UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Dpto. Matemática Aplicada

La matemática recreativa como recurso motivador en el aula de matemáticas

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de idiomas. Especialidad de Matemáticas.

Alumno: Álvaro Bilbao Torres
Tutor: Alfonso J. Población Sáez

Valladolid, junio 2021

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

RESUMEN

Las cuestiones y problemas de matemática recreativa son tan antiguos como la propia matemática. La variedad de temas, estrategias didácticas e incluso sentido del humor que caracterizan este tipo de propuestas han sido utilizadas a lo largo de los siglos como vehículo motivador para la sociedad en general y los alumnos en particular, al punto que, en la actualidad, muchos libros de texto de las diferentes editoriales incluyen ejercicios de este tipo como aplicación directa de los temas de los currículos de enseñanza primaria y secundaria. Con este trabajo trataremos de mostrar que es posible motivar al alumno de un curso concreto de enseñanza secundaria al estudio de las matemáticas mediante una selección adecuada de ejercicios de este tipo recorriendo todo el temario e incluso abriendo la posibilidad de trabajar y profundizar en cuestiones de mayor nivel al esperado, todo ello desde un análisis didáctico que parte de las diferentes competencias adquiridas o desarrolladas a lo largo del máster.

Palabras clave: matemática recreativa, recurso didáctico, estrategia didáctica, motivación, Educación Secundaria Obligatoria.

ABSTRACT

The questions and problems of recreational maths are as old as the mathematics itself. The range of topics, didactic strategies, or even the sense of humour that characterise these types of approaches have been utilised over the centuries as a motivational vehicle for the society in general and students in particular, to the extent that, nowadays, a good amount of the textbooks contain such exercises as a direct application of the primary and secondary educational curriculum contents. In this work we try to prove that it is possible to stimulate a student to study mathematics, in any secondary education course, with the use of an adequate selection of exercises, allowing to not only cover all the contents, but also to go deeper into more complex scenarios, all of this using a didactic analysis with basis in the different competencies acquired or developed during the master.

Keywords: recreational maths, learning resources, learning strategies, motivation, secondary education.

ÍNDICE

1. MOTIVACIÓN

Las matemáticas constituyen una parte fundamental de nuestro sistema educativo. Se empiezan a trabajar y estudiar desde la etapa más básica no obligatoria de nuestro sistema, Educación Infantil. Más tarde, en Educación Primaria se desarrolla la alfabetización numérica a través de la comparación, la estimación, el cálculo mental y escrito, todo ello enmarcado en contextos funcionales relacionados con situaciones de la vida diaria.

El aprendizaje de las matemáticas básicas culmina después, en la Educación Secundaria Obligatoria, mediante la adquisición de los conocimientos fundamentales sobre Números, Álgebra, Geometría, Funciones y gráficas, y Estadística y probabilidad. Tras concluir este aprendizaje básico, en las etapas educativas postobligatorias, se desarrollan un sinfín de contenidos que se engloban dentro de esta ciencia y muchas de sus aportaciones a otras materias.

A pesar de la gran presencia de las matemáticas en el sistema educativo y de la continua interacción que tienen con el alumnado resulta que las matemáticas es una de las pocas asignaturas vertebrales del sistema educativo que no dejan indiferente a nadie. La mayoría del alumnado las ha disfrutado o sufrido, pero pocos afirman que les ha provocado indiferencia.

¿Por qué una gran parte del alumnado asegura que las matemáticas es una asignatura difícil y aburrida? Una de las respuestas posibles a esta pregunta podría ser porque a muchos de ellos nunca les han mostrado la faceta atractiva y lúdica que tienen las matemáticas.

El fin con el que voy a desarrollar este trabajo de fin de máster es tratar de demostrar que es posible enseñar matemáticas de manera atractiva y recreativa y, además, vincular el aprendizaje con su utilidad en la vida cotidiana. Estoy seguro de que si aplicásemos más las matemáticas recreativas en el aula con un fin didáctico cada vez menos alumnos afirmarían que las matemáticas son difíciles y aburridas.

“La diversión es una de las fuerzas motivadoras más intensas de la humanidad. Aunque muchos matemáticos restan importancia al trabajo de un colega tachándolo de "matemáticas recreativas", una parte considerable de las matemáticas ha surgido de problemas recreativos, que ponen a prueba la lógica y revelan profundas verdades matemáticas.” (Ivars Peterson, 1991)

2. INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA RECREATIVA

La matemática recreativa es actualmente una de las áreas más populares entre el público que se siente atraído por las matemáticas. Hoy en día existen numerosos libros y revistas dedicadas exclusivamente a reunir una colección de problemas matemáticos recreativos, como la colección de trabajos de Martin Gardner, y muchos estudios que tratan de investigar cómo influye en el alumnado el uso de este tipo de matemáticas con un fin pedagógico.

Cabe destacar que la matemática recreativa ha sido precursora del desarrollo de destacadas ramas de las matemáticas y de otras ciencias. Un buen ejemplo puede ser la influencia que tuvieron sobre la Teoría de Grafos el problema de los siete puentes de Königsberg o los trabajos matemáticos recreativos de Von Neumann que acabaron desarrollando la Teoría de Juegos y Conducta Económica.

Otro de los aspectos más significativos de la matemática recreativa moderna es el efecto motivador que producen estas matemáticas cuando se introducen en el aula. Existen estudios académicos que afirman que el uso de la matemática recreativa en cualquiera de los distintos niveles educativos, desde un punto de vista didáctico, puede mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje en matemáticas del alumnado, ya que el uso de la matemática recreativa influye positivamente en la actitud de éste[1]. Esto es debido a que el uso de recursos matemáticos lúdicos en el aula puede aumentar la motivación del alumnado y fomentar el desarrollo de un autoconcepto matemático positivo por su parte.

Pero, ¿qué es exactamente la matemática recreativa? Para muchos matemáticos y divulgadores científicos de esta especialidad, uno de los grandes problemas que ha existido y existe sobre la matemática recreativa es la dificultad que hay en dar una definición satisfactoria de éstas. Al no existir cierto consenso, tampoco hay una única clasificación que decida qué temas pertenecen a la matemática recreativa y cuáles no, por lo que podemos encontrar una diversidad de problemas y ejercicios de matemáticas lúdicas muy diferentes entre sí.

Se puede establecer una definición genérica de matemática recreativa por la cual tener un primer acercamiento al concepto a través de sentar la relación existente entre el significado de las palabras "matemática" y "recreativa".

[1] Algunos de estos estudios están recogidos y detallados en el epígrafe **5.1. Los efectos del uso de la matemática recreativa y la motivación del alumnado** de este trabajo.

La definición de "Recrear" según la Real Academia Española (RAE) es la siguiente: "1. Crear o producir de nuevo algo. 2. Divertir, alegrar o deleitar." Así, podemos definir recreativo como un pasatiempo, diversión, ejercicio o recurso que nos proporcione relajación y disfrute. Alguien utiliza algo recreativo para desconectar y relajarse después de un día de trabajo o para despejar y refrescar la mente antes de volver a la ocupación habitual.

Entonces se puede proporcionar una primera definición de la matemática recreativa asegurando que es un área de las matemáticas aplicadas que tiene como uno de sus principales fines la diversión. Las matemáticas recreativas pueden proporcionar esta diversión debido a que al ofrecer un pasatiempo satisfacen las necesidades de las personas que buscan recreación y a su vez, son capaces de ofrecer satisfacción a las personas que tienen intriga por resolver problemas matemáticos distintos a los usuales mediante soluciones no normativas o inesperadas.

Algunos autores definen la matemática recreativa desde dos perspectivas distintas: como las matemáticas que se llevan a cabo con fines de entretenimiento, en vez de con fines de investigación o de generar aplicaciones para la actividad profesional, o como un área propia de la educación formal del alumnado (Ball & Coxeter, 1987).

Aunque en ocasiones los problemas de matemática recreativa pueden suponer un reto para los aficionados de las matemáticas, muchos de sus problemas no requieren un conocimiento avanzado en sus distintas áreas. Esto es debido a que también forman parte de las matemáticas recreativas los acertijos y los juegos, que usualmente resultan atractivos para los estudiantes y adultos que no están acostumbrados a trabajar cotidianamente con algunos aspectos de las matemáticas.

Tras un primer acercamiento al concepto de matemática recreativa podemos hacernos unas preguntas para contextualizar su uso actual, especialmente en la educación formal: ¿Cómo y cuándo surge la matemática recreativa? ¿La matemática recreativa puede ser un buen recurso didáctico? ¿Su uso y fines han variado con el paso del tiempo? ¿Se puede implementar su uso en un curso de Educación Secundaria Obligatoria?

3. ORIGEN Y EVOLUCION DE LA MATEMÁTICA RECREATIVA

La historia de las recreaciones matemáticas es paralela a la propia historia de las matemáticas. Es más, puede ser la propia historia de la misma materia, ya que hasta fechas recientes en que aparecen los matemáticos profesionales (que obtengan placer o no están obligados a producir o enseñar matemáticas), las matemáticas han avanzado a golpe de placer: quienes se dedicaban a ellas lo hacían porque encontraban un disfrute especial en su estudio y en esfuerzo por hacerlas avanzar. En otro caso se hubieran dedicado a otra diversión o hobby (Corbalán, 2000).

Con esta afirmación de F. Corbalán[2] nos puede surgir una pregunta: ¿Qué fue primero, la matemática recreativa o la matemática formal? haciendo un pequeño paralelismo al conocido dilema de ¿qué fue primero, el huevo o la gallina?

Para intentar dar una respuesta a esta pregunta primero es necesario agrupar los distintos aspectos que definen la matemática recreativa para así poder determinar qué problemas son recreativos y cuáles no. De esta forma podremos analizar y quizás dirimir si se originó antes la matemática recreativa o la matemática seria o formal.

1. **El aspecto científico-popular:** la matemática recreativa como he dicho anteriormente es una de las áreas de las matemáticas aplicadas que tiene como uno de sus principales fines la diversión. Esto es así porque los problemas son entendibles para cualquier persona que quiera interesarse sobre ellas, es decir, los enunciados de los textos que describen los problemas suelen ser fáciles de comprender, aunque en ocasiones las soluciones no lo son tanto. Debido a esto las matemáticas recreativas se han convertido en una fantástica herramienta para mostrar a un público no especializado en matemáticas muchos problemas de una forma comprensible. Inclusive algunos de los problemas actuales que todavía no han sido resueltos se pueden enunciar a través de las matemáticas recreativas como el problema P versus NP[3], cuyo enunciado es fácilmente comprensible a través del problema de las *1000*

[2] **Fernando Corbalán** es un matemático español, fue profesor de matemáticas en Educación Secundaria y Bachillerato durante una gran parte de su vida. Actualmente se encuentra jubilado. Es responsable de varios proyectos dedicados al estudio y divulgación de las matemáticas y autor de numerosos libros de divulgación de las matemáticas desde una perspectiva lúdica y recreativa.

[3] **El problema P versus NP** es uno de los problemas no resueltos que forman parte de la lista de los siete problemas del milenio. Este problema está basado en la teoría de la complejidad computacional y en él se plantea si la existe una relación entre las clases de complejidad NP y P del tipo ¿P = NP completo?

damas, problema ilustrado mediante un juego muy reconocido, el ajedrez, y que propone encontrar un modo sistematizado de colocar en un tablero de 1000×1000 casillas un total de 1000 damas sin que se amenacen entre ellas.

2. **El aspecto de la diversión:** la matemática recreativa es un tipo de matemáticas que son utilizadas por el público general como un pasatiempo y que origina a muchas personas una fuente de inspiración y diversión. Varios autores sobre matemática recreativa apoyan que estas matemáticas deberían están presentes en la educación debido a su capacidad de ser el germen de grandes ideas matemáticas a través de pasatiempos lúdicos. Ian Stewart[4] escribió en uno de sus libros que las matemáticas divertidas son la parte de las matemáticas que no se enseñan en la escuela. Martin Gardner [5] también sostenía que las matemáticas que se enseñan en la escuela debían ser divertidas hasta cierto punto.

3. **El aspecto pedagógico:** la matemática recreativa puede utilizarse con fines didácticos ya que son un recurso con una gran utilidad pedagógica. En ocasiones, en lugar de explicar a un alumno muchas ecuaciones que no alcanzan a comprender correctamente, no hay mejor aprendizaje que el basado en la experiencia de resolver un problema. La matemática recreativa es una fuente inagotable de problemas de diversa índole que pueden servir para ejemplificar muchos contenidos académicos. Actualmente existen numerosos artículos y libros de texto que relacionan la matemática recreativa con estos contenidos.

4. **El aspecto histórico:** la matemática recreativa ha tenido un papel muy relevante en la historia de las matemáticas, ya que ha sido responsable y precursora del origen de importantes teorías y conceptos matemáticos que posiblemente no se hubieran desarrollado sin ellas. Algunos ejemplos son la influencia que tuvo sobre la teoría de grafos el problema de los siete puentes de Königsberg, los juegos de azar y el desarrollo de la teoría de probabilidades o los trabajos matemáticos recreativos de Von Neumann que acabaron desarrollando la teoría de juegos y conducta económica[6].

---

[4] **Ian Stewart** es profesor de matemáticas en la Universidad de Warwick. Conocido por su faceta como escritor de ciencia ficción y divulgador científico, es uno de los matemáticos que más ha trabajado y escrito sobre el aspecto lúdico de las matemáticas.

[5] **Martin Gardner** fue uno de los mayores divulgadores científicos de la matemática recreativa en la historia. Muy popular debido a la gran cantidad de pasatiempos que desarrolló y a su visibilidad como colaborador de la revista *Scientific American*.

[6] El origen de **la teoría de grafos y la teoría de probabilidad** se explicará en el epígrafe **3.2 Influencia de la matemática recreativa en el desarrollo de nuevas teorías** de este trabajo. Se detallarán los problemas recreativos que dieron lugar a estas teorías y de sus autores.

Estos cuatro aspectos están interrelacionados entre sí y con el paso del tiempo han influido unos sobre otros hasta originar lo que hoy conocemos como matemática recreativa. La matemática recreativa parece que se encuentra en equilibrio entre la seriedad propia de la ciencia y el carácter lúdico que se le presupone a un pasatiempo.

Conociendo los distintos aspectos que integran la matemática recreativa resulta muy difícil distinguir un origen claramente distinto entre ellas y las matemáticas serias o formales, ya que los aspectos que las definen y que justifican en buena parte su origen, también son parte de las matemáticas serias o a partir de estos se han originado o desarrollado varias ramas de las matemáticas formales.

3.1 Primeros problemas encontrados sobre matemática recreativa.

Desde el origen de las matemáticas casi todos los problemas matemáticos, salvo los problemas con relación en la vida real como los de medición y conteo, existían con el fin de estimular intelectualmente a las personas que intentaban resolverlos.

La matemática recreativa es muy útil para investigar sobre la historia de las matemáticas. Muchos de los problemas recreativos que tienen su origen en la antigüedad sirven como marcadores del desarrollo de la historia de las matemáticas y de su transmisión entre pueblos a través del tiempo. Problemas como el cuadrado mágico, el problema del asno y la mula y otros muchos, son excelentes ejemplos de este proceso de transmisión.

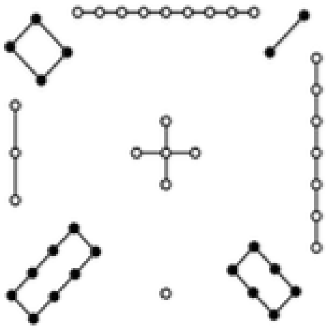
Varios de los problemas más antiguos que conocemos tuvieron su nacimiento en China, Babilonia e India. A través de estos problemas podemos observar la relación que guardan con algunas áreas de las matemáticas actuales como el álgebra y la aritmética moderna. También destacan por su antigüedad algunas producciones que se desarrollaron en Egipto o en la Antigua Grecia.

En este apartado se detallarán algunos de los problemas más antiguos encontrados que guardan relación con la matemática recreativa dispuestos en forma cronológica.

3.1.1. El cuadrado mágico de Lo-Shu.

Los cuadrados mágicos posiblemente sean el ejemplo más antiguo conocido de un problema de cálculo asociado a las matemáticas recreativas. Este problema es conocido como *Lo-Shu* por los primeros matemáticos chinos que empezaron a trabajar con los cuadrados mágicos aproximadamente en el año 2.200 a.c.

La mitología China afirma que el Emperador Yii vio una tortuga divina nadando en el río Amarillo con este cuadrado mágico adornando su caparazón. El cuadrado mágico de “Lo-Shu” es un cuadrado donde se disponen distintas representaciones de los números del 1 al 9 en distintas hileras con nudos negros para los números pares y nudos blancos para los números impares.



4	9	2
3	5	7
8	1	6

Ilustración 1.- Cuadrado mágico "Lo-Shu" (Bártlová, T.)

Un cuadrado mágico es una matriz cuadrada integrada por una serie de números enteros dispuestos de tal forma que la suma de los números de cada fila, columna y diagonal principal sea la misma. Normalmente los números que se emplean para rellenar las casillas de un cuadrado mágico son consecutivos y van desde 1 a n^2, donde n es el número de filas o columnas que forman el cuadrado. Los cuadrados mágicos están definidos por su orden. El orden de un cuadrado mágico es el número de filas o columnas que lo forman.

Lo-Shu es un cuadrado mágico de orden 3 formado por los números naturales que van desde el 1 hasta el 9. En la ilustración 1 podemos observar que la suma de los números de cada fila, columna y diagonal principal es 15. ¿Por qué es 15?

Si sumamos los números comprendidos entre el 1 y el 9 tenemos que: $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$. Como el cuadrado mágico de *Lo-Shu* está formado por tres filas y tres columnas y cada una de ellas debe de sumar lo mismo, si dividimos 45 entre el número de filas o columnas, obtendremos cuánto debe sumar cada fila, columna o diagonal principal para que tengamos un cuadrado mágico: $\frac{45}{3}=15$.

Este tipo de cuadrados también fueron trabajados por los indios, egipcios, árabes y griegos. Trabajaron cuadrados mágicos de órdenes superiores a 3, llegando a trabajar hasta los de orden 9.

Este problema podría extenderse más y llegarnos a preguntar, ¿cuánto suma cada fila, columna y diagonal principal de un cuadrado mágico de orden n formado por números naturales consecutivos y que comienza por 1? Para responder a esta pregunta voy a apoyarme en la demostración de la suma gaussiana[7]. Denominaré s a la suma de los números que forman el cuadrado mágico de orden n.

$$s = 1 + 2 + 3 + \cdots + n^2 - 2 + n^2 - 1 + n^2$$

Puedo reescribir dicha suma también de la siguiente forma, ya que no importa el orden de los términos.

$$s = n^2 + n^2 - 1 + n^2 - 2 + \cdots + 3 + 2 + 1$$

A continuación, voy a sumarlas término a término en la disposición en la que se presentan:

$$2s = (n^2 + 1) + (n^2 + 1) + (n^2 + 1) + \cdots + (n^2 + 1) + (n^2 + 1) + (n^2 + 1)$$

Como tenemos una suma de n^2 veces el término $(n^2 + 1)$, podemos expresarlo de la siguiente forma:

$$2s = n^2 \times (n^2 + 1)$$
$$s = \frac{n^2 \times (n^2 + 1)}{2}$$

Para calcular cuánto debe sumar cada fila, columna y cada diagonal principal de un cuadrado mágico de orden n, simplemente se debe dividir la suma de todos los números que forman el cuadrado entre el número de filas o columnas. Si denomino f a la suma de estas obtenemos:

$$f = \frac{n^2 \times (n^2 + 1)}{2 \times n} = \frac{n \times (n^2 + 1)}{2}$$

Por último, voy a comprobar si se cumple con distintos órdenes como, por ejemplo, 3, 4 y 5.

Orden 3: n=3 $\quad s = \frac{3^2 \times (3^2+1)}{2} = 45; \quad f = \frac{3 \times (3^2+1)}{2} = 15$

Orden 4: n=4 $\quad s = \frac{4^2 \times (4^2+1)}{2} = 136; \quad f = \frac{4 \times (4^2+1)}{2} = 34$

[7] Para poder responder a dicha pregunta bastaría con utilizar la fórmula de la suma de los n primeros sumandos de una progresión aritmética. Aun así, creo que resulta más interesante demostrar cómo se llega a dicha fórmula que utilizarlo sin explicación alguna.

Orden 5: n=5 $s = \frac{5^2 \times (5^2+1)}{2} = 325$ $f = \frac{5 \times (5^2+1)}{2} = 65$

3.1.2. Tabla Babilónica AO 8862.

Este es uno de los trabajos matemáticos más antiguos de Babilonia. Se establece que esta tabla de escritura cuneiforme data del año 1.800 a.c. En ella se encuentra un problema que se describe de la siguiente forma: *"Sé que el largo más el ancho de un rectángulo es 27, mientras que el área más la diferencia del largo y el ancho es 183. Calcula el largo y el ancho"*.

Este problema no puede considerarse práctico; si la pregunta fuera calcular el área o el perímetro podría tener alguna aplicación práctica. Sin embargo, el enunciado establece cuánto mide la suma del largo y el ancho, y pide calcular cuánto miden por separado el largo y el ancho.

Ilustración 2.- Tabla babilónica AO 8862.

Este problema enuncia un ejercicio donde encontramos lo que hoy denominamos sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Cómo plantea el cálculo del área deriva también en el uso de una ecuación cuadrática. Seguramente el fin de éste sea que la resolución del problema fuese más ilustrativa e interesante para el estudiante.

El problema tiene una solución bastante trivial, si denominamos x al lado más largo del rectángulo e y al lado más pequeño del rectángulo, podemos expresar el problema de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x + y = 27 \\ x \times y + x - y = 183 \end{cases}$$

Despejando en la primera ecuación obtenemos que $y = 27 - x$, y sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos:

$$x \times (27 - x) + x - (27 - x) = 183$$
$$27x - x^2 + 2x - 27 = 183$$
$$-x^2 + 29x - 210 = 0$$

Si utilizamos la fórmula para la resolución de una ecuación de 2º grado completa obtenemos:

$$x_1 = \frac{-29 + \sqrt{(29)^2 - 4 \times (-1) \times (-210)}}{2 \times (-1)} = 14$$

$$x_2 = \frac{-29 - \sqrt{(29)^2 - 4 \times (-1) \times (-210)}}{2 \times (-1)} = 15$$

Así que tenemos dos posibles soluciones que cumplen ambas ecuaciones de este problema matemático recreativo:

Solución 1: $x_1 = 14,\ \ y_1 = 13$

Solución 2: $x_2 = 15,\ \ y_2 = 12$

El problema nos retrotrae a la dificultad que hay en establecer los límites entre la matemática recreativa y la matemática formal. Podemos observar que varios de los aspectos que caracterizan a la matemática recreativa confluyen en este ejemplo, como el aspecto popular y el pedagógico.

3.1.3. El Papiro de Rhind.

El papiro de Rhind[8] es una de las piezas matemáticas egipcias más antiguas descubiertas hasta hoy. Data aproximadamente del año 1650 a.c., y en él podemos encontrar un problema, el número 79, que se enuncia de la siguiente forma:

"Siete casas; en cada casa hay siete gatos; cada gato mata siete ratones; cada ratón podría haberse comido siete mazorcas de trigo y cada mazorca de trigo produce siete kehat (una unidad de volumen) de trigo. ¿Cuál es la suma total de todos ellos?"

Ilustración 3.- Problema nº 79 del Papiro de Rhind.

La solución a este problema es una suma finita de potencias del número siete, y es la siguiente:

$$7^1 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 = 7 + 49 + 343 + 2.401 + 16807 = 19.607$$

Aunque existen dudas sobre si este problema pudiera ser un ejercicio para sumar una progresión geométrica, no tiene conexión alguna con el resto de los problemas del papiro.

Claramente este problema no persigue un objetivo lógico porque la suma de todos estos términos no parece tener un sentido práctico o aplicación en la vida real. Parece que el fin de este problema es simplemente proveer de una diversión o recreación al destinatario, a través de un problema con el cual debe ejercitar su imaginación. Por esto este problema es uno de los más antiguos pertenecientes a la matemática recreativa.

[8] El nombre es debido a su descubridor, Alexander Henry Rhind (1833-1863), un anticuario escocés que adquirió el papiro en 1858 en Luxor. También es conocido como el **Papiro de Ahmes**.

3.1.4. Los tres problemas clásicos de la matemática griega.

En el origen de la geometría griega, en el siglo V a.c., se plantearon tres problemas geométricos que con el paso del tiempo se han conocido como los *Tres problemas clásicos*. Estos problemas son los siguientes:

a) **La cuadratura del círculo:** consiste en construir un cuadrado que tenga el mismo área que la de un círculo conocido.
b) **La trisección del ángulo:** consiste en dividir un ángulo conocido en tres ángulos iguales.
c) **La duplicación del cubo:** consiste en determinar la arista de un cubo que duplique el volumen de un cubo conocido.

Los griegos trataron de resolver estos problemas utilizando solo regla y compás, lo que más tarde daría lugar a las construcciones euclídeas[9]. Naturalmente, fueron incapaces de hacerlo y hasta el siglo XIX no se demostró la imposibilidad de resolver estos tres problemas usando regla y compás.

Estos problemas influenciaron notablemente el desarrollo de la geometría y fueron precursores de muchos avances de la evolución de la geometría durante la historia de las matemáticas. Este es otro ejemplo de cómo a partir de uno o varios problemas sobre matemática recreativa, ya que estos problemas no podían tener aplicación práctica alguna en la Antigua Grecia, ha evolucionado un área de las matemáticas formales.

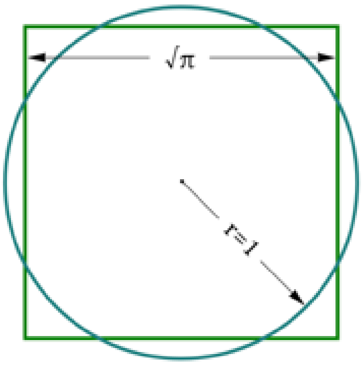


Ilustración 4.- La cuadratura del círculo.

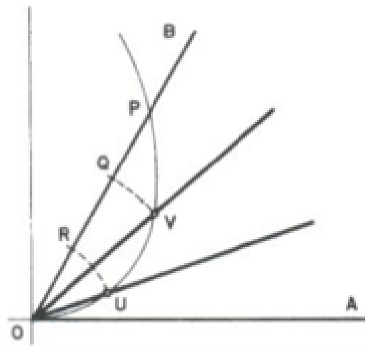


Ilustración 5.- La trisección del ángulo.

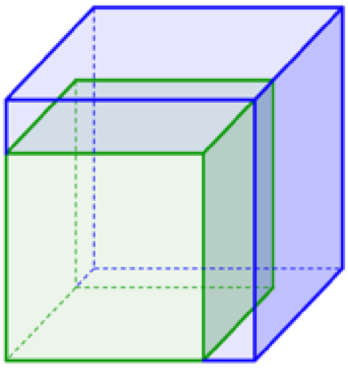


Ilustración 6.- La duplicación del cubo.

[9] Nombre debido al autor de la obra "Los Elementos". En esta obra matemática, **Euclides** integró todos los conocimientos de la matemática elemental de la época: aritmética, geometría y álgebra. Además, en uno de los volúmenes dedicados a geometría sentó las bases del conocimiento geométrico de la época a través de cinco postulados que hoy siguen vigentes.

3.1.5. El problema del ganado.

Los griegos tuvieron un gran interés por las matemáticas y en especial, por los números. Eran conscientes de la necesidad de desarrollar las matemáticas para poder utilizar grandes cantidades para poder describir la realidad. Esto originó que ellos enunciasen muchos problemas con este fin, algunos tenían aplicaciones prácticas y en otros su único fin era lúdico.

Arquímedes[10] en el siglo III a.c. propuso un problema matemático denominado problema del ganado, se trata de un problema de análisis diofántico, en el cuál hay que realizar un estudio de las soluciones enteras de las ecuaciones polinómicas que propone. Dicho problema fue enunciado de la siguiente forma:

"El dios sol tenía un rebaño formado por un cierto número de toros blancos, negros, moteados y amarillos, así como vacas de los mismos colores. De tal forma que:

- *El número de toros blancos es la mitad más la tercera parte de los negros más los amarillos.*
- *El número de toros negros es igual a la cuarta más la quinta parte de los moteados más los amarillos.*
- *El número de toros moteados es igual a la sexta más la séptima parte de los blancos más los amarillos.*
- *El número de vacas blancas es igual a un tercio más un cuarto de la suma de los toros negros más las vacas negras.*
- *El número de vacas negras es igual a la cuarta parte más la quinta aparte de la suma de los toros moteados más las vacas moteadas.*
- *El número de vacas moteadas es igual a la quinta más la sexta parte de la suma de los toros amarillos más las vacas amarillas.*
- *El número de vacas amarillas es igual a la sexta más la séptima parte de la suma de los toros blancos más las vacas blancas.*
- *La suma de los toros blancos y negros es un número cuadrado.*
- *La suma de los toros moteados y amarillos es un número triangular."*

En el problema se pide calcular cuántos animales de cada tipo tenía el rebaño del dios sol. La primera parte del problema parece sencilla, el número total de cabezas de ganado está determinada por nueve condiciones que pueden describirse en forma de ecuaciones lineales.

[10] **Arquímedes de Siracusa** fue un físico, ingeniero, inventor, astrónomo y matemático griego. Se le considera uno de los mejores matemáticos de la antigüedad. Utilizó la idea de infinitesimal de un modo similar al actual cálculo integral y calculó aproximaciones bastante precisas del número π.

Si llamamos a al número de toros blanco, b al número de toros negros, c al número de toros amarillos, d al de toros moteados, x al número de vacas blancas, y al número de vacas negras, z al número de vacas moteadas y t al número de vacas amarillas, podemos describir las siete primeras ecuaciones lineales del problema:

$$a = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \times b + c$$
$$b = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \times d + c$$
$$d = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) \times a + c$$
$$x = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \times b + y$$
$$y = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \times d + z$$
$$z = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) \times c + t$$
$$t = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) \times a + x$$

Además de estas condiciones se debe de cumplir que $a + b$ sea un número cuadrado, siendo a_n el término general, $a_n = n^2$ y que $c + d$ sea un número triangular, siendo a_n el término general, $a_n = \frac{n\times(n+1)}{2}$.

Este no era un problema sencillo para la época y hasta 1880 no se pudo deducir que la cantidad de cada tipo de animales de cada tipo debería ser del orden de $7{,}76 \times 10^{206544}$. El valor exacto de la solución de este problema no se pudo determinar hasta 1965 mediante la ayuda de los supercomputadores.

3.1.6. El problema del asno y la mula

Otro de los problemas sobre matemática recreativa antiguos más conocidos es el problema del asno y la mula. La primera versión de este problema se atribuye a Euclides, que lo enunció aproximadamente en el siglo III a.c., y dice lo siguiente:

"Una mula y un burro llevaban una carga de sacos. El burro lanzo un gruñido y la mula le dijo: ¿De qué te quejas? Si me dieras un saco, yo tendría el doble de sacos que tú; y si yo te diera dos de mis sacos, nuestras cargas serían iguales". ¿Cuántos sacos llevaba cada uno de los animales?

Este problema es sencillo de plantear, ya que es un sistema de dos ecuaciones lineales. Siendo x el número de sacos del burro e y el número de sacos de la mula:

$$\begin{cases} x + 2 = y - 2 \\ y + 1 = 2 \times (x - 1) \end{cases}$$

Despejando en la primera ecuación obtenemos que $y = x + 4$, y sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos:

$$(x + 4) + 1 = 2 \times (x - 1)$$

Y resolviendo esta ecuación obtenemos que $x = 7$ sacos, $y = 11$ sacos.

Podemos encontrar variaciones de este problema a lo largo del tiempo y de la geografía. Un ejemplo es el encontrado en el libro chino *Los nueve capítulos sobre arte matemático*, que data del siglo II, que enuncia un problema recreativo similar, pero utilizando monedas y personas:

"Hay dos personas, A y B. Cada una tiene una cantidad desconocida de monedas. Si sumamos las monedas de A y la mitad de las monedas de B hacen un total de 50 monedas. Si sumamos las monedas de B y un tercio de las monedas de A también hacen un total de 50 monedas. ¿Cuántas monedas tiene A y cuántas tiene B?"

La solución de este problema también resulta trivial, si x son las monedas de A e y son las monedas de B, obtenemos que:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 50 \\ y + \frac{1}{3}x = 50 \end{cases}$$

Despejando en la primera ecuación obtenemos que $x = 50 - \frac{1}{2}y$, y sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos:

$$y + \frac{1}{3}(50 - \frac{1}{2}y) = 50$$

Por último, al resolver esta ecuación obtenemos que $y = 40$ monedas, $x = 30$ monedas.

Con el transcurso del tiempo, también encontramos este problema en otras obras y tratados de otras regiones como India, Arabia o Europa. Un ejemplo es la aparición de otra versión de este problema en la obra de Euler[11] *Elementos del álgebra* (1770).

[11] **Leonhard Euler** fue un matemático y físico suizo. Fue uno de los principales matemáticos del siglo XVIII y uno de los mejores de todos los tiempos, muy conocido por sus contribuciones a la matemática aplicada y el desarrollo de la teoría de grafos.

3.2 Influencia de la matemática recreativa en el desarrollo de nuevas teorías.

Una pregunta lícita que nos podríamos hacer es cuánto ha influido la matemática recreativa en el desarrollo y evolución de las matemáticas. ¿Existen problemas de la matemática recreativa cuyo estudio ha derivado en el desarrollo de nuevas teorías? ¿Qué avances significativos nos ha dado? ¿Es útil la matemática recreativa?

- **Los problemas de la matemática recreativa a menudo han servido como base de desarrollo para la matemática formal.** Algunos de los campos que han surgido a través de la matemática recreativa son la teoría de grafos, cuyo precursor es un problema lúdico, o la teoría de la probabilidad, cuyo origen se manifiesta en intentar dar un tratamiento matemático a los juegos de azar del siglo XVII. La teoría de números, la topología, la geometría y el álgebra también han sido desarrolladas a través de problemas recreativos.

- **La matemática recreativa ha originado fantásticas ideas cuya utilidad se ha encontrado con el paso del tiempo.** Un ejemplo es la búsqueda de números primos grandes, de muchas cifras, o la factorización de números grandes en producto de dos primos, que tras años sin aplicaciones prácticas han reaparecido como un elemento esencial de la criptografía, que es la base de las comunicaciones en internet. Algo que comenzó como un pasatiempo en la Antigua Grecia, como un juego, actualmente tiene múltiples aplicaciones prácticas.

3.2.1. De las apuestas a la teoría de la probabilidad.

Lo que hoy conocemos como teoría de la probabilidad tuvo su origen en una investigación matemática lúdica cuyo fin fue tratar algunos de los problemas relacionados con los juegos de azar. En el año 1654 un escritor francés, Antoine Gombaud, también conocido como el caballero de Méré, se interesó por el tratamiento matemático de un juego de dados. Para poder desarrollar el tratamiento en profundidad, escribió por carta a Pascal[12] y Pierre de Fermat[13], que le ayudaron a sentar lo que

[12] **Blaise Pascal** fue un matemático, físico y filósofo francés. Entre sus muchas aportaciones a las matemáticas destacan la construcción de calculadoras mecánicas, el triángulo de Pascal y sus aportaciones a la teoría de la probabilidad a través de problemas lúdicos.

[13] **Pierre de Fermat** fue un jurista y matemático francés. Es uno de los matemáticos más prestigiosos del siglo XVII. Fue uno de los precursores de la teoría de la probabilidad. Realizó grandes progresos en la teoría de números, en la geometría analítica y en el cálculo de probabilidades. Muchos de estos avances se realizaron a través del uso de parte de las matemáticas lúdicas que ya utilizaron los griegos. Utilizó los números primos, los números amigos y los números perfectos para conjeturar gran parte de sus teoremas matemáticos. Destaca el carácter lúdico de varios de sus teoremas como *el último teorema de Fermat* o *el pequeño teorema de Fermat*.

fueron los principios básicos de la probabilidad, que más tarde en 1657, publicó Huygens[14].

El juego que analizaron consistía en lanzar un par de dados 24 veces, y apostar si saldría o no, al menos, un doble seis. Pascal y Pierre de Fermat determinaron fácilmente que la probabilidad del éxito en cada uno de los lanzamientos era 1 entre 36. Es fácil de comprobar que en este juego sólo existe 1 posibilidad de éxito (el seis doble) y al lanzar dos dados hay 36 combinaciones posibles.

La probabilidad de no obtener el doble seis en cada lanzamiento es $\frac{35}{36}$. Entonces, en 24 jugadas la probabilidad de que no haya salido un doble seis será de $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$. Por lo tanto, la probabilidad de que sí que salga un doble seis en 24 tiradas es el suceso complementario $p = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0{,}4914$.

Calculando la probabilidad de que este suceso sucediera al menos una vez en 24 lanzamientos de dados se sentaron las bases del trabajo que años más tarde en 1933, el matemático soviético Andréi Kolmogórov[15], culminó a través de la propuesta de un sistema de axiomas que definió la teoría de la probabilidad.

En este juego, que el número de lanzamientos fuese 24, estaba muy bien pensado. La probabilidad de que salga un doble seis en 24 lanzamientos es algo menor que la de que no salga. ¿Qué pasaría si en vez de 24 lanzamientos fuesen un total de 25? $p = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{25} = 0{,}5055$. Así, la probabilidad de obtener un doble seis es mayor que la probabilidad de no obtenerlo. Se puede observar que en el análisis del juego aparecen diferentes conceptos de la teoría de la probabilidad como sucesos posibles, sucesos favorables y la frecuencia relativa.

3.2.2. De los rompecabezas a la teoría de grafos.

En la ciudad natal de Kant, Königsberg, se originaron las bases de la teoría de grafos a través del siguiente problema matemático recreativo: el mapa de la ciudad de Königsberg está dividido en cuatro regiones distintas por el río Pregel. Estas cuatro regiones están unidas entre sí mediante siete

[14] **Christiaan Huygens** fue un astrónomo, físico y matemático neerlandés. Publicó la obra *Razonamientos sobre los juegos de azar* donde resolvió algunos de los problemas sobre juegos de azar propuestos por Pascal, Pierre de Fermat y Antoine Gombaud.

[15] **Andréi Kolmogórov** fue un matemático ruso que realizó importantes aportes en los contenidos de la teoría de la probabilidad y de topología. Mediante el lenguaje de la teoría de conjuntos estructuró el sistema axiomático de la teoría de la probabilidad. Además, fue uno de los fundadores de la teoría de la complejidad algorítmica.

puentes ¿Es posible dar un paseo a toda la ciudad comenzado desde cualquiera de estas regiones, pasando por todos los puentes una sola vez? Este problema se denominó *el problema de los siete puentes de Königsberg*.

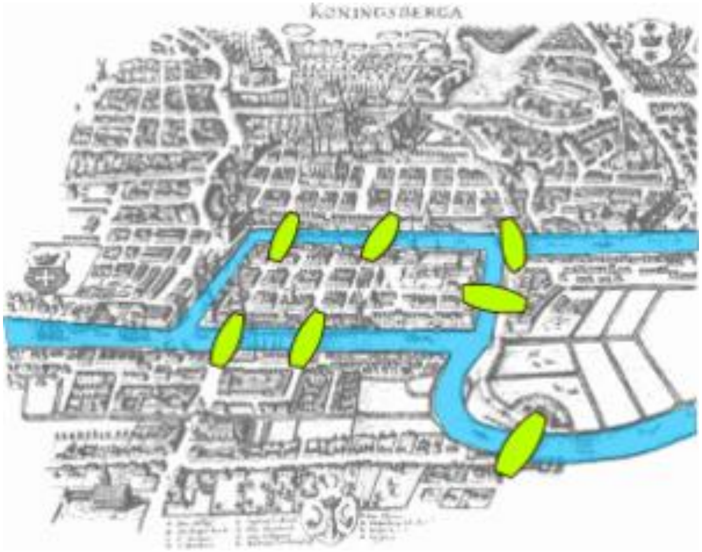


Ilustración 7.- Problema de los siete puentes de Königsberg.

En 1736, Leonhard Euler demostró de una forma generalizada que era imposible realizar el recorrido con la condición impuesta en su obra *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* y plasmó los principios de lo que hoy conocemos como la teoría de grafos.

Para dicha demostración Euler se centró en las cuatro regiones y las conexiones entre ellas. Identificó las regiones como puntos y los puentes mediante una línea que unía a dos puntos. Así redujo el problema a demostrar si existía o no un camino que comenzase en uno de los puntos, recorriese las líneas una sola vez y volviese al mismo punto de partida.

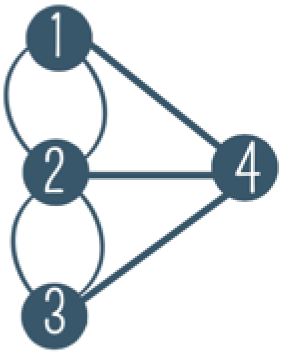


Ilustración 8.-Representación del grafo.

En la ilustración 8 está la representación en forma de grafo del problema de los siete puentes de Königsberg.

Para que este problema tuviera solución a cada punto se debería llegar por una línea y salir por otra distinta, salvo en el punto de salida, al cual no hay que llegar y el punto de llegada, del cual no hay que salir.

Por lo tanto, para que un recorrido de estas características pudiese cumplir con las condiciones impuestas en el enunciado del problema solo hay dos posibilidades:

- El punto de salida y de llegada son el mismo, entonces todos los puntos tienen un número par de líneas.
- El punto de salida y de llegada son distintos, entonces ambos tienen un número impar de líneas y el resto de los puntos tienen un número par.

Como todos los puntos tienen un número impar de líneas, indiferentemente del punto por el que se empiece, todos los puntos intermedios tendrán un número impar de líneas, así que no existe un camino tal como enuncia este problema.

En la actualidad, la teoría de grafos tiene varias aplicaciones en la vida cotidiana. A través de ésta se organizan las rutas de los carteros para que sean lo más eficientes posibles, la recogida de las basuras por parte de los camiones o los recorridos que han de seguir las máquinas quitanieves entre diversas localidades. En este tipo de problemas, los recorridos que se pueden realizar pasando por todas las líneas una sola vez se denominan camino euleriano, si el punto de salida y de llegada son diferentes, o ciclo euleriano, si el punto de salida y llegada es el mismo.

3.2.3. De la teoría de números a la criptografía

La teoría de números es otro de los campos de las matemáticas donde la matemática recreativa ha supuesto una fuente muy importante de ejercicios. Además, muchos de ellos han servido para desarrollar parte del álgebra moderna.

La factorización y los números primos fueron durante muchos años pasatiempos matemáticos que no tuvieron casi ningún tipo de incidencia en la vida cotidiana hasta 1979. En este año Rivest, Shamir y Adleman (RSA) crearon un sistema criptográfico de clave pública que se basaba en la factorización de números enteros.

Este método codifica los mensajes enviados representándolo mediante números. Estos números se calculan en base al producto de dos números primos grandes elegidos al azar. Actualmente el orden de los números primos que se utilizan es de 10^{300}. Para el descifrado de estos mensajes se utiliza el teorema de Euler-Fermat[16], que es una generalización del pequeño teorema de Fermat sobre la

[16] **El teorema de Euler-Fermat** establece que, si a y n son enteros primos relativos, entonces n divide al entero $a^{\varphi(n)}-1$. Actualmente es más común encontrarnos este teorema mediante una notación más moderna: $a^{\varphi(n)} \equiv 1 (mod\ n)$ donde φ(n) es la función φ de Euler.

divisibilidad de los números enteros. Hasta que no se conozcan formas rápidas de descomponer un número de gran orden en un producto de números primos se cree que el sistema RSA seguirá siendo un sistema criptográfico seguro.

3.2.4. De los anillos chinos al código binario.

Los anillos chinos, también conocidos como *Baguenaudier*, es uno de los rompecabezas más antiguos que se conocen. El juego se presupone que fue inventado en China en torno al siglo II d.c. Este rompecabezas se compone por varios anillos unidos a un poste y que están colgados de una horquilla. Cada poste de cada anillo se introduce en el anillo anterior. Cada anillo está conectado por el poste a una plataforma que se sitúa en la parte inferior del alambre. El objetivo de este rompecabezas es liberar la horquilla haciendo los mínimos movimientos posibles.

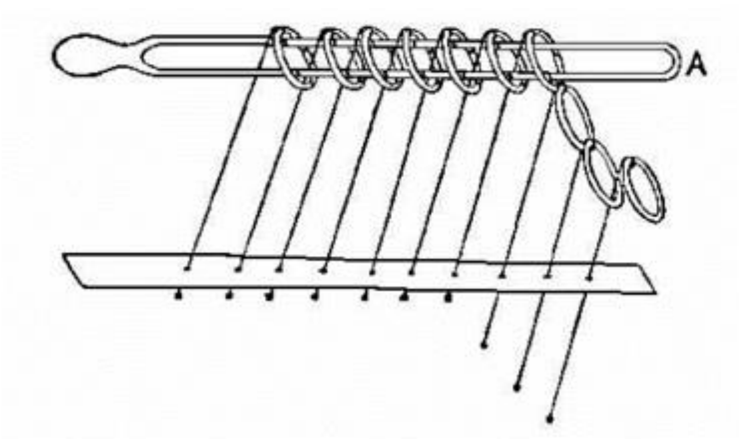


Ilustración 9.- Anillos chinos o Baguenaudier. (Bártlová, T.).

Los movimientos que se han de realizar para extraer la horquilla siguen un algoritmo iterativo que guarda relación con el sistema de numeración binario y el código Gray[17]. Los anillos solo pueden tener dos posiciones, o se encuentran abrazando a la horquilla (1), o no se encuentran rodeando a la horquilla (0). Si tenemos un total de 5 anillos y están todos rodeando la horquilla el código binario del puzle será 11111 y el código binario de su solución es 00000.

En general, para una versión de n aros la solución es la siguiente:

- Si n es un número impar: necesitaremos un total de $\frac{(2^{n+1}-1)}{3}$ movimientos.
- Si n es un número par: necesitaremos un total de $\frac{(2^{n+1}-2)}{3}$ movimientos.

[17] El **código Gray** o código binario reflejado es un sistema de numeración binario en el que dos números consecutivos difieren solamente en uno de sus dígitos. El uso de este código patentado en 1947 fue muy popular debido a que facilitaba la corrección de errores en los sistemas de comunicaciones.

4. PRINCIPALES AUTORES QUE HAN CONTRIBUIDO AL DESARROLLO DE LA MATEMÁTICA RECREATIVA

En este apartado realizaré una pequeña revisión de varios de los autores que más han contribuido al desarrollo y progreso de la matemática recreativa. Expondré sus contribuciones, algunos ejemplos de las propuestas que elaboraron y las cuestiones matemáticas que trataron más en profundidad con sus aportaciones.

4.1. Autores internacionales de la matemática recreativa.

4.1.1. Bachet de Méziriac.

Claude Gaspart Bachet de Méziriac (1581-1638) fue un matemático francés. Bachet de Méziriac dedicó parte de su vida al estudio de la teoría de números y es recordado por traducir del griego al latín *La Aritmética* de Diofanto en el año 1621, libro en el que años más tarde Fermat haría la célebre anotación sobre el último teorema de Fermat.

En 1612 publicó la obra *Problemas placenteros y deliciosos que se hacen con números* que es considerada como la primera obra impresa cuyo tema principal es la matemática recreativa. Este libro fue reeditado y ampliado por Bachet en 1624 y se ha continuado editando a lo largo del tiempo; su última edición data de 1959.

PROBLEMES
PLAISANS ET
delectables, qui se font par
les nombres:

Partie recueillis de diuers autheurs, & inventez de nouueau avec leur demonstration,

PAR CLAVDE GASPAR BACHET
S^r. DE MEZIRIAC.

Tres-utiles pour toutes sortes de personnes curieuses, qui se servent d'Arithmetique.

A LYON.
Chez Pierre Rigaud, en ruë Merciere, au coing de ruë Ferrandiere, à l'enseigne de la Fortune.

M. DC. XII.

avec Privilege de l'Autheur.

Ilustración 10.- Portada de "Problemas placenteros y deliciosos que se hacen con números".

La obra resultó ser una fuente de inspiración para muchos autores siglos más tarde, prueba de ello es que muchos de los problemas que se enuncian en el libro se repiten en muchas de las colecciones de problemas de matemática recreativa que se escribieron siglos más tarde.

Uno de los problemas más populares de este libro fue el que más tarde se denominó "El problema de las pesas de Bachet de Méziriac" cuyo enunciado es el siguiente: *"Un mercader tenía una pesa de 40 libras que al caer al piso se rompió y se dividió en cuatro partes desiguales. Llevó estos pesos a una balanza y comprobó que cada uno tenía un peso que era igual a un número entero de libras y al emplearlas para pesar observó que con estas cuatro pesas podía pesar cargas de objetos cuyo peso fuera un número entero cualquiera de libras entre 1 y 40. ¿Cuántos libras pesa cada una de las cuatro pesas?"*

Este problema lúdico ha dado origen a muchas versiones de problemas de pesas y balanzas que son muy frecuentes en la matemática recreativa. Aun así, este problema no era inédito en el siglo XVII, ya que existe una versión anterior que apareció en el *Libro del ábaco* de Fibonacci[18] publicado en el año 1202.

Bachet razona en su obra la solución de este problema, que está ligado con la teoría de números, de la siguiente forma: la idea que tuvo fue, con dos pesas, determinar cualquier cantidad de peso entre 1 y n, para n lo más grande posible. Es evidente que la solución son dos pesas de 1 y 3 libras, con las que se puede pesar entre 1 y 4 libras.

Después, realizo el mismo ejercicio con tres pesas. A partir de ir aumentando el número de pesas Bachet se dio cuenta de que se podía establecer un método general. Suponemos que tenemos un número de pesas determinado con las que conseguimos pesar desde 1 a n libras. Ahora se considera una nueva pesa de p libras, que excederá a n en n+1 libras, es decir, $p - n = n + 1$, para que esta pesa pueda pesar la cantidad de n+1 libras que nos falta. Si despejamos p obtenemos, $p = 2n + 1$. De esta forma es posible pesar desde 1 hasta $p + n = 3n + 1$ libras.

En consecuencia, si tenemos 3 pesas, con unos pesos de 1, 4 y $4 \times 2 + 1$ libras, es decir, de 1, 4 y 9 libras, podemos pesar desde 1 libra hasta $3 \times 4 + 1$ libras, que hacen un total de 13 libras. Si introducimos una cuarta pesa, como en el problema de Bachet, tenemos que las cuatro pesas deben ser de 1, 4, 13 y $2 \times 13 + 1$ libras para poder pesar entre 1 y n, siendo n el número máximo. Es decir,

[18] **Leonardo Pisano**, más conocido como Fibonacci, fue un matemático italiano nacido en la República de Pisa en 1170. Es considerado como uno de los mejores matemáticos de la Edad Media, difundió en Europa el sistema de numeración arábigo y fue el primer europeo en descubrir la sucesión que lleva su nombre.

con cuatro pesas de 1, 4, 13 y 27 libras podemos pesar un total de $3 \times 13 + 1$ libras, que hacen un total de 40 libras, que es la respuesta al problema planteado por Bachet.

Cabe destacar que las cantidades de cada pesa también vienen determinadas por las potencias del número 3: $1 = 3^0$, $3 = 3^1$, $9 = 3^2$, $27 = 3^3$. Si introdujéramos una quinta pesa, ésta pesaría $3^4 = 81$ libras y con las cinco podrían pesar desde 1 hasta $3 \times 40 + 1$ libras, que son un total de 121 libras.

4.1.2. Sam Loyd.

Samuel Loyd (1841-1911) fue uno de los más grandes creadores de acertijos matemáticos y rompecabezas de los Estados Unidos. Fue un gran ajedrecista de la época y compuso muchos problemas ajedrecísticos que guardan relación con la matemática recreativa.

Loyd publicó a los 14 años su primer problema de ajedrez en el *New York Saturday Courier* y en pocos años se le reconoció como uno de los mejores creadores de problemas de ajedrez de todo el país. Durante toda su vida colaboró en muchas revistas y diarios con los problemas de ajedrez que desarrollaba, destacando su colaboración de una página semanal con el *Scientific American Supplement*.

Una de sus obras más conocidos es *La ciclopedia de 5000 puzles, trucos y acertijos resueltos* que su hijo publicó en 1914 tras su muerte. Esta obra estaba llena de errores, respuestas que no aparecían y fallos de escritura, pero sigue siendo actualmente una de las obras que más acertijos recoge en un único volumen.

Durante muchos años se atribuyó a Loyd la creación del *juego del 15,* aunque más tarde se demostró que fue una apropiación algo alterada de un juego preexistente. Este juego causó furor en el público estadounidense a finales del siglo XIX. El juego está formado por un tablero de 4x4 casillas sobre el que se disponen 15 cuadrados numerados. Los 13 primeros aparecen en orden, pero los números 14 y 15 se encuentran invertidos. Aprovechando el hueco libre, el objetivo de este juego es desplazar las fichas cuadradas hasta ordenar los 15 números.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Ilustración 11.- Juego del 15.

Loyd ofreció mil dólares a quien pudiera resolverlo. Sin embargo, el problema es imposible de resolver, el acertijo en realidad consistía en demostrar por qué no tiene solución. En 1879 aparecieron varias demostraciones en el *American Journal of Mathematics* que explicaban a través de las permutaciones posibles que este problema no tenía solución tal y como lo planteó Loyd.

Loyd recopiló un sinfín de ejercicios y problemas relacionados con el ajedrez. Uno de los problemas de ajedrez más famosos de Loyd fue el conocido como "Excelsior" diseñado en 1861 y con el siguiente enunciado *"Juegan las blancas y dan mate en cinco movimientos con la pieza o peón menos probable"*

Ilustración 12.- Problema "Excelsior".

Loyd tenía un amigo al que se le daba muy bien resolver los problemas matemáticos relacionados con el ajedrez, así que diseñó un problema para que adivinase con qué pieza se da jaque mate en 5 movimientos. Inesperadamente, en cinco movimientos solo es posible dar mate con el peón de b2. Los movimientos que corroboran la solución son los siguientes: **1. b4-Tc5+.** 2. bxc5-a2. **3. c6-Ac7.** 4. cxb7-Axg3. **5. bxa8=D++.** Inesperadamente, la que a priori parece la pieza con menos probabilidad de dar jaque mate, llega a la casilla A8 coronando el peón en Dama.

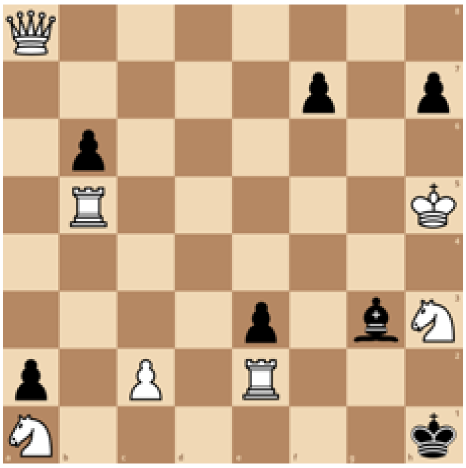


Ilustración 13.- Solución problema "Excelsior"

Otros de los rompecabezas más famosos que se le atribuyen a Loyd son el *Problema de los burros* y *De regreso del Klondike* ambos rompecabezas con solución probada. Gracias al interés que despertaron entre la sociedad estadounidense del siglo XIX estos rompecabezas, la matemática recreativa comenzó a ser un entretenimiento muy conocido en dicha época.

4.1.3. Édouard Lucas.

Édouard Lucas (1842-1891) fue un reconocido matemático francés, profesor de matemáticas en París. Probablemente sea principalmente conocido por el estudio de las sucesiones generalizadas de Fibonacci. Lucas llegó a formular una ecuación para encontrar el enésimo término de una serie de Fibonacci sin tener que calcular cada uno de los términos. Lucas también realizó más avances en la teoría de números y en especial, sobre el problema de la primalidad. Desarrolló un sistema para comprobar la primalidad de los números de la forma $2^p - 1$, donde p es un número primo.

Lucas fue también un apasionado por las matemáticas recreativas. Realizó una serie de problemas sobre matemática recreativa que reunió en una obra bajo el nombre *Récréations mathématiques* que fue publicada entre 1882 y 1894. Esta obra hoy es un clásico para los aficionados a las matemáticas lúdicas. También resolvió el problema de los anillos chinos que se comentó anteriormente.

Uno de sus rompecabezas matemáticos más conocidos son las *Torres de Hanói*, problema inventado en el año 1883. Es un problema clásico que aparece en muchos libros sobre ciencias de la computación, con el cual se pretende ilustrar la recursividad. Es un juego de mesa individual que consta de una serie de discos perforados de radio creciente que se apilan en uno de los 3 postes que hay en el tablero. El objetivo del juego es trasladar el total de discos de un poste a otro siguiendo una serie de reglas, como que un disco más grande no puede estar encima de otro más pequeño.

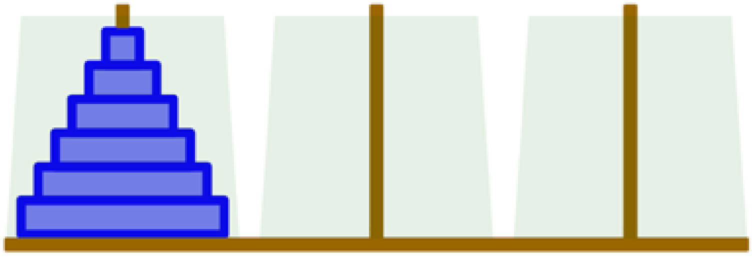


Ilustración 14.- Torres de Hanói (Luque, B.).

El número mínimo de movimientos necesarios para resolver este rompecabezas con un total de n discos se puede calcular de la siguiente forma:

Denominamos a los 3 discos como 1 al más pequeño, 2 al mediano y 3 al más grande. Llamamos a los 3 postes del rompecabezas de izquierda a derecha A, B y C. Para resolver este rompecabezas en su formato más simple debemos realizar los siguientes movimientos:

$$1A \rightarrow 1C.\,2A \rightarrow 2B.\,1C \rightarrow 1B$$
$$3A \rightarrow 3C$$
$$1B \rightarrow 1A.\,2B \rightarrow 2C.\,1A \rightarrow 1C$$

El número mínimo de movimientos en este caso son 7. Podemos observar con los movimientos descritos que, para mover los 3 discos desde A hasta C, primero hay que mover los dos discos más pequeños desde A hasta B (movimientos del 1 al 3), después el disco más grande desde A hasta C (movimiento 4), y, por último, mover los dos discos más pequeños desde B hasta C (movimientos del 5 al 7).

Con este ejemplo se puede observar que, para mover n discos de A hasta C, primero hay que mover los n-1 discos más pequeños de A hasta B, después mover el disco más grande de A hasta C, y, por último, mover de nuevo los n-1 discos más pequeños de B hasta C. Esto es un procedimiento recursivo que se puede generalizar mediante un algoritmo.

Denominamos a_n como el número de movimientos mínimos necesarios para llevar n discos de un poste a otro. El número de movimientos es independiente del poste de salida y del de llegada, solo depende del número de discos. El proceso que se ha descrito anteriormente establece que:

$$a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1} = 2 \times a_{n-1} + 1$$

En el primer bloque de movimientos se trata de realizar el proceso con n-1 discos, que cuesta a_{n-1}movimientos. Después, un movimiento que es el de pasar el disco más grande de un poste al otro y de nuevo a_{n-1} movimientos para pasar los discos al poste donde esté situado el disco más grande.

Con esta ecuación recursiva se puede calcular cuál es el número mínimo de movimientos necesarios para resolver este rompecabezas con n discos. Al depender el paso n solamente del paso n-1, podemos encontrar un patrón por repetición que cumpla dicha ecuación.

$$a_1 = 2 \times a_0 + 1 = 2 \times 0 + 1 = 1$$
$$a_2 = 2 \times a_1 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$$
$$a_3 = 2 \times a_2 + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7$$
$$a_4 = 2 \times a_3 + 1 = 2 \times 7 + 1 = 15$$
$$a_5 = 2 \times a_4 + 1 = 2 \times 15 + 1 = 31$$

La sucesión que se obtiene 1, 3, 7, 15, 31, ..., es exactamente la sucesión en que cada elemento a_n es $2^n - 1$. Voy a volver a calcular el número de movimientos necesarios para este problema desde 1 disco hasta 5 discos para comprobarlo.

$$a_1 = 2^1 - 1 = 1$$
$$a_2 = 2^2 - 1 = 3$$
$$a_3 = 2^3 - 1 = 7$$
$$a_4 = 2^4 - 1 = 15$$
$$a_5 = 2^5 - 1 = 31$$

Por último, voy a introducir esta solución en la recursión, para comprobar que se cumple:

$$a_n = 2 \times a_{n-1} + 1$$
$$2^n - 1 = 2 \times (2^{n-1} - 1) + 1$$
$$2 \times (2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 2 + 1$$
$$2^n - 2 + 1 = 2^n - 1$$

La parte derecha de la igualdad es la misma que la parte izquierda, así que la solución es correcta. El número de movimientos mínimos necesarios para resolver este rompecabezas con n discos crece exponencialmente, y es $2^n - 1$.

Otro de sus juegos lúdicos más famosos es el *Pipopipette* publicado en 1889, más conocido actualmente como *El juego de los cuadraditos*. Este juego es para dos o más jugadores y se utiliza una hoja de papel a modo de tablero. En este tablero se dispone una cuadrícula formada por puntos y el objetivo de este juego es conseguir los máximos cuadrados posibles.

El proceso que se ha de seguir para jugar es el siguiente: cada jugador une alternativamente dos puntos consecutivos de forma horizontal o vertical. Cuando un jugador cierra con su línea un cuadrado escribe su inicial dentro para distinguirlo. El jugador que cierre un cuadrado vuelve a jugar, dibujando otra línea más. Gana el jugador que más cuadrados haya conseguido.

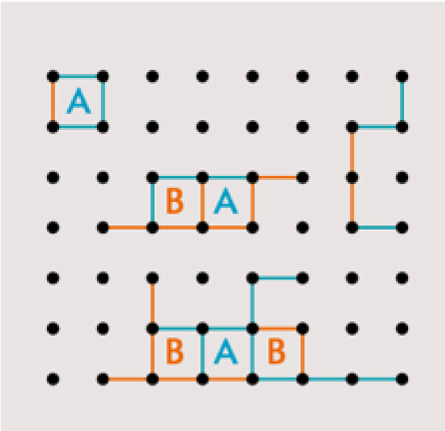


Ilustración 15.- Pipopipette (Luque, B.).

Se trata de un juego con estructura matemática. La versión para dos jugadores del *Pipopipette* es clasificada en la actual teoría de juegos como un juego simétrico, ya que las recompensas por jugar una estrategia dependen de ésta y no de quien las juegue. Es secuencial, ya que los jugadores deciden su acción alternativamente antes de que el otro escoja la suya. Y también es un juego de suma cero, ya que la ganancia o pérdida de un jugador se equilibra con exactitud con la ganancia o pérdida del adversario.

4.1.4. Ernest Dudeney.

Henry Ernest Dudeney (1857-1930) fue un matemático inglés considerado el mayor creador británico de rompecabezas por la cantidad y calidad de los puzles que desarrolló. La mayor parte de sus obras están formadas por rompecabezas y problemas matemáticos relacionados con el ajedrez.

El trabajo de la matemática recreativa desarrollado por Ernest Dudeney fue sobre todo publicado en diversas revistas y periódicos. En algunas de estas revistas colaboró con Sam Loyd. Durante varios años intercambiaron muchos rompecabezas matemáticos hasta que Dudeney se dio cuenta de que Loyd reutilizaba parte de su trabajo sin darle ningún tipo de reconocimiento.

Casi 100 años después de su muerte todavía es sencillo encontrarse con obras suyas que siguen reeditándose. Escribió varias obras que recolectaban rompecabezas y problemas matemáticos lúdicos de esta índole como *Diversiones matemáticas* (1917), *Los mejores puzles del mundo* (1925), *Puzles modernos* (1926) y seguramente su obra más célebre *Los acertijos de Canterbury* publicado en 1907.

En *Los acertijos de Canterbury* un grupo de peregrinos se dirigen a un santuario en Canterbury. Para entretenerse por el camino se proponen unos a otros distintos rompecabezas. Uno de los problemas más célebres de esta obra trata sobre la disección geométrica y Dudeney lo denominó *El acertijo del mercero*. El mercero, cuando le llega su turno propone cortar una pieza de tela con forma de triángulo equilátero en cuatro piezas de tal forma que puedan juntarse de nuevo formando un cuadrado perfecto.

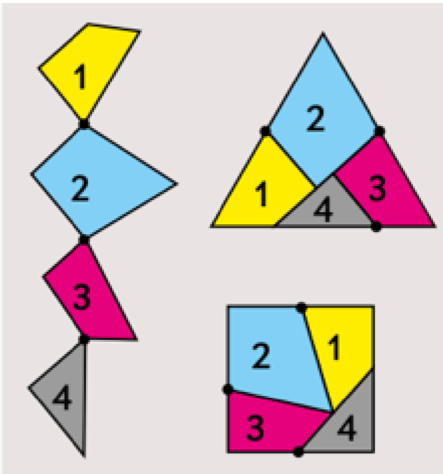


Ilustración 16.- El acertijo del mercero (Luque, B.).

Dudeney construyó en madera cuatro piezas unidas por unas bisagras (representadas por puntos en la imagen) de tal forma que resultase sencillo y muy visual pasar del triángulo equilátero al cuadrado.

Otros problemas matemáticos que más trabajó Dudeney fueron los relacionados con el ajedrez. El problema *Jaque mate* de su obra *Diversiones matemáticas* dice lo siguiente: *"Al entrar a un salón de un club en Londres, vi en un tablero de ajedrez una posición que habían dejado dos jugadores que ya no estaban. Es evidente que el blanco ha dado jaque mate al negro, pero ¿cómo lo ha logrado?"*

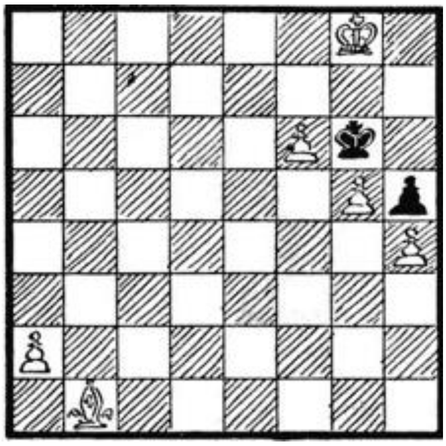


Ilustración 17.- Problema "Jaque mate"

Lo primero que puede pensar cualquier persona que tiene un conocimiento básico en ajedrez al ver este problema es que la última pieza movida antes de dar jaque mate es la pieza que amenaza al rey, el alfil. En este caso no es así, el alfil lleva varias jugadas en esa casilla, pero entre el rey y el alfil se situaba el peón que ahora se encuentra en la posición f6 y en f2 había un peón negro. La posición final se alcanza con los siguientes movimientos: 1. e4+ f4. 2. exf4++.

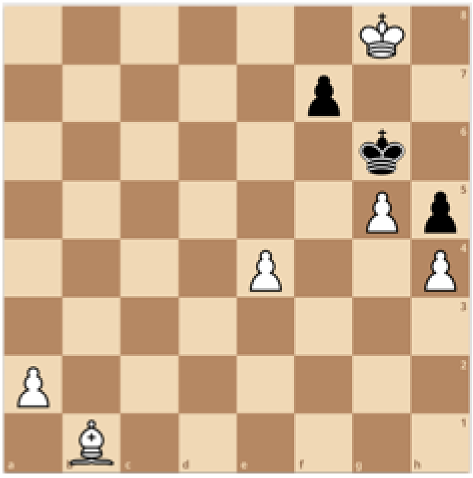


Ilustración 18.- Posición de partida problema "Jaque mate".

4.1.5. Martin Gardner.

Martin Gardner (1914-2010) estudió filosofía y fue periodista de profesión, pero, a pesar de no ser matemático, posiblemente sea la persona que más ha contribuido al desarrollo de las matemáticas recreativas debido a sus numerosas obras que tratan sobre el aspecto lúdico de las matemáticas.

En julio de 1956 publicó *Mathematics, Magic and Mystery*, el primer libro dedicado en exclusiva a presentar juegos de magia con un fundamento matemático. Además, ese mismo año, Gardner comenzó a escribir una columna mensual de juegos matemáticos en la revista de divulgación científica *Scientific American*. Esta columna tuvo tanto éxito que originó que la colaboración empezase en diciembre de 1965 y no terminase hasta mayo de 1986.

Gardner puede que sea una de las personas que más vocaciones matemáticas ha causado en los últimos tiempos. En sus columnas ponía en valor los trabajos matemáticos de numerosas personalidades como Donald Coxeter, Solomon Golomb o John Horton Conway. Quizás en esto radicaba parte de su éxito, en la colaboración con matemáticos de primera línea a los que consultaba y avanzaba parte de las colaboraciones que desarrollaba.

En 1977 publicó *Comunicaciones secretas* en el que avanzó el uso de una parte de las matemáticas lúdicas para las comunicaciones, en particular, para la criptografía. Gardner además de estar muy interesado en la matemática recreativa también lo estaba en la magia que fue una fuente inspiradora en muchas de sus colaboraciones. Debido a este interés y de su afán por el escepticismo publicó *Falacias pseudocientíficas* donde presenta juegos de magia que pueden camuflarse como pruebas que se asemejan a muchas falacias pseudocientíficas.

Algunas de sus obras con más éxito fueron *Acertijos divertidos y sorprendentes*, *¡Ajá! Paradojas que hacen pensar*, *¡Ajá! Inspiración*, *Máquinas y diagramas lógicos*, *El ordenador como científi*co, *Izquierda y derecha en el cosmos* o *La explosión de la relatividad*. A continuación, expongo algunos acertijos matemáticos propuestos por Martin Gardner en sus obras.

El juego del pimpón: *"Suponga que tres amigos (A, B y C) se encuentran a jugar al pimpón un sábado por la tarde. No se preocupe: no hace falta saber nada del juego propiamente dicho, solo que en este caso se juega en forma individual: un rival de cada lado de la mesa. Como tienen toda la tarde disponible, deciden jugar tantos partidos como puedan. La única regla que siguen es esta: eligen por sorteo quiénes jugarán el primer partido y, en lo que sigue, el ganador continúa jugando y el perdedor sale para que participe el tercero que estaba como observador. Dicho esto, al finalizar la tarde deciden contar cuántos partidos jugó cada uno y la cuenta es la siguiente:*

- *A jugó 15 partidos.*
- *B jugó 10 partidos.*
- *C jugó 17 partidos*

<u>*Pregunta*</u>: *¿Quién perdió el segundo partido?"*

Si sumamos los partidos que jugaron A, B y C, obtenemos un total de 42 pero, como el pimpón es un juego de dos jugadores, si sumamos los partidos de los 3 jugadores se cuentan dos veces cada partido. De esta manera, sabemos que el número total de partidos jugados fue de 21.

Si tenemos en cuenta que en dos partidos consecutivos los 3 jugadores intervienen al menos en uno de ellos, podemos calcular el número mínimo de partidos que pudo haber jugado cada uno de los tres. Aquí tenemos dos opciones:

- Los partidos mínimos que puede jugar uno de los intervinientes en el primer partido. En este caso, si uno de ellos perdiese todos los partidos que hubiese disputado, intervendría en los siguientes partidos: 1-3-5-7-9-11-13-15-17-19-21, que suman un total de 11 partidos.
- Los partidos mínimos que puede jugar la persona que observa el primer partido. En este caso, si el jugador hubiera perdido todos los partidos disputados, intervendría en los siguientes partidos: 2-4-6-8-10-12-14-16-18-20, que suman un total de 10 partidos.

Con este pequeño análisis se puede determinar que el participante B, al jugar 10 partidos, perdió el segundo partido y, además, perdió todos los que disputó.

El ancho del río: "Un río separa dos ciudades. Dos barcos lo recorren en direcciones opuestas a velocidad constante, no necesariamente la misma, pero mantienen la misma velocidad a lo largo del trayecto. Más aún: cuando un barco llega del otro lado, da vuelta inmediatamente sin detenerse y vuelve hacia el lugar de origen. Repiten este proceso una y otra vez. Los dos barcos salen al mismo tiempo. Se encuentran por primera vez en el camino a 7 kilómetros de una de las costas y continúan su trayecto. Cuando cada uno llega al otro lado, da la vuelta inmediatamente (en forma ideal, claro está). Los dos barcos vuelven a encontrarse en una segunda ocasión, esta vez a 4 kilómetros de la costa opuesta.

Pregunta: con estos datos ¿Cuál es el ancho del río?"

Denominaré a los barcos de este problema A y B. Cuando A recorre 7 kilómetros se encuentra con B. Al encontrarse entre A y B han recorrido la longitud total del río. Cuando los barcos A y B llegan cada uno al otro extremo del río, habrán recorrido entre los dos la longitud total del río dos veces. Por último, se vuelven a encontrar a 4 kilómetros de la costa contraria, en esta ocasión entre ambos han recorrido la longitud total del río tres veces.

Ambos barcos van a velocidad constante y sabemos que, cada vez que entre los dos barcos recorren la longitud total del río, el barco A avanza 7 kilómetros. Por lo tanto, en este último encuentro el barco A habrá recorrido 21 kilómetros. Como el barco A se encuentra a 4 kilómetros de la costa contraria cuando se encuentran ambos barcos, el río mide 4 kilómetros menos que la distancia recorrida por A. Entonces, la longitud total del río es de 17 kilómetros.

4.1.6. Ian Stewart.

Ian Stewart (1945) es profesor emérito de matemáticas en la Universidad de Warwick (Inglaterra). Es un gran escritor de ciencia ficción y uno de los mejores divulgadores matemáticos en la actualidad. Entre 1991 y 2001 escribió una serie de columnas sobre matemática recreativa para la revista *Scientific American*, desarrollando en un total de 96 columnas muchos pasatiempos matemáticos que engancharon a sus lectores.

Muchos de los problemas que propuso tienen que ver con la teoría de números y la lógica. Uno de los acertijos más populares que publicó en la revista fue *Un acertijo para piratas*, un problema relacionado con la lógica y la teoría de juegos, que se enuncia de la siguiente forma:

"Diez piratas han robado un tesoro de 100 monedas de oro y quieren repartir el botín. Son personas democráticas y estos repartos los hacen de la siguiente manera: el pirata más feroz hace una propuesta sobre la división y todos los piratas votan sobre ella. Si el 50% de los piratas o más están a favor, la propuesta se aprueba y se realiza el reparto. Si no se aprueba la propuesta, el pirata es arrojado por la borda y se repite el mismo procedimiento con el siguiente pirata más feroz.

- *Todos los piratas se divierten arrojando a otros por la borda, pero les gusta más el dinero.*
- *A los piratas no les gusta ser arrojados por la borda.*
- *Todos los piratas son excepcionales en la deducción lógica y saben que los demás también lo son.*
- *No hay dos piratas igual de feroces.*
- *Las monedas de oro son indivisibles y no se permiten pactos para compartir las monedas, porque un pirata no tiene palabra.*

¿Qué propuesta debería hacer el pirata más feroz para no ser arrojado por la borda y obtener la mayor cantidad de oro?"

Si intentáramos resolver este problema por intuición, seguramente pensemos que el pirata más feroz debería sobornar al resto de piratas para que tenga más posibilidades de que acepten su propuesta de reparto. Sin embargo, la mejor solución es la contraria. Los piratas conocen el orden en que van a realizar las propuestas de reparto y también saben que todos ellos son excepcionales en la deducción lógica, así que pueden predecir qué van a votar cada uno de ellos en cada situación y decidir su voto en consecuencia.

Como el pirata menos feroz de los 10 debe considerar más propuestas, vamos a analizar el problema partiendo del último escenario posible, que sólo quedaran los piratas 10º y 9º, que son los menos feroces. El pirata 9º propondría quedarse con las 100 monedas de oro, el voto negativo del 10º pirata no bastaría para impedirlo, así que el 10º pirata quiere evitar llegar a esta propuesta de cualquier forma. Ahora se puede pasar a la propuesta anterior, con los piratas 8º, 9º y 10º. Si el pirata 8º se queda con 99 monedas y ofrece una moneda al pirata 10º, éste aceptará su propuesta.

Si analizamos la propuesta anterior formada por los 4 piratas menos feroces, bastará con que el pirata 7º se quede con 99 monedas y ofrezca una moneda al pirata 9º para que su propuesta se acepte, ya que, si no se acepta, caerá por la borda y el pirata 9º no recibirá ninguna moneda de oro. Si analizamos la propuesta que se realizará cuando queden los 5 piratas menos feroces es algo diferente a las anteriores. El pirata 6º, para que aprueben su propuesta, necesitará otros 2 votos favorables, además del suyo, así que tendrá que dar una moneda de oro al pirata 8º y 10º para que voten a favor, ya que si lo arrojan por la borda y pasan a la propuesta del pirata 7º, no tendrán ninguna moneda.
Siguiendo este patrón el pirata más feroz de los 10 realizará la siguiente propuesta para no ser arrojado por la borda: el pirata 1º se quedará con 96 monedas de oro, los piratas 3º, 5º, 7º y 9º se quedarán con 1 moneda de oro cada uno y los piratas 2º, 4º, 6º, 8º y 10º, no obtendrán ninguna moneda de oro.

Se puede generalizar la solución de este acertijo, a partir de los casos anteriores, para un número de piratas $n = 2G$, siendo G la cantidad de monedas de oro disponible.

- <u>Si el número de piratas es par</u>: el pirata que propone el reparto se quedará con un total de $G - \frac{n-2}{2}$ monedas de oro, los piratas que ocupen una posición impar obtendrán 1 moneda de oro y los piratas que ocupen una posición par, obtendrán 0 monedas de oro.
- <u>Si el número de piratas es impar</u>: el pirata que propone el reparto se quedará con un total de $G - \frac{n-1}{2}$ monedas de oro, los piratas que ocupen una posición impar obtendrán 1 moneda de oro y los piratas que ocupen una posición par, obtendrán 0 monedas de oro.

Otras variantes de este problema plantean qué pasaría si el número de piratas $n > 2G$, en las cuales ya resulta irremediable que, dependiendo del número de piratas, alguno de ellos sea arrojado por la borda. Este acertijo para piratas, además de ser un estupendo juego para entrenar estrategias para la resolución de problemas, utiliza conceptos interesantes de la teoría de juegos como el concepto de conocimiento común, ya que cada pirata conoce lo que los otros saben y lo usan para predecir su razonamiento. La propuesta final de reparto es un ejemplo de un equilibrio de Nash, si un jugador individualmente modifica su estrategia no gana nada mientras los demás mantengan la suya.

Más tarde estos pasatiempos se recogieron en una colección de libros formados por *El laberinto mágico, El mundo a través de los ojos matemáticos* (2001), *Locos por las matemáticas* (2004) y *Cómo cortar un pastel y otros rompecabezas matemáticos* (2006).

En *Locos por las matemáticas* se recopilan 20 artículos de matemática recreativa que presenta de una forma lúdica. Cada artículo se presenta con una historia relacionada con un concepto matemático distinto con el propósito de que el lector disfrute del libro.

Encontrar un enfoque educativo en las obras de Stewart es algo común, incluso usando la matemática recreativa para explicar el desarrollo de otras ciencias. Otro ejemplo de esto es su obra *Las matemáticas de la vida* en la cual describe cómo los biólogos y matemáticos entienden la vida. En el libro describe muchas de las relaciones que existen entre la biología, la naturaleza y las matemáticas. En ella explica el sentido matemático que tiene la disposición de las flores y el número áureo o la relación entre las leyes de Mendel y las matemáticas.

4.2. La matemática recreativa en España.

En nuestro país, como en el resto de las ramas de las matemáticas, no hay una excesiva presencia de aportaciones históricas a la matemática recreativa ni tampoco una especial profundidad en las mismas. Sin embargo, en la actualidad la producción y la traducción de esta rama de las matemáticas es muy voluminosa.

El uso de los pasatiempos y rompecabezas que guardan relación con la matemática lúdica en nuestra vida social ha proliferado con el paso del tiempo. Cabe destacar el cubo de Rubik, que llego a ser un fenómeno de masas en nuestro país. Además, han aparecido muchas secciones de pasatiempos y curiosidades matemáticas en periódicos y revistas de información que guardan una relación estricta entre sus contenidos y las matemáticas. Entre los principales autores que han desarrollado la matemática recreativa en España cabe destacar a Mariano Mataix, Miguel de Guzmán y José María Albaigès.

4.2.1. Mariano Mataix.

Mariano Mataix Lorda (1922-2006) fue un científico español experto en ingeniería electrónica y nuclear. En 1978 comenzó a escribir y publicar libros sobre matemática recreativa, un tema que, a priori, distaba bastante de la ingeniería electrónica y nuclear. Escribió un total de 14 libros cuyo tema principal era el tratamiento lúdico de las matemáticas, empezando por *Cajón desastre matemático*, donde recopiló una serie de problemas, pasatiempos o anécdotas históricas de todo tipo.

Todos estos libros constan de una breve introducción donde describe brevemente lo que el lector se encontrará en cada una de sus obras. Destaca en su primera obra lo fácil que es leer y entender los enunciados o historias, ya que son cortas y concisas. En sus obras podemos comprobar la existencia de referencias constantes a clásicos como Loyd, Carrol[19], Dudeney o Gardner.

La obra literaria de Mataix sobre matemática recreativa se completa con *Divertimientos lógicos y matemáticos* (1979), *Fácil, menos fácil y difícil* (1980), *El discreto encanto de las matemáticas* (1981), *Nuevos divertimientos matemáticos* (1982), *Droga matemática* (1983), *Ocio matemático* (1984), *Historias de matemáticos y algunos problemas* (1986), *Problemas para no dormir* (1987), *En busca de la solución* (1989), *La manzana de la discordia* (1990), *Ludopatía matemática* (1991), *Esbozos biográficos y pasatiempos matemáticos* (1993) y *Dúo matemático* (1995).

Uno de los problemas clásicos de la matemática recreativa que podemos encontrar en su libro *divertimientos lógicos y matemáticos* es el de la vuelta del camarero que no encaja:

"tres amigos se sientan en la mesa de un bar a tomar unas copas. A la hora de pagar, el camarero les dice que la consumición vale 30 duras, y cada uno da 10. Al llegar a la caja, informan al camarero de que ha habido un error en la cuenta y no son 30 duros sino 25, debiendo, por tanto, devolver 5 duros. El camarero pensando que repartir cinco entre tres va a ser difícil y, por otra parte, los clientes se van a quedar igualmente satisfechos les devuelve 3, guardándose los 2 restantes. Por tanto, cada cliente pagó 9 duros, que multiplicándolo por 3 hacen 27, que con los 2 que se ha quedado el camarero dan un total de 29. ¿Dónde está el duro que falta?"

La solución a este problema numérico es sencilla, está sumando las cantidades a pagar dos veces, porque esos 2 duros que se guarda forman parte de los 27 que han pagado. En realidad, habría que sumar los 27 duros que pagan más el duro que se guarda cada uno para obtener el total de 30 duros.

Otro de sus problemas de lógica geométrica más conocidos de Mataix, supera el foso, se encuentra dentro de su obra *el discreto encanto de las matemáticas*. Se debe superar este foso de 10 metros de anchura con dos tablones de longitud 9.8 metros sin disponer clavos u otra sujeción.

[19] **Lewis Carrol** (1832-1898) muy conocido por ser el autor de "Las aventuras de Alicia en el país de las maravillas" fue un gran autor de matemática recreativa. En 1893 escribió su obra "Pillow problems" donde se recogen una serie de problemas matemáticos lúdicos de "almohada" en los que seguramente Carrol pensaba antes de irse a dormir.

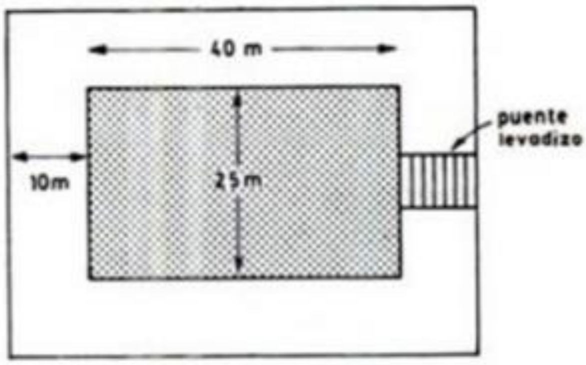


Ilustración 19.- Problema del foso.

Para superarlo, se debe colocar en una de las esquinas del foso una de las tablas de tal forma que corte a ambos laterales del rectángulo que forma el foso con un ángulo de 45º. Después se puede colocar la segunda tabla de forma perpendicular con la primera, ya que llegaría a la plataforma que atraviesa el foso.

4.2.2. Miguel de Guzmán.

Miguel de Guzmán Ozámiz (1936-2004) fue un matemático y docente español que dedicó una buena parte de su carrera al trabajo y divulgación de las matemáticas. En su carrera profesional, primero tuvo una etapa como matemático e investigador en la que consiguió que los matemáticos españoles reaparecieran en el panorama científico internacional tras muchos años fuera de él. A partir de los años ochenta, desarrolló su etapa como docente, llegando a ser catedrático en la Universidad Complutense de Madrid.

En esta época pone en marcha un gran programa de divulgación y puesta a punto del profesorado de enseñanza secundaria: elabora libros de texto de bachillerato donde plasma su pensamiento metodológico. En 1999 fundó el proyecto ESTALMAT[20] en Madrid, con el fin de desarrollar las habilidades matemáticas de los jóvenes que demostraban interés por la materia.

Miguel de Guzmán desarrolla el uso de una matemática lúdica como herramienta para favorecer el aprendizaje del alumno en las etapas educativas obligatorias. Así, en muchas de sus obras se observa que el uso de esta rama de las matemáticas está enfocado a la enseñanza como en su obra *Cuentos*

[20] **ESTALMAT** (Estímulo del Talento Matemático) es un proyecto de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales cuyo objetivo es detectar, orientar y estimular de manera continuada el talento excepcional de estudiantes de 12 y 13 años.

con cuentas (1984), *Aventuras matemáticas* (1986) o *Los matemáticos no son gente seria* (2001). En *Cuentos con cuentas*, Miguel de Guzmán asegura que los elementos recreativos que se pueden encontrar en la matemática, tanto en la elemental o en la superior, están desaprovechados por la gran mayoría de docentes de su entorno.

Estos libros recogen una gran cantidad de adaptaciones de problemas y juegos de otros autores internacionales y algunos problemas desarrollados por él mismo. Muchos de estos problemas tienen aplicaciones relacionadas con los sistemas de numeración, criterios de divisibilidad, inducción, deducción, lógica o simetría.

También muchos de sus artículos muestran un enfoque lúdico de las matemáticas en la educación, como en *Juegos matemáticos en la enseñanza*. En este artículo establece unas directrices heurísticas basadas en juegos y otras temáticas para el uso de los mismos en la educación matemática.

4.2.3. Albaigès Olivart

José María Albaigès Olivart (1940-2014) fue un ingeniero y economista español. Apasionado de las matemáticas y del ajedrez, fue autor de más de 100 libros de una temática variada, pero destacan sus contribuciones a la matemática recreativa. Escribió obras como *¿Se atreve usted con ellos? 101 apasionantes problemas* (1981), *La proporción Áurea* (2005), *El número Pi* (2007) o *Cuadrados mágicos* (2007).

En estas obras se recogen adaptaciones a problemas planteados por otros autores de la matemática recreativa y se plantean muchos problemas matemáticos que pueden ser estudiados a través de la teoría de números o la teoría de grafos. Además, el uso de la lógica para la resolución de problemas es uno de los elementos comunes que nos encontraremos a lo largo de todas sus obras de matemática recreativa.

Un buen ejemplo de esto es el problema de cruzar el río de su obra *¿Se atreve usted con ellos? 101 apasionantes problemas* que dice lo siguiente*: "un hombre debía atravesar un río con un lobo, una cabra y una cesta de coles. Tenía una barca tan pequeña que sólo podía pasar con el lobo, la cabra o la cesta de coles, y no quería dejar la cabra con el lobo o con las coles. Diga quien pueda, cómo atravesó el hombre el río con el lobo, la cabra y la cesta de coles."*

La solución a este problema puede ser fácilmente planteada en un aula de secundaria, utilizando este problema lúdico como entretenimiento para que los alumnos desarrollen la lógica. El hombre cruza el río con la cabra y deja el lobo con la cesta de coles en la orilla. Después, vuelve solo a por el lobo y cruza el río con él. Allí, deja el lobo y coge a la cabra, que la trae de vuelta a la otra orilla. En la orilla de inicio, deja la cabra y coge la cesta de coles, con la que cruza el río y lleva hasta el lobo. Por último, vuelve a por la cabra y la lleva de nuevo junto al lobo y la cesta de coles. De esta manera, ni el lobo se comerá a la cabra ni la cabrá se comerá la cesta de coles.

En 1984 publicó la primera edición de *Carrollia*, un boletín trimestral dedicado a la matemática recreativa que se publicó en España de forma ininterrumpidita hasta 2009. El nombre del boletín es un homenaje a Lewis Carroll. Durante los 25 años de existencia de la revista se convirtió en un punto de encuentro para los aficionados a la matemática recreativa y matemáticos profesionales. En esta revista podemos encontrar muchos problemas matemáticos lúdicos y aplicaciones curiosas de la matemática a la lingüística.

5. EL USO DE LA MATEMÁTICA RECREATIVA EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

La matemática recreativa y, en general, todos los juegos matemáticos, son un fantástico recurso para desarrollar una buena educación matemática. Todos tenemos el deseo de jugar, de tener pasatiempos lúdicos con los que ocupar parte de nuestra vida y divertirnos con ellos, así que debemos aprovechar el enorme potencial que existe en la relación entre los juegos y las matemáticas para la enseñanza de éstas.

Como ya he ejemplificado a lo largo de este trabajo hay muchas ramas de las matemáticas que se han desarrollado a partir de la matemática recreativa como, por ejemplo, la Teoría de Números, La Teoría de la Probabilidad, la Teoría de Grafos, La Teoría de Juegos, etc. Si tan ligados están los juegos o los pasatiempos con las matemáticas y tantos placeres proporcionan los juegos, resulta inexcusable que no los introduzcamos en el aprendizaje de las matemáticas.

Presentar a los alumnos retos matemáticos recreativos puede ser un gran detonante de la creatividad y la curiosidad hacia los procedimientos y métodos matemáticos. Además, muchos problemas matemáticos recreativos se pueden introducir a partir de un juego de conocimientos, de estrategia o de procedimiento conocido, lo que refuerza el carácter lúdico de estos problemas o actividades.

El juego es una gran herramienta para la educación matemática debido a su doble finalidad en el proceso de aprendizaje matemático, por un lado, permite desarrollar las habilidades y estrategias requeridas para resolver distintos problemas y a su vez, desarrolla una actitud positiva del alumno hacia la asignatura de matemáticas.

La introducción de juegos en la educación no es una experiencia cuyo fin sea una diversión banal, no busca implementar unos pasatiempos para que el proceso educativo sea inocuo, pero más agradable. El fin de esta experiencia es ampliar conocimientos y desarrollar la educación matemática desde una perspectiva en la que se alcancen aprendizajes significativos mientras el educando utiliza toda su atención en el proceso educativo, porque además de aprender se divierte. Con los juegos se pueden poner en marcha mecanismos mentales y procedimientos matemáticos de sumo interés que muchas veces se dejan abandonados en el proceso educativo por falta de tiempo o por falta de encaje en las programaciones educativas.

Cada vez son más los libros de texto de distintas editoriales que incluyen ejercicios de matemática recreativa en los distintos currículos de Enseñanza Primaria y Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) de todo el país. La implementación de la matemática recreativa puede cambiar la visión tradicional de la enseñanza matemática, transformándola en una actividad placentera y divertida en el día a día del aula.

5.1. Los efectos del uso de actividades matemáticas lúdicas en el aula y su relación con la motivación del alumnado.

Si se preguntase a cualquier profesor de Educación Primaria o Educación Secundaria Obligatoria que haya incluido el uso de actividades matemáticas lúdicas en el aula, si ha mejorado o no la atención y la motivación de sus alumnos tras ello, la mayoría afirmaría que sí, que sus alumnos están más motivados o prestan más atención. Pero, ¿el aumento de la motivación es una apreciación del profesor o es algo contrastable?

Motivar a los estudiantes es una tarea difícil, máxime cuando, en ocasiones, deben introducirse en el estudio de asignaturas en las cuales han tenido anteriormente una mala experiencia o su autoconcepto en el aprendizaje de éstas es bajo. En ocasiones, la actitud del alumnado en la asignatura de matemáticas no es precisamente buena, así que una de las principales razones por las que se opta a incluir actividades recreativas en la educación matemática es motivar más al alumnado. **Paul Ernest** afirmó en su artículo *Juegos. Razones para su uso en el aprendizaje de las matemáticas en la escuela,* que la motivación es la principal ventaja del uso de juegos, porque los estudiantes se sumergen en las actividades que se les proponen y, tras un tiempo, mejoran sus actitudes en torno a la materia. Además, es una forma de dejar de lado la monotonía de la práctica y darle variedad a la enseñanza.

Bernard J. Oldfield apunta hacia el mismo sentido en sus investigaciones publicadas en la revista *Mathematics in School* de la asociación matemática de Reino Unido, sobre el uso de juegos en la escuela. En estos estudios no solo destaca el papel motivacional del juego y las percepciones de los profesores cuando los usan en las aulas, también asegura que el uso de juegos es valioso para fomentar habilidades sociales en el aula, estimular la discusión matemática, aprender nuevos conceptos, comprender la simbología matemática que se utiliza en el aula, afianzar habilidades y conceptos matemáticos, desarrollar una mejor comprensión y adquirir algunas estrategias de resolución de problemas.

Morton D. Davis en su obra *Introducción a la teoría de juegos (1973)* investiga los efectos cognitivos de los juegos de dos personas de información perfecta en el aprendizaje de las matemáticas. En el libro demuestra la relación existente entre la resolución de problemas y el uso de algunos juegos matemáticos, aunque apostilla que para incorporar con efectividad el uso de juegos en el aula es necesario continuar las investigaciones.

Fernando Corbalán realizó una investigación en 1996 sobre las estrategias utilizadas por alumnos de educación secundaria en la resolución de juegos matemáticos. Se utilizaron juegos de estrategia solitarios y bipersonales. Seleccionó a 45 estudiantes de 13 y 14 años y realizó el estudio en el aula habitual de sus clases. Corbalán apreció que algunas estrategias de resolución de problemas eran más utilizadas que otras por los alumnos. Observó que las técnicas que empleaban el uso de la aritmética están más interiorizadas que las técnicas de geometría o en el estudio del azar. A raíz de este estudio afirmó que la utilidad de los juegos de estrategia dentro de la formación matemática tiene un potencial muy grande, ya que desarrollan algunas de las destrezas necesarias para la resolución de problemas a partir de ejemplos prácticos y no de la repetición de procedimientos matemáticos.

Peter Vankúš, doctorado en educación matemática y profesor universitario de la Universidad de Comenius (Eslovaquia), realizó dos investigaciones muy interesantes desde la perspectiva del análisis de la enseñanza matemática a través de elementos lúdicos. En 2005 estudió la eficacia de enseñar matemáticas utilizando juegos didácticos. Observó el comportamiento de 51 estudiantes de 11 y 12 años mediante 17 sesiones de 45 minutos en el aula. Pudo advertir que el uso de juegos didácticos mejora las actitudes de los alumnos en torno a las matemáticas y en especial, la motivación para trabajar en el aula. Sin embargo, también observó que los alumnos que trabajaron a través de juegos didácticos obtuvieron los mismos conocimientos (desde un punto de vista estadístico) en el mismo tiempo que aquellos que trabajaron sin juegos.

En 2008 realizó otra investigación sobre el uso de juegos de aprendizaje basados en la enseñanza de las matemáticas. Esta vez la muestra fue mayor, estudiando un total de 103 estudiantes de 11 y 12 años. Vankúš volvió a observar que empíricamente el juego motivaba a los alumnos, y enumeró algunos de los factores que lo determinaban: la competencia a través del juego, el ambiente que se produce en el aula o la necesidad de pensar en su tiempo libre las estrategias ganadoras en algunos juegos de estrategia. Además, advirtió que los juegos desarrollaban las habilidades de socialización, comunicación, argumentación y el uso de razonamiento lógico.

L. Bragg recogió en un estudio las impresiones de los estudiantes sobre el valor de los juegos para el aprendizaje de las matemáticas. Para ello, entrevistó a una muestra de 121 alumnos de una población total de 222, mediante 8 sesiones en el aula. Tras el estudio observó que deben establecerse medidas para conectar el contenido del juego y los conceptos matemáticos que se desean impartir, para adecuarse correctamente al plan de estudios y al currículo. Los profesores deben tener cuidado al introducir juegos en el aula y deben tener en cuenta que el fin de su uso es mejorar el conocimiento y el aprendizaje del alumno.

Gairín y Fernández investigaron sobre el uso del ajedrez en la enseñanza de las matemáticas. Diseñaron y validaron una colección de material didáctico con el fin de implementarlo en la etapa de educación primaria. Utilizaron este material didáctico con 150 estudiantes a través de 1 sesión de 90 minutos a la semana durante un año. La principal conclusión que sacaron de esta investigación fue que es viable mejorar metodológicamente la enseñanza de las matemáticas utilizando material lúdico manipulativo con elementos del ajedrez. El uso del ajedrez en el aula mejora el razonamiento lógico y el cálculo numérico. En su investigación encontraron diferencias en el rendimiento matemático de los alumnos que utilizaron ajedrez y los que no.

Los **resultados** de estas investigaciones parecen señalar que existen ventajas de distintas índoles en el uso de actividades lúdicas en la clase de matemáticas que podemos dividir en las siguientes cuatro categorías:

- **Motivación, comportamiento y actitud**: Los estudios e investigaciones indican un aumento de la motivación de los estudiantes cuando se introducen actividades recreativas en el aula y una mejora de sus actitudes en la clase. Además, el uso de juegos de estrategia hace que los estudiantes también amplíen el tiempo que dedican a pensar en las matemáticas mientras están en casa. La introducción de juegos matemáticos en el aula promueve la socialización y estimula la discusión matemática.

- **Desarrollo de estrategias de resolución de problemas:** El uso de juegos en el aula permite el desarrollo de estrategias a través de la propuesta y prueba de hipótesis, deducción por síntesis y análisis, y las pruebas de ensayo y error. Las actividades basadas en el ajedrez fomentan adecuadamente el desarrollo de estrategias para la resolución de problemas.

- **Fortalecimiento de habilidades:** El juego afianza muchas de las habilidades básicas del alumnado como la socialización, argumentación, el razonamiento lógico y la comunicación.

- **Desarrollo de conocimientos:** Las actividades matemáticas recreativas pueden ser la base para aprender nuevos conceptos, comprender la simbología matemática que se utiliza en el aula y desarrollar una mejor comprensión de los contenidos, aunque su uso no implica que el progreso del alumnado sea superior al de aquellos que no utilizan juegos.

Estos argumentos indican que a través de la matemática recreativa es posible mejorar la motivación del alumnado. Parece sensato que los profesores perciban un mayor entusiasmo del alumnado cuando se introducen este tipo de matemáticas en el aula, no solo por una percepción positivista propia, sino porque existen varias investigaciones que apoyan que el uso de la matemática recreativa en la educación matemática mejora la motivación, el comportamiento y la actitud de los alumnos en el aula.

5.2. Cómo introducir juegos de conocimientos en la educación matemática.

Los juegos de conocimientos son aquellos juegos cuyos contenidos son algunos de los tópicos clásicos de las matemáticas que se desarrollan en una etapa educativa concreta. El uso de la matemática recreativa en el aula y en particular, la de los juegos de conocimientos, nos ofrece un claro elemento de motivación para el aula. Pero esta ventaja que claramente tenemos al introducirlos se puede desaprovechar si los juegos que ofrecemos en el aula no reúnen unas condiciones mínimas necesarias para que su uso haga que mejore la actitud de los alumnos en el aula.

- **Los juegos deben de tener una presentación motivadora, para que a los alumnos les apetezca jugar con ellos.**

Los juegos deben de tener una presentación que despierte en los alumnos un interés por jugar con ellos. Los materiales y recursos necesarios para cada uno no tienen por qué tener una presentación similar a los juegos modernos actuales, pero su presentación sí que debe estar sustentada en un soporte digno y cuidado, ya sea en un formato físico o digital.

- **Deben de tener reglas sencillas y conocidas por todos los alumnos.**

Todos los juegos tienen reglas, es algo que caracteriza a los juegos. Las reglas deben ser comprendidas por todos los alumnos antes de poner en práctica el juego. Muchos juegos de conocimientos se basan en juegos que son utilizados fuera de la escuela y que pueden ser aprovechados en clase de matemáticas para trabajar algunos de los contenidos que se imparten.

Una de las ventajas de introducir en el aula juegos cuyo procedimiento es conocido por los alumnos es que puede dar pie al intercambio de roles durante la clase de matemáticas. Hay alumnos que se consideran malos o que no valen para las matemáticas, pero, sin embargo, son buenos jugadores de cartas, dominó o ajedrez. Entonces, al introducir un juego que se basa en un procedimiento que conocen bien su posición frente a sus compañeros puede cambiar y desarrollar un papel activo y protagonista en la clase de matemáticas que le ayude a mejorar su autoconcepto matemático y su motivación a la hora de afrontar la asignatura.

- **Los contenidos matemáticos implicados en el juego deben ser adecuados para el alumnado.**

Los contenidos matemáticos que se desarrollen mediante los juegos deben de tener un doble enfoque. Por un lado, su dificultad debe de ajustarse al nivel de los alumnos y en él se debe manejar un contenido matemático que no esté fuera del alcance de los receptores. Por otro lado, debe adecuarse a los contenidos del currículo donde vamos a implementarlos, en este caso en la Educación Secundaria Obligatoria.

Como los contenidos matemáticos en algunos juegos tienen una dificultad modulable, el uso de los juegos de conocimientos también puede ser una buena herramienta a la hora de enfrentarse a la diversidad en el aula. Si en un juego cooperativo se crean grupos de nivel homogéneo y el docente ha incorporado contenidos matemáticos de diferente dificultad, puede asignar los más complejos a los grupos más avanzados y los más simples a los grupos que presenten una dificultad mayor en la asignatura.

- **Deben tener una duración igual o inferior a la sesión de clase.**

Este tipo de juegos no se pueden acabar en casa o en la siguiente sesión de clase ya que los alumnos no recordaran la situación en la que dejaron el juego. Además, una duración excesiva y una presencia continuada en el aula puede implicar que aumente el cansancio o el aburrimiento de los estudiantes, generando el efecto contrario al que se busca.

6. PROPUESTA DIDÁCTICA EN EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

En este capítulo se desarrollará una **propuesta didáctica** basada en una colección de actividades **matemáticas recreativas** para implementar en **segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria** (ESO). El objetivo principal de esta propuesta es mejorar la actitud del alumnado hacia la asignatura de matemáticas y despertar su interés por el aprendizaje de éstas, pero éste no es el único objetivo que se persigue con esta propuesta, también se busca que el alumnado sea capaz de desarrollar las siguientes capacidades:

- Mejorar la motivación en la asignatura de matemáticas.
- Desarrollar un mayor nivel de autoestima, permitiendo así que el alumnado disfrute de los aspectos creativos y de las distintas aplicaciones de las matemáticas.
- Valorar las matemáticas como parte de nuestra cultura, tanto desde la perspectiva histórica como de su uso en la actualidad.
- Acrecentar la capacidad de reflexión y pensamiento intuitivo para su aplicación en la elaboración de diferentes estrategias para la resolución de problemas.

La consecución de todos estos objetivos se medirá de una forma análoga a como se cuantificó el logro de los objetivos en la investigación realizada por L. Muñiz, P. Alonso y L.J. Rodríguez *Matemáticas con sabor a juego: una forma diferente de aprender* (2013). Se determinará mediante indicadores de impacto que serán medidos por diferentes instrumentos, como la calificación del alumnado, encuestas, la observación diaria o las pruebas de evaluación diseñadas a lo largo del curso en el que se implemente esta propuesta didáctica y que a continuación expongo:

Objetivo principal	Indicadores de impacto	Medidas
• El objetivo principal de esta propuesta didáctica es mejorar la actitud del alumnado hacia la asignatura de matemáticas y despertar su interés por el aprendizaje de éstas	• El rendimiento del alumnado mejora en la asignatura de matemáticas. • La motivación y el interés del alumnado por la asignatura aumenta. • Los docentes tienen una mayor satisfacción a la hora de impartir la asignatura.	• Calificaciones de los alumnos en la asignatura de matemáticas. • Encuesta de satisfacción del alumnado sobre la metodología seguida en el aula. • Escalas cuantitativas sobre motivación del alumno.

Objetivos específicos	Indicadores de impacto	Medidas
• Mejorar la motivación del alumnado en la asignatura de matemáticas. • Desarrollar un mayor nivel de autoestima en el alumnado, permitiendo así que disfruten de los aspectos creativos y de las distintas aplicaciones de las matemáticas. • Valorar las matemáticas como parte de nuestra cultura, tanto desde la perspectiva histórica como de su uso en la actualidad. • Acrecentar la capacidad de reflexión y pensamiento intuitivo de los alumnos para que sean capaces de elaborar diferentes estrategias que después puedan aplicar en la resolución de problemas.	• Los alumnos reconocen la importancia y la utilidad que tienen las matemáticas en la vida cotidiana. • El alumnado resuelve los problemas matemáticos de una forma más eficiente, desarrollando estrategias diferenciadas en función del tipo de problema propuesto. • Los alumnos adquieren nuevos conocimientos transversales en la asignatura, a mayores de los establecidos en los contenidos del currículo, de esta forma se desarrolla un aprendizaje más enriquecedor. • El alumnado conoce diferentes aplicaciones de los conceptos matemáticos y los emplea en otras materias o áreas.	• Observación diaria en el aula para confeccionar un cuaderno de anotaciones. • Resultados obtenidos en las pruebas de evaluación que realizarán los alumnos. Las pruebas constarán de ejercicios y problemas de los cinco bloques de contenidos de 2º de la ESO: 1. Contenidos comunes. 2. Números y álgebra. 3. Geometría. 4. Funciones. 5. Estadística y probabilidad. • Portafolio con las actividades matemáticas recreativas propuestas durante el curso.

Para implementar esta propuesta didáctica se estudiará el currículo de Educación Secundaria Obligatoria y cómo la matemática recreativa puede servir para desarrollar las competencias clave, de esta forma se podrá generar un aprendizaje más enriquecedor. Además, se establecerá la metodología a seguir en el aula, cómo se desarrollarán las sesiones en las que se emplee la matemática recreativa y la secuenciación de algunas de las actividades propuestas en la colección de ejercicios matemáticos recreativos.

Los recursos y materiales necesarios para cualquiera de las actividades planteadas aparecerán recogidas en la ficha de cada actividad. En esta ficha se detallará, además de los recursos y materiales necesarios, otros aspectos de cada actividad propuesta como los alumnos necesarios para la actividad, los contenidos del currículo que trabajan, el bloque al que pertenecen los contenidos y el tiempo aproximado para su realización. De esta manera, cualquier docente que observe las fichas puede de un simple vistazo observar qué contenidos se trabajan en cada actividad, el material y el tiempo necesario para llevarla a cabo.

Por último, también se dedica un apartado de este epígrafe a la evaluación. En este apartado se hablará sobre los instrumentos que se utilizan en la evaluación del alumnado a lo largo del curso, y sobre la evaluación de la propuesta didáctica.

6.1. La matemática recreativa y el currículo en la Educación Secundaria Obligatoria.

Antes de desarrollar algunas de las actividades de la matemática recreativa que se pueden llevar a cabo en 2º ESO, quiero desarrollar cuál es el encaje de la matemática recreativa en el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria, cómo su uso puede ayudar a la adquisición y el desarrollo de las competencias clave de esta etapa, y cuáles son los contenidos que pretendo trabajar con las actividades que proponga.

El marco normativo a partir del cual se desarrolla el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria es el ***Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato***. En el artículo primero de este Real Decreto se establece qué son las competencias: "*las competencias son las capacidades para aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, con el fin de lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos*". En el artículo segundo se enumeran las competencias del currículo: *"a efectos del presente real decreto, las competencias del currículo serán las siguientes:*

a) Comunicación lingüística.
b) Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
c) Competencia digital.
d) Aprender a aprender.
e) Competencias sociales y cívicas.
f) Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.
g) Conciencia y expresiones culturales."

La introducción de la matemática recreativa en Educación Secundaria Obligatoria puede ayudar a desarrollar varias competencias clave y facilitar así su adquisición por parte del alumnado. La matemática recreativa puede trabajar las competencias clave de las siguientes formas:

- **La competencia en comunicación lingüística (CCL)**: algunas actividades de la matemática recreativa han de desarrollarse con varios participantes que deben ser capaces de utilizar el lenguaje para comunicarse y transmitir información al resto de integrantes del grupo. Además, muchos de los problemas matemáticos recreativos que se pueden plantear, requieren que los alumnos interpreten y comprendan la realidad que los rodea, ya sea debido a que tienen interpretar un gráfico, un dibujo o el contexto en el que se desenvuelve el problema propuesto.

- **La competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT):** el objeto del uso de la matemática recreativa en el aprendizaje de las matemáticas es que los alumnos desarrollen un aprendizaje de las matemáticas de una forma lúdica. Así es posible desarrollar la educación matemática desde un punto de vista en el que se alcancen aprendizajes significativos mientras el educando utiliza toda su atención en el proceso educativo porque además de aprender se divierte. Es obvio que con la matemática recreativa se trabaja la competencia matemática, máxime en un aula de Educación Secundaria Obligatoria, donde se relacionan todas las actividades matemáticas lúdicas con los contenidos del currículo de cada etapa.

- **La competencia digital (CD):** existen muchos juegos sociales o de mesa que pueden ser utilizados en clase y que pueden trabajar los contenidos de las asignaturas de las matemáticas en Educación Secundaria Obligatoria. Varios de estos juegos tienen una versión de uso online a través de un dispositivo electrónico y conexión a internet, como el ajedrez. La implementación de la matemática recreativa en el aula a través de problemas y actividades relacionadas con el ajedrez y el uso de simuladores, programas y páginas de juego online pueden trabajar el desarrollo de la competencia digital. El uso de juegos de procedimiento conocido para trabajar algunos contenidos del currículo de matemática puede despertar inquietudes en el alumnado que deriven en el uso de las tecnologías de la información y la comunicación para desarrollar su aprendizaje de una forma autónoma.

- **La competencia para aprender a aprender (CAA):** la introducción de problemas lúdicos matemáticos en la educación favorece el uso de juegos de estrategia en el aula. Estos juegos de estrategia son una fuente de motivación para el alumnado. Debido a la curiosidad que causan este tipo de juegos, su uso favorecerá que los alumnos se planteen preguntas e identifiquen y manejen diversas posibles respuestas ante una misma situación o problema.

Gracias a esa pluralidad de posibles respuestas, los alumnos pueden emplear diferentes estrategias que permitan afrontar una toma de decisiones racional y crítica con la información que disponen.

- **Las competencias sociales y cívicas (CSC)**: Durante las actividades matemáticas recreativas, en muchas ocasiones, los alumnos tendrán que dar una respuesta colectiva al problema o actividad que se plantea. Presumiblemente, varios alumnos pueden proponer soluciones distintas a un mismo problema, así que los alumnos deberán expresar de una manera constructiva por qué piensan que una solución es mejor que otra, mostrando tolerancia con el resto sus compañeros y utilizando el diálogo para llegar dar una respuesta consensuada por todos.

- **La competencia en sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor (SIE):** el uso de matemática recreativa en el aula tiene diversos efectos en el alumnado que se han descrito en el apartado segundo del capítulo quinto de este trabajo. Algunos de estos efectos contribuyen a la adquisición de algunos de los valores que vertebran esta competencia como la perseverancia, la autoestima, la creatividad, la capacidad de elegir o la de calcular riesgos y de afrontar los problemas. El planteamiento de problemas lúdicos favorece fehacientemente el desarrollo de la capacidad de elegir con criterio propio y de tener una visión estratégica de los retos y oportunidades para identificar y cumplir los objetivos propuestos. La implementación de la matemática recreativa en el desarrollo de las clases hace que la motivación de los alumnos aumente, lo cual los motiva para resolver con éxito las actividades lúdicas que puedan ser propuestas y fomenta una sana ambición personal y académica del alumnado.

- **La competencia en conciencia y expresiones culturales (CEC):** esta competencia también se puede trabajar a través de la contextualización de la matemática recreativa. La matemática recreativa tiene una fuerte unión con el arte y muchas manifestaciones culturales que han surgido durante la historia de las matemáticas, que como hemos visto a lo largo de este trabajo, resulta paralela a la historia de la matemática recreativa.

En definitiva, la matemática recreativa puede ser un excelente recurso para la Educación Secundaria Obligatoria, ya que su uso puede favorecer el desarrollo de las competencias clave mientras los alumnos se divierten.

En el apartado primero del artículo tercero del RD 1105/2014 se establece que "*corresponderá al Gobierno determinar los contenidos comunes, los estándares de aprendizaje evaluables y el horario lectivo mínimo del bloque de asignaturas troncales*". En el apartado tercero también se indica que

"*Dentro de la regulación y límites establecidos por el Gobierno, a través del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte*[21]*, de acuerdo con los apartados anteriores, las Administraciones educativas podrán complementar los contenidos del bloque de asignaturas troncales".*

En el apartado primero del artículo decimotercero del RD 1105/2014, se jerarquiza a las matemáticas como una asignatura troncal en el primer ciclo de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), siendo obligado cursar matemáticas tanto en el primero como en el segundo curso de la ESO.

En el *artículo 73.1 del Estatuto de Autonomía de Castilla y León* se atribuye a la Comunidad de Castilla y León la competencia de desarrollo legislativo y ejecución de la enseñanza en toda su extensión, niveles y grados, modalidades y especialidades, de acuerdo con lo dispuesto en la normativa estatal. Debido a la normativa estatal y autonómica los contenidos de las distintas asignaturas de la Educación Secundaria Obligatoria se encuentran en distintas órdenes dictadas por la Consejería de Educación de Castilla y León. En la actualidad los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje de las asignaturas de la Educación Secundaria Obligatoria se encuentran regulados en la orden *EDU/362/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León.*

Los contenidos de la asignatura de matemáticas en 2º de la ESO están detallados en el Anexo 1 de la orden EDU/362/2015. Estos contenidos se dividen en cinco bloques diferenciados. Bloque 1: Contenidos Comunes. Bloque 2: Números y Álgebra. Bloque 3: Geometría. Bloque 4: Funciones. Bloque 5: Estadística y Probabilidad. A continuación, **se expone una propuesta de secuenciación de los contenidos del currículo de matemáticas de 2º ESO agrupados en unidades didácticas**. Estos contenidos serán la pieza vertebral y objeto de estudio de las actividades matemáticas recreativas.

Bloque 1. Contenidos comunes. Se impartirán a lo largo de todo el curso.

- Planificación del proceso de resolución de problemas: análisis de la situación, selección y relación entre los datos, selección y aplicación de las estrategias de resolución adecuadas, análisis de las soluciones y, en su caso, ampliación del problema inicial.

[21] En la actualidad el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte es el **Ministerio de Educación y Formación Profesional**.

- Elección de las estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico básico, etc.); construcción de una figura, un esquema o un diagrama; experimentación mediante el método ensayo-error; reformulación del problema, resolución de sub problemas dividendo el problema en partes; recuento exhaustivo, comienzo por casos particulares sencillos, búsqueda de regularidades y leyes; etc.

- Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.

- Expresión verbal y escrita en Matemáticas. Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.

- Iniciación en el planteamiento de pequeñas investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación.

- Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.

- Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a) la recogida ordenada y la organización de datos; b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos (gráficas de funciones, diagramas de sectores, barras, histogramas, etc.); c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico; d) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas; e) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos; f) comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.

Bloque 2. Números y álgebra.

1. **Divisibilidad:** Divisibilidad de los números naturales. Criterios de divisibilidad. Números primos y compuestos. Descomposición de un número en factores primos. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de varios números naturales.

2. **Números enteros:** Números negativos. Significado y utilización en contextos reales. Números enteros. Representación, ordenación en la recta numérica y operaciones. Operaciones con calculadora. Valor absoluto y opuesto de un número entero.

3. **Fracciones, decimales, potencias y notación científica**: Fracciones en entornos cotidianos. Fracciones equivalentes. Simplificación y amplificación de fracciones. Representación, ordenación y operaciones. Números decimales. Representación, ordenación y operaciones. Aproximaciones, truncamientos y redondeos. Operaciones. Números racionales. Relación entre fracciones y decimales. Conversión y operaciones. Aumentos y disminuciones porcentuales. Potencias de números fraccionarios con exponente natural. Operaciones Potencias de base 10. Utilización de la notación científica para representar números grandes.

4. **Cálculo**: Jerarquía de las operaciones. Elaboración y utilización de estrategias para el cálculo mental, para el cálculo aproximado y para el cálculo con calculadora u otros medios tecnológicos.

5. **Proporcionalidad:** Razón y proporción. Magnitudes directa e inversamente proporcionales. Constante de proporcionalidad. Resolución de problemas en los que intervenga la proporcionalidad directa o inversa o variaciones porcentuales. Repartos directa e inversamente proporcionales.

6. **Expresiones algebraicas:** El lenguaje algebraico. Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa. El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. Valor numérico de una expresión algebraica. Operaciones con expresiones algebraicas sencillas. Transformación y equivalencias. Identidades notables. Operaciones con polinomios en casos sencillos.

7. **Ecuaciones**: Ecuaciones de primer grado con una incógnita (métodos algebraico y gráfico) y de segundo grado con una incógnita (método algebraico). Transformaciones elementales. Resolución. Interpretación de las soluciones. Ecuaciones sin solución. Resolución de problemas, análisis e interpretación crítica de las soluciones.

8. **Sistemas**: Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Métodos algebraicos de resolución y método gráfico. Resolución de problemas, análisis e interpretación crítica de las soluciones. Valoración del lenguaje algebraico para plantear y resolver problemas de la vida cotidiana

Bloque 3. Geometría.

9. **Geometría plana**: Figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales, circunferencia, círculo, arcos y sectores circulares. Cálculo de áreas y perímetros. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples. Uso de herramientas informáticas para estudiar formas,

configuraciones y relaciones geométricas.

10. **Teoremas de Geometría:** Revisión de los triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Justificación geométrica y aplicaciones. figuras semejantes. Criterios de semejanza. Razón de semejanza y escala. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.

11. **Geometría 3D:** Poliedros y cuerpos de revolución. Elementos característicos, clasificación. Áreas y volúmenes. Propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros. Cálculo de longitudes, superficies y volúmenes en el mundo físico

Bloque 4. Funciones.

12. **Funciones:** Coordenadas cartesianas: representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados. El concepto de función: Variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula). Crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Estudios global y local de una función a partir de su gráfica, deduciendo los puntos de cortes con los ejes, los tramos de crecimiento y decrecimiento, los puntos de continuidad y discontinuidad, los máximos y mínimos relativos. Análisis y comparación de gráficas. Significado de los puntos de corte de dos gráficas.

13. **Funciones afines:** Funciones lineales. Cálculo, interpretación e identificación de la pendiente de la recta. Representaciones de la recta a partir de la ecuación y obtención de la ecuación a partir de una recta. Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas.

Bloque 5. Estadística y probabilidad.

14. **Estadística**: Población e individuo. Muestra. Variables estadísticas. Variables cualitativas y cuantitativas discretas y continuas. Frecuencias absolutas y relativas. Organización en tablas de datos recogidos en una experiencia. Diagramas de sectores, de barras, histogramas y polígonos de frecuencias. Otros gráficos estadísticos provenientes de los medios de comunicación. Medidas de tendencia central. Medidas de dispersión. Iniciación en la hoja de cálculo.

15. **Probabilidad**: Fenómenos deterministas y aleatorios. Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación. Frecuencia relativa de un suceso y su aproximación a la probabilidad mediante la simulación o experimentación. Sucesos elementales equiprobables y no equiprobables. Espacio muestral en

experimentos sencillos. Tablas y diagramas de árbol sencillos. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace en experimentos sencillos.

6.2. Metodología y desarrollo.

Miguel de Guzmán señaló en las IV Jornadas sobre el aprendizaje y Enseñanza de las matemáticas (1984) que: *"es un hecho frecuente que muchas personas que se declaran incapaces de toda la vida para la matemática disfrutan intensamente con puzles y juegos cuya estructura en poco difiere de la matemática. Existen en ellas claros bloqueos psicológicos que nublan su mente en cuanto se percatan de que una cuestión que se les propone, mucho más sencilla tal vez que el juego que practican, tiene que ver con el teorema de Pitágoras".*

Esta propuesta didáctica está pensada para incluir actividades de la matemática recreativa durante todo el curso, recorriendo todos los bloques en los que se dividen los contenidos de la asignatura de matemáticas en 2º de la ESO. El fin de esta propuesta no es solo ejemplificar algunos de estos contenidos a través de la matemática recreativa, sino utilizar la matemática recreativa en algunas unidades didácticas con el fin de motivar al alumnado para el estudio de la asignatura de matemáticas y en parte, ayudar de esta manera a los muchos alumnos bloqueados que también señala Miguel de Guzmán.

Me gustaría señalar que en esta propuesta didáctica no se empleará la metodología de Aprendizaje Basado en Juegos (ABJ) ni la Gamificación, simplemente **se utiliza la matemática recreativa dentro de una estrategia didáctica cuyo fin es motivar al alumnado en el aprendizaje de las matemáticas**.

Los alumnos desarrollarán un **portafolio** en el cuál se recopilarán todas las actividades recreativas que se desarrollen en el marco de esta propuesta didáctica. Este portafolio tendrá los siguientes componentes:

- Una portada proporcionada por el docente.

- Un texto elaborado por el estudiante al inicio del curso donde exponga brevemente sus impresiones en la asignatura de matemáticas: fortalezas, debilidades, expectativas, etc.

- Los enunciados y la resolución de las actividades recreativas que proporcione el docente a lo largo del curso.

- Una actividad matemática recreativa propia que propone el alumno y que guarde relación con los contenidos de cada uno de los bloques de la asignatura de matemáticas.

- Una lista de las tres actividades recreativas más difíciles que se han desarrollado en el aula.

- Una lista con tres juegos que conozca y que guarden relación con las matemáticas, donde explique brevemente cuál es la relación que tienen con las matemáticas.

- Una reflexión al final del curso sobre sus impresiones en la asignatura de matemáticas y su opinión sobre el uso de actividades matemáticas recreativas en el aula.

Cuando se desarrolle una actividad matemática recreativa en el aula estructuraremos la sesión de una de las siguientes formas en función del contenido a impartir y el tipo de actividad propuesta:

- **Opción 1**: se diferenciará la sesión en dos fases distintas. En la primera fase el profesor explica alguno de los contenidos incluidos en la unidad didáctica que se esté desarrollando. Después de explicar dicho contenido, el profesor plantea una actividad matemática recreativa que trabaje el contenido que se ha explicado. De esta manera los alumnos pueden practicar e interiorizar los contenidos explicados en la sesión.

- **Opción 2**: no hay división entre una explicación teórica de alguno de los contenidos incluidos en la unidad didáctica que se está desarrollando y la actividad matemática lúdica propuesta. Al inicio de la sesión se plantea la actividad como punto de partida para explicar alguna noción o algoritmo en el que se base el desarrollo del contenido. Así los alumnos pueden desarrollar interés por la materia y son sujetos activos en el proceso de aprendizaje, pueden recurrir a su intuición y conocimientos previos para resolver las actividades propuestas.

Mostrar al alumnado la parte de las matemáticas divertida puede estimularles y motivarles. **Las actividades matemáticas recreativas** que desarrollemos en el aula **deben de tener las siguientes características:**

- Deben ser sencillas y breves.
- Su resultado tiene que ser satisfactorio para los docentes y para los alumnos.
- Han de ser adecuadas a los contenidos que se estén desarrollando en el aula.
- Tienen que exigir la participación del alumnado, no sólo la actuación del docente.

Debido a estas características, las actividades que se enumeraran en la propuesta didáctica mayoritariamente serán: 1. Problemas recreativos que supongan un reto para el alumno. 2. Problemas basados en juegos de estrategia. 3. Actividades matemáticas recreativas basadas en juegos de procedimiento conocido. 4. Juegos matemáticos de conocimientos, que como ya se indicó anteriormente, son los juegos cuyos contenidos son algunos de los tópicos clásicos de las matemáticas; en este caso, de los contenidos que se imparten en Educación Secundaria Obligatoria. En ocasiones, los juegos de estrategia y los juegos de procedimiento conocido guardan un paralelismo con los procedimientos típicos de resolución de problemas, por lo que su utilización en el ámbito educativo para desarrollar contenidos del currículo de matemáticas produce un aprendizaje enriquecedor.

Sin embargo, muchos docentes de matemáticas creen que, enseñar estrategias propias de resolución de problemas con ejemplos prácticos, y en particular, mediante juegos de estrategia o de procedimiento conocido, no ayuda a avanzar en el programa que se debe desarrollar durante el curso. En cambio, no reparan en que desarrollar la habilidad para resolver problemas es uno de los fines más importantes de la educación matemática y a su vez, uno de las que más cuesta desarrollar.

6.3. Evaluación.

La evaluación en esta propuesta didáctica también será un pilar fundamental de la misma, tanto desde la perspectiva de la evaluación del alumnado como de la evaluación de la propuesta. Esta doble vertiente de la evaluación tiene dos propósitos muy diferenciados. En primer lugar, la evaluación del alumnado se desarrollará a lo largo del curso para determinar cómo ha sido el proceso de aprendizaje del alumnado y determinar que conocimientos ha adquirido cada uno de ellos. Por otro lado, el fin de evaluar esta propuesta didáctica es analizar la consecución del objetivo principal y de los objetivos específicos que se han determinado, detectar errores cometidos y posibles mejoras de la propuesta.

6.3.1. Evaluación del alumnado.

Los instrumentos que se emplean para la evaluación del alumnado durante el curso en el cuál se implemente esta propuesta didáctica serán los siguientes:

- **Revisión del cuaderno y del portafolio de los alumnos**: Dicho portafolio constará de los elementos enumerados en el apartado anterior y de la colección de las actividades matemáticas recreativas que se desarrollen en el aula recogidas cronológicamente. Todas las actividades matemáticas recreativas guardarán relación con los contenidos y estándares de aprendizaje evaluables.

- **Pruebas específicas de evaluación**: estas pruebas de evaluación constaran de ejercicios y problemas que determinen si los alumnos han adquirido los conocimientos necesarios sobre los contenidos del currículo y si cumplen los estándares de aprendizaje evaluables. Algunas de estas pruebas contendrán problemas matemáticos recreativos.

- **Observación diaria en el aula** mediante un cuaderno que refleje la actitud y esfuerzo del estudiante. De esta manera se premiará el interés por la materia, el esfuerzo y la participación en el aula.

En cada cuatrimestre se realizarán dos o tres pruebas específicas de evaluación, dependiendo de los contenidos impartidos en ese cuatrimestre. Estas pruebas específicas contarán un 70% de la nota del cuatrimestre del alumnado. El 30% restante se dividirá en la revisión del cuaderno (10%), el portafolio de los alumnos (10%) y la observación diaria en el aula (10%).

6.3.2. Evaluación de la propuesta

Se podrá evaluar la propuesta en dos fases diferenciadas de la misma, mediante la evaluación del proceso y la evaluación de los resultados de la propuesta didáctica.

- **Evaluación del proceso**: Esta evaluación se realizará mientras se desarrolla el proyecto didáctico. Mediante la observación diaria en el aula, la revisión del portafolio y las pruebas específicas que se van desarrollando se puede analizar de forma parcial si se están cumpliendo los objetivos específicos que se han establecido en esta propuesta didáctica.

- **Evaluación de resultados**: Podremos determinar si se ha logrado el objetivo principal propuesto a través de diferentes instrumentos:

  Instrumento 1. A través de dos escalas cuantitativas que midan la motivación del alumnado en la asignatura de matemáticas. Estas escalas se emplearán de la siguiente forma: una se utilizará para medir la motivación del alumnado antes de implementar la propuesta didáctica y la otra al finalizar, así podremos determinar si existe una mejora o no de la motivación hacia la asignatura de matemáticas.

  Instrumento 2. Mediante la comparación de la calificación de los alumnos en la asignatura de matemáticas, observando la progresión que han tenido a lo largo del curso.

  Instrumento 3. A través de una encuesta que se proporcionará a los alumnos para conocer la satisfacción sobre la metodología empleada y el desarrollo de las clases. Además, esta encuesta puede servir para detectar posibles errores cometidos y mejoras de la propuesta didáctica ya que en ella se preguntará al alumnado qué es lo que menos le ha gustado y qué cambios propondrían sobre la metodología y el desarrollo de las clases.

Instrumento 4. A través de las breves reflexiones del portafolio de los alumnos, comprobando las diferencias entre sus impresiones de la asignatura al comienzo y al fin del curso donde se emplaza esta propuesta didáctica.

6.4. Actividades propuestas.

En este apartado se expondrán algunas actividades matemáticas recreativas que pueden ser desarrolladas en un aula de 2º de Educación Secundaria Obligatoria. Estas actividades tienen como fin, dentro de esta propuesta didáctica, ser un ejemplo de cómo se pueden desarrollar otras actividades recreativas que puedan plantearse en dicho curso.

En cada una de las actividades propuestas en la parte superior se encuentra un casillero que indica los contenidos del currículo que trabaja, el bloque al que pertenecen, si requiere que los alumnos participen individualmente, en parejas o en grupos, la duración aproximada de la actividad, los recursos necesarios para llevarlo a cabo y la fuente de éstas. Muchas de ellas son adaptaciones de actividades, problemas o juegos tradicionales muy conocidos.

Cada actividad consta de tres apartados diferenciados. Primero, se expone el enunciado. En cada enunciado se desarrolla el problema, actividad o juego y se le proporciona íntegramente a cada alumno. En el segundo, se desarrollan los contenidos matemáticos que se pretenden trabajar con las actividades propuestas. El último apartado desarrolla el planteamiento de la actividad en el aula. En él, se establece cómo debe ser la secuenciación de la actividad, se enumeran los pasos a seguir en el aula. También se expone una pequeña propuesta didáctica de cómo presentar al alumno la actividad y de cómo guiarlo en el proceso de aprendizaje, en el caso de que les pueda surgir alguna dificultad a la hora de plantear una solución correcta. En este apartado también se indica la solución de cada una de las actividades y problemas. Por último, en algunas actividades se indican posibles variaciones que se pueden desarrollar en el aula.

Con este conjunto de actividades pretendo ilustrar que, con un poco de imaginación, es posible confeccionar una propuesta didáctica que emplee el uso de la matemática recreativa durante todo el curso, ya que en este apartado propongo actividades que desarrollan contenidos de los cinco bloques del currículo de matemáticas de 2º de la ESO.

A. Adivino tu edad según tu número de pie.

Bloques	1. Contenidos comunes. 2. Números y álgebra
Contenidos	Elección de las estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado. El lenguaje algebraico. Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa. El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Valor numérico de una expresión algebraica. Operaciones con expresiones algebraicas sencillas. Transformación y equivalencias. Operaciones con polinomios en casos sencillos.
Participantes	Individual o por parejas.
Duración	20-25 minutos.
Recursos	Folio con el enunciado para su portafolio y una calculadora.
Referencias	Adaptación tradicional.

ENUNCIADO: Os voy a enseñar un truco para adivinar la edad de cualquier persona menor de 100 años, solo hay que seguir siete pasos.

- Primero: pedir a la persona que escriba en un papel su número de calzado, sin decírnoslo.
- Segundo: que multiplique por 5 ese número.
- Tercero: añade 50 al número.
- Cuarto: el número que tienes multiplícalo por 20.
- Quinto: añade 17 al número resultante.
- Sexto: si todavía no has cumplido años en 2021, suma a tu número 1003. En el caso de que los hayas cumplido, suma a tu número 1003 más 1, que ya eres un año más mayor.
- Séptimo: Resta tu año de nacimiento y dime el número que te queda.

Desarrollo de los contenidos.

Definición 1: un monomio es un producto de números reales e indeterminadas. El coeficiente de un monomio es el número real que multiplica a la indeterminada, o indeterminadas; la indeterminada, o indeterminadas conforman la parte literal del monomio.

Definición 2: un polinomio es una expresión construida a partir de la suma de monomios. El grado de un polinomio viene dado por el mayor grado de sus monomios. Un polinomio $P(x)$ de grado n,

$n \in \mathbb{N}$, en la indeterminada x se expresa de la siguiente forma:

$$P(x) = a_n \times x^n + a_{n-1} \times x^{n-1} + \cdots + a_2 \times x^2 + a_1 \times x + a_0$$

Donde el coeficiente $a_i \in \mathbb{R}$ para $0 \leq i \leq n$ y $a_n \neq 0$, es el coeficiente del monomio de grado i.

Definición 3: una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que establece una condición sobre la variable o variables que forman parte de dichas expresiones.

Planteamiento de la actividad

Este problema se plantea en el aula habitual de clase tras la explicación pertinente de los contenidos que se enumeran en la ficha de la actividad. El problema se planteará en el desarrollo de la unidad didáctica 6. Para que los alumnos estén más motivados con la actividad elegiremos a uno de ellos al azar para que haga los pasos del enunciado y todos comprueben que efectivamente, el truco para adivinar la edad funciona.

Primero: pediremos a esa persona que escriba en un papel su número de calzado, que lo enseñe al resto de la clase sin que el profesor lo vea (pongamos de ejemplo que su número de calzado es un 36).

Segundo: pedimos al alumno que multiplique su número de calzado por 5, con lo que el alumno apuntara en su hoja el número 180.

Tercero: el alumno debe añadir 50 al número obtenido, así que escribirá en su hoja el número 230.

Cuarto: debe de multiplicar ese número por 20, así que el número obtenido será el 4.600.

Quinto: el alumno debe sumar 17 a ese número, con lo que se obtiene el número 4617.

Sexto: supongamos que el alumno ha cumplido años en 2021, así que debe de sumar a 4617 el número 1004, obteniendo un total de 5621.

Séptimo: por último, resta su año de nacimiento (supongamos que es 2007) y le pedimos que nos diga el número obtenido, que será el número 3614.

Con ese número, podemos decir a toda la clase que el alumno utiliza el número 36 de calzado y tiene 14 años. Los alumnos no entenderán como hemos podido conocer el número de pie y la edad de esta persona, así que posiblemente pedirán que lo hagamos de nuevo con otro de ellos. Tras hacerlo, les preguntaremos si quieren conocer el truco de esta actividad para que también ellos puedan hacerlo en sus casas.

La solución es sencilla y simplemente tenemos que traducir a lenguaje algebraico los siete pasos del enunciado para poder entender por qué podemos conocer el número de calzado y la edad de cualquier persona de esta manera. Para ello llamaremos x al número de calzado y A a la edad que tiene la persona.

Procedimiento si ha cumplido años en 2021	
Pasos que seguir	**Traducción al álgebra**
Escribe el número de calzado que usas	x
Multiplícalo por 5	$5x$
Añade 50	$5x + 50$
Multiplícalo por 20	$100x + 1000$
Suma 17	$100x + 1017$
Añade 1004	$100x + 2021$
Resta tu año de nacimiento	$100x + 2021 - (2021 - A) = 100x + A$

Procedimiento si no ha cumplido años en 2021	
Pasos que seguir	**Traducción al álgebra**
Escribe el número de calzado que usas	x
Multiplícalo por 5	$5x$
Añade 50	$5x + 50$
Multiplícalo por 20	$100x + 1000$
Suma 17	$100x + 1017$
Añade 1003	$100x + 2020$
Resta tu año de nacimiento	$100x + 2020 - (2020 - A) = 100x + A$

En esta actividad se debe resaltar, para que los alumnos lo comprendan bien, que el año de nacimiento de una persona es el año actual en el que nos encontramos menos la edad que tiene, en el caso de que haya cumplido años en ese mismo año. En el caso de que no haya cumplido años en el año actual, su año de nacimiento es el año anterior al que nos encontramos menos la edad que tiene.

Las dos últimas cifras del resultado es la edad que tiene la persona y las dos primeras cifras es su número de calzado. De esta manera sabemos que $3614 = 100x + A$, Así que x, el número de pie tiene que ser 36 y A, la edad de la persona, 14. Podemos fácilmente comprobar que $100 \times 36 + 14 = 3614$.

B. La herencia de los camellos

Bloques	1. Contenidos comunes. 2. Números y álgebra
Contenidos	Planificación del proceso de resolución de problemas: análisis de la situación, selección y relación entre los datos y aplicación de estrategias de resolución adecuadas, análisis de soluciones y, en su caso, ampliación del problema inicial. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de varios números naturales. Divisibilidad de los números naturales. Fracciones en entornos cotidianos. Fracciones equivalentes. Simplificación y amplificación de fracciones. Representación, ordenación y operaciones.
Participantes	Individual.
Duración	20-25 minutos.
Recursos	Folio con el enunciado para su portafolio.
Referencias	J. de Mello y Souza, *El hombre que calculaba* (1938).

ENUNCIADO: Cerca de un albergue de caravanas, Beremiz y su acompañante observaron cómo unos hombres que estaban rodeados por 35 camellos discutían. Beremiz se acercó para intentar comprender su problema y ayudarlos. Uno de ellos explicó que eran tres hermanos y que habían recibido como herencia esos 35 camellos. Según la voluntad de su padre, la mitad corresponden al hermano mayor, la tercera parte al hermano mediano y la novena parte al pequeño. Les resulta imposible llegar a un acuerdo ya que la mitad de 35 es 17,5 al igual que un tercio de 35 también es un número decimal y la novena parte tampoco es exacta.

Beremiz se ofreció a hacer justicia con dicho reparto y unió el camello de su acompañante a esos 35 para realizar el reparto, sumando un total de 36 camellos a repartir:

- El hermano mayor debía recibir la mitad de 35, es decir, 17,5. Entonces recibirá la mitad de 36 y, por tanto, 18. Nada puede reclamar puesto que sale ganando con esta división.

- El hermano mediano debía recibir un tercio de 35, es decir, 11 y un poco más. Con este reparto recibirá un tercio de 36, es decir, 12 camellos. Tampoco podrá protestar porque también sale ganando con esta división.

- El hermano pequeño tenía que recibir la novena parte de 35, que son 3 camellos y parte de otro. Al recibir un noveno de 36 le da 4 camellos, ganando así también en dicho reparto.

Con esta ventajosa división que ha hecho Beremiz y que ha favorecido a todos los hermanos quedando satisfechos, le corresponden 18 camellos al mayor, 12 al mediano y 4 al pequeño, que son un total de 34 camellos. De los 36 camellos sobran dos, uno se lo devuelve a su acompañante y el otro se lo queda él por haber resuelto el reparto con satisfacción para todos los hermanos. ¿Dónde está la clave de esta historia? ¿Por qué ahora sobran camellos si antes faltaban?

Desarrollo de los contenidos.

Definición 1: el mínimo común múltiplo de dos números $m.c.m.(a,b)$, es el menor de sus múltiplos comunes. Si $a = {a_1}^{r_1} \times {a_2}^{r_2} \times {a_3}^{r_3} \times \dots \times {a_n}^{r_n}, n \in \mathbb{N}$ y $b = {b_1}^{s_1} \times {b_2}^{s_2} \times {b_3}^{s_3} \times \dots \times {b_t}^{s_t}$, $t \in \mathbb{N}$, siendo a_i y b_i números primos y los r_i y s_i números naturales, el mínimo común múltiplo de a y b, $m.c.m.(a,b)$, es el producto de los números primos comunes y no comunes de su factorización elevados a su máximo exponente.

Definición 2: una fracción es un cociente de dos números enteros a y b, que se representa $\frac{a}{b}$. El denominador, b, indica las partes iguales en la que se divide la unidad. El numerador, a, indica las partes que se toman de la unidad.

Definición 3: una fracción menor que la unidad es aquella en la que el numerador es menor que el denominador.

Definición 4: dos fracciones son equivalentes si representan la misma cantidad. Si se multiplican o dividen el numerador y el denominador de una fracción por el mismo número, se obtiene una fracción equivalente.

Propiedad 1. Suma y resta de fracciones: para sumar o restar dos fracciones se buscan sus fracciones equivalentes con el mismo denominador. El nuevo denominador de las fracciones equivalentes será el mínimo común múltiplo de sus denominadores. Después, se suman o restan los nuevos numeradores.

Planteamiento de la actividad

Este problema se plantea en el aula habitual de clase tras la explicación pertinente de los contenidos que se enumeran en la ficha de la actividad. Se realizará la actividad en el desarrollo de la unidad didáctica 3. Para entender qué está pasando en el reparto de los camellos, los alumnos deben de sumar las fracciones que determinan el reparto de la herencia, lo lógico es que la fracción resultante sea la unidad, de este modo:

$$m.c.m.(2,3,9) = 3^2 \times 2 = 18$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{9+6+2}{18} = \frac{17}{18}$$

El alumno observará que la fracción obtenida es una fracción menor que la unidad, con lo que no se están repartiendo el total de los camellos, los camellos que se repartían sumaban un total de:

$$\frac{17}{18} \times 35 = 33{,}0\overline{5}$$

Entonces es lógico que en el reparto que realizaban los tres hermanos no saliera un número exacto de camellos. Beremiz se dio cuenta rápido de esto ya que calculó una de las fracciones equivalentes de diecisiete dieciochoavos:

$$\frac{17}{18} \times \frac{2}{2} = \frac{34}{36}$$

Entonces Beremiz pensó que, si añadía un camello más a los 35 que formaban la herencia, repartiría entre los 3 hermanos un total de 34 camellos de los 36. Entonces, podría recuperar el camello que ha añadido y además reclamar el camello que sobraba por resolver el reparto de una forma en la que todos los hermanos quedasen satisfechos.

Con sus habilidades matemáticas Beremiz consiguió ser también un heredero del difunto padre de los 3 hermanos correspondiéndole $\frac{1}{35}$ de los camellos a repartir.

C. La ampliación de la piscina.

Bloques	1. Contenidos comunes. 3. Geometría.
Contenidos	Reflexión sobre los resultados. Figuras planas elementales. Cálculo de áreas. Revisión de los triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Justificación geométrica y aplicaciones.
Participantes	Individual.
Duración	20-25 minutos.
Recursos	Folio con el enunciado y la ilustración 20 para su portafolio y una regla sin graduar.
Referencias	Adaptación tradicional.

ENUNCIADO: Una vez llegado el verano, Roberto y su familia se disponen a pasar las vacaciones en la casa familiar del pueblo. La casa tiene una pequeña piscina cuadrada para poder refrescarse. Este año también van a pasar el verano la hermana de Roberto y su familia, así que la piscina se les va a quedar pequeña para todos. El terreno de la casa familiar no es muy grande, aun así, Roberto y su hermana han pensado que si tuvieran una piscina el doble de grande todos podrían disfrutar de ella sin molestarse. A Roberto y a su hermana les encanta tener una piscina cuadrada así que quieren ponerse manos a la obra y construir en su terreno una piscina cuadrada que sea el doble de grande. ¿Eres capaz de dibujar la nueva piscina dentro del terreno con la única ayuda de una regla sin graduar?

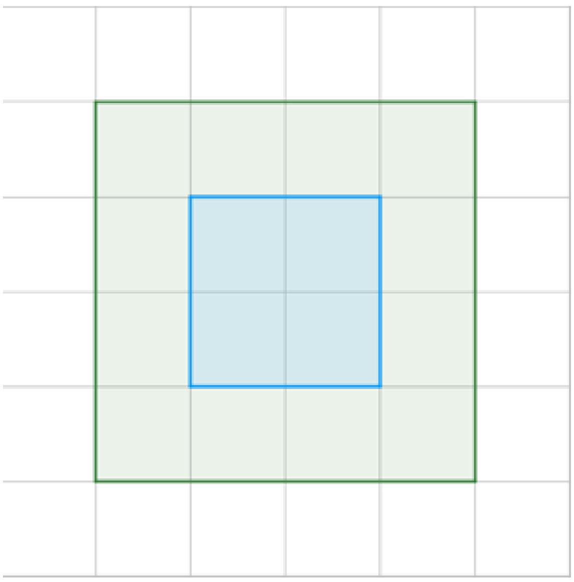


Ilustración 20.- La ampliación de la piscina.

Desarrollo de los contenidos.

Definición 1: Un triángulo es rectángulo si tiene un ángulo recto.

Teorema 1. Teorema de Pitágoras: En todo triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre las longitudes de los catetos.

Demostración: Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo, donde $\hat{A}$, es el ángulo recto. Sea P el pie de la perpendicular a BC por A. No puede ocurrir que P coincida con B o con C, o de lo contrario el triángulo tendría dos ángulos rectos. Además, P ha de estar en el segmento $\overline{BC}$, pues si, por ejemplo, B estuviera entre P y C, los ángulos $\widehat{PBA}$ y $\widehat{CBA}$ serían adyacentes. Pero, el primero forma parte del triángulo ΔPBA, que tiene un ángulo recto en P, luego $\widehat{PBA}$ sería agudo, y $\widehat{CBA}$ sería obtuso, lo cual es imposible. Por lo tanto, P está ciertamente en $\overline{BC}$.

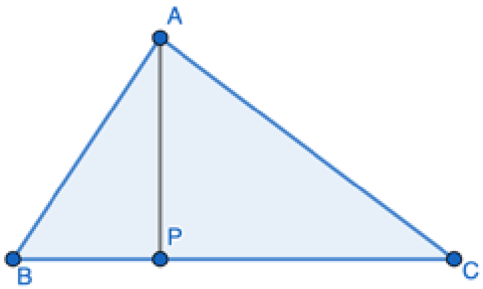


Ilustración 21.- Triángulo rectángulo.

El triángulo rectángulo $\triangle PAB$ comparte un ángulo agudo con el triángulo, también rectángulo $\triangle ABC$, luego tienen dos – y por consiguiente tres – ángulos iguales, es decir, son semejantes. Así pues:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

y por consideraciones análogas sobre el triángulo ABP concluimos que:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

Por lo tanto:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC} \times \overline{BP} \times \overline{BC} \times \overline{CP} = \overline{BC} \times (\overline{BP} + \overline{CP}) = \overline{BC}^2$$

Planteamiento de la actividad.

Este problema se plantea en el aula habitual de clase tras la explicación pertinente de los contenidos que se enumeran en la ficha de la actividad. Iremos acompañando al alumno en la resolución de éste. Primero se debe plantear al alumno cuál es el área de la piscina actual y cuál es el área del terreno; el cálculo de áreas de figuras planas son contenidos de la unidad didáctica 9. Geometría plana.

$$A_{Piscina} = 2\,ud \times 2\,ud = 4\,ud^2$$
$$A_{Terreno} = 4\,ud \times 4\,ud = 16\,ud^2$$

A continuación, se pregunta al alumnado cuánto debe de medir el área de la nueva piscina:

$$A_{Nueva\ piscina} = 2 \times A_{Piscina} = 2 \times 4\,ud^2 = \ 8\,ud^2$$

Después se propone al alumnado dibujar con lapicero en la *ilustración 20* un cuadrado que ocupe esa área. Seguramente presenten dificultades para encontrar a la primera dicho cuadrado, así que les pediremos que calculen cuánto debe de medir el lado de la nueva piscina.

$$L_{Nueva\ piscina} \times L_{Nueva\ piscina} = A_{Nueva\ piscina}$$
$${L_{Nueva\ piscina}}^2 = 8\,ud^2$$
$$L_{Nueva\ piscina} = \sqrt{8}\,ud$$

De esta manera pueden comprobar que la longitud del lado de la nueva piscina se encuentra entre 2 y 3 unidades. Por último, les volveremos a exponer el enunciado del *Teorema de Pitágoras* y pedirles que dibujen la hipotenusa de un triángulo rectángulo formado por dos catetos que tengan cada uno la longitud de la antigua piscina.

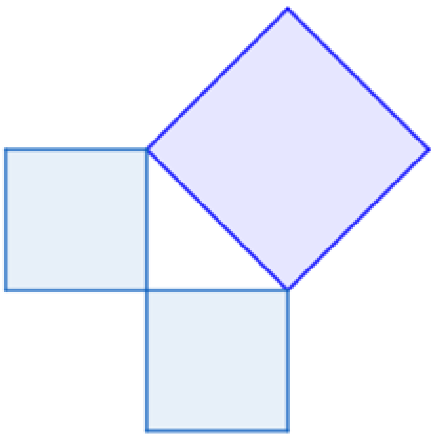


Ilustración 22.- Triángulo rectángulo dibujado

Al utilizar como catetos la longitud del lado de la piscina actual, sabemos que el área del cuadrado que se dibuja sobre la longitud de la hipotenusa tiene un área total de $4\,ud + 4\,ud = 8\,ud^2$. Si intentan utilizar uno de los lados de la piscina actual sin desplazar como cateto, la nueva piscina se extenderá más allá del terreno disponible.

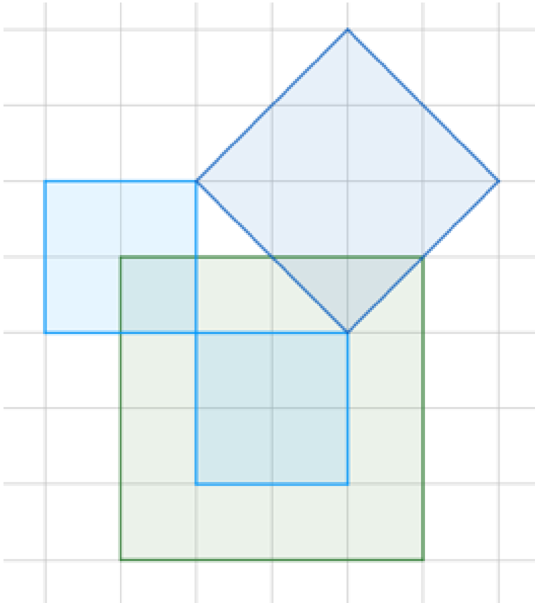


Ilustración 23.- Dibujo de la nueva piscina fuera del terreno

Para poder dibujar la nueva piscina dentro del terreno tendrán que darse cuenta de que la longitud de su lado, que es $\sqrt{8}\,ud$, es exactamente lo que mide la diagonal de un cuadrado de área $4\,ud^2$. Entonces, si utilizan la diagonal de un cuadrado de área $4\,ud^2$ situado en una de las esquinas del terreno podrán dibujar la nueva piscina en el interior del terreno.

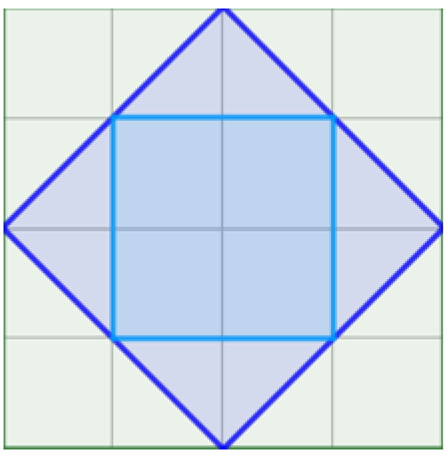


Ilustración 24.- Las dos piscinas en el interior del terreno.

D. Cubo Soma.

Bloques	1. Contenidos comunes. 3. Geometría.
Contenidos	Elección de las estrategias y procedimientos puestos en práctica: construcción de una figura o un esquema; experimentación mediante el método ensayo-error. Poliedros y cuerpos de revolución. Elementos característicos, clasificación. Áreas y volúmenes. Propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros
Participantes	Individual
Duración	30 minutos
Recursos	Folio con el enunciado y unas cuadrículas de 3x3 para su portafolio, un tricubo y seis tetracubos con la disposición que se describe en la actividad
Referencias	Diseñado por Piet Hein

ENUNCIADO: ¿Eres capaz de construir un cubo utilizando los siguientes policubos?

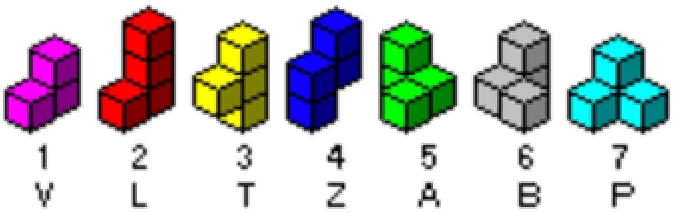


Ilustración 25.- Policubos del Cubo Soma.

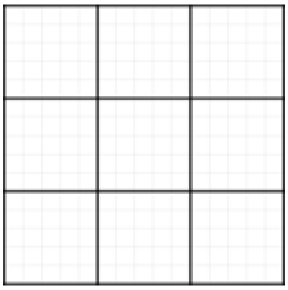


Ilustración 26.- Piso bajo.

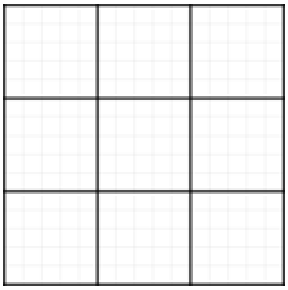


Ilustración 27.- Piso medio.

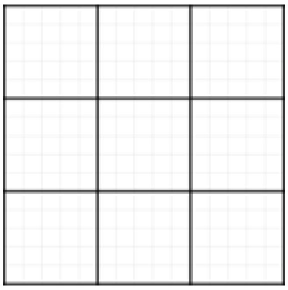


Ilustración 28.- Piso alto.

Desarrollo de los contenidos.

<u>*Definición 1*</u>*:* un poliedro es un sólido geométrico formado por caras planas. Si todas sus caras son el mismo polígono regular y en cada vértice del poliedro concurre el mismo número de caras, el poliedro se denominará poliedro regular. Algunos de los poliedros regulares más comunes son el tetraedro, el cubo y el octaedro.

<u>Definición 2</u>: el volumen es el espacio que ocupa un cuerpo. Sus unidades se pueden medir, entre otras formas, en litros (l) o unidades de longitud cúbicas, como el metro cúbico (m^3).

Planteamiento de la actividad.

Este rompecabezas diseñado por Piet Hein en 1936 fue muy popular gracias a la difusión que de él hizo Martin Gardner en sus artículos divulgativos sobre la matemática recreativa. Este puzle tiene muchas aplicaciones didácticas relacionadas con el espacio en tres dimensiones. J.A. Rupérez y M. García (2010) enunciaron algunas ventajas educativas que se producen al introducir el Cubo Soma en el aula.

"*Nuestros alumnos desarrollan sus intuiciones espaciales hasta conseguir un buen concepto del espacio en tres dimensiones. Practican el proceso de resolución de problemas que les hemos enseñado, respetando sus cuatro fases. Aprenden a utilizar la manipulación de modelos y a usar la estrategia de Ensayo y Error Dirigido. Aprenden conceptos geométricos interesantes en relación con los poliedros y con los movimientos en el espacio. Desarrollan las Competencias Básicas en su totalidad. Mejoran sus capacidades, especialmente la organización, el orden, la sistematicidad y la exhaustividad. Aprenden a utilizar códigos para expresar los problemas y sus soluciones. Mejoran el uso de gráficos y diagramas en el trabajo y en la presentación de los mismos. Y todo ello con agrado, pues están recreando matemáticas de forma lúdica. ¿Qué más queremos?*"

Este puzle se plantea en el aula habitual de clase como introducción a la unidad didáctica 11, ya que con este rompecabezas pueden desarrollar el sentido espacial y el concepto del espacio en tres dimensiones. Primero dejaremos a los alumnos que intenten encontrar por si mismos una de las 240 soluciones posibles que existen. Después, les indicaremos que en la hoja que les proporcionamos hay unas cuadriculas para representar en dos dimensiones los pisos del Cubo Soma, se les indica que deben dibujar ahí como obtener la solución y después probarlo con el cubo.

2	2	5
2	5	5
2	6	6

Ilustración 29.- Piso bajo (2).

4	3	5
4	4	6
7	4	6

Ilustración 30.- Piso medio (2).

3	3	3
7	1	1
7	7	1

Ilustración 31.- Piso alto (3).

También se puede ir guiando a los alumnos en una de las formas de resolverlo, proponiéndoles que primero intenten encontrar la forma de completar la base o el piso bajo del cubo. Una vez hayan encontrado la solución se les puede introducir el concepto de volumen preguntando cuál es el volumen total del poliedro regular formado:

$$V = 6 \times 4 + 3 = 27\ ud^3$$

<u>Variaciones</u>: se puede pedir que realicen otro tipo de figuras que les podemos indicar en la ficha que les damos, como una cama, un túnel o un castillo, no solo tiene por qué ser el cubo 3x3.

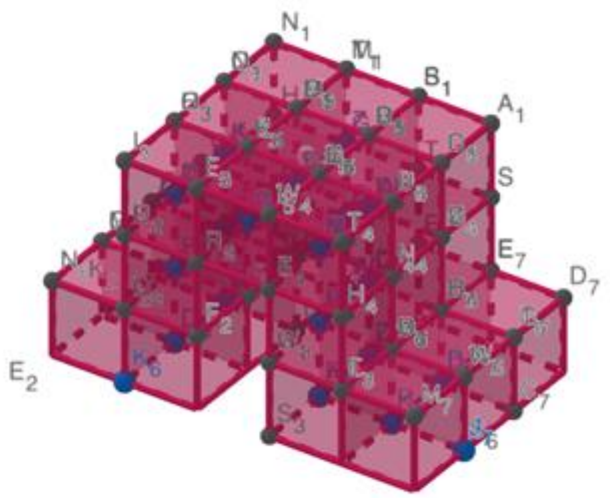


Ilustración 32.- Variación túnel.

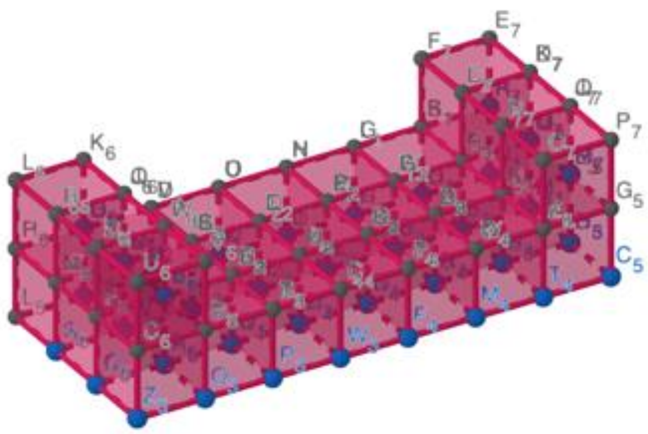


Ilustración 33.- Variación cama.

E. Encontrar el tesoro.

Bloques	1. Contenidos comunes. 4. Funciones.
Contenidos	Expresión verbal y escrita en matemáticas. Coordenadas cartesianas: representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados.
Duración	Partidas de entre 5 y 10 minutos.
Participantes	Tres
Recursos	Folio con el enunciado y la ilustración 25 para su portafolio, y fichas de parchís de colores rojo, verde, azul y amarillo.
Referencias	Adaptación de la actividad propuesta por F. Corbalán en *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato* (1998).

ENUNCIADO: Para poder jugar, tenéis que juntaros en grupos de 3 alumnos. Una vez estéis distribuidos, tenéis que asignar distintos roles: uno de vosotros será un pirata y los otros dos serán buscadores de tesoros. El pirata tendrá un mapa donde esconderá un tesoro, representado por una ficha roja, en una de las coordenadas de la isla del mapa. Este mapa no podrá ser visto por los buscadores del tesoro. Los buscadores de tesoro tendrán un mapa idéntico compartido donde, irán eligiendo alternativamente coordenadas del mismo para buscar el tesoro.

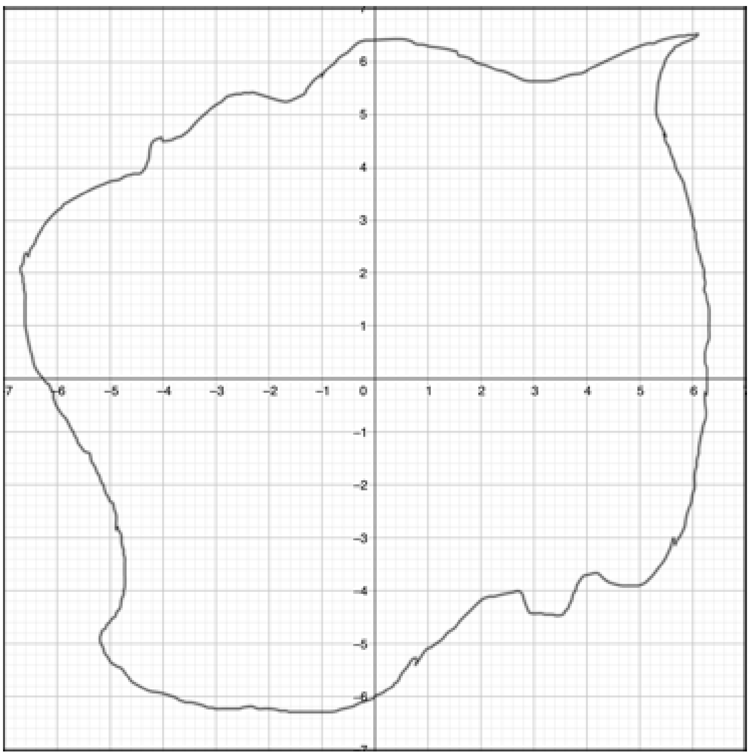


Ilustración 34.- Mapa del tesoro escondido.

Si uno de los dos buscadores elige una de las 8 coordenadas que se sitúan en el primer cuadrado que rodea al tesoro, el pirata pondrá en esa coordenada una ficha verde. Si uno de los dos buscadores elige una de las 16 coordenadas que se sitúan en el segundo cuadrado que rodea al tesoro, el pirata pondrá en esa coordenada una ficha azul. Si uno de los dos buscadores elige una de las 24 coordenadas que se sitúan en el tercer cuadrado que rodea al tesoro, el pirata pondrá en esa coordenada una ficha negra. Si elige una coordenada que no se encuentra entre las anteriores, no se colocará ninguna ficha en el mapa. El buscador que acierte la coordenada donde se encuentra el tesoro gana el juego.

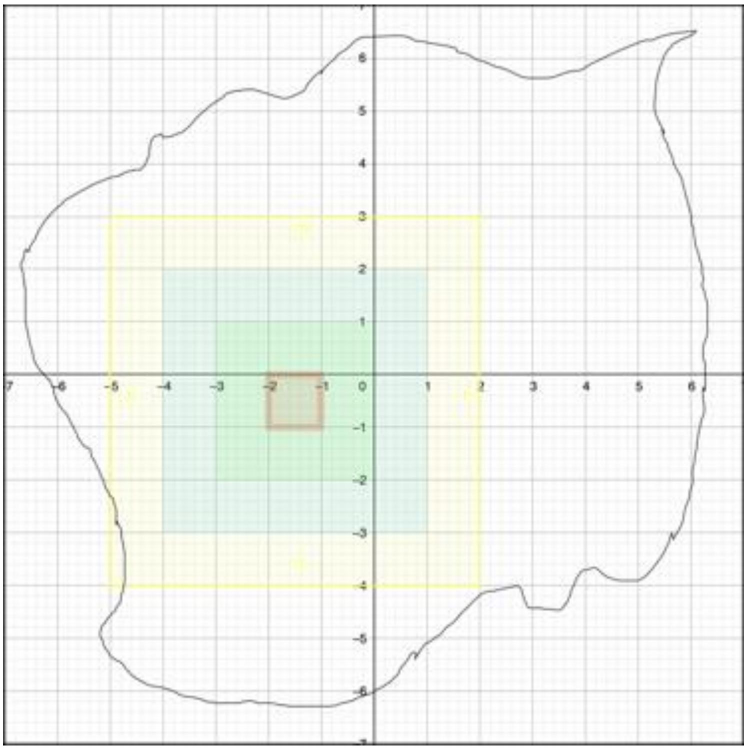


Ilustración 35.- Tesoro ubicado en (-2,-1) con primer, segundo y tercer cuadrado dibujado.

Desarrollo de los contenidos.

<u>*Definición 1*</u>*:* Un sistema de referencia cartesiano está formado por dos rectas numéricas perpendiculares, llamadas ejes, que se cortan en un punto llamado origen. Al eje horizontal se le denomina eje de abscisas y al eje vertical, eje de ordenadas.

<u>*Definición 2*</u>*:* Las coordenadas de un punto A son un par ordenado de números (x, y), siendo x la primera coordenada, que llamamos abscisa. La coordenada x nos indica la distancia a la que se

encuentra dicho punto del eje vertical. La coordenada y, llamada ordenada, nos indica la distancia a la que se encuentra dicho punto del eje horizontal. Si el punto se encuentra a la izquierda del eje vertical o debajo del eje horizontal, indicaremos la distancia con un número negativo.

Planteamiento de la actividad.

Se trata de un juego de procedimiento conocido, ya que la dinámica de éste es muy similar al popular juego de hundir la flota o de los barquitos. Con este juego se pretende familiarizar al alumnado con la representación de puntos en un sistema de ejes coordenados, ya que en ocasiones el alumnado de este curso presenta dificultades para ello.

Además, debido a la inclusión de fichas de parchís en la actividad, que representan a que distancia se encuentra el tesoro, los alumnos pueden desarrollar estrategias de localización de coordenadas del plano conociendo la información de la distancia que le separa de la coordenada que busca.

Este juego se realizaría en una de las primeras sesiones de la unidad didáctica 12, tras explicar y ejemplificar al alumnado los contenidos sobre coordenadas cartesianas. Este juego puede tener distintas variantes:

- Tamaño del mapa: el mapa puede ser más pequeño las primeras partidas y más tarde proporcionar mapas de tamaño más grande cuando los alumnos entiendan la dinámica del juego completamente.
- Tesoro escondido: es posible esconder más de un tesoro y que gane el jugador que más tesoros haya encontrado o variar el tamaño del tesoro, haciendo que ocupe más de una coordenada, como en el juego de hundir la flota.
- Reglas restrictivas: también se puede asignar a cada buscador un número de vidas, que irán descendiendo si cuando elige una coordenada el pirata no coloca en ella una de las fichas de parchís. Cuando un jugador se queda sin vidas pierde. De esta manera también se da la opción de que el pirata pueda ganar el juego.

F. ¿Quién llegará antes?

Bloques	1. Contenidos comunes. 4. Funciones.
Contenidos	Utilización de medios tecnológicos en el aprendizaje: elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos. Representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados. El concepto de función: variable dependiente e independiente. Formas de presentación Análisis y comparación de gráficas. Funciones lineales. Cálculo, interpretación e identificación de la pendiente de la recta.
Participantes	Individual.
Duración	30 minutos.
Recursos	Folio con el enunciado y una cuadrícula con unos ejes cartesianos para su portafolio.
Referencias	S. Encinas. Apuntes de la asignatura *Modelos matemáticos en Educación Secundaria*, Máster en profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de idiomas (2021).

ENUNCIADO: Dos personas van de un punto cualquiera a otro, la primera, anda la mitad del camino y corre la otra mitad. La segunda, anda la mitad del tiempo y corre la otra mitad. Si ambos andan a la misma velocidad y corren a la misma velocidad ¿Quién llega antes al punto donde van?

Desarrollo de los contenidos.

<u>*Definición 1*</u>*:* una función es una relación o correspondencia entre dos conjuntos de forma que a cada elemento del conjunto inicial (variable independiente) le corresponda un único elemento del conjunto final (variable dependiente). Se suele representar de la siguiente forma:

$$y = f(x)$$

<u>*Definición 2*</u>*:* la gráfica de una función f es la representación en unos ejes de coordenadas de todos los pares de la forma $(x, f(x))$, siendo x un elemento del conjunto inicial.

<u>*Definición 3*</u>*:* una función lineal es aquella que tiene por ecuación general $y = mx + n$. Una función lineal corta al eje Yen el punto $(0, n)$. En este tipo de funciones, n recibe el nombre de ordenada en el origen y m el de pendiente. El valor de n y m son dos números reales. La pendiente mide la inclinación de la recta respecto del eje de abscisas.

Planteamiento de la actividad.

Este problema se plantea en el aula habitual de clase tras la explicación de los contenidos pertenecientes a la unidad didáctica 12: funciones y los contenidos sobre funciones lineales de la unidad didáctica 13: funciones afines. Si clasificáramos este problema dentro de la clasificación de actividades o tareas matemáticas de Smith y Stein (1998)[22], se encontraría dentro de la categoría 4. Hacer matemáticas. Este problema puede servir para que los alumnos se diviertan un poco pensando una solución y argumentando, desde su punto de vista, si la persona que llega antes es la primera o la segunda.

Para facilitar la comprensión de este problema, lo primero que se debe hacer es pedir al alumnado que intenten ejemplificar este problema con datos, es decir, que supongan una velocidad de andar (v_a), una velocidad de correr (v_c) y una distancia a recorrer (d) para resolverlo con esos datos.

Por ejemplo, un alumno puede tomar los siguientes datos: $v_a = 6\frac{km}{h}$, $v_c = 10\frac{km}{h}$, y $d = 20\ km$. Si la primera persona anda la mitad del camino significa que recorrerá 10 kilómetros a una velocidad de $6\frac{km}{h}$ y los otros 10 kilómetros a una velocidad de $10\frac{km}{h}$. Por lo tanto, el tiempo que tardará en recorrer dicha distancia (t_1) es el siguiente:

$$t_1 = \frac{10\ km}{6\frac{km}{h}} + \frac{10\ km}{10\frac{km}{h}} = 2,\overline{6}\ h$$

Por otro lado, la segunda persona anda la mitad del tiempo que tardan en recorrer dicha distancia, $v_a = 6\frac{km}{h}$, y corre la otra mitad, $v_c = 10\frac{km}{h}$. Es decir, tarda el mismo tiempo en recorrer la distancia que si fuese a una velocidad constante que fuera la media entre la velocidad de andar y la velocidad de correr. Por lo tanto, el tiempo que tarda en recorrer dicha distancia (t_2) es el siguiente:

$$t_2 = \frac{20\ km}{\frac{6\frac{km}{h} + 10\frac{km}{h}}{2}} = 2,5\ h$$

[22] La **clasificación Smith y Stein (1998)** es una clasificación de actividades atendiendo al nivel de demanda cognitiva. Se distinguen 4 categorías dentro de esta clasificación: 1. Memorización. 2. Procedimientos sin conexión. 3. Procedimientos con conexión. 4. Hacer matemáticas. Esta clasificación ordena las categorías de menor a mayor nivel de demanda cognitiva, siendo las actividades de hacer matemáticas las que mayor nivel de demanda cognitiva precisan.

Por lo tanto, esta persona anduvo un total de $d_a = \frac{2,5\ h}{2} \times 6\,\frac{km}{h} = 7,5\ km$ y corrió una distancia total de $d_c = \frac{2,5\ h}{2} \times 10\,\frac{km}{h} = 12,5\ km$.

Otra forma de conocer el tiempo que tarda la segunda persona en realizar el recorrido es calcular la distancia recorrida andando y corriendo de esta persona, igualando el tiempo que emplea en andar y el tiempo que emplea en correr, ya que tiene que ser el mismo:

$$t_2 = t_a + t_c$$
$$t_a = t_c$$
$$\frac{d_a}{6\,\frac{km}{h}} = \frac{d_c}{10\,\frac{km}{h}}$$
$$\frac{d_a}{6\,\frac{km}{h}} = \frac{20\ km - d_a}{10\,\frac{km}{h}}$$
$$d_a = 7,5\ km$$
$$d_c = 20 - d_a = 12,5\ km$$

Por lo tanto:

$$t_2 = \frac{7,5\ km}{6\,\frac{km}{h}} + \frac{12,5\ km}{10\,\frac{km}{h}} = 2,5\ h$$

Vemos que en este caso la persona que corre la mitad de tiempo y anda la otra mitad es la que antes llega. Pero, ¿sucederá esto siempre? Dibujar la gráfica de la distancia recorrida en función del tiempo de ambas personas puede ayudar a encontrar la solución.

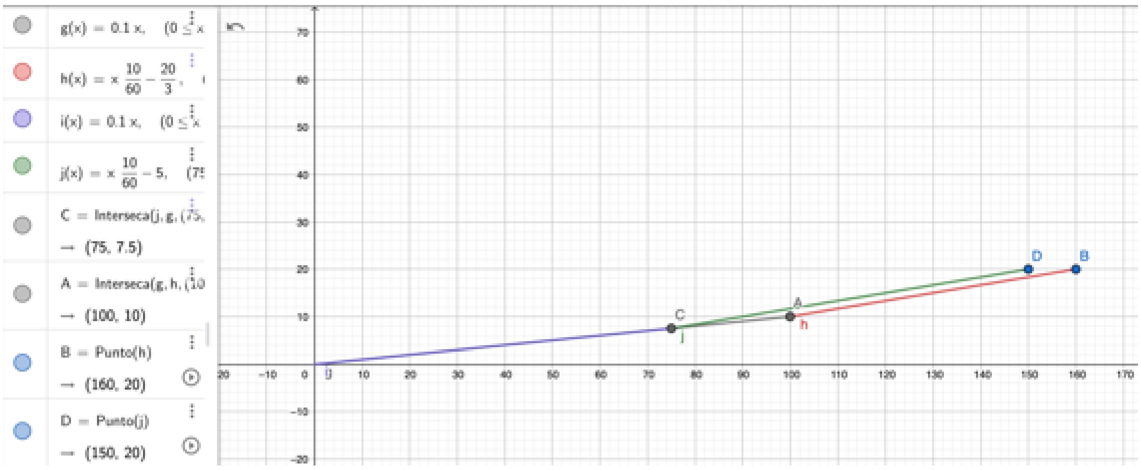


Ilustración 36.- Representación gráfica del problema.

En este caso se ha representado en el eje de abscisas el tiempo en minutos y en el eje de ordenadas los kilómetros recorridos. La trayectoria de ambas personas viene dada por una función a trozos formada por dos ecuaciones lineales. Podemos observar que el recorrido de la primera persona está representado por los segmentos $\overline{AO}$ y $\overline{BA}$. Claramente se observa cómo esta persona recorre los 10 primeros kilómetros a una velocidad de $6\,\frac{km}{h}$, tardando un total de 100 minutos y los 10 kilómetros restantes a una velocidad de $10\,\frac{km}{h}$, empleando 60 minutos en recorrerlo.

La trayectoria de la segunda persona viene representada por los segmentos $\overline{CO}$ y $\overline{DC}$. En este caso, la segunda persona empieza andando a la vez con la primera y lo hace hasta que pasan 75 minutos, momento en el que ha recorrido 7,5 kilómetros. En ese momento se separa de la primera persona y recorre los 12,5 kilómetros restantes a una velocidad de $10\,\frac{km}{h}$, tardando otros 75 minutos en recorrer dicho espacio. Se puede observar que como ambas personas andan a la misma velocidad y corren también a la misma velocidad, las pendientes formadas por los segmentos $\overline{AO}$ y $\overline{C0}$, tienen la misma pendiente, al igual que también tienen la misma pendiente los segmentos $\overline{BA}$ y $\overline{DC}$.

Podemos generalizar para la persona que anda la mitad del tiempo y corre la otra mitad lo siguiente, ya que $v = d \times t$:

$$t_a = t_c$$
$$\frac{d_a}{v_a} = \frac{d_c}{v_c}$$

Esto quiere decir que siempre que la velocidad de correr sea mayor que la velocidad de andar, $v_c > v_a$, que es algo que sucede siempre, ya que la velocidad a la que una persona corre siempre es mayor que a la que anda, la distancia que corre la segunda persona siempre será mayor que la distancia que anda, $d_c > d_a$.

Como la distancia total que recorren ambos es la suma de la distancia que anda y la distancia que corre, $d_a + d_c = d$, y en el caso de la primera persona, la distancia andada es la mitad de la distancia total que recorre, $d_a = \frac{1}{2}d$, siempre llegará antes a su destino la segunda persona, que es la que anda la mitad del tiempo y corre la otra mitad.

G. La probabilidad del jaque en el ajedrez.

Bloques	1. Contenidos comunes. 5. Estadística y probabilidad.
Contenidos	Planificación del proceso de resolución de problemas. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace en experimentos sencillos.
Duración	15-20 minutos.
Participantes	Individual.
Recursos	Folio con el enunciado para su portafolio, un tablero de ajedrez, una torre y un rey del color opuesto. Puede utilizarse en formato físico o formato digital.
Referencias	Adaptación tradicional.

ENUNCIADO: ¿Qué probabilidad crees que existe de que una torre dé jaque a un rey si solo están esas dos piezas en el tablero?

Desarrollo de los contenidos.

Definición 1: un caso es cada uno de los resultados que pueden obtenerse al realizar una experiencia aleatoria.

Definición 2: el espacio muestral es el conjunto de todos los casos que pueden ocurrir en una experiencia aleatoria

Definición 3: un suceso es un subconjunto extraído del espacio muestral. Los casos son sucesos individuales.

Definición 4: La probabilidad de un suceso aleatorio $P(S)$ es el grado de confianza que se tiene de que un suceso ocurra. Se expresa mediante un número comprendido entre 0 y 1. Si $P(S)$ es próximo a 0, el suceso es poco probable. Si $P(S)$ es próximo a uno, el suceso es muy probable.

Teorema 1. Regla de Laplace: La probabilidad de un suceso A, $P(A)$, es el cociente entre el número de casos favorables al suceso y el número de casos posibles.

$$P(A) = \frac{Números\ de\ casos\ favorables\ al\ suceso\ A}{Número\ de\ casos\ posibles}$$

Planteamiento de la actividad.

Para este problema se precisan unos conocimientos muy básicos de ajedrez. Entre otros, se necesita saber lo siguiente: 1. El ajedrez es un juego de dos jugadores en el que cada uno dispone de 16 piezas móviles colocadas en un tablero. 2. Una pieza amenaza a otra cuando en un movimiento puede capturarla. 3. Dar jaque significa que con una de tus piezas estas amenazando al rey contrario. 4. Las torres en el ajedrez se pueden mover tantas casillas como se quiera en vertical u horizontal.

Se trata de un problema basado en el funcionamiento de un juego de estrategia, el ajedrez. Mediante el ajedrez se pueden desarrollar muchas actividades con las que profundizar en los contenidos de la asignatura de matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria. En este caso vamos a utilizarlo para ejemplificar el concepto de probabilidad en la unidad didáctica 15.

Esta actividad puede desarrollarse de una forma manipulativa empleando el formato físico del ajedrez, proporcionando a cada alumno un tablero y las fichas necesarias, o puede desarrollarse también en el aula de informática a través de cualquier página web que disponga de un editor de tablero.

Tras recordar al alumnado el concepto de probabilidad y la regla de Laplace, les expondremos el enunciado del problema. Algunos alumnos sabrán jugar al ajedrez perfectamente, pero tendremos que explicar los contenidos básicos que expongo al principio del planteamiento de la actividad a todos los alumnos. Empezando por el tablero de ajedrez, que es un tablero que, al estar formado por 8 filas y 8 columnas, tiene un total de 64 casillas.

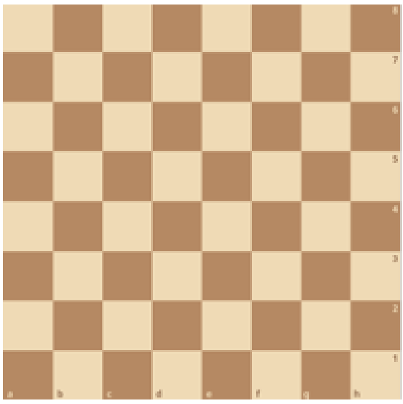


Ilustración 37.- Tablero de ajedrez.

Después introduciremos al alumnado en la mecánica básica del juego, cuando termina y cómo es el movimiento de la torre, mediante un editor de tablero y las siguientes posiciones.

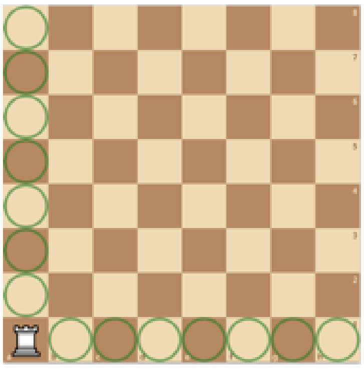


Ilustración 38.- Posición y movimiento de la torre (1).

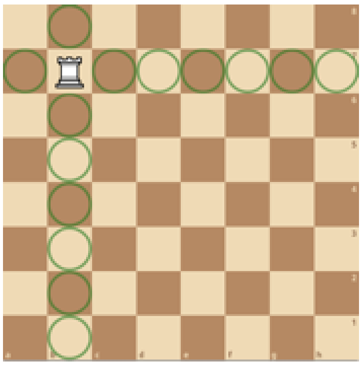


Ilustración 39.- Posición y movimiento de la torre (2).

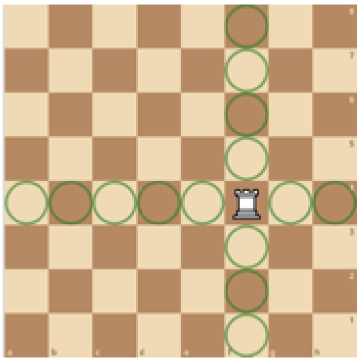


Ilustración 40.- Posición y movimiento de la torre (3).

Aunque algún alumno en esta situación ya vea que la torre estando en cualquier posición puede desplazarse un total de 14 casillas, se deberá guiar a los alumnos en esta actividad preguntándoles cuantos círculos verdes, es decir, posibles movimientos de la torre, hay en cada una de las ilustraciones anteriores.

En este momento les pediremos que escriban la regla de Laplace e intenten determinar el número de casos favorables en los que la torre da jaque al rey y el número de casos posibles en los que el rey y la torre pueden estar en el tablero.

$$P(A) = \frac{Números\ de\ casos\ favorables\ al\ suceso\ A}{Número\ de\ casos\ posibles}$$

El número de casos posibles en los que la torre se puede colocar en el tablero es exactamente, el número de casillas que tiene el tablero, 64. El número de casos posibles en los que después se puede colocar un rey, es el número de casillas libres después de haber situado la torre, es decir, 63. Entonces podemos determinar que:

$$Número\ de\ casos\ posibles = 64 \times 63 = 4.032$$

El número de casos favorables al suceso A, es la cantidad de casillas que amenaza la torre en el tablero, 14, por la cantidad de posibles posiciones de la torre, es decir, 64. Por lo tanto:

$$Número\ de\ casos\ favorables\ al\ suceso\ A = 14 \times 64 = 896$$

Por lo tanto, la probabilidad de que una torre de jaque a un rey en dicha situación es:

$$P(A) = \frac{896}{4.032} = 0{,}2222 = 22{,}22\%$$

H. El feriante ventajista.

Bloques	1. Contenidos comunes. 5. Estadística y probabilidad.
Contenidos	Reflexión sobre los resultados: comprobación e interpretación de las soluciones. Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación. Frecuencia relativa de un suceso y su aproximación a la probabilidad mediante la simulación o experimentación. Sucesos elementales equiprobables y no equiprobables. Espacio muestral en experimentos sencillos.
Duración	25 minutos.
Participantes	Individual
Recursos	Folio con el enunciado y las tablas de la actividad para su portafolio, una bolsa de tela y tres fichas; una de ellas blanca por las dos caras, otra con las dos caras negras y la tercera con una cara blanca y otra negra.
Referencias	Adaptación de la actividad tradicional propuesta por F. Corbalán en *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato (1998).*

ENUNCIADO: Tenemos tres fichas dentro de una bolsa de tela. Una de las fichas es blanca por las dos caras, la segunda es negra por ambas caras y la tercera, tiene una cara blanca y otra negra. Si saco una ficha y solo os muestro una de sus caras ¿es más probable que la otra cara sea blanca, negra, o es igual de probable?

Desarrollo de los contenidos.

Definición 1: un caso es cada uno de los resultados que pueden obtenerse al realizar una experiencia aleatoria.

Definición 2: el espacio muestral es el conjunto de todos los casos que pueden ocurrir en una experiencia aleatoria

Definición 3: la probabilidad de un suceso aleatorio $P(S)$ es el grado de confianza que se tiene de que un suceso ocurra. Se expresa mediante un número comprendido entre 0 y 1. Si $P(S)$ es próximo a 0, el suceso es poco probable. Si $P(S)$ es próximo a uno, el suceso es muy probable.

<u>Definición 4</u>: un espacio muestral es equiprobable si todos los elementos que lo conforman tienen igual oportunidad de ser elegidos y, en consecuencia, tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

<u>Definición 5</u>: un espacio muestral no es equiprobable si todos los elementos que lo conforman no tienen igual oportunidad de ser elegidos y, en consecuencia, no tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

Planteamiento de la actividad.

Este problema se plantea en el aula habitual de clase tras la explicación de los contenidos pertenecientes a la unidad didáctica 15: probabilidad. Con este problema trataremos de ejemplificar a los alumnos un suceso elemental no equiprobable. Se leerá el enunciado en voz alta en el aula y sacaremos una ficha de la bolsa, mostrando una cara a los alumnos y preguntándoles si es más probable que la otra cara sea blanca, negra, o es igual de probable.

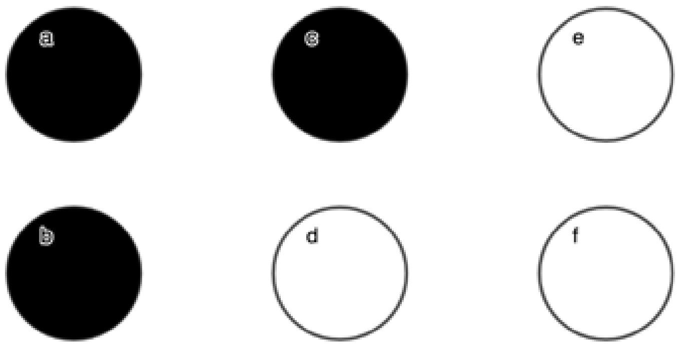


Ilustración 41.- Fichas de "el feriante ventajista".

Realizaremos el siguiente procedimiento dos veces con cada alumno de la clase y después se rellenarán las tablas que expongo a continuación. Primero, sacamos una ficha de la bolsa mostrando la cara a uno de los alumnos, le preguntaremos por el color de la otra cara. Después, daremos la vuelta a la ficha y cuando se muestre apuntaremos en las tablas con una marca que ficha ha salido.

1ª cara blanca	
2º cara blanca	2º cara negra

1ª cara negra	
2º cara blanca	2º cara negra

Si en una clase de Educación Secundaria Obligatoria hay una media de 20 alumnos, el experimento se realizará aproximadamente cuarenta veces. Como hay 3 caras blancas y 3 caras negras, al sacar una ficha y solo ver su cara visible el suceso de que esa cara sea blanca o negra resulta equiprobable. Por lo que, si repetimos este experimento suficientes veces, el número de primeras caras blancas y negras que salen tiende a ser el mismo o muy aproximado. Al realizar este experimento y rellenar la tabla, los alumnos comprobarán que, si la primera cara es blanca, el número de veces que la segunda cara ha sido blanca es mayor que el número de veces que ha sido negra. Por el otro lado, si la primera cara es negra, el número de veces que la segunda cara ha sido blanca es menor que el número de veces que ha sido negra.

¿Por qué sucede esto? A partir de este problema podemos explicar y ejemplificar a los alumnos el concepto de suceso no equiprobable. Si la primera cara es de un color, no hay las mismas posibilidades de que el color de la otra cara sea el mismo o el contrario.

Esto es algo difícil de comprender para muchos, ya que hay 3 caras de color blanco y 3 caras de color negro, pero ellos podrán ver que en la tabla se muestra claramente que no es un suceso equiprobable. Entonces, se expondrá a los alumnos el siguiente ejemplo.

Imaginemos que saco una de las fichas de la bolsa y la cara visible es blanca, vamos a pensar que posibilidades nos podemos encontrar en función de las fichas que tenemos:

- Posibilidad 1: La ficha que hemos sacado tiene visible la cara d (blanca), y la cara oculta es la c (negra).
- Posibilidad 2: La ficha que hemos sacado tiene visible la cara e (blanca), y la cara oculta es la f (blanca).
- Posibilidad 3: La ficha que hemos sacado tiene visible la cara f (blanca), y la cara oculta es la e (blanca).

Con este ejemplo resulta fácil de comprender que la probabilidad de que la cara oculta de la ficha sea del mismo color de la visible es de $\frac{2}{3}$, y, por consiguiente, la probabilidad de que la cara oculta sea del color opuesto al visible es de $\frac{1}{3}$. Este ejemplo también se puede ilustrar de forma análoga suponiendo que la cara visible de la ficha que sacamos de la bolsa es de color negro.

Con esta actividad los alumnos pueden comprobar la probabilidad teórica y experimental del suceso no equiprobable del enunciado. Además, pueden comprobar que el experimental tiende a acercarse al teórico cuanto mayor es el número de veces que se repite el procedimiento.

7. EXPERIENCIA EN EL PERIODO DE PRÁCTICAS

En mi periodo de prácticas docentes en el I.E.S. Virgen de la Calle de Palencia, impartí clase a un curso de 2º de Educación Secundaria Obligatoria. Durante la última semana de docencia del segundo trimestre expliqué a los alumnos de este curso qué es el ajedrez y algunas de las relaciones que guarda con las matemáticas. Este juego de estrategia es muy popular, incluso entre las personas más jóvenes. Esto es debido no sólo a la tradición y antigüedad del juego, sino que también es debido a la popularidad que han desarrollado series de televisión como ***Gambito de dama*** *(The Queen´s Gambit, Scott Frank, EE. UU., 2020)*, que se desarrolla en torno al ajedrez.

En la primera clase que introduje el ajedrez en el aula, pregunté a los alumnos cuántos sabían jugar al ajedrez. Solo la mitad de ellos sabían mover las fichas así que decidí enseñarles a través de las plataformas digitales que utilizan en su tiempo libre, como *YouTube* o *Twitch.tv* a divulgadores de este juego de estrategia que generan un contenido lúdico para personas jóvenes. Utilicé un video de estos divulgadores que enseña a jugar al ajedrez desde cero en 20 minutos. Esta sesión sirvió para acercar el ajedrez a quienes no lo conocían y refrescar cómo se juega a los que sí sabían.

Ilustración 42.- Video tutorial aprende a jugar al ajedrez desde cero.

En la segunda, tercera y cuarta sesión, mostré a los alumnos algunas páginas de internet donde pueden jugar al ajedrez online como *Chess.com* o *Lichess.org*, para animarlos a jugar en su tiempo libre. Después utilicé una herramienta de una de estas páginas que dispone de un editor de tablero y comencé a plantear una serie de problemas matemáticos a través del ajedrez que desarrollé como proyecto final de la asignatura *Innovación docente en matemáticas*, asignatura perteneciente a este máster.

Entre los problemas que desarrollé en el aula está la actividad *G. La probabilidad del jaque en el ajedrez*. Los problemas y actividades que realicé con los alumnos trabajaban contenidos del currículo como:

- El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Valor numérico de una expresión algebraica (**bloque 2. Números y álgebra**).
- Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa (**bloque 2. Números y álgebra**).
- El uso de herramientas informáticas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas (**bloque 3. Geometría**).
- Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Justificación geométrica y aplicaciones (**bloque 3. Geometría**).
- Coordenadas cartesianas, representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados (**bloque 4. Funciones**).
- Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace en experimentos sencillos (**bloque 5. Estadística y probabilidad**).

También pude ampliar contenidos a través de problemas planteados mediante el ajedrez. Un ejemplo de esto fue el planteamiento del problema de *los caminos del caballo*, a través de la pregunta ¿puede el caballo recorrer las 64 casillas del tablero de ajedrez pasando solo una vez por cada casilla? Con este problema introduje a los alumnos qué es un cuadrado mágico, un cuadrado semimágico y quién fue el matemático Leonhard Euler, ya que demostró que sí es posible y expuso una de las soluciones posibles.

Otro problema de ampliación de los contenidos del currículo que planteé es el famoso *problema de las 8 damas*, que consiste en retar a los alumnos en encontrar una posición en el tablero donde estén situadas 8 damas sin que ninguna amenace a otra. Después explique a los alumnos como podemos describir mediante lenguaje algebraico las condiciones necesarias para que se cumplen estas condiciones.

Como se puede observar, también es posible graduar la dificultad de las actividades matemáticas planteadas con el ajedrez y de los contenidos que se exponen. Un ejemplo de ello es el último problema descrito, el *problema de las 8 damas* se puede utilizar para trabajar contenidos tan sencillos como la traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa o el lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones o versionarlo con un total de 1000 damas para ejemplificar problemas tan complicados como el problema del milenio *P versus NP*, que trata sobre la teoría de la complejidad computacional.

En la última sesión, para demostrar a los alumnos que con los conocimientos que tenían eran capaces de jugar una partida completa al ajedrez, jugué una partida simultánea con todos ellos. Bajo mi punto de vista, la experiencia en el aula fue muy buena, los alumnos estaban encantados de haber utilizado el ajedrez en la clase de matemáticas y muchos de ellos parecían predispuestos a seguir jugando durante las vacaciones escolares de Semana Santa.

Ilustración 43.- Partida de ajedrez simultánea con los alumnos de 2º ESO.

Tras el inicio del tercer trimestre lectivo, mi tutor de las prácticas docentes del instituto, Diego Alonso Santamaría, me escribió en tres ocasiones a raíz de mi intervención en el aula con el ajedrez.

- La primera de ellas fue para contarme que los alumnos de 2º de la ESO le habían pedido el primer día lectivo del tercer trimestre, el 6 de abril, en la clase de matemáticas más problemas relacionados con el ajedrez y jugar al ajedrez un rato.

- La segunda fue unas semanas más tarde, me escribió para contarme que uno de los alumnos de dicha clase había acudido al instituto con un libro de ajedrez sobre posiciones y fundamentos del juego. Además, me preguntó por libros de ajedrez o de matemáticas en el ajedrez para recomendar a dicho alumno.
- La tercera vez que se puso en contacto conmigo fue porque un alumno de clase quería ponerse en contacto conmigo para apuntarse a algún club de ajedrez de la ciudad y así poder mejorar y competir más adelante.

Con el paso del tiempo creo que llevar el ajedrez a la clase de las matemáticas sirvió no solo para que varios alumnos comprendiesen la relación que guarda este juego con las matemáticas, sino que también sirvió para mejorar la actitud de los alumnos, su motivación e inspirar a alguno de ellos a seguir profundizando en este fantástico juego de estrategia.

8. CONCLUSIONES

Parece razonable afirmar que la matemática recreativa es un buen recurso didáctico para la enseñanza formal de las matemáticas. No sólo por las ventajas que presenta su uso en el alumnado, como una posible mejora en el autoconcepto matemático y en la actitud que tiene hacia la asignatura de las matemáticas, sino también porque este recurso didáctico puede ser una puerta a que los alumnos puedan aprender mientras se divierten.

La matemática recreativa parece un recurso didáctico adecuado para la enseñanza matemática en la Educación Secundaria Obligatoria. No solo porque a través de ella podemos trabajar y desarrollar las competencias clave en las que se cimenta esta etapa educativa, sino porque a través de ella también se puede exponer, trabajar y desarrollar muchos de los contenidos matemáticos que se establecen en el currículo de la ESO.

Además, debido a la relación que guardan la matemática recreativa y la historia de las matemáticas, de la que también he hablado en este trabajo de fin de máster, también resulta un recurso excepcional para introducir en el aula partes de la historia de las matemáticas, ampliando así los contenidos del currículo.

A raíz del encaje de la matemática recreativa en el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria, de cómo su uso puede ayudar a la adquisición y el desarrollo de las competencias clave de esta etapa, de las ventajas que presenta su uso en la educación matemáticas, de la versatilidad de este recurso y de las actividades que propongo en este trabajo, creo que fácilmente se puede implementar su uso en cualquier cuso de la Educación Secundaria Obligatoria y que además, si se implementara resultaría beneficioso para el alumnado. Quizás así muchos alumnos dejen de pensar que las matemáticas son una asignatura difícil y aburrida.

También parece posible afirmar que se puede motivar al alumnado en el aprendizaje de las matemáticas a través de la matemática recreativa, como apuntan algunos estudios. Esto puede ser debido principalmente a dos factores. El primero es que un reto es un movilizador motivacional siempre y cuando sea alcanzable, un reto puede suponer una chispa que enciende la motivación de alguien que está cómodamente adormecida. El segundo es que un pasatiempo o juego produce diversión en la persona que lo practica o juega, y uno de los mayores elementos motivacionales, no solo en el aprendizaje sino también en la vida, es la diversión.

Según Miguel de Guzmán: *"el juego y la belleza están en el origen de una gran parte de las matemáticas. Si los matemáticos de todos los tiempos se lo han pasado tan bien jugando y contemplando su juego y su ciencia, ¿por qué no tratar de aprenderla y comunicarla a través del juego y de la belleza?"* La primera premisa que enuncia Miguel de Guzmán sobre el origen de una gran parte de las matemáticas ha quedado reflejada en este trabajo de fin de máster en la parte donde esbozo la influencia de la matemática recreativa en el desarrollo de nuevas teorías. La segunda premisa es fácilmente demostrable observando las reacciones que puede tener cualquier matemático o estudiante de matemáticas cuando se enfrenta a las matemáticas recreativas.

Por lo tanto, no puedo estar más de acuerdo con la dirección en la que formula dicha pregunta y concluir el silogismo que abre afirmando que si enseñásemos más la parte lúdica de las matemáticas a nuestros alumnos, posiblemente muchos de ellos encontrarían las matemáticas como una asignatura mucho más bonita y atractiva de lo que normalmente consideran.

BIBLIOGRAFÍA

Albaigès, J. M. *¿Se atreve usted con ellos? 101 apasionantes problemas*. Editorial: Boixareu, Barcelona, 1981.

Alcalá, M. *Matemáticas re-creativas*. Editorial: Graó, 2010.

Antonio, A. *El primer libro impreso de matemática recreativa*. www.divulgadores.com. Última revisión: 17 de marzo de 2021. https://divulgadores.com/tag/bachet/

Ball, W. W. R., & Coxeter, H. S. M. *Mathematical Recreations and Essays*. Editorial: Dover Publications, 1987.

Bártlová, T. *History and current state of recreational mathematics and its relation to serious mathematics*. Charles University in Prague, 2016.

Blasco, F. *Martin Gardner, el hombre que convirtió a miles de niños en matemáticos y a miles de matemáticos en niños.* Investigación y Ciencia, número 77, septiembre 2014.

Blasco, F. *Gardner para aficionados*. Ediato por la Real Sociedad Matemática Española (RSME), 2015.

Bragg, L. Students’ impressions of the value of games for the learning of mathematics. *Psychology of Mathematics Education*, volumen *2*, páginas 217–224, 2014.

Claraco, J. L. B. *El origen de la Teoría de Probabilidades*. Ciencia explicada. Última revisión: 20 de abril de 2021. https://www.ciencia-explicada.com/2009/10/el-origen-de-la-teoria-de.html

Corbalán, F. Estrategias utilizadas por los alumnos de secundaria en la resolución de juegos. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las matemáticas*, volumen *23*, páginas 21–32, 1996.

Corbalán, F. *Juegos matematicos. Secundaria y bachillerato*. Editorial: SÍNTESIS, 1999.

Corbalán, F. Algunos aspectos de las matemáticas recreativas. *Números*, volúmenes *43-44*, páginas 121–124, 2000.

Corberán, A., & de Paula, F. Perversiones y trampas de la Probabilidad. *Gaceta de la Real Sociedad Matematica española*, volumen *3*, páginas 198–229, 2000.

Davis, M. *Game theory: A nontechnical introduction*. Editorial: Basic Books, 1973.

de Guzmán, M. Juegos matemáticos en la enseñanza. *Números*, volumen *59*, páginas 5–38, 2004.

Diccionario de la lengua española. (2021). «Diccionario de la lengua española» - Edición del Tricentenario. Última revisión: 2 de marzo de 2021. https://dle.rae.es

Encinas, S. *Introducción a los modelos* [Diapositivas]. campusvirtual.uva.es. Abril de 2021. https://campusvirtual.uva.es/pluginfile.php/1760407/mod_resource/content/2/02Introduccion.pdf

Ernest, P. Games. A Rationale for Their Use in the Teaching of Mathematics in School. *Mathematics in School*, volumen *15*, páginas 2–5, 1986.

Estalmat. Estímulo del Talento Matemático. ESTALMAT. Última revisión: 7 de abril de 2021 https://www.estalmat.org/

Gairín, J., & Fernández, J. Enseñar matemáticas con recursos de ajedrez. *Tendencias Pedagógicas*, volumen *15*, páginas 57–90, 2010.

González, A., Gabriel, J., & Sánchez, M. La matemática nunca deja de ser un juego: investigaciones sobre los efectos del uso de juegos en la enseñanza de las matemáticas. *Educación Matemática*, volumen *26*, páginas 109–133, 2014.

Goñi, J. M. *Didáctica de las matemáticas (Volumen 2)* Editorial: Grao, 2021.

Heber, J. . Permutaciones y el juego del 15. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, volumen 12, páginas 259–264, 2005.

Ivorra, C. *Geometría*. Editorial: saber, 2017.

Luque, B. Un siglo de matemáticas recreativas. *Investigación y ciencia*, número *530*, páginas 86–90, 2020.

Mataix, M. *Divertimientos Lógicos y Matemáticos*. Editorial: Marcombo, 1982.

Mataix, M. *El Discreto Encanto de las Matemáticas*. Editorial: Marcombo, 1988.

Muñiz, L., Alonso, P., & Rodríguez, L. J. (2013, julio). *Matemáticas con sabor a juego: una forma diferente de aprender*. Última revisión: 9 de abril de 2021. https://www.researchgate.net/publication/320471115_Matematicas_con_sabor_a_juego_una_forma_diferente_de_aprender

Oldfield, B. J. Games in the Learning of Mathematics. *Mathematics in School*, volumen *20*, páginas 41–43, 1991.

Peralta, G., Angelina, G., Gabriel, J., & Sánchez, M. (2014). La matemática nunca deja de ser un juego: investigaciones sobre los efectos del uso de juegos en la enseñanza de las matemáticas. *Educación Matemática*, número *26*, páginas 109–133, 2014.

Peterson, I. *Islands of Truth: A mathematical mistery cruise*. Editorial: W.H.Freeman & Co Ltd, 1991.

Población, A. J. *Mariano Mataix: el desconocido autor de «Droga matemática» que mostró la diversión tras los números*. abc. Última revisión: 15 de abril de 2021. https://www.abc.es/ciencia/abci-mariano-mataix-desconocido-autor-droga-matematica-mostro-diversion-tras-numeros-202011300059_noticia.html

Rupérez, J. A., & García, M. Graduación de la dificultad en el Cubo Soma. *Números*, volumen *75*, páginas 165–173, 2010.

Rupérez, J. A., & García, M. La Matemagia en Martin Gardner. (Introducción al uso de la matemagia en la escuela) Graduación de la dificultad en el Cubo SOMA (II). *Números*, volumen *76*, páginas 167–175, 2011.

Sáenz de Cabezón, E. [Derivando]. *La terrible leyenda de las Torres de Hanói* [Vídeo]. YouTube. Última revisión: 17 de abril de 2021. https://www.youtube.com/watch?v=LM68IQvIo_E

Salcedo, A. Análisis de las actividades para el estudiante en los libros de matemáticas. *Investigación y Postgrado*, volumen *27*, páginas 83–109, 2012.

Singmaster, D. The utility of recreational Mathematics. *The UMAP Journal - COMAP*, volumen *37*, páginas 339–380, 2016.

Sorando, J. M. (s. f.). *El origen de la Probabilidad*. matematicasentumundo.es. Última revisión: 17 de abril de 2021. https://matematicasentumundo.es/HISTORIA/historia_Pascal.htm

Stewart, I. Mathematical Recreations. *Scientific American*, volumen 98–99, Mayo 1999.

Tahan, M. *El hombre que calculaba*. Editorial: RBA libros, 2018.

Tomé, C. *Un problema clásico de pesas*. Cuaderno de Cultura Científica. Última revisión: 3 de abril de 2021. https://culturacientifica.com/2017/02/22/problema-clasico-pesas/

Trelles, C., Bravo, F., & Barrazueta, J. (2017). ¿Cómo Evaluar los Aprendizajes en Matemáticas? *INNOVA Research Journal*, volumen *2*, páginas 35–51, 2017.

Vankúš, P. *History and Present of Didactical Games as a Method of Mathematics' teaching'*. Enero 2005. https://www.researchgate.net/profile/Peter-Vankus/publication/228970948_History_and_Present_of_Didactical_Games_as_a_Method_of_Mathematics%27_teaching%27/links/5459fc340cf2cf5164840409/History-and-Present-of-Didactical-Games-as-a-Method-of-Mathematics-teaching.pdf

Vankúš, P. *Games based learning in teaching of mathematics at lower secondary school.* 2008. https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.483.1747&rep=rep1&type=pdf

Web del Grupo Alquerque - Sevilla. (2021). Grupo divulgación matemática. Última revisión: 3 de mayo de 2021. http://www.grupoalquerque.es