Universidad de Valladolid
Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Sociales y de la Matemática

PROBLEMAS ISOPERIMÉTRICOS USANDO METODOLOGÍA DE APRENDIZAJE BASADO EN PROBLEMAS

Trabajo Final del Máster en Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas. Especialidad de Matemáticas.

Por: Ricardo de Vega López
Tutor: Edgar Martínez Moro

Valladolid, 20 de Junio de 2021

<u>RESUMEN</u>

En este Trabajo de Fin de Máster usamos una de las metodologías de más actualidad, como es el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), aplicada a la enseñanza de un elemento matemático que se encuentra, injustamente, fuera de los actuales currículos, tal y como son los problemas isoperimétricos. Tratamos de desarrollar una propuesta de trabajo siguiendo esta metodología analizando lo valiosa que puede resultar para que el alumno pueda desarrollar las diferentes competencias clave dentro del área de las matemáticas, así como las competencias transversales asociadas al estudio de la historia, el papel de la mujer en las matemáticas, el contexto real de los problemas o la asociación de diferentes ramas de las matemáticas entre sí y con otras asignaturas. Acabaremos el trabajo con una propuesta de investigación, con el fin de dotar a los problemas isoperimétricos de un contexto pedagógico en secundaria y estudiarlos como elemento motivacional para el alumnado.

PALABRAS CLAVE:

ABP, aprendizaje significativo, constructivismo, aprendizaje cooperativo, metacognición, metodología activa, competencias clave y transversales, coevaluación y autoevaluación, PISA, resolución de problemas, motivación, historia, problemas isoperimétricos.

ÍNDICE:

1. Introducción

Este trabajo tiene como objetivo estudiar el uso de los problemas isoperimétricos en Secundaria, para proporcionar un elemento motivacional a los alumnos de 1º de Bachillerato (tanto de ciencias sociales, como de aplicadas) y ayudar al desarrollo de las competencias de resolución de problemas gracias al uso de la metodología de **Aprendizaje Basado en Problemas** (**ABP** a partir de ahora). El uso de **Tecnologías de la Información y las Comunicación** (conocidas popularmente como **TIC's** o TICs, notación que usaremos de aquí en adelante) también será necesarias, ya que haremos un uso intensivo de *Geogebra* y de proyecciones en *Powerpoint*.

Es por ello que este documento va a contar con varias vertientes interrelacionadas. Por un lado trataremos de justificar los beneficios del uso de dichos problemas en las aulas (a nivel matemático y a nivel didáctico) y por otro aplicaremos la metodología del ABP de manera práctica en un aula de 1º de Bachillerato de ciencias sociales, para mostrar los resultados obtenidos. Por último presentaremos una propuesta de investigación para conseguir la justificación de esa implantación en el aula, aunque no la llevaremos a la práctica por falta de tiempo y medios (aunque podría ser realizada en un trabajo futuro).

1.1. Justificación y objetivos

El estudio de los problemas isoperimétricos cuenta con una historia rica y sugerente, que incluye desde los antiguos griegos hasta matemáticos de hoy día. Además cuenta con la participación de una de las primeras mujeres que demostraría un notable dominio de la Geometría, la Reina Dido, aportando así un factor de estudio de las mujeres matemáticas, que resulta muy motivador e inspirador desde el punto de vista de la atención a la diversidad.

También trabajaremos las Competencias del Lenguaje, Matemáticas, Aprender a Aprender, Competencia Digital, Competencia Cultural y Artística, Competencia Social y Espíritu Emprendedor, dentro del estudio de la historia de las matemáticas y de la resolución de problemas con ABP.

Con ese fin, se presenta en los anexos una unidad didáctica para llevar a las aulas de 1º de Bachillerato, tras impartir el tema de inecuaciones. Ésta consta de varios elementos de evaluación, de unas presentaciones para proyectar y de unos problemas para proponer a los alumnos, a parte de los que se resuelven conjuntamente en clase con el uso de Geogebra. Serán estos elementos de recogida de datos los que usaremos a posteriori para realizar la propuesta de investigación basada en una combinación de "Investigación-Acción" y "teoría fundamentada", con la que pretendemos averiguar si estos problemas son un elemento motivador, en qué medida y si contribuyen al aprendizaje de las competencias principales y transversales.

En particular, los objetivos didácticos de esta unidad son:

- Mostrar un periplo graduado por la historia de las matemáticas, que nos permita humanizarlas y ponerlas en contexto con la realidad actual.
- Ofrecer una visión de desarrollo lógico de las matemáticas frente a la visión habitual procedimental de la enseñanza secundaria.
- Ofrecer un nexo de enlace entre el tema de inecuaciones y los problemas de optimización.
- Proporcionar una base de desarrollo del pensamiento matemático basado en la resolución de problemas de la vida real.
- Aprender la metodología de resolución de problemas.
- Hacer más atractivos los contenidos matemáticos y proporcionarles un contexto en el mundo real que aumente la motivación de los alumnos hacia ellas.
- Participar activamente del paradigma de la educación inclusiva e intercultural al estudiar otras culturas y el papel de la mujer en su desarrollo.

Por último tenemos también unos objetivos relacionados con la investigación que proponemos y que pueden resumirse como:

- **El Problema**: Los problemas isoperimétricos como método motivacional y su relación con las competencias transversales en 1º de Bachillerato.
- **Tópico**: Dominio Afectivo en Matemáticas
- **Objetivo personal**: Identificar nuevos elementos de motivación para los alumnos.
- **Objetivo práctico**: Elaborar una propuesta de intervención curricular en la que los alumnos aprendan cómo los casos prácticos pueden crear matemáticas e iniciarles en los problemas de optimización, que son la base de ciencias como la economía, ingenierías, etc.
- **Objetivos intelectuales**:
    - Comprender mejor el nexo entre la historia y el desarrollo de las matemáticas.
    - Comprender qué aspectos pueden potenciar el pensamiento matemático.
    - Discernir la existencia de un elemento de intuición en la resolución de este tipo de problemas.

1.2. Estructura del trabajo

El trabajo se va a estructurar en apartados, en los que trataremos de dividir la totalidad del proyecto de forma que sea más manejable y comprensible.

- **Apartado 1: Introducción**

  Se trata de una breve exposición de qué pretendemos con el presente documento y cómo vamos a tratar de conseguirlo y estructurarlo.

- **Apartado 2: Contextualización y Marcos de Referencia**

  Aquí pretendo sentar los cimientos de mi trabajo usando dos elementos básicos en el estudio de los problemas isoperimétricos, como son la resolución de problemas y la motivación. Empezaremos exponiendo los marcos normativo, competencial y de evaluación. Y pasaremos a realizar una pequeña investigación documental para: explicar cómo la motivación es un elemento vital del aprendizaje de las matemáticas, y hacer un repaso histórico de la metodología para la resolución de problemas. Además se usarán, diferentes modelos de resolución de problemas, distinguiendo distintos tipos de bloqueos que suelen surgir en la resolución de problemas y utilizando el ABP como la metodología idónea para trabajar este tipo de problemas en el aula.

  De todo este proceso de contextualización sacamos los marcos de referencia para el estudio de los isoperimétricos en los apartados siguientes, dentro de los ámbitos:

  - ➢ Conceptual Matemático.
  - ➢ Componente Didáctico. Basado en metodología ABP

- **Apartado 3: El Marco Conceptual Matemático; La Historia del Problema Isoperimétrico**

  Aquí pretendemos hacer una revisión histórica del problema isoperimétrico, que nos sirva para explicar el desarrollo matemático del mismo, su marco conceptual matemático, su relación con las inecuaciones y los problemas de optimización, y su influencia en diversos ámbitos del mundo real, como la naturaleza, las artes o la arquitectura.

También aquí abordaremos algunas de las particularidades más interesantes de este tipo de problemas, como es su desarrollo a partir de problemas del mundo real (útil para crear un nexo entre las matemáticas y la realidad), la facilidad con que se pueden intuir los resultados (útil para que los alumnos con peores capacidades matemáticas se acerquen a las mismas a través de su intuición y creando situaciones de éxito) o cómo resultan idóneos para poner en práctica el ABP (metodología un poco difícil de encajar en la práctica docente muchas veces).

- **Apartado 4: El Marco Didáctico; la Resolución de Problemas con ABP**

  Ahora abordaremos los problemas desde el punto de vista didáctico, a través de toda la metodología de resolución de problemas, del ABP y haremos hincapié en su relación con los problemas de optimización e inecuaciones, que al estar ya contemplados en el currículo, cuentan con una importante literatura pedagógica sobre la que podemos basar las bondades de los problemas isoperimétricos y desarrollar el proyecto de investigación sobre el impacto de estos en el aprendizaje curricular.

- **Apartado 5: Desarrollo de la Unidad Didáctica**

  Haremos un repaso a las competencias, objetivos, metodología y otros aspectos de la unidad didáctica que usaremos en el aula para exponer a los alumnos los problemas isoperimétricos y mostraremos las actividades programadas en la misma, así como sus medios de recogida de datos y evaluación. En definitiva, la parte práctica del trabajo en el aula.

- **Apartado 6: Conclusiones y Resultados; Propuesta de Investigación Futura**

  Veremos si tras la aplicación práctica podemos observar resultados interesantes y qué conclusiones (si es que podemos hacer alguna) se derivan de los resultados obtenidos. Además se propondrá una investigación sobre esa estructura, sugiriendo la metodología que creamos más adecuada para este caso particular, que son los problemas isoperimétricos.

2. Contextualización y Marcos de Referencia

La idea de Educación ha cambiado enormemente durante la historia. Al principio, se entendía como un proceso unidireccional de instrucción de un educador hacia un educando, que se realizaba durante las primeras etapas de la vida del alumno. Por contra, actualmente se prefiere usar una definición de mayor recorrido, en la que se puntualiza, que se trata de un proceso de enseñanza-aprendizaje que perdura durante toda la vida, y que trata de alcanzar la formación de personas competentes, que puedan ejercer, con libertad y sentido crítico, la ciudadanía. Es más, hoy día se trata de alcanzar, no tanto unos contenidos, sino unas competencias que sean de utilidad al individuo en su vida cotidiana. Un buen ejemplo de este cambio, a nivel didáctico, lo podemos encontrar en la propia Comisión Europea, en particular, en su guía publicada el 22 de mayo de 2018 de Recomendaciones del Consejo. En ella ponen la atención, en que las habilidades, como "*la resolución de problemas, el pensamiento crítico, la capacidad para cooperar, la creatividad, el pensamiento computacional y la autorregulación son más esenciales que nunca, en una sociedad que cambia rápidamente*". Estos conceptos representan los pilares necesarios para poder generar nuevas ideas, nuevos productos, nuevas teorías y nuevos conocimientos, gracias a que lo asimilado funciona de forma contínua.

Además, si nos centramos en el tema de la educación matemática, contamos con dos objetivos clave actualmente; por una parte, convencer a los alumnos sobre la necesidad de considerar las matemáticas en todos los aspectos de la vida diaria y a todos los niveles (personal, ocio, cotidiano, trabajo, etc.), y por otra desarrollar las competencias, que faciliten a los individuos, manejarse en la resolución de los problemas que lleguen a afrontar en el mundo real, utilizando las matemáticas. Para cumplir estos objetivos, trabajar la metodología de resolución de problemas, en el entorno de la realidad que viven los alumnos es imprescindible, ya que la contextualización es el elemento de nexo entre la propia resolución de problemas y el componente motivador que se alcanza al relacionar estos con la realidad.

Así pues trataremos de dar justificación al uso de la metodología ABP en la resolución de problemas isoperimétricos, usando las referencias que he encontrado relativas a la resolución de problemas y su componente motivadora, a lo largo de la normativa educativa vigente y en el marco competencial y de evaluación del informe PISA (Programme for International Student Assessment). Además, haremos hincapié en la importancia del componente "motivación" para alcanzar el aprendizaje de las matemáticas, en la resolución de problemas como elemento motivador y de nexo de las matemáticas con el mundo real, en cómo el Aprendizaje Basado en Problemas es una metodología a tener en cuenta para este proceso, y en el papel del docente durante el proceso. De este modo pretendemos sentar las bases de los dos apartados siguientes en los que veremos los marcos matemático y didáctico, de forma más exhaustiva.

2.1. Marco normativo

Un factor, que hay que tener en cuenta, para poder desarrollar nuevos estilos de trabajo en las aulas, es que estos estén respaldados o admitidos por los organismos y la normativa vigente, que regulan la educación. De ahí que, pretendamos mostrar cómo la resolución de problemas y la motivación, son dos de los elementos fundamentales de la educación matemática. Para lo cual, vamos a comentar, lo que la actual normativa dice sobre estos puntos que hemos destacado, y de ese modo podremos argumentar la importancia de trabajar en la resolución de problemas isoperimétricos, y por asociación, el valor educativo de nuestra propuesta didáctica.

Las referencias en la normativa se encuentran a todos los niveles de organización educacional. Así que las veremos tanto a nivel europeo, como nacional y regional.

2.1.1. Nivel europeo

En 2006, la Comisión Europea encarga a un equipo de expertos, al frente del cual se situaría M. Rocard, un informe sobre las prácticas que pudieran potenciar el interés de los jóvenes por la ciencia. Es en este documento en el que se sugiere la introducción del enfoque de Enseñanza de las Ciencias Basada en la Indagación (ECBI).

"*Por definición, la indagación es el proceso intencionado de diagnóstico de problemas, crítica de experimentos y distinción de alternativas, planificando investigaciones, estudiando conjeturas, buscando información, construyendo modelos, debatiendo con compañeros y formando argumentos coherentes*" (Rocard, 2007, p.9).

Como consecuencia de este informe, se inicia el desarrollo de un considerable número de programas europeos de investigación, educación y adjudicación de recursos, que podrían ayudar en la resolución de problemas en un contexto real. A continuación, se citan algunos de ellos:

- **LEMA** (Learning and Education in and through Modelling and Applications). Fue un proyecto europeo que estuvo en funcionamiento entre 2006 y 2009, y tenía como objetivo principal promover un cambio de metodología en el aula usando actividades de resolución de problemas basados en situaciones. Al mismo tiempo, se impartió un programa de desarrollo profesional para profesores, utilizando materiales de apoyo.

- **POLLEN**. Fue otro programa europeo que funcionó entre 2006 y 2009, aportando recursos materiales, metodológicos y pedagógicos que mostraban el enfoque de la enseñanza basada en la indagación.
- **COMPASS**. Era un proyecto desarrollado entre 2009 y 2011 para proporcionar tareas a los profesores que desearan desarrollar enfoques interdisciplinarios, que aunaran matemáticas y ciencias.
- **S-TEAM** (Science Teacher Education Advanced Methods). Fue otro programa a nivel europeo, cuyo desarrollo entre 2009 y 2012 trataba de mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias en Europa, gracias a la creación de recursos y el desarrollo profesional de los profesores de estas materias.
- **PRIMAS.** Era un proyecto que estuvo vigente entre 2010 y 2013 con el fin de promocionar la enseñanza de las ciencias y las matemáticas basadas en la indagación, en diferentes cursos de primaria y secundaria por toda Europa.

También debemos recordar que PISA parte de la suposición de que aprender matemáticas ha de ser un objetivo prioritario y el aprender matemáticas se identifica, en este proyecto, con la resolución de problemas, que es un planteamiento heredero de una fecunda tradición, que suele diferenciar una serie de fases en la resolución de los problemas:

- Contextualización: el problema ha de situarse en un contexto de realidad.
- Organización: el problema se organiza siguiendo pautas matemáticas.
- Abstracción o modelización: es necesario despegarse de la realidad contextual, mediante procesos hipotéticos sobre el problema, en orden a generalizar y formalizar.
- Resolución: resolver el problema.
- Dar sentido: proveer de significado a la solución en el marco de la realidad contextual (Rico Romero, 2006: 279).

2.1.2. Nivel nacional

Haciendo relación a la normativa vigente, del actual marco de Educación Secundaria Obligatoria en España, y que podemos encontrar publicada en el BOE, el trabajo aquí planteado quedaría respaldado legalmente gracias a las referencias que podemos encontrar en la Orden ECD/65/2015, la Ley Orgánica 8/2013, la Ley Orgánica 2/2006 y el Real Decreto 1105/2014 (en la Tabla 1 las recopilamos, así como dónde encontrar esas referencias). Veámoslas más detenidamente, una a una.

La **Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo**, de Educación contempla, entre otros, los principios y fines que persigue la educación. Entre ellos se mencionan algunos de los principios en los que basamos nuestro estudio y que, en concreto, hemos trabajado en nuestra propuesta, tales como el esfuerzo individual y la motivación del alumnado, el fomento de la investigación y la innovación educativa, la maduración de la personalidad, el desarrollo de las capacidades de regular su propio aprendizaje, autoconfianza y conocimientos, así como para desarrollar la creatividad, la iniciativa personal y el espíritu emprendedor, además de la preparación para el ejercicio de la ciudadanía y para la participación activa en la vida económica, social y cultural, con actitud crítica y responsable y con habilidades de adaptación al contexto cambiante de la sociedad del conocimiento. La sociedad está demandando, con vehemencia, todas estas características en sus ciudadanos, por lo que resulta claro, que la Educación Secundaria Obligatoria, y por añadidura, las nuevas propuestas que en esta se produzcan, deben encaminarse siguiendo esta línea de razonamiento.

Además, en el preámbulo de la **Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre**, para la mejora de la calidad educativa, se reflexiona sobre los últimos resultados que se recogen en el Informe PISA y se incluye entre los objetivos marcados para 2020 mejorar los resultados para España en las competencias lectora, matemática y científica de dicho informe. Uno de los objetivos 2020 consistía en tratar de reducir en un 10% la tasa de abandono educativo temprano, y dado que la asignatura de Matemáticas puede resultar determinante, en la decisión del alumnado de abandonar los estudios, resulta razonable pensar, que proporcionando tareas de carácter motivador y de interés para los alumnos, podríamos contribuir así a su disminución. En nuestro caso proponemos usar el problema isoperimétrico y su historia, como elementos motivacionales y que nos permitan crear vínculos entre las matemáticas y la problemática propia del mundo real.

En cuanto al currículo la ley es clara, los contenidos dejan de ser el eje central del mismo y pasan a serlo las competencias. El **Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre**, establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.También proporciona la definición de competencias como las capacidades para aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, con el fin de lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos. Asimismo, las clasifica en siete competencias básicas que son: la comunicación lingüística, la competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología, la competencia digital, aprender a aprender, las competencias sociales y cívicas, sentido de iniciativa y espíritu emprendedor, y la conciencia y expresiones culturales.

Concretamente, la **ORDEN ECD/65/2015, de 21 de enero**, describe las relaciones entre competencias, contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. Y podemos encontrar la definición de competencia matemática, haciendo referencia a ella como la capacidad de aplicar el razonamiento matemático y sus herramientas para describir, interpretar y predecir distintos fenómenos y su contexto. Por tanto, lo que tratamos de hacer es reconocer el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo y utilizar los conceptos, procedimientos y herramientas para usarlos en la resolución de los problemas, que puedan surgir en el contexto de la vida diaria. También se hace referencia a que, para desarrollo adecuado de esta competencia es necesario estudiar cuatro áreas, como son, los números, el álgebra, la geometría y la estadística, con múltiples interrelaciones bajo los contenidos que denomina cantidad, espacio y forma, el cambio y las relaciones, y la incertidumbre y los datos, que son, de igual modo, los contenidos definidos por PISA. Por último, hacer notar que se menciona, que la competencia matemática junto con la científica y tecnológica deben proporcionar la capacidad de identificar, plantear y resolver situaciones de la vida cotidiana, tanto personal como social, todas ellas habilidades que pretendemos desarrollar con la intervención didáctica propuesta.

Tabla 1

Normativa a nivel nacional

Normativa a nivel nacional	Ley Orgánica 2/2006	Art.1- Principios de la ed. Art.2- Fines de la ed.
	Ley Orgánica 8/2013	Preámbulo- Objetivos 2020
	Real Decreto 1105/2014	Art.2- Competencias clave
	Orden ECD/65/2015	Anexo 1- Def. comp. mat.

Nota. Calzada (2019, p. 15)

2.1.3. Nivel regional

La normativa actual sobre enseñanza de Educación Secundaria Obligatoria en Castilla y León, publicada en el BOCyL (Boletín Oficial de Castilla y León), nuestro trabajo quedaría cubierto por la Orden EDU/362/2015, de 4 de mayo (Tabla 2), que es la que establece el currículo y regula el desarrollo, la implantación y la evaluación de la mencionada educación en la Comunidad de Castilla y León.

Para empezar, se vuelve a hacer referencia a la importancia de enseñar motivando al alumnado y, en particular, se hace mención a que, "*entre los principios pedagógicos debe estar el desarrollo de actividades que fomenten la motivación y el interés por el uso de las matemáticas*". Haciendo uso de este principio, justificamos la intervención en el aula propuesta en este trabajo y reivindicamos su valor motivacional.

Continuando en este documento, el Art. 60 hace referencia al trabajo que se debe realizar en los Centros para alcanzar el objetivo, de que el aprendizaje por competencias sea un hecho en la práctica.

Por otro lado, encontramos referencias a las características de los principios metodológicos que deben usarse en Educación Secundaria, encontrando entre ellas que los procesos de enseñanza y aprendizaje han de proporcionar al alumno un conocimiento sólido de los contenidos, a la vez que participa del desarrollo de hábitos intelectuales propios del pensamiento abstracto, como por ejemplo, el análisis, la observación, la investigación, la interpretación, la comprensión, la capacidad creativa, el sentido crítico, la expresión y la capacidad de resolver problemas y usar los conocimientos adquiridos en diferentes contextos, que permitan la adquisición de competencias y un aprendizaje significativo.

También, se atribuye al rol del profesor un papel relevante cuando se trata de exponer los contenidos, usando estructuras claras en sus relaciones, diseñando secuencias de aprendizaje que revelen conexiones entre distintos contenidos de una misma materia y/o con otras materias, o planificando ejercicios y actividades que promuevan el interés y el hábito de la expresión oral y la comunicación. En nuestra propuesta vamos a prestar especial atención a exponer qué papel debe adoptar el profesor para hacer que el alumno sea el protagonista de su propio aprendizaje, aspecto este que se potencia de manera sobresaliente en la metodología ABP.

El Anexo I.B de la orden, es importante para justificar este trabajo usando la actual normativa, ya que aunque se trata de un contenido no contemplado en el currículo, su implementación en el aula queda contemplada dentro del currículo de Educación Secundaria

Obligatoria. En el anexo viene una descripción de los contenidos de matemáticas como "*instrumento, que se tiene la obligación de explotar para optimizar los beneficios que obtendrán los ciudadanos y, por añadidura la sociedad, con un adecuado planteamiento de los procesos de enseñanza- aprendizaje*". En esta descripción, se estructura el currículo de Matemáticas de Educación Secundaria Obligatoria en cinco bloques. El primer bloque es el relativo a *Procesos, métodos y actitudes en matemáticas*, tiene un carácter transversal y vertebrador, y está formado por cinco elementos principales:

- La resolución de problemas, como elemento de enseñanza de las matemáticas no procedimental. Este punto es de gran importancia en este trabajo.
- El planteamiento y ejecución de investigaciones matemáticas. Este punto también nos incumbe, cuando mandamos tareas para casa sobre problemas nunca vistos antes por los alumnos.
- La capacidad para plantear y expresar situaciones reales con lenguaje matemático, creando modelos e interpretándolos adecuadamente.
- La capacidad por parte del alumnado, de desarrollar una actitud positiva y responsable para hacer frente a los desafíos que plantea el mundo, las ciencias y las matemáticas.
- La aptitud para identificar y usar los distintos medios tecnológicos, especialmente informáticos, que le van a hacer falta en su vida cotidiana.

Este trabajo, por tanto, queda reflejado en el currículo, aunque sea de manera transversal, enmarcándolo en este primer bloque de "*Procesos, métodos y actitudes en matemáticas"*.

Por si fuera poco, en ese mismo anexo, se sigue haciendo notar la relevancia de las propuestas de trabajo contextualizadas en la realidad próxima al alumnado, para añadir elementos motivacionales que justifiquen la necesidad del alumnado de tener conocimientos de matemáticas.

Por último, también se menciona la resolución de problemas, como una actividad formativa de primer orden y como un desafío que fomenta el desarrollo de la competencia *sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.*

Tabla 2

Normativa a nivel regional (Castilla y León)

Normativa a nivel regional	Orden EDU/362/2015	Art.8- Princ.pedagógicos Art.60- Estrategias didáct. Anexo I.A.- Princ. metod. Anexo I.B- Divisiones en bloques didáct.

Nota. Calzada (2019, p. 18)

2.2. Marco competencial y de evaluación

Una vez visto el marco normativo debemos crear un marco competencial y de evaluación. Voy a usar el que establece el Informe PISA, ya que su forma de ver la competencia matemática crea un nexo entre la matemática y la realidad, usando para ello la resolución de problemas y el elemento motivacional que aportan los mismos. PISA no solo ofrece procedimientos de evaluación diagnóstica y análisis comparativos, sino que también nos proporciona marcos de trabajo formativos.

PISA (Programme for International Student Assessment) es un estudio que realiza la OCDE a nivel mundial desde 1997 y se lleva a cabo cada tres años. En él se estudian indicadores que miden el nivel de adquisición de conocimientos y destrezas clave que son imprescindibles para la plena participación en las sociedades modernas, en alumnos de 15 años, usando pruebas de competencias lectora, científica y matemática.

En el ámbito de las matemáticas, para hacerlo posible, se ha definido la competencia matemática y, a raíz de esta definición, se ha establecido un marco de evaluación que recoge los elementos más importantes de la misma.

Más concretamente, en este trabajo se utilizará el Informe PISA del año 2012, porque es el año más reciente, en el que las matemáticas fueron el área principal del informe (las últimas ediciones de PISA no aportan diferencias significativas a esta propuesta). En este informe, se define la competencia matemática como:

> La capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos. Incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el papel que las matemáticas desempeñan en el mundo y a emitir los juicios y las decisiones bien fundadas que los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos necesitan. (Instituto Nacional de Evaluación Educativa, 2013, p.9)

Usando esta definición, PISA 2012 nos proporciona un esquema de organización del área de conocimiento de las matemáticas (ver *Figura 1* más adelante) clasificado en tres aspectos: procesos, contenidos y contextos.

Figura 1

Esquema organización del área de matemáticas según PISA 2012.

Nota. Calzada (2019, p. 19)

➢ Los **procesos** matemáticos establecen una descripción de lo que hacen los alumnos para enlazar el contexto del problema con las matemáticas y conseguir así resolverlo, y las habilidades que sustentan estos procesos. Los procesos se clasifican en tres aspectos:

- **Formulación** matemática de las situaciones, usando lenguaje matemático.
- **Empleo** de procedimientos, razonamientos, datos, y conceptos matemáticos.
- **Interpretación**, valoración, y aplicación de los resultados obtenidos al contexto.

Los procesos están basados en siete capacidades matemáticas fundamentales:

1. Comunicación.
2. Matematización.

3. Representación.
4. Razonamiento y argumentación.
5. Diseño de estrategias para resolver problemas.
6. Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico.
7. Utilización de herramientas matemáticas.

Esta organización de los diferentes procesos, de acuerdo a sus diversas capacidades matemáticas fundamentales asociadas, hará posible diseñar diferentes problemas, en los que se evaluará, una o varias de esas habilidades matemáticas del individuo. De tal modo que, la utilización de este marco nos permitirá trabajar a distintos niveles y de un modo organizado, las distintas habilidades que podamos considerar relevantes para alcanzar un desempeño óptimo en la resolución de problemas, empezando por su planteamiento y acabando en la obtención de una solución.

Más concretamente, dados los objetivos de este trabajo, intentaremos enfocar nuestra atención en la importancia de la resolución de problemas en su vertiente de optimización. Para lo cual es importante analizar el problema en su contexto real y traducirlo adecuadamente al lenguaje matemático. Para ello debemos inculcar en los alumnos:

- La identificación de las variables significativas del problema y la identificación de las relaciones matemáticas del mismo, situado en el contexto del mundo real.
- El reconocimiento de la estructura de los problemas para identificar su patrón matemático.
- La simplificación del problema para poder aplicarle el análisis matemático.
- La identificación de las limitaciones, supuestos y simplificaciones que permiten la construcción de modelos y que se deducen del contexto.
- El planteamiento de una situación real, usando la representación matemática, utilizando diagramas, símbolos, variables y modelos estándar adecuados.
- La explicación y comprensión de las relaciones entre el lenguaje utilizado en el contexto de un problema y el lenguaje formal y simbólico utilizado para representarlo matemáticamente.
- La traducción al lenguaje matemático o a una representación, de un problema.

- El reconocimiento de elementos de un problema que coinciden con problemas conocidos o procedimientos, conceptos o datos matemáticos vistos anteriormente.
- El uso de la tecnología para representar la relación matemática propia de un problema.

➢ Los **contenidos** matemáticos serán usados en las preguntas de evaluación y tienen relación con los contenidos que integran el currículo, como pueden ser el álgebra, los números y la geometría, en sus diversas formas y vertientes. Se clasifican en cuatro tipos:

- **Cambio y relaciones**. Aquí se utilizan modelos matemáticos para predecir y describir relaciones y cambios, junto a traducir, interpretar y crear las representaciones simbólicas y gráficas de esas relaciones.
- **Espacio y forma.** Esta categoría está formada por la medición, la visualización espacial, la geometría y el álgebra.
- **Cantidad.** Añade la cuantificación, en general, de los atributos de situaciones, relaciones, objetos y entidades del mundo, dando diferentes interpretaciones de las representaciones de esas cuantificaciones y creando juicios sobre esos argumentos e interpretaciones cimentados en la cantidad.
- **Incertidumbre y datos.** Está formado por, la capacidad de reconocer la variación en los procesos, contar con la habilidad de cuantificar esa variación, admitir el error e incertidumbre en las medidas, y dominar los contenidos sobre azar, junto a la valoración, interpretación y elaboración de situaciones en las que la incertidumbre es clave.

Esta forma de organizar los contenidos matemáticos no ha sido creada por PISA, sino que ya se usó, de forma ampliada, en numerosos artículos matemáticos en el siglo XX y actualmente sigue estando presente en los currículos de matemáticas de secundaria y bachiller, aunque no explícitamente, ya que los contenidos de los libros de texto continúan dividimos en las ramas clásicas de las matemáticas.

➢ Los **contextos** son los entornos en los que se contextualizan los ejercicios o problemas de evaluación y permiten crear una conexión entre la realidad en la que vive el individuo y estos problemas. Existen cuatro clases principales:

- **Personal.** Este primer contexto nos permite enunciar problemas que traten sobre actividades del propio alumno, su familia y su grupo de iguales.
- **Profesional.** En este tipo, encontramos los problemas relacionados con el mundo laboral.
- **Social.** En este contexto, los problemas tendrán relación con cuestiones asociadas a la sociedad.
- **Científico.** Por último, podemos situar los problemas en un contexto en el que las matemáticas están relacionadas con el mundo laboral y/o con asuntos asociados a las ciencias y tecnologías.

La gran diversidad de contextos, en los que localizar los problemas, ofrecerán múltiples enfoques sobre los que poder enlazar la realidad del individuo con el problema. Además, de este modo, estaremos motivando el estudio del mismo, al presentarlo como un problema, que podría ser real en ese entorno (científico, educativo, personal o social) del individuo. Tratando de evitar, que el individuo vea los problemas de forma inconexa, sin reflejo en la realidad y carentes de utilidad cotidiana.

PISA establece esta organización del área de conocimiento de las matemáticas para realizar la evaluación del grado de eficiencia con el que los alumnos pueden usar lo aprendido (gracias a la utilización de los contenidos conocidos), participando en procesos y utilizando las habilidades adquiridas para resolver problemas que tienen su origen en el mundo real en el que viven.

Finalizado el marco competencial de PISA pasamos a examinar la evaluación sugerida para la competencia matemática. Empezamos por crear un cuadro resumen (Tabla 3) en el que podemos representar los porcentajes relacionados con cada proceso, contenido y contexto, de las preguntas de evaluación que se han realizado en esta prueba. Sin embargo, nuestro trabajo no utiliza esos porcentajes ya que no tratamos de crear una unidad didáctica de carácter meramente evaluativa (nuestro contenido ni siquiera pertenece al currículo) sino que tratamos de crear un elemento de carácter motivacional.

Tabla 3

Distribución aproximada de las puntuaciones matemáticas según PISA 2012

Procesos 100%		**Contenidos 100%**		**Contextos 100%**	
Formulación	25%	Cambio y relaciones	25%	Personal	25%
Empleo	50%	Espacio y forma	25%	Profesional	25%
Interpretación	25%	Cantidad	25%	Social	25%
		Incertidumbre y datos	25%	Científico	25%

Nota. Calzada (2019, p. 22)

En PISA las preguntas suelen ser de tres tipos: abiertas, cerradas o de selección múltiple, existiendo además, guías de codificación y puntuación, que garantizan la equidad entre las respuestas durante su corrección, en particular, en las de tipo abierto, donde nos encontraremos gran variedad de respuestas diferentes y por ello serán necesarios expertos, que hagan la codificación manual de las respuestas del alumnado.

Otro aspecto a considerar es el grado de dificultad. Existen seis niveles de dificultad dentro de cada categoría, que nos dan una escala de la competencia matemática y en cada nivel se enuncian las destrezas que debe tener un individuo para pertenecer a ese nivel. También quiero hacer notar que PISA contempla en sus estudios un séptimo nivel, que no suele ser referenciado, que se corresponde con aquellos alumnos que no alcanzan el nivel 1 (que es el de menor dificultad) y que hace referencia a aquellos individuos que no alcanzan el mínimo necesario para poder ser considerados poseedores de cultura matemática. En el estudio suele aparecer como “nivel < 1”, aunque he leído artículos que hacían referencia al nivel 0. Los seis niveles, de menor a mayor dificultad, son:

- ★ **Nivel 1.**

Los alumnos identifican la información que les da el enunciado y pueden realizar procedimientos rutinarios bajo directrices simples o que se deducen directamente de los estímulos presentados. Necesitan que los problemas muestren toda la información necesaria, que estén bien definidos y se presenten en contextos que conozcan.

- ★ **Nivel 2.**

Los individuos saben obtener la información de una sola fuente, hacer uso de un único modelo representacional, realizar razonamientos directos mediante el uso de algoritmos, fórmulas y procedimientos básicos, y realizar interpretaciones literales de los resultados. Además, en contextos que solo requieren una inferencia directa son capaces de interpretar y reconocer situaciones.

- ★ **Nivel 3.**

Los individuos saben razonar directamente a partir del uso y la interpretación de representaciones basadas en diferentes fuentes de información, ejecutar procedimientos descritos con calidad y seleccionar y aplicar estrategias de solución de problemas sencillos. En este nivel son capaces de acompañar sus razonamientos con breves escritos explicativos.

- ★ **Nivel 4.**

Los individuos pueden elaborar y comunicar explicaciones basados en sus interpretaciones, argumentos y acciones. Saben trabajar con modelos explícitos en situaciones complejas o exigir la formulación de supuestos, y razonan con flexibilidad asociando las diferentes situaciones (también simbólicas) a situaciones del mundo real.

- ★ **Nivel 5.**

Los individuos pueden trabajar adecuadamente con caracterizaciones simbólicas y formales, reflexionar sobre sus acciones y formular y comunicar sus razonamientos. Son capaces de crear modelos y manejarlos en situaciones complejas evaluando las estrategias más convenientes de solución de problemas relativos a estos modelos.

- ★ **Nivel 6.**

Los individuos que consiguen alcanzar este nivel poseen un pensamiento y razonamiento matemático avanzado. Saben comunicar con exactitud sus razonamientos y su adecuación a las situaciones originales, además de utilizar sus destrezas para desarrollar de manera formal nuevos enfoques y estrategias para abordar situaciones nuevas. Pueden generalizar la información basada en modelos extraídos de problemas complejos, a la vez que relacionar diferentes fuentes de información.

A partir de la descripción de los niveles, podemos deducir una escala de dificultad relacionada con los modelos matemáticos, de forma que los individuos que estén en los niveles más bajos sólo podrán identificar modelos muy simples, y por contra, los individuos que estén en los niveles más altos serán capaces de construir sus propios modelos, utilizarlos en situaciones complejas e incluso generalizarlos a diferentes contextos, consiguiendo así definir modelos nuevos a partir de éstos.

Una vez detallado tanto el marco normativo como el marco competencial y de evaluación que se usará en el desarrollo de este trabajo, pasamos a describir las bases sobre las que se sustenta la metodología que vamos a utilizar (el ABP).

2.3. Teorías psicopedagógicas fundamentadas en el Aprendizaje Basado en Problemas

Veamos ahora los diferentes modelos pedagógicos basados en la metodología ABP. Estos modelos y teorías nos suenan debido a que los hemos estudiado en la asignatura de “Didáctica de las Matemáticas”, impartida en este Máster.

A continuación explicaré en qué consiste cada uno de ellos y cómo influyen en el Aprendizaje Basado en Problemas.

A. Modelo constructivista de Piaget

Jean Piaget (1896-1980) ve el conocimiento como resultado de un proceso de descubrimiento personal, que se asocia a la adaptación del individuo al medio. Los seres humanos tratamos de alcanzar el equilibrio, es decir, la estabilidad de nuestros esquemas o estructuras mentales. Pero, existen experiencias que desde un principio no encajan en nuestros esquemas previos y nos llevan a la confusión, sin embargo este desequilibrio origina el aprendizaje que implica la organización de los conceptos previos y los nuevos. Esta adaptación, que conlleva el equilibrio, se realiza a través de dos procesos, la acomodación y la asimilación. (Castilla Pérez, 2014)

La acomodación es la alteración que se produce, en mayor o en menor grado, en las estructuras de conocimiento cuando las usamos para dar sentido a nuevos objetos y ámbitos de la realidad y la asimilación consiste en la integración de elementos exteriores a estructuras o esquemas en evolución o esquemas ya acabados.

Piaget piensa en el aprendizaje como proceso de construcción fundamentado en la interacción entre el individuo y el entorno físico, atravesando diferentes etapas de adaptación del ser humano al medio, siendo dependiente del desarrollo cognitivo de la persona, es decir, el conocimiento no es directamente transmisible desde el docente al alumnado.

Textualmente Piaget dice:

> "La meta principal de la educación es crear hombres que sean capaces de hacer cosas nuevas, no simplemente de repetir lo que otras generaciones han hecho; hombres que sean creativos, inventores y descubridores. La segunda meta de la educación es la de formar mentes que sean críticas, que puedan verificar y no aceptar todo lo que se les ofrece"

La metodología ABP potencia en el individuo el aprendizaje por descubrimiento y la creatividad, ya que al utilizar problemas de la realidad se pueden originar distintas maneras de resolución del problema. Además, usando la exposición oral se fomenta la creatividad, mediante la selección del formato, el modo de exponer las diapositivas, la manera de explicar los diferentes conceptos, etc.

Haciendo referencia a la cita de Piaget, esta metodología potencia el pensamiento crítico ya que una de las fases consiste en aprender a analizar y elegir la información. La autoevaluación y coevaluación conllevan el razonamiento crítico, haciendo a los alumnos responsables de las decisiones que adoptan, tanto de forma individual como en grupo.

B. La teoría sociocultural de Vygotsky

Lev Semiónovich Vygotsky (1896-1934) está considerado como el padre del constructivismo social ya que define el conocimiento como un proceso de interacción entre el individuo y el entorno, pero el entorno entendido social y culturalmente, no sólo físicamente como lo entendía Piaget, concediendo al lenguaje una relevancia clave, ya que hace que el sujeto pueda interaccionar con la realidad a través de los otros y le hace partícipe del pensamiento de los demás.

Mientras que Piaget consideraba la inteligencia como un conjunto de esquemas mentales ampliables, poco a poco, Vygotsky considera la inteligencia no como el producto del desarrollo de las posibilidades mentales de un individuo aislado, sino como consecuencia de la interacción social.

Una de las bases del ABP es el aprendizaje cooperativo, gracias al cual se consigue la interacción social, que es vital para aprender según Vygotsky. (Peña Encina, 2010)

La comunicación y el diálogo cuentan con un papel protagonista en el aprendizaje cooperativo. Y es por eso que, el constructivismo social subyace profundamente en esta metodología.

C. El aprendizaje por descubrimiento de Bruner

Jerome Seymour Bruner (1915-2016) pensaba que el aprendizaje se produce a través de un proceso de descubrimiento. Sus estudios estaban orientados a cambiar la metodología impuesta en la enseñanza de su época que usaba principalmente el aprendizaje mecanicista, por el cual el alumnado era un receptor pasivo y el docente únicamente impartía la lección, en lugar de sacar rentabilidad al potencial del alumnado.

La metodología ABP potencia el aprendizaje por descubrimiento ya que el docente aporta material para que el individuo aprenda por sí mismo a elegir e investigar información en las fuentes proporcionadas. El descubrimiento conlleva investigación, usando pistas que aporta el docente, para poder hallar la solución del problema. (Peña Encina, 2010)

Por otra parte, el estímulo a la motivación gracias a las actividades propuestas y la participación activa del alumno, fomenta el aprendizaje por descubrimiento.

D. El aprendizaje significativo de Ausubel

David Paul Ausubel (1918-2008) cree básico el aprendizaje significativo y lo define de la siguiente manera:

> "Un aprendizaje es significativo cuando los contenidos son relacionados de modo no arbitrario y sustancial (no al pie de la letra) con lo que el alumno ya sabe. Por relación sustancial y no arbitraria se debe entender que las ideas se relacionan con algún aspecto existente específicamente relevante de la estructura cognoscitiva del alumno, como una imagen, un símbolo ya significativo, un concepto o una proposición". (Peña Encina, 2010)

Afirma que el aprendizaje por descubrimiento no debe ser contrapuesto al aprendizaje por recepción, ya que ambos pueden ser igual de eficaces. Se debe apostar por ambos, siempre y cuando, el aprendizaje del individuo se construya basándose en unas relaciones entre los conceptos previos en las estructuras mentales y los nuevos conceptos, de modo que, se puedan rememorar en cualquier momento.

Ausubel enunció algo muy interesante: "*si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un solo principio enunciaría este: el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese este y enséñese consecuentemente.*"

Por tanto, el trabajo del docente según lo anterior, sería:

- Presentar la información al alumnado tal y como debe aprenderse. Ser riguroso.
- Facilitar información al individuo de modo que él pueda, por sí mismo, adquirir nuevos conocimientos. Promocionar el aprendizaje por descubrimiento.
- Suministrar materiales pedagógicos de forma organizada y secuencial.
- Impulsar la participación del alumnado.

La metodología ABP promueve el aprendizaje significativo, ya que ayuda al alumnado:

➢ **A encontrar la motivación para aprender**. Este modo de trabajar incentiva al individuo ya que percibe la posibilidad de actuar sobre la realidad física, dado que, los problemas propuestos están contextualizados. Esto provoca que el individuo rememore los conocimientos adquiridos previamente, de manera más sencilla que si hubieran sido aprendidos a través de un aprendizaje mecanicista.

➢ **A generar en sus mentes lo que se denomina conflicto cognitivo**. Gracias a esta metodología, al formularse interrogantes de forma contínua, descubrir, investigar, el individuo se encuentra en situaciones de desequilibrio y sus esquemas mentales entran en contradicción (conflicto cognitivo) fomentando de este modo el aprendizaje significativo.

➢ **A relacionar conceptos matemáticos con conceptos de otras asignaturas** y de este modo, integrar la interdisciplinariedad, favoreciendo que se construyan estructuras mentales más duraderas.

E. Modelo de Van Hiele

Pierre M. Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof, un matrimonio de los años 50, describen en su obra un modelo que intenta dar explicación por un lado, cómo puede un docente ayudar a su alumnado para que mejore la calidad de su razonamiento y por otro cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico en los estudiantes.

Afirman que el aprendizaje de la geometría se adquiere a través de distintos niveles del pensamiento y por ello es necesaria una buena instrucción por parte del docente. Sugieren cinco fases secuenciales de aprendizaje con el objeto de ayudar al individuo a pasar de un nivel, al inmediatamente superior gracias a la clasificación de las actividades de enseñanza-aprendizaje. (Peña Encina, 2010)

Dichas fases son:

Fase 1: Información o discernimiento, en la que se facilita al alumnado material clarificador del contexto de trabajo.

Fase 2: Orientación dirigida, durante la cual se facilita material con el que el alumno pueda aprender los principales conceptos del campo de conocimiento que se está tratando.

Fase 3: Explicitación, en la que, gracias a los debates de clase, se tratará de que el individuo se haga partícipe del lenguaje geométrico usado.

Fase 4: Orientación libre, donde se facilitará al alumnado materiales con diferentes formas de uso y el docente proporcionará instrucciones que permitan diversas formas de actuación o resolución.

Fase 5: Integración, durante la que se animará al alumnado a recapacitar sobre sus acciones en las anteriores fases. Gracias a esta última fase, los autores consideran que el individuo promociona a un nuevo nivel de razonamiento. El alumno adquiere una nueva red de conexiones que relaciona con la totalidad del dominio estudiado. Este nuevo nivel de pensamiento, que ha alcanzado por propia intuición, ha sustituido al dominio de pensamiento anterior.

Todas estas fases forman parte de la metodología ABP, como podremos ver posteriormente en el apartado 4 de este documento.

3. El Marco Conceptual Matemático; La Historia del Problema Isoperimétrico

El marco conceptual matemático del problema isoperimétrico es muy extenso y se remonta a la época del nacimiento de la matemática euclídea, por lo que son muchas las publicaciones matemáticas que hacen referencia a él o que lo estudian. Sin contar con las innumerables aplicaciones prácticas que tiene en el mundo real.

El problema isoperimétrico puede clasificarse como un problema de optimización por lo que está relacionado directamente con el álgebra y las inecuaciones. Más tarde se relacionaría con los problemas de cálculo de máximos y mínimos, y por tanto con el cálculo diferencial, hasta llegar a nuestros días en los que ha tenido relación directa con las funciones de Riemann, las series de Fourier (Hurwitz, 1902) o la geometría integral (Santaló, 1940).

En definitiva, el problema nació como respuesta a unas necesidades físicas de los antiguos, obteniendo una interesante colección de soluciones intuitivas, que con el tiempo se verían abordadas por las nuevas herramientas matemáticas que se iban desarrollando, hasta llegar a nuestros días generando numerosas relaciones con diferentes ámbitos de las matemáticas. Por eso creo importante hacer un repaso histórico de este problema.

En la antigüedad las Matemáticas tenían un carácter eminentemente práctico, que solía ir asociado a profesiones o gremios, como los comerciantes, los constructores, los canteros, etc. Esta practicidad era la que obligaba a desarrollar nuevas herramientas y formas de cálculo en función de los problemas que iban surgiendo. Esta practicidad es la que imponía a las matemáticas una base deductiva de carácter inductivo. En este ámbito se mueven civilizaciones como las de los babilonios (4000 a 3000 a.C.), los mesopotámicos (1900 a 1600 a.C.), los egipcios (3150 al 31 a.C.), los fenicios (1200 a 539 a.C.), los chinos (desde el 2070 a.C.), etc.

Pero fueron los griegos (desde el 600 a.C.al 300 d.C.) los que comenzaron a recopilar el conocimiento de las civilizaciones anteriores y formalizarlos por escrito, con la ayuda de la lógica y el razonamiento deductivo. Fue precisamente ese proceso de formalización lógica y abstracción, el que les hizo estudiar y avanzar más en matemáticas que ningún otro pueblo de su época. También ayudó mucho el que lo dejaran por escrito en soportes menos deteriorables, como el papiro. Ya que hasta entonces muchos de los conocimientos matemáticos se transmitían de forma verbal o con soportes frágiles como tablillas de barro. (*Matemática Griega*, 2021)

3.1. Precedentes del problema. Euclides

Los matemáticos griegos vivían en ciudades dispersas a lo largo del Mediterráneo Oriental, desde Italia hasta el Norte de África (algo muy útil para sus numerosos intercambios comerciales y culturales), pero tenían un lenguaje y cultura comunes. Las matemáticas griegas del período siguiente a Alejandro Magno se llaman matemáticas helenísticas.

Todos los registros de las matemáticas pre-helenísticas se basan en el uso del razonamiento inductivo, es decir, observaciones repetidas usadas para establecer reglas generales. Los matemáticos griegos, por contra, usaban el razonamiento deductivo. Los griegos usaron la lógica para deducir conclusiones, o teoremas, a partir de definiciones y axiomas. La idea de las matemáticas como un conjunto de teoremas basados en axiomas está explícita en los Elementos de Euclides (hacia el 300 a. C.).

Se cree que las matemáticas griegas empezaron con Tales (624 a. C. - 546 a. C.) y Pitágoras (582 a. C. - 507 a. C.). Aunque el grado de su influencia puede ser discutido, fueron inspiradas muy posiblemente por las matemáticas egipcias, mesopotámicas e indias. Según la leyenda, Pitágoras viajó a Egipto para aprender matemáticas, geometría y astronomía de los sacerdotes egipcios, que se cree, por aquel entonces ya eran capaces de predecir eclipses.

Thales, el primer "filósofo" Griego estuvo siete años estudiando en Egipto y sus conocimientos de Astronomía son, sin duda, debidos a su aprendizaje en Egipto. La edad de oro de las ciencias en Grecia coincide con la dinastía Ptolomaica (330 D.C.), la construcción de Alejandría y la fundación de su biblioteca. La mayoría de astrónomos Griegos se formaron allí. También es conocido que algunos de los astrónomos egipcios fueron acogidos por los Griegos y recibieron nombres Griegos. Uno de ellos fué Ptolemeo (150 A.C), autor del Almagest, "El gran tratado sobre astronomía" que ha llegado hasta nuestros días, otro es Clemente de Alejandría (200 D.C).

Se puede dar por aceptado que parte del saber sobre astronomía de los sacerdotes egipcios y de su habilidad para predecir eclipses solares nos llega a través de los clásicos griegos. Uno de los ejemplos más antiguos de un reloj de sol se encuentra en Egipto y data de 1500 a.C. El Techo solar de Senmut pintado sobre el 1460 a.C. muestra constelaciones como Sirius, Orion y planetas como Venus, Mercurio, Saturno y Júpiter. La copia con datación más antigua de un almanaque es de 1220 a.C., de los tiempos de Ramses el grande. En el 1100 a.C Amenhope escribió el "Catálogo del Universo" en el cual se identifican la mayoría de las constelaciones conocidas. Curiosamente el libro no menciona ni Sirius ni ninguno de los planetas ya conocidos previamente por los Egipcios. Como mencionamos anteriormente no se ha conservado ninguna prueba documentada que indique el conocimiento sobre la Astronomía en el antiguo Egipto. El papiro Viena que habla de eclipses solares y lunares fue seguramente copiado por un escriba a finales del 200 a.C. ya que tiene referencias al saber de los Babilonios.

Volviendo de nuevo a los griegos, Tales hizo uso de la geometría para resolver problemas como el cálculo de la altura de las pirámides o la distancia de los barcos desde la orilla. Se cree que Pitágoras hizo la primera demostración del teorema que lleva su nombre, aunque el enunciado del teorema tiene una larga historia que podría dar para un estudio más exhaustivo. En su "comentario al primer libro de los Elementos de Euclides", Proclo asegura que Pitágoras expresó el teorema que lleva su nombre y construyó ternas pitagóricas algebraicamente antes que de forma geométrica. La Academia de Platón tenía escrito en su entrada, el lema "Que no pase nadie que no sepa Geometría".

Los Pitagóricos probaron la existencia de números irracionales. Eudoxio (408 al 355 a. C.) introdujo el método exhaustivo, un precursor de la moderna integración. Aristóteles (384 al 322 a. C.) fue el primero en escribir las leyes de la lógica.

Y por fin llegamos a Euclides (hacia el 300 a. C.) que aportó la muestra más temprana de la metodología matemática que usamos hoy día, con definiciones, axiomas, teoremas y demostraciones. También estudió las cónicas.

Su vida es poco conocida, excepto que vivió en Alejandría (ciudad situada al norte de Egipto) durante el reinado de Ptolomeo I (367 a.C.–283 a.C.). En esa ciudad —uno de los centros intelectuales de la época, con su Biblioteca y su Museo— fundó una importantísima escuela matemática y escribió su obra "Elementos", cuyo texto original no se conserva, pero del que existen copias posteriores tanto griegas como latinas y árabes. Ciertos autores árabes dicen que Euclides nació en Tiro y vivió en Damasco. Según el filósofo Proclo de Licia, Euclides había estudiado en la Academia de Platón (aunque parecía no haber estudiado a Aristóteles), cuya influencia se aprecia en su obra, en la que dedica una parte a la construcción de los cinco sólidos platónicos (tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro), del mismo modo que Euclides reunió aportes de Eudoxo de Cnido relativos a la teoría de la proporción, y de Teeteto sobre los poliedros regulares. El resto de su vida es un misterio, tal y como menciona el escritor británico Edward M. Foster: "A decir verdad, no sabemos nada de él, hoy lo consideramos más como una rama del saber que como un hombre". Otro dato es que era hijo de Naucrates y se barajan tres hipótesis sobre su obra:

- Euclides fue un matemático histórico que escribió los Elementos y otras obras atribuidas a él.
- Euclides fue el líder de un equipo de matemáticos que trabajaba en Alejandría. Todos ellos contribuyeron a escribir las obras completas de Euclides, incluso firmando los libros con el nombre de Euclides después de su muerte.
- Las obras completas de Euclides fueron escritas por un equipo de matemáticos de Alejandría que tomaron el nombre Euclides del personaje histórico Euclides de Mégara, que había vivido unos cien años antes.

Otras obras matemáticas como los Fenómenos (una descripción del firmamento), los Cálculos (una colección de teoremas geométricos), la División del canon (un estudio matemático de la música), la Óptica y otras más se atribuyeron durante mucho tiempo a Euclides. Pero la mayoría de los historiadores cree que alguna o todas estas obras (aparte de los Elementos) se le han atribuido erróneamente. Los historiadores también ponen en duda la originalidad de varias de sus aportaciones. Lo más probable es que las secciones geométricas de los Elementos fueran en un principio una recopilación de las obras de matemáticos anteriores, como Eudoxo, pero es indiscutible que Euclides hizo diversos descubrimientos en la teoría de números. Su famoso algoritmo para el cálculo del máximo común divisor de dos números aparece por vez primera en el volumen séptimo de los Elementos.

En los trece volúmenes de los Elementos de Euclides se recopila gran parte del saber matemático de su época, representados en el sistema axiomático conocido como Postulados de Euclides, los cuales dan lugar a la Geometría euclidiana, de una forma sencilla y lógica. También se abordan todos los problemas fundamentales de la matemática, aunque siempre bajo un lenguaje geométrico. Además de problemas geométricos, se tratan problemas aritméticos, algebraicos y de análisis matemático. El libro incluye los teoremas más comunes sobre geometría, como el Teorema de Pitágoras, e incluyen una demostración de que la raíz cuadrada de dos es un número irracional y otra sobre la infinitud de los números primos.

El contenido de los libros es el siguiente:

- Libros 1 al 4 tratan sobre geometría plana.
- Libros 5 al 10 tratan sobre razones y proporciones.
- Libros 11 al 13 tratan sobre geometría de los cuerpos sólidos.

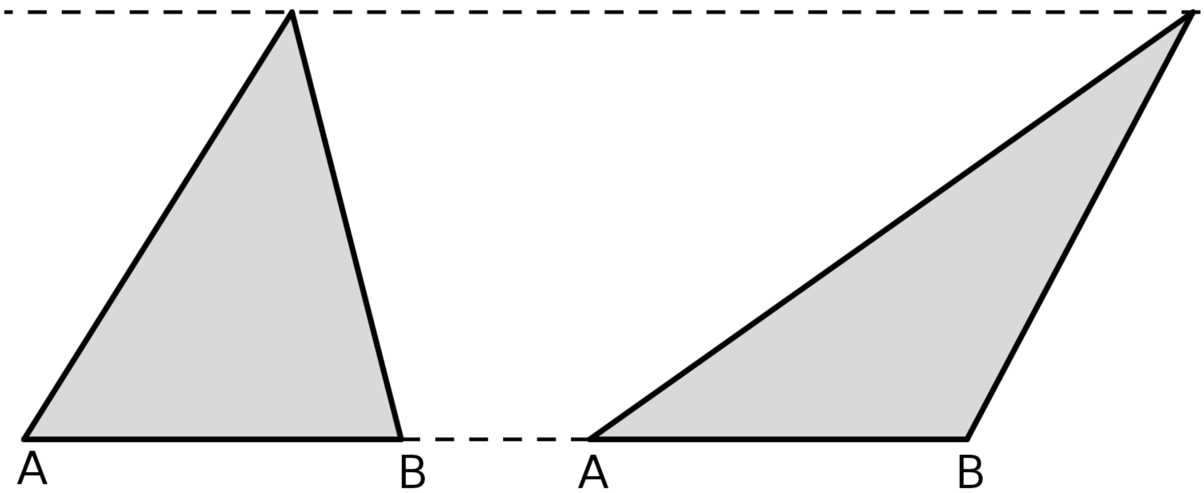
Como ejemplo del contenido del libro podemos citar cómo en el primer tomo se postulan los 5 axiomas que definen la geometría Euclidiana:

1. Una línea recta puede ser dibujada uniendo dos puntos cualesquiera.
2. Un segmento de línea recta se puede extender indefinidamente en una línea recta.
3. Dado un segmento de línea recta, puede dibujarse un círculo con cualquier centro y distancia.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Si una línea recta corta a otras dos, de tal manera que la suma de los dos ángulos interiores del mismo lado sea menor que dos rectos, las otras dos rectas se cortan, al prolongarlas, por el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.

Dentro de esta gran obra, que es la segunda más publicada de la Historia detrás de la Biblia, se encuentran también las proposiciones 35 a 38, donde queda de manifiesto que los triángulos con la misma base y cuyo vértice opuesto está situado en una recta paralela a la base, tienen igual área pero un perímetro diferente para cada vértice escogido distinto (véase en Geogebra). Lo mismo ocurre para los paralelogramos que, teniendo idéntica base, poseen el lado opuesto sobre la misma paralela a dicha base (véase en Geogebra).

Figura 2

Triángulos con la misma base y altura tienen igual área pero no perímetro.



Nota. Adaptado de "La historia del problema isoperimétrico clásico con geometría elemental" (p. 337), por P. J. Herrero, 2012, La Gaceta de la RSME, Vol. 15, Núm. 2

Como podemos ver la distancia AB en los dos triángulos es la misma, y por tanto lo es su base. Por otro lado, la altura de los triángulos coincide con la distancia que hay entre las dos rectas paralelas, y por tanto es siempre la misma independientemente del vértice superior escogido para formar el triángulo. Como el área del triángulo responde a la expresión Área=Base*Altura/2 y hemos visto que tanto la base como la altura son constantes independientemente del vértice superior escogido, podemos concluir que todos esos triángulos tienen siempre el mismo área. Pero claramente vemos que las longitudes de los dos lados no fijados varían, por lo que el perímetro (la suma de la longitud de sus lados) cambia.

Y es aquí donde nace el germen para lo que fuera posteriormente el problema isoperimétrico, ya que el siguiente paso lógico es preguntarnos; "si el área permanece constante, ¿cuál es el triángulo de todos ellos que tiene el mínimo perímetro?"

Está claro que el razonamiento que nos ha llevado a hacernos esa pregunta es un pensamiento claramente basado en la economía. Es decir, si todos los triángulos tienen el mismo área, ¿cuál requiere de menos cantidad de cuerda o valla para cercarlo?

De este modo se nos cuelan, de nuevo, los antiguos razonamientos basados en las mediciones o parcelamientos de tierras, que eran la base práctica de los anteriores avances matemáticos. Pero que en mi opinión constituye una de las grandes ventajas didácticas a la hora de enseñar las matemáticas hoy en día, ya que las matemáticas de primaria y secundaria pecan de abstractas y poco relacionadas con el mundo real.

3.2. El primero es Zenodoro

Así había quedado propuesto el problema desde Euclides hasta que llegó uno de los protagonistas de nuestra historia, Zenodoro.

Zenodoro (c. 200- c. 140 a. C.) era un matemático de la Antigua Grecia. Se sabe poco sobre la vida de Zenodoro, a pesar de que pudo haber sido amigo de Filónides, e hizo dos viajes a Atenas, como cuenta Filónides en su biografía. Por el estilo de su escritura, se cree que vivió no mucho más tarde que Arquímedes.

Es mencionado en Diocles en "*Espejos en llamas". Zenodoro es el autor del tratado "*Sobre las figuras isométricas*", ahora perdido. Afortunadamente, sabemos muchas de sus proposiciones gracias al comentario de Teón de Alejandría (335-405) sobre la *Syntaxis* de Claudio Ptolomeo, y Pappus (290-350) también recoge las proposiciones de Zenodoro en el libro V de su "*Colección Matemática*".

En su "*Sobre las figuras isométricas*", Zenodoro estudia las áreas y perímetros de diferentes figuras geométricas. Y lo que es más importante, plantea el problema de encontrar la figura plana con perímetro fijo, que maximice el área, o lo que es equivalente, que con área fija minimice el perímetro (que era el caso estudiado por Euclides). Siendo este planteamiento el que adoptaría el problema isoperimétrico hasta más adelante.

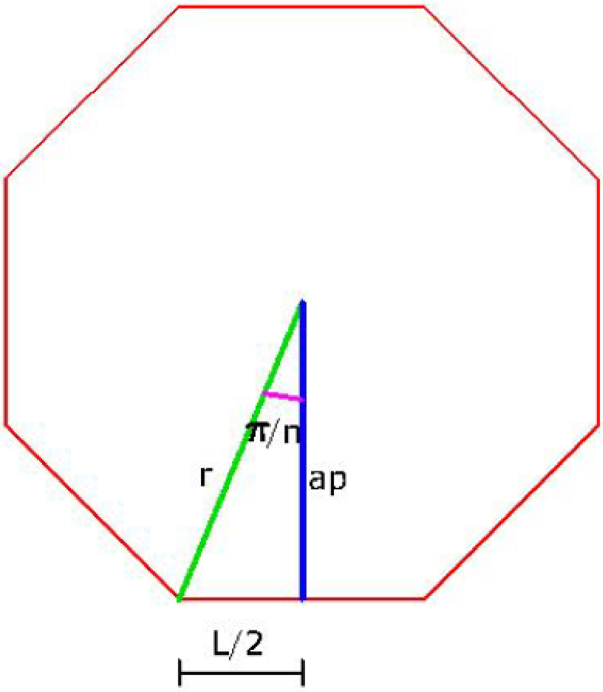
Antes de entrar en sus proposiciones, apunta **la solución a las estudiadas por Euclides** enunciando que "*Dados dos triángulos con la misma base y el mismo perímetro, el triángulo isósceles tiene el mayor área.*"

De ese estudio deducen cuatro proposiciones, que se demostrarían posteriormente de modo formal, pero que ya incluyen demostraciones de tipo geométrico:

1. ***Proposición:*** *De todos los polígonos regulares de perímetro igual, el de área mayor es el que tiene más ángulos.*

Figura 3

Cálculo del área de un polígono regular, de n lados de longitud L.



Nota. (Reyes Iglesias, 2021, diapositiva 2)

$$Área = \frac{Apotema}{2} \cdot Perímetro$$

$$Perímetro(n\ lados) = n \cdot Longitud\ lado$$

$$Apotema = \frac{Longitud\ lado}{2} \cdot cotg\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$Área(n, Lado) = \frac{n}{4} Lado^2 \cdot cotg\left(\frac{\pi}{n}\right) \text{ que es una función creciente para } n \text{ si } n \cdot Lado = cte.$$

Poniendo el área en función del perímetro (n*lado) y del número de lados (n), es fácil construir una tabla para ver cómo evoluciona al aumentar el número de lados si el perímetro permanece constante:

Tabla 4

Áreas en función del Perímetro de los polígonos regulares. Fuente propia.

Polígono regular	Área en términos del perímetro P
Cuadrado (4 lados)	0.0625 x P^2
Pentágono (5 lados)	0.0688 x P^2
Hexágono (6 lados)	0.0722 x P^2
Heptágono (7 lados)	0.0742 x P^2
Octágono (8 lados)	0.0754 x P^2
Nonágono (9 lados)	0.0763 x P^2
Decágono (10 lados)	0.0769 x P^2
Endecágono (11 lados)	0.0774 x P^2
Dodecágono (12 lados)	0.0778 x P^2
13-gono (13 lados)	0.0780 x P^2
Si $n \to \infty \Rightarrow$ Círculo	Máximo = 0.0796 x P^2

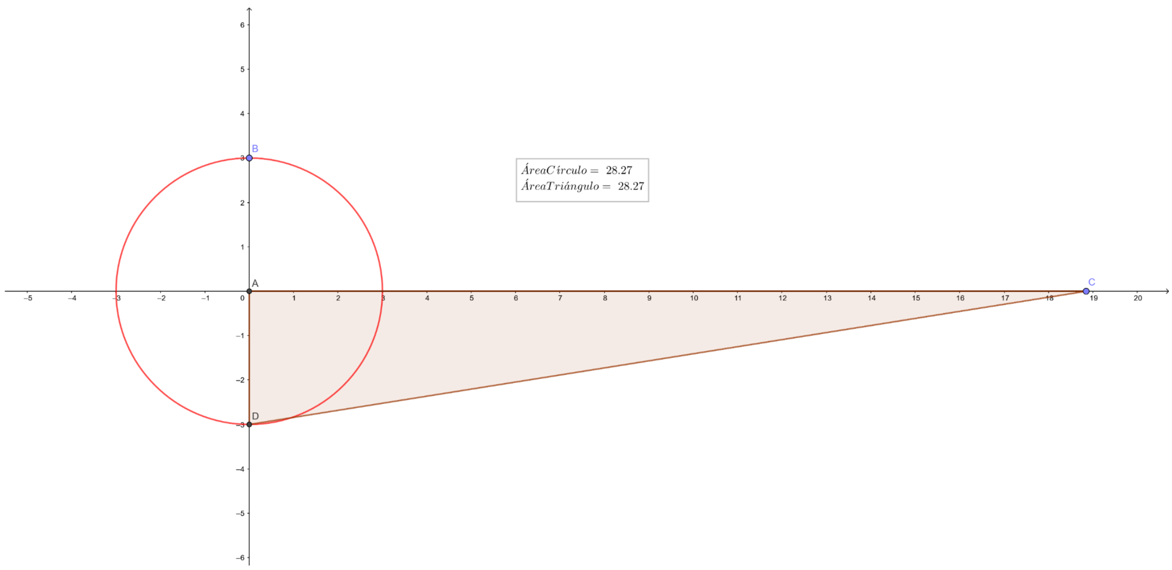
Como podemos ver el área de un polígono regular aumenta al aumentar el número de lados, si mantenemos constante el perímetro. Y llevándolo al límite, si el número de lados es infinito, tenemos la expresión del área del círculo, demostrando así que tiene más área que cualquier polígono regular.

2. ***Proposición:*** *Un círculo es mayor que cualquier polígono regular de contorno igual.*

Esto ya lo intuimos en la tabla construida anteriormente, pero Zenodoro recurrió a un lema previo de **Arquímedes**: el área de un círculo coincide con el área de un triángulo rectángulo cuyo cateto menor es el radio del círculo y con cateto mayor un segmento de longitud la de la circunferencia (ver en Geogebra.)

Figura 4

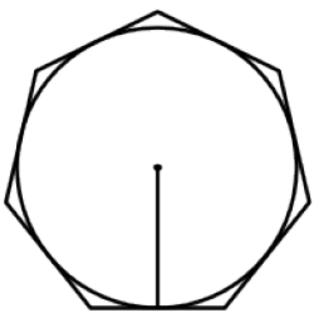
Triángulo rectángulo del mismo área que el círculo asociado por el lema de Arquímedes.
Fuente propia.



Por otra parte, el área de un polígono regular es la mitad del producto de su apotema por el perímetro (algo que ya vimos en la proposición anterior); por tanto solo queda ver que la apotema de un polígono regular cuyo perímetro coincide con el de un círculo, es menor que el radio de dicho círculo. **O viéndolo a la inversa**, basta darse cuenta de que si el radio del círculo y la apotema del polígono fueran iguales, el polígono tendrá el círculo inscrito con lo que su perímetro siempre será mayor.

Figura 5

Un círculo tiene mayor área que cualquier polígono regular con idéntico perímetro.



Nota. Adaptado de "La historia del problema isoperimétrico clásico con geometría elemental" (p. 338), por P. J. Herrero, 2012, La Gaceta de la RSME, Vol. 15, Núm. 2

Así llegamos a la conclusión de que si círculo y polígono tienen el mismo perímetro, el área siempre será mayor el del círculo, ya que el radio siempre será mayor que la apotema.

3. ***Proposición:*** *De todos los polígonos del mismo número de lados y perímetro igual, el equilátero y equiangular es el mayor en área*.

   La demostración se basa en fijar el número de lados y dividir cada posible polígono de ese número de lados en triángulos, de modo que la suma de sus áreas sea máxima.

   Si se busca la forma de maximizar el área del triángulo, eso es algo que ya se vió en la solución de las proposiciones de Euclides, el triángulo isósceles es siempre el de máxima área (eso incluye al equilátero).

   De modo que si dividimos el polígono en el menor número de triángulos isósceles tendremos el polígono de máxima área. Esta construcción sólo es posible en los polígonos regulares.

   Se puede ver gráficamente en la siguiente actividad de Geogebra.

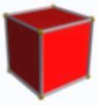
4. ***Proposición:*** *De todas las figuras sólidas cuyas superficies son iguales, la esfera es la mayor en contenido sólido*.

   Aquí pasamos al ámbito de los sólidos, donde Euclídes ya había estudiado los sólidos platónicos. Para hacer su estudio, vamos a usar una tabla similar a la que usamos en la proposición 1, en la que pondremos poliedros regulares con un número de caras creciente y compararemos las fórmulas que nos dan sus áreas y volúmenes.

   Como podemos ver en la tabla 5, ya creada, para un volumen unitario fijo el cuerpo con menos superficie es la esfera. Aunque esta proposición es lógica una vez enunciadas las anteriores, una demostración de esta proposición requeriría cálculo integral u otras herramientas que requieren un nivel superior en matemáticas al que tienen los alumnos de bachillerato. Por eso nos contentaremos con la deducción inductiva que podemos hacer de la tabla 5. Recordemos que si para un volumen fijo, el área mínima es el de la esfera, esto implica que para un área fija (caso isoperimétrico) el volumen máximo ha de ser el de la esfera, que es lo que pretendíamos demostrar.

Tabla 5

Relación Área/Volúmen de los poliedros regulares y la esfera.

Cuerpo	masa al coseno	Largo a	SA	Volumen	Relación SA/V	Relación SA/V para un volumen unitario
Tetraedro		lado	$\sqrt{3}a^2$	$\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$	$\frac{6\sqrt{6}}{a} \approx \frac{14.697}{a}$	7.21
Cubo		lado	$6a^2$	a^3	$\frac{6}{a}$	6
Octaedro		lado	$2\sqrt{3}a^2$	$\frac{1}{3}\sqrt{2}a^3$	$\frac{3\sqrt{6}}{a} \approx \frac{7.348}{a}$	5.72
Dodecaedro		lado	$3\sqrt{25+10\sqrt{5}}a^2$	$\frac{1}{4}(15+7\sqrt{5})a^3$	$\frac{12\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{(15+7\sqrt{5})a} \approx \frac{2.694}{a}$	5.31
Icosaedro		lado	$5\sqrt{3}a^2$	$\frac{5}{12}(3+\sqrt{5})a^3$	$\frac{12\sqrt{3}}{(3+\sqrt{5})a} \approx \frac{3.970}{a}$	5.148
Esfera		radio	$4\pi r^2$	$\frac{4\pi r^3}{3}$	$\frac{3}{r}$	4.836

Nota. Adaptado de "Relación superficie-volumen" [Tabla], por colaboradores de Wikipedia, 2021, Wikipedia, La enciclopedia libre, Recuperada el 17 junio 2021

A pesar de estos avances matemáticos en el problema isoperimétrico, sólo estábamos en el ámbito de las proposiciones y quedaba aún un largo y arduo camino hasta llegar a las demostraciones.

Pero mientras tanto la ficción y la realidad se fusionaron como sólo los poetas romanos sabían hacer en uno de los relatos más emocionantes y legendarios relacionados con el problema: La Leyenda de la Reina Dido.

3.3. La leyenda de la reina Dido

Su leyenda se conoce principalmente a través del relato incluido en "La Eneida" del poeta romano Virgilio (29 a.C.).

Elisa de Tiro era hija de Matán I –el rey de Tiro (ciudad fenicia)– y hermana de Pigmalión y de Ana (la hermana menor).

Siqueo, que era sacerdote del templo de Melkart en Tiro (divinidad identificada con Heracles/Hércules por griegos y romanos), poseía vastos tesoros escondidos que codiciaba Pigmalión y había demostrado en varias ocasiones su interés por Elisa.

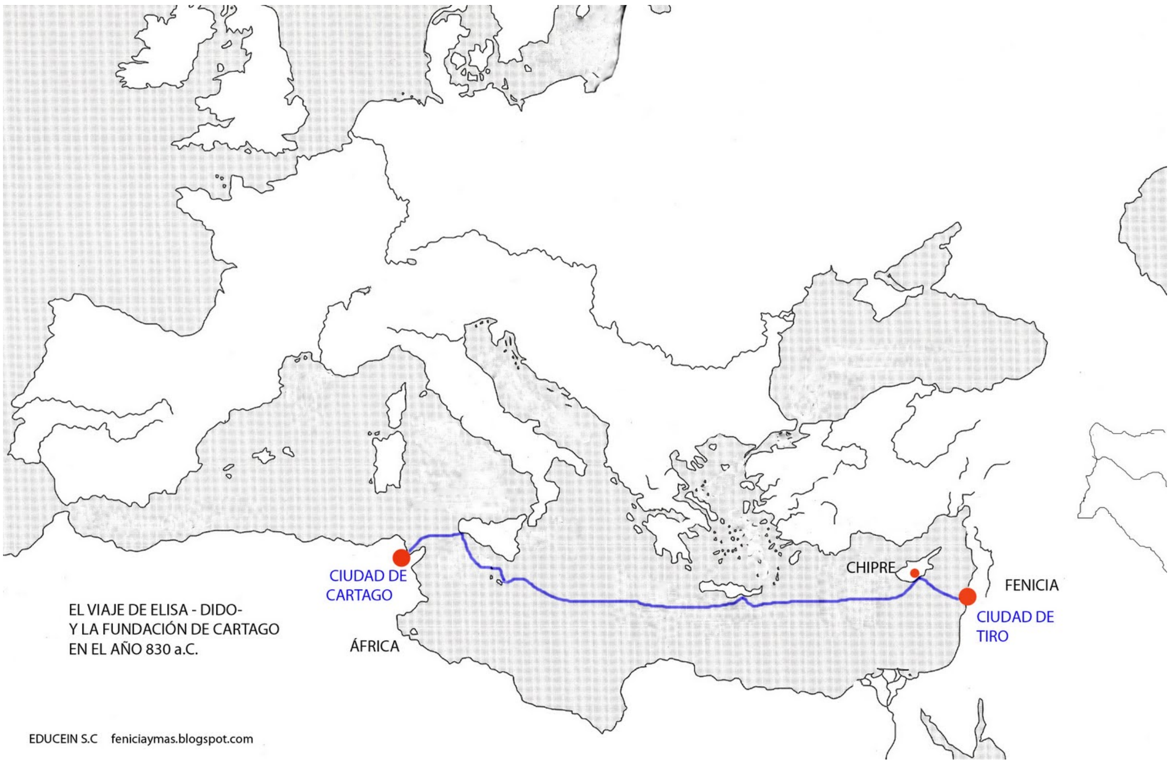
Una vez muerto Matán I y nombrado rey, Pigmalión obligó a su hermana Elisa a casarse con Siqueo para tratar así de averiguar el paradero de los tesoros, sin decirle nada a su hermana. Elisa no amaba a Siqueo, pero él sí estaba enamorado de ella. Al poco tiempo, Pigmalión le sugirió a su hermana que sería conveniente saber dónde se escondían las riquezas de Siqueo. Elisa comprendió entonces que la había utilizado. Pero aún así, Elisa averiguó dónde estaban escondidos los tesoros, aunque no se lo contó a su hermano.

Los tesoros habían sido enterrados en el jardín del templo, y Elisa mintió a Pigmalión diciéndole que se hallaban ocultos debajo del altar, con la intención de tenerlo entretenido mientras ella huía. Harto de esperar, esa misma noche, Pigmalión envió a unos asesinos a matar a Siqueo. Tras perpetrar el asesniato, los esbirros cavaron infructuosamente bajo el altar, tal y como les habían ordenado.

Elisa encontró a su marido asesinado, como ella se imaginaba, y corrió a desenterrar el tesoro del jardín. Con él en su poder, huyó de Tiro llevándose a su hermana Ana y un séquito de doncellas, ayudada por amigos de Siqueo.

Figura 6

El viaje de Elisa - Dido y la fundación de Cartago en el año 830 a.C.



Nota. Adaptado de “La leyenda de la reina Dido” [Imagen], por L. Moremar, 2015, Blogger.com (http://matematizaturealidad.blogspot.com/2015/10/la-leyenda-de-la-reina-dido.html)

Tras un azaroso viaje Elisa llegó a las costas de África, donde vivían los gétulos o getulos, una tribu de libia cuyo rey era Jarbas. Pidió hospitalidad y un trozo de tierra para instalarse en ella con su séquito. Jarbas que quería esquivar el tema de la donación de terrenos, le expuso que le cedería tanta tierra como ella pudiera abarcar con una piel de buey. Elisa, demostrando unas inusitadas dotes como geómetra, hace cortar tiras muy finas a partir de la piel del animal y consigue acotar un extenso perímetro.

Figura 7

Dido acota su tierra para la fundación de Cartago.

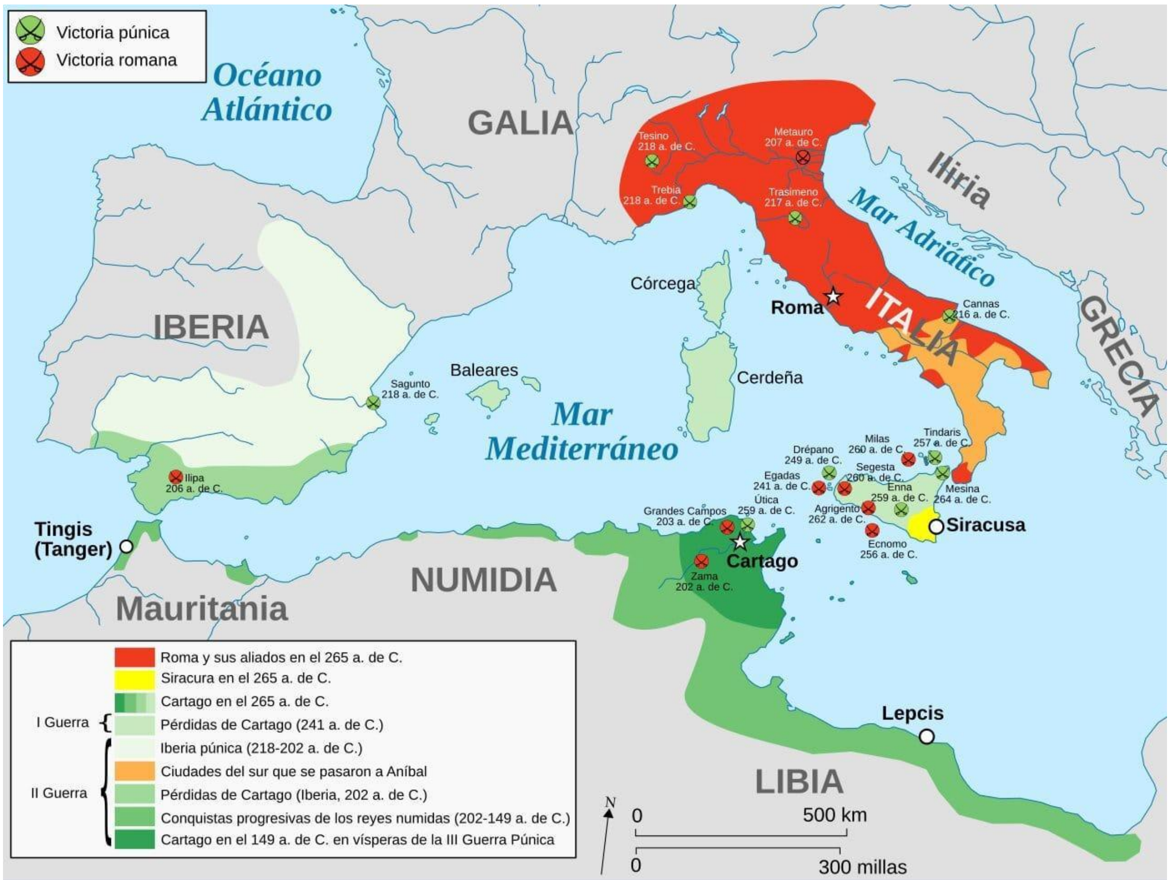
Nota. Adaptado de “Historische Chronica” por M. Merian the Elder, 1630, Berlin, Sammlung Archiv für Kunst und Geschichte.

Gracias a esto pudo erigir una fortaleza llamada Birsa, que más tarde se convertiría en la ciudad de Cartago o Qart-Hadašh (que en fenicio significaba "Ciudad Nueva"), sobre un promontorio existente entre el lago de Túnez y la laguna Sebkah er-Riana, que desembocaba en mar abierto. Debido a ello es coronada como reina y sus súbditos la bautizan como Reina Dido.

La historia continúa acabando trágicamente para Dido y dando justificación al odio eterno entre romanos y cartagineses que daría paso a las guerras Púnicas en los siglos I y II, en las que se vió envuelta la península ibérica.

Figura 8

Evolución de las posesiones cartaginesas en el transcurso de las guerras púnicas.



Nota. Adaptado de "Punic Wars-es.svg" [Imagen], por Wikimedia Commons, the free media repository, 2020, (https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/3e/Punic_wars-es.svg)

Dido se había enfrentado –y lo había resuelto con gran destreza– al primer problema isoperimétrico (siglo IX a.C.): el de encontrar, entre todas las curvas simples posibles, la que encierra la mayor área de una zona limitada por la costa. La astuta reina formó una semicircunferencia de entre 1 y 2 kilómetros y consiguió circundar una superficie de entre 10 y 25 hectáreas… Y de este modo nace la leyenda de una de las primeras mujeres de la historia que destaca por su contribución a las matemáticas.

Actividad de Geogebra de la Reina Dido: https://www.geogebra.org/m/fc33w7cb

Figura 9

Terrenos ocupados por la ciudad de Cartago.

Nota. Adaptado de "Asedio y destrucción de Cartago" [Imagen], por R. Martín, 2018, Blogger.com (https://cosasdehistoriayarte.blogspot.com/2018/04/asedios-asedio-y-destruccion-de-cartago.html)

3.4. El problema se generaliza a las curvas

Tal y como dice la wikipedia, "*el problema isoperimétrico está relacionado conceptualmente con el principio de mínima acción de la física, que puede ser reescrito: ¿cuál es el principio de acción que encierra el mayor área, con la mayor economía de esfuerzo? El filósofo del siglo XV, Nicolás de Cusa, consideró la acción rotatoria, el proceso por el que se genera un círculo, como el reflejo más directo, en el dominio de las impresiones sensoriales, del proceso por el que se crea el universo.*"

El astrónomo alemán Johannes Kepler recurrió al principio isoperimétrico al discutir la morfología del sistema solar, en Mysterium Cosmographicum (El misterio sagrado del Cosmos, 1596).

Otros dos grandes de las matemáticas del siglo XVIII, Joseph-Louis de Lagrange y Leonhard Euler, participaron notablemente en la resolución de problemas isoperimétricos, problemas que habían dado mucho que hablar durante más de medio siglo, usando una nueva técnica: el cálculo de variaciones.

Pero, no intentaron la demostración del problema específico, de la curva de una longitud dada que abarca una mayor área.

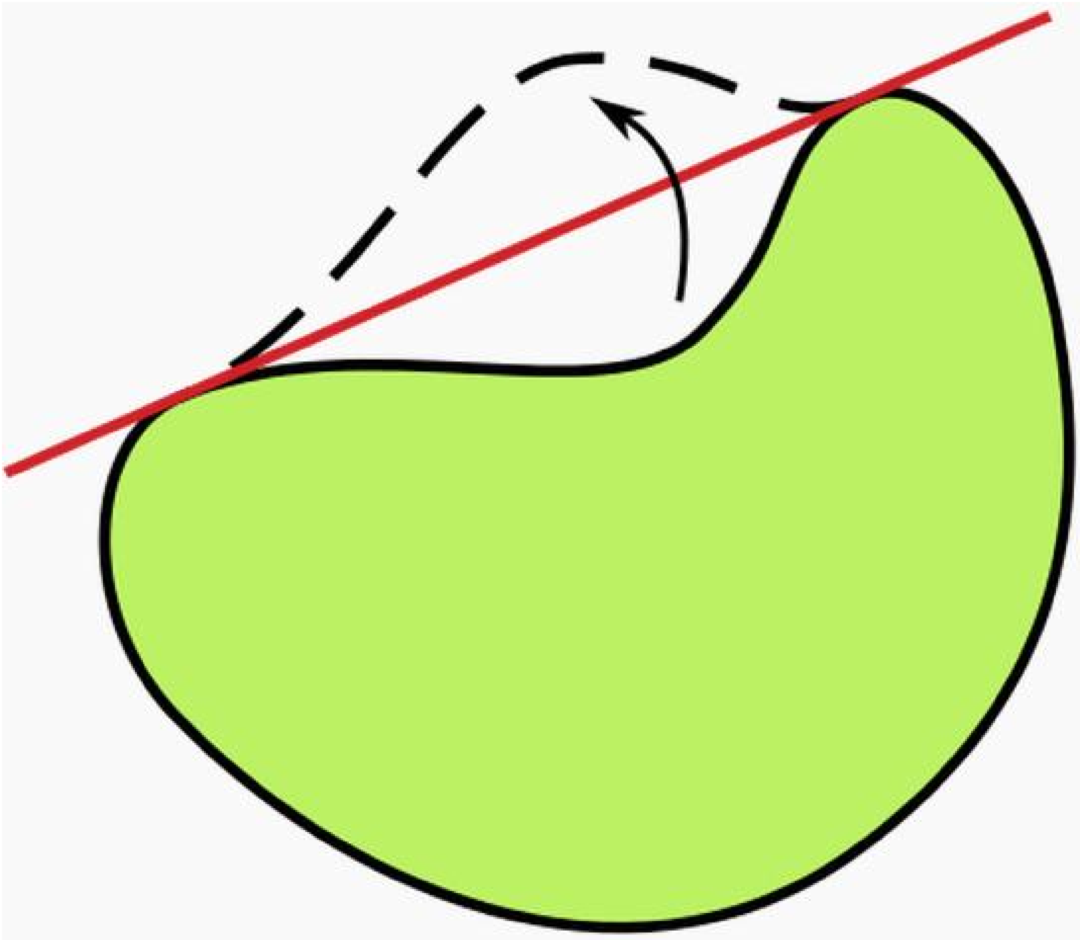
A pesar de que el círculo parece ser la solución más obvia al problema, comprobar este hecho es bastante difícil. El primer avance hacia la solución, lo hizo Jakob Steiner en 1838 (geómetra suizo), usando un método geométrico llamado simetrización de Steiner. Steiner demostró que "si existía" una solución, entonces tenía que ser el círculo. La prueba de Steiner la completarían más adelante varios matemáticos.

Steiner empieza usando algunas construcciones geométricas fáciles:

- Cualquier curva que tenga una parte cóncava, puede hacerse convexa sin más que trazar una línea tangente a la curva en esa zona, y aplicar simetría respecto a ella a la curva cóncava:

  Figura 10

  Cualquier parte cóncava se puede hacer convexa por simetría con la tangente.



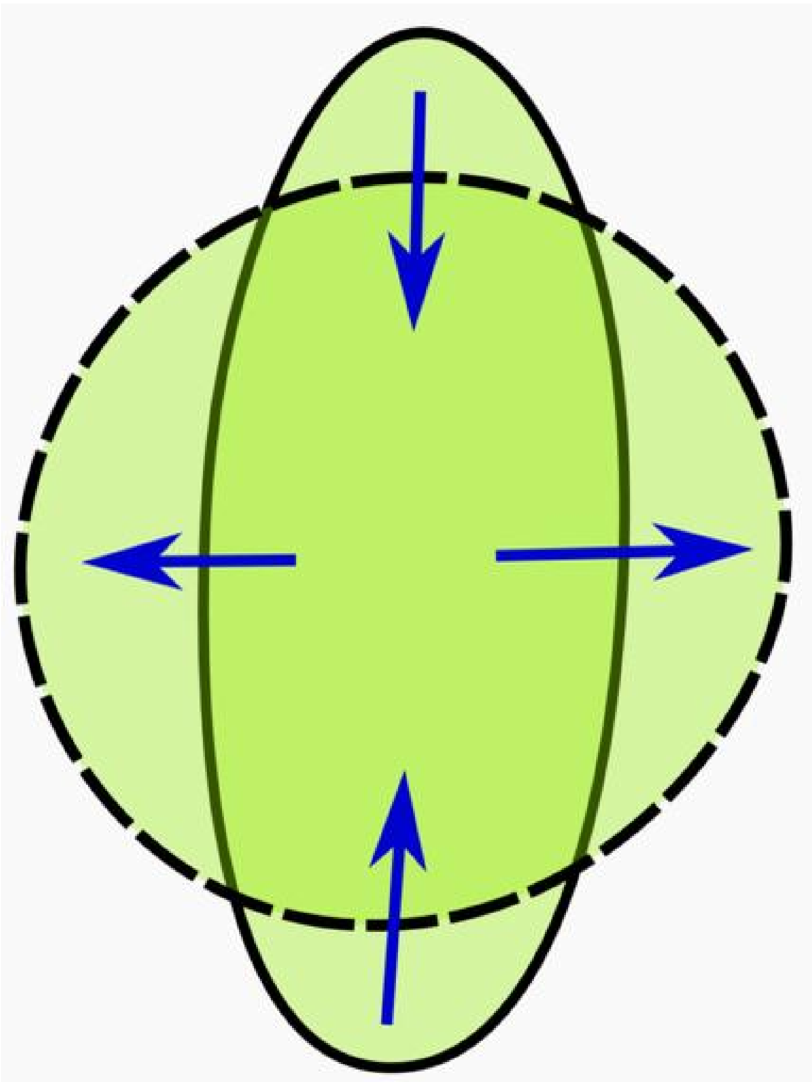
Nota. Adaptado de "Isoperimetric inequality illustr1.svg" [Imagen], por O. Alexandrov, 2007, (https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/03/Isoperimetric_inequality_illustr1.svg)

Esto implica que podemos transformar cualquier curva cóncava en convexa, consiguiendo más área con el mismo perímetro. O lo que es lo mismo: Las curvas de máxima área son completamente convexas, en la medida de lo posible.

- Además fijémonos en que: Una región alargada puede hacerse más redonda, manteniendo fijo su perímetro y aumentando así su área (la cantidad de superficie que encierra).

Figura 11

Una región alargada puede hacerse más redonda conservando su perímetro.

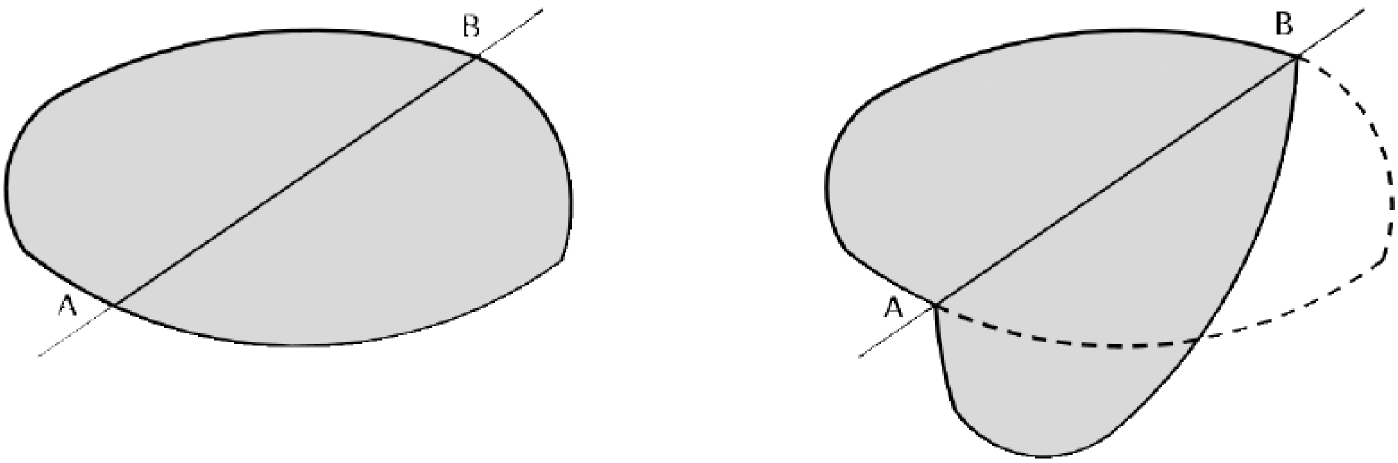


Nota. Adaptado de “Isoperimetric inequality illustr2.svg” [Imagen], por CheCheDaWaff, 2016, (https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d4/Isoperimetric_inequality_illustr2.svg)

- Ya hemos visto que una figura maximal ha de ser completamente convexa. Supongamos que K es una figura cuyo perímetro es fijo y que tiene área máxima. Fijado un punto A de su frontera, podemos encontrar otro punto B de manera que la recta AB divide el perímetro en dos partes iguales; entonces esta recta también divide el área de superficie de K en dos partes iguales, pues en caso contrario, bastará tomar la figura formada por la parte que tiene mayor área y proyectar su simétrica respecto de AB para formar una nueva figura con el mismo perímetro que la original pero con área mayor.

Figura 12

Un segmento que divide por la mitad el perímetro también divide por la mitad el área.



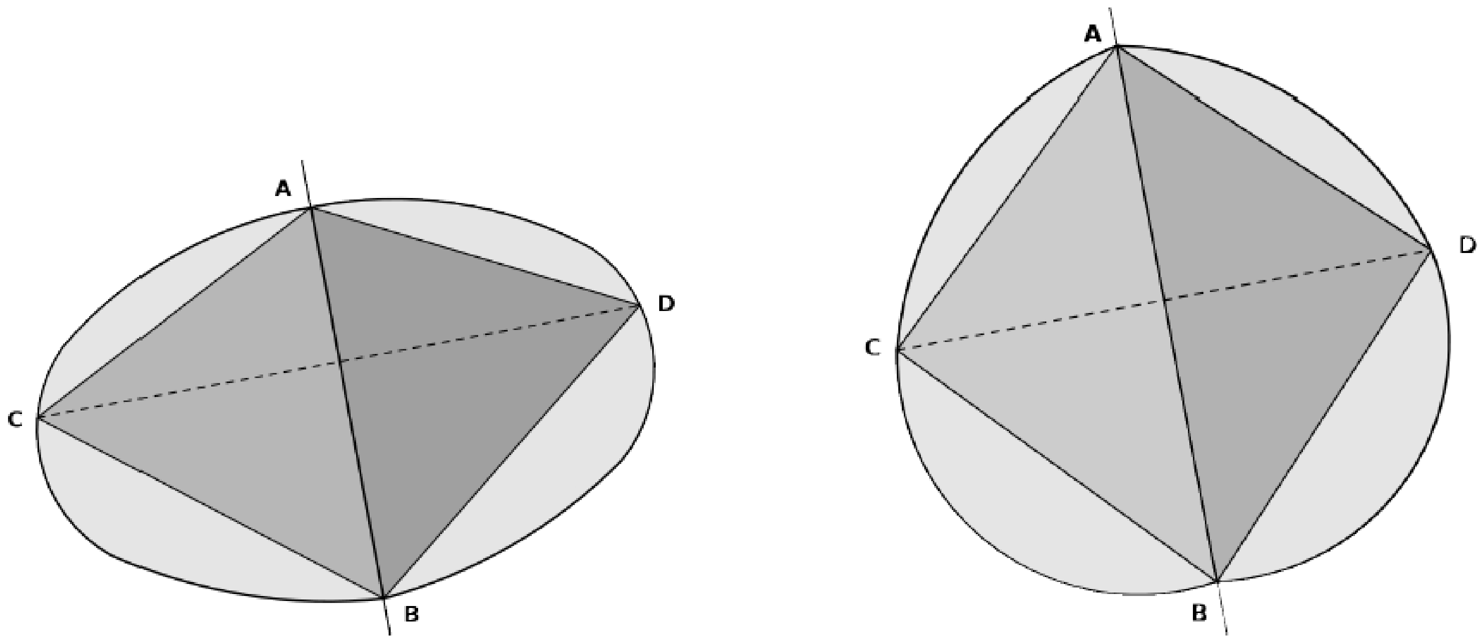
Nota. Adaptado de "La historia del problema isoperimétrico clásico con geometría elemental" (p. 346), por P. J. Herrero, 2012, La Gaceta de la RSME, Vol. 15, Núm. 2

- También podemos suponer que la figura es simétrica respecto la recta AB, ya que si no lo fuera, dado que las dos mitades tienen igual área y perímetro, bastará con tomar una de las dos mitades y su simétrico respecto de tal recta.

- Además al ser simétrico respecto de la recta AB si tomamos un punto C en la frontera de cualquiera de las dos mitades, y consideramos su simetrico D respecto de esa recta, se consiguen dos triángulos iguales y simétricos ABC y ADB.

Figura 13

Por la simetría se obtienen triángulos iguales y simétricos.



Nota. Adaptado de "La historia del problema isoperimétrico clásico con geometría elemental" (p. 346), por P. J. Herrero, 2012, La Gaceta de la RSME, Vol. 15, Núm. 2

Si los ángulos homólogos correspondientes a los vértices C y D no son rectos, podríamos aumentar o disminuir la base AB, común a los dos triángulos, hasta que los ángulos en cuestión fueran rectos sin modificar la longitud de los otros lados de los triángulos, ni la de la parte de la figura que se encuentra por encima de ellos. Entonces habríamos obtenido una figura que, con idéntico perímetro, tiene mayor área, ya que, aunque la parte de la figura que se encuentra por encima de cada lado de los dos triángulo ha permanecido fija, sin embargo, el área de cada triángulo ha aumentado. Por tanto los ángulos C y D deben ser rectos.

- Por último, como esto sucede para cualquier punto A de la frontera y, una vez elegido este punto, para cualquier otro punto C de una de las dos mitades, por lo que **la figura en cuestión debe ser un círculo**.

Pero esta no es una demostración rigurosa porque falta demostrar la existencia de la solución.

También, varios autores desde la antigüedad (el más conocido Pappus de Alejandría) especularon sobre las propiedades optimales de los paneles de abeja. En dos dimensiones, Carl F. Gauss (1777-1855) demostró que la manera de disponer círculos idénticos de modo que tengan la mayor densidad corresponde a un ordenamiento hexagonal, en el cual los círculos son tangentes entre sí, y sus centros se ubican en los vértices de una red hexagonal (panal de abejas).

Por otra parte el problema isoperimétrico es frecuentemente expresado como una desigualdad del tipo:

Otro Teorema relacionado: "Desigualdad Isoperimétrica" para cualquier:

Curva cerrada en el plano: $\acute{A}rea \leq \frac{1}{4\pi} longitud^2$

O volumen cerrado: $36 \cdot \pi \cdot \text{Volumen}^2 \leq \text{Superficie}^3$

Hay docenas de pruebas para esta desigualdad clásica. Varias se comentan en el artículo de Treiberg.

3.5. La solución completa. K. Weierstrass

Con todo, el problema seguía sin una solución completa, porque faltaba demostrar que existe solución.

Cuando apareció la solución, no lo hizo a partir de la geometría elemental. Fue otro ilustre matemático K. Weierstrass (1815-1897) quien uniría su nombre a la historia del problema.

Weierstrass consiguió la primera demostración rigurosa y completa del teorema isoperimétrico y la hizo en sus clases en 1879, pero no la publicó.

Fue recogida por sus discípulos y se publicó en el volumen 7 de sus obras completas en 1927. Es una demostración bastante compleja, que usa el cálculo de variaciones.

Posteriormente ha habido otras soluciones:

- Hurwitz (1859-1919) utiliza en 1902 las series de Fourier
- Blaschke (1855-1962) da otra en su geometría diferencial en 1930
- Schmidt (1876-1959) en 1939, también usando la geometría diferencial
- El español Santaló (1911-2001) con su geometría integral en Marzo de 1940.

Sin embargo, la historia del problema isoperimétrico no termina con la solución completa. Hay multitud de variaciones y nuevos problemas que siguen de actualidad. Por poner un ejemplo, entre todas las figuras planas de igual perímetro, que en su frontera contienen un segmento rectilíneo de longitud fija, ¿cuál encierra mayor área? La solución es la figura en la que el segmento es una cuerda de una circunferencia; y así un largo etcétera con infinidad de condiciones de contorno.

Variaciones que no se quedan en el plano, sino que evidentemente, se plantean en más dimensiones y en diversas ramas de la geometría.

Además, no solo en matemáticas surge de manera natural el problema isoperimétrico, las formas de la naturaleza aparecen vinculadas a la isoperimetría. ¿Por qué las pompas de jabón son esféricas?, ¿y las gotas de agua?; ¿por qué cuando una gota de agua cae sobre la mesa, dibuja un círculo? ¿o cuando una gota de aceite cae en un vaso de agua también es circular? ¿por qué tantas frutas son casi esféricas?

Sus aplicaciones en arquitectura con las superficies minimales, como la cubierta del estadio olímpico de Munich o diferentes formas de la Ciudad de las Artes y las Ciencias de Valencia, cuentan con propiedades de resistencia y economía asociadas a sus propiedades geométricas. En música, los tambores y otros instrumentos se hacen también circulares y así un largo etcétera.

Los motivos de la naturaleza para organizarse así, el de los arquitectos para construir usando estas formas, etc., no es casual, obedece a propiedades físicas vinculadas al problema isoperimétrico.

4. El marco didáctico; la resolución de problemas con ABP

Quiero empezar aclarando que no he encontrado un marco didáctico asociado a los problemas isoperimétricos. Ya que no me ha sido posible encontrar artículos de investigación asociados a este tipo de problemas, aplicados a enseñanza secundaria.

Sí que he encontrado algún artículo relativo a estos problemas en el ámbito universitario, pero no me sirven para mi estudio porque el entorno es demasiado diferente:

- Alumnos universitarios, que han escogido una carrera de ciencias y a los que se les dan bien las matemáticas.
- Frente a alumnos de secundaria, que no saben qué van a hacer en el futuro, y que en numerosas ocasiones odian las matemáticas.

Para poder abordar el aspecto didáctico del problema isoperimétrico voy a usar los marcos utilizados en la resolución de problemas y más concretamente los relacionados con la resolución de problemas de optimización en educación secundaria. Para ello es relativamente sencillo acudir a literatura previa sobre este tema para comprobar algunos de los marcos didácticos existentes:

- Carlson and Bloom's (2005) **Multidimensional Problem-Solving Framework**
- Y la doctora Teresa Balcaza Bautista en su tesis doctoral (Balcaza Bautista, 2018) usa dos enfoques unidos para crear el marco conceptual de los problemas de optimización:
  - Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (Godino, Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Batanero, Font, 2007)
  - La Teoría de los Registros de Representación Semiótica (Duval, 1995; 2006).

De estos dos que comento aquí, me gusta más el de Dª Teresa Balcaza por varios motivos. Uno de ellos es, que es un marco conceptual que he podido comprobar usan más investigadores, además de ella, por lo que se trata de un marco varias veces referenciado y eso me da confianza. Otro es el hecho de que la mayor parte de su peso se basa en las investigaciones realizadas por Godino entre los años 90 y 2000, que es un investigador bastante actual y muy bien reputado. Por último recurre al trabajo de Duval sobre representación semiótica para abordar las dificultades que conlleva el plantear problemas en lenguaje matemático, con toda su simbología y notación asociadas. Cubriendo así todo el espectro del marco didáctico asociado a estos problemas.

Sin embargo, en este trabajo, he decidido hacer un estudio de la aplicación de la metodología ABP a este tipo de problemas, por lo que considero más relevante el marco didáctico de la propia metodología ABP, que el de los problemas de optimización. Por lo que paso a describirlo.

La metodología del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) aparece por primera vez en la década de los sesenta y setenta en la Universidad de McMaster (Canadá) en la facultad de medicina. Se plantea la necesidad de revisar tanto los contenidos como la forma de enseñarlos, con el objetivo de conseguir una mejor formación del alumnado y que pudieran cubrir las demandas de la práctica profesional. También en Maastricht (Holanda), los docentes estudian los métodos de enseñanza y aprendizaje, aportando ideas en ese mismo sentido.

A pesar de surgir por primera vez en el entorno universitario, después se ha ido usando a niveles de educación secundaria y primaria. Esta metodología trata de responder a las necesidades del mundo laboral, los retos que estos futuros profesionales deben hacer frente implican enfoques innovadores y capacidades específicas que sólo se conseguirán empezando desde edades tempranas.

Actualmente existen varios centros educativos a nivel mundial que utilizan esta metodología, en particular, la metodología PBL (siglas en inglés del Aprendizaje Basado en Proyectos), que es similar al Aprendizaje Basado en Problemas, pero que está orientado a entregar un proyecto final y por tanto el enunciado y los cálculos son reales, por contra, el ABP consiste en resolver problemas que no tienen porqué ser reales, compartiendo así las bases esenciales y difiriendo únicamente en ese matiz.

A través de sus páginas web, se pueden localizar diferentes centros educativos situados en los diferentes estados de EEUU en los que se utiliza la metodología PBL. Como ejemplo, podemos mencionar que existen escuelas en Nueva York, Arizona, California, Colorado, Arkansas, etc.

Esta otra página web localiza diferentes centros educativos del Reino Unido que tienen unas características específicas: son centros pequeños, de entre 300 y 400 estudiantes, con un target de edades entre los 14 y los 19 años y en ellos el 80% del currículo no se imparte en el aula sino mediante actividades cotidianas, a través de proyectos trabajando a comisión de empresas, ONGs y otros sitios. Cada individuo tendrá un tutor además de los docentes. El programa se desarrolla en el sistema público utilizando financiación de fondos públicos, por lo que el acceso del alumnado a la universidad o a un trabajo, está garantizado.

En esta página web se pueden ver distintos centros de secundaria que parecen compartir la misma filosofía de trabajo, la metodología PBL. Estos centros están situados en EEUU, tienen una gran oferta de proyectos que incluyen a los padres/tutores en el aprendizaje de sus hijos. Los proyectos son de biología, matemáticas y otro tipo de asignaturas y disciplinas Realizan de forma continua, experiencias reales. Lo describen en su página web, "*We also aim to inspire students to become civic leaders through real-world, authentic learning experiences*" (también buscamos inspirar a los estudiantes a convertirse en líderes cívicos a través de experiencias de aprendizaje reales).

Dados los ejemplos mostrados anteriormente, esta metodología está siendo usada por varias escuelas de nuestro país, tanto colegios como institutos, pero aún queda un largo camino por recorrer.

4.1. Concepto y características del ABP

Es una metodología educativa que integra contenido curricular, con problemas basados en experiencias reales (en nuestro caso problemas isoperimétricos) y prácticas sobre el mundo, sobre el entorno de la escuela o sobre la vida cotidiana.

El ABP hace hincapié tanto en el desarrollo de una base de conocimientos relevante, con profundidad y flexibilidad, como en la adquisición de habilidades y actitudes necesarias para el aprendizaje y generalizables a otros contextos (responsabilidad en el propio aprendizaje, evaluación crítica, relaciones interpersonales, colaboración en el seno de un equipo, etc.)

Tres son los componentes esenciales del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP):

- El papel del tutor como facilitador y mediador. El papel del alumno como protagonista del proceso enseñanza-aprendizaje.
- Aprendizaje cooperativo. Se puede consultar en el anexo A.
- Aprendizaje autorregulado. Se puede consultar en el anexo A.

Los dos primeros elementos son mayoritariamente sociales, mientras que el último elemento es fundamentalmente personal. A continuación, se explicará más detalladamente el ABP.

4.2. Fases del proceso de aprendizaje en el ABP

La metodología ABP necesita que se siga una secuencia didáctica, que no tiene por qué ser un esquema cerrado, pero sí debería ofrecer garantías de que las actividades que se lleven a cabo sigan un patrón coherente y nos faciliten como docentes, priorizar y estructurar la práctica en el aula. La planificación es importantísima para obtener buenos resultados y que, a largo plazo, los alumnos recuerden los conocimientos estudiados y puedan usarlos en cualquier situación de la vida, no solo educativa, sino en su futuro laboral.

Las fases que se usan para la preparación de este proyecto por parte del profesor son las siguientes:

INSPIRACIÓN

Busca inspiración y responde las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son las aplicaciones más prácticas y visibles de tu asignatura relacionadas con la vida cotidiana?
- ¿Dónde descubres estas aplicaciones en el mundo que te rodea? ¿Y en los medios de comunicación o en el entorno de tu escuela?
- ¿Qué te llevó a hacer estos estudios?
- ¿Qué es lo que más te gusta de ser profesor

RELACIÓN IDEA-CURRÍCULO

Relaciona tu idea con el currículo

- Esta idea, ¿en qué competencias, objetivos y contenidos del currículo aparece con mayor claridad?
- Pregúntate:

  ¿Qué quiero que los alumnos comprendan? Estas son las metas de comprensión, los objetivos.

  ¿Cuáles son los temas que servirán de hilos conductores? En este caso nos ayudaremos de los contenidos.

  ¿Cómo se demuestra que los alumnos han comprendido? Gracias a los estándares de aprendizaje
- Formula el tópico central, en una sola frase. Prueba con algo directo y descriptivo.

CREACIÓN

Redacta los enunciados de los problemas

- Redacta los enunciados ambientados en un contexto real en función de los contenidos, objetivos, estándares de aprendizaje.
- Intenta ser organizado y claro aportando toda la información y las pistas necesarias para que los alumnos puedan entenderlo.
- Piensa en la secuenciación de las actividades en función de las sesiones previstas.
  Planifica los grupos, los espacios y los materiales que son necesarios.

EVALUACIÓN

Piensa en qué, cómo, cuándo vas a evaluar

- Ten presente los estándares de aprendizaje y los criterios de evaluación.
- Selecciona las herramientas de evaluación: rúbricas, cuestionarios, prueba escrita (pregunta de examen) ...
- Selecciona qué vas a evaluar (trabajo escrito, cuaderno, portfolio presentación oral...)
- Ponderación de cada uno de los ítems que vas a evaluar.
- Planifica la evaluación por parte de los alumnos: coevaluación, autoevaluación.

Una vez se lleva al aula es conveniente hacer una autoevaluación de nuestro propio trabajo como docentes. Analizar los resultados obtenidos es un buen punto de partida para comenzar. Deberemos replantearnos cada uno de los elementos trabajados para poder mejorarlos para otra ocasión, teniendo especial cuidado en ser consciente de los errores y corregirlos, para poder seguir aprendiendo acerca de esta metodología. (Hernando Calvo, 2015)

Tomando como ejemplo los objetivos, que tendría que cumplir nuestro proyecto, tal y como propone Adria Steinberg, que tiene varias obras acerca del aprendizaje basado en proyectos. Ella distingue seis elementos necesarios dentro de un proyecto en el aula. Estos son:

- **Autenticidad**: Es necesaria la existencia de una conexión con el mundo real, problema o contexto, con significado dentro del entorno de los alumnos, asimismo debe existir un producto final real y con relevancia social.
- **Rigor académico**: Es vital tener claras las competencias que se desarrollarán y la relación con las áreas y los contenidos que se van a estudiar. Así como las interrelaciones entre elementos curriculares y de otras asignaturas.
- **Aprendizaje aplicado**: Conecta las habilidades propias del siglo XXI, con la competencia de aprender a aprender, la competencia social y ciudadana, la competencia digital y el tratamiento de la información o la autonomía y la iniciativa personal.
- **Exploración activa**: Hace referencia a la inclusión de momentos de investigación y ejercicios prácticos con el problema, para que los alumnos experimenten. Para este punto son útiles las actividades de Geogebra.
- **Relación con el mundo adulto**: El proyecto debe relacionarse con el entorno y con el mundo, y con adultos que puedan participar en el proceso.
- **Evaluación**: Es necesario declarar claramente y con anterioridad, las herramientas de evaluación durante todo el proceso, para ponerlas en conocimiento de los alumnos y dejar claro el valor de cada fase en la evaluación final.

Las fases que deberían seguir los alumnos, para poder llevar a buen puerto, el trabajo que se les ha adjudicado, son las siguientes:

Figura 14

Etapas que realizan los alumnos en el Aprendizaje Basado en Problemas.

Nota. Adaptado de “Viaje a la Escuela del Siglo XXI”, A. Hernando Calvo (2015), Fundación Telefónica.

4.3. Papel del alumno y del profesor

El ABP es una metodología que pone al alumno como protagonista de su propio aprendizaje, permitiéndole afrontar desafíos, resolver problemas y trabajar en equipo en un contexto autónomo, pero organizado. Por tanto, el alumno puede aprender autónomamente sin necesidad de depender constantemente del profesor, pero esto implica un esfuerzo y una actitud proactiva por su parte, algo no siempre alcanzable.

El profesor lleva a cabo una importante tarea de preparación, de diseño instructivo claro y comprensible, marcando relaciones entre las distintas áreas y la materia en cuestión. El ABP exige al docente tener respuesta a cuestiones relacionadas con: cómo podrán plantear mejor el problema, qué tipo de dificultades pueden encontrarse, cómo promover la evolución del grupo de alumnos, qué tipo de apoyos o ayudas podrían ser útiles para que el alumno progrese de forma autónoma en su aprendizaje. De este modo esta metodología se convierte también en un reto para el docente, que en vez de ser un especialista que domina el tema y sabe explicarlo, tiene que convertirse en facilitador del aprendizaje, de manera que los alumnos puedan acceder, por sí mismos, a los contenidos curriculares que el problema abarca.

Otro papel del docente es el de mediador, tal y como tratan en su obra Ramón Ferreiro y Margarita Calderón. Para desarrollar correctamente esta faceta proponen lo siguiente:

- **Explorar las potencialidades que posee el alumno en las diferentes áreas del desarrollo**. No es suficiente con identificar y promover el área cognitiva; de la misma importancia que ésta es la afectiva, actitudinal, valorativa y conductual.
- **Indagar conocimientos, habilidades, actitudes, valores e intereses del alumno**, en otras palabras, averiguar y focalizar sus necesidades de aprendizaje.
- **“Negociar” el aprendizaje significativo que ha de obtenerse**. Para conseguirlo es recomendable el uso de preguntas y actividades que enganchen a los alumnos de forma que se vean motivados a aprender lo que debemos enseñar.
- **Ofrecer ayuda a partir de dificultades manifiestas**. Es importante no adelantarse ni dar por supuestas algunas necesidades de los alumnos y equipos. Dar la ayuda necesaria y suficiente, es decir, en el momento oportuno y lo justo.
- **Dar libertad responsable y comprometida para hacer y crear**. Es necesario promover la autorregulación individual y grupal, de forma gradual, así como la autogestión del equipo.
- **Enseñar a procesar la información**. Dar acceso a las herramientas, de otro modo, los instrumentos básicos para procesar el contenido de la información.

- **Permitir el error y con él la autorregulación**. Es importante aprovechar las respuestas incorrectas para poder corregir y perfeccionar, aclarar y completar, en definitiva, aprender.

- **Respetar estilos y ritmos de aprendizaje**. Cada alumno tiene una personalidad propia y por ende su forma de aprender. Conocer los diversos ritmos y estilos de aprendizaje y adecuar a cada uno de ellos nuestra forma de enseñar, propicia que ellos aprendan significativamente.

- **Precisar el resultado esperado de la actividad**. El aprendizaje cooperativo, que es uno de los pilares del ABP, dispone de una estructura, que demanda explicar con claridad la tarea que se ha de realizar.

En la siguiente tabla, Kenley (1999), en base a la experiencia del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM), se describen las principales diferencias entre métodos convencionales y el ABP.

Tabla 5

Principales diferencias entre los métodos convencionales y la metodología ABP.

ELEMENTOS DEL APRENDIZAJE	APRENDIZAJE CONVENCIONAL	APRENDIZAJE BASADO EN PROBLEMAS
Responsabilidad de generar ambiente de aprendizaje y los materiales de enseñanza.	Es preparado y presentado por el profesor.	La situación de aprendizaje es presentada por el profesor y el material de aprendizaje es seleccionado y generado por los alumnos.
Secuencia en el orden de las acciones para aprender.	Determinadas por el profesor.	Los alumnos participan activamente en la generación de esta secuencia.
Momento en el que se trabaja en los problemas y ejercicios.	Después de presentar el material de enseñanza.	Antes de presentar el material que se ha de aprender.
Responsabilidad de aprendizaje.	Asumida por el profesor.	Los alumnos asumen un pape activo en la responsabilidad de su aprendizaje.
Presencia del experto.	El profesor representa la imagen de experto.	El profesor es el facilitador del aprendizaje.
Evaluación.	Determinada y ejecutada por el profesor	El alumno forma un papel activo en su evaluación y la de su grupo de trabajo.

Nota. Adaptado de “El aprendizaje Basado en Problemas. Una propuesta metodológica en Educación Superior”, A. Escribano, A. Del Valle, (2008). Editorial NARCEA.

4.4. Ventajas e inconvenientes del ABP

Para empezar, es destacable la motivación que genera en el individuo, lo que supone un dinamismo que activa, sostiene y dirige el comportamiento de los individuos, la "voluntad de aprender" que cita Bruner. Esta metodología impulsa al alumno a involucrarse más en el aprendizaje ya que siente la posibilidad de interactuar con la realidad, y esto provoca un aumento de la curiosidad. Los individuos sienten que lo que están aprendiendo va a serles útil en el futuro y esto provoca que aumente su interés en aprender.

Esta metodología promueve el aprendizaje significativo, ya que el individuo adquiere una actitud favorable hacia la tarea, añadiendo significado propio a los contenidos que asimila. Esta forma de aprender aumenta incluso, su interés investigador al finalizar su etapa educativa. El aprendizaje significativo está íntimamente relacionado con el conflicto cognitivo, dicho de otro modo, si no aparece esa situación de desequilibrio en los esquemas mentales del alumno, no se alcanza un aprendizaje significativo. Por contra, cuando esto sucede, el individuo se plantea dudas, busca respuestas e información, etc., esto conlleva un esfuerzo, que se traduce en un conflicto cognitivo y que se pueda alcanzar el aprendizaje significativo, alterando las estructuras de aprendizaje.

La generación del conocimiento realizada a la vez que su aprendizaje, favorece que se recuerde posteriormente, produciendo así un conocimiento de larga duración, aumentando su retención y la transferencia del conocimiento. Además, enfrentarse a situaciones reales, hace que los alumnos recuerden con mayor facilidad la información, lo que les permite encontrar respuestas individuales acordes a la realidad, favoreciendo la confianza en sí mismos, la capacidad de toma de decisiones y el sentido de la responsabilidad.

El aprendizaje adquirido gracias a esta metodología estimula el pensamiento crítico y creativo, dicho de otro modo, mejora las habilidades de identificar problemas y generar soluciones adecuadas a los mismos, aumentando así el pensamiento crítico. El hecho de que el individuo participe de forma activa y crítica en el aprendizaje, aumenta su imaginación y creatividad, ya que mantiene una actitud de búsqueda de información permanentemente, tratando de analizar y relacionar esta información con la que ya poseen. De modo que llegan a plantear preguntas que conducen a la investigación.

Relacionado de forma estrecha con el desarrollo de habilidades del pensamiento existe lo que se conoce como la integración del conocimiento. Al ser esta una metodología que implica la interdisciplinariedad, el individuo afronta la resolución del problema de una disciplina usando los medios disponibles de cualquier otra, como si de una caja de herramientas se tratara.

El método ABP propicia las interacciones aumentando las habilidades interpersonales como: el trabajo en equipo, la coevaluación, la presentación y defensa de los trabajos. Gracias a esta metodología se alcanzan más eficazmente, no sólo metas didácticas, sino objetivos más amplios de tinte educativo que afectan al área afectiva de la personalidad de los individuos. El aprendizaje es resultado no solo de la adquisición de conocimientos, sino también de la adquisición de diferentes perspectivas, de distintas formas de querer y de distintos modos de evaluar.

El aprendizaje aparece gracias a la colaboración y cooperación. Un aspecto del aprendizaje cooperativo es la interdependencia positiva que conlleva una comunicación abierta y fluida, implica adoptar el punto de vista de los demás, y proporciona una visión realista de los demás.

Otro elemento interesante de esta metodología es que la forma de evaluar se realiza sobre el trabajo en grupo. En esta metodología, la coevaluación y la autoevaluación están siempre presentes.

La observación sistemática y cercana del proceso de trabajo dentro del grupo, ya es en sí un método de evaluación. Es cada miembro del grupo quien evalúa y autoevalúa, creando sus propias estrategias para la definición del problema, el análisis de los datos, la valoración de su trabajo, reanudando la información, la construcción de hipótesis. Potencia la metacognición, el alumno tiene la capacidad de juzgar constantemente el grado de dificultad de los problemas y valorar su progreso en la resolución de los mismos.

Las ventajas que aporta esta metodología al docente son la mejora continua de las competencias del profesor, para ofrecer apoyo y acompañamiento responsable y creativo al estudiante: estrategias de relación social, metaevaluación, metacognición, lo que proporciona mayor autonomía a sus participantes.

Es vital en esta metodología poder acercarse al mundo real, por lo que recae directamente sobre el profesor, el ser un docente actualizado en todos los sentidos, y en particular en las nuevas tecnologías. De este modo se fomenta la innovación docente a través del uso de TIC's y del conocimiento de determinadas aplicaciones o programas de ordenador para incentivar al alumno del siglo XXI en su aprendizaje.

Los elementos negativos que condicionan la puesta en práctica de esta metodología son: la disparidad de horario de las clases, la estructura curricular de los planes de estudio, la falta de espacios y mobiliario, las posibilidades tecnológicas, el elevado número de alumnos, las cargas de los profesores.

El ABP necesita una inversión de recursos importante. Las fuentes de información sustentan el método; para este fin, sería ideal poder disponer de una biblioteca con libros exclusivamente de cada materia, libros de investigación, libros de texto y dotada de recursos electrónicos. La pobreza o escasez de estas fuentes lastra el proceso.

El mobiliario y espacio del aula juegan también un papel clave. Se necesitan aulas grandes para que los grupos tengan su espacio y estén cómodos trabajando, mesas y sillas que se puedan desplazar para poder crear los grupos físicamente; todo ello contribuye a un clima de trabajo satisfactorio.

El tiempo es un elemento crucial, ya que se precisa para la adaptación del aula al trabajo en grupos y su vuelta al estado previo a la experiencia, algo que no es fácil de negociar con los profesores que esperan ocupar la misma aula, ajenos a la metodología ABP.

El esfuerzo por parte del docente es considerable y también implica un desafío para los centros educativos ya que necesita un contexto dotado de espacios de trabajo, capacitación, recursos, etc. Pero compensa, ya que esta metodología está dirigida a promover el desarrollo intelectual, científico, cultural y social del individuo, de modo que aprenda a aprender, siendo consciente de sus propios procesos de pensar y aprender. Todo esto implica que el individuo desde una edad temprana enlace el aprendizaje con el mundo real que le rodea, que es uno de los objetivos de la educación, formar para la vida.

5. Desarrollo de la Unidad Didáctica

5.1. Presentación: “EL PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO”

La presente unidad didáctica se diseñó para 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales, para dar a conocer la historia e hitos del problema isoperimétrico básico.

5.2. Introducción

La presente unidad ha sido diseñada para impartirse al final del “bloque 2: Números y Álgebra” de “Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I” y tras ver algo de inecuaciones, con la finalidad de enlazar y contextualizar las inecuaciones con los problemas de optimización de funciones de coste/beneficio de Economía, o con los problemas de máximos y mínimos del “bloque 3: Análisis” de esta misma asignatura.

La idea es hacer más atractivos ambos temas (inecuaciones y optimización) a través de un nexo común rico en historia, leyendas y desarrollos matemáticos ingeniosos. Para ello recurriremos al uso del Aprendizaje Basado en Problemas, el uso de TIC’s como Powerpoint y Geogebra, y nuestras habilidades como cuentacuentos para transportar la imaginación de nuestros alumnos a la antigua Grecia y poder atraer su atención a las matemáticas que vivieron aquellos contemporáneos del “problema isoperimétrico” desde entonces hasta nuestros días.

5.3. Objetivos

Los **objetivos generales en Bachillerato** están establecidos en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de Diciembre y los relacionados con esta unidad didáctica son:

b) Consolidar una madurez personal y social que les permita actuar de forma responsable y autónoma y desarrollar su espíritu crítico. Prever y resolver pacíficamente los conflictos personales, familiares y sociales.

d) Afianzar los hábitos de lectura, estudio y disciplina, como condiciones necesarias para el eficaz aprovechamiento del aprendizaje, y como medio de desarrollo personal.

g) Utilizar con solvencia y responsabilidad las tecnologías de la información y la comunicación.

h) Conocer y valorar críticamente las realidades del mundo contemporáneo, sus antecedentes históricos y los principales factores de su evolución. Participar de forma solidaria en el desarrollo y mejora de su entorno social.

i) Acceder a los conocimientos científicos y tecnológicos fundamentales y dominar las habilidades *básicas propias de la modalidad elegida.*

j) Comprender los elementos y procedimientos fundamentales de la investigación y de los métodos científicos. Conocer y valorar de forma crítica la contribución de la ciencia y la tecnología en el cambio de las condiciones de vida, así como afianzar la sensibilidad y el respeto hacia el medio ambiente.

k) Afianzar el espíritu emprendedor con actitudes de creatividad, flexibilidad, iniciativa, trabajo en equipo, confianza en uno mismo y sentido crítico.

Y dentro de los **objetivos propios de la asignatura** de "Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I" según la ORDEN EDU/363/2015, del 4 de mayo podemos nombrar:

"*La materia Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales tiene como objetivo su aplicación a la interpretación de los fenómenos sociales, por lo que la adquisición de contenidos y procedimientos matemáticos, como el cálculo, análisis, medida y estimación, junto con la adquisición de habilidades para interpretar datos, seleccionar elementos fundamentales, analizarlos, obtener conclusiones razonables y argumentar de forma rigurosa, permitirán comprender mejor estos fenómenos.*

Además, esta materia contribuye a la formación intelectual y humana del alumnado, desarrollando un importante valor formativo en aspectos como la búsqueda de la belleza y la armonía, el estímulo de la creatividad o el desarrollo de las capacidades personales y sociales que contribuyen a formar ciudadanos autónomos.

La resolución de problemas y los proyectos de investigación constituyen ejes fundamentales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta materia*. Las estrategias que se desarrollan constituyen una parte esencial de la educación matemática y activan competencias necesarias para aplicar los conocimientos y habilidades adquiridas en contextos reales*."

De forma más concreta, **los objetivos didácticos de esta unidad** son:

1. Proporcionar un contexto histórico de las matemáticas, que nos permita humanizarlas
2. Ofrecer una visión de desarrollo lógico de las matemáticas frente a la visión habitual procedimental
3. Ofrecer un nexo de enlace entre el tema de inecuaciones y los problemas de optimización/maximización
4. Proporcionar una base de desarrollo del pensamiento matemático basado en la resolución de problemas de la vida real

5. Aprender la metodología de resolución de problemas
6. Hacer más atractivos los contenidos matemáticos y proporcionarles un contexto en el mundo real que aumente la motivación de los alumnos hacia ellas
7. Participar activamente del paradigma de la educación inclusiva e intercultural al estudiar otras culturas

5.4. Contenidos. Contenidos mínimos

Los contenidos mínimos según la ORDEN EDU/363/2015, del 4 de mayo, del currículo:

Tabla 6

Currículo de 1º de Bachillerato de Ciencias Aplicadas para Matemáticas I.

Conceptos	**Criterios de evaluación**	**Estándares de aprendizaje evaluables**
Números racionales e irracionales. El número real. Valor absoluto de un número real. Representación en la recta real. Intervalos. Aproximación decimal de un número real. Estimación, redondeo y errores. Operaciones con números reales. Potencias y radicales. Logaritmos. La notación científica. Operaciones con capitales financieros. Aumentos y disminuciones porcentuales. Tasas e intereses bancarios. Capitalización y amortización simple y compuesta. Utilización de	1. Utilizar los números reales y sus operaciones para presentar e intercambiar información, controlando y ajustando el margen de error exigible en cada situación, en situaciones de la vida real. 2. Resolver problemas de capitalización y amortización simple y compuesta utilizando parámetros de aritmética mercantil empleando métodos de cálculo o los recursos tecnológicos más adecuados. 3. Transcribir a lenguaje algebraico o gráfico situaciones relativas a las	1.1. Reconoce los distintos tipos números reales (racionales e irracionales) y los utiliza para representar e interpretar adecuadamente información cuantitativa. 1.2. Representa correctamente información cuantitativa mediante intervalos de números reales. 1.3. Compara, ordena, clasifica y representa gráficamente, cualquier número real. 1.4. Realiza operaciones numéricas con eficacia, empleando cálculo mental,

recursos tecnológicos para la realización de cálculos financieros y mercantiles. Polinomios. Operaciones. Regla de Ruffini. Teorema del resto. Descomposición en factores. Ecuaciones lineales, cuadráticas y reducibles a ellas, con radicales, con fracciones racionales, exponenciales y logarítmicas. Aplicaciones. Sistemas de ecuaciones de primer y segundo grado con dos incógnitas. Clasificación. Aplicaciones. Interpretación geométrica: ecuaciones de recta y parábola, incidencia y paralelismo. Sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas: método de Gauss. Inecuaciones lineales con una o dos incógnitas. Sistemas de inecuaciones. Resolución gráfica y algebraica. Programación lineal bidimensional. Región factible. Determinación e interpretación de las soluciones óptimas. Aplicación de la programación lineal a la resolución de problemas sociales,	ciencias sociales y utilizar técnicas matemáticas y herramientas tecnológicas apropiadas para resolver problemas reales, dando una interpretación de las soluciones obtenidas en contextos particulares. 4. Transcribir problemas expresados en lenguaje usual al lenguaje algebraico y resolverlos utilizando técnicas algebraicas determinadas: matrices, sistemas de ecuaciones, inecuaciones y programación lineal bidimensional, interpretando críticamente el significado de las soluciones obtenidas.	algoritmos de lápiz y papel, calculadora o programas informáticos, utilizando la notación más adecuada y controlando el error cuando aproxima. 2.1. Interpreta y contextualiza correctamente parámetros de aritmética mercantil para resolver problemas del ámbito de la matemática financiera (capitalización y amortización simple y compuesta) mediante los métodos de cálculo o recursos tecnológicos apropiados. 3.1. Utiliza de manera eficaz el lenguaje algebraico para representar situaciones planteadas en contextos reales. 3.2. Resuelve problemas relativos a las ciencias sociales mediante la utilización de ecuaciones o sistemas de ecuaciones. 3.3. Realiza una interpretación contextualizada de los resultados obtenidos y los expone con claridad. 4.1. Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, el

económicos y demográficos.		sistema de ecuaciones lineales planteado (como máximo de tres ecuaciones y tres incógnitas), lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas en contextos reales. 4.2. Aplica las técnicas gráficas de programación lineal bidimensional para resolver problemas de optimización de funciones lineales que están sujetas a restricciones e interpreta los resultados obtenidos en el contexto del problema.

Nota. Adaptado de "ORDEN EDU/363/2015, del 4 de mayo", BOCYL, (2015, p. 32773-32774).

En nuestro caso los contenidos a estudiar serán:

- Euclides y las proposiciones 35 a 38.
- Zenodoro, su historia y sus proposiciones sobre el problema isoperimétrico.
- La leyenda de la Reina Dido.
- El problema de Herón como ejemplo de optimización geométrica.
- Estudio del problema isoperimétrico en curvas genéricas planas.
- El problema de recubrimiento del panel de abeja y la solución de Gauss.
- Demostración (no completa) de que el círculo es la figura plana de área máxima.
- La solución completa de K. Weierstrass.
- Otras soluciones.
- Reflexiones finales.

5.5. Temporalización de contenidos

La unidad ha sido diseñada para impartirse al terminar el tema de inecuaciones.

Tabla 7

Temporalización de contenidos de la unidad didáctica. Fuente propia.

FASE	INTERVENCIÓN
0	Esta fase se lleva a cabo la jornada previa a comenzar con la intervención propiamente dicha. Al final de la clase (en los últimos 10 minutos) se les entrega a los alumnos una encuesta previa y dos problemas sencillos isoperimétricos. uno de ellos de números y el otro de carácter gráfico. Todo ello para que lo entreguen al día siguiente en lugar de mandarles deberes.
1	Al empezar esta jornada se recogen las encuestas y se resuelven los problemas que se habían mandado. A continuación empezamos con la primera presentación de powerpoint, en la que se intercalan actividades de Geogebra para ver de forma dinámica algunos problemas. Al final de la clase se les manda un problema isoperimétrico para que hagan en casa como deberes.
2	En esta jornada se ven los resultados del problema mandado para casa y su resolución. A continuación se proyecta la segunda presentación de powerpoint (la de la Reina Dido), con sus correspondientes actividades de Geogebra. Al final de la jornada se le puede mandar para casa otro problema isoperimétrico: ¿Cuál es la figura plana que encierra el mayor área, que se puede formar con una cuerda de 22cm de longitud?
3	En esta última jornada se pasa al caso de curvas genéricas, aumentando la dificultad de la exposición y se puede llevar preparada una sección “avanzada” por si hay alumnos que puedan asimilarla o en su defecto se puede saltar. Al final de la exposición se les entrega como deberes rellenar una encuesta sobre la intervención.
4	La última fase la lleva a cabo la semana siguiente, poniéndoles un examen de evaluación para ver qué grado de aprendizaje significativo han tenido.

He impartido la unidad en 5 días, de los cuales sólo he usado por completo 4. Por lo que he introducido una fase 0 que se puede ejecutar en 5 ~ 10 minutos, el día antes de empezar con la unidad, y el resto, que son de sesión completa son las fases 1 a 4.

5.6. Competencias básicas

Según el RD 1631/2006, de 29 de diciembre, las competencias básicas son "*el conjunto de destrezas, conocimientos, y actitudes contextualizadas, integradas como saberes prácticos, que el alumnado debe haber alcanzado al final de la etapa para su desarrollo y realización personal, así como su integración social y participación ciudadana*". Esta unidad contribuye al desarrollo de las competencias básicas, en la manera siguiente:

Competencia en comunicación lingüística

- ❏ Participar activamente en las situaciones comunicativas con iguales y con el docente durante la resolución de problemas.
- ❏ Expresar oralmente y por escrito ideas, opiniones y creencias de manera ordenada, inteligible y coherente, empleando el lenguaje como instrumento para la representación, comprensión e interpretación de la realidad observada. Tanto en encuestas como en el examen.

Competencia matemática

- ❏ Localizar patrones de regularidad. Analizar la simetría de estructuras geométricas para maximizar áreas.
- ❏ Aplicar lo aprendido para abordar la resolución de nuevas problemáticas haciendo uso de la analogía. Inferir conclusiones.
- ❏ Usar representaciones abstractas modelizadas para la descripción de distintas realidades.
- ❏ Aumentar los pensamientos analítico, deductivo, inductivo, creativo y divergente.
- ❏ Adquirir destreza en la resolución de problemas isoperimétricos que ayuden a agudizar el ingenio a la hora de afrontar problemas matemáticos.
- ❏ Estudiar la historia y leyenda de las matemáticas.

Tratamiento de la información y competencia digital

- ❏ Desarrollar las habilidades de búsqueda de información específica en internet.
- ❏ Facilitar y promover el uso de aplicaciones informáticas como Geogebra para el estudio de la asignatura.

- ❏ Aumentar las capacidades de búsqueda, síntesis y relación de la información.

Competencia social y ciudadana

- ❏ Integrarse en el grupo vía el habla y la escucha activa. Superar la espiral del silencio.
- ❏ Entrenar las capacidades socioafectivas y trabajar las relaciones sociales entre iguales.
- ❏ Establecer estrategias de construcción colectiva de conocimiento en el seno de grupos cooperativos de aprendizaje.

Competencia cultural y artística

- ❏ Ahondar en el conocimiento de ciertas culturas a través de la historia y evolución de las matemáticas.
- ❏ Adquirir gusto por la belleza de las matemáticas a través de la lógica y el pensamiento deductivo, así como a través de las obras y estudios que nos llegan a través de la historia.

Competencia para aprender a aprender

- ❏ Aprender diferentes estrategias para la resolución de problemas y aumentar la autonomía e iniciativa personal relativas a la construcción del conocimiento.
- ❏ Adquirir las capacidades necesarias para llevar a cabo investigaciones en cualquier ámbito.
- ❏ Enriquecer el propio conocimiento a través del trabajo en grupos cooperativos.

Autonomía e iniciativa personal

- ❏ Responsabilizarse del aprendizaje propio así como del aprendizaje del grupo, participando de los procesos de enseñanza-aprendizaje y evaluación.
- ❏ Desarrollar la capacidad de emprender investigaciones personales, preguntarse sobre lo desconocido y ser capaz de evaluar cualquier cuestión con sentido crítico.
- ❏ Crear materiales que reflejen la actividad académica personal y permitan contabilizar los esfuerzos, logros, conclusiones, dudas, posibles tareas pendientes, etc.

En esta unidad didáctica destacan la competencia matemática y la competencia para aprender a aprender, siendo en estos ámbitos en los que el alumnado de la asignatura más van a desarrollar sus capacidades. De hecho, si es necesario, a la hora de resolver los problemas es importante tomarse un tiempo para explicar a los alumnos la metodología adecuada para poder afrontarlos con éxito, tal y como nos sugiere la metodología ABP.

5.7. Metodología

La metodología que vamos a usar principalmente es el ABP (aprendizaje basado en problemas). La idea es proponer un problema y que los alumnos debatan entre ellos la solución. Se les puede orientar con pistas o como ayuda final se les puede poner una actividad de Geogebra donde puedan ver gráficamente qué factores influyen en la solución.

También, se les proponen problemas para casa de modo que puedan pensarlos con calma y proponer la solución al día siguiente, de modo que todos puedan participar en el razonamiento y nos servirán como método de recogida de datos para detectar errores y dificultades.

Asimismo, será necesario el uso de una metodología expositiva-participativa, para poder exponer la historia y su avance, pero intercalando los razonamientos matemáticos en los que los alumnos pueden participar. En esta parte será de mucha utilidad una presentación de *Powerpoint* y unas actividades de *Geogebra*.

Por último, si se desea mandarles un trabajo de investigación a los alumnos durante la fase 0 para hacer una exposición final, se puede orientar a una metodología cooperativa. Pero para desarrollarla adecuadamente recomiendo añadir un día más a la intervención donde se puedan exponer esos trabajos y relacionarlos con todo lo visto durante la intervención.

En conjunto lo que pretendemos es:

- Partir del nivel de desarrollo del alumnado y de sus aprendizajes previos.
- Asegurar la construcción de aprendizajes significativos a través de la movilización de sus conocimientos previos y del pensamiento deductivo.
- Posibilitar que los alumnos y las alumnas realicen aprendizajes significativos por sí solos.
- Favorecer situaciones en las que los alumnos y alumnas deben actualizar sus conocimientos e investigar.
- Proporcionar situaciones de aprendizaje que tengan sentido en el mundo real para los alumnos y alumnas, con el fin de que resulten motivadoras.

5.8. Atención a la diversidad

Nuestra intervención educativa con los alumnos y alumnas asume como uno de sus principios básicos tener en cuenta sus diferentes ritmos de aprendizaje, así como sus distintos intereses y motivaciones.

El ABP nos permite ajustar el ritmo de aprendizaje de cada alumno usando la participación en grupo y nuestra capacidad de facilitarles pistas para la resolución. Al fin y al cabo se pretende que todos tengan una experiencia de éxito.

La historia de la Reina Dido debería ser un ejemplo para todas las alumnas de cómo la inteligencia matemática no discrimina por sexos. De hecho se puede hacer hincapié en este aspecto si creemos que debemos resaltar este aspecto a nuestro alumnado, comentando cómo la mujer estaba oprimida en esa época y cómo la obligaron a casarse en contra de su voluntad. Se trata, sin duda, de una bonita historia con un importante componente inspirador, la de la Reina Dido.

También llevamos en la presentación de la fase 3 un contenido especial por si contamos con superdotación en el aula y se pueden ajustar los problemas isoperimétricos a dificultades bastante altas (con el uso de funciones de Riemann).

5.9. Criterios de evaluación

Además de los ya expuestos en la sección de contenidos mínimos

Para la evaluación tenemos tres fases diferenciadas:

1. **Evaluación Diagnóstica**: Con la encuesta inicial y final buscamos evaluar los conocimientos y predisposición previos y posteriores de los alumnos. Por lo que prestaremos especial atención a si conocían de antes los problemas isoperimétricos y si su actitud hacia las matemáticas es positiva o no, así como su capacidad de asociar las matemáticas a otras asignaturas y al mundo real, antes y después de la intervención

2. **Evaluación Formativa**: Con los problemas que mandamos para casa y los que se hacen durante las sesiones, debemos registrar los conocimientos que van adquiriendo para reforzar la autonomía del alumno de forma que aprenda a superar las dificultades y sea capaz de evaluar y regular su propio aprendizaje. Los resultados de la evaluación deben servir para realizar cambios sustanciales en el proceso de aprendizaje y enseñanza.

3. **Evaluación Sumativa**: La llevamos a cabo una semana después, para dar tiempo a que olviden un poco lo vivido, con la realización de un examen. Buscamos evaluar el aprendizaje significativo que ha quedado tras la intervención y comprobar en qué modo ha afectado a los diferentes alumnos. Tratando así de obtener información valiosa sobre el estilo de aprendizaje de cada alumno. Por supuesto es muy útil ver el examen en clase con posterioridad, para que

los alumnos aprendan qué errores han cometido y cómo corregirlos en el futuro.

Como la intervención es sobre material no curricular, recomiendo usar la nota final sólo si sube la media de la nota del alumno, ya que no es justo que se la baje siendo el resto del contenido de carácter curricular y por tanto obligatorio. Aunque recomiendo mantener este aspecto en secreto para que los alumnos menos aplicados no aprovechen esa circunstancia para no trabajar durante la intervención.

5.10. Criterios de calificación. Instrumentos de evaluación

La evaluación final de la intervención debería distribuirse con los siguientes pesos en la nota final:

- Tomando como núcleo **el examen final**, este pondera el **70%** de la nota.
- Los **problemas de casa y la participación en clase** deberían ponderar con un **15% cada una**.
- Y **si se manda un trabajo grupal** de investigación sería útil que contribuyera a la nota final con **un 10% adicional**, con lo que superaríamos el 100%, pero sería un aliciente para su realización.

Para la participación en clase debemos usar la observación, para los problemas de casa los podemos recoger así como hacemos con las encuestas, y el examen es sencillo de evaluar.

5.11. Procesos y criterios de recuperación

Al tratarse de material no curricular, no es necesario contemplar un proceso de recuperación. Basta con no considerar la nota de la intervención si supone bajar la media del alumno.

5.12. Adaptaciones curriculares a alumnos con necesidades especiales de aprendizaje

Esta intervención contempla la posibilidad de que haya alumnos con necesidades especiales de aprendizaje, al contar con múltiples formas de ajustar la dificultad según la marcha. La más común es la cantidad e importancia de las pistas que se proporcionan a los alumnos durante la resolución de los problemas. Esto incluye el uso de las actividades de geogebra.

Si hubiese alumnos con problemas auditivos, las presentaciones son completamente gráficas y accesibles para ellos, así como las actividades de Geogebra.

Si por contra tuviesen problemas visuales, el proyector puede proporcionar imágenes más grandes y en el peor de los casos, la lectura en voz alta por parte del profesor y las explicaciones resultan útiles. También se le podría facilitar una cuerda de verdad para que tratara de encontrar la forma de máxima área por el tacto.

Por último, la intervención contempla la posibilidad de superdotación en la tercera presentación de Powerpoint, pero es que además se le puede mandar un trabajo individual (en caso de que sólo haya uno) o grupal sobre la aplicación de las funciones de Riemann en el problema isoperimétrico.

En términos generales creo que se trata de una intervención que cuenta con muchas probabilidades de llegar a todos los niveles de alumnado.

5.13. Materiales didácticos generales

Como materiales generales serán necesarios el encerado, tizas y borrador, para ayudarnos en la resolución de los problemas en grupo.

Y el uso de la fotocopiadora para entregar las encuestas, (si se desea) los problemas para casa y por último, para el examen de evaluación.

5.14. Utilización de las TIC en el aula

Para la intervención será necesario de un proyector y un portátil, donde poder poner las presentaciones de Powerpoint y hacer uso de las actividades de Geogebra. Por supuesto el acceso wifi a internet está recomendado, aunque no sea imprescindible.

5.15. Temas transversales o educación en valores

Como ya hemos comentado, uno de los puntos fuertes de esta intervención es el trabajo de los contenidos transversales: Historia, humanidades, igualdad de géneros, la evolución del pensamiento matemático más allá de las fronteras de los países.

Asimismo se trata de inculcar en los alumnos ideas de trabajo en equipo, de superación de dificultades (resolución de problemas) y de la utilidad en el mundo real que tienen estas estrategias de trabajo.

También se puede incidir más en aspectos multiculturales al estudiar otras civilizaciones, como los griegos, los fenicios, etc. Si se desea añadir un aspecto multiétnico a la intervención.

5.16. Medidas para estimular el interés y el hábito de la lectura

La lectura del primer tomo de "Los Elementos de Euclides" es una lectura ligera pero de un gran contenido matemático relacionado con la intervención. De hecho son muchos los matemáticos famosos que descubrieron su pasión por las matemáticas con estos libros. Por todo ello creo que es una lectura muy recomendable para los alumnos.

Si alguien demuestra una gran pasión por la historia, otra lectura recomendada es la "Eneida" del poeta romano Virgilio. Libro donde no sólo se relata la historia completa de la Reina Dido y la fundación de Cartago, sino que también explica el motivo de la eterna enemistad entre Cartagineses y Romanos. Aunque hay que dejar claro que se trata de una obra de ficción, como tantas otras de la época. No es una lectura ligera, pero que puede interesar a algún alumno de bachillerato de Ciencias Sociales.

Si se manda el trabajo grupal sobre problemas isoperimétricos, con ello se estimula el hábito de la lectura, ya que van a tener que investigar bastante en internet.

5.17. Actividades

Para ilustrar el contenido de la intervención incluyo en los anexos el contenido de las encuestas, presentaciones (con enlaces a las actividades de Geogebra) y el examen de evaluación final, ha realizar en la intervención didáctica, y que yo mismo usé en el aula de 1º de Bachillerato del Colegio Seminario Menor de Valladolid. Aunque todos estos elementos son susceptibles de mejora.

5.18. Procedimiento para valorar el ajuste entre la unidad didáctica y los resultados

Para evaluar el ajuste entre la unidad didáctica y los resultados debemos fijarnos en los resultados obtenidos y compararlos con el aprendizaje significativo obtenido. Para ello debemos recurrir no sólo a todos los métodos de evaluación que hemos utilizado sino también a la observación de cómo afecta ese aprendizaje al rendimiento posterior a la intervención. Por eso se retrasa la evaluación con examen una semana de la intervención.

Una vez obtenidos los resultados debemos comprobar varios puntos basados en los objetivos didácticos que nos marcamos inicialmente, valorando de 0 a 5:

- ¿Ha mejorado la actitud hacia las matemáticas?
- ¿Ha mejorado la asociación de las matemáticas con otras materias o temas?
- ¿Ha mejorado el conocimiento de la historia de las matemáticas?
- ¿Ha mejorado la capacidad de resolución de problemas de los alumnos?
- ¿Ha mejorado la percepción de que las matemáticas se usan en la vida real?
- ¿Ha mejorado la opinión hacia las mujeres matemáticas y a otras culturas?

Y con estos resultados obtenidos por alumno, se puede hacer una evaluación general de cuánto nos hemos alejado de los valores deseados.

En mi caso la valoración final de la intervención fue:

- ❏ ¿Ha mejorado la actitud hacia las matemáticas? 1 (la actitud inicial ya era buena por lo que no podía mejorar mucho)
- ❏ ¿Ha mejorado la asociación de las matemáticas con otras materias o temas? 2 (la mejora ha sido insuficiente)
- ❏ ¿Ha mejorado el conocimiento de la historia de las matemáticas? 3 (aprobado justito en este aspecto, creo que les cuesta situar los acontecimientos cronológicamente)
- ❏ ¿Ha mejorado la capacidad de resolución de problemas de los alumnos? 4 (han mejorado bastante, aunque es normal porque parecían no haber trabajado este aspecto mucho)
- ❏ ¿Ha mejorado la percepción de que las matemáticas se usan en la vida real? 3 (creo que sí han mejorado algo en este aspecto, aunque no tanto como yo hubiese querido)
- ❏ ¿Ha mejorado la opinión hacia las mujeres matemáticas y a otras culturas? 4 (estoy convencido de ello)

Personalmente creo que en la intervención me faltó más tiempo para profundizar en ciertos aspectos, sobre todo la asociación con otras materias y/o temas, y algo más en contexto histórico y relación con la vida real.

Un buen elemento de decisión para la mejora de la intervención es la pregunta efectuada sobre sugerencias de mejora. Donde casi todos pidieron más participación por su parte y dinamismo.

5.19. Medios y criterios para evaluar la práctica docente

Aquí lo mejor es recurrir a tests de autoevaluación ya existentes. Como este modelo sencillo:

Figura 15

Modelo sencillo de autoevaluación.

	Actividades en el aula	1	2	3	4
1	Los alumnos y alumnas trabajan de la siguiente manera en mis clases:				
	- De forma individual.				
	- Por parejas.				
	- En grupos reducidos.				
	- En grupos grandes.				
2	Los ejercicios que propongo son del siguiente tipo:				
	- Cerrados, dirigidos, del libro, etc.				
	- Abiertos, procedimentales, diversos, proyectos, etc.				
	- Facilitan el trabajo cooperativo.				
3	En la metodología que aplico:				
	- Utilizo herramientas TIC.				
	- Propongo actividades para facilitar el aprendizaje autónomo.				
	- Me baso en las explicaciones teóricas y en el libro.				
4	Cómo paso las horas léctivas (promedio):				
	- Consiguiendo silencio.				
	- Impartiendo teoría y explicaciones.				
	- Respondiendo a preguntas, fomentando la participación, desarrollando prácticas, etc.				
	- Observando				
	- Corrigiendo a los alumnos y alumnas de manera individual.				

Nota. Adaptado de "Modelo de Autoevaluación" [Imagen], por Prepara tus Opos (2015), (https://preparatusoposiciones.es/indicadores-de-logro-de-la-programacion-didactica/).

O se puede recurrir al Educacyl para descargarnos el formato estándar que podemos consultar en el Anexo F.

6. Conclusiones y resultados; Propuesta de investigación futura

6.1. Contextualización

El centro donde realicé las prácticas del máster y donde llevé a cabo la intervención didáctica es el Colegio Seminario Menor, que se trata de un centro privado que depende del Seminario Diocesano en Valladolid, pero con un profesorado mayormente seglar. Se encuentra en la zona norte de Valladolid junto al río Pisuerga, en la calle Tirso de Molina 44 y entre el IES Juan de Juni, el Colegio Público León Felipe y el Centro Cívico Rondilla.

Se accede a él a través de la calle Tirso de Molina, que es tanto entrada peatonal como de vehículos a su amplio parking. El mismo edificio se usa también para dar clase de Grado en Educación Infantil y Primaria (de la universidad) y como residencia universitaria.

En cuanto al entorno socioeconómico, aunque el centro está situado en el barrio de la Rondilla, que es un barrio típicamente obrero, el alumnado no procede de este entorno. En términos generales el centro imparte clases a grupos reducidos de alumnos (habitualmente no más de 8 por clase), que normalmente acuden a él porque tienen serios problemas con sus calificaciones y, o bien han sido declarados como casos perdidos para la enseñanza secundaria (son candidatos al programa PMAR), o bien son alumnos con problemas de actitud o disciplina y los padres no saben qué hacer con ellos. En cualquier caso, la enseñanza personalizada, el ambiente familiar y la impartición de valores cívicos y sociales junto con las asignaturas y las actividades extraescolares, han sacado de esa situación de fracaso escolar a un buen número de alumnos. Aunque no siempre sea algo posible.

Otro factor influyente en esos resultados es que el colegio cuenta con instalaciones para tener a alumnos internados. Eso les hace vivir una experiencia de compañerismo y convivencia que normalmente tiene efectos muy positivos en chicos con problemas de actitud o disciplina. Por supuesto esto no se cumple siempre, pero creo que es lo más habitual y los menores parecen encantados de poder llegar a clase sin tener que pisar la calle. Aún así alguno tiene problemas para llegar a la hora, por lo que el centro se ha tenido que poner serio respecto a la puntualidad por las mañanas y se lleva un estricto control al respecto. Calificando cada retraso en el mes como una falta leve. Y tres faltas leves se califican como una grave, que lleva asociada una sanción.

A pesar de que las familias de los alumnos cuentan con perfiles socioeconómicos medio-altos, y el centro cuenta con unas infraestructuras bastante buenas, uno de los factores más importantes en la mejora del alumnado es el trabajo estrecho entre profesores y padres, que se materializa en unas vías de comunicación constantemente abiertas, actividades extraescolares periódicas con asistencia de los padres y, sobre todo, el cumplimiento por parte de los padres/tutores de las directrices que marcan los docentes para el mejor desarrollo del alumno. De hecho, los casos que no mejoran o tienen una mejoría menor, están fuertemente relacionados con las ocasiones en que los padres o tutores de los menores no siguen las recomendaciones del profesorado y/o no se involucran en el proceso de enseñanza.

En mi caso particular, llevé a cabo la intervención en el aula de 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales, que constaba de 4 alumnos. Dos de ellos con bastantes posibilidades de sacar el curso adelante, pero de los otros dos, uno estaba dudoso y el otro lo tenía bastante mal para aprobar las matemáticas. Hay que admitir que el año pasado, de encierro COVID, no les ha hecho ningún bien a aquellos alumnos que ya iban justos o tenían problemas en matemáticas.

El centro cuenta con amplias instalaciones deportivas, comedor, biblioteca (una de las mejores de Castilla y León), alojamientos, aulas TIC y de música, sala de conferencias, cañones de proyección en las aulas, ordenadores portátiles y una buena dotación de equipos y material para las clases. En definitiva, un ambiente idóneo para la enseñanza.

En resumen, un centro privado con excelentes instalaciones y docentes, pero con un alumnado, que en su mayoría, sufre algún tipo de problemática.

6.2. Conclusiones y resultados

Antes de empezar a ver los resultados de las encuestas, problemas y el examen, debo decir que mi tutor del instituto, me dio su opinión sobre la actividad y la calificó como de “demasiado avanzada para los alumnos” y “demasiado rápida/condensada”. Personalmente no creo que fuera demasiado avanzada para ellos, pero sí estoy de acuerdo en que se le podría haber sacado más jugo si la hubiera planteado con un día más y con más actividades participativas de los alumnos.

Pero veamos algunos resultados:

1ª Encuesta: Las dos primeras preguntas buscaban averiguar la actitud de los alumnos hacia las matemáticas, y en general **todos mostraron buena predisposición** hacia las matemáticas, aunque uno dejó claro que no se le daban bien.

Al preguntarles si habían estudiado problemas de optimización, dos de ellos respondieron que sí en economía y los otros dos que no. Con lo que está claro que **sólo la mitad asoció otra asignatura con las matemáticas**.

Al preguntarles por problemas isoperimétricos todos contestaron que **no los habían visto nunca**.

A la pregunta de si conocían casos en que de la vida real se hubieran desarrollado nuevas ideas/aplicaciones matemáticas, **todos contestaron que sí y la mayoría mencionó a Pitágoras**.

A la pregunta si sabían qué es “hacer matemáticas” dos la asociaron con aplicarlas a la vida real, otro a hacer números y otro no entiendo qué quiso decir. **Está claro que no conocían el término**. ¿Investigarían por su cuenta sobre el mismo?.

Las dos últimas eran referentes a si habían estudiado Lógica en Filosofía y si veían relación con las matemáticas. Respondieron que **sí la habían estudiado pero no veían la relación entre ambas asignaturas**.

De estas respuestas deduzco antes tener más información que tienen buena predisposición, pero les cuesta asociar las matemáticas con otras asignaturas y que no conocían los problemas isoperimétricos.

Problema 1: Este era el enfoque gráfico de la resolución de un problema isoperimétrico. En él casi todos dibujaron el cuadrado como una de las figuras posibles, pero ninguno lo identificó como el de mayor área porque todos cometieron el error de creer que las diagonales de los cuadrados 1x1 también medían 1.

Está claro que les falta un poco de práctica con la geometría y cayeron en la trampa de creer que todas las distancias son iguales.

Problema 2: El problema de encontrar el producto máximo de dos números que suman 100. Todos ellos vieron claramente que el máximo se alcanzaba cuando los dos números son iguales a 50. Pero ninguno fue capaz de ofrecer una explicación con un razonamiento claro del motivo.

Esto me lleva a pensar en cómo el problema isoperimétrico puede ser tan lógico que sus soluciones pueden resultar evidentes por simple instinto. Baste mencionar la conjetura de Kepler (de apilamiento de balas de cañón) o el teselado del espacio con hexágonos. Algo que puede tener utilidad didáctica de cara a hacer comprender a los alumnos los razonamientos que hay tras esas soluciones aparentemente tan evidentes.

Problema 3: ¿Cuál es la figura plana que encierra el mayor área, que se puede formar con una cuerda de 22cm de longitud? Tres de ellos contestaron que el círculo y calcularon correctamente el área. El otro contestó que era un cuadrado, supongo que se lió con el problema que habíamos visto de encontrar el rectángulo isoperimétrico de mayor área.

2ª Encuesta: La primera pregunta fue sobre si les habían gustado las actividades de la intervención. A lo que 3 respondieron que unas sí y otras no, el 4º dijo que sí a todas. **Creo que la**

parte de curvas genéricas, que era la más difícil, no les acabó de gustar.

La segunda les preguntaba si veían utilidad en las actividades realizadas. A lo que todos contestaron que **sí le veían utilidad**. Pero no especificaron cuál.

Les pregunté si les habían parecido actividades de poco nivel, y 3 **contestaron que no eran de poco nivel**, incluso uno pidió que fueran más fáciles.

Al preguntarles si vieron relación con las inecuaciones del tema anterior, respondieron mayoritariamente que **no veían la relación con las inecuaciones**. Supongo que este aspecto debería mejorarse en la intervención.

Aquí volví a preguntar si conocían algún caso de la vida real se hayan desarrollado nuevas ideas/herramientas matemáticas. La misma pregunta de la primera encuesta. **Pero ahora sólo contestaron 3 que sí y ninguno mencionó a Pitágoras**, aunque uno menciona a la Reina Dido.

Vuelvo a repetir pregunta y les pregunto por "hacer matemáticas", y **obtengo casi las mismas respuestas que en la 1ª encuesta**. Hay que reconocer que los muchachos tienen poca curiosidad por cosas nuevas o es que se creen que saben la respuesta si no les dices lo contrario… Este es un tema que tengo que mirar más a fondo en el futuro, si tengo ocasión.

Al preguntarles **si les han parecido interesantes las actividades**, las respuestas son en general positivas.

Al pedirles sugerencias para mejorar la intervención la mayoría sugiere hacerla **más participativa por su parte y más dinámica**. Creo que esto está relacionado con haberla ejecutado demasiado rápido y no haberles dedicado más tiempo para que hicieran problemas ellos. Está claro que hay que hacerles participar más.

Examen de evaluación: Las notas fueron dos cincos, un seis y un siete. En el primer problema sólo uno identificó el triángulo isósceles como el triángulo rectángulo de mayor área. En el segundo ninguno cayó en la trampa y todos identificaron que las restricciones del problema volvían redundante la condición de área máxima. En el tercero sólo uno falló en identificar el cuadrado como el rectángulo de área máxima. En el cuarto sólo uno no asoció el círculo con la curva de área máxima y uno de los que sí lo hizo, no supo deducir cómo calcularla. La gran sorpresa, fue la nota de un alumno que está teniendo muchas dificultades en matemáticas y que seguramente no llegue a aprobarlas, ya que consiguió un seis. Esta nota hace que me plantee la relación del problema isoperimétrico con la obtención de soluciones intuitivas, tema del que he encontrado un artículo de investigación muy interesante, pero aplicado a alumnos universitarios.

También quisiera hacer una valoración global de los resultados obtenidos en la unidad didáctica como reflexión con carácter de crítica constructiva.

Las encuestas arrojan datos interesantes:

- El grupo no tenía mala predisposición hacia las matemáticas, con lo que no es un factor influyente en los resultados. Pero sin olvidar el carácter conflictivo de este alumnado, que sí puede influir en la base de conocimientos del mismo.
- Los alumnos muestran ciertas dificultades al asociar unas asignaturas con otras y unos temas con otros, algo que sin duda supone un hándicap en la resolución de problemas.
- Respecto a si conocían casos de la vida real relacionados con las matemáticas, todos respondieron afirmativamente, pero no fueron capaces de asociarlas con cosas de hoy en día, dando la sensación de cierta desconexión entre matemáticas y su día a día. La intervención no pareció cambiar esta percepción.
- Se les preguntó deliberadamente por un término que no conocían ("hacer matemáticas") antes y después de la intervención, obteniendo respuestas muy similares. Está claro que no sintieron curiosidad por el término, dejando claro que todo aquello que esté fuera de su estilo de vida habitual no les interesa. Es una actitud propia de esa edad y por tanto no reprochable, pero sería interesante comentarles tal circunstancia y lo peligroso que es ir por la vida sin ver más allá de lo que hay frente a ti.
- Al preguntarles por la intervención las respuestas son positivas, pero sugieren más intervención por su parte y más dinamismo. Estos aspectos creo que son mejorables haciendo que la intervención sea de 4 días en lugar de 3 y haciendo que ellos participen más con más problemas y con algún trabajo o investigación que pudieran exponer ellos en clase (que podría hacerse en grupos de 3 ó 4).

El examen:

Las notas han mostrado un par de detalles interesantes. Por un lado, cómo los alumnos más procedimentales tienen más problemas, con la resolución de problemas y con los conocimientos más basados en la lógica que en la aritmética. Esto sugiere la necesidad de un mayor trabajo en esas áreas a un nivel más bajo, para poder proporcionarles una base sobre la que desarrollar sus futuros trabajos de resolución de problemas.

Por otro lado, ha sido una interesante sorpresa observar cómo un alumno con problemas serios en matemáticas ha destacado en el examen. Aquí se abren dos líneas de razonamiento. Una por la cual los problemas isoperimétricos tienen un componente importante de intuición en la resolución, algo que valdría la pena estudiar. Y otra que sería que la resolución de problemas resulta más asequible a los alumnos con problemas de aprendizaje de las matemáticas, que los aspectos procedimentales. Algo que sin duda ya está estudiado en la metodología ABP. En cualquier caso sería interesante contrastar cuál es el porcentaje de una u otra, para discernir qué tiene más peso en el aprendizaje.

Resumen de conclusiones:

La exposición usando metodología ABP sí parece haber sido una elección acertada, ya que ha supuesto que alumnos con menores capacidades matemáticas, se implicaran más y , en general, les ha gustado la experiencia a todos, ya que la sugerencia más extendida era la de más actividades participativas, o lo que es lo mismo, menos exposición y más ABP. De hecho, he llegado a la conclusión de que la intervención mejoraría con un día más, para repartir más la misma exposición y poder ofrecerles una mayor cantidad de contenido ABP.

Por otro lado, el carácter motivacional de la unidad no se ha visto reflejado en las encuestas, pero sí que ha implicado un aprendizaje significativo, ya que todos han aprobado un examen del que no se les avisó hasta una semana antes de su realización. Siendo especialmente curioso el rendimiento de los alumnos con más dificultades en matemáticas.

Es interesante también, comprobar cómo los problemas isoperimétricos no sólo aportan una base interesante para desarrollar la metodología ABP, sino que ofrecen un enfoque de desarrollo lógico, no mecanicista, que nos permite desarrollar competencias transversales en el ámbito de la contextualización de los problemas, del desarrollo histórico de las matemáticas o del papel de la mujer en el ámbito intelectual.

Por último hacer notar que, dejando de lado las dificultades mostradas por los alumnos (muchas previsibles) en la resolución de los problemas, ha sido interesante descubrir cómo los problemas isoperimétricos cuentan con una componente intuitiva en su resolución, que sirve de puente para atraer a los alumnos menos aventajados. Aunque este es un aspecto que debería investigarse más profundamente, para poder valorar objetivamente la incidencia de ese factor.

6.3. Propuesta de investigación

Me ha parecido interesante proponer una investigación relacionada con la intervención, ya que durante la misma he podido observar un par de detalles no esperados, que creo pueden resultar de interés para la comunidad educativa.

Por un lado me llamó la atención el grado de éxito obtenido por un alumno con serios problemas con las matemáticas, y por otro las enormes dificultades, que tuvieron todos, para asociar diferentes temas de las matemáticas, estas con otras asignaturas y con el mundo real. Constituyendo este segundo punto una enorme dificultad a la hora de resolver problemas. Es como si estudiaran cada tema de matemáticas de forma desconectada de los anteriores, y sin entender que las matemáticas que se les imparten, son herramientas que hay que saber usar en el momento justo y el lugar adecuado. Así es muy difícil que lleguen a asociarlas con el mundo real.

Es por ello que pienso que la metodología ABP es sumamente útil en este contexto, aunque admito que es una metodología que requiere de más tiempo del habitual. Es por eso que pienso que el momento ideal para empezar a ponerla en práctica es cuanto antes mejor. Pero para la resolución de problemas hay que alcanzar antes el nivel mínimo de abstracción del álgebra, por lo que creo que ese sería un momento ideal para su introducción; junto con la introducción al álgebra.

Por otro lado, de las encuestas se detecta también, la necesidad de mejorar la intervención didáctica para que esta sea más efectiva. Siendo este un elemento que puedo plantearme incluir en la investigación.

Sin embargo, para la investigación considero contraproducente imponer, a priori, una metodología de la unidad didáctica, y sí veo más importante definir unos objetivos más concretos. Además, como veremos, vamos a tener que lidiar con un pequeño problema a la hora de diseñar la investigación. Sin embargo, llegados a este punto, lo más adecuado es dejar de divagar y centrarnos en el uso de una metodología reconocida que nos ayude a desarrollar nuestra investigación. En nuestro caso lo más adecuado es seguir el modelo de la rayuela, tanto por estar especialmente indicado para investigadores noveles (como es mi caso) como para veteranos que requieran de un modelo de diseño fiable y sencillo.

Figura 16

Modelo de la rayuela.

Nota. Adaptado de “Modelo de la Rayuela” [Imagen], por hopscotchmodel.com (2018), (https://hopscotchmodel.com/pasos/). Recuperada 4 Junio 2021.

En este modelo vamos a seguir en orden una serie de pasos, representados en el esquema anterior, que nos van a ayudar a mantener un mínimo orden y coherencia en el diseño.

Por lo que pasamos a afrontar los pasos:

PASO 1: Posición Paradigmática

Mi posición paradigmática, o visión del mundo, está compartida por dos cosmovisiones en igual grado.

➢ Cosmovisión Post-positivista

Esta cosmovisión asume que el mundo se rige por leyes generales que describen relaciones persistentes entre un conjunto de variables observables. O lo que es lo mismo, que el mundo se rige por leyes del tipo causa-efecto. Este sería el punto de vista del positivismo.

Pero también admite que los sistemas reales son complejos y siempre hay factores que escapan a nuestro escrutinio. O dicho de otro modo, que el punto de vista del investigador influye de forma determinante, en qué factores se quedan fuera de su estudio y, por tanto, qué limitaciones tiene su investigación.

Por eso se debe usar el método científico, pero tratando de considerar siempre múltiples perspectivas individuales aunque creamos en la existencia de una única realidad. En muchos casos este aspecto implicará la utilización de varios investigadores, con puntos de vista diferentes, que complementen nuestras limitaciones personales.

Esta es mi postura ante la vida desde que era pequeño. Una visión científica del mundo, donde las cosas siempre siguen leyes fijas, pero admitiendo que hay que estudiar las cosas desde diferentes puntos de vista, si se quiere tener una visión más amplia de la realidad.

➢ Cosmovisión Pragmática

El pragmatismo considera la existencia de una única realidad (post-positivismo) que cada sujeto interpreta de manera propia (constructivismo). Es decir, fusiona el post-positivismo y el constructivismo. Es interesante notar que mientras en el post-positivismo nos preocupaba el punto de vista del investigador a la hora de diseñar la investigación, ahora el pragmatismo admite que no sólo influye el punto de vista del investigador, sino también, el de los sujetos que forman parte del estudio, de cómo interpretan la realidad que estudiamos.

Al admitir tanta variabilidad en los puntos de vista de la realidad de estudio, el pragmatismo llega a la conclusión de que lo importante es el fenómeno que se quiere estudiar en vez de los métodos y técnicas para hacerlo. De modo que se eligen los métodos de acuerdo a su capacidad de serles útiles para dar respuesta a las preguntas de investigación. Esto implica dos cosas, por un lado poder echar mano de cualquier método o técnica, lo que implica que el investigador debe formarse en todo el espectro de las herramientas de investigación (debe conocerlas), y por otro, requiere que el investigador tenga un punto de vista flexible para poder enfocar el estudio del fenómeno desde la perspectiva más adecuada y con las herramientas más efectivas para obtener las respuestas a las preguntas planteadas.

Personalmente esto es lo que más me gusta de este tipo de cosmovisión, porque aunque no me considero una persona muy flexible y creo que serlo es bastante difícil, sí admito la tremenda utilidad de esa postura y he podido comprobar en mi vida, las enormes ventajas de mantener esta cosmovisión.

PASO 2: Problema y Objetivos

Este punto tuvo que ser rediseñado al llegar al paso 3, ya que al intentar formar el marco conceptual de la investigación, me encontré con la dificultad de no encontrar literatura previa de investigación de problemas isoperimétricos en secundaria. También constaté la ausencia de currículos, a nivel mundial, que los consideren como materia de estudio. Ante lo cual me encontré con una total inexistencia de marco conceptual sobre el que apoyar mi investigación. Sin embargo, en el paso 4, en la elección de diseño de la investigación, sí que existe un diseño que contempla el poder desarrollar una investigación sin un marco conceptual previo, ya que admite la realidad de que vamos a estudiar un “vacío” (gap en inglés) en el ámbito de la investigación. Este diseño es el de Teoría Fundamentada, que es el que vamos a proponer, siendo este un diseño de tipo cualitativo.

Debo admitir, que por mi cosmovisión personal, mi primera intención fue intentar un diseño de tipo mixto con desarrollo en paralelo de las partes cuantitativa y cualitativa, y con una fase final de triangulación de algunos de los datos recogidos. De hecho, en este diseño preliminar que realicé, fue en el que basé la intervención didáctica que lleve a cabo en las prácticas. Y esto fue también determinante, para que en el paso 4 propusiera dos fases de investigación, la principal usando Teoría Fundamentada (fase 2) y una fase previa de rediseño y mejora de la unidad didáctica y los métodos de recogida de datos, usando Investigación-Acción de 2 a 4 años (fase 1 previa).

Una vez aclarada esta problemática, pasemos a desarrollar el paso 2 de la rayuela con la definición del problema y los objetivos, para este nuevo enfoque de Teoría Fundamentada.

El Problema: Los problemas isoperimétricos como método motivacional y su relación con las competencias transversales en 1º de Bachillerato.

Tópico: Dominio Afectivo en Matemáticas.

Objetivo personal: Identificar nuevos elementos de motivación para los alumnos.

Objetivo práctico: Elaborar una propuesta de intervención curricular para que los alumnos aprendan cómo las matemáticas se relacionan con el mundo real, usando los problemas isoperimétricos.

Objetivos intelectuales:

- Comprender mejor el nexo entre la historia y el desarrollo de las matemáticas.
- Comprender mejor qué aspectos pueden potenciar el pensamiento matemático.
- Estudiar los errores cometidos en su resolución.
- Estudiar el posible componente de intuición en la resolución de problemas isoperimétricos.

Como podemos ver, he definido el problema en el ámbito motivacional, pero sin olvidar la necesidad de relacionarlo con las competencias transversales, para aportar todos esos elementos relacionales tan necesarios en la resolución de problemas (que vimos en la metodología ABP). Y a raíz de ese planteamiento surgen los objetivos, en los que he incluido una referencia al estudio del componente intuición, que parece ser algo único de este tipo de problemas, y por tanto, un elemento diferenciador que podría hacerlos merecedores de su inclusión en el currículo, algún día.

PASO 3: Marco Conceptual

Como ya comenté en el paso anterior, aquí me encontré con el escollo de no hallar literatura previa de investigación sobre este tema. Lo cual implica tener que usar Teoría Fundamentada para crear ese marco conceptual.

Para poder crear una base conceptual y sobre ella un nuevo marco, he decidido recurrir a elementos íntimamente relacionados con el tema de estudio. Para empezar podemos ver que el problema de estudio cuenta con dos componentes claros donde apoyarnos. Por un lado tendremos un **componente matemático** en el que encontraremos abundante literatura relacionada con los problemas isoperimétricos y su evolución durante la historia de las matemáticas.

Buenos ejemplos de esta literatura son los siguientes artículos y un libro:

- Herrero Piñeyro, P. J. (2012). **La historia del problema isoperimétrico clásico con geometría elemental**. *La Gaceta de la RSME*, *Vol. 15*(Núm. 2), Págs. 335–354.
- Pérez, Rafael; Berenguer, Isabel; Berenguer, Luis; Daza, Dolores; Fernández, Francisco; Posadas, Miguel; Payá, Ana (2000). **Isoperímetros en la Grecia antigua**. Revista SUMA, (Núm. 34), Págs. 95-98 .
- Niven, I. (1981). **Maxima and Minima without Calculus** (Dolciani mathematical

expositions). Washington: Mathematical Association of America.

Bajo este componente matemático podemos definir; el problema isoperimétrico consiste en encontrar la curva cerrada de perímetro dado que encierre en su interior el máximo área. O si hablamos de superficie cerrada, la de volumen máximo.

Por otro lado, vamos a tener una **componente didáctica** relacionada con las investigaciones sociales y que es donde tenemos el vacío de literatura previa. Pero en su lugar vamos a buscar componentes relacionados con el problema isoperimétrico. Al tratarse de un problema de optimización, está fuertemente ligado al estudio de las inecuaciones y a los problemas de optimización que se ven en economía, en el cálculo de máximos y mínimos de funciones, etc. Y al tratarse estas, de materias ya incluidas en el currículo, cuentan con extensos estudios y poseen un amplio marco conceptual, en el que podemos basar nuestra investigación.

Estudiando primero el componente de los **Problemas de Optimización**, vamos a disponer de marcos conceptuales ya desarrollados, como son:

- Carlson and Bloom's (2005) **Multidimensional Problem-Solving Framework**
- Y la doctora Teresa Balcaza Bautista en su tesis doctoral usa dos enfoques unidos para crear el marco conceptual de los problemas de optimización:
  - Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (Godino, Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Batanero, Font, 2007)
  - La Teoría de los Registros de Representación Semiótica (Duval, 1995; 2006).

Por otro lado, el componente de los **Problemas de Inecuaciones** dispone también de varios marcos conceptuales interesantes:

- Según la investigadora Karly Barbosa y otros autores, el marco se sitúa en el contexto de las investigaciones en matemática educativa en el área de enseñanza-aprendizaje del álgebra, en particular en investigaciones relacionadas con el concepto de inecuaciones y las **aplicaciones de la teoría APOE**. Asiala et. al. (1996), basado en la teoría APOE, proporciona una descripción de lo que significa aprender en matemáticas y decribe los tipos de construcciones mentales; acción, proceso, objeto y esquema, consideradas en la teoría APOE (Asiala, 1996; Dubinsky, 1996; DeVries, 2001)
- Bernardis, Silvia; Nitti, Liliana; Scagilia, Sara (2017). **Indagación de la historia de las desigualdades matemáticas**. Educación Matemática, 29(3), pp. 161-187.

  El marco teórico en el que se basa el estudio proviene principalmente de la perspectiva de Freudenthal (2002). Este autor afirma que los conceptos, ideas y estructuras matemáticas sirven para organizar fenómenos del mundo físico, social y mental. La fenomenología de un concepto, estructura o idea matemática significa describirlo en su relación con los fenómenos para los que fue creado y a los que ha sido extendido en el proceso de aprendizaje de la humanidad. Cuando esta descripción se refiere al proceso de aprendizaje de las generaciones jóvenes, se habla de fenomenología didáctica, que proporciona una guía al profesor acerca de los lugares por los que el alumno puede transitar en el proceso de aprendizaje. En particular, Freudenthal (2002) considera fenomenología histórica al estudio de cómo se adquiere la relación entre los conceptos, ideas y estructuras matemáticas y los fenómenos en la historia. El conocimiento de los momentos claves en la historia de la desigualdad matemática pone de manifiesto aquellos obstáculos que hubo que superar para perfeccionar este concepto. Además, pone en evidencia su importancia en distintos dominios de la matemática. Consideramos que estas cuestiones resultan de interés para el diseño de experiencias de aprendizaje apropiadas para su comprensión.

  - Hans Freudenthal. (1986). **Didactical Phenomenology of Mathematical Structures**. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company.

PASO 4: Mi Diseño de Investigación

He decidido dividir la investigación en dos fases, como ya expliqué anteriormente:

Fase 1: Preparación y depuración de la intervención curricular a través de una metodología de "investigación-acción" de entre 2 y 4 años. Quiero refinar la materia impartida, así como los métodos de obtención de datos, de forma que se puedan implementar de forma rigurosa y sistemática en la siguiente fase. Los elementos de estudio de esta fase son:

a) **Una encuesta previa** para medir la predisposición y los conocimientos previos. Con preguntas abiertas del tipo "¿Te gustan las matemáticas?"
b) **La unidad didáctica**, con problemas propuestos para recogida de datos y enmarcada en las metodologías de Resolución de Problemas (como el ABP).
c) **Una encuesta** (similar a la primera) **al finalizar**, con preguntas sobre satisfacción, comprensión de la materia y disposición final hacia la asignatura.
d) **Un examen**, pasadas una o dos semanas, para medir el grado de aprendizaje significativo.

Fase 2: Ya que no tengo antecedentes, diseño la investigación usando la metodología de la "Teoría Fundamentada" para reunir datos, de manera que pueda discernir el modo en que los problemas isoperimétricos pueden ser un elemento motivador y de desarrollo de competencias transversales. También busco desarrollar un marco conceptual para los problemas isoperimétricos, de manera que futuras investigaciones puedan basarse en él.

La Teoría Fundamentada nos da una serie de pasos a seguir para desarrollar la investigación:

1) El grupo y/o individuos a estudiar deben elegirse sobre la base de la pregunta principal de investigación. En nuestro caso, buscamos aplicar los problemas isoperimétricos en secundaria, pero sólo en Bachillerato tienen la base matemática necesaria para poder resolverlos. Y dentro de Bachiller debemos descartar 2º de Bachillerato, ya que en ese curso están muy centrados en estudiar el currículo que les cae luego en los exámenes de reválida. Así que **nuestro grupo escogido deberá ser 1º de Bachillerato en cualquiera de sus especialidades**.
2) Los tipos de técnicas de recogida de datos que se utilizarán deben elegirse en función de su conveniencia para capturar la información que buscamos para generar nuestra teoría. Este aspecto de este diseño me viene muy bien para **poder tomar no sólo datos cualitativos, sino también cuantitativos** con los que apoyar al final la Teoría Fundamentada.
3) **Usaremos codificación teórica**, en lugar de codificación sustantiva, porque nos ayuda a conceptualizar la forma en que los códigos sustantivos se relacionan entre ellos y se integran para formar nuestra teoría emergente. Es decir, estamos más interesados en sacar relaciones fuertes entre los códigos sustantivos ("memos"), que en identificarlos, ya que es previsible que coincidan con los de las investigaciones de problemas de optimización, ya existentes.
4) **Usaremos búsqueda de códigos teóricos abstractos**, que consisten en modelos relacionales a través de los cuales todos los códigos y categorías sustantivas previamente identificadas, se relacionan con la categoría central. Una vez más, buscamos modelos relacionales fuertes. Aquí nos será útil confeccionar mapas conceptuales.
5) A continuación el diseño nos indica realizar una **revisión de literatura**, que en nuestro caso consistirá en buscar artículos sobre problemas de optimización, problemas de inecuaciones y factor intuición. Algunos de los cuales ya los hemos ido mencionando en el paso anterior y otros se referenciarán más tarde.
6) Por último será necesaria la generación de la teoría emergente, pero en nuestro caso, será aún más importante, **la integración de la misma con el conocimiento preexistente**. La teoría sustantiva aborda un tipo de construcción teórica de orden inductivo, por lo que si algo funciona para problemas de optimización, podemos inducir que funcionará en isoperimétricos, si la relación es fuerte.

PASO 5: Mis Preguntas de Investigación

De todo lo anterior se pueden plantear unas preguntas que trataremos de responder con nuestra investigación:

- ¿Existe un elemento motivacional para los alumnos?
- ¿Propician un cambio de actitud hacia las matemáticas?
- ¿Tienen utilidad práctica?
    - ¿Los alumnos aprenden a resolver problemas?
    - ¿Los relacionan con el mundo real?
- ¿Tienen utilidad teórica?
    - ¿Sirven para enlazar distintos temas de matemáticas?
    - ¿Ven su relación con la historia y el mundo real?
    - ¿Se pueden relacionar con otras asignaturas?
- ¿Existe un componente intuicional en la resolución de problemas isoperimétricos?

PASO 6: Mis Instrumentos de Recogida de Datos

Aquí también vamos a tener que dividir la investigación en sus dos fases:

Fase 1: Mediante "investigación-acción". **Busco refinar** la materia impartida, así como **los métodos de obtención de datos**, que son:

★ Una **encuesta previa**.
★ La unidad didáctica, con **problemas propuestos para casa** y recogida de datos del tipo "¿Cuál es el área máxima que podemos encerrar con una cuerda de 22cm?".
★ Una **encuesta al finalizar**.
★ Un **examen**, pasadas una o dos semanas.
★ La **observación** de cómo asimilan el conocimiento los alumnos, para refinar los métodos de exposición y obtención de datos.

Fase 2: **Recogida de datos**, por parte de profesores no relacionados con nosotros, en sus diferentes centros, **de la intervención** diseñada para 1º de Bachillerato, en la fase anterior.

Adicionalmente los profesores que participaran, deberían rellenar **un cuestionario de autoevaluación de la unidad didáctica**, para medir si ha sido una intervención relevante para ellos y en qué grado.

Y por último, habría que recoger datos como **qué metodología usó cada profesor** para impartir la unidad didáctica y **su opinión** sobre la misma.

PASO 7: Mis Análisis de Datos

El diseño de Teoría Fundamentada especifica claramente cómo analizar los datos obtenidos, pero como en mi investigación hay dos fases, una de las cuales no sigue el diseño de Teoría Fundamentada, y además vamos a recoger datos no sólo cualitativos, sino también cuantitativos, he decidido usar la espiral de análisis de Creswell (2007), adaptándola a las dos fases y al tratamiento más adecuado de los datos en cada una.

La espiral de análisis de Creswell (2007) consta de 4 etapas que pasamos a analizar a continuación:

1. **Preparación, gestión y organización de los datos**: Esta etapa funciona igual en las dos fases y consiste en que todos los datos numéricos hay que organizarlos en tablas, para su tratamiento y los demás (encuestas, problemas, etc.) en carpetas clasificadas.
2. **Lectura y etiquetación de los datos**: Esta etapa también es común a las dos fases y consiste en que las respuestas de las encuestas hay que clasificarlas en "memos" porque hacemos preguntas abiertas. Y hay que revisar los problemas propuestos y el examen para buscar errores y dificultades no esperados y hay que calificarlos.
3. **Descripción, clasificación e interpretación de los datos**: Aquí hay que distinguir entre las dos fases.

   Fase 1: Hay que estudiar a fondo los datos obtenidos, tratando los resultados numéricos con estadística y clasificando los memos surgidos en las respuestas cualitativas, con especial énfasis en las sugerencias y opiniones sobre la intervención. Para, a partir de esos resultados, buscar formas de mejorar la exposición y la obtención de datos. Este proceso iterativo se repetirá de 2 a 4 años (dependiendo del grado de mejora obtenido en la última iteración) para obtener así la intervención que pueda servirnos de mejor modo a la siguiente fase de investigación.

   Fase 2: Los datos numéricos (examen, problemas y cuestionarios de autoevaluación) reciben un tratamiento estadístico. Algunos de esos datos nos darán información sobre la relevancia de la intervención y otros serán un apoyo a contrastar con los datos cualitativos. Para las respuestas de las encuestas, errores y opiniones usaremos codificación teórica para obtener las relaciones entre conceptos a través de búsquedas de códigos teóricos abstractos.

4. **Representación y visualización de los datos**: Esta etapa es de visualización de resultados y se aplica de igual modo en ambas fases. Es de gran ayuda el uso de histogramas u otros gráficos, en las diferentes categorías de datos, y sobre todo el uso de mapas conceptuales para ver dónde se sustenta la "teoría sustantiva" y lo fuertes que son las relaciones entre los códigos sustantivos (o memos).

PASO 8: El Rigor de mi Investigación

Mi investigación es de tipo cualitativo, por lo que el rigor de la misma se mide por su ”**Confiabilidad**” y los criterios de Guba (1981):

- ❖ **CREDIBILIDAD**: Debe existir congruencia de los resultados obtenidos con la realidad que se está estudiando
- ❖ **TRANSFERIBILIDAD**: Los resultados deben ser trasladables a otras situaciones a partir del grado de similitud de la situación o contexto
- ❖ **FIABILIDAD**: La investigación debe ser “modelo prototípico” (es decir, debe poder ser replicada por otro investigador)
- ❖ **CONFIRMABILIDAD**: Los resultados deben derivarse de las experiencias/ideas dadas por los participantes (y no de las preferencias del investigador)

De estos criterios se derivan los siguientes consejos que trataremos de cumplir en nuestra investigación:

- ➢ **Usar diseños de investigación y métodos reconocidos**. En todo momento uso diseños y métodos ampliamente usados en la comunidad investigadora, como el diseño de Investigación-Acción, y como no dispongo de antecedentes en mi investigación, recurro al uso de Teoría Fundamentada.
- ➢ **Usar estrategias de triangulación** de investigadores, de métodos utilizados y de datos recogidos (en diferentes momentos). Para poder triangular datos uso diferentes métodos de recogida de datos, en diferentes centros y contextos socioeconómicos, y recurro a la ayuda de otros investigadores al tratar los datos recogidos.
- ➢ **Crear descripciones amplias y detalladas** tanto de las situaciones y contextos, como de los métodos utilizados o de los fenómenos estudiados. En mi caso, esta parte es poco relevante en la fase 1, pero de vital importancia en la fase 2. Por lo que basta con seguir los pasos de la investigación con cuidado y ser generoso en explicaciones, de forma que las relaciones entre códigos sustantivos queden bien justificadas.
- ➢ **Tener un buen conocimiento de otras investigaciones parecidas relacionadas**. Esto lo podemos hacer revisando investigaciones relativas a: ABP, problemas de optimización, inecuaciones y factor intuición en resolución de problemas. Ya hemos visto algunos ejemplos en los otros pasos de la rayuela.
- ➢ **Utilizar tácticas para asegurar la honestidad o sinceridad de los participantes**. Yo propongo medidas como el hacerles el examen una o dos semanas más tarde, para evitar la influencia de la intervención en el aprendizaje significativo, o pedir el consentimiento escrito a los alumnos después de tomar los datos, de modo que aquellos que no lo autoricen, basta con borrar sus datos.

- ➢ **Admitir cuáles son nuestras creencias** como investigadores y los efectos de las posibles limitaciones del estudio desarrollado. En mi caso no tengo problema en explicar cuales son mis creencias y en cómo afectan a mi punto de vista a la hora de tratar la investigación. Además, soy un individuo al que le encanta pedir su opinión a otras personas con puntos de vista diferentes, porque creo que supone un elemento muy importante de aprendizaje y mejora personales. Por otro lado, he diseñado la fase 2 para que sea llevada a cabo por otras personas ajenas a mi y cuento con la ayuda de otros investigadores para el tratamiento de los datos.
- ➢ **Compartir y chequear con los participantes los resultados que van obteniéndose**. Una vez recogidos los datos se informaría a los alumnos de la investigación y se les haría partícipes, así como a los profesores, de los resultados.

PASO 9: Una Mirada a la Ética de mi Investigación

Los principales principios asociados con la conducta ética son (Marilyn Litchman, 2011):

- **No dañar**: Este punto creo que no es aplicable en este tipo de investigación, de tipo académico.
- **Privacidad y anonimato**: Hay que asegurar el anonimato de los participantes, por lo que propongo sustituir nombres por referencias, por parte de los profesores que toman los datos.
- **Confidencialidad**: Hay que tratar con cuidado los datos obtenidos, para evitar que caigan en manos de gente ajena a la investigación o no autorizada.
- **Consentimiento informado**: Hay que pedir consentimiento escrito a todos los implicados, pero propongo hacerlo con anterioridad a todos menos a los alumnos, a los que se le pediría a posteriori, con el fin de garantizar la honestidad de los resultados.
- **Relación y amistad**: Estamos en un ambiente de relación formal profesor-alumno, por lo que no es muy plausible que las relaciones sean más informales.
- **Intrusismo**: Aunque creo que el uso de metodología ABP es la más adecuada para realizar la intervención, debo diseñarla de forma que no influya en cómo la imparten otros profesores. De este modo los resultados serán independientes de la metodología utilizada.
- **Comportamiento inapropiado**: Es poco probable que ocurra en este ambiente.
- **Interpretación de datos**: La interpretación de los datos será labor mía, aunque cuento con pedir ayuda de otros investigadores para el tratamiento de los datos y para revisar las conclusiones que yo obtenga.
- **Propiedad de datos y recompensas**: En este tipo de investigaciones no suele haber recompensas que no traten con la mejora del sistema educativo. Pero es importante nombrar las otras fuentes que usemos, usando preferiblemente normas APA.

Con esto terminamos los 9 pasos del método de la rayuela y podemos reflejar la investigación en un esquema final:

Figura 16

Esquema de investigación propuesta usando teoría fundamentada.

Nota. Adaptado de "Your grounded theory research design" [Imagen], por hopscotchmodel.com (2021), fuente propia.

7. Bibliografía y webgrafía

Balcaza Bautista, T. (2018, junio 7). *Investigación acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la optimización en Bachillerato, desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico y de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica*. Tesis Doctoral. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/tesis/Tesis_TBalcaza.pdf

Bernardis, S., Nitti, L., & Scaglia, S. (2017, diciembre 3). *Indagación de la historia de las desigualdades matemáticas*. Educación Matemática, 29(3), 161 - 187. 10.24844/EM2903.06

Calzada González, I. (2019). *PISA y la competencia de modelización matemática en ESO*. UVaDOC. http://uvadoc.uva.es/handle/10324/38475

Castilla Pérez, M. F. (2014). *La Teoría del Desarrollo Cognitivo de Piaget aplicada en la clase de primaria* [Trabajo Fin de Grado]. UVaDOC. Recuperado el 17 junio 2021, de http://uvadoc.uva.es/handle/10324/5844

Dido. (2021, junio 16). Wikipedia, La enciclopedia libre. Recuperado el 17 junio 2021, de https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Dido&oldid=136370929

El Consejo de la Unión Europea. (2018, mayo 22). RECOMENDACIÓN DEL CONSEJO de 22 de mayo de 2018 relativa a las competencias clave para el aprendizaje permanente. *Diario Oficial de la Unión Europea*, C189/1 - C189/13. https://eur-lex.europa.eu/legal-content/ES/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604(01)&from=SV#:~:text=Hecho%20en%20Bruselas%2C%20el%2022%20de%20mayo%20de%202018.&text=Antecedentes%20y%20objetivos-,Toda%20persona%20tiene%20derecho%20a%20una%20educaci%C3%B3n%2C%20una

Escribano González, A., & del Valle López, Á. (2008). *El aprendizaje Basado en Problemas. Una propuesta metodológica en Educación Superior*. Narcea. ISBN: 978-84-277-1575-2

Euclides. (2021, junio 7). Wikipedia, La enciclopedia libre. Recuperado el 17 junio 2021, de https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Euclides&oldid=136145331

Ferrer Puigdellívol, M. (2015). Estrategias para resolver problemas de máximos y mínimos con métodos elementales. *SUMA*, (80), 49 - 56. https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/suma_80-50maximos_y_minimos.pdf

García Santamaría, C. (2018). *METODOLOGÍA ABP EN LAS CLASES DE MATEMÁTICAS DE LA ESO*. UVaDOC. http://uvadoc.uva.es/handle/10324/31171

Grupo Construir las Matemáticas. (2002, noviembre). Isoperímetros: el problema de la existencia de solución en el problema isoperimétrico. *SUMA*, (41), 113 - 115. https://redined.mecd.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/13714/113-115.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Hernando Calvo, A. (2015). *VIAJE A LA ESCUELA DEL SIGLO XXI*. Fundación Telefónica. ISBN: 9788415282143

Herrero Piñeyro, P. J. (2012). *La historia del problema isoperimétrico clásico con geometría elemental*. La Gaceta de la RSME, 15(2), 335–354. https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=1083

Hopscotch Create your Research Design. (2018). Recuperado el 17 junio 2021, de https://hopscotchmodel.com/bienvenidos/

Instituto Nacional de Evaluación Educativa (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012.* Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Madrid, 2013.

Investigaciones Matemáticas. (n.d.). Aula Abierta de Matemáticas. Recuperado el 17 junio 2021, de https://matematicasiesoja.wordpress.com/las-investigaciones-matematicas/

Isoperimetría. (2021, marzo 28). Wikipedia, La enciclopedia libre. Recuperado el 17 junio 2021, de https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Isoperimetr%C3%ADa&oldid=134348272

Isoperímetros en la Grecia antigua. (2000, junio). *SUMA*, (34), 95 - 98. https://matematicasiesoja.files.wordpress.com/2015/05/095-098.pdf

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado.* Madrid, 4 de mayo de 2006, núm. 106.

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. *Boletín Oficial del Estado.* Madrid, 10 de diciembre de 2013, núm. 295.

Malaspina, U. (2007, enero 22). *INTUICIÓN, RIGOR Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN*. Relime, 10(3), 365-399. versión On-line: ISSN 2007-6819 versión impresa: ISSN 1665-2436

Matemática griega. (2021, febrero 9). Wikipedia, La enciclopedia libre. Recuperado el 17 junio 2021, de https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Matem%C3%A1tica_griega&oldid=133101938

Moremar, L. (2015, octubre 11). *La leyenda de la reina Dido*. Blogger.com. Recuperado el 17 junio 2021, de http://matematizaturealidad.blogspot.com/2015/10/la-leyenda-de-la-reina-dido.html

Niven, I. (1981). *Maxima and Minima Without Calculus*. Cambridge University Press. http://www.ams.org/books/dol/006/dol006-endmatter.pdf

OCDE. (n.d.). *PISA Programme for International Student Assessment*. PISA. Recuperado el 17 junio 2021, de https://www.oecd.org/pisa/

ORDEN ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre competencias, contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. *Boletín Oficial del Estado.* Madrid, 29 de enero de 2015, núm. 25.

ORDEN EDU/362/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León. *Boletín Oficial de Castilla y León.* Valladolid, 8 de mayo de 2015, núm. 86, 32051-32480.

Peña Encina, A. (2010). *Enseñanza de la Geometría con TIC en Educación Secundaria Obligatoria* (Tesis Doctoral). Universidad Nacional de Educación a Distancia. http://e-spacio.uned.es/fez/view.php?pid=tesisuned:Educacion-Apena

Prieto de Castro, C. (2013). *el problema isoperimétrico*. Instituto de matemáticas UNAM. https://paginas.matem.unam.mx/cprieto/phocadownloadpap/presentaciones/El%20problema%20isoperim%C3%A9trico-Medell%C3%ADn%20%202013.pdf

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado.* Madrid, 3 de enero de 2015, núm. 3, 169-546.

Reyes Iglesias, E. (2021). *Polígonos regulares con el mismo perímetro* [Apuntes de la asignatura Modelos Matemáticos, del Máster de Educación Secundaria de la Universidad de Valladolid].

Rico Romero, L. (2006). *Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas*. Revista de Educación, (Extra 1), 275-294. ISSN 0034-8082

Rocard, M. (2007). *Science education now: a renewed pedagogy for the future of Europe*. Brussels: European Commission. https://www.eesc.europa.eu/sites/default/files/resources/docs/rapportrocardfinal.pdf

Ruiz López, F. (2015, octubre). *Algunos problemas de optimización geométrica*. Pensamiento Matemático, 5(2), 27-53. https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5997062.pdf

ANEXOS

Anexo A: Aprendizaje Cooperativo. Aprendizaje Autorregulado

1. Aprendizaje cooperativo

El aprendizaje cooperativo es uno de los elementos en los que se basa esta metodología ya que la resolución de problemas y la forma de afrontarlos se hace de manera grupal.

Tabla 1

Diferencias entre el sistema individualista, competitivo y cooperativo.

CARACTERÍSTICAS	INDIVIDUALISTA	COMPETITIVO	COOPERATIVO
Las metas que se proponen.	1.Propio aprendizaje. 2.Agrado social.	Quedar el mejor	1.Conseguir algo útil. 2.Contribuir al logro ajeno.
Estructura de la meta.	El alumno alcanza sus metas con independencia de los compañeros	El alumno alcanza sus metas si los compañeros no las alcanzan.	El alumno alcanza sus metas si los compañeros del grupo las alcanzan.
Las atribuciones que hacen de su éxito.	1. Esfuerzo. 2.Habilidad personal	Habilidades superiores a los demás.	1.Esfuerzo propio. 2.Esfuerzo del grupo.
Interacción con los compañeros.	No existe interacción.	Interacción negativa.	Interacción positiva.
Cómo son los compañeros (para el alumno)	Indiferentes.	Rivales.	Colaboradores.
Correlación entre la meta del alumno de manera individual y la del grupo	Sin correlación.	Correlación negativa.	Correlación positiva.
Cómo es la recompensa por la tarea.	Solo individual.	Individual y no grupal.	Individual y grupal.

Nota. Adaptado de "El trabajo en equipo mediante Aprendizaje Cooperativo", E. Fernández de Haro, Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación. Universidad de Granada.

En el proceso de enseñanza-aprendizaje se usan tres sistemas de motivación del alumno, y de organización de la docencia por parte del profesor, que se distinguen por el valor que se le asigna a alcanzar determinados objetivos y por el tipo de interacción que aparece entre los alumnos. Estos son:

el sistema individualista, el sistema competitivo y el sistema cooperativo, y podemos observar las diferencias en la siguiente tabla.

De los tres sistemas de aprendizaje y organización de la docencia, según la tabla, el que consigue mejores resultados para los alumnos es el sistema cooperativo porque impulsa la solidaridad, la integración, la responsabilidad individual y grupal y desarrolla las habilidades sociales.

1.1. Definición de aprendizaje cooperativo

Hay varias definiciones del aprendizaje cooperativo. Solo comentaré algunas. David W. Johnson, Roger T. Johnson y Edythe J. Holubec (1994) definen el aprendizaje cooperativo como el uso didáctico de grupos reducidos en los que los alumnos trabajan juntos para maximizar su propio aprendizaje y el de los demás con el fin de conseguir objetivos comunes. Además, hacen una distinción en tres tipos de grupos de aprendizaje.

Tabla 2

Clasificación de los diferentes grupos de trabajo basada en el período de tiempo de trabajo.

GRUPOS FORMALES
Los alumnos trabajan juntos durante una o varias sesiones para lograr objetivos de aprendizaje compartidos y completan juntos unas tareas o trabajos específicos. Estos grupos formales son el fundamento de todos los demás procedimientos cooperativos. Se estructuran mediante decisiones preinstruccionales: estableciendo la tarea y la estructura cooperativa, supervisando los grupos mientras trabajan e interviniendo para mejorar el trabajo y el trabajo en equipo, evaluando el aprendizaje del alumno y procesando el funcionamiento del grupo.
GRUPOS INFORMALES
Los alumnos trabajan juntos en grupos temporales que duran únicamente una sesión para lograr objetivos de aprendizaje compartidos. Estos grupos se utilizan para centrar la atención de los alumnos en la materia, crear unas expectativas y un estado de ánimo que conduzca al aprendizaje, asegurar que los alumnos procesen cognitivamente la materia y concluir una sesión instructiva.
GRUPOS DE BASE
Grupos a largo plazo (duran un año) con miembros estables cuya responsabilidad es dar a cada miembro el apoyo, el ánimo y la ayuda que necesita para progresar académicamente y desarrollarse cognitiva y socialmente.

Nota. Adaptado de “El aprendizaje cooperativo en el aula”, D. Johnson, R. Johnson, E. Holubec, (1999). Editorial Paidós SAICF.

Ramón Ferreiro y Margarita Calderón (2001) definen el aprendizaje cooperativo como un modelo educativo innovador que proporciona una manera diferente de organizar la educación a diferentes niveles, pero que también puede ser usado como un método o técnica para aprender. Conlleva la organización de los alumnos en grupos pequeños y heterogéneos para promover el desarrollo de cada uno con la colaboración de los demás miembros del equipo.

Benito León del Barco Margarita Gonzalo Delgado, Elena Felipe Castaño, Teresa Gómez Carroza, Carlos Latas Pérez y Benito sostienen que dicho aprendizaje implica un cambio de comportamiento o conocimiento en un sujeto como resultado de la interacción social con los demás, en una tarea educativa que les obliga a trabajar en equipo.

Ha sido comprobado que existen distintas conceptualizaciones de este término pero que todas son similares, aunque cada una trate de focalizar un aspecto diferente.

1.2. Características del Aprendizaje Cooperativo

Johnson, Johnson y Holubec presentan cinco elementos básicos que forman el Aprendizaje Cooperativo.

- **La interdependencia positiva** entre los integrantes del grupo. El éxito individual sólo se alcanza si se logra, a la par, el de los demás compañeros. Se precisa de gran confianza mutua en que el resto de los individuos, que forman parte del equipo, alcanzarán los objetivos del grupo ya que, si uno fallara sería imposible conseguir el objetivo final.
- **La interacción personal directa**. Los individuos deben trabajar juntos, consiguiendo de esta manera, compartir conocimientos, recursos, ayuda o apoyo. El debate relativo a los diferentes puntos de vista, relacionados con el modo de encarar una actividad dada, dar explicación a los demás de lo que cada uno aprende, etc, son acciones en las que todos estarán involucrados durante la realización de las diferentes tareas con el objetivo de alcanzar las metas previstas.
- **La responsabilidad individual y grupal**. Cada individuo debe, individualmente, asumir la responsabilidad de alcanzar los objetivos que se le han encomendado y de forma paralela, contribuir y ser responsable del éxito del trabajo colectivo.
- **El aprendizaje y utilización de destrezas interpersonales y grupales**. Unas relaciones personales buenas deben favorecer las experiencias de encuentro académico de todos los elementos del equipo de modo que desarrollen mejor las actividades del tipo: razonar, explicar o resolver problemas. Los individuos deberán aprender habilidades como la resolución de conflictos, el consenso dentro del grupo, los roles de cada individuo (líder, organizador, motivador, etc.) y otros más, por eso, es muy importante que los profesores utilicen tiempo para trabajar y supervisar estos aspectos.

- **La valoración frecuente y sistemática del grupo**. Juntos deben revisar que se realicen las tareas propuestas, identificar los problemas del grupo, y decidir sobre los cambios pertinentes. La autoevaluación y coevaluación son de vital importancia para analizar los resultados de aprendizaje alcanzados y tomar decisiones para próximos trabajos.

Ramón Ferreiro y Margarita Calderón (2001) en su obra detallan seis principios fundamentales que rigen el aprendizaje cooperativo como estrategia de enseñanza:

- **El principio rector**. El docente aprende mientras enseña y el alumno enseña mientras aprende: el docente toma el papel de mediador.
- **El principio de liderazgo distribuido**. Todos los integrantes del grupo entienden, aprenden y desarrollan tareas de liderazgo.
- **El principio de agrupamiento heterogéneo**. Los equipos de alumnos que mejor funcionan son los equipos heterogéneos, es decir, aquellos que incluyen individuos de uno y otro sexo, procedencia social, niveles de habilidad y capacidades físicas.
- **El principio de interdependencia positiva**. Los alumnos deben aprender y valorar su interdependencia mutua. La base del trabajo común es la implicación individual y grupal, recompensar y usar material de trabajo de forma compartida o la creación de un producto grupal.
- **El principio de adquisición de habilidades**. La habilidad de los individuos para trabajar en grupo de manera efectiva viene determinada por la adquisición de habilidades sociales específicas que promueven la cooperación y el mantenimiento del equipo.
- **El principio de autonomía grupal**. Los grupos de individuos podrán solucionar mejor sus problemas si no son “rescatados” por el profesor. Los individuos que solucionan sus problemas cuentan con mayor autonomía y autosuficiencia.

En conclusión, como hemos podido ver, distintos autores presentan perspectivas similares sobre los principios sobre los que se fundamenta el aprendizaje cooperativo.

1.3. Organización y características de los principales modelos de Aprendizaje Cooperativo

Existen diferentes modelos de aprendizaje cooperativo que cumplen, de forma adecuada, los cinco elementos básicos y que están siendo usadas eficientemente en las aulas. Estos modelos son:

➢ **El modelo de Jigsaw o técnica de rompecabezas**: También se le conoce como puzzle de Aronson, fue diseñado por Aronson (1978). El concepto de esta técnica reside en las siguientes características: (a) dividir al grupo-clase en equipos de trabajo heterogéneos en sexo, etnia y nivel, durante varias semanas; con grupos de entre cuatro y seis individuos; (b) cada individuo del grupo se responsabilizará y encargará de una faceta del tema de la tarea grupal, ya que la misma se divide en tantas facetas como miembros componen cada grupo, haciendo que llegue a ser un experto; (c) una vez dominada la tarea, a cargo de cada uno, cada individuo enseña a los demás, todo lo que sabe sobre la faceta que le correspondía; (d) los individuos serán evaluados de forma individual o grupal de todas las facetas del trabajo; y (e) los grupos alcanzan la recompensa adecuada a su éxito.

➢ **El modelo de Student Team Learning**: diseñado por Slavin (1986) se basa en el uso de objetivos en los que el éxito grupal sólo puede alcanzarse si todos los individuos del grupo aprenden los contenidos de forma adecuada. Las características fundamentales de este método son: (a) los individuos forman grupos durante unas seis semanas, de forma heterogénea, de entre cuatro y seis miembros; (b) se apoyan unos a otros hasta dominar los materiales facilitados por el docente; (c) cada individuo es evaluado por separado; y (d) los grupos obtienen una recompensa adecuada a su éxito, sólo si demuestran que todos los miembros del grupo han aprendido.

➢ **El modelo de Learning Together**: diseñado por Johnson y Johnson (1975) usa grupos de dos a seis integrantes que abordan una única tarea, en la cual todos tratarán de alcanzar el éxito del grupo y de cada individuo. Este modelo tiene cinco pasos: (a) selección del tema o contenido a trabajar; (b) decidir cómo dividir el trabajo en tantas facetas como miembros existan en el equipo; (c) trabajo en equipo en el que se apoyen y trabajen de forma individual hasta que, entre todos dominen la materia; (d) discusión libre para transmitirse mutuamente los conocimientos y la información adquirida; y (e) evaluación de la tarea y corrección de errores. A partir de estos pasos se realiza la entrega de puntos individuales, y dada la media aritmética, que los miembros del grupo consigan en el examen individual, se bonificará al equipo, con lo que aumenta la responsabilidad individual y el modo en que se preocupan por los demás miembros.

➢ **El marcador colectivo**: diseñado por Orlick (1990) considera que los individuos organizados en pequeños grupos cuentan con la responsabilidad individual de completar su parte dentro de la tarea grupal. De modo que cada uno consigue una puntuación que se añade al marcador colectivo del equipo o de la clase, con el objetivo de poder cambiarlos por “materiales”, del tipo de los que puedan mejorar el tiempo de ocio durante los recreos. Para que este esquema sea aún más axiológico, el coste en puntos de los materiales suelen ser altos, de modo que los individuos deban acercarse entre ellos y sumar sus puntos para poder llegar a recompensas superiores. Una ventaja importante de esta técnica cooperativa es que, en ella se respetan los ritmos y posibilidades individuales, de cada uno de los miembros del equipo. Cada uno conoce su tarea y todos se supervisan mutuamente, pero la dificultad de los ejercicios y las actividades están orientadas de forma individual. Para aclarar esta estructura cooperativa, sus características son: (a) los alumnos actúan de forma individual dentro de un grupo heterogéneo de edad, sexo y nivel, realizando una tarea asignada por el profesor; (b) los alumnos ganan puntos según una serie de criterios, siendo cada individuo responsable de supervisar su puntuación; (c) los puntos ganados por cada individuo del equipo se suman a un marcador colectivo del grupo o de la clase; y (d) se asignan recompensas por lograr un número de puntos dado.

➢ **Group Investigation**: diseñado por Sharan y Sharan (1976) consiste en que los individuos formen sus propios grupos de entre dos y seis miembros, con el objeto de investigar de forma cooperativa un tema que se verá en clase a posteriori. Las características son: (a) los individuos forman sus propios grupos heterogéneos, para afrontar una tarea asignada por el docente; (b) los individuos se reparten el contenido de la tarea; (c) cada miembro investiga su parte asignada redactando un informe individual; (d) se reúnen en conjunto para discutir e intercambiar conocimientos, siempre cumpliendo los plazos de asignados; y (d) una vez que, todos han aprendido todos los apartados individuales, se presenta el proyecto a toda la clase.

➢ **Co-op Co-op Play**: diseñado por Grineski (1996), está muy relacionada con la estructura de Learning Together desarrollada por Johnson y Johnson (1975).Cuenta con las siguientes características:(a) el profesor es quien expone la actividad y elige el tema a investigar; (b) los alumnos se agrupan de forma heterogénea, en equipos de entre dos y seis miembros, haciendo hincapié en la importancia de la cooperación en el trabajo para conseguir el éxito de la actividad; (c) el trabajo y las conductas del alumnado se supervisan por parte del profesor; (d) al completar la actividad, se realiza la evaluación grupal tratando de descubrir las dificultades y las acciones que han permitido alcanzar la meta fijada; y por último(e) el profesor propone al alumnado pensar y compartir, variantes de la actividad que la hagan más enriquecedora o compleja.

➢ **Piensa, comparte y actúa**: Según Velázquez Callado (2004) esta es una variante de la estructura desarrollada por Kagan (1992), y que configuró Grineski (1996). En ella el docente propone un desafío cooperativo, uno que implique la colaboración de todos para poder ser resuelto. Ahora cada individuo piensa de forma autónoma las soluciones para resolverlo, para después exponerlo al resto de alumnos. De este modo, el grupo debe consensuar y elegir de entre todas las soluciones la más apta. Una vez que se pone en práctica, se les da una nueva oportunidad, para poder mejorar esa solución y superar así el desafío propuesto.

➢ **El descubrimiento compartido**: Propuesto por Velázquez Callado (2003), tras constituir los equipos heterogéneos, se proponen diferentes desafíos al alumnado que son modificados según el grupo va progresando, aumentando en paralelo su dificultad y el número de miembros de cada equipo, para potenciar las relaciones sociales con otros compañeros de clase. Las principales características son: (a) la formación de equipos heterogéneos; (b) para que se les asigne un nuevo desafío, los miembros del equipo son responsables de dominar las respuestas y de tratar que sus compañeros también lo hagan; y (c) se diseña un proyecto grande en grupo para mostrar a la clase. En cuanto a las recompensas, se adjudican de acuerdo a la calidad del proyecto expuesto, con base a unas rúbricas previamente definidas entre el profesor y los alumnos.

1.4. Estrategias o técnicas para llevar a cabo el Aprendizaje Cooperativo en el aula

Para poder usar una técnica de aprendizaje cooperativo estructurada, como las que se han expuesto anteriormente, es preciso considerar que, a la vez que se dota a los individuos de mucha autonomía en el aprendizaje, también es preciso planearla hasta el más mínimo detalle, para impulsar la calidad del aprendizaje de los alumnos.

Es posible distinguir cuatro fases, que el docente debe seguir, para poner en práctica la técnica del Aprendizaje Cooperativo:

Primera fase: Toma de decisiones previas

Las funciones del docente en esta fase son:

- ❖ Fijar los objetivos de aprendizaje.
- ❖ Fijar el tamaño del grupo (preferiblemente no más de 6 alumnos por grupo).
- ❖ Preparar los materiales de aprendizaje.
- ❖ Distribuir los alumnos en los grupos.
- ❖ Recomendando con especial énfasis, que los grupos sean heterogéneos.
- ❖ Diseñar el espacio donde se ejecutará la actividad (en clase o fuera, distribución de los pupitres, etc.).

- ❖ Repartir los roles dentro de los grupos (para potenciar la interacción), se pueden rotar entre los alumnos si se cree necesario.

Los roles más habituales, que se suelen utilizar, son los que aparecen a continuación, en la siguiente tabla.

Tabla 3

Diferentes roles que representan los alumnos en el grupo cooperativo.

ROL DINAMIZADOR	ROL ODENADOR
• Fomenta la participación. • Se asegura de que todos los miembros participan y contribuyen por igual con sus ideas y opiniones. • Está atento a controlar el tiempo de cada intervención para que todos puedan hablar. • Anima en el reparto de tareas. • Ofrece apoyo verbal y no verbal a las ideas y a la participación de cada miembro. • Media en conflictos emocionales.	• Controla el tono de voz para que todos hablen, de modo que se pueda trabajar en el aula. • Está atento al tiempo de cada actividad y al tiempo total del proyecto. • Controla el orden de los materiales. • Recoge los materiales al final y al principio de cada tarea. • Controla que los compañeros se muevan entre los grupos sin hacer ruido. • Registra frecuencias y tiempos.
ROL LÍDER	**ROL PENSADOR**
• Se encarga de explicar y transmitir las tareas a todos los miembros. • Orienta el trabajo del grupo y está atento a los roles de cada cual y al proceso de trabajo. • Lleva un registro del grupo, redacta informes sobre decisiones o presentaciones del grupo. • Verifica la validez del trabajo en grupo en función de las instrucciones para cada tarea. • Se encarga de animar para ampliar y mejorar constantemente los resultados de cada tarea. • Presenta o representa al grupo. • Se comunica en tareas con otros grupos.	• Está atento para que todos hayan entendido las instrucciones. Las explica o parafrasea. • Se asegura de que todos sepan llegar a la conclusión del resultado de la tarea. • Plantea preguntas que animan a profundizar y pensar más sobre cada actividad. • Lidera el uso de las estrategias cognitivas. • Anima al grupo a ir más allá de la primera respuesta. • Integra las ideas de todos cuando es necesaria una respuesta común. • Media en conflictos sobre ideas y opiniones. • Anima a buscar fundamentos para defender las propuestas o respuestas.

Nota. Adaptado de “Viaje a la Escuela del Siglo XXI”, A. Hernando Calvo, (2015). Fundación Telefónica.

Todo lo referente a esta fase conforma los cimientos necesarios para que la actividad cooperativa funcione adecuadamente, por lo que es aconsejable ejecutarla cuidadosamente y prestándole la máxima atención.

Segunda fase: Estructura de la tarea y la interdependencia positiva

Esta fase consiste en:

- ❖ Exponer claramente la tarea. La completa comprensión de los alumnos es vital.
- ❖ Enunciar los criterios del éxito (hay que comunicar a los alumnos lo que se espera de ellos y, hacerles entender el reto que supone, para que afronten la tarea más motivados).
- ❖ Dotar de estructura a la interdependencia positiva (Deben entender que el buen aprendizaje de los compañeros influye el propio).
- ❖ Explicar la responsabilidad individual.
- ❖ Explicar y organizar la cooperación intergrupal.
- ❖ Enunciar qué conductas son deseables en los alumnos.

Esta fase supone, que el docente debe garantizar las condiciones necesarias para que el aprendizaje cooperativo se produzca en el aula o espacio asignado, para el desarrollo de la actividad.

Tercera fase: Interviene en el proceso y controla el proceso

El docente tiene la función de:

- ❖ Observar la interacción entre alumnos; debe moverse entre los grupos y las mesas, atento a las conversaciones y al avance del proyecto o resultado de cada tarea, para evaluar su progreso y la utilización de las habilidades sociales necesarias para la cooperación entre ellos. A raíz de esa observación, puede intervenir (clarificando conceptos o tareas, respondiendo preguntas, aconsejando enfoques, enseñando destrezas, etc.).
- ❖ Exponer y recurrir a menudo, a las funciones de cada rol y a los elementos gráficos expuestos en el aula, relacionados con el aprendizaje cooperativo.

Es de vital importancia, que los profesores permanezcan atentos a lo que ocurre en los grupos cooperativos. Se pueden tomar notas, anotar conductas para obtener información relativa al funcionamiento de cada grupo.

Cuarta fase: Evalúa el aprendizaje y la interacción grupal

Aquí son tres las funciones básicas:

- ❖ Concretar el cierre de la actividad (como ejemplo; hacer un resumen del proyecto realizado por los alumnos).
- ❖ Hacer evaluación de la cantidad y calidad de aprendizaje.
- ❖ Hacer evaluación del funcionamiento de cada uno de los grupos.

En esta última fase es vital hacer evaluación del aprendizaje y los procesos de trabajo en equipo del alumnado.

2. Aprendizaje Autorregulado

El ABP es una estrategia didáctica focalizada en el alumno haciendo de él el verdadero protagonista en la construcción de conocimiento compartido en el aula, gracias a que se enfrenta a un desafío que tiene sentido verdadero y significado propio para él, lo que le permite, no sólo plantearlo y resolverlo, sino aprender del proceso de resolución.

José Manuel Martínez Vicente (2004) describe el aprendizaje como un "*proceso de construcción del conocimiento, cognitivo y complejo, en el cual el aprendiz toma decisiones sobre cómo llevar a cabo el proceso de forma consciente (regularlo) para que se produzca una incorporación significativa del conocimiento*".

2.1. Conceptualización del Aprendizaje Autorregulado

Algunos de los modelos más conocidos de la literatura de autorregulación son los de Zimmerman y P. Pintrich.

Zimmerman (2000) define la autorregulación como "*aquellos pensamientos, sentimientos y acciones que se plantean y se adaptan cíclicamente para el cumplimiento de metas personales*".

Por otra parte Pintrich (2000) describe el Aprendizaje Autorregulado como un proceso activo constructivo, en el que los alumnos se marcan metas para su aprendizaje y tratan de observar bajo control, regular y controlar su cognición, motivación y conducta, guiados y limitados por sus metas y las características contextuales de su entorno.

2.2. Aprendizaje Autorregulado y la metacognición

John. H. Flavell (1970) destacó por ser uno de los pioneros en estudiar este tema, y usaba su propia definición sobre la metacognición. Que lleva asociados los dos factores siguientes:

- Los productos cognitivos de cada uno y el conocimiento de los procesos.
- La organización, la regulación y el examen de ese conocimiento.

Su definición era: "*metacognición significa el conocimiento de uno mismo concerniente a los propios procesos y productos cognitivos o a todo lo relacionado con ellos*".

Lo que conlleva que, no solo es importante tener buena memoria o ser muy bueno con las operaciones matemáticas, sino que hay que saber organizar mentalmente esos conocimientos o jerarquizar y secuenciar los procesos.

La metacognición conlleva aprender a aprender, usando habilidades metacognitivas. Estas habilidades deben usarse, en y desde la acción, deberían ser desarrolladas de manera autónoma por los alumnos, y no declaradas explícitamente por el docente. Por tanto, se trata de enseñar a analizar las propias estrategias de aprendizaje. Cada uno podemos beneficiarnos de distintas estrategias mientras aprendemos, de forma que sean más adecuadas a nuestras capacidades y a nuestra forma de razonar.

Usando la autorregulación podemos incrementar el aprendizaje significativo y crear la cultura de la metacognición.

2.3. Características de los estudiantes que autorregulan su aprendizaje

Usando la metodología ABP pretendemos, entre otras cosas, que los alumnos incrementen su grado de control sobre el aprendizaje y el rendimiento.

Hay estudios que apuntan a los siguientes factores, como diferenciadores, entre alumnos que autorregulan su aprendizaje y los que no lo hacen, Corno (2001):

- Conocen y saben emplear una serie de estrategias cognitivas (de organización, elaboración y repetición), que les permiten elaborar, organizar, atender, transformar y recuperar la información.

- Saben cómo dirigir, controlar y planificar sus procesos mentales, para alcanzar sus metas personales (metacognición).
- Cuentan con una serie de creencias motivacionales y emociones adaptativas, como por ejemplo, la adopción de metas de aprendizaje, un alto sentido de autoeficacia académica, el desarrollo de emociones positivas ante las tareas, así como la capacidad para controlarlas y modificarlas, adecuándolas a las necesidades de la tarea y al contexto de aprendizaje concreto.
- Planean y controlan el tiempo y el esfuerzo que van a utilizar en cada tarea y saben crear y estructurar entornos favorables al aprendizaje, como por ejemplo, buscar un lugar adecuado de estudio y la búsqueda de ayuda académica por parte de los profesores y compañeros cuando tienen dificultades.
- Dentro de lo que el contexto permite, demuestran más interés en participar, en el control y regulación de las tareas académicas, el clima y la estructura de la clase.
- Tienen capacidad para poner en marcha una serie de estrategias volitivas, enfocadas a evitar las distracciones externas e internas, para mantener su concentración, su esfuerzo y su motivación, durante la realización de las tareas académicas.

En resumen, si algo caracteriza a estos alumnos, es que se sienten agentes de su conducta, creen que el aprendizaje es un proceso proactivo, están automotivados y usan estrategias que les permiten alcanzar las metas académicas deseadas.

Anexo B: Primera Encuesta y Primeras Tareas para Casa

ENCUESTA SOBRE MATEMÁTICAS

Nombre del alumno:

1. ¿Te gustan las Matemáticas?

2. ¿Ves utilidad en las Matemáticas?

3. ¿Has estudiado o visto problemas de optimización? (Hacer máximo o mínimo alguna función de coste/beneficio, por ejemplo)

4. ¿Has oído hablar alguna vez de los problemas isoperimétricos?

5. ¿Conoces algún caso en el que, de un problema de la vida real, se hayan desarrollado nuevas ideas/herramientas matemáticas?

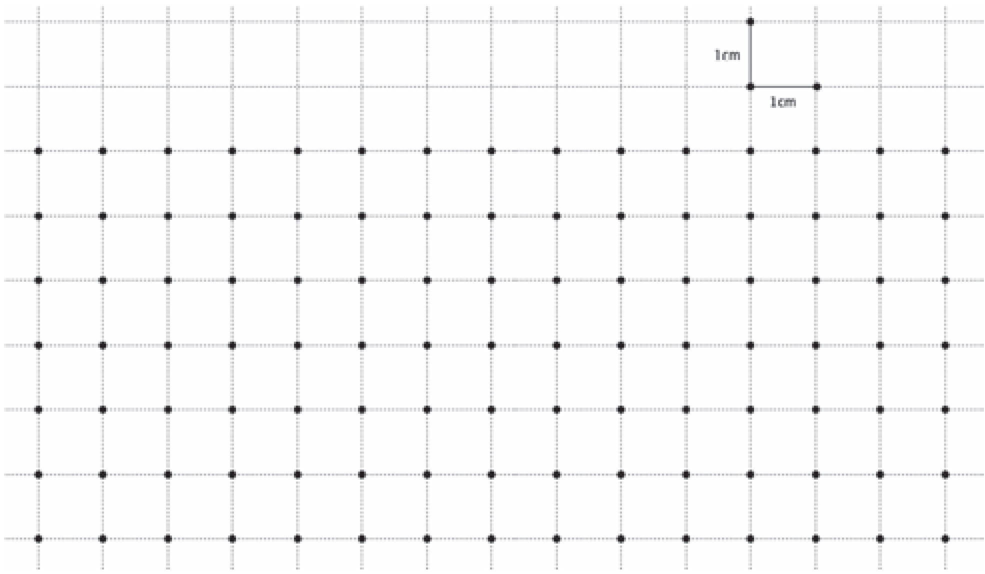
6. ¿Qué crees que significa la expresión "Hacer Matemáticas"?

7. ¿Has estudiado Lógica en la asignatura de Filosofía?   Si: ☐   No: ☐

8. Si contestaste que si a la pregunta anterior. ¿Has visto relación entre la Lógica y las Matemáticas?

TAREA PARA CASA:

Problema 1: Dibujar polígonos sobre un geoplano
De todos los polígonos de 12 unidades de perímetro que se pueden representar sobre el siguiente geoplano (figura 1), dibuja los que encuentres y señala el que tenga un área mayor. Argumenta con detalle cómo has llegado a esa conclusión.



Problema 2. Producto máximo de dos números naturales
sabemos que dos números enteros y positivos suman 100. Determina cuáles son estos números de forma que su producto sea el mayor posible. Argumenta con detalle tu respuesta.

Anexo C: Intervención en el Aula

El problema isoperimétrico Día 1

Para los alumnos de 1º de Bachillerato del Seminario Menor

El problema de Euclides

El problema isoperimétrico se estudia desde muy antiguo, no solo por la leyenda, sino por la relación tan interesante entre el perímetro y el área que tienen, incluso figuras tan elementales como los triángulos o los paralelogramos. Basta mirar las proposiciones 35 a 38 de **Los Elementos de Euclides** (300 a.C.) donde queda de manifiesto que los triángulos con la misma base y cuyo vértice opuesto está situado en una recta paralela a la base, tienen igual área pero un perímetro diferente para cada vértice distinto (véase en Geogebra). Lo mismo ocurre para los paralelogramos que, teniendo idéntica base, poseen el lado opuesto sobre la misma paralela a dicha base.

El problema de Euclides

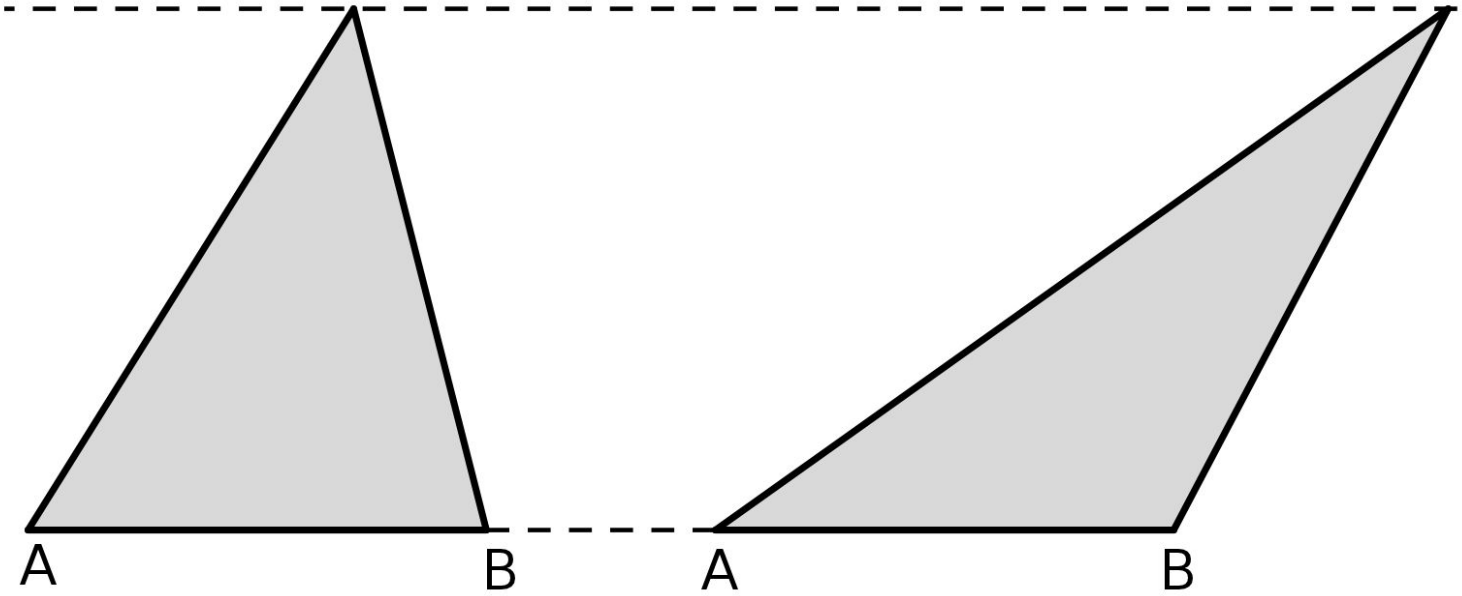


Figura 1: Triángulos con las mismas base y altura tienen igual área pero no perímetro.

El primero es Zenodoro

De modo que no resulta extraño, ni mucho menos, que surgiera entre los matemáticos griegos la curiosidad por encontrar la figura con perímetro fijo, que maximizara el área o lo que es equivalente, que con área fija minimizara el perímetro. Por lo que podemos saber fue **Zenodoro** el autor del primer trabajo conocido sobre **el problema isoperimétrico**.

Conocemos poco sobre la figura de Zenodoro. Todo parece indicar que vivió en Atenas, aproximadamente entre los años 200 y 140 a.C.. Su trabajo sobre figuras isoperimétricas solo se conoce por algunas referencias. Teon de Alejandría (335-405), matemático griego, lo cita en sus amplios comentarios al Almagesto de Ptolomeo y Pappus (290-350) también recoge las proposiciones de Zenodoro en el libro V de su Colección Matemática.

Ejemplos de problemas isoperimétricos

Ejercicio 1:

Completa la siguiente tabla

l	a	$2l + 2a$	Área
10		22	
	2	22	
		22	
5,5		22	

¿Cuánto debería tener el rectángulo de largo y de ancho para que tenga el mayor área?

Actividad Geogebra: https://www.geogebra.org/m/wnayy4u3

Si en esa tabla ponemos que $2l+2a = 100$, ¿no os suena al ejercicio 2 de casa?

Preguntas para pensar sobre los problemas para casa:

- ¿Qué pasa si el perímetro es un número impar?
- ¿Qué pasa si adoptas como unidad de longitud el doble de la longitud del cuadradito más pequeño del papel cuadriculado?
- ¿Cómo dibujarías un rectángulo en el que sea evidente que la unidad de longitud adoptada es la longitud de la diagonal del cuadradito más pequeño del papel cuadriculado? Dibuja uno de ellos y escribe su perímetro.

Ejercicio 2:

Se quiere cercar un terreno rectangular que colinda con un cerro. Si se cuenta con 40 metros de cerca metálica ¿cuál será el área máxima posible a cercar sin considerar el lado del cerro? Observar la figura.

Preguntas relacionadas:

- ¿Qué pasaría si en el ejercicio anterior se considera el perímetro de un triángulo en lugar del perímetro de un rectángulo?
- ¿Qué pasaría si en el ejercicio anterior se considera el perímetro de un polígono de n lados en lugar del perímetro de un rectángulo?
- ¿Y si damos como parte de la información la longitud de alguno de los lados?
- ¿Si se conocen las longitudes de los cuatro lados de un cuadrilátero, el cuadrilátero queda determinado?

Problema para casa:

Problema 3.- ¿Cuál es la figura plana, que encierra el mayor área, que se puede formar con una cuerda de 22 cm de longitud?

El problema isoperimétrico
Día 2

Para los alumnos de 1º de Bachillerato del Seminario Menor

La leyenda de la Reina Dido

La leyenda de la Reina Dido

Su leyenda se conoce fundamentalmente a través del relato incluido en **La Eneida** del poeta romano **Virgilio** (29 a.C.).

Elisa de Tiro era hija de Matán I –el rey de Tiro– y hermana de Pigmalión y de Ana. Al morir Matán I, Pigmalión ya rey, obliga a su hermana Elisa a casarse con Siqueo –sacerdote del templo de Melkart y poseedor de una gran fortuna– para robarle sus tesoros escondidos. Elisa que no quería casarse y enfadada con Pigmalión, se niega a revelar a su hermano el paradero de las riquezas de su marido, mintiéndole sobre el escondite. Pigmalión creyendo saber el escondite asesina a Siqueo, y Elisa huye con su hermana pequeña, su séquito y la fortuna de su marido, mientras pigmalión busca los tesoros. En su huida, llegan hasta la costa de África, a una zona poblada por la tribu de los getulos. Elisa solicita a su rey –Jarbas– que le ceda un trozo de tierra para fundar una ciudad.

EL VIAJE DE ELISA - DIDO-
Y LA FUNDACIÓN DE CARTAGO
EN EL AÑO 830 a.C.

EDUCEIN S.C feniciaymas.blogspot.com

Ante la solicitud de Elisa, Jarbas le concede ‘tanta tierra como pueda abarcar con una piel de buey’, pensando que era una buena manera de evitar tener que cederle terrenos. Elisa, demostrando unas inusitadas dotes como geómetra, hace cortar tiras muy finas a partir de la piel del animal y consigue acotar un extenso perímetro. Debido a ello es coronada como reina y sus súbditos la bautizan como *Reina Dido*.

Dido se había enfrentado –y había resuelto con gran destreza– al primer problema isoperimétrico: el de encontrar, entre todas las curvas simples posibles, la que encierra la mayor área. La astuta reina formó una semicircunferencia de entre 1 y 2 kilómetros y consiguió circundar una superficie de entre 10 y 25 hectáreas...

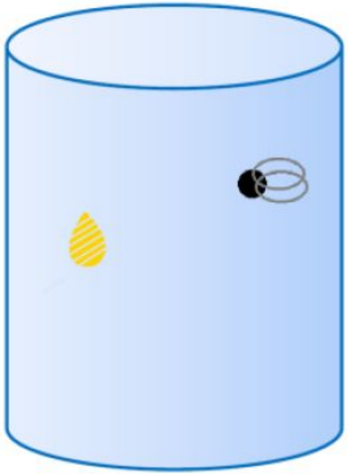
¿Veis cierto parecido entre este problema y el de poner la cerca al terreno junto al cerro?

Actividad de Geogebra de la Reina Dido:
https://www.geogebra.org/m/fc33w7cb


Cartago

Problema de Herón

Problema: Una mosca se posa en la superficie exterior de un vaso cilíndrico y debe caminar por la superficie del vaso para llegar hasta una gota de miel situada en la superficie interior del mismo. Encuentra el camino más corto posible (sin tener en cuenta el grosor del vaso).



Este es el problema de Herón. Ver Geogebra: https://www.geogebra.org/classic/fz8wut5k

Los Teoremas de Zenodoro

Hasta ahora hemos visto ejemplos de casos isoperimétricos, pero como no podemos profundizar mucho, vamos a ver algunos resultados que no demostraremos y otros que sí, pero recurriendo a demostraciones en las que sólo usaremos la lógica.

Teorema 1. Dados dos triángulos con la misma base y el mismo perímetro, el triángulo isósceles tiene el área mayor. Como el problema de maximizar el área equivale a minimizar el perímetro, ya vimos este resultado en la actividad de Geogebra del triángulo entre las dos rectas paralelas.

Teorema 2. Entre dos polígonos regulares con el mismo perímetro, el que tiene mayor área es el que posee más ángulos.

Teorema 3. Entre los polígonos con el mismo número de lados y con el mismo perímetro, el polígono regular es el que posee área mayor.

Teorema 4. Un círculo tiene mayor área que cualquier polígono regular con idéntico perímetro. Esta es la solución del problema 3 para casa que propusimos ayer.

Demostración: Zenodoro cita una proposición de Arquímedes a modo de lema previo. Dicha proposición afirma que el área de un círculo coincide con el área de un triángulo rectángulo cuyo cateto menor es el radio del círculo y con cateto mayor un segmento de longitud la de la circunferencia. Por otra parte, el área de un polígono regular es la mitad del producto de su apotema por el perímetro; por tanto solo queda ver que la apotema de un polígono regular cuyo perímetro coincide con el de un círculo, es menor que el radio de dicho círculo. Pero basta darse cuenta de que si el radio y la apotema fueran iguales, el polígono tendrá el círculo inscrito con lo que su perímetro será mayor.

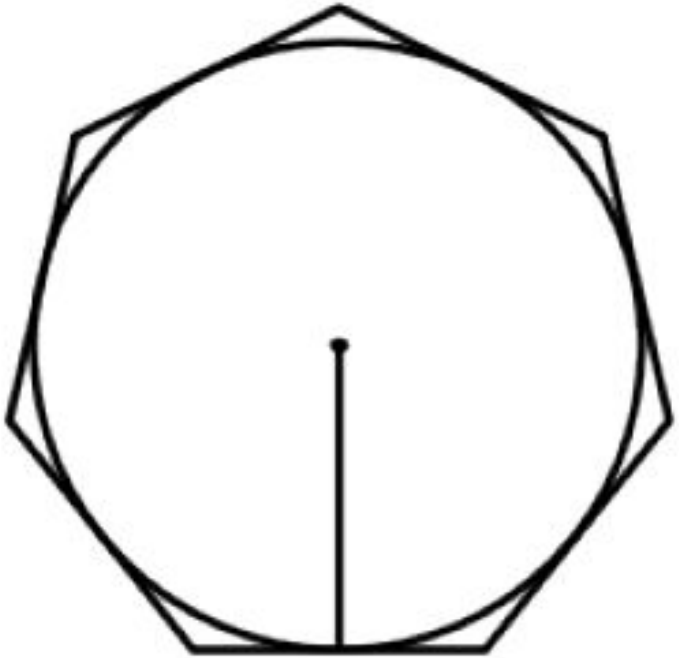


Figura 3: Un círculo tiene mayor área que cualquier polígono regular con idéntico perímetro

Hasta mañana

El problema isoperimétrico
Día 3

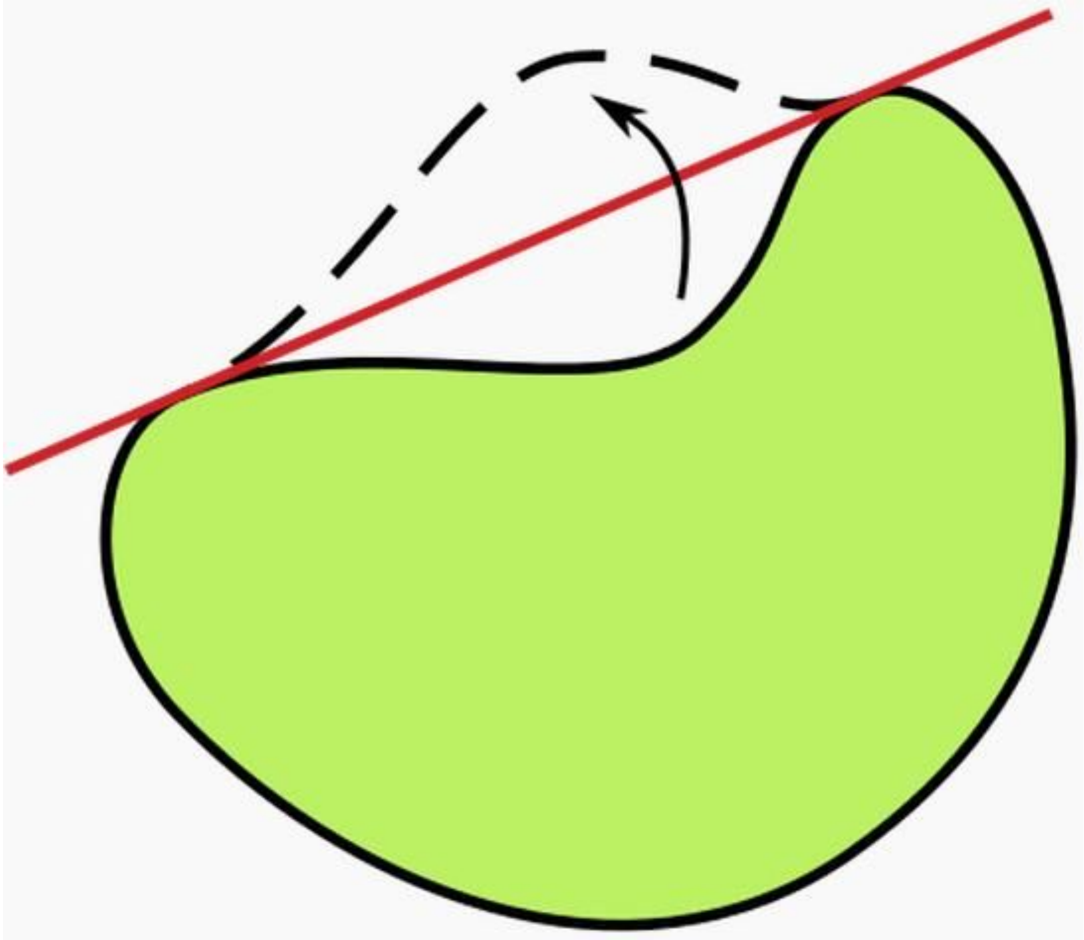
Para los alumnos de 1º de Bachillerato del Seminario Menor

Estudio de curvas

Estudio de curvas genéricas

Si dejamos de lado ya los polígonos y empezamos a estudiar cualquier tipo de curva cerrada el problema isoperimétrico se puede enunciar como: "*Entre todas las curvas cerradas en el plano de perímetro fijo, ¿qué curva (si la hay) maximiza el área de la región que encierra?*"

Para empezar, debemos ver cómo cualquier curva que tenga una parte cóncava, puede hacerse convexa sin más que trazar una línea tangente a la curva en esa zona, y aplicar simetría respecto a ella a la curva cóncava:

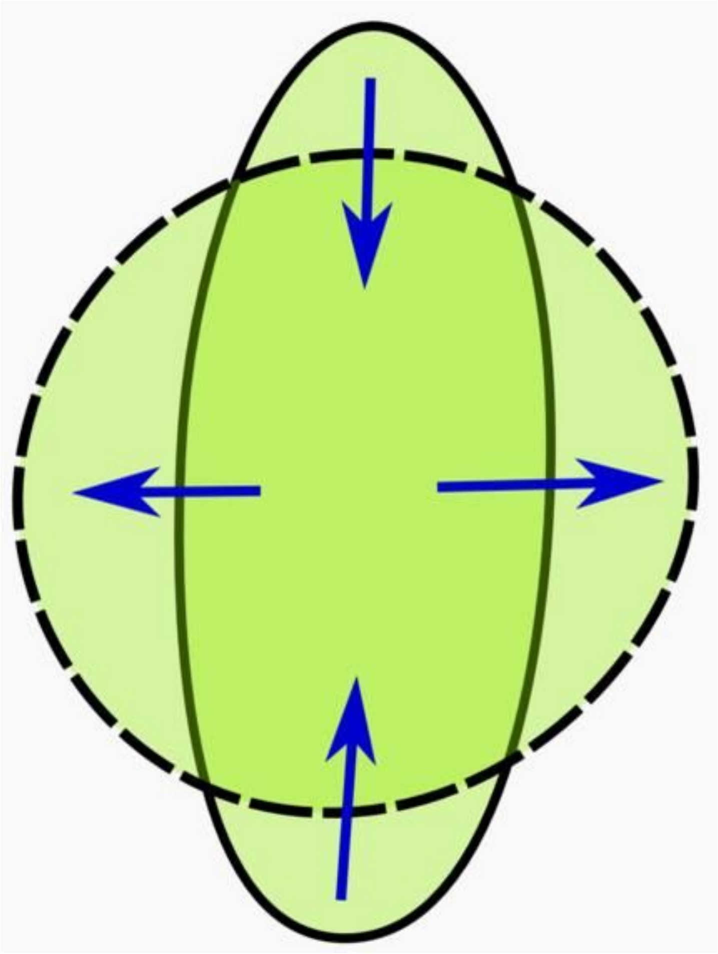


Esto implica que podemos transformar cualquier curva (o polígono) cóncavo en convexo, consiguiendo más área con el mismo perímetro. O lo que es lo mismo:

Teorema 5. Las curvas de máxima área son completamente convexas, en la medida de lo posible.

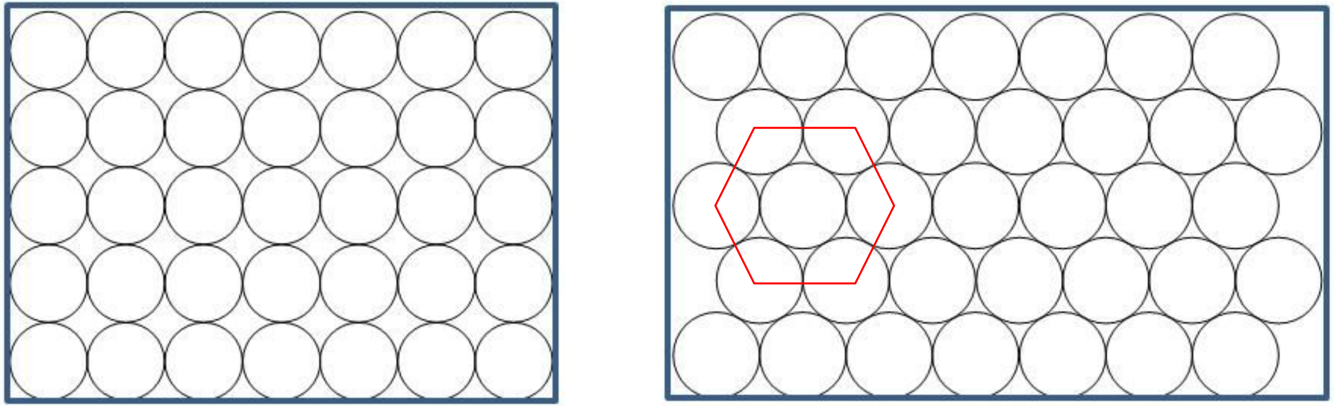
Además date cuenta de que:

Teorema 6. Una región alargada puede hacerse más redonda, manteniendo fijo su perímetro y aumentando así su área (la cantidad de superficie que encierra).



También, varios autores desde la antigüedad especularon sobre las propiedades optimales de los paneles de abeja. En dos dimensiones, Carl F. Gauss (1777-1855) demostró que la manera de disponer círculos idénticos de modo que tengan la mayor densidad corresponde a un ordenamiento hexagonal, en el cual los círculos son tangentes entre sí, y sus centros se ubican en los vértices de una red hexagonal (panal de abejas).

Figura 4. Empaquetamientos circulares dentro de un rectángulo



a. Empaquetamiento 1   b. Empaquetamiento 2

Demostración de que el círculo es la curva de área máxima:

Ya hemos visto que una figura maximal ha de ser convexa. Supongamos que K es una figura cuyo perímetro es fijo y que tiene área máxima. **Fijado un punto A de su frontera, podemos encontrar otro punto B de manera que la recta AB divide el perímetro en dos partes iguales; entonces esta recta también divide el área de superficie de K en dos partes iguales**, pues en caso contrario, bastará tomar la figura formada por la parte que tiene mayor área y su simétrica respecto de AB para formar una figura con el mismo perímetro que la original pero con área mayor (véase la Figura siguiente).

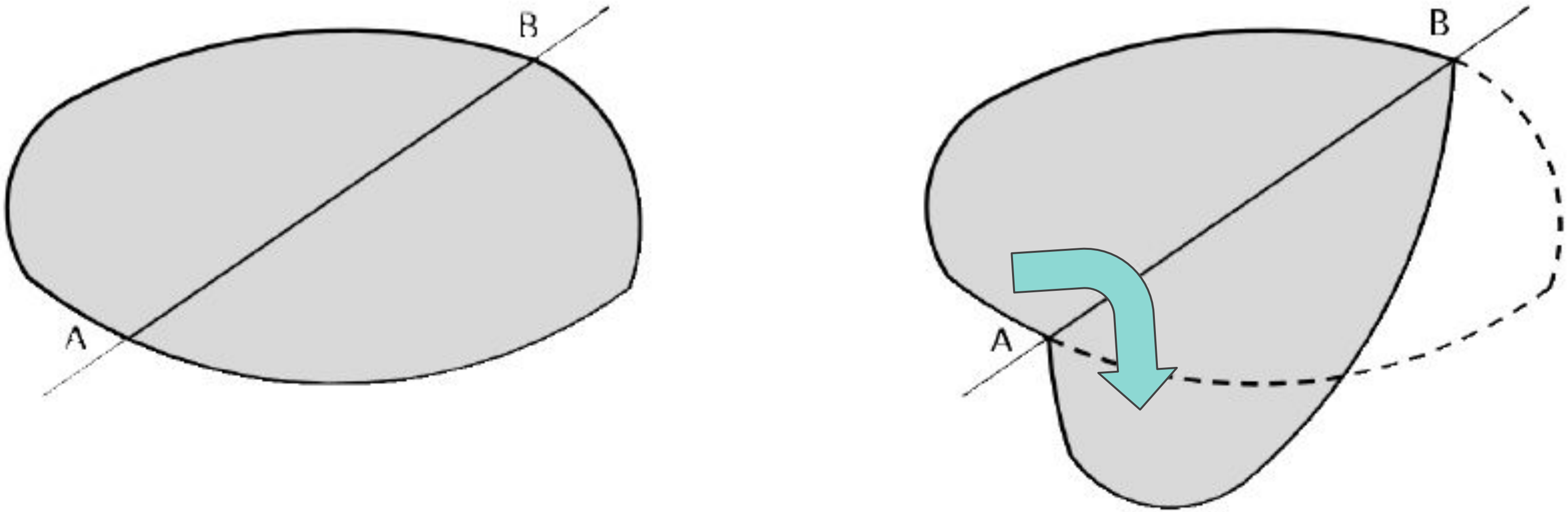


Figura 5: Un segmento que divide por la mitad el perímetro también divide por la mitad el área.

En segundo lugar, podemos suponer que la figura es simétrica respecto la recta AB, si no lo fuera, dado que las dos mitades tienen igual área y perímetro, bastará con tomar una de las dos mitades y su simétrico respecto de tal recta.

En tercer lugar, al ser simétrico respecto de la recta AB si tomamos un punto C en la frontera de cualquiera de las dos mitades, y consideramos su simetrico D respecto de tal recta, se obtienen dos triángulos iguales, aunque simétricos (véase la gura 6).

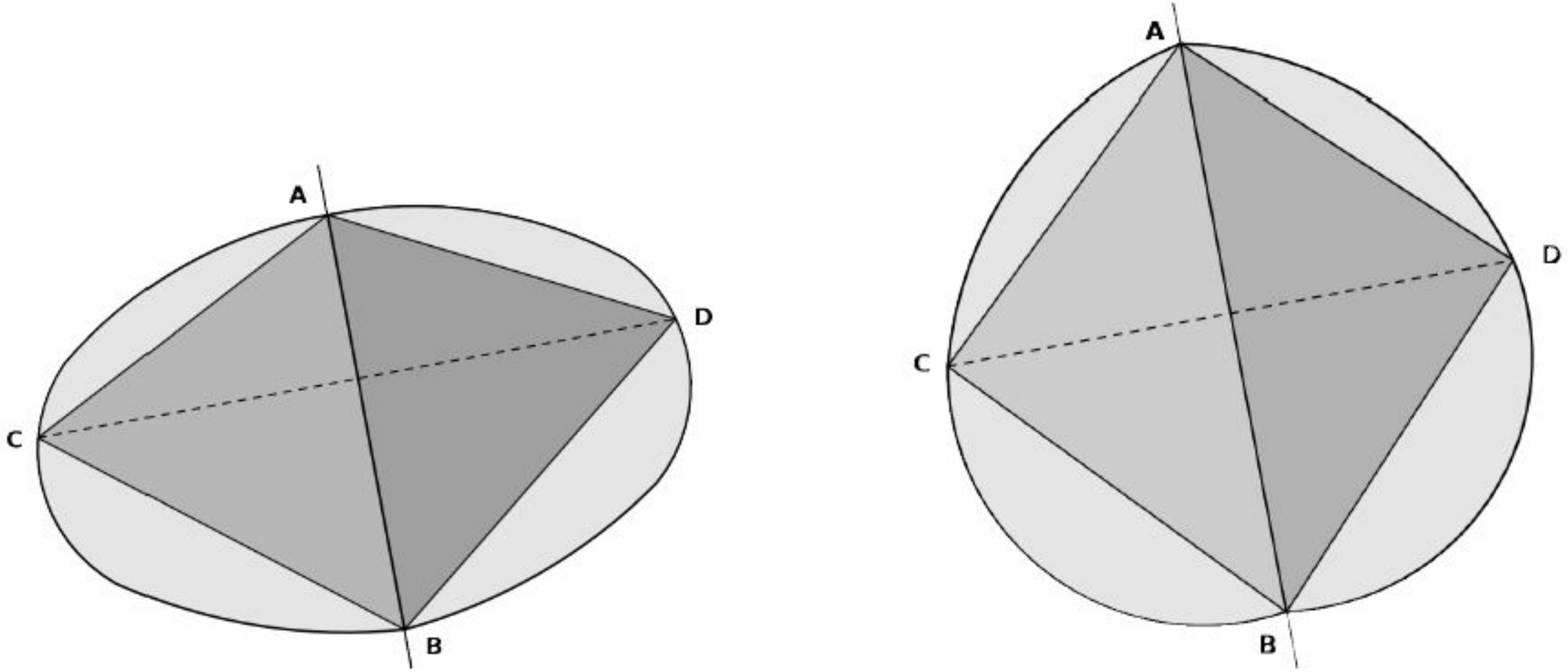
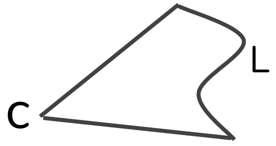


Figura 6: Por la simetría se obtienen triángulos iguales y simétricos.

Si los ángulos homólogos correspondientes a los vértices C y D no son rectos, podríamos aumentar o disminuir la base AB, común a los dos triángulos, hasta que los ángulos en cuestión fueran rectos sin modificar la longitud de los otros lados de los triángulos, ni la parte de la figura que se encuentra por encima de ellos. Entonces habríamos obtenido una figura que, con idéntico perímetro, tiene mayor área, ya que, aunque la parte de la figura que se encuentra por encima de cada lado de los dos triángulos ha permanecido fija, sin embargo, el área de cada triángulo ha aumentado. Por tanto los ángulos C y D deben ser rectos.

Por último, como esto sucede para cualquier punto A de la frontera y, una vez elegido este punto, para cualquier otro punto C de una de las dos mitades, la figura en cuestión debe ser un círculo.

Teorema 7. La figura formada por los lados de un ángulo C, y por una línea de forma arbitraria, pero de longitud fija L, es maximal cuando esta línea arbitraria es un arco de circunferencia cuyo centro se encuentra en el vértice del ángulo C.



Nivel Avanzado

Lema 1. Si la frontera de una figura plana está formada por dos segmentos paralelos AB y CD y por dos curvas que unen los puntos A con C y B con D, que no tienen autointersecciones ni se cortan entre sí. Entonces la longitud de la curva que une los puntos medios de cada segmento paralelo a los originales que corta a la figura, es menor o igual que la mitad de la suma de las longitudes de las curvas que forman la frontera; la igualdad solo se da en el caso de que las curvas de la frontera sean la una trasladada de la otra en la dirección de AB (véase la figura siguiente).

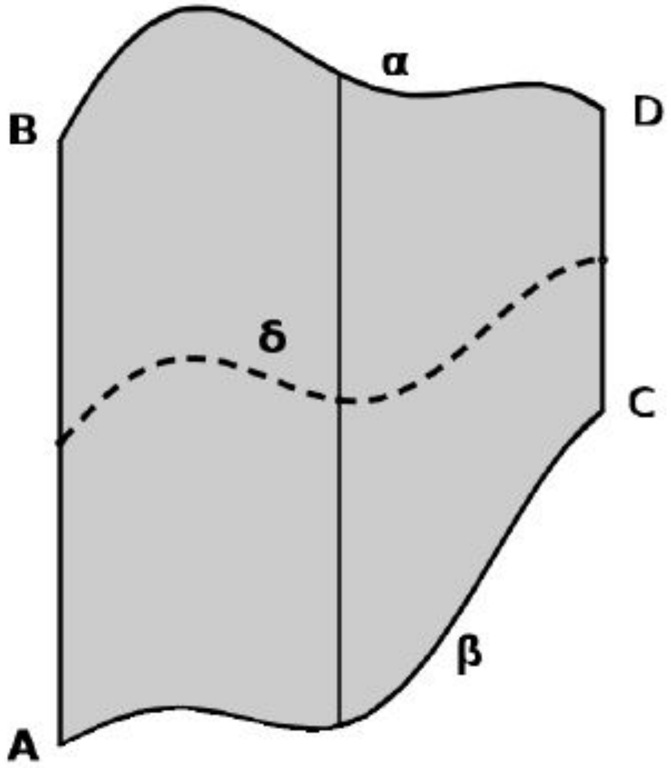


Figura 7: La longitud de la curva media es menor o igual que la media de las longitudes.

Visto ese lema podemos hacer otra demostración de que el círculo es la curva de área máxima:

Como en la primera demostración, Steiner considera una figura convexa con perímetro dado y cuya área sea máxima. También utiliza otra propiedad argumentada en la demostración anterior. Si un segmento que une dos puntos A y B de la frontera, divide en dos partes iguales el perímetro, también divide en dos partes iguales el área.

Si las dos mitades no fueran simétricas, elegimos una de ellas y tomamos su simétrica respecto de AB. Tenemos entonces dos curvas diferentes que sobre el segmento AB encierran la misma área. Si tomamos la curva media (véase la Figura 8 donde la curva media está en color gris), el área que encierra coincide con la limitada por las dos curvas anteriores, pero, según el Lema 1 anterior, su longitud es menor, lo que contradice la hipótesis. Por tanto la longitud de la curva media debe ser igual que las dos originales lo que conlleva, de nuevo según el Lema 1, que ambas son iguales. Es decir AB es un eje de simetría. Como esto ocurre para cualquier punto A elegido en la frontera de la figura, esta ha de ser simétrica en cualquier dirección, lo que lleva a concluir que se trata de una circunferencia.

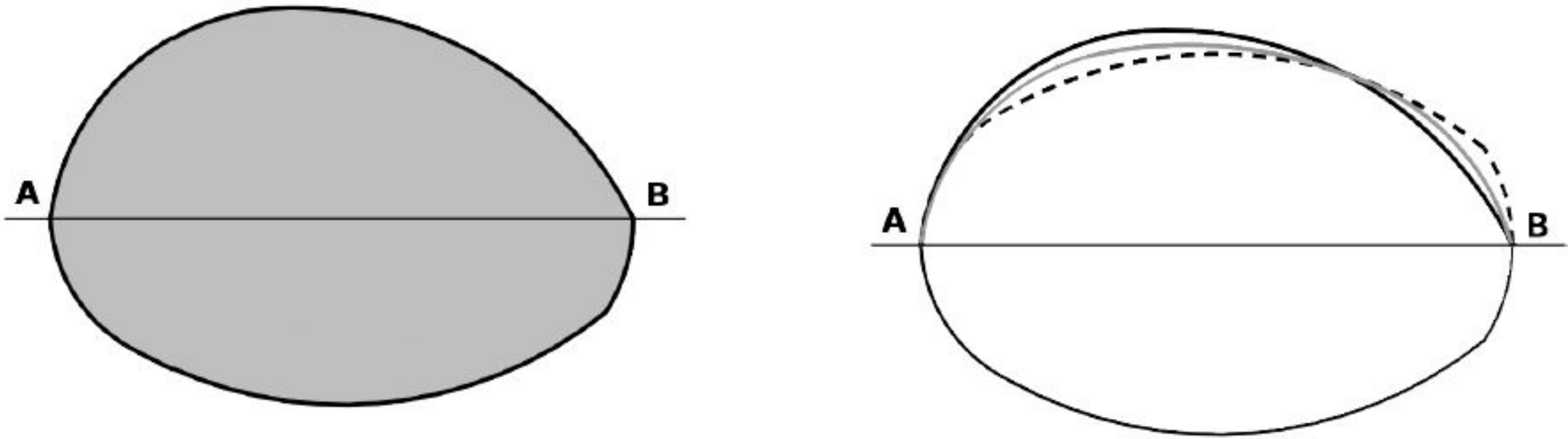


Figura 8: La longitud de la curva media disminuye el perímetro y conserva el área.

La solución: K. Weierstrass

Con todo, el problema seguía sin una solución completa, porque faltaba demostrar que existe solución.

El problema fue resuelto por fin y su solución no vino de la mano de la geometría elemental. Otro ilustre matemático une su nombre al problema, se trata de K. Weierstrass (1815-1897). **Weierstrass** consiguió **la primera demostración** rigurosa y **completa del teorema isoperimétrico**, la hizo en sus clases en **1879**, pero no la publicó. Fue recogida por sus discípulos y se publicó en el volumen 7 de sus obras completas en 1927. Se trata de una demostración nada simple, que utiliza el cálculo de variaciones.

Posteriormente ha habido otras soluciones: Hurwitz (1859-1919) utiliza en 1902 las series de Fourier; Blaschke (1855-1962) da otra en su geometría diferencial en 1930; Schmidt (1876-1959) en 1939, también con una prueba vinculada a la geometría diferencial; o el español Santaló (1911-2001) en su geometría integral.

Conclusiones finales

La historia del problema isoperimétrico no termina con la solución completa, además de su belleza matemática y lo interesante de su evolución hay multitud de variaciones y nuevos problemas que ya contemplan algunos de los trabajos que hemos analizado. Por ejemplo, entre todas las figuras planas isoperimétricas, que en su frontera contienen un segmento rectilíneo de longitud fija, ¿cuál encierra mayor área? La solución es la figura en la que el segmento es una cuerda de una circunferencia; y así un largo etcétera. Variaciones que no se quedan en el plano, sino que evidentemente, se plantean en otras dimensiones y en diversas ramas de la geometría. Las ideas que han surgido en torno a “problemas tipo Dido" son de las más fecundas en matemáticas.

Además, no solo en matemáticas surge de manera natural el problema isoperimétrico, las formas de la naturaleza aparecen vinculadas a la isoperimetría. ¿Por qué las pompas de jabón son esféricas?, ¿y las gotas de agua?; ¿por qué cuando una gota de agua cae sobre la mesa, dibuja un círculo? ¿o cuando una gota de aceite cae en un vaso de agua también es circular? ¿por qué tantas frutas son casi esféricas?

Para toda curva cerrada se cumple que:

“Desigualdad isoperimétrica” $\acute{A}rea \leq \frac{1}{4\pi} longitud^2$

Sus aplicaciones en arquitectura con las superficies minimales, como la cubierta del estadio olímpico de Munich o diferentes formas de la Ciudad de las Artes y las Ciencias de Valencia, presentan propiedades de resistencia y economía vinculadas a sus propiedades geométricas. En música, los tambores se hacen también circulares y así un largo etcétera.

Los motivos de la naturaleza para organizarse así, el de los arquitectos para construir, etc., no es casual, obedece a propiedades vinculadas a la Reina Dido.

Ciudad de las Artes y las Ciencias de Valencia

ESO ES TODO
GRACIAS POR LA ATENCIÓN PRESTADA

Anexo D: Segunda Encuesta

ENCUESTA SOBRE MATEMÁTICAS 2

Nombre del alumno:

1. ¿Te han gustado las actividades realizadas?

2. ¿Ves utilidad en las actividades realizadas?

3. ¿Te han parecido de poco nivel los problemas que hemos visto?

4. ¿Has visto relación de los problemas vistos con las inecuaciones que estudiasteis en el tema anterior?

5. ¿Conoces ahora, algún caso en el que, de un problema de la vida real, se hayan desarrollado nuevas ideas/herramientas matemáticas?

6. ¿Qué crees que significa la expresión “Hacer Matemáticas”?

7. ¿Han sido interesantes las actividades propuestas?

8. ¿Alguna sugerencia para hacer más interesantes o útiles las actividades que hemos visto?

Muchas gracias por participar.

Anexo E: Examen de Evaluación

EVALUACIÓN PROBLEMAS ISOPERIMÉTRICOS

Nombre y apellidos:____

Dado que ya hemos visto los problemas isoperimétricos, responde razonadamente a las siguientes cuestiones (Dejad indicadas las operaciones. No hace falta hacerlas):

a) Si tienes un triángulo rectángulo de perímetro 16 y área máxima, ¿Cuánto miden sus lados? (30% del problema)
b) Si tienes un rectángulo de área máxima, con perímetro 16 y uno de sus lados mide 3, ¿Cuál es el área del rectángulo? (30% del problema)
c) Si en el apartado anterior no se conoce la longitud de ninguno de los lados, ¿Cuál sería el área máxima que puede tener? (20% del problema)
d) Si te dieran una cuerda de longitud 16, ¿Con qué figura conseguirías el área máxima y cuánto valdría ese área? (20% del problema)

Soluciones:

a) El triángulo rectángulo debe ser isósceles, por lo que si los catetos son a y la hipotenusa b:
   2a+b=16 $2a^2 = b^2 \Rightarrow a(2 + \sqrt{2}) = 16 \Rightarrow a = 16/(2 + \sqrt{2}) = 4,6863$ y b = 16 - 2a = 6,6274
   Objetivo: En esta pregunta busco que relacionen el triángulo isósceles, que es el de más área, con el triángulo rectángulo.

b) Uno de los lados mide 3 y es un rectángulo, luego el lado opuesto mide lo mismo. Por tanto 2×3 = 6, y 16 - 6 = 10 que entre los dos lados que quedan y son iguales, el lado largo tiene que medir 5 y por tanto, el área es 5×3 = 15
   Objetivo: Que se den cuenta de cómo una restricción puede hacer que exista una solución única y que el dato de que es de área máxima es redundante en este caso.

c) Si no se fija la longitud de ninguno de los lados, el rectángulo de más área es siempre el cuadrado, por ser el polígono regular que se corresponde con el rectángulo. Por tanto el lado sería 16/4 = 4, y el área sería 4×4 = 16
   Objetivo: Comprobar que recuerdan que el área máxima es el de los polígonos regulares del mismo número de lados que nos piden.

d) La curva de área máxima para un perímetro fijado es siempre la circunferencia, por lo que el radio sería $r = 16/2\pi$, por lo que el área será $\pi \times (16/2\pi)^2$
   Objetivo: Que relacionen el círculo con el área máxima cuando se habla de curvas y no de polígonos.

Anexo F: Impreso de Autoevaluación

EVALUACIÓN DE LA PROGRAMACIÓN DIDÁCTICA POR EL DEPARTAMENTO

I.- Planificación general de la programación didáctica

1	La programación didáctica constituye el instrumento básico de planificación curricular para cada una de las materias y ámbitos del currículo que imparte el Departamento.	Sí										No
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
2	La programación didáctica de cada materia del Departamento respeta e incluye los criterios establecidos para la elaboración y evaluación de las programaciones didácticas que forman parte del Proyecto Educativo del Centro.	Sí										No
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
3	Las programaciones didácticas de las materias del Departamento desarrollan el currículo establecido en los respectivos Decretos de currículo de la Junta de Castilla y León.	Sí										No
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
4	Las programaciones didácticas de las materias del Departamento tienen en cuenta las necesidades y características de los alumnos y alumnas a los que se imparte clase.	Sí										No
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

II.- Elementos de la programación didáctica

5	Las programaciones didácticas de las materias contienen una distribución temporal de los contenidos correspondientes a cada una de las evaluaciones previstas.	Sí										No
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
6	Las programaciones didácticas de las materias incluyen una evaluación inicial de los conocimientos previos de los alumnos y alumnas.	Sí										No
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
7	Las programaciones didácticas de las materias identifican los conocimientos y aprendizajes básicos necesarios para que el alumnado alcance una evaluación positiva al final de cada curso de la etapa educativa.	Sí										No
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
8	Se ha desarrollado en la programación didáctica de cada materia las competencias básicas que contemplan el currículo de Castilla y León en la ESO.	Sí										No
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
9	Las programaciones didácticas de las materias incluyen los procedimientos de evaluación del aprendizaje de los alumnos y alumnas.	Sí										No
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
10	Las programaciones didácticas de las materias incluyen los criterios de calificación, respetando los criterios de evaluación existentes en el respectivo Decreto de currículo.	Sí										No
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
11	Las programaciones didácticas de las materias se han elaborado con el consenso de todos los profesores y profesoras del Departamento.	Sí										No
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

III.- Metodología

12	Las unidades didácticas de cada materia van acompañadas de un plan de trabajo previo de planificación del trabajo a realizar por el propio profesor o profesora que imparte la clase.	Sí										No
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
13	La metodología propuesta en la programación didáctica se ajusta las necesidades de los alumnos y alumnas del propio Centro y a lo contemplado en el Proyecto Educativo del Centro.	Sí										No
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
14	La metodología propuesta por la programación	Sí										No

	didáctica incluye las necesidades del aprendizaje social: trabajo en equipo colaborativo y cooperativo entre los alumnos y alumnas.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
15	La metodología incluye el uso de diferentes recursos didácticos que desarrollen el currículo oficial de Castilla y León: audiovisuales, informáticos, mapas, modelos, ….	Sí										No
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
16	El material didáctico utilizado se ajusta a la diversidad de los alumnos y alumnas de la clase, y a las distintas situaciones de aprendizaje.	Sí										No
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
17	El Departamento promueve participa o realiza actividades que utilicen recursos externos a lo largo del curso (trabajos de campo, visitas, …).	Sí										No
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
18	El Departamento tiene previsto el uso de las TIC en la programación didáctica de cada materia.	Sí										No
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

IV.- Evaluación

19	Los instrumentos de evaluación del Departamento están adecuados a los objetivos, contenidos y criterios de evaluación de cada materia.	Sí										No
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
20	Los instrumentos de evaluación del Departamento son variados.	Sí										No
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
21	Los criterios de calificación tienen en cuenta la diversidad del alumnado.	Sí										No
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
22	El Departamento tiene una forma adecuada de tratamiento de la evaluación a los alumnos y alumnas con la materia pendiente de cursos anteriores y/o repetidores.	Sí										No
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
23	El Departamento dispone de instrumentos de evaluación específicos para alumnos y alumnas con adaptaciones curriculares.	Sí										No
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
24	El Departamento posee criterios claros sobre cuándo y cuántas veces se debe calificar a los alumnos y alumnas por cada evaluación.	Sí										No
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
25	La programación incluye los tipos de actividades de recuperación que deben realizar los alumnos y alumnas que suspenden curso.	Sí										No
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
26	La programación incluye criterios claros para el diseño de medidas de refuerzo dirigidas a los alumnos y alumnas con dificultades de aprendizaje.	Sí										No
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
27	El Departamento dispone de un modelo de informe a entregar al final del curso al alumnado que suspenden que sirva de orientación para la convocatoria extraordinaria de septiembre.	Sí										No
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
28	Las competencias básicas sirven para evaluar utilizando otros instrumentos como las rúbricas.	Sí										No
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
29	Existen instrumentos de evaluación adecuados para evaluar el grado de consecución de las competencias básicas.	Sí										No
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
30	El grado de consecución de las competencias básicas es referente para la toma de la decisión de la promoción al curso siguiente y/o titulación al final de la etapa de la ESO.	Sí										No

V.- Medidas ordinarias y extraordinarias de atención a la diversidad

		Sí										No
31	El Departamento tiene previstas medidas relativas a las deficiencias más habituales en el área con diferentes grados de dificultad.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
32	En la temporalización de la programación didáctica de cada materia se tienen previstos los diferentes ritmos de aprendizaje de los alumnos y alumnas.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
33	Los procedimientos de evaluación existentes en las programaciones están graduados para adecuar la consecución de los objetivos y los contenidos a los diferentes alumnos y alumnas de la clase.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
34	El Departamento provee de criterios claros y medios efectivos para la realización y aplicación de adaptaciones curriculares individualizadas.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

VI.- Clima de trabajo en el propio Departamento

		Sí										No
35	Se informa regularmente en el Departamento sobre los cauces y fórmulas de participación a los profesores y profesoras del mismo en el trabajo del Departamento.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
36	Se utilizan los canales de comunicación e información dentro del Departamento.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
37	Se participa en el trabajo en equipo dentro del Departamento.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
38	Los profesores y profesoras del Departamento participan en actividades de formación, actualización y perfeccionamiento del profesorado.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
39	El Departamento provee a los profesores y profesoras del material didáctico necesario para cubrir sus necesidades.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
40	El Departamento planifica y realiza actividades complementarias y extraescolares.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
41	El Departamento ayuda y orienta a los profesores y profesoras en prácticas y alumnos y alumnas del Máster en didáctica.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

VII.- Plan de fomento de la lectura

		Sí										No
42	En la programación se han incorporado medidas para estimular el interés y el hábito de la lectura y la capacidad de expresarse correctamente.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
43	Se han diseñado indicadores e instrumentos destinados a evaluar la aplicación del plan del fomento de la lectura dentro del Departamento.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
44	La incorporación de medidas para estimular el interés y el hábito de la lectura han sido efectivos.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

VIII.- Coordinación interna del Departamento

		Sí										No
45	Se han impartido las unidades didácticas existentes en la programación de la materia en el curso escolar.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
46	Se tienen previstas en el Departamento medidas a realizar para el caso de que no se hayan impartido las unidades didácticas existentes en la	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

	programación de cada materia en el curso escolar.											
47	Las unidades didácticas tienen en cuenta una perspectiva global o interdisciplinar donde sea posible.	Sí										No
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
48	Existe una coordinación interna entre los profesores o profesoras que impartan la misma materia en un mismo curso.	Sí										No
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
49	Se realiza un seguimiento en el Departamento a lo largo del curso sobre el grado de aplicación o consecución de la programación didáctica de cada materia.	Sí										No
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
50	Se acuerda ente el Departamento las pruebas globales más relevantes a realizar por los alumnos y alumnas en las distintas materias.	Sí										No
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
51	Se revisan colegiadamente en el Departamento las reclamaciones a las calificaciones finales cuando procedan.	Sí										No
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

IX.- Revisión de la programación didáctica

52	Existe un procedimiento en el Departamento para valorar el ajuste entre el diseño de la programación didáctica y los resultados obtenidos en el curso escolar.	Sí										No
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
53	Se aplica de forma ordinaria el procedimiento a seguir para valorar el ajuste entre el diseño de la programación didáctica y los resultados obtenidos.	Sí										No
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
54	Se han tomado medidas para modificar la programación didáctica de cada materia para el cuso siguiente.	Sí										No
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

X.- Medidas adoptadas en el Departamento para modificar la programación didáctica de cada materia para el curso siguiente:

1……………………………………………………………………………………

2.…………………………………………………………………………………

3……………………………………………………………………………………..

4……………………………………………………………………………………..

5……………………………………………………………………………………..

6……………………………………………………………………………………..

7……………………………………………………………………………………..

8……………………………………………………………………………………..

9……………………………………………………………………………………..

10……………………………………………………………………………………