolos por la pandemia de COVID-19: no se compartirán materiales, los alumnos no saldrán a la pizarra, etc.

El entorno facilita las cosas ya que todos los estudiantes cuentan con tableta digital y tienen acceso a una plataforma en línea (Google Classroom) gestionada por el profesor. Existen, por tanto, medios para realizar un seguimiento a distancia y sin contacto.

Las actividades que desarrollaremos en el aula son las siguientes:

1. Dibujo a mano alzada (o regla y compás). Nos ayudaremos de dibujos y esquemas para clasificar las figuras y los elementos geométricos vistos en clase. También es útil para hacer clasificaciones conceptuales: dibujo de conjuntos y trazado de tablas.
2. Papiroflexia. Con la papiroflexia podemos explicar conceptos elementales (la recta = un pliegue) y a la vez operaciones geométricas (mediatriz, bisectriz...). Y todo ello con los mínimos recursos requeridos y sin moverse del sitio.

4.6.6 Geogebra

Ya sea a través de la tableta gráfica en clase o realizando sesiones en el aula de ordenadores, Geogebra es una herramienta maravillosa para trabajar geometría de manera visual.

Se trata de un programa de geometría dinámica que contiene multitud de herramientas para dibujo, cálculo, análisis... Se puede implantar en el aula con multitud de objetivos:

- Dibujo en tiempo real a través de un proyector por parte del profesor para mostrar operaciones, procesos, construcciones.
- Actividades diseñadas por otros autores de la plataforma de Geogebra. Existen muchos recursos creados por otros docentes que se pueden mostrar en el aula como material de apoyo. Incluso hay juegos, ejercicios y otros materiales manipulativos.
- Ejercicios planteados al alumno. Se pueden dedicar sesiones en el aula de informática a enseñar a los alumnos a usar el programa y resolver ejercicios y problemas (como la resolución de ecuaciones a través de geometría analítica, por ejemplo).

Portafolio

Todo lo anteriormente expuesto se verá reflejado en un portafolio.

La idea es forzar a los alumnos a construir el conocimiento de manera práctica y autónoma, evitando la lectura y memorización mecánica. Tanto el conocimiento teórico, como las actividades prácticas se irán recogiendo en una carpeta de manera organizada.

4.7 RECURSOS

Los recursos que se utilizarán en el aula para el desarrollo de la Unidad Didáctica son los siguientes:

1. Cuaderno → PORTAFOLIO
2. Bolígrafos, lápices, rotuladores. Para escribir, dibujar...
3. Tableta digital.
4. Pizarra y tizas.
5. Proyector y pantalla.
6. Regla y compás. *

*Se procurará desarrollar la unidad con los mínimos recursos, por lo tanto, el uso de regla y compás será opcional, en principio todos los dibujos se podrán hacer a mano alzada. El dibujo preciso es propio de la asignatura de dibujo, en matemáticas interesa más un dibujo reflexivo.

4.8 DISTRIBUCIÓN TEMPORAL Y SECUENCIACIÓN DE CONTENIDOS

La distribución de los contenidos y actividades se hará como sigue:

	Contenidos	Actividades
S-1	TEMA 0	Presentación del portafolio, debate teórico y primeras definiciones. Recta y punto. Posiciones relativas.
S-2	TEMA 0	Bisectriz, mediatriz... Papiroflexia.
S-3	TEMA 1	Definición de polígono, presentación del triángulo, ABP + teoría.
S-4	TEMA 1	Clasificación de los triángulos: tabla en el portafolio. Geogebra en el proyector.
S-5	TEMA 1	Elementos notables y propiedades de los triángulos. ABP + teoría.
S-6	TEMA 2	Cuadriláteros. Propiedades y clasificación. ABP + teoría.
S-7	TEMA 2	Cuadriláteros. Propiedades y clasificación. ABP + teoría.
S-8	TEMA 2	Cuadriláteros. Propiedades y clasificación. ABP + teoría. Repaso: Tangram de papel.
S-9	TEMA 3	Circunferencia: concepto, elementos, propiedades, el círculo.
S-10	TEMA 3	Circunferencia: concepto, elementos, propiedades, el círculo.
S-11	TEMA 4	Definición de perímetro y área. Fórmulas de las figuras conocidas hasta ahora (deducción).
S-12	TEMA 4	Fórmulas de área y perímetro de las figuras conocidas hasta ahora (deducción). Cálculo de formas complejas: descomposición. Área del Tangram.
S-13	TEMA 4	Polígonos regulares: definición. Clasificación por el número de lados. Partes notables: radio, apotema, diagonal, lado...
S-14	TEMA 4	Polígonos regulares: cálculo de área y perímetro (deducción). Construcción de los más notables con regla y compás.
S-15	TEMA 5	Teorema de Pitágoras. Enunciado y demostraciones.
S-16	TEMA 5	Teorema de Pitágoras: aplicaciones.
S-17	TEMA 5	Teorema de Pitágoras: aplicaciones.
S-18	TEMA 6	Teorema de Tales. Enunciado y demostraciones.
S-19	TEMA 6	Teorema de Tales: aplicaciones.
S-20	TEMA 6	Teorema de Tales: aplicaciones.

4.9 ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA

A continuación, se plasman de manera más detallada el desarrollo de cada uno de los temas, tanto las explicaciones teóricas como las actividades prácticas. Se van a desarrollar siguiendo el siguiente esquema tipo:

Número y nombre de la actividad

Tipo de actividad: teórica/práctica.

Tiempo: Tiempo estimado en minutos o número de sesiones en las que se desarrolla.

Objetivos que persiguen: de los objetivos propios, también expuestos en el análisis cognitivo de la enseñanza de polígonos.

Competencias que se trabajan: las competencias clave que se persigue desarrollar con la actividad.

Descripción de la actividad. Texto e imágenes, enunciado y soluciones, definiciones, etc.

Solución. Si procede.

4.9.1 TEMA 0 - Elementos del plano

Se comienza a numerar desde 0, y no desde 1, porque este primer tema se considera de repaso, de conceptos y conocimientos que se dan por sabidos de cursos anteriores. El desarrollo de este bloque puede ser tan exhaustivo como el docente desee, depende del contexto del aula, llegando incluso a no impartirse.

ACTIVIDAD 0.1

El punto y la recta

Tipo de actividad: Teórica

Tiempo: 15-20 min

Objetivos que persigue:

- Conocer los elementos básicos de la geometría plana.
- Dominar y usar la nomenclatura de los elementos geométricos.

Competencias: CCL, CMCT, CAA, CC

Descripción de la actividad

Explicación teórica de lo que es un PUNTO y una RECTA, los elementos básicos de la geometría plana.

El **PUNTO**: Un punto no tiene dimensiones. Sirve para indicar una posición. Se denotan con letras mayúsculas.

La **RECTA**: Una recta tiene una dimensión: longitud. Se designan mediante dos de sus puntos o mediante una letra minúscula. Dos puntos determinan una recta. Una recta indica una dirección y dos sentidos contrarios, según se recorra la recta de un punto a otro o viceversa.

Dos rectas que se cortan determinan un punto.

Una SEMIRRECTA es cada una de las partes en que queda dividida una recta por cualquiera de sus puntos. Segmento es la porción de recta limitada por dos puntos, llamados extremos. Se designa por los puntos que lo limitan y su longitud por una letra minúscula.

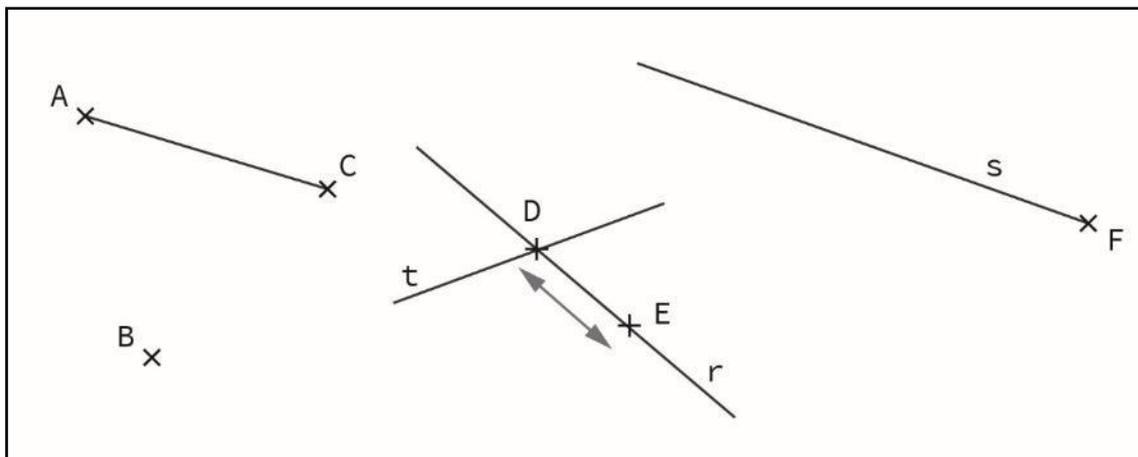


Figura 4.1 - El punto y la recta.

En la (Figura 4.1 - El punto y la recta.) se pueden observar los puntos A, B, C, D, E y F, las rectas r y t, la semirrecta s y el segmento AC.

ACTIVIDAD 0.2

Posiciones relativas

Tipo de actividad: Teórica

Tiempo: 15-20 min

Objetivos que persigue:

- Conocer los elementos básicos de la geometría plana.
- Dominar y usar la nomenclatura de los elementos geométricos.
- Reconocer la posición relativa entre dos elementos geométricos.

Competencias: CCL, CMCT, CAA, CC

Descripción de la actividad

Punto – punto: las posiciones relativas que pueden tener dos puntos entre sí son solo dos: coincidentes o no.

Recta – punto: un punto puede estar en una recta o no.

Recta – recta: dos rectas pueden ser secantes (se cortan en un único punto), paralelas (no se cortan en ningún punto) o coincidentes (si todos los puntos son comunes).

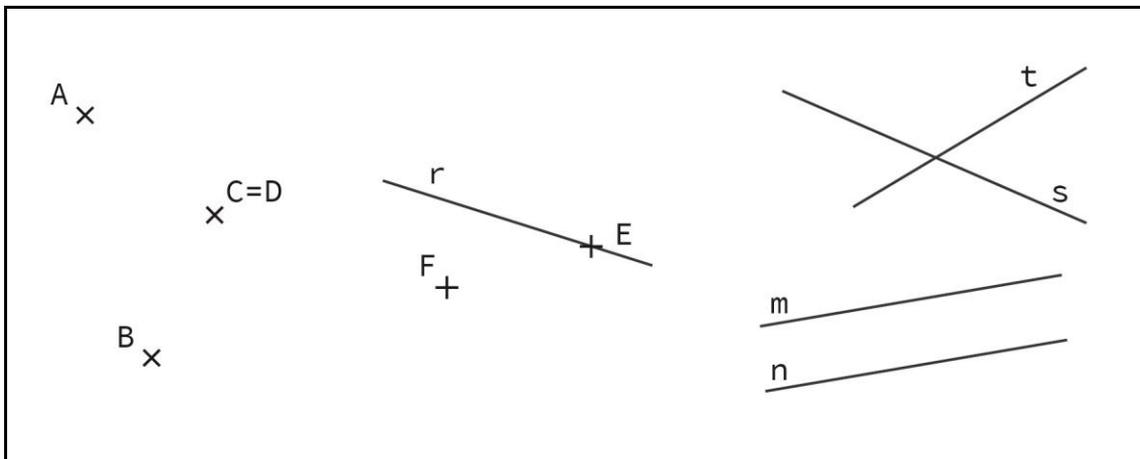


Figura 4.2 - Posiciones relativas.

ACTIVIDAD 0.3

El ángulo

Tipo de actividad: Teórica

Tiempo: 25-30 min

Objetivos que persigue:

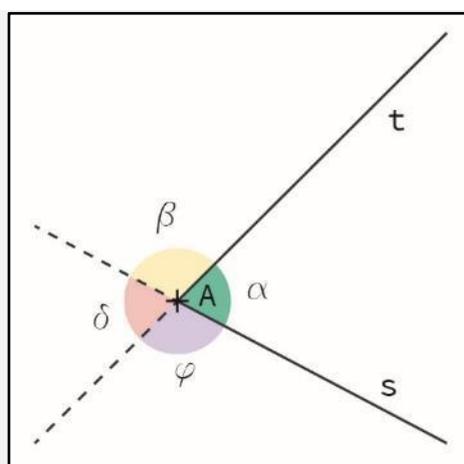
- Dominar y usar la nomenclatura de los elementos geométricos.
- Conocer la definición de ángulo y su clasificación.

Competencias CCL, CMCT, CAA

Descripción de la actividad

Definición de **ÁNGULO**: Parte del plano que determinan dos semirrectas. Consta de dos lados y un vértice.

La medida de un ángulo se expresa en: grados, sexagesimales o centesimales, o radianes.



Dos rectas (s y t) que se cortan en un punto (A) generan 4 ángulos (α , β , δ y φ), que en realidad son iguales dos a dos.

Esta demostración es sencilla de realizar en la pizarra, o a través de una diapositiva. Partiendo de una recta (s), un punto (A) en (s), y una semirrecta (t), oblicua a (s) [no paralela] con origen en (A), se puede observar que:

$$\beta = 180^\circ - \alpha$$

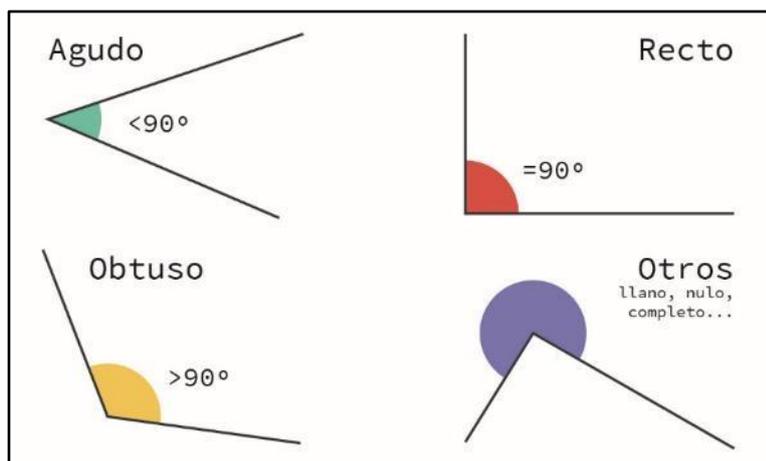
Con la misma analogía, invirtiendo (s) y (t), se puede demostrar que:

$$\delta = 180^\circ - \beta$$

Por lo tanto: $\delta = 180^\circ - (180^\circ - \alpha)$

$$\delta = \alpha$$

Figura 4.3 - El ángulo.



Los ángulos se clasifican en:

- Agudo: aquel que mide menos de 90° ($< \pi / 2$)
- Recto: aquel que mide exactamente 90° ($= \pi / 2$)
- Obtuso: aquel que mide más de 90° ($> \pi / 2$)

Otros: llano, oblicuo, nulo...

Figura 4.4 - Clasificación de los ángulos.

Ejercicio: ¿Qué ángulo forman dos rectas paralelas?

Solución: Dos rectas paralelas forman 0° . De esto se deduce que una recta secante a dos rectas paralelas forma el mismo ángulo con ambas.

ACTIVIDAD 0.4³⁹

Operaciones básicas

Tipo de actividad: Teórica

Tiempo: 20-25 min

Objetivos que persigue:

- Conocer las construcciones geométricas básicas y sus propiedades.
- Operar con distintos recursos (regla y compás, papiroflexia, medios informáticos...) para hallar los lugares geométricos relevantes.

Competencias: CCL, CMCT, CAA, CSC

Descripción de la actividad

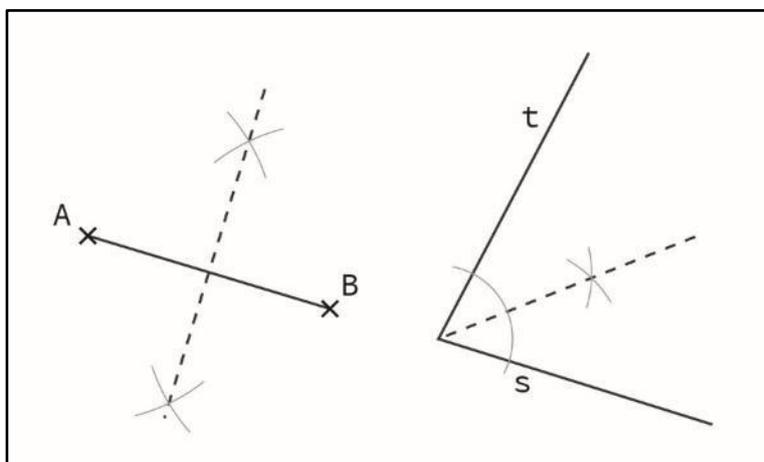


Figura 4.5 - Operaciones básicas.

- ❖ Mediatriz de un segmento
 - Definición: Lugar geométrico de los puntos equidistantes de los puntos dados A y B (extremos del segmento).
- ❖ Bisectriz de un ángulo
 - Definición: Lugar geométrico de los puntos equidistantes de las rectas dadas r y s (lados del ángulo).

Construcción de ambas operaciones con regla y compás.

³⁹ Con esta actividad podremos tantear la introducción al concepto de “lugar geométrico”, que en estos niveles es complicado de comprender.

ACTIVIDAD 0.5

Introducción a la papiroflexia

Tipo de actividad: Práctica

Tiempo: 20-25 min

Objetivos que persigue:

- Conocer las construcciones geométricas básicas y sus propiedades.
- Operar con distintos recursos (regla y compás, papiroflexia, medios informáticos...) para hallar los lugares geométricos relevantes.

Competencias: CCL, CMCT, CAA, CC

Descripción de la actividad

Presentar la papiroflexia como herramienta para hacer matemáticas. Con papel y lápiz, introducir los conceptos de: marcar puntos en el papel, realizar rectas mediante pliegues...

Ejercicio: Mediante pliegues de papiroflexia, ¿cómo se realiza la mediatriz de un segmento?, ¿cómo se realiza la bisectriz de un ángulo?, ¿cómo se realiza la perpendicular a una recta por un punto?, ¿cómo se realiza la paralela a una recta por un punto?

Soluciones:

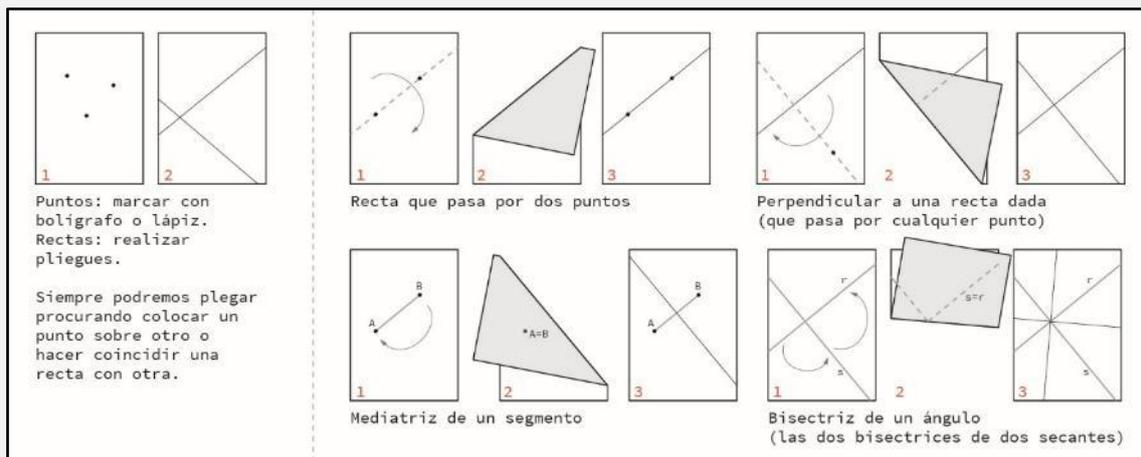


Figura 4.6 - Operaciones con papiroflexia.

4.9.2 TEMA 1 – Polígonos: el triángulo

ACTIVIDAD 1.6

Los polígonos - el triángulo

Tipo de actividad: Teórica

Tiempo: 10-15 min

Objetivos que persigue:

- Reconocer las distintas figuras geométricas y sus propiedades, en sus representaciones gráfica y figurativa.
- Dominar y usar la nomenclatura de los elementos geométricos.
- Identificar los elementos más importantes de las figuras: vértices, lados, ángulos y elementos notables.

Competencias: CCL, CMCT, CAA, CSC, CC

Descripción de la actividad

Con los puntos y las rectas, elementos básicos de la geometría plana, se pueden delimitar regiones del plano denominadas polígonos (del griego *πολύγωνος* [polúgōnos] = *πολύ* [polú], “muchos” + *γωνία* [gōnía], “ángulo”). Para que una figura plana se considere polígono no debe contener lados curvos.

El **triángulo** es el polígono del plano de menor número de lados. Con tres puntos no alineados del plano se define un único triángulo, concepto importante a recalcar y transmitir al alumno. Es interesante también tantear las distintas percepciones que se tiene de los triángulos: aparte de tres puntos no alineados del plano, el polígono se puede percibir a partir de tres rectas secantes dos a dos, o como la región del espacio que delimitan, con sus segmentos como lados. Aun tratándose del mismo triángulo, el alumno lo puede entender de manera diferente.

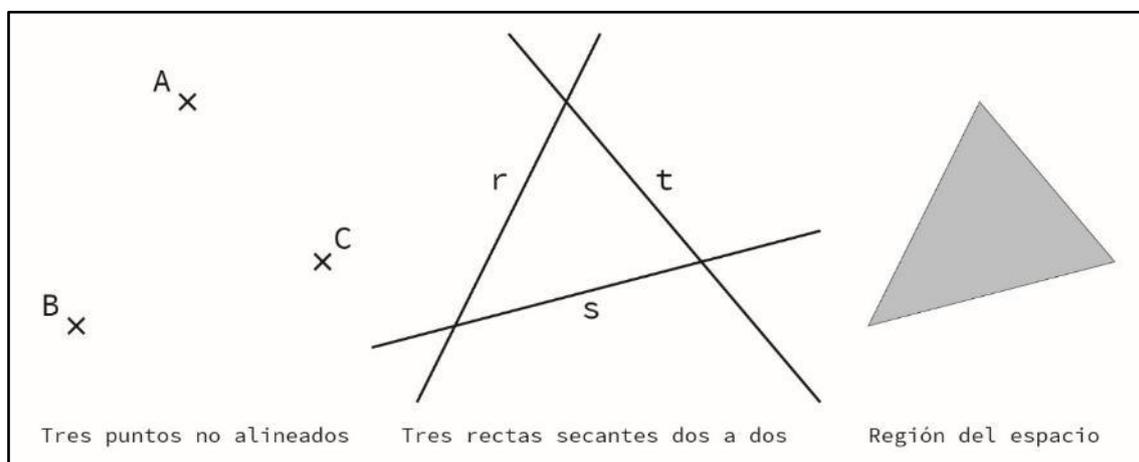


Figura 4.7 - Definición de triángulo.

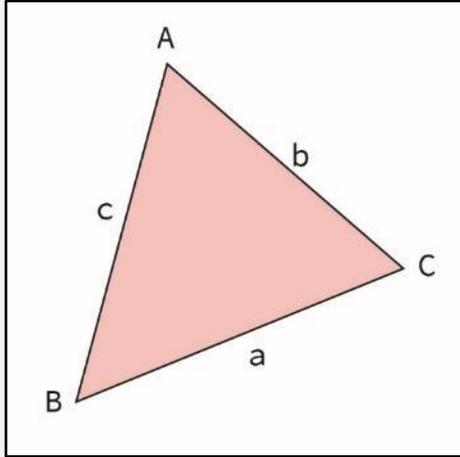


Figura 4.8 - Vértices y lados.

Los tres puntos (A, B y C) se denominan **vértices**.

Los segmentos que resultan de unirlos dos a dos (AB, AC y BC) se denominan **lados**. Muchas veces se escriben con la letra minúscula del vértice opuesto: el triángulo ABC tendría lados a, b y c.

ACTIVIDAD 1.7

Dibujar el triángulo

Tipo de actividad: Práctica

Tiempo: 30 min

- Objetivos que persigue:**
- Conocer las construcciones geométricas básicas y sus propiedades.
 - Operar con distintos recursos (regla y compás, papiroflexia, medios informáticos...) para hallar los lugares geométricos relevantes.
 - Reconocer las distintas figuras geométricas y sus propiedades, en sus representaciones gráfica y figurativa.
 - Identificar los elementos más importantes de las figuras: vértices, lados, ángulos y elementos notables.

Competencias: CMCT, CAA, SIE

Descripción de la actividad

Definir un triángulo a través de la posición de los vértices es sencillo: dados tres puntos en el plano basta con unirlos dos a dos con la regla para terminar plasmando los lados sobre el papel.

Ejercicio: dibujar con regla y compás un triángulo, dados tres lados (tres segmentos dibujados o su longitud).

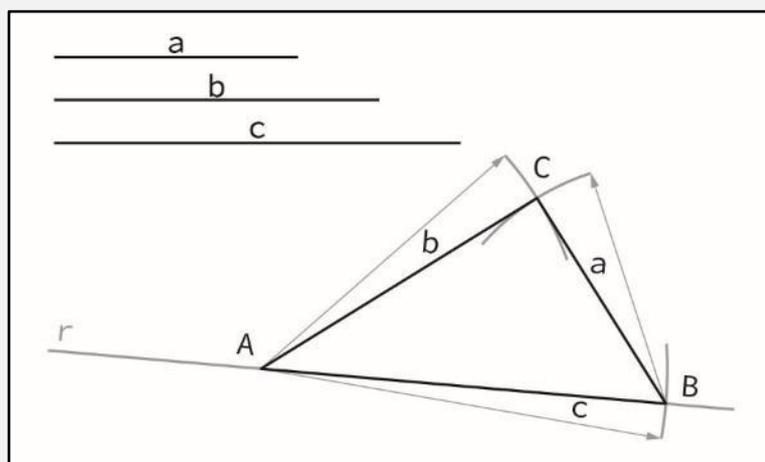


Figura 4.9 - Construcción del triángulo.

Sobre una recta dada (r) se toma un punto (A) cualquiera como primer vértice del triángulo. Llevamos la longitud del primer lado con el compás (c) y así obtenemos el segundo vértice (B). Para hallar el tercer vértice tomamos las longitudes de los otros dos lados (b y c) y hacemos dos arcos desde A y B . Donde se cortan ambos arcos se halla C .

Las cuatro soluciones:

Prestar especial atención a la posibilidad de intercambiar b y c , dando lugar al triángulo simétrico.

También existe la posibilidad de realizar los arcos por el otro semiplano que determina r .

Ejercicio: utilizando el método anterior, dibujar un triángulo de lados 8, 4 y 3 cm respectivamente.

Solución: el triángulo pedido es imposible. El objetivo es que el alumno se dé cuenta de eso intentando dibujarlo.

De aquí se deduce la primera propiedad de los triángulos: la suma de la longitud de dos lados cualesquiera debe ser superior a la longitud del lado restante.

ACTIVIDAD 1.8

Propiedades de los triángulos

Tipo de actividad: Teórica y práctica

Tiempo: 20-25 min

- Objetivos que persigue:**
- Operar con distintos recursos (regla y compás, papiroflexia, medios informáticos...) para hallar los lugares geométricos relevantes.
 - Reconocer las distintas figuras geométricas y sus propiedades, en sus representaciones gráfica y figurativa.
 - Identificar los elementos más importantes de las figuras: vértices, lados, ángulos y elementos notables.

Competencias: CCL, CMCT, CD, CAA, CSC, SIE, CC

Descripción de la actividad

De la actividad anterior se deduce la primera de una serie de propiedades que cumplen todos los triángulos.

1. Las longitudes a , b y c de los lados de todo triángulo cumplen la siguientes relaciones:
$$a + b > c$$
$$a + c > b$$
$$b + c > a$$
2. Los ángulos de todo triángulo suman 180° .
3. Con tres lados dados se puede construir un único triángulo. Esto quiere decir que, si se intenta dibujar otro triángulo con los mismos lados, este será igual al primero. Se denominan “triángulos congruentes”.⁴⁰

Para demostrar la propiedad 2 se proponen las siguientes actividades en el aula:

1. Demostrar la suma de ángulos mediante dibujo de regla y compás. Como se vio en la actividad 0.3, una secante a dos paralelas forma el mismo ángulo con ambas. Por tanto, trazando por un vértice del triángulo una paralela al lado opuesto obtenemos dos rectas paralelas entre sí que se cortan con los otros dos lados. Se comprueba que la suma de los tres ángulos se reconoce en la paralela trazada.
2. Realizar las operaciones descritas en la imagen con un papel con forma triangular para comprobar que los tres ángulos se encuentran en el mismo punto, sumando 180° .

⁴⁰ Las reglas de congruencia se incluyen como actividad complementaria. En este nivel, 2º de ESO, es improbable que se pueda realizar, pero es posible que la presencia de alumnos aventajados lo permita.

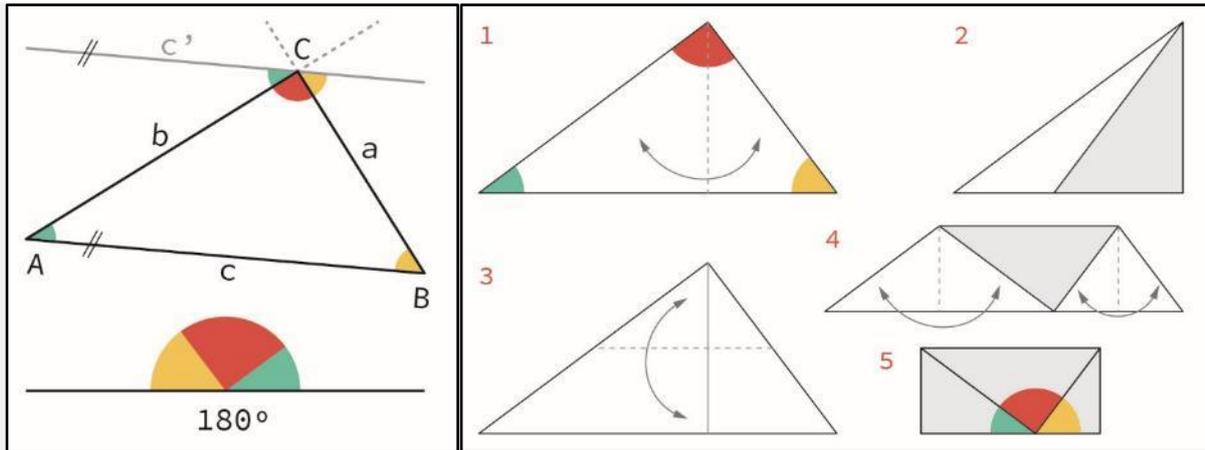


Figura 4.10 - Demostración gráfica de la suma de ángulos. (izq.)

Figura 4.11 - Demostración mediante papiroflexia de la suma de ángulos. (dcha.)

ACTIVIDAD C.9

Los postulados de congruencia en triángulos

Tipo de actividad: Teórica y práctica

Tiempo: 30-35 min

Descripción de la actividad

Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres lados y sus tres ángulos iguales. Sin embargo, esto se cumple si:

AsA → Angle-side-Angle → Ángulo-lado-Ángulo

sAs → side-Angle-side → lado-Ángulo-lado

sss → side-side-side → lado-lado-lado

AAAs → Angle-Angle-side → Ángulo-Ángulo-lado

*Estas 4 reglas se llaman "postulados de congruencia".

ACTIVIDAD 1.10

Clasificación de los triángulos⁴¹

Tipo de actividad: Teórica y práctica.

Tiempo: 1 sesión

Objetivos que persigue:

- Identificar los elementos más importantes de las figuras: vértices, lados, ángulos y elementos notables.
- Conocer los criterios de clasificación de las figuras.
- Proporcionar argumentos para justificar a qué tipo pertenece una figura geométrica.

Competencias: CCL, CMCT, CD, CAA, CSC, SIE, CC

Descripción de la actividad

Explicación teórica de cómo se clasifican los triángulos.

Según los ángulos:

- Acutángulo → todos los ángulos agudos.
- Rectángulo → un ángulo recto.
- Obtusángulo → un ángulo obtuso.

Según los lados:

- Escaleno → todos los lados diferentes.
- Isósceles → dos lados iguales.
- Equilátero → todos los lados iguales. (polígono REGULAR)

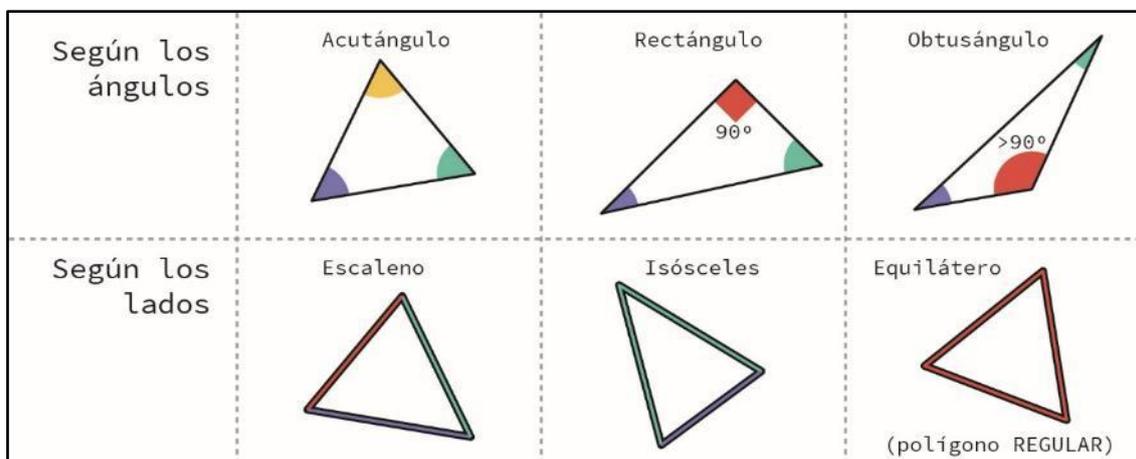


Figura 4.12 - Clasificación de los triángulos.

⁴¹ Las clasificaciones que se trabajan en estos niveles son casi siempre por partición (al menos en los libros de texto consultados). Esto induce muchas veces a error en el alumnado, creyendo, por ejemplo, que un triángulo equilátero no es isósceles. Se propone una actividad complementaria para trabajar con clasificación por inclusión, pero se recomienda solo para alumnos aventajados.

Dos ejercicios de Geogebra para practicar reconociendo los triángulos:

- Triángulos (clasificación), por Ceferino A.: <https://www.geogebra.org/m/yjSR5skR> (consultado por última vez 10/07/2021).
- Jugamos a clasificar triángulos, por Javier Cayetano Rodríguez: <https://www.geogebra.org/m/rywpw5eb> (consultado por última vez 10/07/2021).

En un enfoque ABP se pueden generar cuestiones durante el discurso teórico: ¿es posible que un triángulo sea rectángulo e isósceles? ¿puede un triángulo tener dos ángulos obtusos? ¿por qué?

ACTIVIDAD C.11

Clasificación de los triángulos (variante por inclusión)

Tipo de actividad: Teórica

Tiempo: 15-20 min

Descripción de la actividad

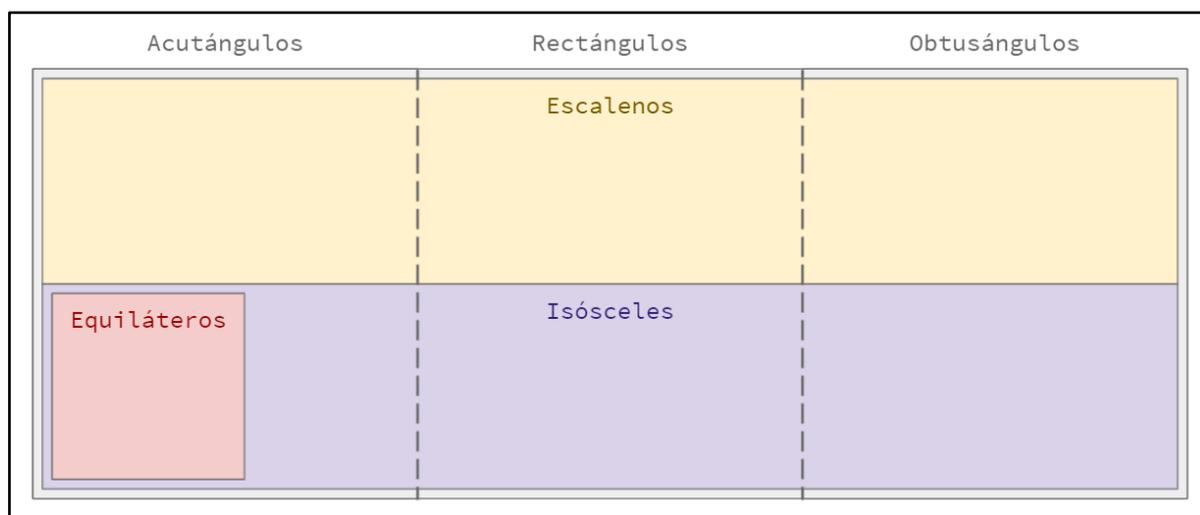


Tabla 8 - Clasificación de los triángulos por inclusión.

ACTIVIDAD 1.12

Elementos notables de los triángulos

Tipo de actividad: Teórica y práctica

Tiempo: 1 sesión

Objetivos que persigue:

- Operar con distintos recursos (regla y compás, papiroflexia, medios informáticos...) para hallar los lugares geométricos relevantes.
- Identificar los elementos más importantes de las figuras: vértices, lados, ángulos y elementos notables.
- Utilizar con corrección las notaciones simbólicas de los elementos configuradores de las figuras geométricas.

Competencias: CCL, CMCT, CD

Descripción de la actividad

Además de lados y vértices, en los triángulos podemos localizar una serie de elementos que tienen importantes propiedades:

- **Bisectriz (b):** Es la bisectriz de uno de los ángulos.
- **Mediatriz (m):** Es la mediatriz de uno de los lados.
- **Altura (h):** Es la perpendicular a un lado que pasa por el vértice opuesto.
- **Mediana (m_{ed}):** Es la recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

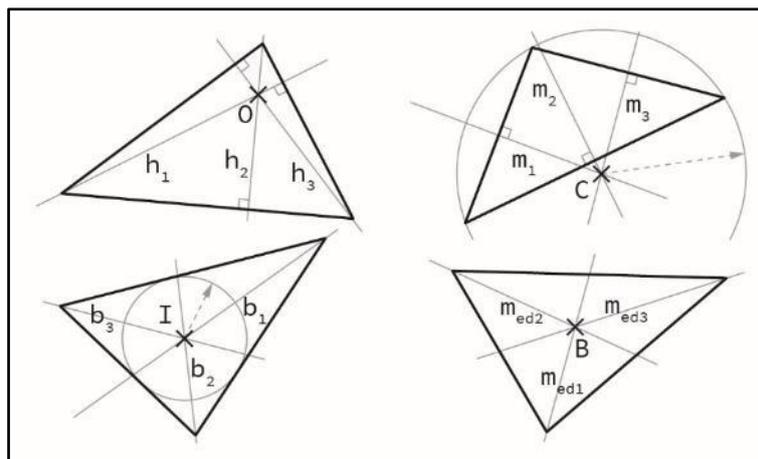


Figura 4.13 - Elementos notables del triángulo.

Estas rectas notables se cortan en los siguientes puntos:

- En el **incentro** se cortan todas las bisectrices.
- En el **circuncentro** se cortan todas las mediatrices.
- En el **ortocentro** se cortan todas las alturas.

En el **baricentro** se cortan todas las medianas.

Ejercicios:

- Trazar las bisectrices, las mediatrices, las alturas y las medianas de un triángulo con regla y compás.
- Trazar todos los elementos anteriores mediante pliegues de papiroflexia. En un enfoque ABP dejar que el alumno busque los recursos vistos en clase para resolver el ejercicio. (La actividad 0.5, realizada previamente, nos facilita todas las herramientas).

Un recurso de Geogebra para visualizar los elementos notables de los triángulos:

- Elementos de un triángulo. Puntos y rectas notables. Por Julieta Jiménez y Joaquín Jiménez Ramos. <https://www.geogebra.org/m/fswdwzrp> (Consultado por última vez 14/07/2021).

En este nivel quizás conviene excluir la recta de Euler de la explicación. Sin embargo, se incluye en el recurso de Geogebra y se puede también incluir en la explicación para los alumnos aventajados.

4.9.3 TEMA 2 – Polígonos: el cuadrilátero

ACTIVIDAD 2.13

El cuadrilátero

Tipo de actividad: Teórica

Tiempo: 10-15 min

Objetivos que persigue:

- Reconocer las distintas figuras geométricas y sus propiedades, en sus representaciones gráfica y figurativa.
- Identificar los elementos más importantes de las figuras: vértices, lados, ángulos y elementos notables.
- Utilizar con corrección las notaciones simbólicas de los elementos configuradores de las figuras geométricas.

Competencias: CCL, CMCT, CAA, SIE, CC

Descripción de la actividad

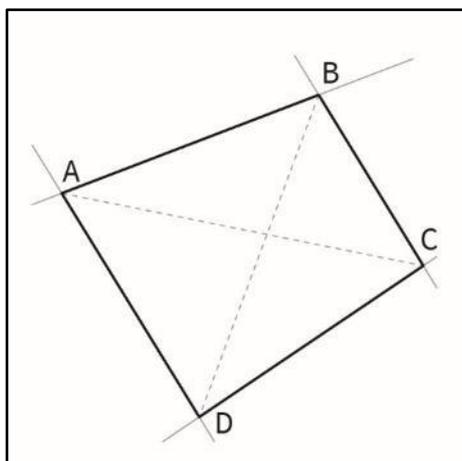


Figura 4.14 - El cuadrilátero y sus partes.

El **cuadrilátero**, al igual que el triángulo, se puede definir a través de puntos en el espacio que representan sus vértices. La unión entre esos puntos dos a dos determinan los lados. Es un polígono de 4 vértices y 4 lados.

Los cuadriláteros poseen los siguientes elementos fundamentales:

- Lados y vértices.
- Diagonales: segmentos que unen vértices no consecutivos.

ACTIVIDAD 2.14

Suma de ángulos

Tipo de actividad: Práctica

Tiempo: 20-25 min

- Objetivos que persigue:**
- Reconocer las distintas figuras geométricas y sus propiedades, en sus representaciones gráfica y figurativa.
 - Utilizar con corrección las notaciones simbólicas de los elementos configuradores de las figuras geométricas.
 - Planificar, elaborar y defender individualmente un proyecto gráfico en el que se incluya la geometría como medio de expresión de ideas y conceptos.
 - Utilizar las figuras geométricas y sus propiedades como medio de resolución de problemas sencillos de la vida cotidiana.

Competencias: CCL, CMCT, CD, CAA, CSC, SIE, CC

Descripción de la actividad

Enfoque ABP: ¿Cuánto suman los ángulos de un cuadrilátero? ¿Siempre sumarán lo mismo o dependen de la figura?

Dejar que el alumno intente deducirlo con lo aprendido hasta ahora.

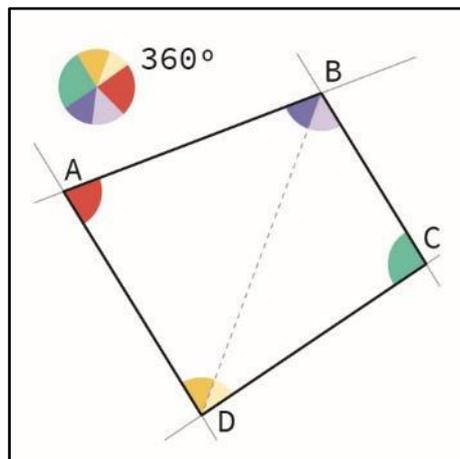


Figura 4.15 - Suma de los ángulos de cualquier cuadrilátero.

Ejercicio:

¿Es posible generalizar la suma de ángulos a cualquier polígono?

ACTIVIDAD 2.15

Clasificación de los cuadriláteros

Tipo de actividad: Teórica

Tiempo: 1 sesión

- Objetivos que persigue:**
- Reconocer las distintas figuras geométricas y sus propiedades, en sus representaciones gráfica y figurativa.
 - Utilizar con corrección las notaciones simbólicas de los elementos configuradores de las figuras geométricas.
 - Conocer los criterios de clasificación de las figuras.
 - Proporcionar argumentos para justificar a qué tipo pertenece una figura geométrica.

Competencias: CCL, CMCT, CD, CAA, SIE, CC

Descripción de la actividad

Una manera sencilla de construir la clasificación de estos polígonos, sin entrar en conceptos complejos y discursos extremadamente rígidos, es la siguiente: partiendo del cuadrado, el cuadrilátero más sencillo de entender, imaginamos que desplazamos, estiramos o rotamos alguno de los lados. Cada movimiento convertirá el cuadrado en algún cuadrilátero. Este proceso es muy sencillo de realizar con Geogebra. Se adjunta esquema de lo descrito.

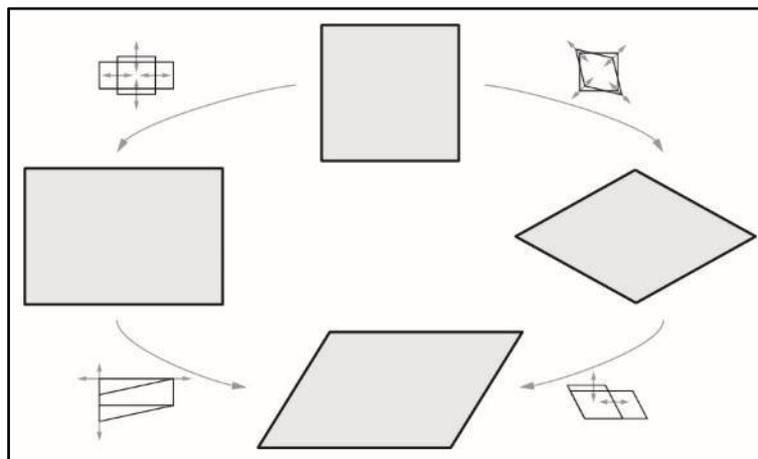


Figura 4.16 - Los paralelogramos.

Con las restricciones de deformación anteriores (solo desplazamiento de los lados) obtenemos un grupo de cuadriláteros a partir del cuadrado, que son los paralelogramos. Se caracterizan por tener los lados paralelos dos a dos (claro, no hemos rotado ninguno de los lados en el proceso de deformación). Veamos ahora qué pasa si rotamos uno o más lados del paralelogramo.

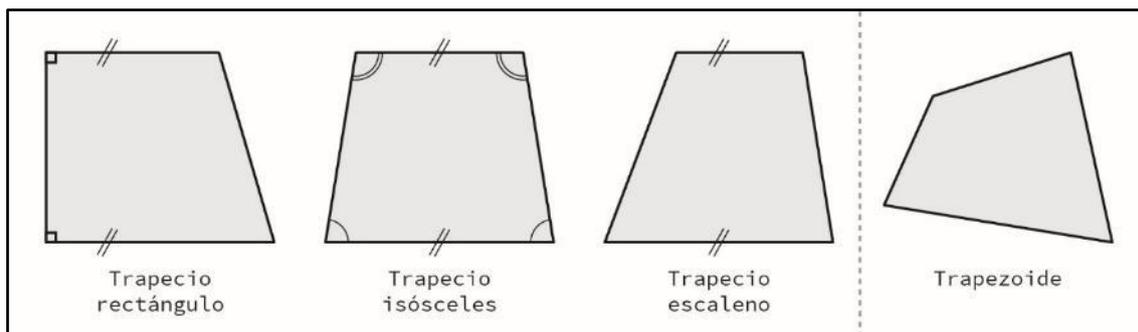


Figura 4.17 - Trapecios y trapezoides.

Recursos de Geogebra para comprender de manera interactiva la clasificación:

- Jugamos con la clasificación de los Cuadriláteros, por Carmen Sancho y Javier Cayetano Rodríguez: <https://www.geogebra.org/m/ck3mqre> (Consultado por última vez 14/07/2021).

ACTIVIDAD 2.16

Definiciones de los cuadriláteros

Tipo de actividad: Teórica

Tiempo: 20-25 min

- Objetivos que persigue:**
- Reconocer las distintas figuras geométricas y sus propiedades, en sus representaciones gráfica y figurativa.
 - Conocer los criterios de clasificación de las figuras.
 - Proporcionar argumentos para justificar a qué tipo pertenece una figura geométrica.
 - Ejemplificar figuras geométricas a partir de su definición.

Competencias: CCL, CMCT, CAA, SIE, CC

Descripción de la actividad

Del proceso anterior podremos definir las figuras resultantes de la siguiente manera:

PARALELOGRAMOS (lados opuestos paralelos 2 a 2)

- Cuadrado: cuadrilátero con los 4 lados y los 4 ángulos iguales entre sí.
- Rectángulo: cuadrilátero con los lados opuestos iguales entre sí y los 4 ángulos rectos.
- Rombo: cuadrilátero con los 4 lados iguales entre sí y los ángulos opuestos iguales 2 a 2.
- Romboide: cuadrilátero con los lados opuestos iguales entre sí y los ángulos opuestos iguales entre sí.

TRAPECIOS (solo 2 lados opuestos paralelos entre sí)

- Trapecio rectángulo: cuadrilátero con solo 2 lados paralelos y 2 ángulos rectos.
- Trapecio isósceles: cuadrilátero con solo 2 lados paralelos y los otros 2 iguales.
- Trapecio escaleno: cuadrilátero con solo 2 lados paralelos y los otros dos distintos.

TRAPEZOIDES (cuadriláteros que no entran en ninguna de las categorías anteriores)

ACTIVIDAD 2.17

Tangram⁴²

Tipo de actividad: Práctica

Tiempo: 30-35 min

- Objetivos que persigue:**
- Operar con distintos recursos (regla y compás, papiroflexia, medios informáticos...) para hallar los lugares geométricos relevantes.
 - Describir situaciones y contextos en los que se encuentren figuras geométricas.
 - Appreciar la aportación de la geometría a otros ámbitos del conocimiento humano, como el arte y la arquitectura.
 - Utilizar las figuras geométricas y sus propiedades como medio de resolución de problemas sencillos de la vida cotidiana.

Competencias: CCL, CMCT, CD, CAA, CSC, SIE, CC

Descripción de la actividad

A partir de una hoja de papel se propone lo siguiente: realizar las piezas del juego de Tangram, plegando y cortando por los pliegues.



Figura 4.18 - Tangram.

Ejercicio: poner en cada pieza del Tangram el nombre del polígono y su denominación (triángulo, rectángulo, isósceles, romboide, cuadrado).

⁴² Es posible incluir en el aula muchos tipos de Tangram: triangular, de Fletcher, de Brugner, de cinco piezas... Cada uno da un sinfín de posibles actividades prácticas.

4.9.4 TEMA 3 – La circunferencia

El objeto del trabajo es la enseñanza de polígonos, por tanto, se decide excluir este tema del diseño de actividades. A pesar de ello, se ha incluido contenido sobre esta curva, de manera indirecta, en algunas actividades, porque sus propiedades se aplican a algunas operaciones con polígonos (tal y como vimos en la construcción de la mediatriz y la bisectriz con regla y compás).

4.9.5 TEMA 4 – Áreas y perímetros

ACTIVIDAD 4.18

Área y perímetro

Tipo de actividad: Teórica

Tiempo: 25-30 min

Objetivos que persigue:

- Dominar y usar la nomenclatura de los elementos geométricos.
- Utilizar con corrección las notaciones simbólicas de los elementos configuradores de las figuras geométricas.

Competencias: CCL, CMCT, CAA

Descripción de la actividad

Las definiciones de área y perímetro son las que siguen:

- Perímetro: La longitud del contorno de una figura.
- Área: La medida de la superficie que ocupa una figura plana.

El concepto de perímetro es sencillo de entender.

Por otro lado, el concepto de área puede tener cierta complicación, pero es fácil de ejemplificar con algunas variantes. Partiendo de un rectángulo dibujado en papel cuadriculado, por ejemplo, podemos indicar que el área es el número de cuadrados que esa figura ocupa. A partir de ahí se va construyendo:

1. Plantear que los cuadrados miden 1x1.
2. Después podemos preguntar ¿Y si miden 2x2? ¿Y 2,8x2,8?
3. Calcular el área de un cuadrado, después contar cuadrados.
4. Pero, ¿y si el rectángulo no tiene un número exacto de cuadrados?
5. El área, en el caso del rectángulo resulta ser: ancho x alto.

$$A_r = b \cdot h$$

Llegando a comprender esta idea de superficie se puede pasar a figuras con formas diferentes.

ACTIVIDAD 4.19

El perímetro

Tipo de actividad: Teórica

Tiempo: 15-20 min

Objetivos que persigue:

- Describir situaciones y contextos en los que se encuentren figuras geométricas.
- Utilizar las figuras geométricas y sus propiedades como medio de resolución de problemas sencillos de la vida cotidiana.

Competencias: CMCT, CD, CAA

Descripción de la actividad

¿Cómo se calcula el perímetro a partir de la definición anteriormente dada? Sencillo, sumando la longitud de todos los lados que conforman la figura.

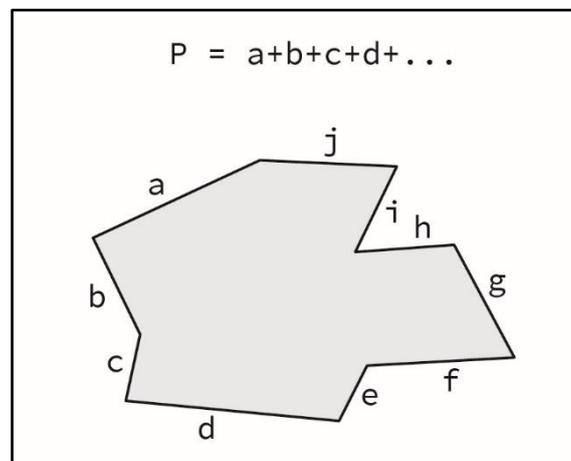


Figura 4.19 - Perímetro de polígonos.

Recurso de Geogebra para comprender de manera interactiva la longitud de la circunferencia:

- Longitud de la circunferencia y Pi, de Ceferino A.: <https://www.geogebra.org/m/Ew8daMZu> (Consultado última vez 14/07/2021).

ACTIVIDAD 4.20

Áreas de polígonos

Tipo de actividad: Teórica y práctica

Tiempo: 1 sesión

- Objetivos que persigue:**
- Operar con distintos recursos (regla y compás, papiroflexia, medios informáticos...) para hallar los lugares geométricos relevantes.
 - Reconocer las distintas figuras geométricas y sus propiedades, en sus representaciones gráfica y figurativa.
 - Identificar los elementos más importantes de las figuras: vértices, lados, ángulos y elementos notables.
 - Conocer los criterios de clasificación de las figuras.
 - Proporcionar argumentos para justificar a qué tipo pertenece una figura geométrica.
 - Utilizar las figuras geométricas y sus propiedades como medio de resolución de problemas sencillos de la vida cotidiana.

Competencias: CCL, CMCT, CD, CAA, CSC, SIE, CC

Descripción de la actividad

Tras la introducción del concepto de área se dedujo el área del rectángulo. El cuadrado es un caso particular de rectángulo, así que se deduce de manera directa.

$$A_c = l \cdot l = l^2$$

A partir de aquí, para mostrar en clase las fórmulas del resto de polígonos se podría seguir con el siguiente orden:

1. El área del triángulo: se deduce a partir de un rectángulo. También se puede relacionar con un romboide, una vez presentado este. Se adjuntan dos recursos de Geogebra para ilustrarlo. También se puede introducir con papiroflexia.

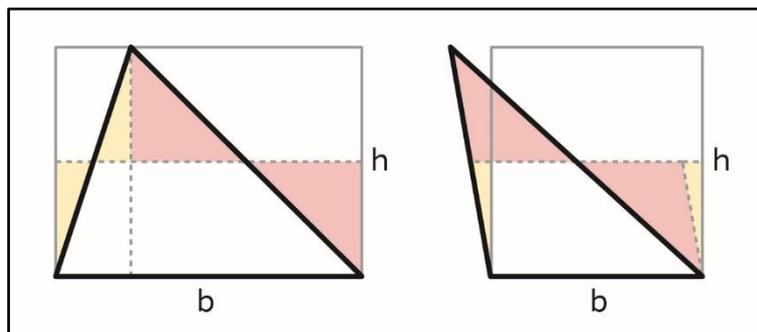


Figura 4.20 - Área del triángulo.

$$A_t = \frac{b \cdot h}{2}$$

2. El rombo y el romboide se deducen como combinación, ya sea de triángulos o de rectángulo y triángulos. También hay actividades con papiroflexia para ilustrarlo. Se adjunta también recurso de Geogebra.

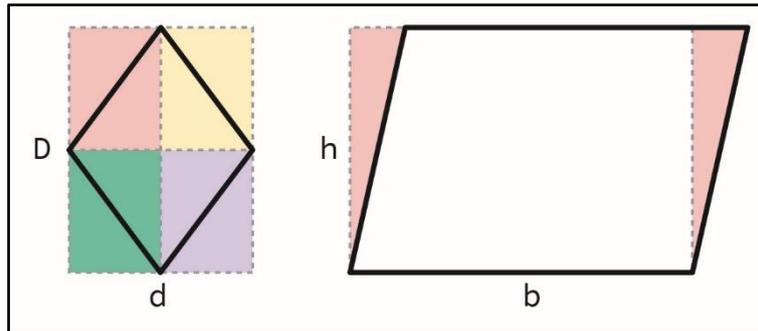


Figura 4.21 - Área del rombo y del romboide.

$$A_{\text{rombo}} = \frac{D \cdot d}{2} \quad A_{\text{romboide}} = b \cdot h$$

3. Los trapecios mediante una copia y rotación se convierten en romboide, con lo cual se deduce gráficamente la fórmula del área.

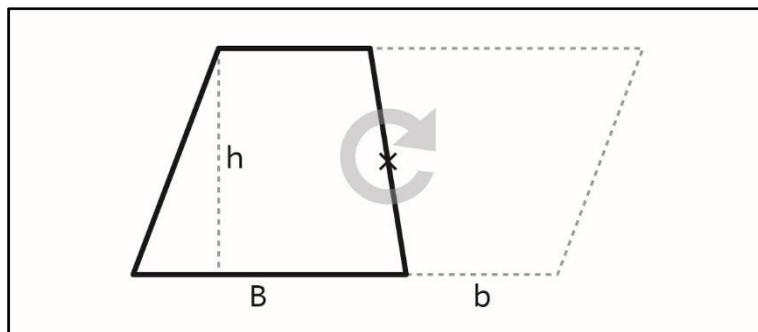


Figura 4.22 - Área del trapecio.

$$A_{\text{trapecio}} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

4. Con el trapecoide se introduce el concepto de descomposición en partes para el cálculo de áreas.

$$A_T = A_1 + A_2 + A_3 + \dots$$

Recursos de Geogebra para comprender de manera interactiva las áreas de polígonos:

- Área del triángulo, por Ceferino A.: <https://www.geogebra.org/m/W486ZDjB> (Consultado última vez 14/07/2021).
- Área del triángulo (Obtusángulo), por Antonio Omatos Soria: <https://www.geogebra.org/m/QsxKKHTd> (Consultado por última vez 14/07/2021).
- Área del rombo, por Ceferino A.: <https://www.geogebra.org/m/K8gtDBsT> (Consultado por última vez 14/07/2021).
- Área del trapecio, por Ceferino A.: <https://www.geogebra.org/m/cm2WWv3> (Consultado por última vez 14/07/2021).

ACTIVIDAD 4.21

Polígonos compuestos

Tipo de actividad: Práctica

Tiempo: 25 min

- Objetivos que persigue:**
- Operar con distintos recursos (regla y compás, papiroflexia, medios informáticos...) para hallar los lugares geométricos relevantes.
 - Describir situaciones y contextos en los que se encuentren figuras geométricas.
 - Apreiciar la aportación de la geometría a otros ámbitos del conocimiento humano, como el arte y la arquitectura.
 - Planificar, elaborar y defender individualmente un proyecto gráfico en el que se incluya la geometría como medio de expresión de ideas y conceptos.
 - Utilizar las figuras geométricas y sus propiedades como medio de resolución de problemas sencillos de la vida cotidiana.

Competencias: CCL, CMCT, CAA, CSC

Descripción de la actividad

Se propone calcular el área de una superficie compleja, que exija descomponer la figura en varios polígonos para resolverlo:

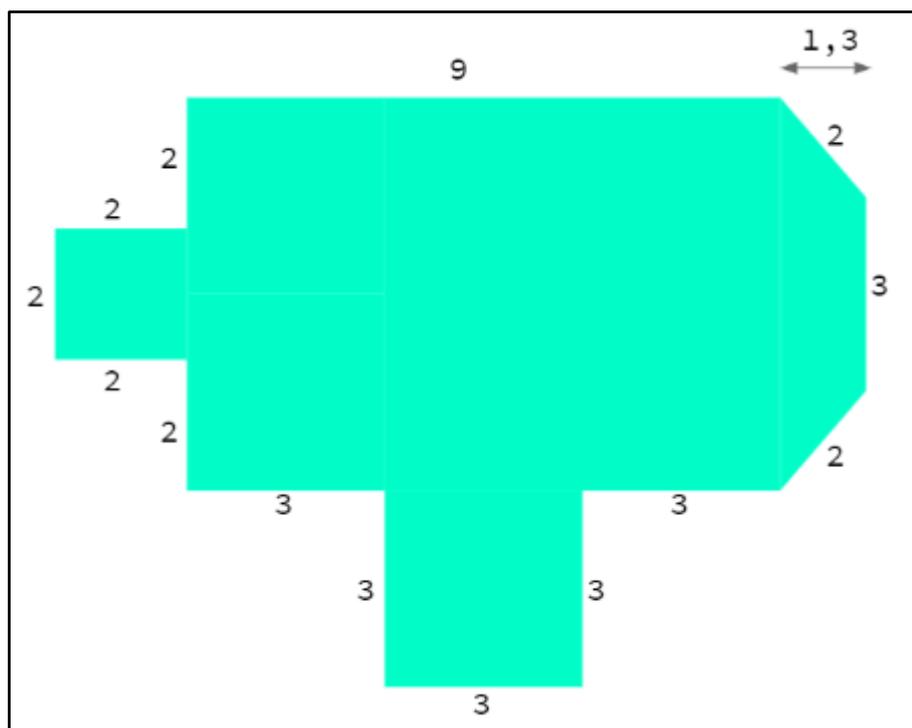


Figura 4.23 - Área de figura compuesta.

ACTIVIDAD 4.22

Área del Tangram

Tipo de actividad: Práctica

Tiempo: 25 min

- Objetivos que persigue:**
- Operar con distintos recursos (regla y compás, papiroflexia, medios informáticos...) para hallar los lugares geométricos relevantes.
 - Describir situaciones y contextos en los que se encuentren figuras geométricas.
 - Apreciar la aportación de la geometría a otros ámbitos del conocimiento humano, como el arte y la arquitectura.
 - Planificar, elaborar y defender individualmente un proyecto gráfico en el que se incluya la geometría como medio de expresión de ideas y conceptos.
 - Utilizar las figuras geométricas y sus propiedades como medio de resolución de problemas sencillos de la vida cotidiana.

Competencias: CMCT, CAA

Descripción de la actividad

Aprovechando el Tangram de papel que se hizo en la actividad 2.15, se propone calcular el área de cada pieza y el área total del juego, dadas unas dimensiones concretas:

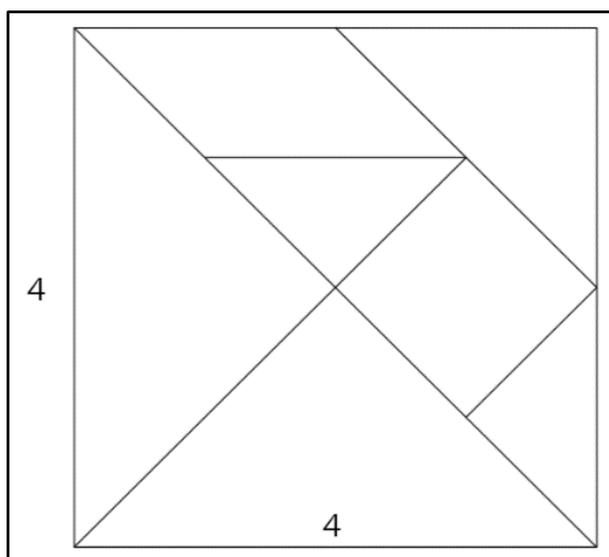


Figura 4.24 - Área del Tangram.

ACTIVIDAD 4.23

Polígonos regulares

Tipo de actividad: Teórica

Tiempo: 10-15 min

Objetivos que persigue:

- Reconocer las distintas figuras geométricas y sus propiedades, en sus representaciones gráfica y figurativa.
- Identificar los elementos más importantes de las figuras: vértices, lados, ángulos y elementos notables.
- Utilizar con corrección las notaciones simbólicas de los elementos configuradores de las figuras geométricas.
- Conocer los criterios de clasificación de las figuras.
- Ejemplificar figuras geométricas a partir de su definición.
- Describir situaciones y contextos en los que se encuentren figuras geométricas.
- Utilizar las figuras geométricas y sus propiedades como medio de resolución de problemas sencillos de la vida cotidiana.

Competencias: CCL, CMCT, CD, CAA, CSC, SIE, CC

Descripción de la actividad

Los polígonos regulares son aquellos polígonos **convexos** cuyos **lados** y **ángulos** interiores son **iguales** entre sí. Al cumplirse esto se observa que sus vértices equidistan de un punto (centro del polígono) y por tanto se encuentran en una circunferencia circunscrita al polígono; el **radio** de esta circunferencia es un elemento notable del polígono. Además, el centro equidista de los puntos medios de los lados determinando un segmento que se llama **apotema** (radio de la circunferencia inscrita al polígono).

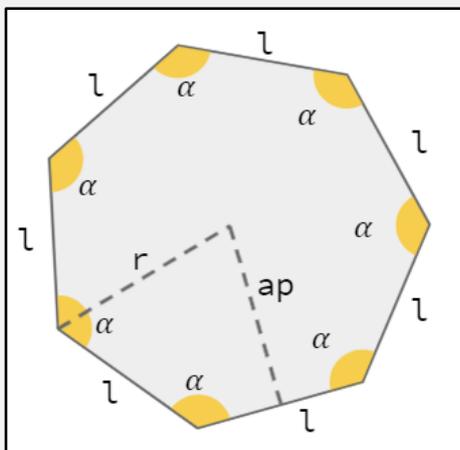


Figura 4.25 - Polígono regular.

Radio (r): Distancia del centro a un vértice. También es bisectriz del ángulo.

Apotema (ap): Distancia del centro al punto medio de un lado. También es mediatriz del lado y la distancia mínima del centro a ese lado.

ACTIVIDAD 4.24

Los primeros polígonos regulares

Tipo de actividad: Práctica

Tiempo: 1 sesión

- Objetivos que persigue:**
- Reconocer las distintas figuras geométricas y sus propiedades, en sus representaciones gráfica y figurativa.
 - Identificar los elementos más importantes de las figuras: vértices, lados, ángulos y elementos notables.
 - Utilizar con corrección las notaciones simbólicas de los elementos configuradores de las figuras geométricas.
 - Conocer los criterios de clasificación de las figuras.
 - Ejemplificar figuras geométricas a partir de su definición.
 - Describir situaciones y contextos en los que se encuentren figuras geométricas.
 - Utilizar las figuras geométricas y sus propiedades como medio de resolución de problemas sencillos de la vida cotidiana.

Competencias: CCL, CMCT, CD, CAA, CSC, SIE, CC

Descripción de la actividad

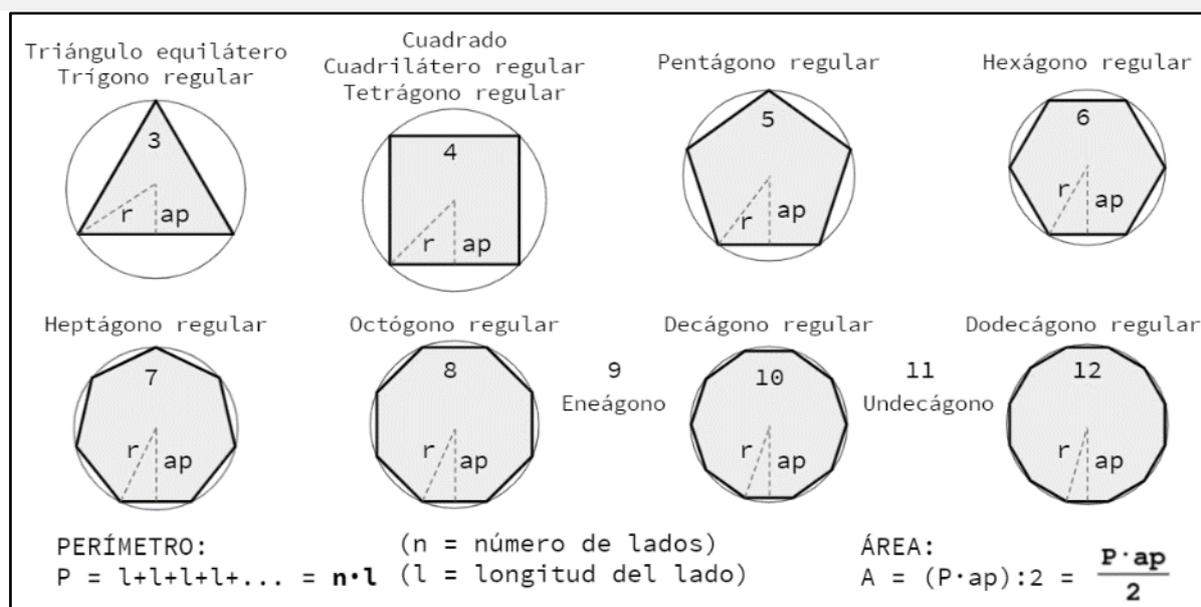


Figura 4.26 - Los primeros polígonos regulares.

Ejercicio: se propone como actividad practicar la construcción con regla y compás de los polígonos regulares más notables (hasta el hexágono). Para cada uno hay dos posibles datos: el lado o el radio. Ambos son requisito mínimo necesario para construirlo.

[Se puede conocer el método de construcción sin la necesidad de dibujarlo de manera precisa, como en clase de dibujo técnico.]

Recurso de Geogebra para conocer los polígonos regulares:

- Polígonos Regulares, de Alexander Castañeda Cerdas:
<https://www.geogebra.org/m/nWyrURdr> (Consultado por última vez 14/07/2021).

ACTIVIDAD 4.25

Área del polígono regular

Tipo de actividad: Teórica

Tiempo: 15 min

Objetivos que persigue:

- Describir situaciones y contextos en los que se encuentren figuras geométricas.
- Planificar, elaborar y defender individualmente un proyecto gráfico en el que se incluya la geometría como medio de expresión de ideas y conceptos.
- Utilizar las figuras geométricas y sus propiedades como medio de resolución de problemas sencillos de la vida cotidiana.

Competencias: CCL, CMCT

Descripción de la actividad

Sea cual sea el polígono regular, siempre y cuando sea regular, se cumple que su área se puede hallar a través de la siguiente fórmula:

$$A = \frac{P \cdot ap}{2}$$

Siendo:

- P el perímetro del polígono
- ap la apotema del polígono

Esta fórmula es muy fácil de demostrar gráficamente:

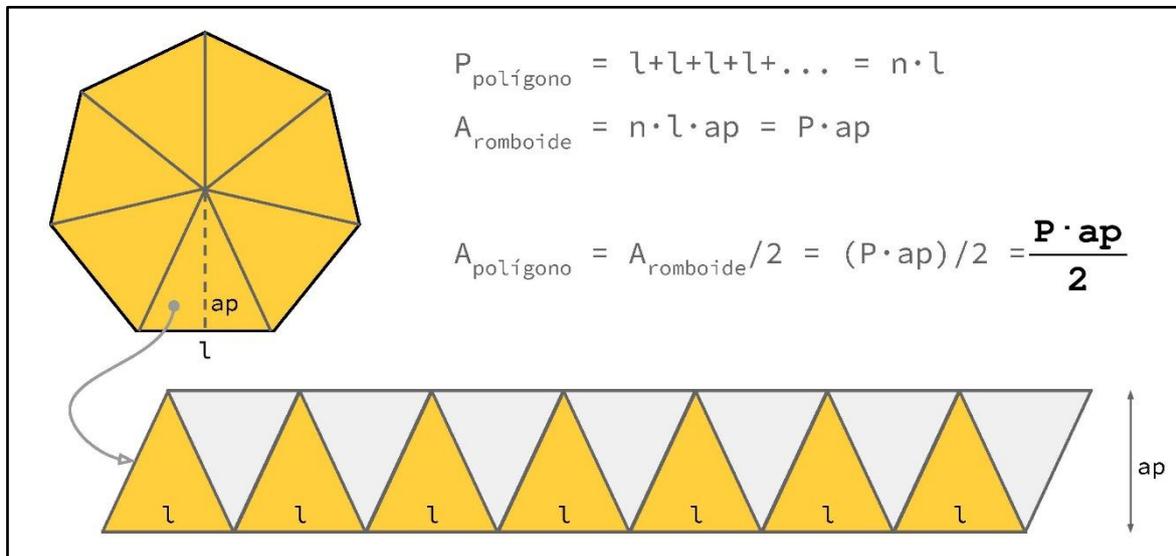


Figura 4.27 - Fórmula del área de los polígonos regulares.

4.9.6 TEMA 5 – Teorema de Pitágoras

ACTIVIDAD 5.26

Enunciado del Teorema de Pitágoras

Tipo de actividad: Teórica

Tiempo: 30-35 min

- Objetivos que persigue:**
- Describir situaciones y contextos en los que se encuentren figuras geométricas.
 - Apreciar la aportación de la geometría a otros ámbitos del conocimiento humano, como el arte y la arquitectura.
 - Planificar, elaborar y defender individualmente un proyecto gráfico en el que se incluya la geometría como medio de expresión de ideas y conceptos.
 - Utilizar las figuras geométricas y sus propiedades como medio de resolución de problemas sencillos de la vida cotidiana.

Competencias: CCL, CMCT, CD, CAA, CSC, SIE, CC

Descripción de la actividad

Un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo recto (90°), tal y como hemos visto en el tema de triángulos. En todos los triángulos rectángulos se cumple que:

- El lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa. Siempre es el lado más largo. (en este caso c)
- Los otros dos lados, los que forman el ángulo recto, se denominan catetos. (en este caso a y b)

“El cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos”

$$c^2 = a^2 + b^2$$

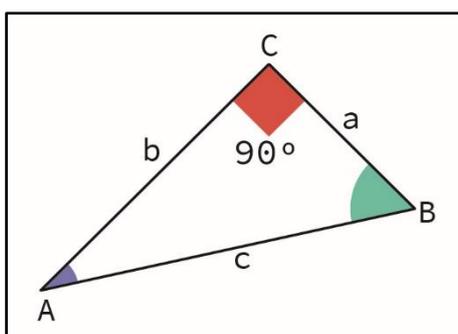


Figura 4.28 - Triángulo rectángulo.

Recurso de Geogebra con una demostración del Teorema de Pitágoras:

- Teorema de Pitágoras – Demostración de Pitágoras, de Vicente Martín Torres López: <https://www.geogebra.org/m/XdzTT2ZG> (Consultado última vez 14/07/2021).
[Esta actividad es adaptable al aula mediante papiroflexia]

ACTIVIDAD 5.27

Ejercicios aplicando Pitágoras

Tipo de actividad: Práctica

Tiempo: 1 sesión

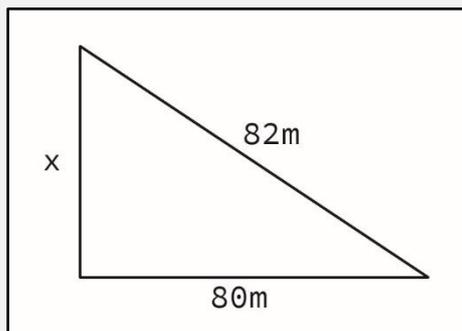
- Objetivos que persigue:**
- Describir situaciones y contextos en los que se encuentren figuras geométricas.
 - Apreciar la aportación de la geometría a otros ámbitos del conocimiento humano, como el arte y la arquitectura.
 - Planificar, elaborar y defender individualmente un proyecto gráfico en el que se incluya la geometría como medio de expresión de ideas y conceptos.
 - Utilizar las figuras geométricas y sus propiedades como medio de resolución de problemas sencillos de la vida cotidiana.

Competencias: CCL, CMCT, CD, CAA, CSC, SIE, CC

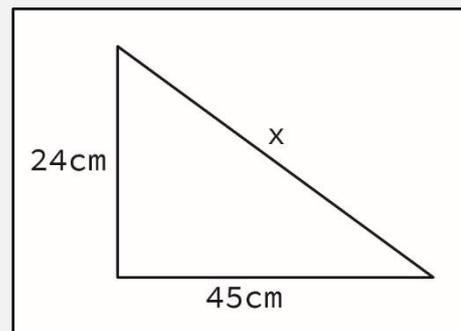
Descripción de la actividad

Se proponen los siguientes ejercicios⁴³ para aplicar el teorema de Pitágoras:

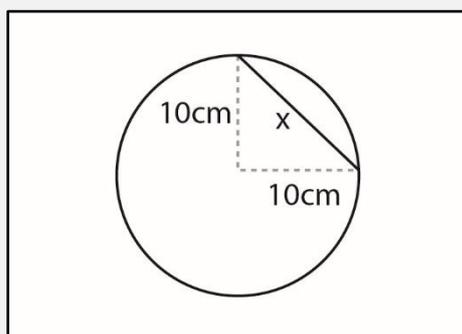
Cateto de un triángulo rectángulo



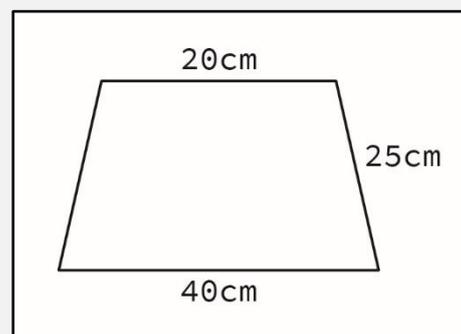
Hipotenusa de un triángulo rectángulo



Cuerda de una circunferencia



Área de un trapecio isósceles



⁴³ En los libros de texto hay multitud de ejercicios y problemas que ayudan a practicar la aplicación de la fórmula y a la vez relacionarla con otros temas aprendidos (área, elementos notables...).

4.9.7 TEMA 6 – Teorema de Tales

ACTIVIDAD 6.28

Enunciado del Teorema de Tales

Tipo de actividad: Teórica

Tiempo: 30-35 min

- Objetivos que persigue:**
- Describir situaciones y contextos en los que se encuentren figuras geométricas.
 - Apreiciar la aportación de la geometría a otros ámbitos del conocimiento humano, como el arte y la arquitectura.
 - Planificar, elaborar y defender individualmente un proyecto gráfico en el que se incluya la geometría como medio de expresión de ideas y conceptos.
 - Utilizar las figuras geométricas y sus propiedades como medio de resolución de problemas sencillos de la vida cotidiana.

Competencias: CCL, CMCT, CD, CAA, CSC, SIE, CC

Descripción de la actividad

El teorema de Tales fue popularizado por Tales de Mileto a través de la anécdota que versa sobre cómo midió la altura de las pirámides de Giza utilizándolo. El teorema dice lo siguiente:

Se toman dos rectas secantes entre sí. Si trazamos rectas paralelas de tal manera que corten a ambas, los puntos resultantes generarán **segmentos proporcionales**.

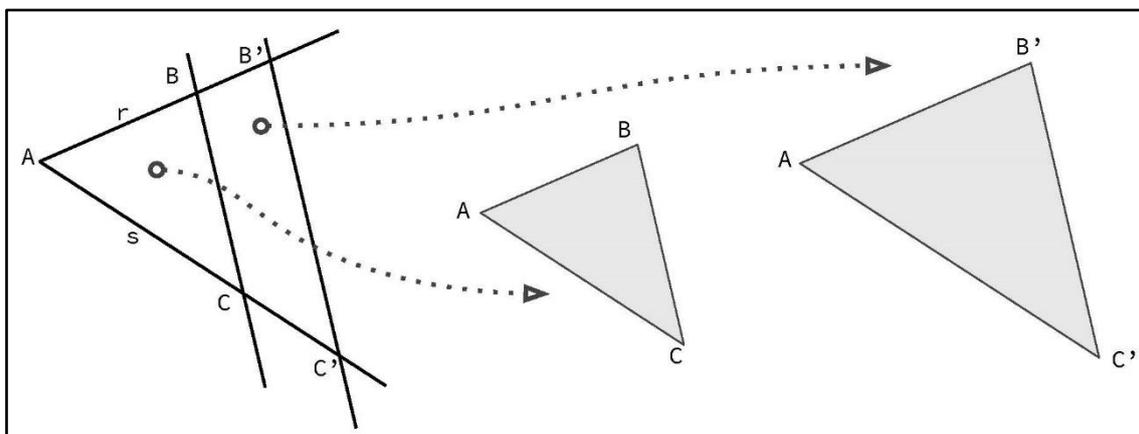


Figura 4.29 - El Teorema de Tales.

Observando el dibujo: se cumplirá que los dos triángulos resultantes serán semejantes (ángulos iguales, lados diferentes). Es decir, que:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'} \quad \frac{AB}{BC} = \frac{AB'}{B'C'} \quad \frac{AC}{BC} = \frac{AC'}{B'C'} \quad \text{Etc.}$$

ACTIVIDAD 6.29

Ejercicios aplicando Tales

Tipo de actividad: Práctica

Tiempo: 40 min

- Objetivos que persigue:**
- Describir situaciones y contextos en los que se encuentren figuras geométricas.
 - Apreciar la aportación de la geometría a otros ámbitos del conocimiento humano, como el arte y la arquitectura.
 - Planificar, elaborar y defender individualmente un proyecto gráfico en el que se incluya la geometría como medio de expresión de ideas y conceptos.
 - Utilizar las figuras geométricas y sus propiedades como medio de resolución de problemas sencillos de la vida cotidiana.

Competencias: CCL, CMCT, CD, CAA, CSC, SIE, CC

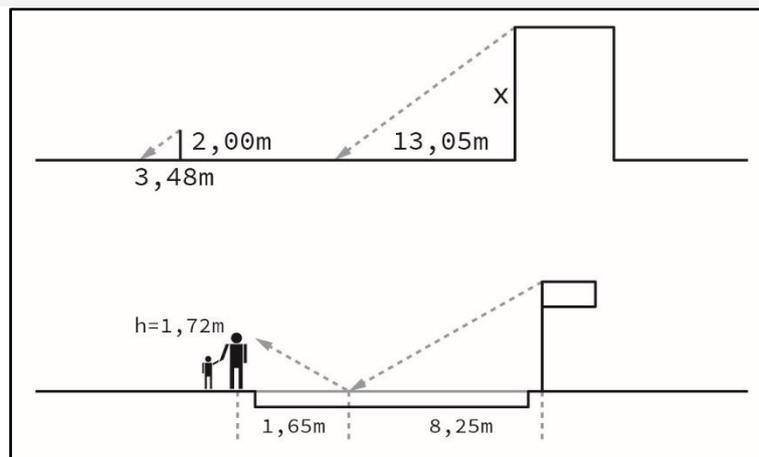
Descripción de la actividad

En cursos posteriores se aplicará el Teorema de Tales al concepto de semejanza en mayor profundidad, trabajando con escalas, operaciones entre figuras semejantes, etc.

De momento se proponen los siguientes ejercicios:

Altura de un edificio a partir de una sombra

Altura de un poste a partir de un reflejo



4.10 PLANES COMPLEMENTARIOS

4.10.1 Reconocer Geometría en el entorno⁴⁴

Como actividad complementaria al desarrollo de la UD se propone lo siguiente:

- Que los alumnos se fijen en su entorno urbano (Valladolid, España) y reconozcan formas de las que se vean en clase (triángulos, cuadriláteros, patrones geométricos, etc.).
- La actividad está abierta desde el inicio del bloque y es evaluable, para motivar al alumno a realizarla.
- Las normas son como siguen:
 - Todo alumno que observe un objeto geométrico, de los vistos en clase (o relacionados), en el entorno arquitectónico o natural de la ciudad, puede traerlo a clase y explicarlo al resto.
 - Cada alumno recibirá una bonificación en la evaluación sí y solo sí: (1) el objeto seleccionado es válido y (2) se ha explicado, clasificado y/o definido bien.
 - Se pueden aportar un máximo de dos elementos, que supondrán hasta un máximo de un punto de la nota final.
 - No está permitido repetir entre alumnos.

Algunos elementos de ejemplo:

Elementos del plano

Todo lo relacionado con rectas, puntos, posiciones relativas, ángulos...



Figura 4.30 - Las vías del tren son dos rectas paralelas.

Triángulos

Innumerables frontispicios de edificios, entre otros elementos triangulares (pérgolas, baldosas, etc.).



Figura 4.31 - Fachada del teatro Calderón.

⁴⁴ Esta actividad se ha basado completamente en (Fernández Benito & Reyes Iglesias, Periplo por la geometría de Valladolid, 2018).

Cuadriláteros



Figura 4.32 - Monumento al cine de Dennis Oppenheim.

Pentágonos



Figura 4.33 - Pasarela peatonal del museo de la ciencia.

4.10.2 Excursión y/o actividades fuera del aula

Si se da la posibilidad sería interesante programar visitas o excursiones que pudieran ser de interés para complementar el aprendizaje de la materia. Un ejemplo sería visitar la sala 'Malditas Matemáticas... ¿o no?' del Museo de la Ciencia de Valladolid.

4.11 EVALUACIÓN

4.11.1 Procedimientos de evaluación

Se propone un sistema de evaluación sumativa.

Tabla que relaciona objetivos perseguidos, competencias a desarrollar y criterios de evaluación:

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE	COMP. CLAVE
Reconocer y describir figuras planas, sus elementos y propiedades características que permiten clasificarlas, identificar situaciones, describir el contexto físico, y abordar problemas de la vida cotidiana.	Reconoce y describe las propiedades características de los polígonos regulares: ángulos interiores, ángulos centrales, diagonales, apotema, simetrías, etc.	CCL, CMCT, CAA, CC
	Define los elementos característicos de los triángulos, trazando los mismos y conociendo la propiedad común a cada uno de ellos, y los clasifica atendiendo tanto a sus lados como a sus ángulos.	CMCT, CC
	Clasifica los cuadriláteros y paralelogramos atendiendo al paralelismo entre sus lados opuestos y conociendo sus propiedades referentes a ángulos, lados y diagonales.	CCL, CMCT, CAA
	Identifica las propiedades geométricas que caracterizan los puntos de la circunferencia y el círculo.	CMCT
Utilizar estrategias, herramientas tecnológicas y técnicas simples de la geometría analítica plana para la resolución de problemas de perímetros, áreas y ángulos de figuras planas. Utilizar el lenguaje matemático adecuado para expresar los procedimientos seguidos en la resolución de los problemas geométricos.	Resuelve problemas relacionados con distancias, perímetros, superficies y ángulos de figuras planas, en contextos de la vida real, utilizando las herramientas tecnológicas y las técnicas geométricas más apropiadas.	CCL, CMCT, CD, CAA, CSC, SIE, CC
	Calcula la longitud de la circunferencia, el área del círculo, la longitud de un arco y el área de un sector circular, y las aplica para resolver problemas geométricos.	CMCT, CD, CAA
Reconocer el significado aritmético del Teorema de Pitágoras (cuadrados de números, ternas pitagóricas) y emplearlo para resolver problemas geométricos.	Comprende los significados aritmético y geométrico del Teorema de Pitágoras y los utiliza para la búsqueda de ternas pitagóricas.	CMCT, CAA, CC
	Aplica el teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas en la resolución de triángulos y áreas de polígonos regulares, en contextos geométricos o en contextos reales.	CMCT, CAA, CSC, CC
Utilizar el teorema de Tales y las fórmulas usuales para obtener medidas. Analizar e identificar figuras semejantes, calculando la escala o razón de semejanza. Calcular las dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos.	Reconoce figuras semejantes y calcula la razón de semejanza, utilizando el teorema de Tales para el cálculo indirecto de longitudes.	CMCT
	Utiliza la escala para resolver problemas de la vida cotidiana sobre planos, mapas y otros contextos de semejanza.	CCL, CMCT, CD, CAA, CSC, SIE, CC

4.11.2 Instrumentos de evaluación

En este sentido, el portafolio se erige como único instrumento de calificación, elaborándose una rúbrica para poder medir los estándares de aprendizaje. El alumno, obviamente es informado previamente de esta cuestión, y sabe que debe presentar un documento, ordenado y elaborado, con todo lo trabajado en clase (teoría, práctica, ejercicios, etc.). La rúbrica recoge cuatro cuestiones sobre el portafolio: contenido, claridad, orden, ejercicios. También se ha contemplado una calificación sobre la asistencia y comportamiento en clase. La distribución del peso de la nota es la siguiente:

- | | |
|-------------------------------|-----|
| • Portafolio | 70% |
| • Participación en clase | 20% |
| • Asistencia y comportamiento | 10% |
| • Actividad complementaria | * |

*La actividad complementaria sobre la geometría del entorno urbano es una puntuación extra que ayuda al alumno que la realiza a subir nota.

En caso de no realizarse el portafolio, perderlo, o suspender el bloque, el alumno puede optar a un examen que supondrá el 90% de la nota. El 10% restante corresponde con el comportamiento y la asistencia anteriormente previstas (y ya evaluadas durante el transcurso de la actividad en el aula).

4.12 ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

La realización de un portafolio se presta mucho a una adaptación total del contenido a cada alumno. Cada persona tiene una manera diferente de aprender, y una manera diferente de estudiar, dando esto lugar a la diversidad del aula. La presentación del proyector, primordialmente gráfica, junto con el discurso del profesor, lenguaje hablado, y lo escrito en la pizarra, explicaciones analíticas de índole matemática, completan un cuadro que el alumno interpreta por la vía más cómoda (auditiva, visual, etc.). Lo que finalmente se plasma en el portafolio representa de manera bastante fiel el estilo de aprendizaje, la personalidad, la jerarquía que le da al contenido, etc., de cada alumno.

Es también una herramienta útil para la evaluación. Al calificar el contenido de un portafolio, el profesor puede tener en cuenta cuestiones circunstanciales, como una adaptación curricular, por ejemplo.

4.13 CONCLUSIONES Y EVALUACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Las conclusiones se reflejan de manera conjunta al final del presente trabajo.

En cuanto a la evaluación se propone lo siguiente: la elaboración de una rúbrica para poder detectar fallos, errores y oportunidades de mejora, además de puntos fuertes. Se materializa en una tabla de autoevaluación como la siguiente:

Aspectos a evaluar	A destacar	A mejorar	Propuestas de mejora
Temporalización de la UD			
Desarrollo de los objetivos didácticos			
Manejo de los contenidos de la UD			
Desempeño de competencias			
Realización de tareas			
Estrategias metodológicas aplicadas			
Recursos y material didáctico			
Claridad en los criterios de evaluación			
Uso de diversas herramientas de evaluación			
Atención a la diversidad			
Resultados			
Satisfacción del profesor			
...			

Tabla 9 - Autoevaluación de la UD.

A su vez, se recomienda un cuestionario similar para el alumno, donde se puede detectar su punto de vista y generar una reflexión propia sobre su aprendizaje.

4.14 BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

Las fuentes consultadas para la elaboración de la UD y el trabajo en general se detallan al final, en un apartado común.

5 CONCLUSIONES

5.1 SOBRE EL MÁSTER

Se decide abordar la conclusión del trabajo desde lo general a lo particular. En este caso se comienza por establecer una relación entre los objetivos y las competencias del máster y el resultado final, que es la finalización de los estudios.

5.1.1 Cumplimiento de los objetivos

Los objetivos generales del máster se plasman en el “ANEXO 1 Objetivos y Competencias del Máster”. Se procede a justificar su cumplimiento.

El objetivo **OG1** se considera cumplido en la medida en que los conocimientos adquiridos del máster han sido aplicados tanto en el módulo práctico como en el presente trabajo, mediante la elaboración de material didáctico y su puesta en escena. En cuanto al objetivo **OG2**, se considera cumplido en cuanto a que el desarrollo de las clases del máster, por su carácter interactivo y la actitud crítica de profesores y alumnos, ha permitido el intercambio de experiencias y opiniones relativas a las cuestiones sociales y éticas asociadas a la actividad y el entorno docente. El objetivo **OG3** se ha alcanzado a través de la labor continuada en las diferentes materias de la titulación, incluido el presente TFM, gracias al desarrollo y exposición de trabajos de índole diversa. Finalmente, el papel del profesorado del máster como tutores, correspondiente al enfoque del Plan Bolonia, más allá del mero rol expositivo, proporciona al alumnado las capacidades necesarias para su desarrollo autónomo, tanto durante la titulación como con posterioridad a esta, en una formación continua, alcanzándose así el objetivo **OG4**.

5.1.2 Adquisición de competencias

Las competencias asociadas a la presente titulación, tanto generales como específicas, se corresponden con las diferentes materias del plan de estudios. Tal y como ya se describió en detalle en el apartado “Relación con las asignaturas del máster” del bloque de “Introducción”, el desarrollo de este TFM se ha fundamentado en los contenidos de las asignaturas cursadas.

El diseño del plan de estudios, y en particular la elaboración de este TFM, permite así asegurar la adquisición de todas estas competencias con la obtención del título.

5.1.3 Contribución del máster a la elaboración del presente trabajo

Con todo lo anteriormente expuesto se puede concluir, en relación al máster, que el cumplimiento de las expectativas de aprendizaje (objetivos) y las competencias adquiridas han sido cruciales para la elaboración del presente trabajo. Esto justifica la necesidad de haber superado todas las asignaturas para desarrollar un trabajo de esta envergadura.

5.2 SOBRE EL TRABAJO

Se pueden consultar los objetivos propuestos para este TFM en el apartado “Objetivos Propios” del bloque de “Introducción”.

Dentro de los objetivos planteados al inicio del trabajo, aquellos de carácter personal aspiraban a proporcionar una revisión del papel de la Geometría en la enseñanza, la ampliación del conocimiento sobre recursos didácticos, y la elaboración de documentación didáctica.

El marco teórico presentado ha permitido contextualizar el estudio de la Geometría. A partir de él se puede llegar a la conclusión de que, tras un período relativamente reciente en el que esa disciplina se ha visto relegada dentro de la enseñanza, actualmente puede observarse un auge, por lo que es razonable esperar un impulso de la misma en el futuro. Esta revitalización se verá también acuciada por la ya constatada en este trabajo relevancia de la Geometría.

Se ha analizado en profundidad el contexto específico del aula, englobando el alumno, su nivel, los recursos disponibles, el centro, etc. orientado hacia el diseño de los recursos concretos cuya elaboración es el objetivo último del presente trabajo. Finalmente, en cuanto a la elaboración de dicho material docente, este trabajo incorpora una Unidad Didáctica con treinta actividades (sin contar con las complementarias).

Dentro de los objetivos prácticos se encontraban el diseño de material docente replicable, proponer su distribución espaciotemporal, además de la incorporación de materiales manipulativos y TIC. El grado de detalle proporcionado en la Unidad Didáctica y su correspondencia con la legislación vigente aseguran su reproducibilidad y orientan al futuro docente en su distribución a lo largo del curso académico. Respecto a los materiales manipulativos y TIC, se ha recurrido a la papiroflexia, se han referido los distintos recursos que pueden encontrarse en el aula (ordenador con proyector, tabletas gráficas y aulas de informática para trabajo con Geogebra); también se han relacionado actividades alternativas que permiten adquirir una experiencia transversal fuera del aula (Geometría en el entorno urbano y visita a museos).

Por último, el presente TFM planteaba unos objetivos intelectuales, asociados a la investigación realizada sobre la Didáctica de la Geometría, el estado actual del sistema educativo y el desarrollo cognitivo del alumno, entre otras cuestiones; objetivos cuyo fin último era aportar a la comunidad educativa líneas de trabajo hacia la mejora de la enseñanza de la Geometría. También contemplaba la divulgación de estos resultados para maximizar su impacto y alcance. Entre las principales ideas extraídas en este sentido, destaca la necesidad de su integración con otras áreas de conocimiento. De forma global, puede concluirse que la Geometría es simultáneamente una ciencia, una herramienta para la impartición de otras disciplinas, y también modelo matemático.

5.3 PERSONALES

Tras la revisión de las principales ideas extraídas del presente Trabajo Final de Máster, se muestra necesario hacer una breve alusión a la experiencia personal que ha supuesto tanto el propio trabajo como las materias conducentes al mismo. El carácter personal de estas reflexiones justifica que tome la licencia de expresarme en primera persona.

La consecución del presente Trabajo Fin de Máster constituye un punto y seguido en mi recorrido vocacional como docente; vocación que se remonta a los comicios de mi formación superior, la cual hube de compaginar por circunstancias con la impartición de clases particulares, descubriéndose en mí una dedicación que no había contemplado originalmente y que sin embargo me supuso una gran motivación: ser profesor.

Cursar el Máster en Profesor de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, en la especialidad de Matemáticas, ha constituido una toma de contacto con infinidad de conceptos que me eran totalmente desconocidos, suponiendo la apertura de un gran número de líneas de trabajo personal cuyo recorrido solo he comenzado. En este sentido, son un férreo defensor de la formación continua, tantas veces referida durante las clases impartidas en el máster y a menudo tan poco valorada.

Por otro lado, sumergirme en el mundo de la Geometría es una experiencia que me fascina y que, si bien ya conocía de mi formación como arquitecto, no deja de sorprenderme. Agradezco especialmente en este sentido la oportunidad, o casualidad, de haberseme asignado este trabajo en particular.

6 BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

Delors, J. (1996). *La educación encierra un tesoro. Informe a la UNESCO de la Comisión internacional sobre la educación para el siglo XXI*. Madrid, España: Santillana/UNESCO.

6.1 LEGISLACIÓN

ORDEN EDU/362/2015, de 4 de mayo [Consejería de Educación, Junta de Castilla y León]. Por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León. 8 de mayo de 2015. BOCyL No. 86/2015.

ORDEN EDU/590/2016, de 23 de junio [Consejería de Educación, Junta de Castilla y León]. Por la que se concretan los Programas de mejora del aprendizaje y del rendimiento que se desarrollan en los centros que imparten Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León y se regula su puesta en funcionamiento y el procedimiento para la incorporación del alumnado. 23 de junio de 2016. BOCyL No. 123/2016.

6.2 LIBROS

Alsina Catalá, C., Fortuny Aymemí, J., & Pérez Gómez, R. (1997). *¿Por qué geometría? Propuestas Didácticas para la ESO*. Madrid: Síntesis.

Arce Sánchez, M., Conejo Garrote, L., & Muñoz Escolano, J. (2019). *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*. Madrid: Síntesis.

Castro Martínez, E., Castro Martínez, E., Coriat Benarroch, M., Llinares Císcar, S., Marín del Moral, A., Rico Romero, L., . . . Sierra Vázquez, M. (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. (L. Rico Romero, Ed.) Madrid: Síntesis.

Chamoso Sánchez, J., Fernández Benito, I., & Reyes Iglesias, M. (2009). *Burbujas de arte y matemáticas*. Tres Cantos: Nivola.

Corberán Salvador, R., Gutiérrez Rodríguez, Á., Huerta Palau, M., Jaime Pastor, A., Margarit Garrigues, J., Peñas Pascual, A., & Ruiz Pérez, E. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza Secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele*. Madrid: CIDE, Ministerio de Educación y Ciencia.

Fernández Benito, I., & Reyes Iglesias, M. (2018). *Periplo por la geometría de Valladolid*. Valladolid: Ayuntamiento de Valladolid.

J. Bishop, A. (2010). *Mathematics Education. Major themes in Education*. London: Routledge.

Malkevitch, J. (1991). *Geometry's Future*. Lexington: COMAP.

Medina, J. (2008). *Brain Rules: 12 Principles for Surviving and Thriving at Work, Home, and School*. Seattle, WA: Pear Press.

Reyes Iglesias, E., & Fernández Benito, I. (2015). *Pentágonos: Construcciones. Mosaicos. Geometría sagrada*. Valladolid: Universidad de Valladolid.

Stenhouse, L. (1984). *Investigación y Desarrollo del Currículo*. Madrid: Morata.

6.3 LIBROS DE TEXTO

Colera, J., García, J., Gaztelu, I., & Oliveira, M. (1998). *Matemáticas, 3: Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: Anaya.

Colera, J., Gaztelu, I., de Guzmán, M., & García, J. (1996). *Matemáticas, 1 : Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: Anaya.

Colera, J., Gaztelu, I., de Guzmán, M., & García, J. (1997). *Matemáticas, 2: Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: Anaya.

Marea Verde. (abril de 2020). *Apuntes Marea Verde*. Recuperado el 10 de 12 de 2020, de <https://www.apuntesmareaverde.org.es/>

Sánchez Ruiz, M., & Solís Fraile, R. (2019). *Ámbito Científico y Matemático I*. Editex.

6.4 REVISTAS Y ARTÍCULOS

Fernández Benito, I., & Reyes Iglesias, M. (Noviembre de 2001). Construcciones y Disecciones del Octógono. *Suma. Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas*.(38), 69-72.

Gascón, J. (2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *Suma. Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas*.(39), 13-25.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, 7(3), 251-292.

6.5 TRABAJOS ACADÉMICOS

Argudo Ortiz, M., & Salim Martínez, J. (2013). *Las TIC y el aprendizaje de la geometría*. Valencia, España: Universidad Cardenal Herrera.

Carrera Flores, A., & Vanegas, Y. (2018). *Diseño e implementación de la unidad didáctica “conociendo los polígonos a través de metodologías activas”*. Azogues, Ecuador: Universidad Nacional de Educación.

Marco Hernández, J., & Bolea, P. (2014). *Semejanza: una propuesta didáctica para 2º de ESO*. Zaragoza, España: Universidad de Zaragoza.

Martín García, M., & Artés Rodríguez, E. (2012). *Análisis didáctico: Diseño, práctica y valoración de una planificación de trabajo en el aula de secundaria*. Almería, España: Universidad de Almería.

Santos Rubio, C., & Reyes Iglesias, M. (2018). *Propuesta didáctica para la enseñanza de los movimientos del plano. Perspectiva histórica*. Valladolid: Universidad de Valladolid.

6.6 DOCUMENTOS INSTITUCIONALES

Equipo Directivo. (2020). Proyecto Educativo del colegio Nuestra Señora del Carmen. Valladolid, España.

6.7 WEB

Fouz, F. (s.f.). *Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría*. Obtenido de XTEC - Xarxa Telemàtica Educativa de Catalunya: <http://www.xtec.cat/~rnolla/Sangaku/SangWEB/PDF/PG-04-05-fouz.pdf>

Galán Atienza, B. (2012). *La historia de las matemáticas. De dónde vienen y hacia dónde se dirigen*. Universidad de Cantabria. Obtenido de <https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/1764/Gal%C3%A1n%20Atienza%20Benjam%C3%ADn.pdf>

ANEXO 1 OBJETIVOS Y COMPETENCIAS DEL MÁSTER

La finalidad del máster es la adquisición por los estudiantes de una formación avanzada, orientada a la especialización profesional, que les habilite para el ejercicio de las profesiones reguladas de Profesor de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, de conformidad con lo establecido en la Ley Orgánica 2/2006 de Educación y en la Resolución de 17 de diciembre de 2007, de la Secretaría de Estado de Universidades e Investigación, por la que se publica el acuerdo del Consejo de Ministros por el que se establecen las condiciones a las que deberán adecuarse los planes de estudio conducentes a la obtención de títulos que habiliten para el ejercicio de las profesiones citadas.

Por otra parte, y dado que estos estudios corresponden al nivel educativo de Máster, comparte los **objetivos generales** establecidos en el Marco Español de Cualificaciones para la Educación Superior, MECES:

- OG1: Que los estudiantes sepan aplicar, como profesionales docentes, los conocimientos adquiridos y su capacidad de resolución de problemas en entornos nuevos o poco conocidos dentro de contextos más amplios (o multidisciplinares) relacionados con la especialidad cursada.
- OG2: Que los estudiantes sean capaces, como profesionales docentes, de integrar conocimientos y enfrentarse a la complejidad de formular juicios a partir de una información que, siendo incompleta o limitada, incluya reflexiones sobre las responsabilidades sociales y éticas vinculadas a la aplicación en los centros escolares de sus conocimientos y juicios.
- OG3: Que los estudiantes sepan comunicar sus conclusiones, conocimientos y razones últimas en las que se sustentan como profesionales docentes, tanto a públicos especializados como a no especializados, de un modo claro y sin ambigüedades.
- OG4: Que los estudiantes posean las habilidades de aprendizaje que les permitan continuar estudiando y formándose como profesionales docentes, de un modo, en gran medida auto dirigido o autónomo.

Las **competencias generales** del máster, según Ley Orgánica 2/2006 de Educación y en la Resolución de 17 de diciembre de 2007:

- G.1. Conocer los contenidos curriculares de las materias relativas a la especialización docente correspondiente, así como el cuerpo de conocimientos didácticos en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje respectivos. Para la formación profesional se incluirá el conocimiento de las respectivas profesiones.
- G.2. Planificar, desarrollar y evaluar el proceso de enseñanza y aprendizaje potenciando procesos educativos que faciliten la adquisición de las competencias propias de las respectivas enseñanzas, atendiendo al nivel y formación previa de los estudiantes, así como la orientación de los mismos, tanto individualmente como en colaboración con otros docentes y profesionales del centro.
- G.3. Buscar, obtener, procesar y comunicar información (oral, impresa, audiovisual, digital o multimedia), transformarla en conocimiento y aplicarla en los procesos de enseñanza y aprendizaje en las materias propias de la especialización cursada.
- G.4. Concretar el currículo que se vaya a implantar en un centro docente participando en la planificación colectiva del mismo; desarrollar y aplicar metodologías didácticas tanto grupales como personalizadas, adaptadas a la diversidad de los estudiantes.
- G.5. Diseñar y desarrollar espacios de aprendizaje con especial atención a la equidad, la educación emocional y en valores, la igualdad de derechos y oportunidades entre hombres y

mujeres, la formación ciudadana y el respeto de los derechos humanos que faciliten la vida en sociedad, la toma de decisiones y la construcción de un futuro sostenible.

- G.6. Adquirir estrategias para estimular el esfuerzo del estudiante y promover su capacidad para aprender por sí mismo y con otros, y desarrollar habilidades de pensamiento y de decisión que faciliten la autonomía, la confianza e iniciativa personales.
- G.7. Conocer los procesos de interacción y comunicación en el aula, dominar destrezas y habilidades sociales necesarias para fomentar el aprendizaje y la convivencia en el aula, y abordar problemas de disciplina y resolución de conflictos.
- G.8. Diseñar y realizar actividades formales y no formales que contribuyan a hacer del centro un lugar de participación y cultura en el entorno donde esté ubicado; desarrollar las funciones de tutoría y de orientación de los estudiantes de manera colaborativa y coordinada; participar en la evaluación, investigación y la innovación de los procesos de enseñanza y aprendizaje.
- G.9. Conocer la normativa y organización institucional del sistema educativo y modelos de mejora de la calidad con aplicación a los centros de enseñanza.
- G.10. Conocer y analizar las características históricas de la profesión docente, su situación actual, perspectivas e interrelación con la realidad social de cada época.
- G.11. Informar y asesorar a las familias acerca del proceso de enseñanza y aprendizaje y sobre la orientación personal, académica y profesional de sus hijos.

Las competencias específicas de cada módulo del máster, según Ley Orgánica 2/2006 de Educación y en la Resolución de 17 de diciembre de 2007:

Competencias Específicas del módulo genérico

Aprendizaje y desarrollo de la personalidad

- E.G.1. Conocer las características de los estudiantes, sus contextos sociales y motivaciones.
- E.G.2. Comprender el desarrollo de la personalidad de estos estudiantes y las posibles disfunciones que afectan al aprendizaje.
- E.G.3. Elaborar propuestas basadas en la adquisición de conocimientos, destrezas y aptitudes intelectuales y emocionales.
- E.G.4. Identificar y planificar la resolución de situaciones educativas que afectan a estudiantes con diferentes capacidades y diferentes ritmos de aprendizaje.

Procesos y contextos educativos

- E.G.5. Conocer los procesos de interacción y comunicación en el aula y en el centro, abordar y resolver posibles problemas.
- E.G.6. Conocer la evolución histórica del sistema educativo en nuestro país.
- E.G.7. Conocer y aplicar recursos y estrategias de información, tutoría y orientación académica y profesional.
- E.G.8. Promover acciones de educación emocional, en valores y formación ciudadana.
- E.G.9. Participar en la definición del proyecto educativo y en las actividades generales del centro atendiendo a criterios de mejora de la calidad, atención a la diversidad, prevención de problemas de aprendizaje y convivencia.

Sociedad, familia y educación

- E.G.10. Relacionar la educación con el medio y comprender la función educadora de la familia y la comunidad, tanto en la adquisición de competencias y aprendizajes como en la educación en

el respeto de los derechos y libertades, en la igualdad de derechos y oportunidades entre hombres y mujeres y en la igualdad de trato y no discriminación de las personas con discapacidad.

- E.G.11. Conocer la evolución histórica de la familia, sus diferentes tipos y la incidencia del contexto familiar en la educación.
- E.G.12. Adquirir habilidades sociales en la relación y orientación familiar.

Competencias Específicas del módulo específico

Complementos para la formación disciplinar

- E.E.1. Conocer el valor formativo y cultural de las materias correspondientes a la especialización y los contenidos que se cursan en las respectivas enseñanzas.
- E.E.2. Conocer la historia y los desarrollos recientes de las materias y sus perspectivas para poder transmitir una visión dinámica de las mismas.
- E.E.3. Conocer contextos y situaciones en que se usan o aplican los diversos contenidos curriculares.
- E.E.4. En formación profesional, conocer la evolución del mundo laboral, la interacción entre sociedad, trabajo y calidad de vida, así como la necesidad de adquirir la formación adecuada para la adaptación a los cambios y transformaciones que puedan requerir las profesiones.
- E.E.5. En el caso de la orientación psicopedagógica y profesional, conocer los procesos y recursos para la prevención de problemas de aprendizaje y convivencia, los procesos de evaluación y de orientación académica y profesional.

Aprendizaje y enseñanza de las materias correspondientes

- E.E.6. Conocer los desarrollos teórico-prácticos de la enseñanza y el aprendizaje de las materias correspondientes.
- E.E.7. Transformar los currículos en programas de actividades y de trabajo.
- E.E.8. Adquirir criterios de selección y elaboración de materiales educativos.
- E.E.9. Fomentar un clima que facilite el aprendizaje y ponga en valor las aportaciones de los estudiantes.
- E.E.10. Integrar la formación en comunicación audiovisual y multimedia en el proceso de enseñanza aprendizaje.
- E.E.11. Conocer estrategias y técnicas de evaluación y entender la evaluación como un instrumento de regulación y estímulo al esfuerzo.

Innovación docente e iniciación a la investigación educativa

- E.E.12. Conocer y aplicar propuestas docentes innovadoras en el ámbito de la especialización cursada.
- E.E.13. Analizar críticamente el desempeño de la docencia, de las buenas prácticas y de la orientación utilizando indicadores de calidad.
- E.E.14. Identificar los problemas relativos a la enseñanza y aprendizaje de las materias de la especialización y plantear alternativas y soluciones.
- E.E.15. Conocer y aplicar metodologías y técnicas básicas de investigación y evaluación educativas y ser capaz de diseñar y desarrollar proyectos de investigación, innovación y evaluación.

Competencias Específicas del módulo Practicum

Practicum en la especialización, incluyendo el Trabajo fin de Máster

- E.P.1. Adquirir experiencia en la planificación, la docencia y la evaluación de las materias correspondientes a la especialización.
- E.P.2. Acreditar un buen dominio de la expresión oral y escrita en la práctica docente.
- E.P.3. Dominar las destrezas y habilidades sociales necesarias para fomentar un clima que facilite el aprendizaje y la convivencia.
- E.P.4. Participar en las propuestas de mejora en los distintos ámbitos de actuación a partir de la reflexión basada en la práctica.
- E.P.5. Para la formación profesional, conocer la tipología empresarial correspondiente a los sectores productivos y comprender los sistemas organizativos más comunes en las empresas.
- E.P.6. Respecto a la orientación, ejercitarse en la evaluación psicopedagógica, el asesoramiento a otros profesionales de la educación, a los estudiantes y a las familias.

Estas competencias, junto con las propias del resto de materias, quedarán reflejadas en el Trabajo fin de Máster que compendia la formación adquirida a lo largo de todas las enseñanzas descritas.

ANEXO 2 OBJETIVOS DIDÁCTICOS ESO – LOMCE

Según la legislación vigente, Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre del BOE, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, los objetivos que en la Educación Secundaria Obligatoria deben desarrollar los alumnos son los siguientes:

- a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.
- b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.
- c) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.
- d) Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.
- e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.
- f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.
- g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.
- h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.
- i) Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.
- j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.
- k) Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.
- l) Apreiciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

Los objetivos, según ORDEN EDU/362/2015, del 4 de mayo de 2015, para el bloque de Contenidos Comunes de matemáticas de 2º de ESO son los siguientes:

1. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.
2. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones.
3. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.
4. Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema.
5. Elaborar y presentar informes, de manera clara y ordenada, sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación.
6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.
7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos.
8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.
9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.
10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.
11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.
12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.

Los objetivos, según ORDEN EDU/362/2015, del 4 de mayo de 2015, para el bloque de Geometría de matemáticas de 2º de ESO, son los siguientes (en negrita los relacionados con la enseñanza de polígonos):

1. **Reconocer y describir figuras planas, sus elementos y propiedades características que permiten clasificarlas, identificar situaciones, describir el contexto físico, y abordar problemas de la vida cotidiana.**
2. **Utilizar estrategias, herramientas tecnológicas y técnicas simples de la geometría analítica plana para la resolución de problemas de perímetros, áreas y ángulos de figuras planas. Utilizar el lenguaje matemático adecuado para expresar los procedimientos seguidos en la resolución de los problemas geométricos.**
3. Reconocer el significado aritmético el **Teorema de Pitágoras** (cuadrados de números, ternas pitagóricas) y el **significado geométrico (áreas de cuadrados construidos sobre los lados) y emplearlo para resolver problemas geométricos.**
4. Analizar e identificar figuras semejantes, calculando la escala o razón de semejanza y la razón entre longitudes, **áreas** y volúmenes de cuerpos semejantes.
5. Analizar distintos cuerpos geométricos (cubos, ortoedros, prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas) e identificar sus elementos característicos (vértices, aristas, caras, desarrollos planos, secciones al cortar con planos, cuerpos obtenidos mediante secciones, simetrías, etc.).
6. **Resolver problemas que conlleven el cálculo de longitudes, superficies** y volúmenes del mundo físico, utilizando propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros.

Los objetivos, según ORDEN EDU/590/2016, de 23 de junio, para el bloque de Geometría del ámbito científico y matemático de 2º de ESO – PMAR, son los siguientes (en negrita los relacionados con la enseñanza de polígonos):

1. **Reconocer y describir figuras planas, sus elementos y propiedades características que permiten clasificarlas, identificar situaciones, describir el contexto físico, y abordar problemas de la vida cotidiana.**
2. **Utilizar estrategias, herramientas tecnológicas y técnicas simples de la geometría analítica plana para la resolución de problemas de perímetros, áreas y ángulos de figuras planas. Utilizar el lenguaje matemático adecuado para expresar los procedimientos seguidos en la resolución de los problemas geométricos.**
3. Reconocer el significado aritmético del **Teorema de Pitágoras** (cuadrados de números, ternas pitagóricas) y **emplearlo para resolver problemas geométricos.**
4. Utilizar el **teorema de Tales** y las fórmulas usuales para obtener medidas. Analizar e identificar figuras semejantes, calculando la escala o razón de semejanza. Calcular las dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos.
5. Analizar distintos cuerpos geométricos (cubos, ortoedros, prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas) e identificar sus elementos característicos (vértices, aristas, caras y desarrollos planos).

Resolver problemas que conlleven el **cálculo de longitudes, superficies** y volúmenes del mundo físico, utilizando propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros.

ANEXO 3 CURRÍCULO ACADÉMICO LOMCE

ÍNDICE

Bloque de Geometría 1º ESO	116
Bloque de Geometría 2º ESO	117
Bloque de Geometría 2º ESO – PMAR.....	118
Bloque de Geometría 3º ESO – Enseñanzas Académicas.....	119
Bloque de Geometría 3º ESO – Enseñanzas Aplicadas.....	120
Bloque de Geometría 3º ESO – PMAR.....	121
Bloque de Geometría 4º ESO – Enseñanzas Académicas.....	122
Bloque de Geometría 4º ESO – Enseñanzas Aplicadas.....	123

Según la legislación vigente⁴⁵, se procede a plasmar los contenidos, los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables mínimos exigidos del bloque de Geometría en Educación Secundaria Obligatoria por cursos:

⁴⁵ (Junta de Castilla y León, 2015)

BLOQUE DE GEOMETRÍA 1º ESO

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
<p>Elementos básicos de la geometría del plano. Relaciones y propiedades de figuras en el plano: Paralelismo y perpendicularidad. Ángulos y sus relaciones. Construcciones geométricas sencillas: mediatriz, bisectriz. Propiedades. Figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales. Clasificación de triángulos. Rectas y puntos notables del triángulo. Uso de medios informáticos para analizarlos y construirlos. Clasificación de cuadriláteros. Propiedades y relaciones. Circunferencia, círculo, arcos y sectores circulares. Medida y cálculo de ángulos de figuras planas. Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples.</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Reconocer y describir figuras planas, sus elementos y propiedades características que permiten clasificarlas, identificar situaciones, describir el contexto físico y abordar problemas de la vida cotidiana. 2. Utilizar estrategias, herramientas tecnológicas y técnicas simples de la geometría analítica plana para la resolución de problemas de perímetros, áreas y ángulos de figuras planas. Utilizar el lenguaje matemático adecuado para expresar los procedimientos seguidos en la resolución de los problemas geométricos. Resolver problemas que conlleven el cálculo de longitudes y superficies del mundo físico 3. Reconocer el significado aritmético del Teorema de Pitágoras (cuadrados de números, ternas pitagóricas) y el significado geométrico (áreas de cuadrados construidos sobre los lados) y emplearlo para resolver problemas geométricos y aritméticos. 	<ol style="list-style-type: none"> 1.1. Reconoce y describe las propiedades características de los polígonos regulares: ángulos interiores, ángulos centrales, diagonales, apotema, simetrías, etc. 1.2. Define los elementos característicos de los triángulos, trazando los mismos y conociendo la propiedad común a cada uno de ellos, y los clasifica atendiendo tanto a sus lados como a sus ángulos. 1.3. Clasifica los cuadriláteros y paralelogramos atendiendo al paralelismo entre sus lados opuestos y conociendo sus propiedades referentes a ángulos, lados y diagonales. 1.4. Identifica las propiedades geométricas que caracterizan los puntos de la circunferencia y el círculo. 2.1. Resuelve problemas relacionados con distancias, perímetros, superficies y ángulos de figuras planas, en contextos de la vida real, utilizando las herramientas tecnológicas y las técnicas geométricas más apropiadas. 2.2. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia. 2.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas. 3.1. Comprende los significados aritmético y geométrico del Teorema de Pitágoras y los utiliza para la búsqueda de ternas pitagóricas o la comprobación del teorema construyendo otros polígonos sobre los lados del triángulo rectángulo. 3.2. Aplica el teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas en la resolución de triángulos y áreas de polígonos regulares, en contextos geométricos o en contextos reales.

BLOQUE DE GEOMETRÍA 2º ESO

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
<p>Figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales.</p> <p>Circunferencia, círculo, arcos y sectores circulares. Cálculo de áreas y perímetros.</p> <p>Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples.</p> <p>Uso de herramientas informáticas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.</p> <p>Revisión de los triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Justificación geométrica y aplicaciones.</p> <p>Semejanza: figuras semejantes. Criterios de semejanza. Razón de semejanza y escala. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.</p> <p>Poliedros y cuerpos de revolución. Elementos característicos, clasificación. Áreas y volúmenes. Propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros. Cálculo de longitudes, superficies y volúmenes en el mundo físico.</p>	<ol style="list-style-type: none"> Reconocer y describir figuras planas, sus elementos y propiedades características que permiten clasificarlas, identificar situaciones, describir el contexto físico, y abordar problemas de la vida cotidiana. Utilizar estrategias, herramientas tecnológicas y técnicas simples de la geometría analítica plana para la resolución de problemas de perímetros, áreas y ángulos de figuras planas. Utilizar el lenguaje matemático adecuado para expresar los procedimientos seguidos en la resolución de los problemas geométricos. Reconocer el significado aritmético del Teorema de Pitágoras (cuadrados de números, ternas pitagóricas) y el significado geométrico (áreas de cuadrados construidos sobre los lados) y emplearlo para resolver problemas geométricos. Analizar e identificar figuras semejantes, calculando la escala o razón de semejanza y la razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. Analizar distintos cuerpos geométricos (cubos, ortoedros, prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas) e identificar sus elementos característicos (vértices, aristas, caras, desarrollos planos, secciones al cortar con planos, cuerpos obtenidos mediante secciones, simetrías, etc.). Resolver problemas que conlleven el cálculo de longitudes, superficies y volúmenes del mundo físico, utilizando propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros. 	<ol style="list-style-type: none"> Reconoce y describe las propiedades características de los polígonos regulares: ángulos interiores, ángulos centrales, diagonales, apotema, simetrías, etc. Define los elementos característicos de los triángulos, trazando los mismos y conociendo la propiedad común a cada uno de ellos, y los clasifica atendiendo tanto a sus lados como a sus ángulos. Clasifica los cuadriláteros y paralelogramos atendiendo al paralelismo entre sus lados opuestos y conociendo sus propiedades referentes a ángulos, lados y diagonales. Identifica las propiedades geométricas que caracterizan los puntos de la circunferencia y el círculo. <ol style="list-style-type: none"> Resuelve problemas relacionados con distancias, perímetros, superficies y ángulos de figuras planas, en contextos de la vida real, utilizando las herramientas tecnológicas y las técnicas geométricas más apropiadas. Calcula la longitud de la circunferencia, el área del círculo, la longitud de un arco y el área de un sector circular, y las aplica para resolver problemas geométricos. <ol style="list-style-type: none"> Comprende los significados aritmético y geométrico del Teorema de Pitágoras y los utiliza para la búsqueda de ternas pitagóricas o la comprobación del teorema construyendo otros polígonos sobre los lados del triángulo rectángulo. Aplica el teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas en la resolución de triángulos y áreas de polígonos regulares, en contextos geométricos o en contextos reales. <ol style="list-style-type: none"> Reconoce figuras semejantes y calcula la razón de semejanza y la razón de superficies y volúmenes de figuras semejantes. Utiliza la escala para resolver problemas de la vida cotidiana sobre planos, mapas y otros contextos de semejanza. Analiza e identifica las características de distintos cuerpos geométricos, utilizando el lenguaje geométrico adecuado. Construye secciones sencillas de los cuerpos geométricos, a partir de cortes con planos, mentalmente y utilizando los medios tecnológicos adecuados. Identifica los cuerpos geométricos a partir de sus desarrollos planos y recíprocamente.

BLOQUE DE GEOMETRÍA 2º ESO – PMAR

En el caso de PMAR (Programa de Mejora del Aprendizaje y el Rendimiento), el currículo se desarrolla en ORDEN EDU/590/2016, de 23 de junio⁴⁶.

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
<p>Figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales. Circunferencia, círculo, arcos y sectores circulares. Cálculo de áreas y perímetros. Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples.</p> <p>Uso de herramientas informáticas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.</p> <p>Revisión de los triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Aplicaciones. Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales.</p> <p>Semejanza: figuras semejantes. Criterios de semejanza. Razón de semejanza y escala. Aplicación a la resolución de problemas en contextos reales.</p> <p>Poliedros y cuerpos de revolución. Elementos característicos, clasificación. Áreas y volúmenes. Propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros. Cálculo de longitudes, superficies y volúmenes en el mundo físico.</p>	<ol style="list-style-type: none"> Reconocer y describir figuras planas, sus elementos y propiedades características que permiten clasificarlas, identificar situaciones, describir el contexto físico, y abordar problemas de la vida cotidiana. Utilizar estrategias, herramientas tecnológicas y técnicas simples de la geometría analítica plana para la resolución de problemas de perímetros, áreas y ángulos de figuras planas. Utilizar el lenguaje matemático adecuado para expresar los procedimientos seguidos en la resolución de los problemas geométricos. Reconocer el significado aritmético del Teorema de Pitágoras (cuadrados de números, ternas pitagóricas) y emplearlo para resolver problemas geométricos. Utilizar el teorema de Tales y las fórmulas usuales para obtener medidas. Analizar e identificar figuras semejantes, calculando la escala o razón de semejanza. Calcular las dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos. Analizar distintos cuerpos geométricos (cubos, ortoedros, prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas) e identificar sus elementos característicos (vértices, aristas, caras y desarrollos planos). Resolver problemas que conlleven el cálculo de longitudes, superficies y volúmenes del mundo físico, utilizando propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros. 	<ol style="list-style-type: none"> Reconoce y describe las propiedades características de los polígonos regulares: ángulos interiores, ángulos centrales, diagonales, apotema, simetrías, etc. Define los elementos característicos de los triángulos, trazando los mismos y conociendo la propiedad común a cada uno de ellos, y los clasifica atendiendo tanto a sus lados como a sus ángulos. Clasifica los cuadriláteros y paralelogramos atendiendo al paralelismo entre sus lados opuestos y conociendo sus propiedades referentes a ángulos, lados y diagonales. Identifica las propiedades geométricas que caracterizan los puntos de la circunferencia y el círculo. <ol style="list-style-type: none"> Resuelve problemas relacionados con distancias, perímetros, superficies y ángulos de figuras planas, en contextos de la vida real, utilizando las herramientas tecnológicas y las técnicas geométricas más apropiadas. Calcula la longitud de la circunferencia, el área del círculo, la longitud de un arco y el área de un sector circular, y las aplica para resolver problemas geométricos. Comprende los significados aritmético y geométrico del Teorema de Pitágoras y los utiliza para la búsqueda de ternas pitagóricas. <ol style="list-style-type: none"> Aplica el teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas en la resolución de triángulos y áreas de polígonos regulares, en contextos geométricos o en contextos reales. Reconoce figuras semejantes y calcula la razón de semejanza, utilizando el teorema de Tales para el cálculo indirecto de longitudes <ol style="list-style-type: none"> Utiliza la escala para resolver problemas de la vida cotidiana sobre planos, mapas y otros contextos de semejanza. Analiza e identifica las características de distintos cuerpos geométricos, utilizando el lenguaje geométrico adecuado. <ol style="list-style-type: none"> Identifica los cuerpos geométricos a partir de sus desarrollos planos y recíprocamente. Resuelve problemas de la realidad mediante el cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos, utilizando los lenguajes geométrico y algebraico adecuados.

⁴⁶ (Junta de Castilla y León, 2016)

BLOQUE DE GEOMETRÍA 3º ESO – ENSEÑANZAS ACADÉMICAS

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
<p>Geometría del plano. Lugar geométrico. Mediatriz, bisectriz, circunferencia. Otros lugares geométricos que den lugar a rectas, segmentos y arcos de circunferencia. Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales. Escalas. Aplicación a la resolución de problemas. Movimientos del Plano: Traslaciones, giros y simetrías en el plano. Elementos dobles o invariantes. Reconocimiento de los movimientos y valoración de su belleza en el arte y la naturaleza. Uso de herramientas tecnológicas para estudiar y construir formas, configuraciones y relaciones geométricas. Geometría del espacio. Poliedros. Planos de simetría en los poliedros. Fórmula de Euler para los poliedros simples. Poliedros regulares, poliedros duales. Cilindro, cono, tronco de cono y esfera. Intersecciones de planos y esferas. Cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos. Contextualización en la realidad. El globo terráqueo. Coordenadas geográficas y husos horarios. Longitud y latitud de un punto.</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Reconocer y describir los elementos y propiedades características de las figuras planas, los cuerpos geométricos elementales y sus configuraciones geométricas, y reconocerlos en la realidad. 2. Utilizar el teorema de Tales y las fórmulas usuales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener las medidas de longitudes, áreas y volúmenes de los cuerpos elementales, de ejemplos tomados de la vida real, representaciones artísticas como pintura o arquitectura, o de la resolución de problemas geométricos. 3. Calcular (ampliación o reducción) las dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos, conociendo la escala. 4. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimientos en el plano, aplicar dichos movimientos y analizar diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza. 5. Identificar centros, ejes y planos de simetría de figuras planas y poliedros. 6. Interpretar el sentido de las coordenadas geográficas y su aplicación en la localización de puntos. 	<ol style="list-style-type: none"> 1.1. Conoce las propiedades de los puntos de la mediatriz de un segmento y de la bisectriz de un ángulo, utilizándolas para resolver problemas geométricos sencillos. 1.2. Maneja las relaciones entre ángulos definidos por rectas que se cortan o por paralelas cortadas por una secante y resuelve problemas geométricos sencillos. <ol style="list-style-type: none"> 2.1. Calcula el perímetro y el área de polígonos y de figuras circulares en problemas contextualizados aplicando fórmulas y técnicas adecuadas. 2.2. Divide un segmento en partes proporcionales a otros dados y establece relaciones de proporcionalidad entre los elementos homólogos de dos polígonos semejantes. 2.3. Reconoce triángulos semejantes y, en situaciones de semejanza, utiliza el teorema de Tales para el cálculo indirecto de longitudes en contextos diversos. <ol style="list-style-type: none"> 3.1. Calcula dimensiones reales de medidas de longitudes y de superficies en situaciones de semejanza: planos, mapas, fotos aéreas, etc. <ol style="list-style-type: none"> 4.1. Identifica los elementos más característicos de los movimientos en el plano presentes en la naturaleza, en diseños cotidianos u obras de arte. 4.2. Genera creaciones propias mediante la composición de movimientos, empleando herramientas tecnológicas cuando sea necesario. <ol style="list-style-type: none"> 5.1. Identifica los principales poliedros y cuerpos de revolución, utilizando el lenguaje con propiedad para referirse a los elementos principales. 5.2. Calcula áreas y volúmenes de poliedros, cilindros, conos y esferas, y los aplica para resolver problemas contextualizados. 5.3. Identifica centros, ejes y planos de simetría en figuras planas, poliedros y en la naturaleza, en el arte y construcciones humanas. 6.1. Sitúa sobre el globo terráqueo: ecuador, polos, meridianos y paralelos; y es capaz de ubicar un punto sobre el globo terráqueo conociendo su longitud y latitud.

BLOQUE DE GEOMETRÍA 3º ESO – ENSEÑANZAS APLICADAS

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
<p>Geometría del plano: mediatriz, bisectriz, ángulos y sus relaciones, perímetro y área. Propiedades. Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales. Escalas. Aplicación a la resolución de problemas en contextos reales. Movimientos en el plano: Traslaciones, giros y simetrías en el plano. Reconocimiento de los movimientos y valoración de su belleza en el arte y en la naturaleza. Uso de herramientas tecnológicas para estudiar y construir formas, configuraciones y relaciones geométricas. El globo terráqueo. Coordenadas geográficas. Longitud y latitud de un punto.</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Reconocer y describir los elementos y propiedades características de las figuras planas, los cuerpos geométricos elementales y sus configuraciones geométricas y reconocerlos en la realidad. 2. Utilizar el teorema de Tales y las fórmulas usuales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener medidas de longitudes, de ejemplos tomados de la vida real, representaciones artísticas como pintura o arquitectura, o de la resolución de problemas geométricos. 3. Calcular (ampliación o reducción) las dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos, conociendo la escala. 4. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimiento en el plano, aplicar dichos movimientos y analizar diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza. 5. Interpretar el sentido de las coordenadas geográficas y su aplicación en la localización de puntos. 	<ol style="list-style-type: none"> 1.1. Conoce las propiedades de los puntos de la mediatriz de un segmento y de la bisectriz de un ángulo. 1.2. Utiliza las propiedades de la mediatriz y la bisectriz para resolver problemas geométricos sencillos. 1.3. Maneja las relaciones entre ángulos definidos por rectas que se cortan o por paralelas cortadas por una secante y resuelve problemas geométricos sencillos en los que intervienen ángulos. 1.4. Calcula el perímetro de polígonos, la longitud de circunferencias, el área de polígonos y de figuras circulares, en problemas contextualizados aplicando fórmulas y técnicas adecuadas. <ol style="list-style-type: none"> 2.1. Divide un segmento en partes proporcionales a otros dados. Establece relaciones de proporcionalidad entre los elementos homólogos de dos polígonos semejantes. 2.2. Reconoce triángulos semejantes, y en situaciones de semejanza utiliza el teorema de Tales para el cálculo indirecto de longitudes. 3.1. Calcula dimensiones reales de medidas de longitudes en situaciones de semejanza: planos, mapas, fotos aéreas, etc. <ol style="list-style-type: none"> 4.1. Identifica los elementos más característicos de los movimientos en el plano presentes en la naturaleza, en diseños cotidianos u obras de arte. 4.2. Genera creaciones propias mediante la composición de movimientos, empleando herramientas tecnológicas cuando sea necesario. 5.1. Sitúa sobre el globo terráqueo Ecuador, polos, meridianos y paralelos, y es capaz de ubicar un punto sobre el globo terráqueo conociendo su longitud y latitud.

BLOQUE DE GEOMETRÍA 3º ESO – PMAR

En el caso de PMAR (Programa de Mejora del Aprendizaje y el Rendimiento), el currículo se desarrolla en ORDEN EDU/590/2016, de 23 de junio⁴⁷.

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
<p>Geometría del plano. Lugar geométrico. Mediatriz, bisectriz, circunferencia. Otros lugares geométricos que den lugar a rectas, segmentos y arcos de circunferencia. Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales. Escalas. Aplicación a la resolución de problemas. Movimientos del Plano: Traslaciones, giros y simetrías en el plano. Uso de herramientas tecnológicas para estudiar y construir formas, configuraciones y relaciones geométricas. Geometría del espacio. Poliedros. Fórmula de Euler para los poliedros simples. Poliedros regulares, Cilindro, cono y esfera. Cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos. Contextualización en la realidad. El globo terráqueo. Coordenadas geográficas y husos horarios. Longitud y latitud de un punto.</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Reconocer y describir los elementos y propiedades características de las figuras planas, los cuerpos geométricos elementales y sus configuraciones geométricas, y reconocerlos en la realidad. 2. Utilizar el teorema de Tales y las fórmulas usuales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener las medidas de longitudes, áreas y volúmenes de los cuerpos elementales, de ejemplos tomados de la vida real, representaciones artísticas como pintura o arquitectura, o de la resolución de problemas geométricos. 3. Calcular (ampliación o reducción) las dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos, conociendo la escala. 4. Identificar figuras planas y poliedros y calcular sus áreas y volúmenes. 5. Interpretar el sentido de las coordenadas geográficas y su aplicación en la localización de puntos. 	<ol style="list-style-type: none"> 1.1. Conoce las propiedades de los puntos de la mediatriz de un segmento y de la bisectriz de un ángulo, utilizándolas para resolver problemas geométricos sencillos. 1.2. Maneja las relaciones entre ángulos definidos por rectas que se cortan o por paralelas cortadas por una secante y resuelve problemas geométricos sencillos. 2.1. Calcula el perímetro y el área de polígonos y de figuras circulares en problemas contextualizados aplicando fórmulas y técnicas adecuadas. 2.2. Divide un segmento en partes proporcionales a otros dados y establece relaciones de proporcionalidad entre los elementos homólogos de dos polígonos semejantes. 2.3. Reconoce triángulos semejantes y, en situaciones de semejanza, utiliza el teorema de Tales para el cálculo indirecto de longitudes en contextos diversos. 3.1. Calcula dimensiones reales de medidas de longitudes y de superficies en situaciones de semejanza: planos, mapas, fotos aéreas, etc. 4.1. Identifica los principales poliedros y cuerpos de revolución, utilizando el lenguaje con propiedad para referirse a los elementos principales. 4.2. Calcula áreas y volúmenes de poliedros, cilindros, conos y esferas, y los aplica para resolver problemas contextualizados. 5.1. Sitúa sobre el globo terráqueo Ecuador, polos, meridianos y paralelos, y es capaz de ubicar un punto sobre el globo terráqueo conociendo su longitud y latitud.

⁴⁷ (Junta de Castilla y León, 2016)

BLOQUE DE GEOMETRÍA 4º ESO – ENSEÑANZAS ACADÉMICAS

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
<p>Radián. Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes. Relaciones métricas en los triángulos.</p> <p>Razones trigonométricas de ángulos agudos y de ángulos cualesquiera. Relaciones entre ellas. Relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos complementarios, suplementarios, opuestos y que se diferencian en uno y dos rectos. Resolución de triángulos rectángulos y oblicuángulos aplicando trigonometría elemental.</p> <p>Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes.</p> <p>Semejanza. Figuras semejantes. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.</p> <p>Iniciación a la geometría analítica en el plano: coordenadas. Vectores. Definiciones geométricas y analíticas de las operaciones: suma de vectores y producto de número por vector. Ecuaciones de la recta: vectorial, paramétricas, continua y general o implícita. Paralelismo, perpendicularidad: condiciones de las coordenadas de los vectores.</p> <p>Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales. 2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas en situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida. 3. Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas. 	<ol style="list-style-type: none"> 1.1. Utiliza conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos. 2.1. Utiliza las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas. 2.2. Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones. 2.3. Utiliza las fórmulas para calcular áreas y volúmenes de triángulos, cuadriláteros, círculos, paralelepípedos, pirámides, cilindros, conos y esferas y las aplica para resolver problemas geométricos, asignando las unidades apropiadas. 3.1. Establece correspondencias analíticas entre las coordenadas de puntos y vectores. 3.2. Calcula la distancia entre dos puntos y el módulo de un vector. 3.3. Conoce el significado de pendiente de una recta y diferentes formas de calcularla. 3.4. Calcula la ecuación de una recta de varias formas, en función de los datos conocidos. 3.5. Reconoce distintas expresiones de la ecuación de una recta y las utiliza en el estudio analítico de las condiciones de incidencia, paralelismo y perpendicularidad. 3.6. Utiliza recursos tecnológicos interactivos para crear figuras geométricas y observar sus propiedades y características.

BLOQUE DE GEOMETRÍA 4º ESO – ENSEÑANZAS APLICADAS

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
<p>Semejanza. Figuras semejantes. Teoremas de Tales y Pitágoras. Aplicación de la semejanza para la obtención indirecta de medidas y aplicación en planos y mapas. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos semejantes. Resolución de problemas geométricos en el mundo físico: medida y cálculo de longitudes, áreas y volúmenes de diferentes cuerpos. Prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas. Uso de aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas en situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas, y aplicando, así mismo, la unidad de medida más acorde con la situación descrita. 2. Utilizar aplicaciones informáticas de geometría dinámica, representando cuerpos geométricos y comprobando, mediante interacción con ella, propiedades geométricas. 	<ol style="list-style-type: none"> 1.1. Utiliza los instrumentos apropiados, fórmulas y técnicas apropiadas para medir ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas, interpretando las escalas de medidas. 1.2. Emplea las propiedades de las figuras y cuerpos (simetrías, descomposición en figuras más conocidas, etc.) y aplica el teorema de Tales, para estimar o calcular medidas indirectas. 1.3. Utiliza las fórmulas para calcular perímetros, áreas y volúmenes de triángulos, rectángulos, círculos, prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas, y las aplica para resolver problemas geométricos, asignando las unidades correctas. 1.4. Calcula medidas indirectas de longitud, área y volumen mediante la aplicación del teorema de Pitágoras y la semejanza de triángulos. 2.1. Representa y estudia los cuerpos geométricos más relevantes (triángulos, rectángulos, círculos, prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas) con una aplicación informática de geometría dinámica y comprueba sus propiedades geométricas.

ANEXO 4 ÍNDICE DE FIGURAS Y CUADROS

Figura 2.1 - Olla de barro. Neolítico.	https://vratsamuseum.com/index.php?Pageid=36&lang=en (Consultado por última vez: 24/06/2021)
Figura 2.2 - Papiro de Ahmes.	http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_rhind.htm (Consultado por última vez: 24/06/2021)
Figura 2.3 - Tablilla Plimpton.	https://francis.naukas.com/2017/09/07/el-significado-matematico-de-la-tablilla-babilonica-plimpton-322/ (Consultado por última vez: 24/06/2021)
Figura 2.4 - "La escuela de Atenas", fresco de Rafael.	https://historiageneral.com/2011/12/19/la-academia-de-atenas/ (Consultado por última vez: 24/06/2021)
Figura 2.5 - T. de Pitágoras en Zhoubi Suanjing.	https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Chinese_pythagoras.jpg (Consultado por última vez: 25/06/2021)
Figura 2.6 - Construcción del Corte Sagrado.	Fernández Benito, I., & Reyes Iglesias, M. (Noviembre de 2001). Construcciones y Disecciones del Octógono. <i>Suma. Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.</i> (38), 69-72. Reelaborado por el autor.
Figura 2.7 - Espirales basadas en la sucesión de Fibonacci.	https://www.lifeder.com/serie-de-fibonacci/ (Consultado por última vez: 25/06/2021)
Figura 2.8 - Ilustración de los X Libros de Arquitectura de Vitruvio, por Leonardo da Vinci. Basado en la proporción áurea.	https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Vitruvian_Man_by_Leonardo_da_Vinci.jpg (Consultado por última vez: 25/06/2021)
Figura 2.9 - Teorema de Viviani.	Elaboración propia.
Figura 2.10 - Noción de Currículo.	Rico Romero, L. (1997). <i>Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria</i> (p. 31). Madrid: Síntesis. Redibujado por el autor.
Figura 2.11 - Legislación y documentos curriculares actuales en España.	Arce Sánchez, M., Conejo Garrote, L., & Muñoz Escolano, J. (2019). <i>Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas</i> (p. 60). Madrid: Síntesis.
Figura 2.12 - Grandes focos de interés en didáctica de la matemática.	Representación gráfica de (Arce Sánchez, Conejo Garrote, & Muñoz Escolano, 2019) en interpretación de: J. Bishop, A. (2010). <i>Mathematics Education. Major themes in Education</i> (p. 8-9). London: Routledge.
Figura 2.13 - Fases en los niveles de Van Hiele.	Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. <i>Revista EMA</i> , 7(3), 251-292. Reelaborado por el autor.

Figura 3.1 - Ciclo de análisis didáctico.	Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. Revista EMA, 7(3), 251-292. Reelaborado por el autor.
Figura 3.2 - Representaciones en geometría.	Martín García, M., & Artés Rodríguez, E. (2012). <i>Análisis didáctico: Diseño, práctica y valoración de una planificación de trabajo en el aula de secundaria</i> . Almería, España: Universidad de Almería.
Figura 3.3 - Mapa conceptual.	Martín García, M., & Artés Rodríguez, E. (2012). <i>Análisis didáctico: Diseño, práctica y valoración de una planificación de trabajo en el aula de secundaria</i> . Almería, España: Universidad de Almería.
Figura 3.4 - Mapa conceptual.	Elaboración propia.
Figura 3.5 - La regla de los 10 minutos, según John Medina.	Medina, J. (2008). <i>Brain Rules: 12 Principles for Surviving and Thriving at Work, Home, and School</i> . Seattle, WA: Pear Press.
Figura 4.1 - El punto y la recta.	Elaboración propia.
Figura 4.2 - Posiciones relativas.	
Figura 4.3 - El ángulo.	
Figura 4.4 - Clasificación de los ángulos.	
Figura 4.5 - Operaciones básicas.	
Figura 4.6 - Operaciones con papiroflexia.	
Figura 4.7 - Definición de triángulo.	
Figura 4.8 - Vértices y lados.	
Figura 4.9 - Construcción del triángulo.	
Figura 4.10 - Demostración gráfica de la suma de ángulos. (izq.)	
Figura 4.11 - Demostración mediante papiroflexia de la suma de ángulos. (dcha.)	
Figura 4.12 - Clasificación de los triángulos.	
Figura 4.13 - Elementos notables del triángulo.	
Figura 4.14 - El cuadrilátero y sus partes.	
Figura 4.15 - Suma de los ángulos de cualquier cuadrilátero.	
Figura 4.16 - Los paralelogramos.	
Figura 4.17 - Trapecios y trapezoides.	
Figura 4.19 - Perímetro de polígonos.	

Figura 4.20 - Área del triángulo.

Figura 4.21 - Área del rombo y del romboide.

Figura 4.22 - Área del trapecio.

Figura 4.23 - Área de figura compuesta.

Figura 4.24 - Área del Tangram.

Figura 4.25 - Polígono regular.

Figura 4.26 - Los primeros polígonos regulares.

Figura 4.27 - Fórmula del área de los polígonos regulares.

Figura 4.28 - Triángulo rectángulo.

Figura 4.29 - El Teorema de Tales.

Figura 4.18 - Tangram.

<https://www.elisaribau.com/los-beneficios-jugar-al-tangram/> (Consultado por última vez 14/07/2021)

Figura 4.30 - Las vías del tren son dos rectas paralelas.

<https://www.tribunavalladolid.com/noticias/la-estacion-de-tren-de-valladolid-recibe-una-amenaza-de-bomba-que-resulta-una-falsa-alarma/1492256584>

Consultado última vez 14/07/2021.

Figura 4.31 - Fachada del teatro Calderón.

[https://es.wikipedia.org/wiki/Teatro_Calderón_\(Valladolid\)](https://es.wikipedia.org/wiki/Teatro_Calderón_(Valladolid))

Consultado última vez 14/07/2021.

Figura 4.32 - Monumento al cine de Dennis Oppenheim.

[https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Monumento_al_Cine_\(Valladolid\)_2.jpg](https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Monumento_al_Cine_(Valladolid)_2.jpg)

Consultado última vez 14/07/2021.

Figura 4.33 - Pasarela peatonal del museo de la ciencia.

<https://www.losviajeros.com/Fotos.php?pl=5088>

Consultado por última vez 14/07/2021.

Tabla 1 - Educación Secundaria Española (1970-1990).

Castro Martínez, E., Castro Martínez, E., Coriat Benarroch, M., Llinares Císcar, S., Marín del Moral, A., Rico Romero, L., . . . Sierra Vázquez, M. (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. (L. Rico Romero, Ed.) Madrid: Síntesis.

Tabla 2 - Supuestos en los que se apoya cada corriente.

Arce Sánchez, M., Conejo Garrote, L., & Muñoz Escolano, J. (2019). *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas* (p. 28). Madrid: Síntesis.

Tabla 3 - Niveles de Van Hiele.

Elaboración propia.

Tabla 4 - Recursividad de los niveles de Van Hiele.

Fouz, F. (s.f.). *Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría*. Obtenido de XTEC - Xarxa Telemàtica Educativa de Catalunya:

[http://www.xtec.cat/~rnolla/Sangaku/SangWEB/PDF/P
G-04-05-fouz.pdf](http://www.xtec.cat/~rnolla/Sangaku/SangWEB/PDF/P
G-04-05-fouz.pdf)

Tabla 5 - Pilares del Análisis Didáctico.

Martín García, M., & Artés Rodríguez, E. (2012). *Análisis didáctico: Diseño, práctica y valoración de una planificación de trabajo en el aula de secundaria*. Almería, España: Universidad de Almería.

Tabla 6 - Objetivos didácticos con competencias asociadas.

Elaboración propia.

Tabla 7 - Perfil competencial.

Elaboración propia.

Tabla 8 - Clasificación de los triángulos por inclusión.

Elaboración propia.

Tabla 9 - Autoevaluación de la UD.

Santos Rubio, C., & Reyes Iglesias, M. (2018). *Propuesta didáctica para la enseñanza de los movimientos del plano. Perspectiva histórica*. Valladolid: Universidad de Valladolid.