Universidad de Valladolid

Dpto. Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología
Dpto. Matemática Aplicada

La Papiroflexia, una herramienta didáctica para aprender Matemáticas en Bachillerato

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad de Matemáticas.

Alumna: *Laura Esteban Sanz*

Tutores: *Dr. Philippe Giménez y Dr. Cesáreo González Fernández*

Valladolid, junio de 2021

Resumen

Fabricar Matemáticas con las manos permite acercarse a conceptos y resultados abstractos. En este trabajo se pretende estudiar cómo distintas construcciones geométricas que forman parte del currículo de la materia de Matemáticas de Bachillerato pueden realizarse simplemente doblando una hoja de papel. Desde el Teorema de Pitágoras hasta los problemas de la geometría clásica griega, pasando por las propiedades básicas del triángulo, la papiroflexia ofrece una alternativa a la regla y el compás para abordar y visualizar problemas y resultados geométricos de manera lúdica. Todo ello se llevará a cabo integrando las diferentes competencias propias del máster, en particular relacionadas con el diseño curricular, la práctica docente y la metodología y evaluación, entre otras.

Palabras clave: Papiroflexia, herramienta didáctica, aprendizaje en Matemáticas, diseño de actividades de aprendizaje.

Abstract

Building Mathematics with your hands allows the student to approach abstracts concepts and results. This paper aims at examining how different geometric constructions, which are part of the Bachillerato's curriculum of the subject of Mathematics, could be conducted simply by folding a paper sheet. From the Pythagorean Theorem to the classical Greek geometry problems, going through the basic properties of the triangle, Origami offers an alternative to ruler and compass for tackling and visualizing problems and results from a ludic perspective. All of that will be accomplished bringing the different competences of the master degree together, in particular those associated with curriculum design, teaching practice and methods and evaluation, among others.

Key words: Origami, didactic tool, Mathematic learning, learning activities design.

Índice general

Motivación

El aprendizaje de las Matemáticas en las diferentes etapas educativas supone, para muchos alumnos y alumnas, una ardua tarea. En particular, el alumnado de Bachillerato ha de enfrentarse a un nivel de abstración superior al trabajar los contenidos del currículo de Matemáticas establecidos en la Ley Educativa vigente, la LOMCE, que tradicionalmente se abordan desde una perspectiva teórica. La suma de abstracción y teoría provoca en los estudiantes un desencanto hacia la materia que produce una pérdida de motivación en el aula al considerar las matemáticas como "*algo alejado de la realidad*".

Al recorrer las distintas asignaturas del máster, he comprendido que muchos son los factores que influyen en el proceso de aprendizaje y enseñanza. Las estrategias de enseñanza y aprendizaje diseñadas por el docente son decisivas para promover el aprendizaje significativo del alumno, así como su interés y motivación en la materia. Entre ellas, las herramientas o recursos didácticos más adecuados a la situación de aprendizaje que se pretende desarrollar pueden ser de gran ayuda para conseguir esos objetivos, tanto como apoyo en las explicaciones del docente, o como material con el que el estudiante pueda experimentar y estimular su aprendizaje.

Como futura docente de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, la motivación de este Trabajo Fin de Máster surge en la búsqueda de metodologías y técnicas didácticas no convencionales que faciliten la comprensión de conceptos matemáticos abstractos, a la vez que despierten la motivación de los estudiantes en el aula. Así, aparece la Papiroflexia como una herramienta didáctica que acerque de forma tangible y visual las matemáticas al alumnado de Bachillerato, de forma que los conceptos queden representados en una hoja de papel y que sean los propios estudiantes los que los construyan. Se pretende conseguir en el alumnado un aprendizaje significativo de los procedimientos y conceptos trabajados mediante el diseño de actividades de aprendizaje y enseñanza basadas en Papiroflexia, y centradas en el desarrollo competencial, tan fundamental para el alumnado.

Introducción

Este Trabajo Fin de Máster busca presentar la Papiroflexia como una herramienta didáctica para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en Bachillerato. Por ello, a lo largo de este documento se desarrollarán distintos apartados que nos guíen hasta el diseño de actividades basadas en Papiroflexia y contextualizadas en un aula de matemáticas en el nivel de Bachillerato.

La estructura que seguirá este Trabajo Fin de Máster será la siguiente: En el primer capítulo, titulado *El arte de la Papiroflexia*, se realiza una breve introducción histórica de esta técnica con la que descubrir su evolución hasta nuestros días, en los que la Papiroflexia es usada cada vez más en el ámbito científico. Se enumeran los Axiomas de Hatori-Huzita que serán las "reglas del juego" en las que se cimentarán las actividades de plegado de papel. En la última sección del capítulo se describe la relación que existe entre esta técnica y la materia que nos concierne, la Matemática, donde se realiza un conciso compendio de los resultados algebraicos más relevantes que se esconden tras los procedimientos de plegado de papel.

El segundo capítulo, titulado *La Papiroflexia en el ámbito educativo*, busca realizar un análisis de la utilización de la Papiroflexia como herramienta didáctica, apoyándose en estudios previos de distintos autores para reflexionar sobre sus puntos fuertes e inconvenientes a la hora de ponerla en práctica, tanto desde la perspectiva del docente como del alumnado. En el segundo apartado, el estudio se centrará en la Papiroflexia como herramienta didáctica específica de la Matemática, valorando su capacidad de acercar los conceptos más abtractos de una forma visual y tangible al alumnado. Por último, se considera la contribución que las actividades basadas en plegado de papel pueden hacer al desarrollo competencial del alumnado, y cuáles son las metodologías que la Papiroflexia invita a poner en práctica en las aulas.

En el capítulo tercero se llega, eventualmente, al objetivo último de este Trabajo Fin de Máster: el diseño de actividades para el aprendizaje de las matemáticas basadas en la Papiroflexia y contextualizadas en el aula de Bachillerato. En primer lugar, se lleva a cabo un análisis del currículo de la materia de Matemáticas en Bachillerato para identificar aquellos tópicos y contenidos apropiados a ser trabajados por medio de actividades de Papiroflexia. A continuación, se plantea el diseño de cuatro Actividades describiendo, para cada una de ellas, los contenidos del currículo y extracurriculares que se van a trabajar, los procedimientos de plegado de papel que se deben realizar para trabajar esos contenidos con Papiroflexia, las metodologías, recursos y temporalización que se han escogido para el desarrollo de cada actividad y finalmente, la evaluación de la misma.

Durante la fase de intervención del periodo Practicum de la asignatura *Prácticas Externas*, se pudo llevar a cabo una puesta en práctica de una primera aproximación de una de las actividades diseñadas en el Capítulo 3. La descripción de esta propuesta didáctica basada en Papiroflexia como experiencia real en un aula de Bachillerato, junto con el análisis y las conclusiones que se obtuvieron de la misma, se exponen en el capítulo cuarto.

Finalmente, el capítulo quinto estará dedicado a la reflexión sobre la Papiroflexia como herramienta didáctica para el aprendizaje de las matemáticas en Bachillerato junto con las conclusiones finales obtenidas en el proceso de realización de este documento.

Para la elaboración de este documento ha sido necesario integrar los distintos saberes y competencias adquiridos al cursar las asignaturas del máster, siendo de especial importancia aquellas propias de la especialidad de Matemáticas. Entre ellas *Complementos de Matemáticas*, *Innovación docente en Matemáticas* y particularmente, las asignaturas de *Didáctica de la Matemática* y *Metodología y Evaluación en Matemáticas*, ya que han sido la base del diseño de las actividades del capítulo tercero.

Capítulo 1

El arte de la Papiroflexia

La Papiroflexia (del latín *papyrus*, papel y *flexus*, doblado), también conocida por el término japonés Origami[1] (*orus*, doblar y *kami*, papel), es el arte de construir figuras reconocibles utilizando la técnica del doblado de papel. En primera instancia, la variante más tradicional de la Papiroflexia partía de un único papel cuadrado. La gran variedad de combinaciones de pliegues posibles permitía construir figuras realmente complejas que modelaban la realidad. El arte de la Papiroflexia ha evolucionado de manera sorprendente a través del tiempo, originando diferentes corrientes. En los últimos 30 años, la Papiroflexia ha cobrado especial importancia entre matemáticos y científicos como herramienta que permite realizar demostraciones elegantes de algunos métodos matemáticos, enmarcadas en la geometria, simetrías y proporciones en que se basan los procedimientos de plegado de papel.

1.1. Historia de la Papiroflexia.

Son muchos los investigadores, como Engel (1994) o Royo Prieto (2002), que coinciden en situar el origen de la Papiroflexia en la China del siglo I a.C. , a resultas de la invención del papel. Esta técnica será introducida por los monjes Budistas en Japón en el siglo VI, donde evoluciona y se cultiva hasta convertirse en un arraigado arte de la cultura y tradición japonesa, conocido con el nombre de Origami.

En el periodo Heian, del 794 al 1185, el Origami guardaba una estrecha relación con el ámbito ceremonial. El papel era un bien al que solo las clases altas de la sociedad podían acceder debido a su elevado coste. En esta época, el arte del doblado del papel adquiría un marcado sentido espiritual. En el periodo Muromachi, del 1338 al 1573, el papel se vuelve más asequible. Así, la figura de Origami que portaba cada individuo permitía referir la clase social a la que pertenecía. Es durante el periodo Tokugawa, de 1603 a 1867, cuando el arte del Origami sufre su mayor exaltación cultural.

[1] El término "origami" no hizo referencia a la técnica de plegado de papel hasta el periodo Shōwa, de 1926 al 1989. (Hatori, s. f.)

Sin embargo, Japón no fue el único lugar en el que se practicó este arte. Simultáneamente, los árabes procedentes del Norte de África, entre los que se encontraban grandes matemáticos y astrónomos, también desarrollaron la técnica del doblado de papel. Sus estudios se centraron en la geometría del cuadrado y en la utilización de la trigonometría para la representación de mapas estelares. Fueron ellos quienes introdujeron la Papiroflexia en la Península en el siglo VII, influencia que se puede observar en las teselaciones[2] del monumento de la Alhambra de Granada.

En consecuencia, la Papiroflexia moderna (aquella anterior a 1980) evoluciona en dos corrientes muy diferenciadas. Por un lado, la Escuela Japonesa, en la que el arte del Origami es practicado por artistas no científicos, cuya búsqueda era la expresión de la esencia de las figuras deribado del sentido espiritual que adquiría la práctica de este arte. Por otro lado, la Escuela Occidental, desarrollada en Europa, en la que los papiroflectas estaban principalmente ligados al ámbito científico, y en sus construcciones buscaban la exactitud de las figuras. Cabe mencionar la figura de Akira Yoshizawa (1911, Japón), impulsor de la Papiroflexia moderna que, junto a las aportaciones de Samuel L. Randlett (1930, Estados Unidos), en 1956 estableció el Sistema Yoshizawa-Randlett[3]. Este código para la representación de dobleces permitía la difusión de esta técnica mediante una simbología universal.

En 1878 se celebra la Exposición Universal de París, que supone el contacto entre las dos corrientes, occidental y oriental. Hoy en día no existen prácticamente disimilitudes entre ambas. Se debe indicar en este apartado otra corriente de la Papiroflexia moderna como es la Papiroflexia Modular (Royo Prieto, 2002), la cual consiste en plegar piezas sencillas para después ensamblarlas constuyendo modelos geométricos, en su mayoría en 3 dimensiones.

Por último, se dedica una mención especial al filósofo y escritor español Miguel de Unamuno (1864, Bilbao), referente de la Cocotología, vocablo ideado por él mismo para referirse a la papiroflexia como "el arte de construir pajaritas[4] de papel"(Asociación Española de Papiroflexia [AEP], 2012 -2020). Gran aficionado de este arte, era habitual encontrarle en los cafés de Salamanca plegando servilletas de papel. Escribió la obra titulada "*Apuntes para un tratado de cocotología*" (1969), en la que defendía la práctica del doblado de papel sin recurrir a cortes como vía de estudio de las propiedades aureas del cuadrado inicial.

"¿Por qué cortar si en la superficie de una hoja de papel ya están trazados todos los caminos del universo?"

Miguel de Unamuno.

[2]Las teselaciones son patrones de figuras que recubren totalmente una supercie plana de forma que no se superpongan entre sí y no queden espacios sin cubrir.
[3]Este sistema fue descrito por primera vez en Randlett (1961).
[4]Del francés coloquial *cocotte*, pajarita.

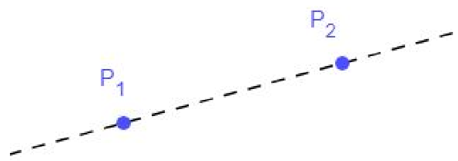
1.2. Axiomas de Hatori-Huzita.

En 1989, el matemático Humiaki Huzita (1924, Japón) describe en Huzita (1989) seis axiomas que sistematizaban los procedimientos u operaciones de plegado y permitían resolver problemas geométricos mediante la herramienta de la Papiroflexia. Más tarde, en 2001, Koshiro Hatori especificaría un séptimo axioma (Hatori, 2001). Conjuntamente, estos siete axiomas que proporcionan las "reglas del juego" de la Papiroflexia son conocidos como los **Axiomas de Hatori-Huzita**.

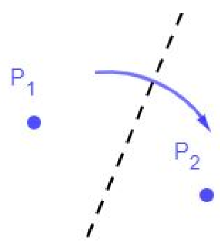
Es considerable aclarar que, aunque el nombre de estos Axiomas se deba a los matemáticos referidos en el párrafo anterior, ellos no fueron los primeros ni los únicos en introducir y describir las capacidades del origami y las operaciones más elementales del plegado de papel. El matemático francés Jacques Justin ya expuso con anterioridad las siete *"operations elementaires de pliage"* en su obra *"Resolution par le pliage de l'equation du troisième degré et applications géométriques."* (Justin, 1986). Por esta razón, los Axiomas son también conocidos bajo el nombre de *Axiomas de Huzita-Justin.*

Se enumeran a continuación los Axiomas de Hatori-Huzita que presentan el doblado de papel como una herramienta de construcción geométrica:

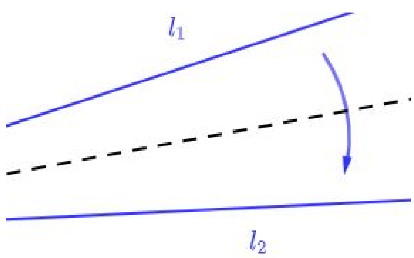
- ($\mathbf{O_1}$). Dados dos puntos $P_1 \neq P_2$, realizar el único pliegue que pasa por P_1 y P_2.



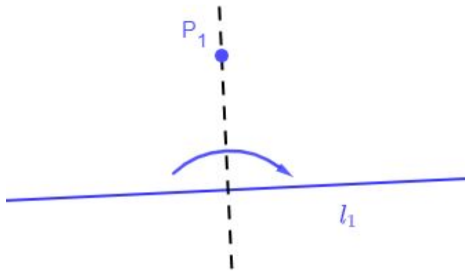
- ($\mathbf{O_2}$). Dados dos puntos $P_1 \neq P_2$, realizar el único pliegue que lleva P_1 sobre P_2.



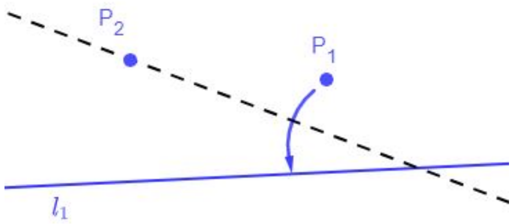
- ($\mathbf{O_3}$). Dadas dos rectas $l_1 \neq l_2$, realizar un pliegue que lleve l_1 sobre l_2.



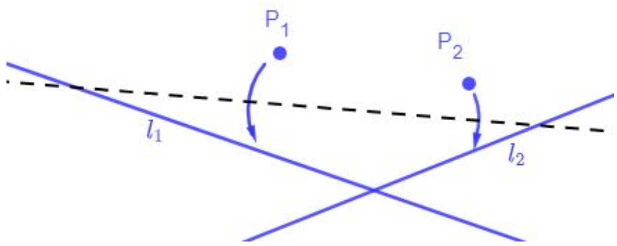
- (**O₄**). Dados un punto P_1 y una recta l_1, realizar el único pliegue perpendicular a l_1 que pase por P_1.



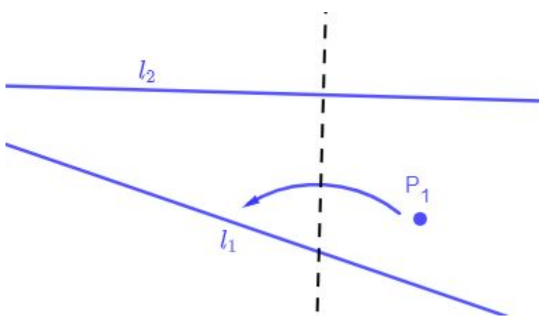
- (**O₅**). Dados dos puntos $P_1 \neq P_2$ y una recta l_1 con $P_1 \notin l_1$, realizar un pliegue que lleve P_1 sobre l_1 y pase por P_2.



- (**O₆**). Dadas dos rectas $l_1 \neq l_2$ y dos puntos $P_1 \neq P_2$ con $P_1 \notin l_1$ y $P_2 \notin l_2$, realizar un pliegue que lleve P_1 sobre l_1 y simultáneamente P_2 sobre l_2.



- (**O₇**). Dadas dos rectas $l_1 \neq l_2$ y un punto $P_1 \notin l_1$, realizar un pliegue perpendicular a l_2 que lleve P_1 sobre l_1.



Como bien estableció Lang (2004), estos siete axiomas cumplen la propiedad de Completitud, lo que significa que no se pueden encontrar más axiomas diferentes a los ya enunciados que permitan nuevos pliegues de papel mediante un único doblez. Cualquier otro pliegue realizado por un axioma diferente a alguno de los Axiomas de Hatori-Huzita se podrá llevar a cabo en términos de estos últimos.

1.3. Matemáticas detrás de la Papiroflexia.

Matemáticas y Papiroflexia son dos áreas que están íntimamente relacionadas. Las matemáticas pretenden explicar el mundo desde una perspectiva de orden y simplicidad, enmarcado en regularidades y patrones. La Papiroflexia está inspirada en el mismo matiz, así pues la belleza del Origami está basada en simple geometría y en lograr la máxima economía y sencillez en sus procedimientos.

Cuando al finalizar un procedimiento de Papiroflexia desplegamos de nuevo el cuadrado de papel inicial, se puede observar un entramado de pliegues que Royo Prieto (2002, p.189) denomina **mapa de cicatrices**[5]. Los pliegues que se obtienen al doblar una hoja de papel pueden interpretarse como simples operaciones geométricas y de simetría. De esta manera, un pliegue se identifica con una recta en el plano cartesiano y, trabajando con sencillos dobleces, se pueden realizar las siguientes construciones de la geometría plana, que se asociarán con cada uno de los Axiomas de Hatori-Huzita:

- **Recta que pasa por dos puntos.** Al realizar el Axioma ($\mathbf{O_1}$) se define la única recta que pasa por dos puntos P_1 y P_2. En el caso de que $P_1 = P_2$, el pliegue no quedaría determinado: habría infinitos.
- **Mediatriz de un segmento.** Al realizar ($\mathbf{O_2}$) se construye la mediatriz del segmento de extremos P_1 y P_2. Es decir, se obtiene una única recta perpendicular al segmento $\overline{P_1P_2}$ que se encuentra a la misma distancia de P_1 y de P_2.
- **Punto medio de un segmento**. Al aplicar los Axiomas ($\mathbf{O_1}$) y ($\mathbf{O_2}$), se obtiene el punto medio del segmento $\overline{P_1P_2}$ como intersección de dos pliegues.
- **Bisectriz de un ángulo**. Con el Axioma ($\mathbf{O_3}$) existen dos posibles pliegues: se puede construir la bisectriz de los dos ángulos opuestos por el vértice y $\leq 90°$ formados por las rectas l_1 y l_2, o la bisectriz de los otros dos ángulos opuestos por el vértices y $\geq 90°$. Cuando $l_1 = l_2$, no tiene solución.
- **Recta paralela a dos rectas dadas paralelas entre sí**. En el caso anterior, si las dos rectas l_1 y l_2 son paralelas, lo que se obtiene es la única recta paralela que se encuentra a igual distancia de ambas.
- **Recta perpendicular a una recta dada**. Utilizando el Axioma ($\mathbf{O_4}$) se obtiene la única recta perpendicular a una dada que pasa por un punto determinado. Si no se ha fijado el punto por el que debe pasar la perpendicular, simplemente se trata de plegar la recta l_1 sobre sí misma para obtener una perpendicular que, en este caso, no es única. Con el Axioma ($\mathbf{O_7}$) también conseguimos una recta perpendicular a l_2.
- **Tangente a una parábola por un punto**. Al aplicar el Axioma ($\mathbf{O_5}$), se construye una recta tangente a la parábola[6] de foco P_1 y directriz l_1 que pasa por el punto

[5] La denominación en inglés considerada en Hull (1995) es “crease-pattern”

[6] Dado un punto P, y una recta r con $P \notin r$, se define la parábola de foco P y directriz r como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del foco y de la directriz.

P_2. Se pueden dar tres opciones según la disposición de los dos puntos P_1 y P_2 y la recta l_1: si $d(P_1, P_2) < d(P_2, l_1)$, no hay solución; si $d(P_1, P_2) = d(P_2, l_1)$, el pliegue es único; y si $d(P_1, P_2) > d(P_2, l_1)$, el pliegue se puede realizar de dos formas obteniendo las dos rectas tangentes a la parábola que pasen por P_2.

- **Tangente común a dos parábolas**. Se consideran la parábola de foco P_1 y directriz l_1, y la parábola de foco P_2 y directriz l_2. Con el Axioma ($\mathbf{O_6}$) se obtiene una recta tangente común a ambas parábolas. De nuevo, según la distribución, pertenencia o igualdad entre los elementos, puede que no haya solución, que se construya una única recta, dos o tres tangentes comunes a ambas parábolas.
- **Tangente a una parábola y perpendicular a una recta dada**. Al aplicar el Axioma ($\mathbf{O_7}$), se construye una recta tangente a la parábola de foco P_1 y directriz l_1 que pasa por el punto P_2 que resulta perperdicular a l_2. Este pliegue tiene solución única, salvo en el caso en el que $l_1 \parallel l_2$, que no se puede realizar.

Se puede llevar a cabo, a mayores, un análisis sobre las construcciones auxiliares que proporciona la aplicación combinada y finita de los Axiomas de Hatori-Huzita, como la que realiza Gómez Villamayor (2017, "4.2" sección).

Los Axiomas ($\mathbf{O_1}$), ($\mathbf{O_2}$), ($\mathbf{O_3}$), ($\mathbf{O_4}$),($\mathbf{O_5}$) y ($\mathbf{O_7}$) equivalen a las construcciones mediante la regla no marcada y el compás, herramientas por excelencia de la Geometría Euclídea, en el sentido de que los puntos que se pueden obtener como intersección de rectas y circunferencias utilizando la regla y el compás son exactamente los mismos que se pueden obtener como intersección de los pliegues resultantes de aplicar combinaciones de estos axiomas. Por consiguiente, con el Axioma ($\mathbf{O_6}$) el Origami se convierte en una herramienta geométrica más potente que la regla y el compás, ya que es posible obtener puntos que no son construibles con las dos herramientas anteriores.

La base algebráica que se oculta tras estos resultados es la **Teoría de Galois**, la cuál proporciona mediante la conexión de la Teoría de Cuerpos y la Teoría de Grupos, el análisis de la resolubilidad de ecuaciones algebraicas con radicales. Así, el conjunto de números reales construibles queda determinado mediante la Teoría de Galois:

Teorema 1.3.1. *Un número real es construible mediante Origami si y solo si,*

$$[K : \mathbb{Q}] = 2^r 3^s,$$

donde K es el cuerpo de descomposición de su polinomio mínimo sobre $\mathbb{Q}$ y $0 \leq r, s \in \mathbb{Z}$.

Por consiguiente, la suma y la multiplicación de puntos origami-construibles son construibles, la raíz cuadrada de un número real origami-construibles es construible, y lo mismo ocurre con la raíz cúbica. En efecto, aplicar el Axioma ($\mathbf{O_6}$) se corresponde con resolver una ecuación cúbica.

T. Kawasaki (Japón, 1955), J. Maekawa (Japón, 1958) y T.Hull son tres de los matemáticos más relevantes que se han dedicado al estudio de las matemáticas que subyacen a las construcciones de Origami. Es posible encontrar publicaciones de matemáticos en las que se sintetizan los principales resultados de la Teoría de Galois tras la Papiroflexia y se caracteriza el conjuntos de puntos construibles mediante Origami, entre las que descataca el libro *Galois Theory* de David A. Cox, en el cual se puede encontrar, entre otros, el Teorema 1.3.1 junto con su demostración (Cox, 2004, Theorem 10.3.6). En particular, Roger C. Alperin publica en el año 2000 su artículo *A mathematical Theory of Origami Constructions and Numbers*, en el que se caracterizan los puntos del construibles por Origami como aquellos puntos del plano complejo $\mathbb{C}$ obtenidos tras la aplicación finita de los seis primeros axiomas, y cuyo enunciado fundamental es el siguiente Teorema (Alperin, 2000, Theorem 5.2):

Teorema 1.3.2. *The constructibles points in* $\mathbb{C}$*, obtained by using axioms* $(\mathbf{O_1})$-$(\mathbf{O_6})$*, starting with the numbers 0 and 1, is the field of origami constructible numbers,* $\mathbf{O}$*; it is the smallest subfield of* $\mathbb{C}$ *closed under square roots, cube roots and complex conjugation. This field* $\mathbf{O} = \mathbf{O}_R \oplus i\mathbf{O}_R$[7] *is also the set of conic constructible points. The field* $\mathbf{O}_R$ *is the smallest subfield of the reals closed under arbitrary (real) cube roots and square roots of its positive elements.*

En definitiva, el conjunto $\mathbf{O}$ de los puntos construibles mediante Origami es el menor subcuerpo de $\mathbb{C}$ cerrado por raíces cuadradas, cúbicas y conjugación compleja, también caracterizado por ser el conjunto de los puntos construibles por intersección de rectas construibles y cónicas construibles (Royo Prieto, 2002).

Esta sección finaliza con una cita de J. de la Peña (de la Peña, 2001, p. vii) en la que plantea una cuestión que pone de manifiesto la relación entre estas dos áreas:

"¿Quién ayuda a quién?¿La geometría a la papiroflexia, o al revés? La respuesta no siempre es sencilla."

[7] La notación es la seguida por R. Alperin en el desarrollo de dicho artículo.

Capítulo 2

La Papiroflexia en el ámbito educativo

2.1. La Papiroflexia como herramienta didáctica.

A partir de este capítulo se entenderá por **herramienta didáctica** aquellos recursos o materiales que complementan la tarea docente para favorecer el proceso de ensañanza y aprendizaje del alumnado. Son muchos los estudios que concluyen los beneficios psicológicos y pedagógicos de practicar la Papiroflexia en el ámbito educativo. Por ello, el Origami es una herramienta didáctica considerada en multitud de países.

Uno de los primeros pedagogos en reconocer su potencial fue el alemán Friedrich Fröbel (1782, Alemania), quien puso en práctica ejercicios de plegado de papel en la etapa de preescolar. La influencia frobëliana se extendió hasta Argentina, primer país occidental en incluir a principios del siglo XX el plegado de papel en el currículo escolar[1]. El educador argentino Pablo A. Pizurno (1865, Buenos Aires) fue un principal impulsor de esta reforma tras analizar el trabajo de Fröbel en su estudio sobre las técnicas educativas empleadas en Europa. Las ideas de F. Fröbel también se asentaron en el currículo educativo de Japón, del que el Origami pasó a formar parte [2] (Office of Educational Research and Improvement [OERI], 1987).

En lo que respecta a las habilidades desarrolladas con la práctica del Origami, puede destacarse la mejora de la percepción viso-espacial. Así lo afirman distintos autores que han llevado a cabo investigaciones en este campo. Se trata de una herramienta que, especialmente en la etapa preescolar y primaria, permite a los alumnos un desarrollo cognitivo notable debido a que su práctica implica la secuenciación y coordinación de la atención, la

[1]En el artículo de Polo Madueño (2010) se expone que en 1927, el Honorable Consejo General de Educación de la Provincia de Buenos Aires aprueba el libro del nuevo *Programa de Trabajos Manuales*, en el que se proponían en los grados de Primero y Segundo trabajos manuales con papel de acuerdo con los métodos del Plegado Fröbeliano.

[2]El currículo escolar japonés de los niveles de preescolar se organiza de forma no académica, y se centra en actividades que fomenten la conciencia sobre la salud, la vida social, la naturaleza, el lenguaje, la música y las habilidades. En esta última categoría se engloban aquellas sobre el plegado de papel.

memoria, la lógica y el razonamiento espacial. Esto deriva en un perfeccionamiento de destrezas como la motricidad fina y la coordinación viso-espacial (Rodríguez Riaño, 2006), esenciales en la maduración del alumnado durante esas etapas. En el estudio llevado a cabo por los autores Buitrón y Echeverría (2012), se pone en evidencia que el Origami provoca efectos positivos en la concentración y la atención de niños de 9 años de edad con dificultades de atención. Por otra parte, los autores Bombón (2012), Ayala (2013) y Mogollón (2016) profundizan en sus respectivos estudios sobre los beneficios en la motricidad fina de los niños, llegando a la conclusión de que la práctica de la Papiroflexia mejora notablemente la coordinación motora y las destrezas manuales en lo que perfecciona la precisión de los movimientos de manos y dedos. Otros resultados de los anteriores estudios afirman que al llevar a cabo actividades basadas en el plegado de papel, la motivación del alumnado se veía incrementada produciendo una mayor participación en las sesiones y una mayor constancia en el proceso de aprendizaje.

Aunque la gran parte de investigaciones se centran en los niveles educativos de preescolar y primaria, los beneficios de esta técnica son aplicables en todas las etapas de la educación secundaria, postobligatoria e incluso universitaria.

Uno de los estudios más recientes sobre las implicaciones de la Papiroflexia como herramienta didáctica es el llevado a cabo por Laura Azcoaga, descrito en su trabajo *El Origami como herramienta educativa* (Azcoaga, 2013). En este documento, la docente refleja los resultados recogidos durante siete años de estudio a experiencias docentes reales con Papiroflexia. Se pudo comprobar que la utilización de esta técnica en las aulas generaba un cambio en la receptividad de la materia despertando la atención y el interés del alumnado hacia la misma. Las actividades basadas en Papiroflexia implicaban un trabajo activo que requiere de la unión de memoria, pensamiento e imaginación. De esta manera, los estudiantes buscaban nuevas maneras de desarrollar las creaciones de origami, potenciando así su autoestima y creatividad.

Sin embargo, es claro que la útilización de la Papiroflexia como herramienta didáctica puede tener ciertos inconvenientes, especialmente cuando el alumno presenta una discapacidad motriz, sensorial o una deficiencia visual que dificulte la realización de las construcciones de plegado de papel. En estos casos no sería adecuado recurrir a la Papiroflexia ya que podría obstaculizar el aprendizaje del alumno.

El pensamiento más generalizado acostumbra a asociar la práctica del arte de la Papiroflexia con las asignaturas de materias mayormente artísticas, como puede ser la Educación Plástica. No obstante, es posible encontrar infinidad de disciplinas en las que aplicar esta herramienta didáctica para el aprendizaje de contenidos asociados a las mismas. Se exponen seguidamente algunos ejemplos que muestran su versatilidad:

- Física. Los procedimientos de plegado de papel pueden emplearse para fundamentar las explicaciones sobre el equilibrio de los cuerpos, la resistencia de un cuerpo a la carga y las fuerzas de resistencia, entre otros. En efecto, el Origami ha servido de inspiración a la hora de crear estructuras desplegables de satélites que reducen la cantidad de espacio necesario para ponerlos en órbita.

- Química. Las construcciones de Papiroflexia pueden servir para visualizar modelos moleculares, o la estructura de doble hélice del ADN.
- Dibujo Técnico. Es manifiesta la conexión con esta materia debido al componente geométrico de la Papiroflexia. Además, puede servir de gran apoyo en el estudio y visualización del Sistema Diédrico. Como ya se ha indicado en la Sección 1.3, el Origami resulta ser una herramienta más potente que la regla no marcada y el compás, permitiendo realizar más construcciones, por lo que puede dar lugar a una gran variedad de actividades en esta materia.
- Matemáticas. Indudablemente, la disciplina de la Matemática se presta a que muchos de sus contenidos sean trabajados y explicados mediante actividades de Papiroflexia. Por ser esta materia aquella que constituye el núcleo axial de este Trabajo Fin de Máster, se dedicará en exclusiva a la misma la siguiente sección.

Un aspecto a resaltar del empleo de la Papiroflexia como herramienta didáctica es que se trata de un recurso económico y accesible. Si bien es cierto que existe papel específico para la práctica de Origami, que varía según formas y colores, los procedimientos se pueden llevar a la práctica con un simple folio de papel. Por tanto, debido a la simplicidad de la técnica y a la baja demanda de recursos necesarios, la Papiroflexia se convierte en una herramienta didáctica de fácil aplicación en cualquier centro educativo.

Lamentablemente, la falta de formación de los docentes en la técnica del plegado de papel dificulta su puesta en práctica como herramienta didáctica en los centros educativos. Es esencial que el docente conozca la herramienta didáctica que va a utilizar, así como que sea capaz de aplicarla y adecuarla a la situación concreta de aprendizaje. No obstante, existen multitud de recursos como pueden ser cursos, talleres, tutoriales, libros o manuales al alcance de docentes y centros educativos para dar solución a esta falta de formación. En cierta manera, este Trabajo Fin de Máster pretende ser una primera aproximación a una guía que recoja técnicas y ejemplos de actividades que docentes de matemáticas puedan poner en práctica en un aula de un contexto real.

2.2. Papiroflexia en la Didáctica de la Matemática.

La Papiroflexia ofrece un gran potencial como herramienta didáctica de contenidos matemáticos debido a su estrecho vínculo con esta ciencia, como se ha descrito en la Sección 1.3. Una vez analizados los principales aspectos del Origami como recurso didáctico, esta sección se centra en su utilización como herramienta didáctica en la materia de Matemáticas.

Es clara la naturaleza manipulativa y experimental de la Papiroflexia. En consecuencia, puede resultar un recurso conveniente a la hora de impulsar un **Aprendizaje activo**, tan fundamental en el aprendizaje de la materia de matemáticas. Este enfoque, en el que el alumno participa de su propio proceso de aprendizaje mediante el desarrollo del conocimiento y la comprensión (Cambridge International, 2019), está íntimamente ligado con la **Teoría Cognitiva del desarrollo** de J. Piaget (1896-1980) y el **Aprendizaje por Descubrimiento** de J. Bruner (1915-2016), y puede abordarse a través de gran variedad de actividades de aprendizaje en las que esté involucrada la Papiroflexia. Como expone Hull al referirse al Origami como estrategia educativa, "*The main pedagogical approach behind (...) is one that is active and discovery-based*"(Hull, 2012, p. xiii).

Otro aspecto fundamental en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas es la visualización, entendida como la representación de un objeto matemático. A través del mapa de cicatrices resultante de un procedimiento, la Papiroflexia se convierte en un nexo perfecto entre la abstracción propia de los conceptos matemáticos y los pliegues concretos de la hoja de papel. Así, las matemáticas pasan de ser una cuestión abstracta que solo existe en la mente del estudiante, a transformarse en algo tangible que los alumnos y alumnas son capaces de manipular (Hull, 2012). Es considerable la cantidad de investigaciones publicadas que ponen de manifiesto la mejora de la visión espacial, esencial en muchas áreas de las matemáticas y otras ciencias, mediante la práctica de actividades basadas en Origami (Arıcı & Aslan-Tutak, 2013) (Boakes, 2009) (Cakmak, Isiksal & Koc, 2013)(Barasona Villarejo & Gutiérrez Rubio, 2015). Estos estudios también exponen el desarrollo notable que experimentan los alumnos en el razonamiento geométrico y la comprensión de conceptos abstractos. En la investigación llevada a cabo por Robichaux y Rodrigue (2003), se pone de manifiesto que al trabajar en actividades basadas en Papiroflexia, los estudiantes veían beneficiadas sus habilidades matemáticas, como la resolución de problemas, la búsqueda o aplicación de reglas y algorítmos, o la utilización del lenguaje matemático.

Si bien es posible hallar un sinfín de estudios que respaldan estos beneficios, la mayor parte de ellos se centran en las etapas de Educación Infantil, Primaria y Secundaria, resultando complejo encontrar alguno dirigido a Bachillerato. Con todo, la Papiroflexia se convierte en un recurso manipulativo excepcional para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, por ser un material tangible que enriquece el proceso a la vez que permite la materialización y representación de los conceptos matemáticos.

En un primer propósito de idear actividades de Papiroflexia para trabajar contenidos de Matemáticas, es posible que se sopese, como única opción, los de la materia de Geometría por ser esta última asociada con el Origami de forma intuitiva (Hull, 1995). Sin embargo, son muchos los autores que han mostrado que la Papiroflexia no solo puede llevarse a cabo para trabajar la Geometría, sino que puede emplearse también en otras áreas de las matemáticas, de muy diversos grados de complejidad[3]: desde las fracciones y el Álgebra, pasando por la Combinatoria, la Teoría de Números y la Topología, hasta el Cálculo Infinitesimal y la Geometría Proyectiva. A continuación, se listan ejemplos de contribuciones de ciertos autores en las que es posible encontrar procedimientos de plegado de papel relacionados con el aprendizaje de matemáticas en los diversos campos mencionados

[3]En concreto, el Teorema 1.3.1 puede estudiarse en la asignatura Estructuras Algebraicas del 3º curso del Grado en Matemáticas.

previamente:

- ***Geometric Exercises in Paper Folding*** de T. Sundara Row. (Sundara Row, 1917)
  Este libro se trata, probablemente, de la obra clásica por excelencia en la que el matemático indio T. Sundara Row recoge algunas construcciones de Papiroflexia que pueden ser adaptadas a niveles de Secundaria y Bachillerato.

- ***Mathematics through Paper Folding*** de Alton T. Olson. (Olson, 1976)
  En este libro el autor recopila numerosos ejercicios de plegado de papel dirigidos a los diferentes niveles educativos, trabajando la geometría del círculo y de los polígonos, las simetrías de los procedimientos y presentando ejercicios sobre álgebra y sobre cónicas.

- ***Matemáticas y Papiroflexia*** de Jesús de la Peña Hernández. (de la Peña Hernández, 2001)
  En esta obra editada para la Asociación Española de Papiroflexia, J. de la Peña recoge un sinfín de procedimientos de plegado de papel con los que trabajar distintos contenidos relacionados con las matemáticas y de diversos niveles de complejidad, haciendo especial hincapié en la demostración rigurosa de la validez de los mismos.

- ***Origamics. Mathematical Explorations through Paper Folding*** de Kazuo Haga. (Haga, 2008)
  Este libro se trata de la traducción al inglés de los procedimientos de Origami descritos por el japonés K. Haga, desde una perspectiva geométrica, que destacan por su nivel de sencillez y fácil ejecución.

- ***Project Origami: Activities for Exploring Mathematics*** de Thomas Hull. (Hull, 2012)
  T. Hull realiza en este libro una revisión de las actividades propuestas por él mismo, desde una perspectiva didáctica, en las que describe posibles tareas y situaciones de aprendizaje mediante plegado de papel. Estas van desde la más básica geometría hasta el estudio de homomorfismos.

No obstante, la confianza depositada por los docentes de matemáticas en esta herramienta didáctica, los que muestran interés y dudas a partes iguales entre aquellos que no son especialistas en esta técnica, es clave para su aplicación en el aula. Varias investigaciones, como la realizada por Arslan y Işıksal-Bostan (2016) sobre las creencias de los docentes de Matemáticas en el uso del Origami en el aula, concluyen que los profesores consideran que la Papiroflexia resulta beneficiosa y efectiva a la hora de utilizarse en la enseñanza de las Matemáticas. Para el docente, la complejidad reside, entonces, en crear las situaciones de aprendizaje y enseñanza adecuadas a cada nivel y grupo de alumnado en las que se desempeñen actividades de plegado de papel. Como ha sido comprobado por muchos profesores, al proponer actividades de Origami en el aula de matemáticas se logra la implicación plena del alumno (Barasona Villarejo & Gutiérrez Rubio, 2015), consiguiendo despertar su motivación y su interés, además de una rápida comprensión de las nociones matemáticas (Azcoaga, 2013).

En suma, la Papiroflexia es una herramienta didáctica beneficiosa tanto para el alumnado como para el docente en el proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas a lo largo de las distintas etapas educativas. Como expone Haga (2008, p.V), "*The manipulative nature of origami allows much experimenting, comparing, visualizing, discovering and conjecturing.*"

2.3. Contribución a las Competencias Clave.

Según lo establecido en el *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obigatoria y del Bachillerato*, el diseño de las actividades basadas en Papiroflexia propuestas en el Capítulo 3 estará centrado en el fortalecimiento de las siete competencias clave.

Se detalla, a continuación, de qué manera es posible trabajar la consecución de cada una de las competencias durante el desarrollo de actividades de aprendizaje y enseñanza de la materia de Matemáticas basadas en Papiroflexia, en cumplimiento con lo estipulado en la *Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato.*

- **(CCL) Comunicación lingüística**.
  Esta competencia se trabaja en el momento en el que los alumnos tienen que expresar sus razonamientos matemáticos, sus ideas sobre la resolución de tareas o el proceso seguido para llevar a cabo una construcción de Origami de una forma clara y con el lenguaje matemático adecuado, tanto de forma oral como de forma escrita. De igual manera, el alumnado desarrolla la capacidad de lectura e interpretación de los enunciados e instrucciones de los procedimientos de plegado de papel. En todo momento se recurrirá al diálogo en el aula como herramienta para manifestar ideas o contrastar opiniones mediante una correcta expresión oral, especialmente durante las metodologías grupales o durante las exposiciones orales.

- **(CMCT) Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.**
  Como es de suponer, esta será la competencia principalmente fortalecida durante la puesta en práctica de las actividades, puesto que el contenido que se trabaja corresponde a las asignaturas de la materia de Matemáticas. La capacidad de abstracción que requieren los conceptos se verá materializada en los procedimientos de Papiroflexia. El aprendizaje matemático estará marcado por las demostraciones de la base matemática de cada procedimiento, con lo que se persigue que el alumnado adquiera consciencia sobre la importancia del pensamiento matemático y de la capacidad analítica en diversas situaciones de la realidad. Por ello, será fundamental que el alumnado adquiera la destreza de interpretar los distintos métodos y su relación con

los contenidos, para después poder modelizar ciertos procedimientos matemáticos, mediante la aplicación y búsqueda de reglas o patrones, y que lleven al estudiante a la reflexión sobre los mismos.

- **(CD) Competencia digital.**
  Se fomenta el uso de las TIC como herramienta didáctica. Muchos de los procedimientos de Papiroflexia se presentarán apoyados en representaciones mediante software, como puede ser GeoGebra. Asimismo, habrá ocasiones en las que el estudiante deberá recurrir a recursos mutimedia y audiovisuales, para la creacción de contenido digital o vídeos en los que expongan resultados o procedimientos de Origami, de una forma creativa y recurriendo a los principales recursos tecnológicos (por ejemplo, Power Point, Word, etc). En ciertas ocasiones, los estudiantes deberán realizar una búsqueda crítica de fuentes y un adecuado procesamiento de la información. Es importante que el alumnado adquiera un correcto uso de las herramientas digitales y las integre en su vida cotidiana.

- **(CAA) Aprender a aprender.**
  Para la consecución de esta competencia se va a potenciar el autoconocimiento de los estudiantes, de manera que sean conscientes de sus puntos fuertes en la toma de decisiones y en la puesta en práctica de estratégias y métodos que favorezcan su aprendizaje. Un factor muy importante será estimular la autonomía y la superación de posibles obstáculos por parte del alumnado. Se insiste en la reflexión y la conciencia de los procedimientos de Origami y razonamientos matemáticos llevados a cabo. Por todo ello, las actividades basadas en Papiroflexia que se van a diseñar buscan despertar en el alumnado la motivación que le impulse a perseguir su propio aprendizaje, siendo protagonista del mismo y constante en el proceso.

- **(CSC) Competencias sociales y cívicas.**
  Esta competencia se convierte en otra de las principales, ya que se fomenta el respeto y la cooperación como camino para llegar conjuntamente a soluciones, así como el uso del diálogo para resolver los conflictos que puedan surgir en el aula. Se tendrá en cuenta la participación activa del alumnado en las actividades que de lugar a un buen ambiente de trabajo. Las metodologías propias de la Papiroflexia, como aquellas basadas en el aprendizaje colaborativo, serán un eje fundamental de esa propuesta. De esta manera, es esencial que los alumnos, al trabajar en grupo, consideren una adecuada organización del mismo, tomando de su papel individual en la consecución de resultados comunes, que les oriente a participar de una manera activa y constructivista en el proceso.

- **(SIE) Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.**
  Es de vital importancia que a la hora de enfrentarse a un problema, el alumno tome iniciativa y sepa utilizar los recursos de los que dispone. Así, esta competencia se impulsa durante la puesta en práctica de todas las actividades, fomentando las actitudes de confianza frente a la resolución de problemas, la búsqueda de nuevos procedimientos de plegado y la capacidad de seguir instrucciones. Considerando

que las actividades están propuestas para los niveles de educación postobligatoria de Bachillerato, se espera del alumnado asumir la responsabilidad y la actitud de constancia en el trabajo apropiados.

- **(CEC) Conciencia y expresiones culturales.**
  Para la consecución de esta competencia se va a recalcar el origen histórico y cultural del arte del Origami, enfatizando en su base matemática y su vínculo con la ciencia y el arte. En lo referente a este aspecto, el alumnado podrá advertir a la misma como herramienta de construcciones geométricas. El empleo del lenguaje universal del origami utilizado en los procedimientos será otro matiz a destacar. Por otro lado, el trabajo y las construcciones del alumnado deberán guardar un cierto grado de sentido estético.

2.4. Metodologías propias de la Papiroflexia.

A la hora de utilizar la Papiroflexia como recurso didáctico en el aula de matemáticas, es de especial importancia la meditación sobre aquella metodología que va a ser empleada durante las actividades basadas en plegado de papel. Las metodologías elegidas deben ser las adecuadas para permitir al alumnado estimular todo su desarrollo cognitivo y fomentar el desarrollo competencial. Al mismo tiempo, han de posibilitar al docente el buen control del proceso de aprendizaje y enseñanza del grupo de alumnos propiciando un correcto clima de aula. Así, K. Ayala (2013) considera que los dos tipos de metodologías más apropiadas para el trabajo de actividades de aprendizaje basadas en Papiroflexia son las Metodologías Individuales y las Metodologías Grupales.

Metodologías Individuales.

Cuando el estudiante trabaja individualmente, se produce la autorregulación del propio proceso de aprendizaje. El alumno podrá detectar cuáles son las dificultades con las que se encuentra en el camino y deberá tomar deciciones personales teniendo en cuenta sus capacidades en relación a la materia que se está trabajando y a la carácterística de la tarea, que le permitan superarlas de forma autónoma. Si se considera la figura del docente, esta metodología le permitirá identificar los obstáculos que puedan surgir, así como los errores individuales de cada estudiante pudiendo proporcionar una atención personalizada a cada uno de ellos.

Metodologías Grupales.

Cuando el alumnado trabaja de forma grupal se vuelve fundamental el aprendizaje social que se constituye como base de la socialización e integración que se forman entre los miembros del grupo, favoreciendo la adquisición de competencias sociales y cívicas. Las oportunidades de aprendizaje van a aparecer en el momento en el que se ponen de manifiesto las debilidades y fortalezas de cada componente del grupo. La **Teoría del Conflicto**

Sociocognitivo es otro rasgo sustancial de estas metodologías. Como define N. Roselli (1999, p.150), el conflicto sociocognitivo es "...*el rechazo explícito de un razonamiento o aporte cognitivo ajeno, (...), la introducción de un punto de vista distinto - no necesariamente opuesto - respecto al preexistente. Tanto el rechazo como la nueva propuesta deben estar cognitivamente fundadas...*" . Cuando esta situación se da entre los distintos alumnos de un mismo grupo entre los que existe un desacuerdo, el primer paso será considerar el punto de vista de la otra persona. Es entonces cuando aparece la necesidad de construir un camino conjunto hacia la solución cuyo beneficio se plasma en la restructuración cognitiva de los participantes. Por otra parte, en la búsqueda de la solución, cada estudiante ha de ser consciente de la responsabilidad individual que adquiere como miembro del grupo con un objetivo común, conviertiéndose estas en metodologías activas y dinámicas.

En lo respectivo a la atención a la diversidad, es esencial que la formación de grupos se realice de manera que en cada grupo el alumnado sea heterogéneo y mixto, en el sentido de que aparezcan distintos niveles de competencia para que se produzca el aprendizaje por desequilibración. El docente adquiere una función relevante en esta elección por su conocimiento y valoración de cada alumno.

Capítulo 3

Actividades de Aprendizaje y Enseñanza basadas en Papiroflexia en Bachillerato

Llegamos, eventualmente, al objetivo último de este Trabajo Fin de Máster: el diseño de actividades para el aprendizaje de las matemáticas basadas en la Papiroflexia y contextualizadas en el aula de Bachillerato. El proceso que se ha seguido para la selección y el diseño de las actividades que se describirán a lo largo de este capítulo ha supuesto la reflexión sobre la adecuación de los contenidos del currículo de matemáticas de Bachillerato, las metodologías que se van a emplear y los procedimientos e instrumentos de evaluación de las mismas a la utilización de la Papiroflexia como herramienta didáctica.

3.1. El currículo de Matemáticas en Bachillerato.

El currículo correspondiente a la materia de Matemáticas en las enseñanzas postobligatorias de bachillerato está estipulado en la *ORDEN EDU/363/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo del bachillerato en la Comunidad de Castilla y León.*

En esta etapa educativa, la materia de matemáticas se organiza en dos modalidades: Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales y Matemáticas. Cada una de estas se dividen, a su vez, en dos asignaturas (I y II) correspondientes al primer curso de Bachillerato y al segundo curso de Bachillerato. Para las cuatro asignaturas, la organización horaria es de cuatro periodos lectivos de 50 minutos semanales.

Las dos asignaturas de cada itinerario son dependientes entre sí. Esto supone que para cursar la asignatura II de cada modalidad en el segundo curso de Bachillerato, es necesario haber cursado la asignatura I de esa misma modalidad en el primer curso de Bachillerato.

- **(MACSS) Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales.**
  La modalidad de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales se oferta en el Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales, en el itinerario de Ciencias Sociales.

  El fin último de esta asignatura es la aplicación de las matemáticas a la modelización y análisis de sucesos sociales de la realidad. Se trata entonces, de poner los contenidos (estadística y probabilidad, función derivada, estudio de funciones,etc.) y procedimientos (estimación, análisis, medida, cálculo) matemáticos junto con las estrategias relativas a los quehaceres matemáticos (interpretación, análisis, selección y reflexión sobre datos y resultados) al servicio de la interpretación y el análisis de estos fenómenos. En ambos cursos, la materia estará organizada en cuatro bloques:

  - Bloque 1. Procesos, Métodos y Actitudes.
  - Bloque 2. Números y Álgebra.
  - Bloque 3. Análisis.
  - Bloque 4. Estadística y Probabilidad.

- **(Mat) Matemáticas.**
  La modalidad de Matemáticas se oferta en el Bachillerato de Ciencias. El objetivo de esta asignatura es que el alumnado adquiera los contenidos y procedimientos matemáticos necesarios para el desarrollo de los quehaceres y habilidades matemáticas desde una perspectiva más científica, aunque de igual forma aplicados a la interpretación y análisis de la realidad. En ambos cursos, la materia estará organizada en cinco bloques:

  - Bloque 1. Procesos, Métodos y Actitudes.
  - Bloque 2. Números y Álgebra.
  - Bloque 3. Análisis.
  - Bloque 4. Geometría
  - Bloque 5. Estadística y Probabilidad.

En vista del potencial de la Papiroflexia como herramienta para realizar demostraciones de ciertos resultados, cabe mencionar lo establecido en el currículo de las asignaturas de Matemáticas I y II en lo referente a este aspecto. Los siguientes contenidos pertenecen al Bloque 1, el cual adquiere un carácter transversal a lo largo del curso académico:

- Iniciación a la demostración en matemáticas: métodos, razonamientos, lenguajes, etc.
- Métodos de demostración: reducción al absurdo, método de inducción, contraejemplos, razonamientos encadenados, etc.
- Elaboración y presentación oral y/o escrita de informes científicos sobre el proceso seguido en la demostración de un resultado.

Una vez realizada una revisión de los contenidos de las cuatro asignaturas anteriores, se lleva a cabo un análisis sobre aquellos que se prestan a ser trabajados por medio de una actividad basada en Papiroflexia. Se valoran los siguientes:

CONTENIDOS	**ASIGNATURA**	**BLOQUE**
Números racionales e irracionales.	MACSS I, MAT I	Bloque 2
Polinomios. Descomposición en factores. Ecuaciones lineales, cuadráticas y reducibles a ellas.	MACSS I	Bloque 2
Programación lineal bidimensional. Región factible.	MACSS II	Bloque 2
Interpretación geométrica de la recta tangente a una función en un punto.	MACSS I, MACSS II	Bloque 3
Números reales: necesidad de su estudio para la comprensión de la realidad.	MAT I	Bloque 2
Números complejos.	MAT I	Bloque 2
Sucesiones numéricas.	MAT I	Bloque 2
Resolución de ecuaciones algebraicas.	MAT I	Bloque 2
Interpretación geométrica de la derivada de la función en un punto. Recta tangente y normal.	MAT I	Bloque 3
Razones trigonométricas y fórmulas trigonométricas. Resolución de Triángulos: Teorema de Pitágoras, Teoremas del seno y del coseno.	MAT I	Bloque 4
Vectores libres en el plano. Operaciones con vectores.	MAT I	Bloque 4
Geometría métrica plana.	MAT I	Bloque 4
Lugares geométricos del plano. Cónicas.	MAT I	Bloque 4

Cuadro 3.1: Contenidos adecuados para trabajar con Papiroflexia.

De entre todos ellos se ha seleccionado un conjunto con el que proponer el diseño de cuatro actividades de aprendizaje y enseñanza.

3.2. Diseño de Actividades.

Para cada una de las actividades que se presentarán a continuación, se seguirá la siguiente estructura:

A. **Contenidos:** se va a exponer la teoría correspondiente al concepto o procedimiento matemático establecido en el currículo de Matemáticas de Bachillerato que se trabaja con el desarrollo de la actividad. Aparecen enunciadas las definiciones y los resultados más relevantes que después se trabajarán en la actividad. Se obvian las demostraciones de aquellos resultados que son o bien triviales, o bien exceden el nivel de matemáticas que se considera adquirido en los niveles de Bachillerato.

B. **Procedimiento de papiroflexia:** se explicarán con detalle los procedimientos de Papiroflexia que desarrollan esos contenidos. Se debe aclarar que el objetivo final de estos procedimientos no es la construcción de una figura o un objeto, sino el estudio de las propiedades o resultados que puedan obtenerse del mapa de cicatrices resultante tras la realización de los pliegues.

C. **Planteamiento:** en este apartado se especifican los cursos y asignaturas en los que se puede llevar a cabo la actividad, situándola dentro de la secuenciación de una posible unidad didáctica de los mismos. Además, se establecen los conocimientos previos que será necesario que el alumnado conozca en cada caso, correspondientes a cursos anteriores.

D. **Metodología y Recursos:** se detallan la metodología y recursos utilizados en la actividad describiendo cómo se implementarán en el aula.

E. **Temporalización y Situaciones de Aprendizaje:** se describe la temporalización elegida para el desarrollo de la actividad, así como la secuenciación de los contenidos y las actividades de aprendizaje y enseñanza que se van a plantear en cada una de las sesiones.

F. **Evaluación:** por último, se precisarán los instrumentos y procedimientos que se van a utilizar en la evaluación del aprendizaje del alumnado por medio de la actividad. Por otra parte, la evaluación del diseño de la misma se realizará por medio de una rúbrica que se puede encontrar en el ANEXO I.

Se debe indicar que la gran parte de los procedimientos de Papiroflexia que se describen no son originales de la autora, sino que han sido tomados de algunas obras previamente publicadas, como son las enumeradas en la Sección 2.2. Por tanto, el trabajo del diseño de cada una de las actividades de aprendizaje y enseñanza se ha centrado en la propuesta de intervención en el aula como parte de una Unidad Didáctica concreta sobre los contenidos específicos de las asignaturas de la materia de Matemáticas en Bachillerato. De igual modo, en la búsqueda de estrategias metodológicas y de evaluación que propicien situaciones de aprendizaje adecuadas para favorecer el desarrollo competencial del alumnado y mejorar su aprendizaje.

La diversidad de metodologías utilizada en el diseño de las actividades de aprendizaje y enseñanza basadas en Papiroflexia está enmarcada en el enfoque **constructivista**, de forma que el docente plantee conflictos cognitivos que lleven al alumno a reestructurar sus esquemas mentales, adquiriendo el papel de guía del aprendizaje del alumnado. Por otro lado, las metodologías elegidas, así como las actividades de aprendizaje y enseñanza propuestas, seguirán la línea del trabajo competencial, procurando que el alumno se convierta en el protagonista de su propio proceso de aprendizaje. Para cada actividad, las metodologías serán seleccionadas con el objetivo de mantener la motivación del alumnado, de forma que construya su nuevo conocimiento sobre el ya asimilado, y adquieran una mayor capacidad de abstracción.

En el momento de idear las situaciones de aprendizaje, se ha tratado de estimular el desarrollo competencial del alumnado con la intención de alejarse de la mera repetición o mecanización de ejercicios o algoritmos. Por ello, se considera que las tareas propuestas se podrían categorizar en los niveles 3 y 4 de la clasificación[1] presentada por Smith y Stein (1998), correspondientes a un alto nivel de demanda cognitiva. En muchos de los casos, las tareas propuestas consisten en llevar a cabo demostraciones de algunos resultados o teoremas matemáticos, labor que no siempre agrada a los estudiantes. Al realizar las demostraciones con la ayuda de la Papiroflexia, el tratamiento formal de los resultados se ve representado en el papel y resulta más familiar al alumno. Se busca con ello despertar el interés en la investigación matemática del alumnado y el cultivo del talento matemático. Siguiendo esta línea, predominan las tareas de respuesta abierta que permitan al estudiante conjeturar sobre los resultados a la vez que sirvan como medida de atención a la diversidad al posibilitar distintas respuestas.

Antes de poner en práctica en el aula alguna de las actividades siguientes, sería conveniente indagar sobre el nivel de destreza en la técnica de la Papiroflexia del que dispone el grupo de alumnos con el que se va a implementar. En caso necesario, se recomienda dedicar una primera sesión previa a la intervención en la que se de a conocer al alumnado esta técnica, al mismo tiempo que se familiaricen con los Axiomas de Hatori-Huzita, ya que serán los pliegues que se aplicarán en las construcciones de Papiroflexia.

Actividad 1. Raíces de polinómios de grado n $\leq$ 3.

A. Contenidos

- Polinomios. Descomposición en factores.
- Ecuaciones lineales, cuadráticas y cúbicas.

<u>Desarrollo de Contenidos.</u>

Definición 3.2.1. *Un* ***monomio*** *es un producto de números reales e indeterminadas. El coeficiente de un monomio es el número real que multiplica a la indeterminada o indeterminadas. La indeterminada o indeterminadas forman la parte literal del monomio.*

Definición 3.2.2. *Un* ***polinomio*** *es una suma de monomios. El grado de un polinomio corresponde al grado del monomio de mayor grado del mismo. Un polinomio $P(x)$ de grado*

[1]Según Smith y Stein, los cuatro niveles de tareas matemáticas según su demanda cognitiva son:

1. Tareas de Memorización.
2. Tareas de Procedimientos sin conexiones a conceptos.
3. Tareas de Procedimientos con conexiones a conceptos.
4. Tareas de “Hacer Matemáticas”.

$n \in \mathbb{N}$, en la indeterminada x se expresa de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

donde el coeficiente $a_i \in \mathbb{R}$, para $0 \leq i \leq n$, es el coeficiente del monomio de grado i y $a_n \neq 0$.

Definición 3.2.3. *Dado un polinomio P(x), un número r es **raíz** (también se denomina cero) del polinomio $P(x)$ si el valor numérico de $P(x)$ en r es cero, es decir, si se cumple $P(r) = 0$. En este caso,*

$$P(x) = (x - r)Q(x),$$

siendo $Q(x)$ un polinomio de grado $n - 1$ con coeficientes en $\mathbb{R}$. Se dice que el binomio $(x - r)$ es un factor de $P(x)$.

Teorema 3.2.1. *Dado un polinomio $P(x)$ de grado $n \geq 1$ con coeficientes en $\mathbb{R}$, entonces $P(x)$ tiene a lo sumo n raíces reales, contando su multiplicidad.*

Definición 3.2.4. *Un polinomio $P(x)$ de grado $n \geq 1$ es **irreducible** en $\mathbb{R}$ si no puede descomponerse en factores de grado menor que n. Dicho de otra forma, si $P(x)$ no tiene raíces reales.*

Corolario 3.2.1. *Los polinomios irreducibles con coeficientes en $\mathbb{R}$ son los de grado uno y los de grado dos sin raíces reales.*

Definición 3.2.5. *La factorización algebraica de un polinomio es su expresión como producto de polinomios irreducibles.*

Definición 3.2.6. *Dado un polinomio $P(x)$ de grado $n \geq 1$, resolver una **ecuación polinómica** de la forma $P(x) = 0$ consiste en calcular aquel o aquellos valores r_k que debe de tomar la variable x para que al calcular $P(r_k)$ se cumpla la igualdad anterior.*

Es decir, para buscar las raíces de un polinomio $P(x)$ se debe resolver la ecuación $P(x) = 0$. Dependiendo del grado del polinomio $P(x)$, se pueden aplicar distintas técnicas para encontrar las soluciones de una ecuación polinómica. Esta actividad estará centrada en la resolución de ecuaciones lineales, cuadráticas y ecuaciones cúbicas. El método de resolución que se va a utilizar es el denominado *Método de Lill*, descrito por Eduard Lill, el cual presenta un método gráfico de cálculo de raíces reales(Lill, 1867) y complejas (Lill, 1868) de polinomios de cualquier grado.

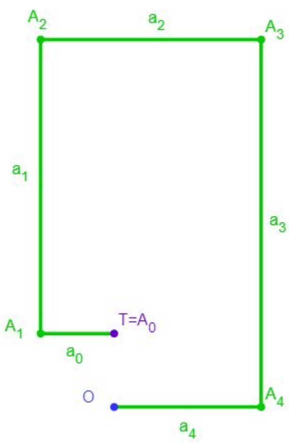
<u>Método de Lill.</u>

Dado un polinomio de grado $n \geq 1$ en la variable x con coeficientes reales $a_i \in \mathbb{R}$, para $0 \leq i \leq n$,

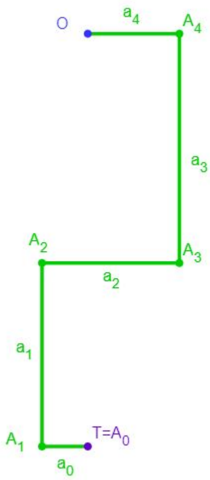
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

el Método de Lill comienza con la codificación del polinomio como un camino en la expresión de una línea poligonal en el plano cartesiano: se toma el punto origen del plano,

$O(0,0)$ y se avanza $a_n \neq 0$ unidades hasta el punto $A_n(a_n, 0)$ hacia la derecha sobre el eje de abscisas. Se realiza un giro de 90° en sentido antihorario y se recorren a_{n-1} unidades hasta el punto $A_{n-1}(a_n, a_{n-1})$. Se itera el proceso tomando cada uno de los coeficientes[2] del polinomio $P(x)$ en orden descendente según su subíndice, hasta el punto final que se denotará por $T = A_0$. De esta forma, se obtiene una línea poligonal formada por $n+1$ segmentos que representa al polinomio $P(x)$ a partir de sus coeficientes.



Camino codificado de un polinomio de grado 4 con $a_i > 0$ $\forall i$.



Camino codificado de un polinomio de grado 4 con $a_3 < 0$.

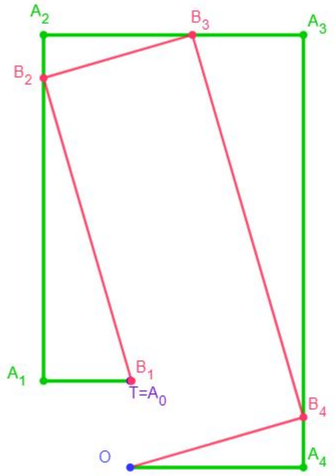
El segmento inicial se denotará como $\overline{OA_n}$, y los n segmentos[3] restantes como $\overline{A_iA_{i-1}}$, para $1 \leq i \leq n$. Por como se ha definido el proceso iterativo, dos segmentos consecutivos (aquellos en los que el punto extremo final del primero sea el extremo inicial del segundo) son perpendiculares.

El segundo paso del Método de Lill consiste en construir como sigue un camino auxiliar que se denominará **Camino de Lill**: se comienza de nuevo a partir del punto origen del plano cartesiano $O(0,0)$. Después, se toma un punto B_n perteneciente a la recta r_n que resulta de la prolongación del segmento $\overline{A_nA_{n-1}}$, de forma que se obtiene el primer segmento del Camino de Lill, el segmento $\overline{OB_n}$. Ahora, se selecciona otro punto B_{n-1} perteneciente a la recta r_{n-1} que resulta de la prolongación del segmento $\overline{A_{n-1}A_{n-2}}$, y que dará lugar al segmento $\overline{B_nB_{n-1}}$ de forma que este último sea perpendicular al segmento $\overline{OB_n}$.

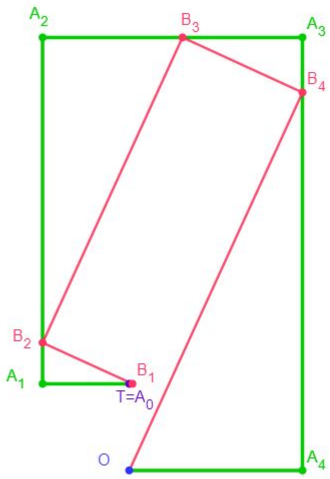
Iterando el proceso de forma que se tome cada $B_j \in r_j$, $2 \leq j \leq n$, donde r_j es la prolongación del segmento $\overline{A_jA_{j-1}}$, se obtiene una línea poligonal de n segmentos que cumplen que $\overline{OB_n} \perp \overline{B_nB_{n-1}}$ y $\overline{B_jB_{j-1}} \perp \overline{B_{j-1}B_{j-2}}$ para $j \in \{3, ..., n\}$. Este camino queda perfectamente determinado al tomar el punto final B_1 como $B_1 = T = A_0$.

[2] Si alguno de los coeficientes a_i con $0 \leq i \leq n$ tiene signo negativo, entonces se avanza en sentido opuesto al determinado por el giro de 90ž en sentido antihorario, pero en la misma dirección. Si alguno de los coeficientes a_i con $0 \leq i \leq n-1$ es igual a cero, no se avanza pero se continúa realizando el giro de 90ž en el sentido correspondiente.

[3] En el caso de que $a_i = 0$ para algún $i \in \{0, ..., n-1\}$, el segmento que tenga al punto A_i como extremo final degenerará en el punto A_{i+1}, pero esto no es impedimento para la construcción del camino.



Ejemplo 1 de Camino de Lill.



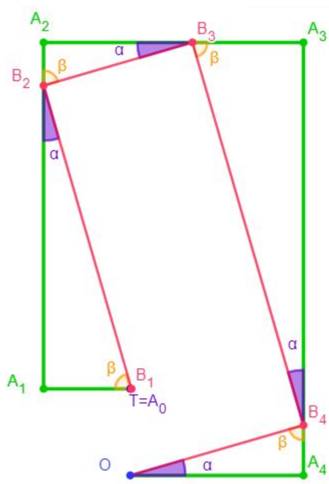
Ejemplo 2 de Camino de Lill.

Proposición 3.2.1. ***Proposición de Lill.*** *Dado un polinomio de grado $n \geq 1$ en la variable x con coeficientes reales $a_i \in \mathbb{R}$ para $0 \leq i \leq n$, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, y sean $\{O, A_n, A_{n-1}, ..., A_1, A_0\}$ los $n+1$ puntos que determinan el camino codificado por sus coeficientes a_i, y $\{O, B_n, B_{n-1}, ..., B_1\}$ los n puntos que determinan un camino de Lill del polinomio $P(x)$, entonces:*

$$r = -tan(\alpha)$$

siendo $\alpha = \angle A_n, O, B_n \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, es una raíz de $P(x)$.

Demostración. Dado el polinomio $P(x)$, el camino codificado y el camino de Lill dan lugar a una sucesión de triángulos rectángulos semejantes que se puede observar en la imagen:



Ahora, se considera la relación trigonométrica $tan(\alpha) = \dfrac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)}$ y tomando en cada paso $k \in \{n, ..., 2\}$ el triángulo rectángulo de vértices $\triangle B_k A_{k-1} B_{k-1}$, a la hora de calcular la tangente de $\alpha = \angle A_{k-1} B_k B_{k-1}$ como el cociente entre la longitud del cateto opuesto a α

y el cateto adyacente a α se obtiene lo siguiente:

$$Paso\ \ n \qquad -r = tan(\alpha) = \frac{|\overline{A_nB_n}|}{a_n} \quad \Rightarrow \quad -a_nr = |\overline{A_nB_n}|$$

$$Paso\ \ n{-}1 \qquad -r = tan(\alpha) = \frac{|\overline{A_{n-1}B_{n-1}}|}{a_{n-1} - |\overline{A_nB_n}|} = \frac{|\overline{A_{n-1}B_{n-1}}|}{a_{n-1} + a_nr} \quad \Rightarrow \quad -a_{n-1}r - a_nr^2 = |\overline{A_{n-1}B_{n-1}}|$$

$$Paso\ \ n-2 \qquad -r = tan(\alpha) = \frac{|\overline{A_{n-2}B_{n-2}}|}{a_{n-2} - |\overline{A_{n-1}B_{n-1}}|} = \frac{|\overline{A_{n-2}B_{n-2}}|}{a_{n-2} + a_{n-1}r + a_nr^2}$$

$$\Rightarrow \quad -a_{n-2}r - a_{n-1}r^2 - a_nr^3 = |\overline{A_{n-2}B_{n-2}}|$$

$$\cdots$$

$$Paso\ \ 2 \qquad -r = tan(\alpha) = \frac{|\overline{A_1B_1}|}{a_1 - |\overline{A_2B_2}|} = \frac{a_0}{a_1 + a_2r + \cdots + a_{n-1}r^{n-2} + a_nr^{n-1}}$$

$$\Rightarrow \quad (a_1 + a_2r + \cdots + a_{n-1}r^{n-2} + a_nr^{n-1})(-r) = a_0$$

$$\Rightarrow \quad a_1r + a_2r^2 + \cdots + a_{n-1}r^{n-1} + a_nr^n = -a_0$$

$$\Rightarrow \ P(r) = 0.$$

□

Observaciones:

I. Dado un polinomio $P(x)$ como el definido previamente, existirán tantos Caminos de Lill de $P(x)$ como raíces reales tenga este polinomio.

II. Cada Camino de Lill del polinomio $P(x)$ puede considerarse como la codificación de un nuevo polinomio $Q(x)$ que cumple

$$P(x) = Q(x)(x - r),$$

siendo r la raíz real que se obtiene del Camino de Lill considerado.

III. Por lo establecido en el punto anterior, partiendo de un polinomio $P(x)$ y aplicando reiteradamente el Método de Lill a los Caminos de Lill obtenidos, se obtiene la factorización algebraica del polinomio inicial.

IV. Se puede tomar $r = -m$, donde m es la pendiente de la recta que resulta de la prolongación del segmento $\overline{OB_n}$ ya que

$$-m = -\frac{|\overline{A_nB_n}|}{a_n} = -tan(\alpha) = r.$$

B. Procedimiento con Papiroflexia.

La Papiroflexia es una herramienta que permite resolver ecuaciones polinómicas de primer, segundo y tercer grado por lo expuesto en la Sección 1.3. Por otra parte, la matemática italiana Margherita Beloch (Italia, 1879) se percató de la potencialidad que tenía esta herramienta en la resolución de ecuaciones cúbicas mediante el Método de Lill. La actividad diseñada se va a centrar en la resolución de ecuaciones polinómicas de hasta grado $n \leq 3$ de la forma $P(x) = 0$, donde los coeficientes a_i del polinomio son números reales construibles mediante Origami.

Ecuación polinómica de primer grado.

Se supone el polinomio $P(x) = a_1 x + a_0$ de grado $n = 1$ con coeficientes reales y $a_1 \neq 0$. Se quiere resolver la ecuación $P(x) = 0$, es decir

$$a_1 x + a_0 = 0.$$

Se definen los elementos O, T, L_1 y L_2 como sigue:

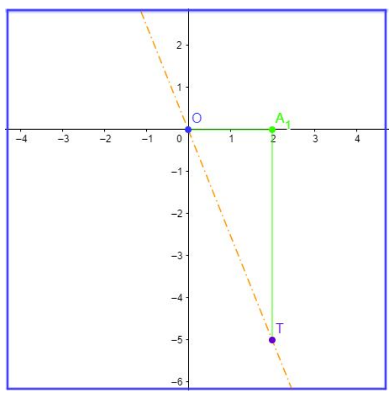
I. El punto $O(0,0)$ como el punto origen del plano cartesiano.

II. El punto final T del camino codificacdo del Método de Lill, que por cómo ha sido construido tendrá coordenadas $T(a_1, a_0)$.

En primer lugar, se deben situar cada uno de los elementos anteriores en nuestra hoja de papel, colocando los ejes cartesianos y el punto Origen O como punto de partida. Después, se busca el Camino de Lill del polinomio $P(x)$, pues un polinomio de grado uno tiene una única raíz. Para el procedimiento de Papiroflexia, este paso consiste en construir, aplicando el Axioma ($\mathbf{O_1}$), el pliegue que pasa por los puntos O y T. Se calcula la pendiente $m_{\overline{OT}}$ de la recta que resulta del pliegue anterior y entonces, una solución de la ecuación es $x = -m_{\overline{OT}}$.

Ejemplo. $\mathbf{2x - 5 = 0} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 2$ y $a_0 = 5 \quad \Rightarrow \quad O(0,0)$ y $T(2,-5)$

La pendiente de la recta que pasa por O y por T es $\dfrac{-5}{2}$, luego la solución de la ecuación es $\dfrac{5}{2}$.



Ecuación cuadrática.

Se considera el polinomio $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, de grado $n = 2$ con coeficientes reales y $a_2 \neq 0$. Se quiere resolver la ecuación $P(x) = 0$, es decir

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

Se definen los elementos O, T, L_1 y L_2 como sigue:

I. Se define el punto origen del plano cartesiano como el punto de coordenadas $O(0, 0)$.

II. Se define la recta vertical L_1 como $L_1 : x = 2a_2$.

III. Se define la recta vertical L_2 como $L_2 : x = a_2$.

IV. Por último, se define el punto final T del camino codificado del Método de Lill, que por cómo ha sido construido tendrá coordenadas $T(a_2 - a_0, a_1)$.

En primer lugar, se debe situar cada uno de los elementos anteriores en nuestra hoja de papel, colocando los ejes cartesianos y el punto Origen O como punto de partida. Después, se buscan los Caminos de Lill posibles para el polinomio $P(x)$, que en cantidad corresponden con el número de raíces reales del polinomio. Como es un polinomio de grado 2, se podrán encontrar o dos, o uno o ningún Camino de Lill. Para el procedimiento de Papiroflexia, este paso consiste en buscar, aplicando el Axioma ($\mathbf{O_5}$), los pliegues que lleven el punto O en la recta L_1 pasando por el punto T.

Una vez marcado el pliegue resultante en la hoja de papel, se localiza el punto de corte de este último con la recta L_2, punto que se denotará por A[4], y se cosntruye el segmento $\overline{OA}$. Se calcula la pendiente $m_{\overline{OA}}$ de la recta que resulta de la prolongación del segmento $\overline{OA}$. Entonces, una solución de la ecuación es

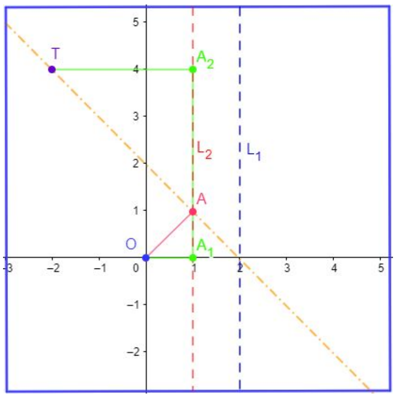
$$x = -m_{\overline{OA}}.$$

Ejemplo. $\mathbf{x^2 + 4x + 3 = 0} \quad \Rightarrow \quad a_2 = 1$, $a_1 = 4$ y $a_0 = 3$.

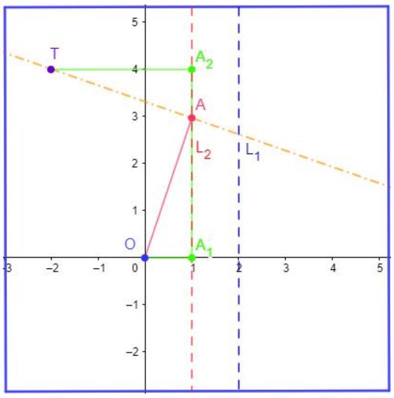
- $O(0, 0)$
- $L_1 : x = 2$
- $L_2 : x = 1$
- $T(1 - 3, 4) = (-2, 4)$

Al buscar los pliegues que llevan O sobre L_1 pasando por T, es posible encontrar dos distintos. Cada uno de ellos da lugar a una solución real de la ecuación. En el primer caso, la pendiente de la recta que pasa por los puntos O y A es 1, luego la primera solución será $x = -1$. En el segundo caso, la pendiente es 3, luego la solución es $x = -3$.

[4]Este punto A corresponde con el punto B_2 del camino de Lill encontrado.



Solución 1: $x = -1$.



Solución 2: $x = -3$.

Ecuación cúbica.

Este procedimiento ha sido tomado de Hull (2012).

Se considera el polinomio $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, de grado $n = 3$ con coeficientes reales y $a_3 \neq 0$. Se quiere resolver la ecuación $P(x) = 0$, es decir

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

Se definen los elementos O, T, L_1, L_2 y L_3 como sigue:

I. Se define el punto origen del plano cartesiano como el punto de coordenadas $O(0, 0)$.

II. Se define la recta vertical L_1 como $L_1 : x = 2a_3$.

III. Se define la recta horizontal L_2 como $L_2 : y = a_2 + a_0$.

IV. Se define otra recta horizontal L_3 como $L_3 : y = a_2$.

V. Por último, se define el punto final T del camino codificado del Método de Lill, que por cómo ha sido construido tendrá coordenadas $T(a_3 - a_1, a_2 - a_0)$.

En primer lugar, se debe situar cada uno de los elementos anteriores en nuestra hoja de papel, colocando los ejes cartesianos y el punto Origen O como punto de partida. Después, se buscan los Caminos de Lill posibles para el polinomio $P(x)$, que en cantidad corresponden con el número de raíces reales del polinomio. Como es un polinomio de grado 3, es posible encontrar o tres Caminos de Lill, o únicamente[5] un Camino de Lill. Para el procedimiento de Papiroflexia, este paso consiste en buscar, aplicando el Axioma ($\mathbf{O_6}$), los pliegues que lleven el punto O en la recta L_1 y el punto T en la recta L_2 simultáneamente.

Una vez marcado el pliegue resultante en la hoja de papel, se localiza el punto de corte de este último con la recta L_3, punto que se denotará por A[6], y se construye el segmento $\overline{AT}$. Se calcula la pendiente $m_{\overline{AT}}$[7] de la recta que resulta de la prolongación del segmento

[5] Es conocido que una ecuación cúbica tiene o bien tres raíces reales, o bien una raíz real y dos complejas.

[6] Este punto A corresponde con el punto B_2 del Camino de Lill que se está considerando.

[7] Por la sucesión de triángulos semejantes que se forma tras aplicar el método de Lill, la pendiente $m_{\overline{AT}}$ es igual a la pendiente $m_{\overline{OB_3}}$

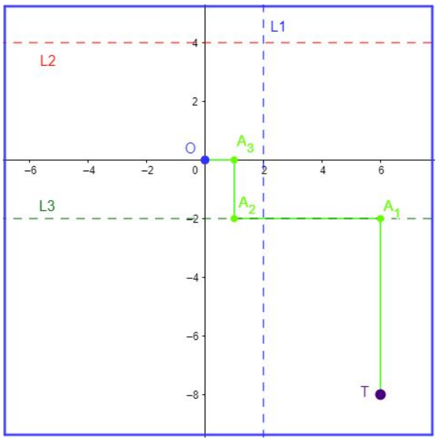
$\overline{AT}$. Entonces, una solución de la ecuación es

$$x = -m_{\overline{AT}}.$$

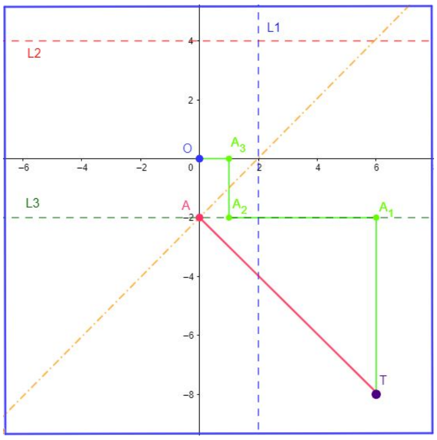
Ejemplo 1. $\mathbf{x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0} \Rightarrow a_3 = 1,\ a_2 = -2,\ a_1 = -5$ y $a_0 = 6$.

- $O(0, 0)$
- $L_1 : x = 2$
- $L_2 : y = -2 + 6 = 4$
- $L_3 : y = -2$
- $T(1 - (-5), -2 - 6) = (6, -8)$

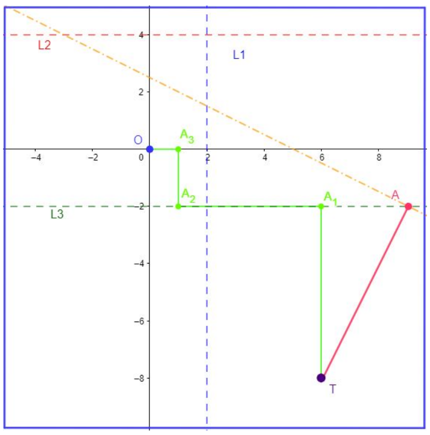
Al buscar los pliegues que llevan O sobre L_1 y T sobre L_2 simultáneamente, se obtienen tres formas diferentes de realizar ese pliegue. Cada uno de ellos da lugar a una solución real de la ecuación. En el primer caso, la pendiente de la recta que pasa por los puntos T y A es -1, luego la primera solución será $x = 1$. En el segundo caso, la pendiente es 2, luego la solución es $x = -2$. Por último, la pendiente es -3, luego la solución es 3.



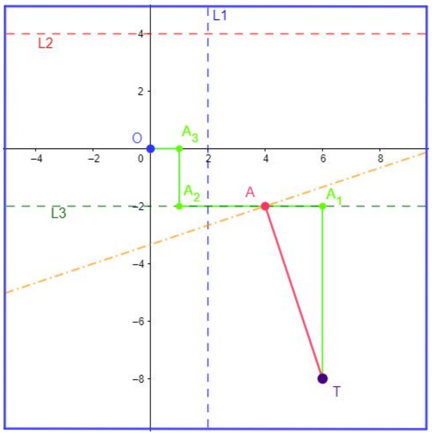
Elementos.



Solución 1: $x = 1$.



Solución 2: $x = -2$.

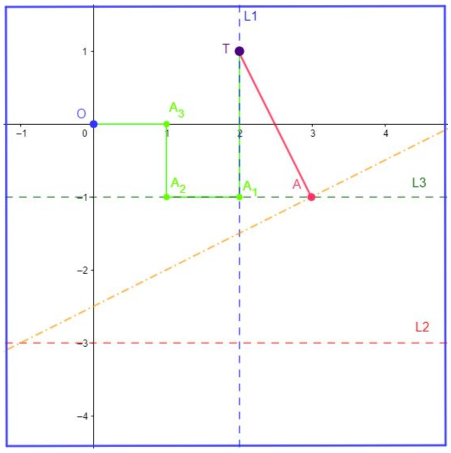


Solución 3: $x = 3$.

Ejemplo 2. $\mathbf{x^3 - x^2 - x - 2 = 0} \Rightarrow a_3 = 1,\ a_2 = -1,\ a_1 = -1$ y $a_0 = -2$.

- $O(0,0)$
- $L_1 : x = 2$
- $L_2 : y = -1 - 2 = -3$
- $L_3 : y = -1$
- $T(1-(-1), -1-(-2)) = (2,1)$

Hay un único pliegue que lleve O sobre L_1 y T sobre L_2 simultáneamente, por lo que esta ecuación tiene una única solución real (y por tanto, dos complejas). La pendiente de la recta que pasa por T y A es -2, luego la solución es $x = 2$.



Solución: $x = 2$.

C. Planteamiento.

Los contenidos que se trabajan en la Actividad 1 pertenecen al currículo de la asignatura de **Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I**, y a la asignatura de **Matemáticas I**, en ambos casos dentro del Bloque 2: Números y Álgebra. Por tanto, se plantea como una actividad de ampliación o repaso para ambos cursos de primero de Bachillerato dentro de una Unidad Didáctica que englobe los contenidos descritos en el apartado A)Contenidos. Esto es debido a que los métodos comúnmente utilizados para la búsqueda de raíces en el aula son la factorización de polinomios y el método de Ruffini, por lo que el Método de Lill resultaría adicional a los ya supuestamente trabajados. Sin embargo, dado que las ecuaciones polinómicas y su resolución son contenidos recurrentes a lo largo de la Educación Secundaria y Bachillerato, esta actividad se puede llevar a cabo desde un curso de 4º de la ESO hasta 2º de Bachillerato, siempre adecuando las actividades al nivel concreto en el que se van a trabajar.

Los conocimientos previos necesarios y que se suponen sabidos por el alumnado por ser propios del currículo de cursos previos son:

- Manejo de plano cartesiano y puntos en $\mathbb{R}^2$.

- Semejanza de triángulos.
- Razones trigonométricas de ángulos agudos: seno, coseno y tangente.
- Ecuaciones y representación de rectas en los ejes cartesianos.
- Concepto y cálculo de pendiente de una recta.

D. Metodología y Recursos.

Las metodologías elegidas para poner en práctica esta actividad son las siguientes:

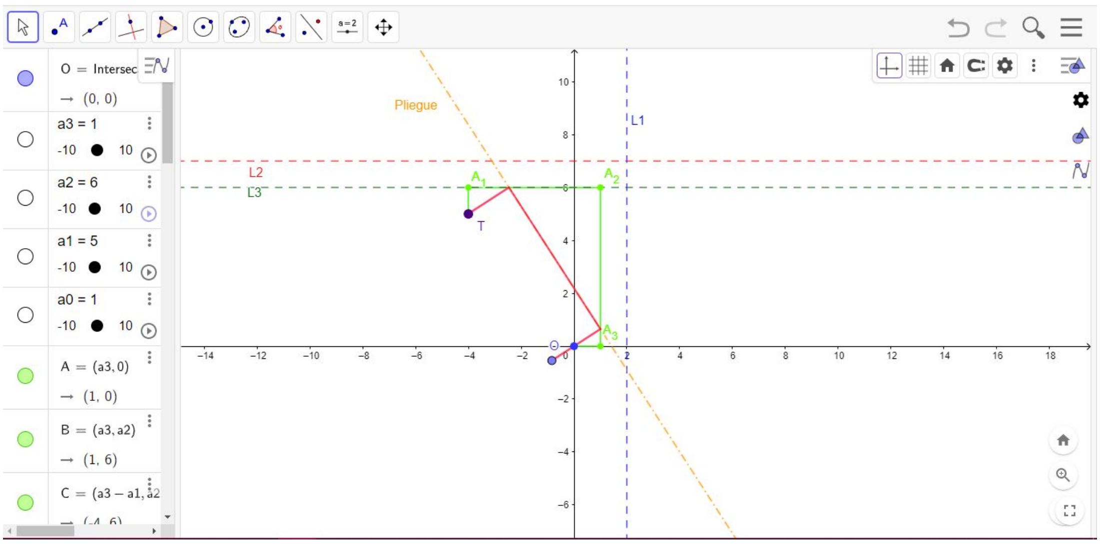
- **Aula Invertida (Flipped Classroom).**
  La metodología de Aula Invertida fue definida por Bergmann y Sams (2012) como el modelo pedagógico que "invierte" el funcionamiento habitual de la docencia, de forma que el alumnado debe trabajar los contenidos fuera del aula para así, dedicar el tiempo de las sesiones de clase a potenciar la adquisición y la práctica de tareas de un nivel cognitivo superior. Para llevar a cabo esta metodología, el docente facilitará a los alumnos un vídeo explicativo y un documento Power Point con las explicaciones y teoría sobre el Método de Lill para la búsqueda de raíces y de soluciones de ecuaciones polinómicas. Esta metodología requiere un nivel de autonomía y autorregulación considerable por parte del alumnado, que será responsable de visualizar los videos fuera de las horas lectivas tantas veces como encuentre oportuno para comprender realmente el procedimiento y los ejemplos de las explicaciones. Al poder los alumnos moderar su aprendizaje, esta metodología favorece la atención a la diversidad ya que posibilita a cada estudiante avanzar a su propio ritmo de aprendizaje, a la vez que el docente en las sesiones dispone de más tiempo para atender las dificultades individuales. En las sesiones presenciales, los estudiantes deberán conocer y manejar en profundidaz el método para dedicar las clases a la implementación del mismo mediante Papiroflexia y a la resolución de ejercicios. Se trabaja fundamentalmente la competencia de aprender a aprender.

- **Resolución de ejercicios por parejas.**
  Durante las sesiones en el aula, los alumnos se organizarán en parejas para trabajar en la resolución de los ejercicios propuestos por el docente. Se considera una metodología adecuada dado que para llevar a cabo los procedimientos de Papiroflexia sobre búsqueda de raíces de ecuaciones de segundo y tercer grado, es necesario encontrar distintas formas de realizar el pliegue definido en cada caso. Así, es posible que cada uno de los alumnos de una misma pareja sea capaz de visulizar un pliegue distinto. De esta manera, trabajarán de forma cooperativa en la búsqueda de las soluciones, favoreciéndose mutuamente. Cuando surjan conflictos o un miembro de la pareja deba ayudar al otro, deberán usar un lenguaje adecuado y expresar sus ideas o razonamientos de forma clara. Por ello, esta metodología desarrolla la competencia matemática, la competencia en comunicación lingüística, la competencia de cprender a aprender y las competencias sociales y cívicas.

- **Proyecto de vídeo didáctico.**
  Por último, cada alumno deberá realizar un proyecto de vídeo didáctico en el que expliquen detalladamente el proceso seguido en la resolución de un ejercicio mediante un procedimiento de Papiroflexia. Se tendrá en cuenta la precisión y claridad del lenguaje matemático utilizado y la expresión oral, de forma que se trabaja la competencia en comunicación lingüística, la competencia matemática y competencia básica en ciencias y tecnologías y la competencia digital. Este documento de vídeo servirá como instrumento de evaluación del aprendizaje.

Los recursos que serán necesarios para el planteamiento de esta actividad se listan a continuación:

- Papel de Papiroflexia o en su defecto, folios, para cada alumno.
- Ordenador o tablet individual para cada alumno.
- Video explicativo y documento de Power Point sobre el Método de Lill preparados por el docente. Este último se puede encontrar en el ANEXO II.
- Herramienta GeoGebra. Para acompañar las explicaciones y la resolución de ejercicios, será util disponer de la siguiente herramienta de GeoGebra:



Método de Lill en GeoGebra. https://www.geogebra.org/classic/tv7amhcs

  El panel de la izquierda permite variar los coeficientes del polinomio de grado 3 del cual se desea implementar el Método de Lill. La línea poligonal del camino codificado se observa en verde, mientras que para encontrar los distintos caminos de Lill es necesario mover el punto gris hasta que el final de la línea poligonal rosa coincida con el punto T. Se representan también las rectas L_1, L_2 y L_3 y la recta resultante del pliegue que origina cada camino de Lill.

- Proyector y pantalla. Se utilizará para realizar las explicaciones correspondientes o resolver dudas concretas en el desarrollo de las sesiones.

- Dispositivo de grabación de vídeo y audio, como puede ser un teléfono smartphone.
- Plataforma Moodle o Teams, o similar. Mediante esta plataforma el docente facilitará al alumando los videos y documentos que deberán trabajar como parte de la metodología de aula invertida. Además, cada alumno deberá entregar el proyecto de video a través de esta plataforma.
- Listado de ejercicios y problemas para cada alumno.
- Calculadora. El alumno podrá disponer de calculadora para realizar las operaciones necesarias en los ejercicios.

E. Temporalización. Situaciones de Aprendizaje.

La actividad se llevará a cabo en tres sesiones lectivas: la primera será de presentación de la actividad, y las otras dos de 50 minutos cada una en las que se llevará a cabo la resolución de ejercicios por parejas en el aula. Al estar propuesta como una actividad de ampliacón y repaso, se va a situar entre las últimas sesiones de la Unidad Didáctica correspondiente, una vez trabajados los contenidos sobre polinómios, raíces, factorización y resolución de ecuaciones.

Sesión de Presentación.

En esta sesión se presentará la actividad al alumnado describiendo la metodología de Clase Invertida que se va a desarrollar. Se facilitarán los vídeos explicativos sobre el Método de Lill, disponibles en la plataforma Moodle, que los estudiantes tendrán entre tres y cuatro días para visualizar y trabajar fuera de las horas lectivas antes de las sesiones en el aula. Evidentemente, si durante el trabajo fuera del aula surgieran dudas a los estudiantes, estos podrán preguntar al docente vía Moodle. También se organizará el grupo en parejas consensuadas entre el docente y alumnos, que serán permanentes durante las dos sesiones siguientes. Por último, se especificará cómo deben realizar el proyecto de video didáctico: formato, orientación, duración mínima o máxima, etc, así como la fecha límite de entrega que podría ser, por ejemplo, en el plazo de una semana después de la Sesión 2.

Sesión 1.

En esta primera sesión se va a proceder a organizar el aula de forma que cada una de las parejas de alumnos tenga su espacio de trabajo. Se van a trabajar los procedimientos de Ecuaciones lineales y Ecuaciones cuadráticas. Cada pareja comienza a trabajar en los ejercicios 1 y 2 que consisten en modelar un procedimiento de Papiroflexia que permita resolver ecuaciones lineales. Aunque sencillo, deberán recurrir a sus conocimientos de Geometría Analítica plana, y relacionarlo con el camino codificado y el Camino de Lill del Método de Lill aplicado a un polinomio de grado uno.

Ejercicio 1. Resuelve mediante el método algebraico las siguientes ecuaciones:

a) $4 - x = 5x + 1$ b) $4x - 2 = 6$.

Después, resuelve ambas ecuaciones mediante el Método de Lill.

Ejercicio 2. Modela un procedimiento de Papiroflexia que permita resolver ecuaciones lineales basado en el Método de Lill. Comprueba tu modelo resolviendo las ecuaciones del ejercicio 1.

Indicación: ¿Cuántos segmentos tiene el camino de Lill de un polinomio de grado uno?¿Cómo puedes construir ese camino mediante pliegues de Papiroflexia?

A continuación, prosiguen con el ejercicio 3, en la misma línea que los anteriores pero trabajando con ecuaciones de segundo grado. A medida que vayan completando las distintas cuestiones, deberán concluir cómo obtener las soluciones de la ecuación mediante Papiroflexia.

Ejercicio 3. Resuelve las siguientes ecuaciones mediante el método algebraico:

$a) x^2 - 2x + 1 = 0$ $b) x^2 - 2x - 3 = 0$ $c) x^2 + 1 = 0$.

Después, responde a las siguientes preguntas para cada una de las ecuaciones:

1. ¿Cuántos caminos de Lill podremos econtrar?.

2. Sitúa los ejes cartesianos en el folio de papel. Construye con Papiroflexia el camino codificado del polinomio de grado dos. ¿Cuáles son las coordenadas del punto final T?

3. Representa en el mismo folio mediante pliegues las siguientes rectas:

$$L_1 : x = 2a_2 \qquad L_2 : x = a_2$$

Realiza (siempre que se pueda) un pliegue que lleve el punto origen O sobre L_1 pasando por T.

4. Denota por A el punto de intersección del pliegue con L_2. ¿Cómo se corresponde este punto con los pasos del Método de Lill?

5. ¿Cómo se obtienen las soluciones de la ecuación mediante el anterior procedimiento de Papiroflexia?

Indicación: comprueba tus resultados comparándolos con las soluciones obtenidas en la primera parte del ejercicio.

Sesión 2.

En esta sesión, los estudiantes seguirán trabajando con sus correspondientes parejas. Se va a desarrollar el procedimiento de Papiroflexia para Ecuaciones cúbicas.

Los ejercicios 4 y 5 consisten en trabajar la resolución de ecuaciones. Para ello, el alumnado dispondrá del procedimiento de Papiroflexia para la resolución de ecuaciones cúbicas escrito en su listado de ejercicios. Se trabaja también la relación de los sucesivos caminos de Lill al aplicar reiteradamente el método de Lill con la factorización del polinomio.

Ejercicio 4. Busca el pliegue que resuelve la siguiente ecuación aplicando el procedimiento de Papiroflexia:

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

y responde las siguientes cuestiones:
1. Factoriza el polinomio $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ como la multiplicación de un polinomio de grado uno y un polinomio de grado 2, $Q(x)$.
2. Construye, en un nuevo folio, el camino codificado del polinomio $Q(x)$.
3. Compara el Camino de Lill encontrado para $P(x)$ y el camino codificado del polinomio $Q(x)$. ¿Qué observas?

Ejercicio 5. Resuelve mediante Papiroflexia la siguiente ecuación:

$$x^3 - 7x - 6 = 0$$

Después, considera uno de los pliegues obtenidos y su solución correspondiente, y responde las siguientes cuestiones:
1. Factoriza el polinomio $P(x) = x^3 - 7x - 6$ como la multiplicación del factor correspodiente a la solución considerada y un polinomio de grado 2, $Q(x)$.
2. Resuelve la ecuación $Q(x) = 0$ mediante Papiroflexia.
3. Responde a los apartados 1 y 2 considerando los otros dos pliegues con sus correspondientes soluciones.
4. Razona qué ocurre si se parte de un polinomio $P(x)$ de grado 3, y se aplica reiteradamente el Método de Lill a cada Camino de Lill obtenido.

Indicación: Un Camino de Lill de un polinomio de grado 3 tiene tres segmentos. Al aplicar el Método de Lill a estos tres segmentos, se obtiene un camino de Lill de dos segmentos. Al aplicar el Método de Lill a estos dos segmentos, se obtiene un Camino de Lill de un segmento.

Para finalizar la sesión, se asignará a cada alumno una ecuación cúbica de la siguiente lista. Esta ecuación será la que deban resolver mediante Papiroflexia para el proyecto de vídeo. Deberán explicar los pasos seguidos en la resolución, así como la obtención de cada una de las tres soluciones. Aquellos alumnos que hayan terminado el ejercicio 5 podrán comenzar a trabajar en la resolución de su ecuación.

Ecuaciones con Papiroflexia

I. $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0.$
II. $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0.$
III. $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0.$
IV. $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0.$
V. $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0.$
VI. $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0.$
VII. $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0.$
VIII. $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0.$

F. Evaluación.

Para la evaluación del aprendizaje del alumnado se utilizarán los siguientes instrumentos:

Por una parte, al finalizar cada una de las sesiones, el docente recogerá las respuestas de cada pareja a los ejercicios trabajados en la misma. Los tres primeros ejercicios se evaluarán sobre 10 puntos, y los ejercicios 4 y 5 sobre 20 puntos. En ellos, se tendrá en cuenta no solo la correcta solución, también los procedimientos o razonamientos seguidos en cada apartado. Así, los dos alumnos de una misma pareja obtendrán la misma calificación correspondiente a la parte de trabajo en el aula siendo esta un 70 % de la calificación final de la actividad.

Por otra parte, el video realizado por cada alumno ponderará un 30 % y se evaluarán del 1 al 5 (siendo 1 la calificación mínima y 5 la calificación máxima) los siguientes aspectos:

- Comprensión del Método de Lill
- Construcción de los elementos necesarios para realizar los pliegues en la hoja de papel.
- Construcción de los tres pliegues mediante Papiroflexia.
- Hallazgo de las tres soluciones correctas de la ecuación.
- Explicación datallada de la obtención de las tres raíces mediante Papiroflexia.
- Expresión oral adecuada de los razonamientos y prodecimientos matemáticos y de Papiroflexia.
- Presentación de video clara y ordenada.

De esta manera, la calificación final de cada alumno se obtiene como la media ponderada de la calificación conjunta del trabajo de resolución de ejercicios en pareja y la calificación individual del video.

La evaluación de la actividad en lo respectivo al diseño de temporalización, metodologías y situaciones se llevará a cabo mediante la reflexión del docente tras las observaciones realizadas durante las sesiones y las dificultades encontradas en el desarrollo de la misma, procurando considerar posibles estrategias de mejora, así como mediante la rúbrica.

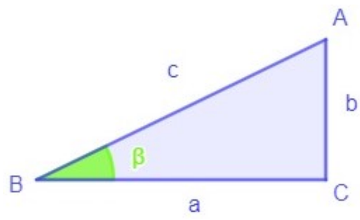
Actividad 2. Razones y Fórmulas Trigonométricas.

A. Contenidos.

- Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.
- Razones trigonométricas de los ángulos suma, diferencia de otros dos y doble.
- Fórmulas de transformaciones trigonométricas.
- Razones trigonométricas de ángulos complementarios, suplementarios y opuestos, y reducción al primer cuadrante.
- Teoremas del seno y coseno.

Desarrollo de contenidos.

Dado un triángulo rectángulo $\triangle ABC$ con $\widehat{C} = 90°$ como el de la imagen,



se definen las **razones trigonométricas** *seno*, *coseno* y *tangente* del ángulo $\beta = \widehat{B}$ como sigue:

Definición 3.2.7. *El **seno** del ángulo β, que se denota* $\sin(\beta)$*, es la razón entre la longitud del cateto opuesto al ángulo β, b, y la longitud de la hipotenusa, c:*

$$\sin(\beta) = \frac{b}{c}.$$

Definición 3.2.8. *El **coseno** del ángulo β, que se denota* $\cos(\beta)$*, es la razón entre la longitud del cateto adyacente al ángulo β, a, y la longitud de la hipotenusa, c:*

$$\cos(\beta) = \frac{a}{c}.$$

Definición 3.2.9. *La **tangente** del ángulo β, que se denota* $\tan(\beta)$*, es la razón entre la longitud del cateto opuesto al ángulo β, b, y la longitud del cateto adyacente, a:*

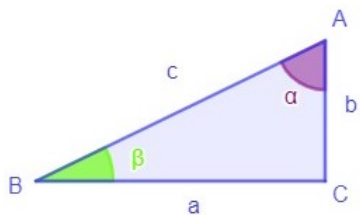
$$\tan(\beta) = \frac{b}{a}.$$

Lema 3.2.1. *Dado un ángulo β, sus razones trigonométricas seno y coseno cumplen que:*

$$-1 \leq \sin(\beta) \leq 1, \qquad -1 \leq \cos(\beta) \leq 1.$$

Observación.

Sea $\alpha = \widehat{A}$ el otro ángulo agudo del triángulo $\triangle ABC$, entonces se cumple:



$$\sin(\alpha) = \cos(\beta), \qquad \cos(\alpha) = \sin(\beta), \qquad \tan(\alpha) = \frac{1}{tan(\beta)}.$$

Definición 3.2.10. *Dado un ángulo β, las* ***relaciones trigonométricas*** *fundamentales son:*

$$\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta) = 1, \qquad \tan(\beta) = \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}.$$

Proposición 3.2.2. *Se cumplen las siguientes relaciones:*

I. *Dado un ángulo $\beta \in [0, 2\pi)$, entonces $\forall k \in \mathbb{Z}$:*

$$\sin(\beta) = \sin(\beta + 2\pi k), \qquad \cos(\beta) = \cos(\beta + 2\pi k).$$

II. *Dados dos* ***ángulos complementarios*** *β y α, $\beta + \alpha = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$, entonces*

$$\cos(\beta) = \sin(\alpha), \qquad \sin(\beta) = \cos(\alpha).$$

III. *Dados dos* ***ángulos suplementarios*** *β y α, $\beta + \alpha = 180^\circ = \pi$, entonces*

$$\cos(\beta) = -\cos(\alpha), \qquad \sin(\beta) = \sin(\alpha).$$

IV. *Dados dos* ***ángulos opuestos*** *β y α, $\alpha = -\beta$, entonces*

$$\cos(\beta) = \cos(\alpha), \qquad \sin(\beta) = -\sin(\alpha).$$

Proposición 3.2.3. *Dados dos ángulos β y α cualesquiera, entonces las razones trigonométricas del* ***ángulo suma*** *$\beta + \alpha$ son:*

$$\sin(\beta + \alpha) = \sin(\beta)\cos(\alpha) + \cos(\beta)\sin(\alpha),$$

$$\cos(\beta + \alpha) = \cos(\beta)\cos(\alpha) - \sin(\beta)\sin(\alpha).$$

Proposición 3.2.4. *Dado un ángulo β cualquiera, entonces las razones trigonométricas del* ***ángulo doble*** *2β son:*

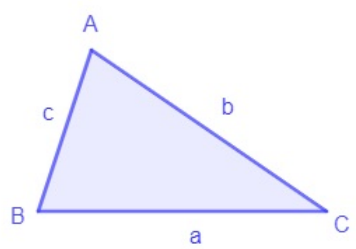
$$\sin(2\beta) = 2\sin(\beta)\cos(\beta),$$

$$\cos(2\beta) = \cos^2(\beta) - \sin^2(\beta) = 2\cos^2(\beta) - 1 = 1 - 2\sin^2(\beta).$$

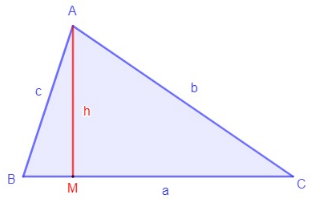
Teorema 3.2.2. ***Teorema del Seno****. Dado un triángulo cualquiera $\triangle ABC$, se cumple que*

$$\frac{\sin(\widehat{A})}{a} = \frac{\sin(\widehat{B})}{b} = \frac{\sin(\widehat{C})}{c}.$$

Demostración. Supongamos el triángulo de vértices $\triangle ABC$, cuyos lados de denotan como en la imagen:



Se toma la altura del triángulo sobre el lado a, h_a, obteniendo así dos triángulos rectángulos $\triangle ABM$ y $\triangle AMC$, donde M es el punto del lado a en el que corta la altura h_a. Entonces,



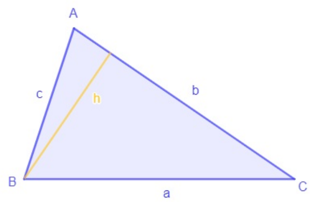
$$\sin(\widehat{B}) = \frac{h_a}{c} \qquad \Rightarrow \qquad h_a = c\sin(\widehat{B}),$$

$$\sin(\widehat{C}) = \frac{h_a}{b} \qquad \Rightarrow \qquad h_a = b\sin(\widehat{C}),$$

luego, se obtiene la igualdad

$$c\sin(\widehat{B}) = b\sin(\widehat{C}) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\sin(\widehat{B})}{b} = \frac{\sin(\widehat{C})}{c}.$$

Análogamente, tomando la altura h_b del triángulo sobre el lado b, se obtiene:



$$\sin(\widehat{A}) = \frac{h_b}{c} \qquad \Rightarrow \qquad h_b = c\sin(\widehat{A}),$$

$$\sin(\widehat{C}) = \frac{h_b}{a} \qquad \Rightarrow \qquad h_b = a\sin(\widehat{C}),$$

de donde se concluye

$$c\sin(\widehat{A}) = a\sin(\widehat{C}) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\sin(\widehat{A})}{a} = \frac{\sin(\widehat{C})}{c}.$$

□

Teorema 3.2.3. ***Teorema del Coseno.*** *Dado un triángulo cualquiera $\triangle ABC$, se cumplen las siguiente igualdades:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A}),$$

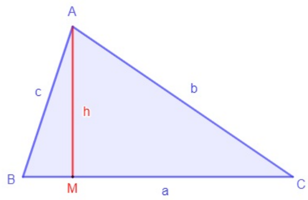
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\widehat{B}),$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{C}).$$

Demostración. Se realiza la prueba para la igualdad

$$b^2 = a^2 + c^2 + 2ac\cos(\widehat{B}),$$

y para las otras dos se razona de forma análoga. Supongamos el triángulo $\triangle ABC$, cuyos lados se denotan como en la figura:



Se toma la altura del triángulo sobre el lado a, h_a, obteniendo así dos triángulos rectángulos $\triangle ABM$ y $\triangle AMC$, donde M es el punto del lado a en el que corta la altura h_a. Por el Teorema de Pitágoras, podemos calcular la longitud de h_a de dos formas:
Si tomamos el triángulo $\triangle ABM$, entonces:

$$c^2 = h_a^2 + |\overline{BM}|^2 \qquad \Rightarrow \qquad h_a^2 = c^2 - |\overline{BM}|^2.$$

Si tomamos el triángulo $\triangle AMC$, entonces:

$$b^2 = h_a^2 + |\overline{MC}|^2 \qquad \Rightarrow \qquad h_a^2 = b^2 - |\overline{MC}|^2 = b^2 - (a - |\overline{BM}|)^2 = b^2 - a^2 + 2a|\overline{BM}| - |\overline{BM}|^2.$$

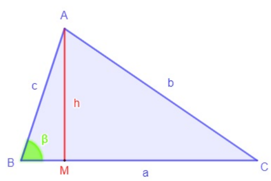
Al igualar la expresión de h_a^2 de ambos resultados, y teniendo en cuenta que $\cos(\widehat{B}) = \frac{|\overline{BM}|}{c}$ se obtiene:

$$c^2 - |\overline{BM}|^2 = b^2 - a^2 + 2a|\overline{BM}| - |\overline{BM}|^2$$
$$c^2 + a^2 - 2a|\overline{BM}| = b^2$$
$$c^2 + a^2 - 2ac\cos(\widehat{B}) = b^2.$$

□

Corolario 3.2.2. *Dado un triángulo $\triangle ABC$ cualquiera, tomamos $\beta = \widehat{B}$ y sea h la altura del triángulo sobre el lado a, entonces el área del triángulo es*

$$\text{Área} = \frac{1}{2}ac\sin\beta.$$



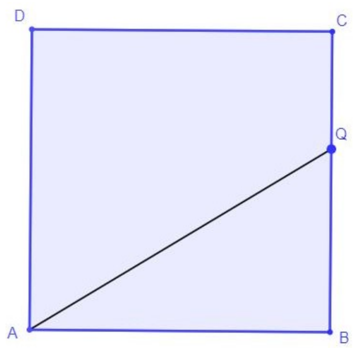
B. Procedimiento con Papiroflexia.

Partiendo de un cuadrado de papel se puede realizar la demostración de algunos de los resultados enunciados en el apartado anterior:

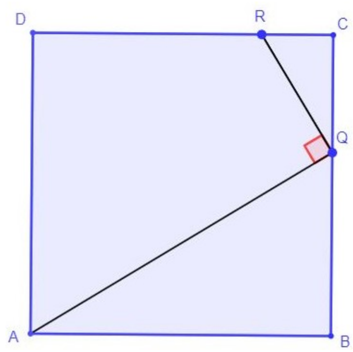
Razones trigonométricas del ángulo suma.

Este procedimiento se ha tomado de García (2021, 11 abril).

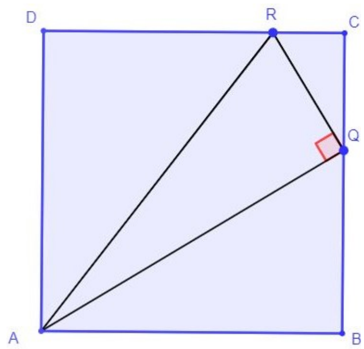
Se comienza con un rectángulo de papel en el que se ha marcado un cuadrado, y se toma un punto Q en uno de los bordes de este último, por ejemplo el derecho. Mediante $(\mathbf{O_1})$, se realiza el pliegue que pasa por la esquina inferior, el punto A y por el punto Q. Después, se construye con el Axioma $(\mathbf{O_4})$ el único pliegue perpendicular al anterior que pasa por el punto Q. El punto de intersección de este pliegue con el borde superior del cuadrado de papel se denotará por R. Por último, se realiza el pliegue que pasa por R y por A aplicando $(\mathbf{O_1})$ de nuevo.



Paso 1



Paso 2



Paso 3

De esta forma, el cuadrado inicial de papel ha quedado divido en cuatro triángulos rectángulos: $\triangle QAB$, $\triangle RQC$, $\triangle ARD$ y $\triangle RAQ$. Se toman los ángulos $\alpha = \widehat{QAR}$ y $\beta = \widehat{BAQ}$ y el ángulo suma $\beta + \alpha = \widehat{BAR}$.

Por las propiedades básicas de la Geometría Plana[8] se cumple que $\widehat{CQR} = \beta$ y $\widehat{DRA} = \beta + \alpha$. Se supone la longitud $|\overline{AR}|$ igual a la unidad y se considera el triángulo $\triangle RAQ$ para calcular las razones trigonométricas seno y coseno del ángulo α:

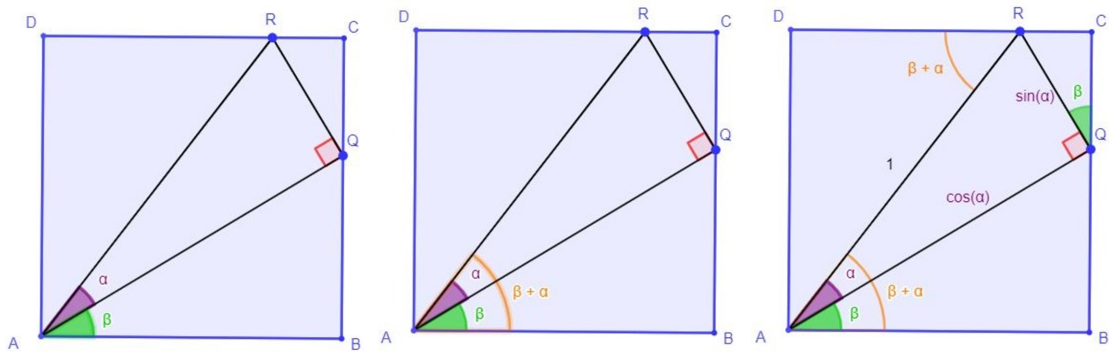
$$\cos(\alpha) = \frac{|\overline{AQ}|}{|\overline{AR}|} \qquad \sin(\alpha) = \frac{|\overline{RQ}|}{|\overline{AR}|}$$

$$cos(\alpha) = |\overline{AQ}| \qquad \sin(\alpha) = |\overline{RQ}|$$

[8]Se utilizan las siguientes propiedades de la Geometría plana Eculídea:

I. Los ángulos de un triángulo suman 180º.

II. Al cortar dos rectas pararelas por otra transversal, los ángulos alternos internos son iguales.



Se considera, en primer lugar, el triángulo $\triangle QAB$ para calcular las razones trigonométricas seno y coseno del ángulo β:

$$\cos(\beta) = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AQ}|} = \frac{|\overline{AB}|}{\cos(\alpha)} \qquad \Rightarrow \qquad |\overline{AB}| = \cos(\beta)\cos(\alpha),$$

$$\sin(\beta) = \frac{|\overline{BQ}|}{|\overline{AQ}|} = \frac{|\overline{BQ}|}{\cos(\alpha)} \qquad \Rightarrow \qquad |\overline{BQ}| = \sin(\beta)\cos(\alpha).$$

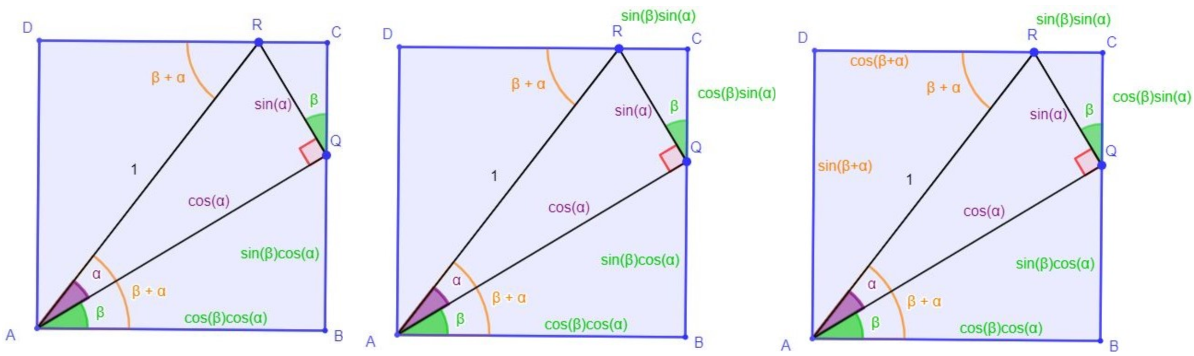
Ahora, se toma el triángulo $\triangle RQC$ para calcular las misma razones trigonométricas de β:

$$\cos(\beta) = \frac{|\overline{QC}|}{|\overline{RQ}|} = \frac{|\overline{QC}|}{\sin(\alpha)} \qquad \Rightarrow \qquad |\overline{QC}| = \cos(\beta)\sin(\alpha),$$

$$\sin(\beta) = \frac{|\overline{RC}|}{|\overline{RQ}|} = \frac{|\overline{RC}|}{\sin(\alpha)} \qquad \Rightarrow \qquad |\overline{RC}| = \sin(\beta)\sin(\alpha).$$

Finalmente, al tomar el triángulo $\triangle ARD$ para calcular las razones tigonométricas seno y coseno del ángulo suma $\beta + \alpha$ se obtiene:

$$\cos(\beta+\alpha) = \frac{|\overline{DR}|}{1} = |\overline{DR}|, \qquad \sin(\beta+\alpha) = \frac{|\overline{DA}|}{1} = |\overline{DA}|.$$



Por tanto, al comparar las longitudes de los bordes del cuadrado inicial se obtienen las fórmulas del seno y el coseno del ángulo suma:

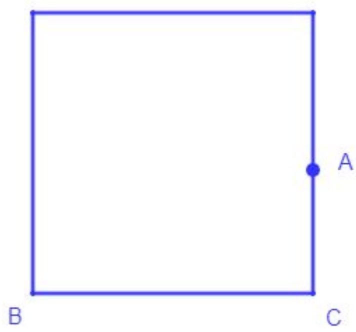
$$|\overline{DA}| = |\overline{BQ}| + |\overline{QC}| \qquad \Rightarrow \qquad \sin(\beta+\alpha) = \sin(\beta)\cos(\alpha) + \cos(\beta)\sin(\alpha),$$

$$|\overline{DR}| = |\overline{AB}| - |\overline{RC}| \qquad \Rightarrow \qquad \cos(\beta+\alpha) = \cos(\beta)\cos(\alpha) - \sin(\beta)\sin(\alpha).$$

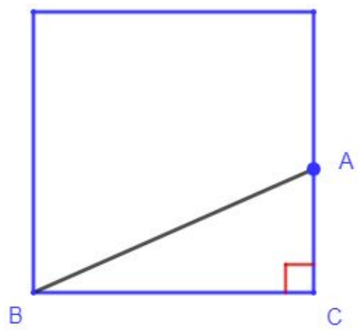
Razones trigonométricas del ángulo doble.

Este procedimiento se ha tomado de Hull (2021, 11 abril).

Se comienza con un cuadrado de papel, en el que se toma un punto A en uno de sus borde. Con el Axioma ($\mathbf{O_1}$) se contruye el único pliegue que pasa por A y por la esquina derecha B del borde opuesto a A. Así, se obtiene un triángulo rectángulo $\triangle ABC$ con $\widehat{ACB} = 90°$.

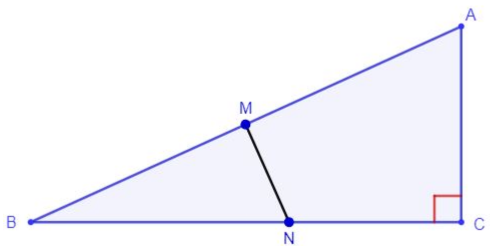


Paso 1

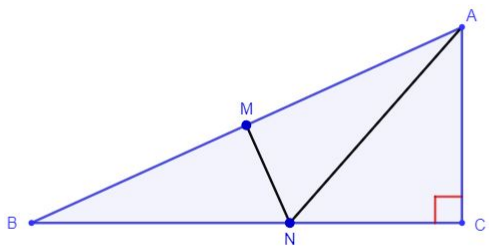


Paso 2

El siguiente paso será realizar el pliegue que lleve el punto B sobre el punto A utilizando el Axioma ($\mathbf{O_2}$). La intersección de este pliegue con el segmento $\overline{BA}$ nos dará su punto medio M, y la intersección del pliegue con el segmento $\overline{BC}$ nos proporciona el punto N. Por último, mediante el Axioma ($\mathbf{O_1}$) se realiza el pliegue que pasa por N y por A. De esta forma, el triángulo inicial $\triangle ABC$ ha quedado dividido en tres triángulos rectángulos: $\triangle ANC$, $\triangle NAM$ y $\triangle NBM$.



Paso 3

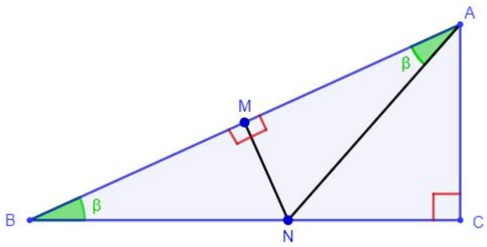


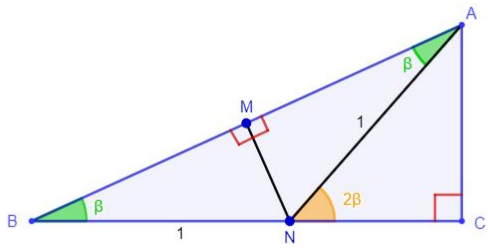
Paso 4

Además, al realizar el pliegue que lleva B sobre A y construir el segmento $\overline{NA}$, el ángulo $\widehat{MAN}$ es igual al ángulo $\widehat{NBM}$ que se denotará por β. Por tanto, los triángulos $\triangle NAM$ y $\triangle NBM$ son triángulos congruentes ya que comparten dos ángulos y un lado ($|\overline{BM}| = |\overline{MA}|$).

Por otro lado, el ángulo $\widehat{CNA}$ es el doble[9] del ángulo $\widehat{CBA} = \widehat{NBM}$, luego $\widehat{CNA} = 2\beta$. Ahora, se supone la longitud $|\overline{NA}| = |\overline{BN}|$ igual a la unidad.

[9]Si tomamos la circunferencia de centro N y radio $\overline{BN} = \overline{NA}$, el ángulo $\widehat{CNA}$ es un ángulo central (su vértice es el centro y el lado $\overline{NA}$ es un radio) y el ángulo $\widehat{CBA}$ es un ángulo inscrito (su vértice está en la circunferencia y el lado $\overline{BA}$ es una cuerda). Además, los puntos de corte de los lados de ambos ángulos con la circunferencia son los mismos: A y P, siendo P el punto de corte de la prolongación por C del segmento $\overline{BC}$.



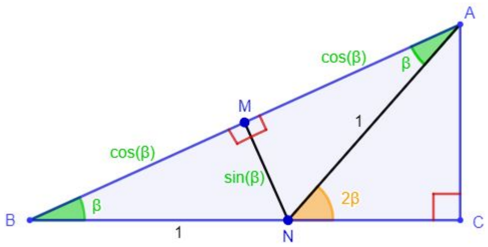


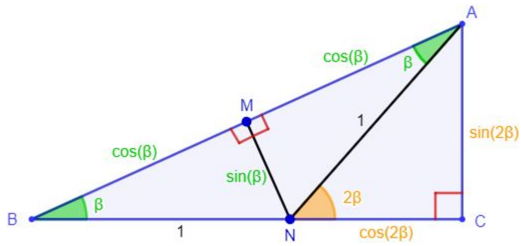
Se considera el triángulo $\triangle MBN$ para calcular las razones trigonométricas seno y coseno del ángulo β, y entonces:

$$\cos(\beta) = |\overline{BM}| = |\overline{MA}|, \qquad \sin(\beta) = |\overline{MN}|.$$

Se toma el triángulo $\triangle ANC$ para calcular las razones trigonométricas seno y coseno del ángulo doble 2β, y se obtiene:

$$\cos(2\beta) = |\overline{NC}|, \qquad \sin(2\beta) = |\overline{AC}|.$$





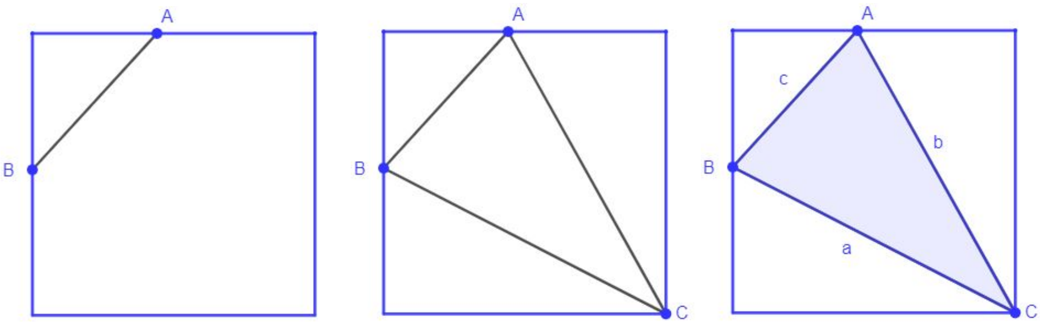
Ahora, se considera el triángulo inicial $\triangle ABC$ para calcular las razones trigonométricas seno y coseno del ángulo β, de donde se obtienen las fórmulas del seno y el coseno del ángulo doble:

$$\sin(\beta) = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{BA}|} = \frac{\sin(2\beta)}{2\cos(\beta)} \qquad \Rightarrow \qquad \sin(2\beta) = 2\sin(\beta)\cos(\beta),$$

$$\cos(\beta) = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{BA}|} = \frac{1+\cos(2\beta)}{2\cos(\beta)} \qquad \Rightarrow \qquad \cos(2\beta) = 2\cos^2(\beta) - 1.$$

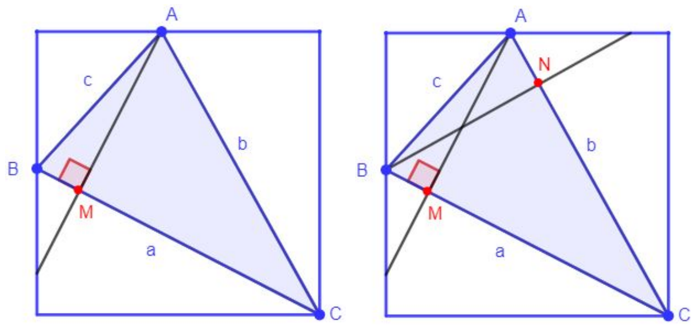
Teoremas del seno y coseno.

Se parte de un cuadrado de papel y se marcan dos puntos A y B en dos de sus bordes que sean adyacentes. Mediante el Axioma $(\mathbf{O_1})$ se construye el único pliegue que pasa por A y B. Denotando por C el vértice del cuadrado que resulta de la intersección de los otros dos bordes restantes, se realiza el pliegue que pasa por A y C, y otro pliegue que pasa por B y C de nuevo mediante el Axioma $(\mathbf{O_1})$. Así, se obtiene un triángulo ABC.



Paso 1 Paso 2 Paso 3

Ahora, utilizando el Axioma $(\mathbf{O_4})$, se realiza el único pliegue que lleve B sobre el lado a y que pase por el punto A. De esta forma, se obtiene el punto M de intersección entre el pliegue y el lado a, donde el segmento $\overline{AM}$ es la altura del triángulo sobre el lado a, h_a. De nuevo por $(\mathbf{O_4})$, se construye el único pliegue perpendicular al lado b y que pase por el punto B, que da lugar al punto N de intersección entre el pliegue y el lado b de forma que $\overline{BN} = h_b$.



Paso 4 Paso 5

Finalmente, razonando como se expone en las demostraciones de ambos Teoremas en el apartado anterior, se obtiene la solución.

C. Planteamiento.

Esta actividad se plantea para un curso de 1º de Bachillerato de la asignatura **Matemáticas I**, ya que los contenidos de trigonometría trabajados pertenecen al Bloque 4 del currículo de la misma. Por tanto, las sesiones dedicadas a esta actividad se enmarcan dentro de la temporalización de la Unidad Didáctica que englobe estos contenidos de Trigonométría en dicha asignatura.

Los conocimientos previos necesarios y que se suponen sabidos por el alumnado por ser parte del currículo de cursos anteriores son:

- Resultados básicos sobre propiedades de la Geometria Euclídea en el plano.
- Puntos y rectas notables de un triángulo.
- Cálculo del área de un triángulo.

- Teorema de Pitágoras.
- Medida de ángulos en grados y radianes y conversión entre ambas unidades.

D. Metodología y Recursos.

Para esta actividad se van a poner en práctica las siguientes metodologías:

- **Resolución de problemas.**
  Esta metodología constituirá el principal método de trabajo del alumnado, tanto de forma individual como de manera conjunta. En cuanto a la resolución de problemas de forma individual, se podrá llevar a cabo durante las sesiones en el aula o como tarea para casa. Cada alumno trabajará personalmente en la resolución de ejercicios y problemas, contando en todo momento con la ayuda del docente para solucionar posible dudas y guiar en la superación de bloqueos. De igual manera, el docente deberá observar el progreso de cada alumno y alumna, ofreciendo atención personalizada a cada uno y adecuándose en mayor medida a las necesidades individuales. Para trabajar la resolución de problemas de forma conjunta entre el alumnado, el docente planteará cuestiones para que el alumnado, ofreciendo sus ideas y colaborando entre ellos, lleguen a una solución conjunta.
  Con esta metodología se desarrolla la competencia en comunicación lingüística, la competencia matemática, la competencia de aprender a aprender, las competencias sociales y cívicas y la de sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.
- **Portfolio Didáctico.**
  Cada alumno deberá elaborar un Portfolio Didáctico personalizado: una carpeta, archivador o similar, en la que registre su trabajo y aprendizaje durante la actividad. Este documento deberá incluir las construcciones de Papiroflexia realizadas por el estudiante, así como la resolución de los ejercicios y problemas propuestos por el docente en el listado de ejercicios y problemas que se proporcionará a cada alumno. Se insistirá en la correcta expresión escrita de los razonamientos y los pasos seguidos utilizando el lenguaje matemático adecuado. A mayores, puede incluir mapas conceptuales, anotaciones, o esquemas que hayan servido al estudiante para aclarar conceptos trabajados durante las tareas. Deberá estar organizado de forma secuencial y se entregará al docente en la Sesión 3, ya que será el principal instrumento de evaluación esta actividad.
  Este recurso permite tanto al docente como al propio estudiante el seguimiento del proceso de aprendizaje, siendo el estudiante responsable de la autorregulación de su aprendizaje y autonomía, favorenciendo el desarrollo de la competencia de aprender a aprender y la competencia de sentido de iniciativa y espíritu emprendedor. Al ser un documento personalizado, permite adecuar las tareas planteadas a las necesidades de cada alumno.

Los recursos necesarios para el desarrollo de esta actividad serán los siguientes:

- Papel de Papiroflexia o, en su defecto, folios para cada alumno y el docente, con el que se llevarán a cabo los procedimientos de plegado de papel.
- Proyector y pantalla. El docente proyectará en la pantalla las imágenes explicativas de los procedimientos de plegado. También se utilizará para llevar a cabo las explicaciones.
- Lista de ejercicios y problemas para el alumnado.
- Calculadora. El alumno podrá disponer de calculadora para realizar los cálculos necesarios en los ejercicios. Se pretende que el alumnado adquiera un correcto uso de esta herramienta, en particular, diferenciando correctamente la utilización de grados y radianes al calcular las razones trignométricas de ángulos.
- Portfolio de Aprendizaje personalizado de cada estudiante.

E. Temporalización. Situaciones de Aprendizaje.

Esta actividad se llevará a cabo en cuatro sesiones lectivas: la primera será de presentación de la actividad y las otras tres de 50 minutos cada una. No es necesario que sean sesiones consecutivas, sino que deberán adaptarse al desarrollo de contenidos marcados por la Unidad Didáctica sobre Trigonometría.

Sesión de Presentación.

En la primera sesión de la Unidad Didáctica en la que se enmarque esta actividad, se llevará a cabo la presentación y la explicación de los recursos, temporalización, el modo de trabajo y los objetivos de la misma al alumnado.

Durante las sesiones 1, 2 y 3, los alumnos y alumnas trabajarán de forma personal en la resolución de las tareas propuestas en la lista de ejercicios, que estarán basadas en las construcciones y procedimientos de Papiroflexia indicados por el docente en cada una de las sesiones. Se explicará al alumando cómo deben elaborar su portfolio didáctico, estableciendo conjuntamente los indicadores que se evaluarán y la fecha de entrega del mismo.

Sesión 1.

Se llevará a cabo una vez conocidas las razones trigonométricas de ángulos agudos en triángulos rectángulos y las equivalencias entre las razones trigonométricas de ángulos opuestos. Los contenidos que se van a trabajar son las razones trigonométricas del ángulo suma, diferencia y el ángulo doble.

El docente proyectará en la pantalla los Pasos 1, 2, 3 del procedimiento de Papiroflexia: Razones trigonométricas del ángulo suma. Cada alumno realiza los pliegues correspondientes en su cuadrado de papel, en el que se marcarán los puntos $\{A, B, C, D, R, Q\}$

y los ángulos β y α iniciales. Cada alumno comenzará a trabajar de forma individual en la primera tarea planteada en su listado de ejercicios, que consiste en responder a una serie de preguntas con el fin de conducir al estudiante hacia la demostración de la fórmula del seno y el coseno del ángulo suma. A medida que finalicen el primer ejercicio, continuarán con el segundo ejercicio.

Ejercicio 1. Observa el mapa de cicatrices obtenido al realizar los pliegues anteriores. Contesta a las cuestiones razonando tu respuesta:
1. ¿Cuánto mide el ángulo $\widehat{BAR}$?
2. ¿Cuánto mide el ángulo $\widehat{CQR}$?
3. ¿Cuánto mide el ángulo $\widehat{DRA}$?
4. Supongamos que $\overline{AR} = 1$ u., ¿cómo se relacionan los segmentos $\overline{AQ}$ y $\overline{RQ}$ con el seno y el coseno del ángulo α?
5. Observa el triángulo $\triangle QAB$: ¿Cómo calcularías $\sin(\beta)$ y $\cos(\beta)$? ¿Cuál es la medida de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BQ}$ en función de las razones trigonométricas seno y coseno de los ángulos α y β?
6. Observa el triángulo $\triangle RQC$: ¿Cómo calcularías $\sin(\beta)$ y $\cos(\beta)$? ¿Cuál es la medida de los segmentos $\overline{CQ}$ y $\overline{RC}$ en función de las razones trigonométricas seno y coseno de los ángulos α y β?
7.¿Cómo se relacionan los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{DR}$ con el seno y el coseno del ángulo $\beta + \alpha$?
8. Utilizando los resultados anteriores, demuestra las fórmulas del seno y el coseno del ángulo suma.

Ejercicio 2. Partiendo de las fórmulas del seno y el coseno del ángulo suma, demuestra las del ángulo diferencia:

$$\text{sen}(\beta - \alpha) \text{ y } \cos(\beta - \alpha).$$

Indicación: ¿Cómo se relacionan las razones trigonométricas de dos ángulos que son opuestos?

El docente proyectará en la pantalla los Pasos 1, 2, 3 y 4 del procedimiento de Papiroflexia Razones trigonométricas del ángulo doble para que cada alumno, según finalice el ejercicio 2, lo desarrolle en una nueva hoja de papel. En la hoja se marcará el ángulo $\widehat{CBA} = \beta$ y los puntos $\{A, B, C, M, N\}$.

Cada alumno continuará trabajando en el siguiente ejercicio de su lista que consiste en demostrar las fórmulas de las razones trigonométricas seno y coseno del ángulo doble, siguiendo con el mismo enfoque constructivista del ejercicio 1, pero ofreciendo menos indicaciones al alumnado.

Ejercicio 3. Observa el mapa de cicatrices obtenido al realizar los pliegues anteriores. Contesta a las cuestiones razonando tu respuesta:
1. ¿Cómo son los triángulos $\triangle MBN$ y $\triangle NAM$?¿Cuánto mide el ángulo $\widehat{MNA}$?
2. Supongamos que $\overline{NA} = 1$ u. ¿Cómo se relacionan los segmentos $\overline{BM}$ y $\overline{MN}$ con el seno y el coseno del ángulo β?
3. ¿Cuál es la medida de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{NC}$ en función de las razones trigonométricas seno y coseno del ángulo 2β?
4. Observa el triángulo $\triangle ABC$: ¿Cómo calcularías $\sin(\beta)$ y $\cos(\beta)$?.
5. Utilizando los resultados anteriores, demuestra las fórmulas del seno y el coseno del ángulo doble.

Una vez obtenidos los resultados anteriores, cada alumno trabajará en el Ejercicio 4 de aplicación de los mismos. El ejercicio permite que cada alumno encuentre distintos caminos para llegar a la solución.

Ejercicio 4. Sabiendo que $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **y** $\cos(15ž) = 0{,}9659$**, calcula:**

a. $\sin(\frac{\pi}{3})$	**b**. $\cos(20ž)$	**c**. $\cos(\frac{\pi}{6})$
d. $\cos(75)$	**e**. $\sin(\frac{\pi}{12})$	**f**. $\sin(105ž)$

Cada alumno trabajará siguiendo su propio ritmo de aprendizaje y el docente adquiere el papel de guía del proceso, observando y resolviendo las dudas que surjan.

Sesión 2.

Se llevará a cabo una vez conocidas las razones trigonométricas de ángulos agudos de triángulos rectángulos. Los contenidos que se van a trabajar son los Teoremas del Seno y Coseno.

La primera tarea llevaba a cabo por el alumnado será la construcción de un triángulo cualquiera a partir de su hoja de papel, siguiendo los Pasos 1, 2 y 3 del procedimiento de Papiroflexia Teoremas del seno y coseno. Esta vez no se proyectará en la pantalla, sino que el docente dará las instrucciones de forma oral, buscando así no condicionar la forma del triángulo construido por cada alumno según la protectada en la pantalla, de manera que haya variedad de triángulos. Una vez que cada alumno tenga nombrados los vértices $\{A, B, C\}$ y los lados a, b, c de su triángulo, el siguiente paso será realizar los pliegues correspondientes que den lugar a las alturas de dos de sus lados. Para ello, se aportarán ideas por parte de todos los alumnos, haciendo énfasis en la correcta expresión oral de los procedimientos y razonamientos descritos. Esta primera tarea tendrá una duración de 10 minutos al comienzo de la sesión.

A continuación, cada alumno y alumna continuará trabajando con los ejercicios 5 y 6 propuestos en la lista, también individualmente respetando su ritmo y contando con la guía del docente para superar bloqueos o dudas.

Ejercicio 5. Observa el triángulo que acabas de construir y demuestra el siguiente resultado:

Teorema del Seno.

Dado un triángulo cualquiera $\triangle ABC$, se cumple que

$$\frac{\sin(\widehat{A})}{a} = \frac{\sin(\widehat{B})}{b} = \frac{\sin(\widehat{C})}{c}.$$

Indicación: Al construir la altura sobre uno de los lados, se pueden obtener dos expresiones para esa altura en función de dos ángulos distintos.

Ejercicio 6. Observa el triángulo que acabas de construir y demuestra el siguiente resultado:

Teorema del Coseno.

Dado un triángulo cualquiera $\triangle ABC$, se cumplen las siguiente igualdades:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A}),$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\widehat{B}),$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{C}).$$

Indicación: Al construir la altura sobre uno de los lados obtienes dos triángulos a los que puedes aplicar el Teorema de Pitágoras.

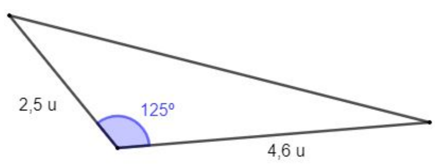
Una vez obtenida la demostración de ambos teoremas y apoyándose en la construcción de Papiroflexia realizada, finalizan con los ejercicios 7 y 8.

Ejercicio 7. Durante el transcurso de una manifestación se utiliza un dron para controlar posibles disturbios. En un momento determinado, el grupo de personas asistentes va desde la Plaza A hasta la Plaza B de la ciudad. La longitud de la calle recta que une ambas plazas es de un kilómetro, y desde el dron se observa la plaza A con un ángulo de 55º con la horitonzal. Calcula la altura a la que se encuentra el dron sabiendo:

a. Que el ángulo con el que se observa la plaza B desde el dron es de 65º.

b. Que la distancia a la que se encuentra el dron de la plaza B es de 900 metros.

Ejercicio 8. Calcula el área del triángulo de la imagen.



Deduce la fórmula general del área de un triángulo $\triangle ABC$ conocidos los lados a y c y el $\sin(\widehat{B})$.

Sesión 3.

Dentro de la Unidad Didáctica de Trigonometría en la que se englobe esta actividad, se reservará una de las últimas sesiones para que el alumnado pueda terminar de completar las tareas de las sesiones 1 y 2, así como resolver dudas que hayan surgido durante el trabajo personal en las mismas. En esta última sesión, cada alumno también se dedicará a terminar de aclarar y organizar las tareas que debe recoger en su portfolio, y realizar una reflexión sobre su proceso de aprendizaje, que deberá redactar como respuesta al último ejercicio de la lista.

Ejercicio 9. Autorreflexión. Escribe tu reflexión personal sobre el trabajo realizado, los logros y las dificultades encontradas, y el aprendizaje adquirido durante el desarrollo de esta actividad.

F. Evaluación.

El principal instrumento de evaluación de esta actividad será el Portfolio Didáctico, que permitirá dos enfoques: evaluar formativamente y sumativamente. La autorreflexión del alumno sobre su trabajo, esfuerzo y aprendizaje permite desarrollar la meta-cognición del aprendizaje. El análisis de este documento llevado a cabo por el docente permite realizar una completa evaluación competencial y la objetiva calificación del aprendizaje del alumno, así como la reflexión sobre las tareas propuestas y su actuación docente.

La evaluación del aprendizaje del alumnado por medio de esta actividad se llevará a cabo mediante el análisis del contenido del portfolio de cada alumno. Los ejercicios del 1 al 8 tendrán una calificación de hasta 5 puntos cada uno. En cuanto a la evaluación del propio documento del Portfolio Didáctico, se pueden considerar indicadores como los descritos en Trelles Zambrano, Bravo Guerrero & Barrazueta Samaniego (2017, Figura 2), asignando una puntuación a cada uno de ellos. A continuación se listan aquellos que se valorarán en esta Actividad:

1. Entregó todo el contenido del Portfolio. (10 puntos)
2. Existe una buena presentación del Portfolio. (4 puntos)
3. Las construcciones de Papiroflexia son correctas y claras.(4 puntos)
4. Aplica procedimientos correctos para solucionar los problemas 1-8. (1 punto por problema)
5. Las respuestas de los ejercicios 1-8 son correctas.(1 punto por problema)
6. Hay evidencia de su esfuerzo en su proceso de aprendizaje. (8 puntos)
7. La respuesta del Ejercicio 9 evidencia un proceso de reflexión constante y serio. (8 puntos)

Finalmente, la puntuación total sobre 10 obtenida, contará un 30 % de la calificación final de cada alumno dentro de la Unidad Didáctica de Trigonometría.

Por otra parte, la evaluación de la actividad se llevará a cabo mediante la reflexión del docente en función de los resultados obtenidos tras el análisis de los Portfolios Didácticos del alumnado y las dificultades encontradas en el desarrollo de la actividad, procurando considerar posibles estrategias de mejora de la misma, y mediante la rúbrica.

Actividad 3. Curvas Cónicas.

A. Contenidos.

- Lugares geométricos del plano.
- Cónicas. Circunferencia, elipse, hipérbola y parábola. Ecuación y elementos.

<u>**Desarrollo de contenidos**</u>

Las curvas cónicas se obtienen como la intersección entre una superficie cónica de revolución (esto es, un cono) y un plano. Dependiendo del grado de inclinación del plano con respecto de la generatriz y del eje del cono, se obtienen la **circunferencia**, la **elipse**, la **parábola** y la **hipérbola**.

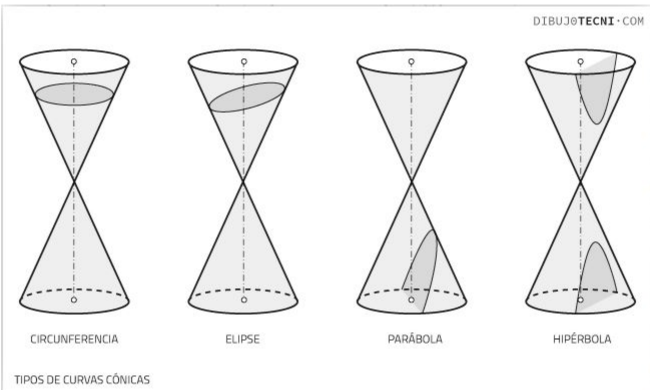
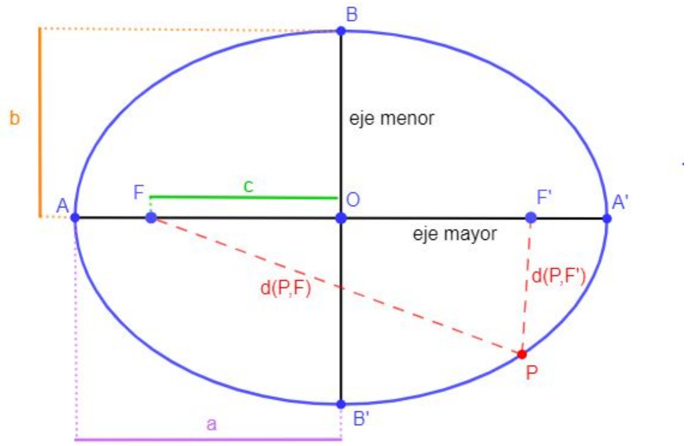


Figura 3.16: Fuente: DIBUJOTECNI.COM. Curvas Cónicas.

Definición 3.2.11. *Una **elipse** es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos, F y F', es constante. Una elipse tiene los siguientes elementos:*

- ***Focos**: son los puntos F y F'.*
- ***Distancia focal:** es la longitud del segmento $\overline{FF'}$, es decir, es la distancia entre los dos focos, $d(F, F') = 2c$, $c \in \mathbb{R}$.*
- ***Eje mayor:** es la recta que une los dos puntos A y A' de la elipse que se encuentran a mayor distancia. La longitud del segmento $\overline{AA'}$ es $d(A, A') = 2a$, $a \in \mathbb{R}$. Los focos son puntos de este eje.*

- ***Eje menor:*** *es la recta que une los dos puntos B y B' de la elipse que se encuentran a menor distancia. La longitud del segmento $\overline{BB'}$ es $d(B, B') = 2b$, $b \in \mathbb{R}$. El eje menor es la recta perpendicular al eje mayor que pasa por el punto medio del segmento $\overline{FF'}$.*
- ***Centro****: es el punto O de intersección de los dos ejes de la elipse.*
- ***Vértices:*** *son los puntos A, A', B, y B'.*
- ***Excentricidad****: se define como su grado de achatamiento $e = \dfrac{c}{a}$.*
  Como $c \leq a$, entonces $0 \leq e < 1$.



Proposición 3.2.5. *Dada una elipse cuyos elementos se denotan como se describe anteriormente, y sea $k \in \mathbb{R}$ la constante resultante de la suma de distancias de un punto de la elipse a los focos, entonces $k = 2a$.*

Demostración. Tomamos el vértice A de la elipse y por definición,

$$d(A, F) + d(A, F') = k.$$

Por otro lado, $d(F, O) = d(O, F') = c$ y $d(A, O) = d(O, A') = a$, luego $d(A, F) = a - c$ y $d(A, F') = a + c$. Entonces,

$$k = d(A, F) + d(A, F') = (a - c) + (a + c) = 2a.$$

□

Proposición 3.2.6. *Dada una elipse de vértices A, A', B y B' centrada en el origen $O(0,0) \in \mathbb{R}^2$ y cuyos focos son F y F', puntos del eje de abscisas, entonces su ecuación es*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

siendo $a = d(A, O) = d(O, A')$ y $b = d(B, O) = d(O, B')$, con $a \geq b > 0$.

Teorema 3.2.4. ***Teorema de Pitágoras de la elipse.*** *Dada una elipse de vértices A, A', B y B', centro O y cuyos focos son F y F', entonces se cumple que*

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

donde $a = d(A, O) = d(O, A')$, $b = d(B, O) = d(O, B')$ y $c = d(F, O) = d(O, F')$ con $a \geq b > 0$.

Demostración. Se considera el vértice B perteneciente a la elipse. Por definición

$$d(B, F) + d(B, F') = 2a.$$

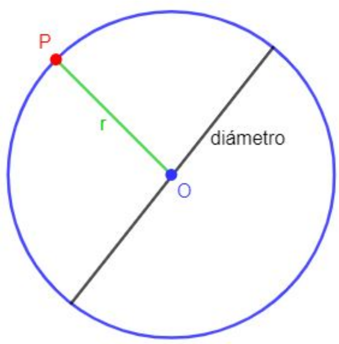
Además, como B pertenece a la mediatriz del segmento $\overline{FF'}$, entonces $d(B, F) = d(B, F')$ y por tanto $d(B, F) = d(B, F') = a$. Considerando el triángulo rectángulo de vértices $\triangle FOB$ y aplicando el Teorema de Pitárogas:

$$d(B, F)^2 = d(O, B)^2 + d(F, O)^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2.$$

□

Definición 3.2.12. *Una **circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan una distancia r de un punto O. Una circunferencia tiene los siguientes elementos:*

- ***Centro**: es el punto O.*
- ***Radio:** es el segmento que une el centro O con un punto P de la circunferencia y tiene longitud r, es decir, $r = d(P, O)$.*
- ***Diámetro:** es el segmento que une dos puntos distintos de la circunferencia y pasa por el centro O, cuya longitud es $2r$.*



Proposición 3.2.7. *Dada una circunferencia de centro $O(x_0, y_0)$ y radio r, entonces su ecuación es*

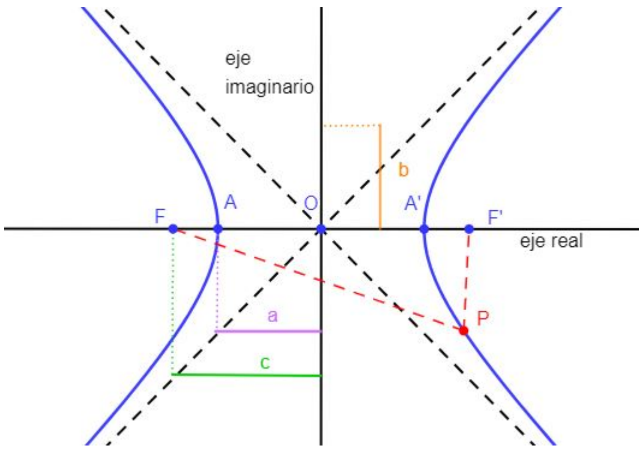
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

siendo $a = d(A, O) = d(O, A')$ y $b = d(B, O) = d(O, B')$, con $a \geq b > 0$.

Corolario 3.2.3. *Una circunferencia de radio r es un caso particular de elipse degenerada en la que la excentricidad $e = 0$.*

Definición 3.2.13. *Una **hipérbola** es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias en valor absoluto a dos puntos fijos, F y F', es constante. Una hipérbola tiene los siguientes elementos:*

- ***Focos**: son los puntos F y F'.*
- ***Distancia focal:** es la longitud del segmento $\overline{FF'}$, es decir, es la distancia entre los dos focos, $d(F, F') = 2c$, $c \in \mathbb{R}$.*
- ***Centro**: es el punto medio O del segmento $\overline{FF'}$.*
- ***Eje real:** es la recta que pasa por los focos F y F'.*
- ***Eje imaginario:** es la recta perpendicular el eje real que pasa por el centro C.*
- ***Vértices:** son los puntos A, A'. La distancia entre los dos vértices es $d(A, A') = 2a$.*
- ***Parámetro** b**:** es el valor real positivo definido por la expresión $b^2 = c^2 - a^2$.*
- ***Asíntotas:** son las dos rectas que pasan por el centro O y tienen pendientes $\pm\dfrac{b}{a}$ respectivamente.*
- ***Excentricidad**: se define como $e = \dfrac{c}{a} > 1$.*



Proposición 3.2.8. *Dada una hipérbola cuyos elementos se denotan como se describe anteriormente, y sea $k \in \mathbb{R}$ la constante resultante de la diferencia en valor absoluto de distancias de un punto de la hipérbola a los focos, entonces $k = 2a$.*

Demostración. Tomamos el vértice A de la hipérbola y por definición,

$$|d(A, F) - d(A, F')| = k.$$

Por otro lado, $d(F, O) = d(O, F') = c$ y $d(A, O) = d(O, A') = a$, luego $d(A, F) = a - c$ y

$d(A, F') = a + c$. Entonces,

$$k = |d(A, F) - d(A, F')| = |(a - c) - (a + c)| = 2a.$$

□

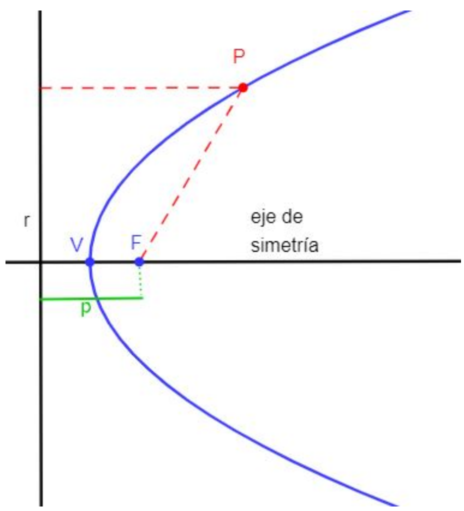
Proposición 3.2.9. *Dada una hipérbola de vértices A y A' centrada en el origen $O(0,0) \in \mathbb{R}^2$ y cuyos focos son F y F', puntos del eje de abscisas, entonces su ecuación es*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

siendo $a = d(A, O) = d(O, A')$ y $b = d(B, O) = d(O, B')$, con $a \geq b > 0$.

Definición 3.2.14. *Una **parábola** es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo F y una recta r. Una parábola tiene los siguientes elementos:*

- ***Foco**:es el punto F.*
- ***Directriz:** es la recta r.*
- ***Parámetro** p**:** es la distancia del foco a la directriz, es decir, $p = d(F, r)$.*
- ***Eje de simetría:** es la recta que pasa por los focos F y es perpendicular a r.*
- ***Vértice**: es el punto V de intersección entre la parábola y su eje de simetría.*



Proposición 3.2.10. *Dada una parábola de vértice $V(0,0) \in \mathbb{R}^2$, cuyo foco F es un punto del eje de abscisas y sea r su directriz, entonces su ecuación es*

$$y^2 = 2px,$$

siendo $p = d(F, r)$.

Definición 3.2.15. *La **recta tangente** a una curva en un punto P perteneciente a la misma es la recta cuyo único punto de intersección con la curva es dicho punto P, llamado **punto de tangencia.***

Definición 3.2.16. *La **recta tangente a una curva en un punto** Q que no pertenece a la curva, es la recta que pasa por Q y tiene un único punto de intersección con la curva.*

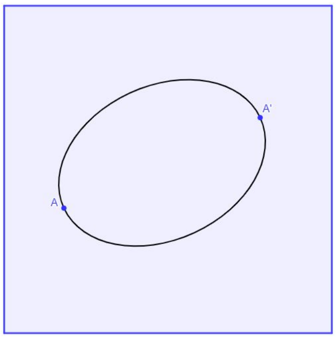
B. Procedimiento con Papiroflexia.

Se pueden encontrar multitud de procedimientos de plegado para la construcción de las curvas cónicas, algunos de ellos en los libros mencionados en la Sección 2.2. Para esta actividad en concreto, se han seleccionado aquellos que se considera podrían adaptarse mejor al aula y los contenidos de Bachillerato, así como aquellos que dieran lugar a situaciones de aprendizaje más ricas en cuanto a su enfoque de aprendizaje activo.

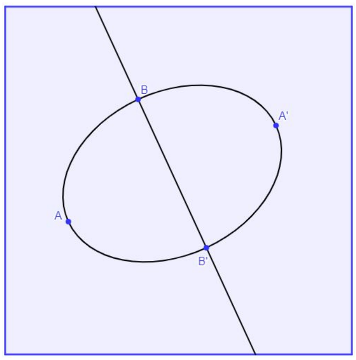
Hallar los parámetros de una Elipse dada.

Este procedimiento se ha tomado de de la Peña (2001).

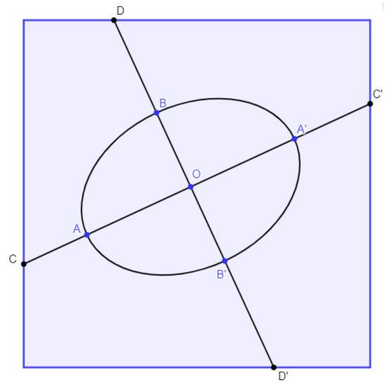
Se comienza con una hoja de papel en la que se ha representado únicamente una elipse concreta y se han marcado los puntos A y A' de intersección de la elipse con su eje mayor. El objetivo será obtener los dos ejes, los vértices B y B', y los dos focos de la elipse para después, con ayuda de una regla con la que medir distancias, obtener su excetricidad y distancia focal.



En el paso 1, aplicando el axioma $(\mathbf{O_2})$, se realiza el pliegue que lleva A sobre A', que resulta el eje menor de la elipse. Los dos puntos de intersección de este con la elipse son los vértices B y B'. A continuación, con el axioma $(\mathbf{O_1})$ se realiza el pliegue que pasa por A y A' para obtener el eje mayor. La intersección de ambos pliegues es el centro O de la elipse. Se denota por C el punto de intersección del pliegue que pasa por los puntos A y A' con el borde del papel más cercano al punto A. Análogamente, C' será el punto de intersección de este mismo pliegue con el borde de la hoja más cercano a A'. Por otro lado, tomando el pliegue que pasa por los puntos B y B', se denota por D el punto de intersección de este con el borde del papel más cercano al punto B, y por D' la intersección con el borde más cercano al B'.

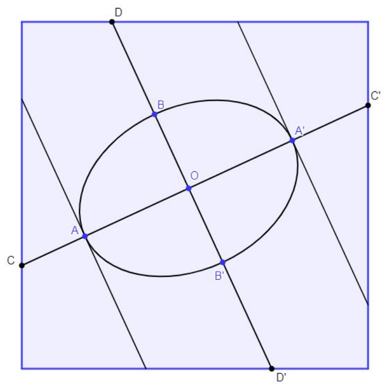


Paso 1

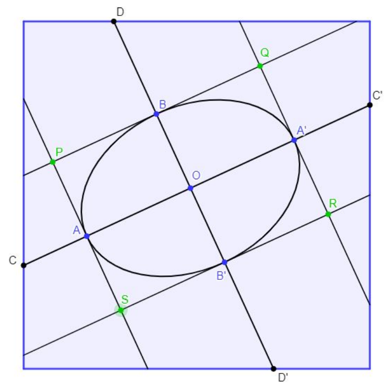


Paso 2

Ahora, mediante ($\mathbf{O_4}$) se construye el pliegue que lleva C sobre el segmento $\overline{AA'}$ y pase por el punto A y, de nuevo, el pliegue que lleva C' sobre el segmento $\overline{AA'}$ y pase por el punto A'. De forma análoga, construimos los pliegues que lleven los puntos D y D' sobre el segmento $\overline{BB'}$ pasando respectivamente por el punto B y B'. Así, se obtiene el rectángulo de vértices P, Q, R y S circunscrito a la elipse dada, ya que cada uno de los cuatro pliegues anteriores resultan la tangente a la elipse en los puntos A, A', B y B'.

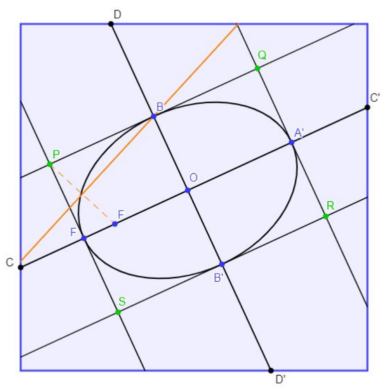


Paso 3

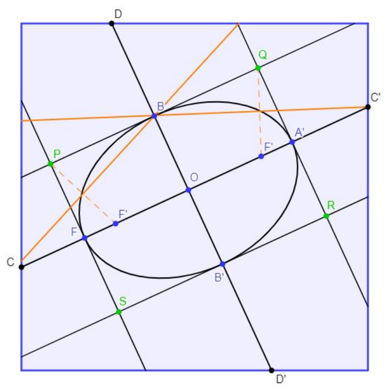


Paso 4

Se construye ahora el foco F situado en el segmento $\overline{AO}$ aplicando el axioma ($\mathbf{O_5}$), de manera que se realiza el pliegue que lleve P sobre el segmento $\overline{AA'}$ y pase por B. El foco F se obtiene como el simétrico del punto P con respecto de este último pliegue, y $F \in \overline{AO}$.



Paso 5



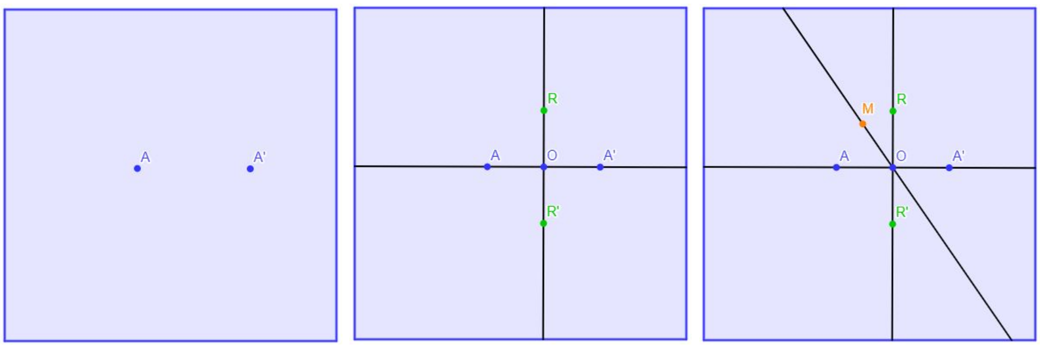
Paso 6

Llegados a este punto, hay varias maneras de conseguir F'. Una opción es construir F' situado en el segmento $\overline{OA'}$ de forma similar al procedimiento anterior, esta vez como punto simétrico del punto Q con respecto de la recta resultante del pliegue que lleva Q sobre $\overline{AA'}$ pasando por B'. Otra manera es, mediante ($\mathbf{O_4}$), llevar el punto F sobre el segmento $\overline{OA'}$ haciendo que el pliegue pase por O. Así, F' se obtiene como el punto simétrico a F con respecto de este último pliegue.

Construcción de una Hipérbola dados sus vértices.

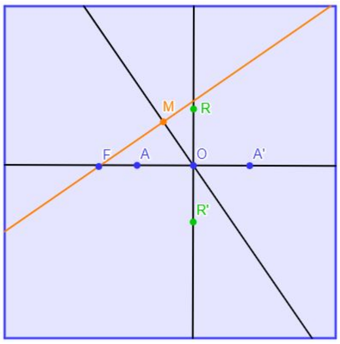
Este procedimiento se ha tomado de Sundara Row (1917) y de la Peña (2001).

Se comienza situando en el cuadrado de papel los dos puntos A y A' que serán los vértices de la hipérbola. Lo primero que será construir el eje real y el eje imaginario. El primero, como la recta resultante del pliegue que pasan por A y A', mediante ($\mathbf{O_1}$); el segundo, como la recta perpendicular al eje real que pasa por el punto medio del segmento $\overline{AA'}$, el cual será el centro O, mediante axioma ($\mathbf{O_2}$) llevando A sobre A'. Se va a marcar también los puntos R y R' como aquellos del eje imaginario que distan del centro una longitud igual a la del segmento $\overline{AO}$, aplicando el axioma ($\mathbf{O_3}$). Con el axioma ($\mathbf{O_1}$) se realiza un pliegue por el punto O. Se quiere determinar un punto M situado en la recta resultante del pliegue anterior de manera que la longitud del segmento $\overline{OA}$ sea igual a la del segmento $\overline{OM}$. Para ello, se aplica el axioma ($\mathbf{O_5}$) y se obtiene M como el punto simétrico de A respecto del pliegue que lleva A sobre el pliegue anterior y que pasa por O.

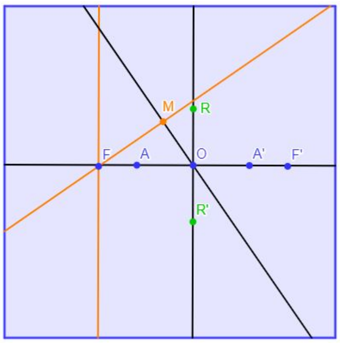


Paso 1 Paso 2 Paso 3

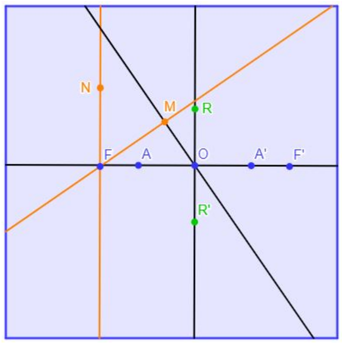
Aplicando ($\mathbf{O_4}$), se construye la perpendicular al segmento $\overline{OM}$ que pasa por M, lo que da lugar al punto de intersección F entre esta y el eje mayor, que será el foco de la hipérbola más próximo al vértice A. El foco F' se obtiene como el simétrico de F respecto del eje imaginario, que se encuentra en el eje real. De nuevo con ($\mathbf{O_4}$), se realiza el pliegue perpendicular al eje real por el foco F. Después, se obtiene el punto N como el reflejado del punto M en la perpendicular al eje real por F, aplicando el axioma ($\mathbf{O_3}$) que lleve el segmento $\overline{MF}$ sobre la perpendicular anterior, de forma que la longitud del segmento $\overline{FM}$ sea igual a la de $\overline{FN}$.



Paso 4



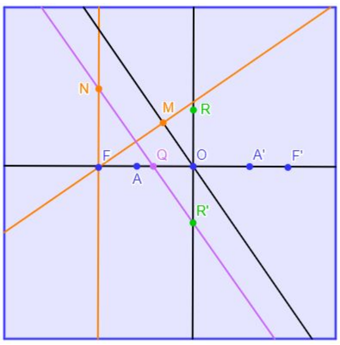
Paso 5



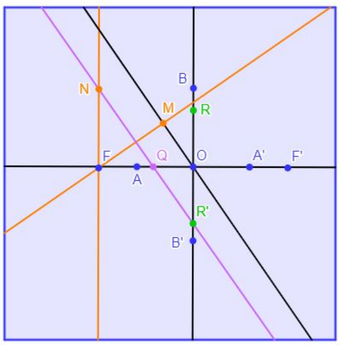
Paso 6

A continuación, se construye el pliegue que pasa por N y por R' (el punto que se encuentra en la semirecta del eje imaginario que no corresponde al cuadrante en el que se sitúa el punto N), obtieniendo, de esta manera, el punto Q como punto de intersección de este pliegue con el eje real. Se necesita situar en el eje los dos puntos B y B' que se encuentran a una distancia $|\overline{FN}|$ del centro O. Para ello, se aplica repetidamente el axioma $(\mathbf{O_3})$ llevando el segmento $\overline{FN}$ sobre el eje imaginario para determinar B y, de nuevo, el segmento $\overline{OB}$ sobre el eje imaginario para obtener B'.

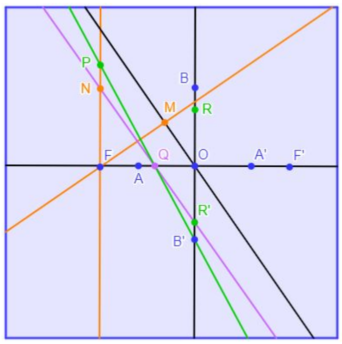
Finalmente, se realiza el pliegue que pasa por los puntos Q y B' y que interseca al segmento $\overline{FN}$ en el punto P. Este punto es un punto de la hipérbola de focos F y F', vértices A y A' y de parámetro b igual a la longitud del segmento $\overline{OB}$. La recta que pasa por O y por M es una de las asíntotas, y la recta que pasa por los puntos B' y P es la tangente a la curva en el punto P.



Paso 7

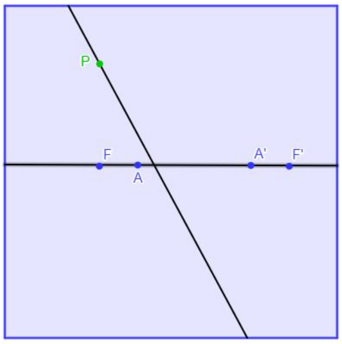


Paso 8

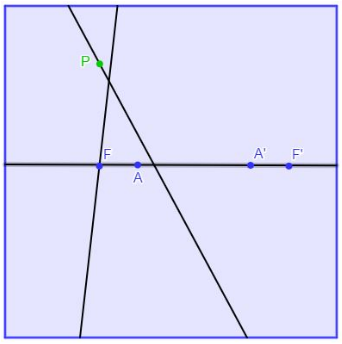


Paso 9

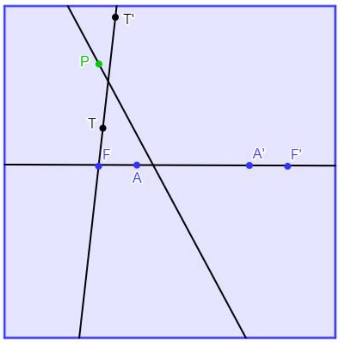
Una vez obtenidos los focos, se procede a obtener otro punto P_1 de la hipérbola. Se construye un pliegue que pase por el foco F. Se busca un punto S de este pliegue que se encuentre a una distancia $2a$ del foco F, donde $2a = |\overline{AA'}|$. Realizando el pliegue que lleve los vértices A y A' sobre el pliegue anterior con el axioma $(\mathbf{O_3})$, se marcan los puntos coincidentes de A y A' en la recta construída que pasa por F, que se denotan por T y T' respectivamente.



Paso 10



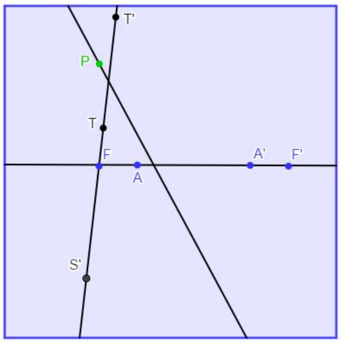
Paso 11



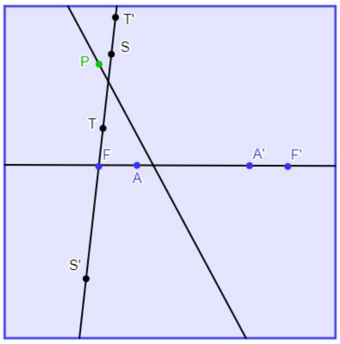
Paso 12

Después, con $(\mathbf{O_2})$, se realiza el pliegue que lleva T sobre O y se marca el punto S' simétrico de T' con respecto al último pliegue. Por último, aplicando $(\mathbf{O_4})$ se obtiene el punto S buscado como el simétrico del punto S' con respecto de la perpendicular al pliegue inicial que pasa por F. De nuevo mediante $(\mathbf{O_2})$, se realiza el pliegue que lleva S sobre el foco F'. El nuevo punto P_1 de la hipérbola se obtiene como la intersección del pliegue inicial que pasaba por F con este último, que resulta ser la tangente a la hipérbola en el punto P_1[10]. Este punto pertenece a la hipérbola porque cumple la condición:

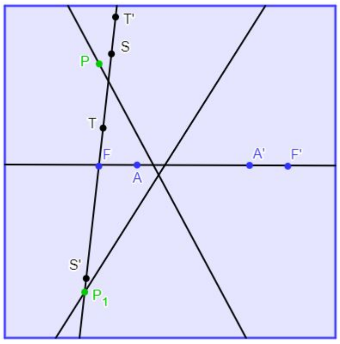
$$d(P, F') - d(P, F) = d(P, S) - d(P, F) = d(F, S) = 2a.$$



Paso 13

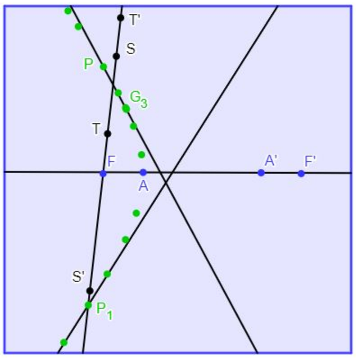


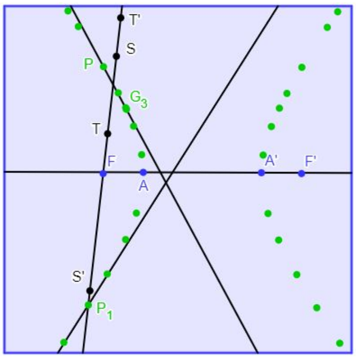
Paso 14



Paso 15

Reiterando el proceso anterior desde el paso 11, se obtienen los distintos puntos de la hipérbola. Para obtener la rama correspondiente al vértice A' y al foco F' se utiliza la simetría con respecto del eje imaginario.



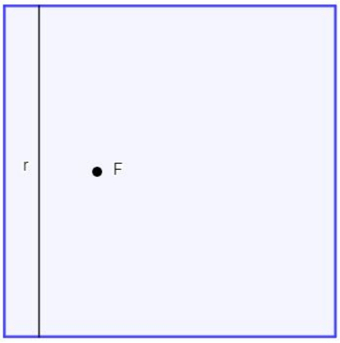


[10]Se podría haber considerado el punto S' que también se encuetra a una distancia de $2a$ del foco F, y llevando este sobre F' se obtiene un nuevo punto P_1' que es el simétrico de P_1 con respecto del eje real.

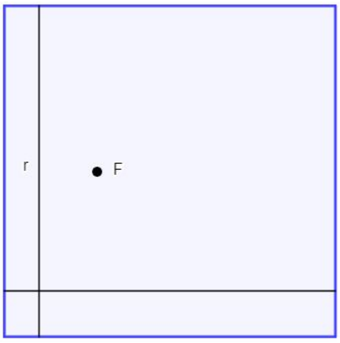
Construcción de una Parábola dados su foco y directriz.

Este procedimiento se ha tomado de Olson (1976).

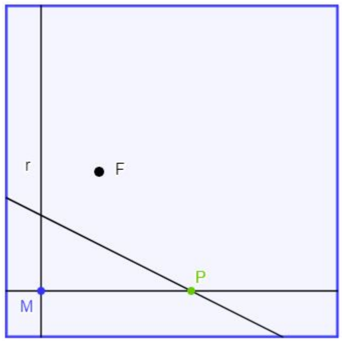
Se comienza determinando en el cuadrado de papel un punto F y una recta r (que puede tomarse como uno de los bordes) tales que $F \notin r$, que serán el foco y la directriz de la parábola respectivamente. Mediante el axioma $(\mathbf{O_4})$ se construye un pliegue perpendicular a r y el punto de intersección de esta con la directriz se denota M. Al aplicar $(\mathbf{O_2})$ para realizar el pliegue que lleve el punto M sobre el foco F, se obtiene una recta cuya intersección con la perpendicular r previamente construida nos da un punto P. Entonces, el punto P pertenece a la parábola de foco F y directriz r.



Paso 1

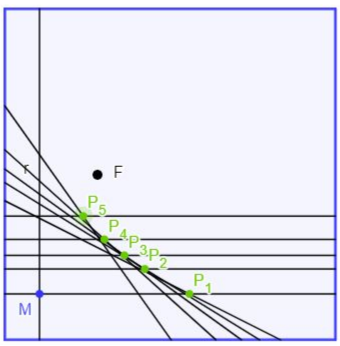


Paso 2

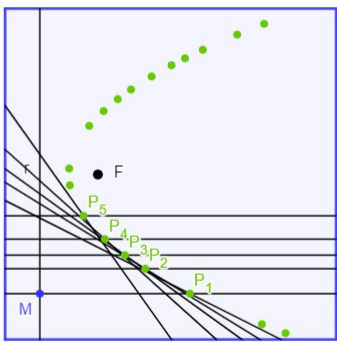


Paso 3

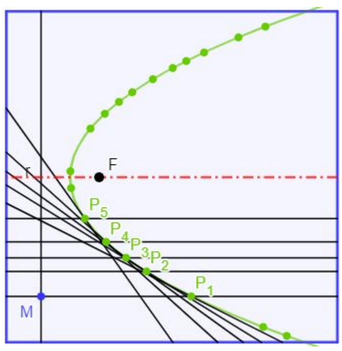
Se repite el procedimiento considerando distintas perpendiculares en cada caso. Tras n repeticiones (se concluye una vez obtenido un número considerable de puntos que permitan figurarse la parábola), se obtiene un conjunto de puntos P_i, $1 \leq i \leq n$ de forma que todos ellos pertenecen a la parábola de foco F y directriz r, ya que por como han sido construidos se encuentran a la misma distancia del foco y de la directriz. Esto ocurre porque al aplicar $(\mathbf{O_2})$, el punto $M \in r$ se convierte en el simétrico de F con respecto al pliegue. En consecuencia, $d(P, M) = d(P, F)$ debido a que P es un punto de la recta de simetría que resulta del pliegue y $d(P, M) = d(P, r)$.



Paso 4



Paso 5



Paso 6

El pliegue obtenido en la repetición i es la recta tangente a la parábola en el punto P_i. De esta forma la parábola se consigue como envolvente de sus tangentes.

C. Planteamiento.

Los contenidos de esta actividad pertenecen al Bloque 3 de la asignatura **Matemáticas I** de primero de Bachillerato. como parte de la Unidad Didáctica de Curvas Cónicas.

Sin embargo, el trazado de curvas cónicas también es un contenido del Bloque 1: Geometría y Dibujo Técnico del currículo de la asignatura Dibujo Técnico II. Por otro lado, las propiedades ópticas de las cónicas[11] están estrechamente relaccionadas con los contenidos del Bloque 5: Óptica geométrica del currículo de la asignatura de Física de 2º de Bachillerato, en cuanto al estudio de las Leyes de la Óptica y los elementos de los sistemas ópticos.

Por tanto, aunque las situaciones de aprendizaje que se van a describir en el apartado siguiente se enmarquen en un aula de matemáticas, se podría extender a un proyecto multidisciplinario de las asignaturas de Matemáticas, Dibujo Técnico y Física en un curso de Bachillerato. Sería interesante, por ejemplo, analizar los procedimientos de construcción de cada una de las cónicas con regla y compás en comparación con los procedimientos mediante Papiroflexia, para encontrar una correspondencia entre los pasos seguidos y los elementos de las cónicas necesarios en cada caso, así como proponer un estudio de su propiedades ópticas y búsqueda de ejemplos reales de las mismas, consiguiendo que el alumnado adquiera una visión conjunta de los contenidos de las tres materias y una contextualización práctica de estos en la vida real.

Los conocimientos previos a la práctica de esta actividad que se suponen sabidos por el alumnado son:

- Teorema de Pitágoras.
- Construcciones básicas de Geometría Plana: mediatriz, perpendicular o paralela.
- Concepto de área de una figura plana.
- Concepto de recta tangente a una curva en un punto.

D. Metodología y Recursos.

Para esta actividad se va a desarrollar un metodología de **Aprendizaje Cooperativo**, el cual Rué (s.f.) define como

> un conjunto de procedimientos o técnicas de enseñanza dentro del aula, que parten de la organización de la clase en pequeños grupos heterogéneos, donde los alumnos trabajan conjuntamente de forma coordinada para resolver tareas académicas y profundizar en su propio aprendizaje.

[11] **Propiedad de reflexión de las elipses.** Cuando una fuente de luz se sitúa en uno de los focos de un espejo elíptico, la luz se refleja y se concentra en el otro foco.
Propiedad de reflexión de las hipérbolas. Cuando una fuente de luz se coloca en un foco un espejo hiperbólico, la luz se refleja
Propiedad de reflexión de las parábolas. Cuando un espejo parabólico recibe rayos de luz pararelos al eje de simetría, la luz reflejada se concentra en el foco.

Dentro de esta metodología, se opta por la técnica de aprendizaje cooperativo informal *Situación problema*, que se llevará a cabo en cada una de las sesiones:

1. Situación problema			
Autor/es	Adaptación del Laboratorio de Innovación Educativa del colegio Ártica a partir de Ferreiro Gravié	Agrupamiento	Pequeño grupo
Objetivos	· Contextualizar el aprendizaje, dotándolo de funcionalidad. · Desarrollar la capacidad para resolver problemas. · Desarrollar la creatividad. · Buscar acuerdos y consensos.		
Desarrollo	Los pasos a seguir son:		
1	Se expone a los alumnos una situación problemática, que pone sobre la mesa algunos de los aspectos que se desarrollan en la unidad didáctica.		
2	Los alumnos, individualmente, dedican unos minutos a buscar una posible solución.		
3	Luego, en pequeño grupo, discuten las distintas soluciones y buscan una respuesta consensuada.		
4	El profesor elige al azar a un miembro de cada grupo para que explique la o las soluciones que han manejado.		
Consejos	Elegir una situación problema que tenga una evidente conexión con la vida cotidiana de los alumnos.		
A.A.C.	· Asegurarnos que la situación problema supone un desafío para él. · Adecuar los criterios de exigencias de la respuesta a su nivel. · Pedirle que genere al menos dos respuestas distintas. · Asegurar que, en ocasiones, tenga la oportunidad de desarrollar esta técnica con compañeros de nivel alto.		

Figura 3.28: Fuente: Torrego (2012, p.558).

Además, en el paso 4 del desarrollo, cada grupo deberá elaborar un documento de Word (o similar) en el que recojan la respuesta redactada al problema. De esta forma, al finalizar la segunda sesión, cada grupo habrá realizado un informe con la solución a cada uno de los problemas y ejercicios planteados, que deberán entregar al finalizar y servirá como instrumento de evaluación. Se comienza por el primer problema y para fomentar la cooperación entre todos los miembros, no se permitirá avanzar al problema siguiente hasta que se haya alcanzado una solución correcta y todos los miembros del grupo lo hayan comprendido. El docente deberá supervisar el proceso y el trabajo de cada grupo, así como resolver las dudas que puedan surgir.

En esta técnica, el trabajo grupal toma una importante relevencia a la vez que se fomenta la responsabilidad individual de cada miembro del grupo y la búsqueda del consenso grupal. Con ello, se trabajan distintas competencias, como la competencia en comunicación lingüística, competencia aprender a aprender, competencias sociales y cívicas y sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.

Los recursos necesarios para esta actividad son los siguientes:

- Papel de papiroflexia o, en su defecto, folios para cada alumno y el docente, con el que se llevarán a cabo los procedimientos de plegado de papel.

- Lista de ejercicios y problemas para cada uno de los grupos.
- Ordenador o tablet para cada uno de los grupos, en el que elaborarán el informe escrito con las respuestas a los problemas planteados.
- Herramienta GeoGebra Clásico: https://www.geogebra.org/classic?lang=es, necesario en la segunda sesión.
- Plataforma Moodle de la asignatura o similar. Cada grupo deberá entregar la versión digital del informe realizado en Word mediante esta plataforma.

E. Temporalización. Situaciones de Aprendizaje.

Esta actividad se llevará a cabo en dos sesiones lectivas de 50 minutos cada una, preferentemente consecutivas, una vez explicada y trabajada la teoría correspondiente a las curvas cónicas y sus elementos dentro de una Unidad Didáctica en la que se enmarquen estos contenidos.

Sesión 1.

Se implementará una vez expuestas las definiciones, elementos y propiedades de cada una de las curvas cónicas en el aula. Los primeros diez minutos de la sesión estarán dedicados a la presentación por parte del docente de la técnica *Situación problema*. Se divide el alumnado en grupos de entre tres y cinco alumnos y se organiza una disposición del aula que favorezca el trabajo de los grupos. Estos grupos serán distribuidos por el docente de forma que resulten heterogéneos, y teniendo en cuenta el nivel y características de cada alumno miembro del grupo.

A continuación, se repartirá a cada grupo la lista de ejercicios y problemas, y comienzan a trabajar mediante la técnica de Aprendizaje Cooperativo. Al tratarse de actividades basadas en Papiroflexia, el paso 2 del desarrollo de la técnica adquiere una mayor riqueza, ya que cada alumno puede llegar a una construcción distinta a partir de aplicar los mismos pasos de uno de los procedimientos descritos en el apartado B). Procedimiento con Papiroflexia, pero la solución de cada ejercicio es única, y la misma para todos los miembros del grupo. Se dedicarán 10 minutos máximo al trabajo individual por parte de cada alumno, y después otros 10 minutos a que se realice la discusión y el constrarse de ideas, de forma que se llegue a un consenso sobre la mejor respuesta. Finalmente, se redactará la solución en el informe.

El primer ejercicio consiste en que cada alumno lleve a cabo los pasos del procedimiento Construcción de una Hipérbola dados sus vértices, sin que conozcan cuál es la cónica resultante de aplicar tal procedimiento. Después, deberán debatir de qué cónica se trata demostrando que un punto de la misma cumple la propiedad de la hipérbola.

Ejercicio 1. A partir de los puntos A y A' marcados en el cuadrado de papel, realiza el siguiente procedimiento de Papiroflexia y responde a la pregunta:
Paso 1: Construir el pliegue que pasa por A y A', que se denota por r. Después, el pliegue que da lugar a la mediatriz del segmento $\overline{AA'}$ que se denota por m, y denotar el punto medio de $\overline{AA'}$ por O.
Paso 2: Construir los puntos simétricos de A pertenecientes a m con respecto de los pliegues que llevan A sobre la mediatriz. Se denotan R y R'.
Paso 3: Realizar un pliegue que pase por O y se denota por l. Construir el punto simétrico de A perteneciente a l con respecto al pliegue que lleva A sobre l. Se denota por M.
Paso 4: Construir el pliegue perpendicular al segmento $\overline{OM}$ por el punto M. Denotar por F el punto de intersección de esta con r. Construir el punto F' simétrico de F con respecto de m.
Paso 5: Construir un pliegue que pase por F que se denota por t.
Paso 6: Constrir un pliegue que lleve los puntos A y A' sobre t. Se denotan por T y T' los simétricos de A y A' con respecto de este pliegue en la recta t .
Paso 7: Construir el pliegue que lleva T sobre O y denotar S' el punto simétrico de T con respecto de este pliegue.
Paso 8: Construir el pliegue que lleva S' sobre F'. Denotar por P_1 el punto de intersección de este último con t.
Paso 9: Reiterar el proceso desde el Paso 5 tantas veces como consideres necesario para obtener nuevos puntos P_2, P_3, P_4 de la curva.

¿A qué cónica pertenecen los puntos P_i que has construido? Justifica la respuesta explicando las propiedades de la curva cónica.

Una vez terminado y comprobada la solución dada por el grupo al preguntar a uno de los alumnos del mismo, el docente les dará permiso para continuar con el siguiente ejercicio. Este consiste en trabajar con la ecuación de la hipérbola para comprobar si se ha comprendido el proceso de Papiroflexia seguido en el ejercicio 1.

Ejercicio 2. Se quiere construir mediante papiroflexia la hipérbola de ecuación

$$x^2 - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Al considerar el procedimiento anterior, ¿de qué segmentos se conoce la longitud?

Indicación: Ayúdate de la herramienta *GeoGebra Classic.*

Aunque el enunciado de los ejercicios sea básicamente el mismo, cada grupo tendrá pequeñas modificaciones en cuanto a los datos del ejercicio. Por ejemplo, para el ejercicio 3, la elipse de la que partirá cada uno de los grupos tendrá diferentes parámetros.

Sesión 2.

Los alumnos continúan trabajando en el mismo grupo de la Sesión 1, y con el mismo método de trabajo, esta vez resolviendo los ejercicios 3, 4 y 5. En el primero de ellos se trabaja el procedimiento de Hallar los parámetros de una Elipse dada. Este procedimiento permite distintas variaciones en los pasos, por lo que cada alumno seguirá aquel orden que crea más conveniente. En la fase de discusión deberán concluir cuál es la mejor secuencia de plegado para resolver el ejercicio de entre todas las propuestas.

Ejercicio 3. Observa la elipse representada en el cuadrado de papel. Utiliza la Papiroflexia y las propiedades de sus elementos para obtener sus vértices, sus ejes, su centro, sus parámetros a, b, y c y su ecuación. Describe los pasos seguidos en el proceso.
¿Cuál es la relacción entre una elipse y una circunferencia?

Ejercicio 4. Observa la elipse anterior y sus elementos y comprueba que se cumple el siguiente resultado:

Teorema de Pitágoras de la elipse.

Dada una elipse de vértices A, A', B y B', centro O y cuyos focos son F y F', entonces se cumple que

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

donde $a = d(A,O) = d(O,A')$, $b = d(B,O) = d(O,B')$ y $c = d(F,O) = d(O,F')$ con $a \geq b > 0$.
Demuestra el Teorema de Pitágoras de la elipse.

Para el ejercicio 5 se aumentará el tiempo dedicado al trabajo individual y a la discusión grupal si fuera necesario. Para este ejercicio los alumnos tratarán de modelizar un proceso de Origami para construir una parábola, como se muestra en el procedimiento Construcción de una parábola dados su foco y directriz.

Ejercicio 5. Utiliza la herramienta *GeoGebra Classic* para construir una parábola y diferentes tangetes a la curva. Modeliza un procedimiento de Papiroflexia que permita construir una parábola dados su foco y su directriz.

Indicación: Considera la definición de una parábola como lugar geométrico en el plano.

Al finalizar esta sesión, cada grupo deberá entregar la versión digital del informe con las respuestas a los cinco ejercicios en la plataforma Moodle.

F. Evaluación.

Esta actividad permite evaluar el aprendizaje del alumnado mediante distintos instrumentos de evaluación:

La evaluación del informe presentado por cada grupo permitirá valorar aspectos como el aprendizaje de los contenidos, la creatividad en las soluciones o la expresión escrita de los razonamientos mediante el lenguaje matemático adecuado, entre otros. La calificación de este informe será la misma para todos los miembros del grupo. Por otra parte, se evaluará individualmente a cada alumno mediante el análisis de la intervención oral de cada uno en las sesiones, como respuesta al paso 4 del desarrollo de la técnica *Situación problema*. Por ello, el docente deberá tratar de variar el alumno escogido para explicar la solución propuesta por el grupo de manera que todos los miembros tenga la oportunidad de responder. Finalmente, cada alumno deberá completar una rúbrica de coevaluación con la que evaluar el trabajo del resto de componentes de su grupo en la que se valoren aspectos como la cooperación de cada miembro, su disposición a proponer ideas o prestar ayuda a los demás compañeros, el respeto a las aportaciones de los demás, etc.

La calificación final de cada alumno será un 50 % la nota conjunta del informe de su grupo, un 30 % la coevaluación del resto de compañeros del grupo, y un 20 % restante de las exposición oral en el aula. A su vez, la calificación total de esta actividad tendrá una ponderación del 30 % dentro de la Unidad Didáctica en la que se lleve a cabo.

La evaluación de la actividad podrá ser realizada por el docente durante el desarrollo de la misma, para al finalizar completar una rúbrica que deje analizar los puntos fuertes y aquellos que deberían mejorar en cuanto a la temporalización, a metodología, los recursos utilizados, las dificultades encontradas, etc.

Actividad 4. Los tres problemas clásicos de la Matemática Griega.

A. Contenidos.

- Historia de las matemáticas.
- La duplicación del cubo.
- La trisección del ángulo.
- La cuadratura del círculo.

Desarrollo de contenidos.

Durante la época de la antigua Grecia aparecen tres problemas que fascinaron a muchos de los matemáticos de este periodo, conocidos como Los tres problemas clásicos de la Matemática Griega:

I. **La duplicación del cubo**. Dado un cubo de lado a, construir otro cubo de volumen doble.

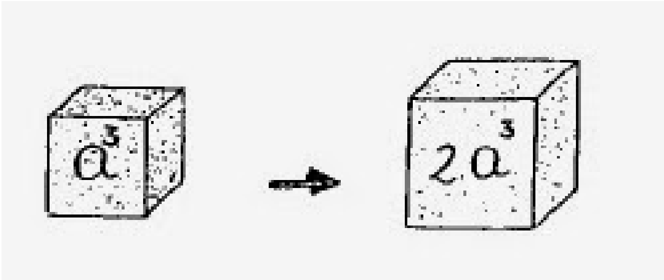


Figura 3.29: Fuente: Fernández, S. (1999)

Si se toma un cubo de lado igual a la unidad, su volumen será de 1 u^3. Por tanto, el problema consiste en calcular la longitud x que debe tener la arista de un cubo para que su volumen sea de $2u^3$. Esto equivale a resolver la ecuación cúbica $x^3 = 2$, cuya única raíz real es $\sqrt[3]{2}$. Por tanto, la irresolubilidad de este enunciado por medio de regla no marcada y compás es la imposibilidad de construir esta raíz cúbica con dichas herramientas.

II. **La trisección del ángulo**. Dado un ángulo $\widehat{A}$ arbitrario, construir un ángulo que mida exactamente $\frac{\widehat{A}}{3}$.

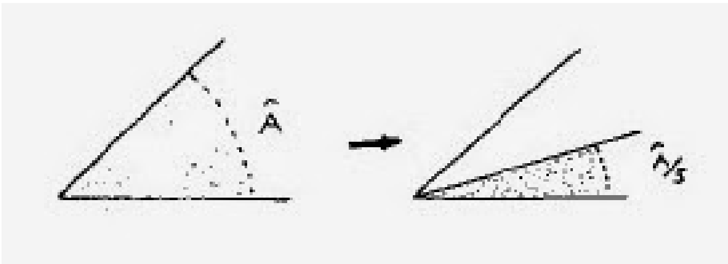


Figura 3.30: Fuente: Fernández, S. (1999)

Es sabido que existen ángulos que pueden ser trisecados mediante regla y compás. Por ejemplo, al realizar la habitual construcción de un triángulo equilátero mediante la regla y el compás, se obtienen tres ángulos de 60° que resulta ser la trisección del ángulo de 180°. Además, al realizar la bisección de uno de ellos, se obtiene un ángulo de 30° que triseca al ángulo de 90°. La verdadera cuestión es construir la trisección de cualquier ángulo arbitrario. Por tanto, si fuera posible encontrar un contraejemplo al problema, esto es, un ángulo cuya trisección no pueda construirse mediante regla y compás, quedará probada su irresolubilidad.

Un ángulo α es construible si sus proyecciones $\sin(\alpha)$ y $\cos(\alpha)$ son construibles. Se considera el ángulo $\alpha = 60° = \frac{\pi}{3} rad$ y se quiere comprobar si es trisecable mediante regla y compás, es decir, si $\cos(\frac{\alpha}{3}) = \cos(\frac{\pi}{9})$ es construible. A partir de la fórmula de Moivre [12] se obtiene la fórmula del coseno del ángulo triple:

$$\cos 3\beta = 4\cos^3\beta - 3\cos\beta.$$

Si se toma $\beta = \frac{\pi}{9}$, entonces $\cos 3\beta = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ y se tiene

$$\cos\frac{\pi}{3} = 4\cos^3\frac{\pi}{9} - 3\cos\frac{\pi}{9}.$$

Al denotar $x = \cos\frac{\pi}{9}$ y operarando en la ecuación:

$$\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 8x^3 - 6x \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 8x^3 - 6x - 1.$$

Finalmente, el problema de la trisección del ángulo es equivalente a resolver una ecuación cúbica que no es posible mediante regla no marcada y compás.

III. **La cuadratura del círculo**. Dado un círculo, construir un cuadrado cuyo área coincida con el área del círculo.

Figura 3.31: Fuente: Fernández, S. (1999)

Se considera un círculo de radio igual a la unidad, por lo que su área será πu^2. El problema consiste en calcular la longitud x del lado de un cuadrado de forma que su área sea igual a la del círculo, lo que equivale a resolver la ecuación $x^2 = \pi$. Por tanto, la irresolubilidad de este problema mediante regla no marcda y compás será la imposibilidad de construir el número π con estas herramientas.

Si bien el enunciado de los problemas puede considerarse simple, la complejidad residía en las herramientas que los matemáticos de la época querían emplear para conseguir la solución a los mismos: la regla no marcada y el compás. Muchos fueron los intentos de resolución por parte de distintos matemáticos a lo largo de la historia, como Eratóstenes de Cirene (276 a.C. - 194 a. C.), Arquímedes de Siracusa (287 a.C. - 212 a.C.) o Tartaglia (1499 -1557) entre otros. Del mismo modo, la búsqueda de soluciones dio lugar a numerosas aportaciones al campo de las matemáticas, como el descubrimiento de las curvas cónicas por el griego Menecmo (380 a.C. - 320 a.C.) o la curva Cisoide de Diocles (240 a.C. - 180 a.C.) entre otros.

[12] $(\cos\beta + i\sin\beta)^n = (\cos(n\beta) + i\sin(n\beta))$ donde i es la unidad imaginaria.

No fue hasta 2200 años después de su planteamiento inicial en el siglo V a.C., que se demostró la imposibilidad de resolver los tres Problemas Clásicos de la Geometría Griega mediante el uso exclusivo de la regla no marcada y el compás: en 1837, el matemático francés Pierre Laurent Wantzel (1814, Francia) demuestra la irresolubilidad de la duplicación del cubo y de la trisección del ángulo; en 1882, el matemático alemán Ferdinand von Lindenmann (1852, Alemania) prueba la irresolubilidad de la cuadratura del círculo como consecuencia de la trascendentalidad de π. Fue necesario el desarrollo de nuevas técnicas y mecanismos, así como la evolución y surgimiento de nuevas teorías matemáticas para conseguir los resultados necesarios para demostrar la irresolubilidad de los tres problemas.

Como se ha indicado en el Sección 1.3, la Papiroflexia es una herramienta más potente que la regla no marcada y el compás. Tanto es así que es posible resolver la Duplicación del cubo y la Trisección del ángulo mediante procedimientos de Origami. Esto se debe a que, en ambos casos, su resolución se simplifica en la resolución de una ecuación cúbica que es posible resolver mediante Origami, frente a la imposobilidad de alcanzar sus soluciones con regla no marcada y compás.

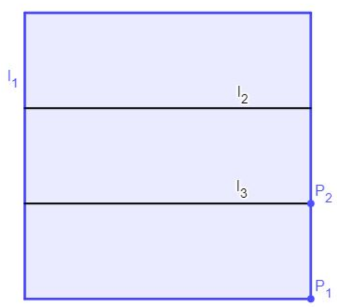
B. Procedimiento con Papiroflexia.

La duplicación del cubo.

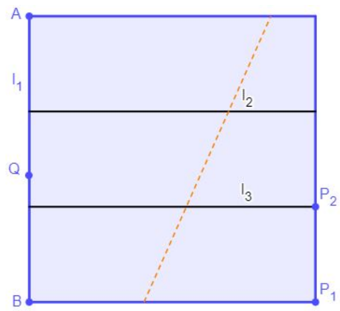
Este procedimiento está tomado de Oller (2007).

Se comienza con un cuadrado de papel que se divide en tres rectángulos iguales, obteniendo así dos rectas horizontales. Aquella más cercana al borde superior del papel se denotará l_2 y por l_3 la más cercana al borde inferior. Por otro lado, se toma como l_1 el borde izquierdo del cuadrado de papel. El punto intersección de l_3 con el borde derecho del papel será P_2 y la esquina inferior derecha se denota por P_1. Ahora, aplicando el axioma ($\mathbf{O_6}$), se construye el pliegue que lleva de forma simultánea P_1 sobre l_1 y P_2 sobre l_2. Si se denota por Q el punto de l_1 sobre el que se refleja P_1 con respecto de este pliegue, entonces la proporción entre la longitud X del segmento que va de la esquina superior izquierda, A, a Q, entre la longitud Y del segmento de extremos Q y la esquina inferior izquierda B, es exactamente $\sqrt[3]{2}$:

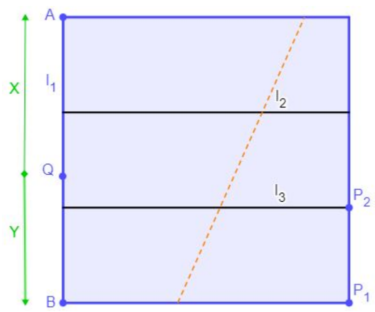
$$\frac{X}{Y} = \frac{d(A,Q)}{d(Q,B)} = \sqrt[3]{2}.$$



Paso 1



Paso 2



Paso 3

Para justificar este resultado, se supone la longitud Y igual a la unidad, luego se quiere probar que $X = \sqrt[3]{2}$. Con esto, la longitud del lado del cuadrado de papel inicial será igual a $X + 1$ unidades. También se puede observar que, si se denota por R al punto reflejado de P_2, entonces $d(P_1, P_2) = d(Q, R) = \frac{1}{3}(X + 1)$. Sea C el punto de intersección de l_1 con l_2, se tiene que $d(C, B) = \frac{2}{3}(X + 1)$. Entonces,

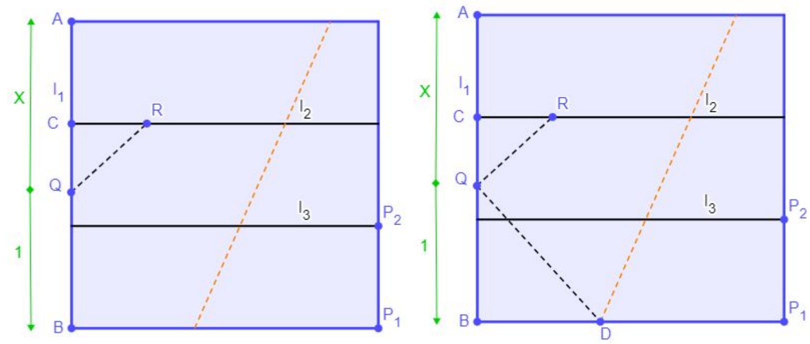
$$d(C, Q) = d(C, B) - d(Q, B) = \frac{2}{3}(X + 1) - 1 = \frac{1}{3}(2X - 1).$$

Por otro lado, sea D el punto de intersección del pliegue realizado mediante ($\mathbf{O_6}$) y el borde inferior del cuadrado inicial, $d(Q, D) = X + 1 - d(B, D)$. Se denota por d la longitud del segmento $\overline{BD}$ y aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo $\triangle QBD$, se obtiene:

$$1^2+d^2 = (X+1-d)^2 \;\Leftrightarrow\; 1^2+d^2 = (X+1)^2+d^2-2(X+1)d \;\Leftrightarrow\; 1^2 = X^2+2X+1^2-2(X+1)d,$$

de donde se sigue que:

$$0 = X^2 + 2X - 2(X + 1)d \quad\Leftrightarrow\quad 2(X + 1)d = X^2 + 2X \quad\Rightarrow\quad d = \frac{X^2 + 2X}{2(X + 1)}.$$



Los triángulos $\triangle RCQ$ y $\triangle QBD$ son semejantes por compartir dos ángulos: $\widehat{QCR} = \widehat{DBQ}$ y $\widehat{RQC} = \widehat{QDB}$. Por tanto, es posible aplicar el Teorema de Thales:

$$\frac{d}{X + 1 - d} = \frac{\frac{1}{3}(2X - 1)}{\frac{1}{3}(X + 1)} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{d}{X + 1 - d} = \frac{(2X - 1)}{(X + 1)}.$$

Utilizando que $d = \dfrac{X^2 + 2X}{2(X + 1)}$,

$$X + 1 - d = \frac{2(X + 1)^2 - X^2 - 2X}{2(X + 1)} = \frac{X^2 + 2X + 2}{2(X + 1)},$$

luego

$$\frac{d}{X + 1 - d} = \frac{X^2 + 2X}{X^2 + 2X + 2}.$$

Finalmente, operando en la igualdad de Thales se obtiene el resultado:

$$\frac{d}{X+1-d} = \frac{(2X-1)}{(X+1)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X^2+2X}{X^2+2X+2} = \frac{(2X-1)}{(X+1)},$$

$$(X^2+2X)(X+1) = (2X-1)(X^2+2X+2),$$

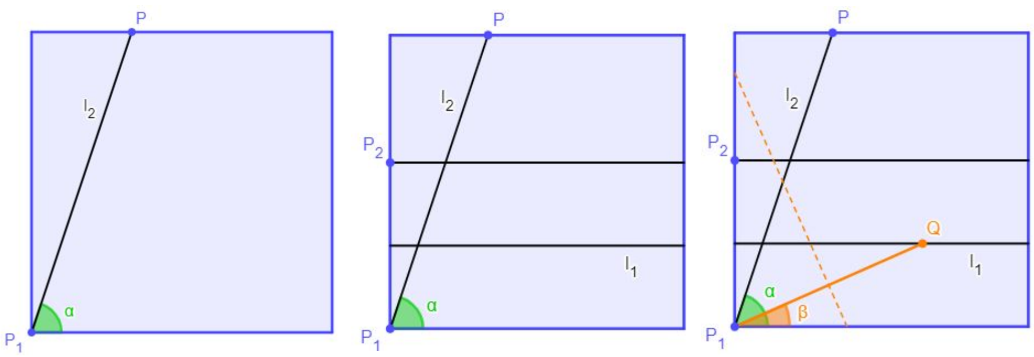
$$X^3+3X^2+2X = 2X^3+3X^2+2X-2 \quad \Rightarrow X^3 = 2 \Rightarrow X = \sqrt[3]{2}.$$

La trisección del ángulo.

Este procedimiento está tomado de Oller (2007).

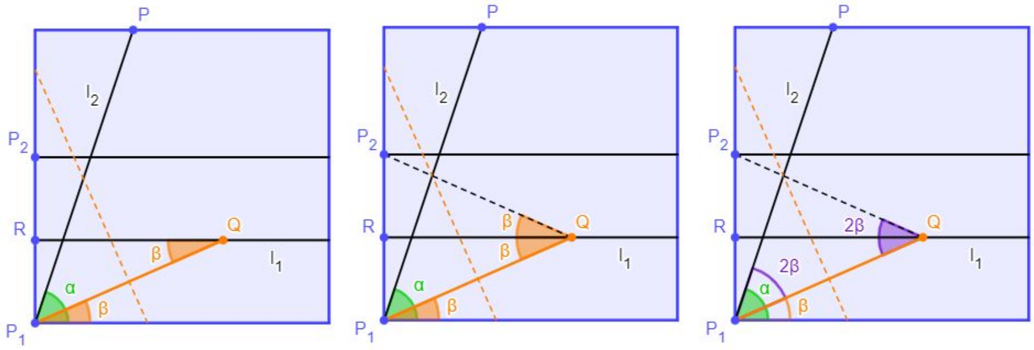
Partiendo de un cuadrado de papel, el primer paso será construir un ángulo $\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$. Para ello, se denota por P_1 la esquina inferior izquierda del cuadrado. Después, se toma un punto arbitrario P del borde superior del cuadrado de papel (distinto de las esquinas superiores), y mediante el axioma $(\mathbf{O_1})$ se construye el pliegue que pasa por este y por P_1. La recta resultante de este pliegue se denota l_2. De esta forma, se ha construido el ángulo α definido por l_2 y por el borde inferior. A continuación, se elige un punto del borde izquierdo del cuadrado que se denota por P_2. Aplicando $(\mathbf{O_4})$ se realiza el pliegue perpendicular a este borde que pase por P_2. La recta l_1 es la mediatriz del segmento $\overline{P_2P_1}$ que se obtiene con el axioma $(\mathbf{O_2})$. Por tanto, l_1 es paralela al pliegue anterior que pasaba por P_2 y se encuentra a la misma distancia de este y del borde inferior. Mediante el axioma $(\mathbf{O_6})$ se construye el pliegue que lleva simultáneamente el punto P_1 sobre la recta l_1 y el punto P_2 sobre la recta l_2. Finalmente, denotando por Q el punto de l_1 donde ha ido parar P_1, se obtiene que el ángulo agudo β definido por la recta que une los puntos P_1 y Q, y el borde inferior, que es la trisección del ángulo inicial α:

$$\beta = \frac{\alpha}{3}.$$



Paso 1 Paso 2 Paso 3

Este procedimiento funciona para ángulos agudos y su demostración se basa en las propiedades básicas de la Geometría Plana. Sea R el punto de intersección de l_1 con el borde izquierdo del cuadrado, entonces $\widehat{RQP_1} = \beta$ por tener una recta oblicua que corta a dos rectas paralelas. Además, $\widehat{P_2QR} = \beta$ ya que $d(P_1, R) = d(R, P_2)$ y el segmento $\overline{P_2Q}$ es el simétrico del segmento $\overline{P_1Q}$ con respecto de la recta l_1. Por tanto, $\widehat{P_2QP_1} = 2\beta$ y como el último pliegue construido mediante ($\mathbf{O_6}$) es un eje de simetría, $\widehat{QP_1P} = 2\beta$.



Por último, se concluye que

$$\alpha = \beta + \widehat{QP_1P} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta + 2\beta \quad \Rightarrow \quad \alpha = 3\beta.$$

C. Planteamiento.

Si bien los contenidos que se trabajan a través de esta actividad no pertenecen al currículo de ninguna de las asignaturas correspondientes a la materia de matemáticas de Bachillerato, se considera interesante llevarlo a cabo en estos cursos por la dimensión que puede alcanzar esta actividad. En particular, se puede contextualizar como una actividad en la que se trabaje el origen de estos tres problemas clásicos y el camino hacia la demostración de su irresolubilidad mediante las herramientas de regla no marcada y compás, y cómo estos tres problemas son resolubles con la técnica de la Papiroflexia, siempre dentro del grado de conocimiento propio al nivel de un curso de Bachillerato.

Como destaca F. Corbalán en Goñi (2011, pp. 71-73), la historia de las matemáticas debe tener cabida en las aulas de Secundaria y Bachillerato con el fin de perseguir numerosos objetivos, entre los que destacan los siguientes:

I. Insistir en que el alumnado comprenda que las matemáticas no han surgido por casualidad, sino que han progresado a lo largo del tiempo con las contribuciones de personas concretas y de diversas culturas.

II. Mostrar la profunda vinculación que existe entre el desarrollo de las matemáticas y el desarrollo de la cultura humana.

III. Ganar conciencia del carácter evolutivo de las matemáticas como ciencia cambiante y en continuo desarrollo.

IV. Conocer la biografía de importantes matemáticos y matemáticas de la historia, así como sus aportaciones a esta ciencia.

En virtud de lo anterior, esta actividad se plantea dentro de un proyecto extracurricular en cualquiera de los cursos y asignaturas de Matemáticas en Bachillerato. Preferiblemente, dentro del Bloque 2: Números y Álgebra dada la vinculación de los tres problemas Clásicos de la Geometría Griega con los números racionales e irracionales en el caso de π y $\sqrt{2}$, así como la resolución de ecuaciones. Además, se fomenta la competencia de conciencia y expresiones culturales al trabajar la historia de la matemática y la relación de la técnica del Origami como método para realizar demostraciones, a mayores de la percepción artística de la misma.

Los conocimientos previos que se suponen adquiridos por el alumnado necesarios para el desarrollo de esta actvidad serán:

- Conocimientos básicos sobre propiedades de rectas y ángulos en la Geometría Plana.
- Cálculo de áreas de figuras planas (cuadrado y círculo) y de volumen de un cubo (hexaedro regular).
- Resolución de ecuaciones cúbicas.
- Números racionales e irracionales.
- Razones trigonométricas de un ángulo agudo y fórmula de Moivre.

D. Metodología y Recursos.

La metodología que se propone para esta actividad es la de **Trabajo grupal de investigación**. Esta metodología implica un alto grado de autonomía por parte del alumno, así como la autorregulación de su proceso de aprendizaje, aspectos que se suponen propios de los estudiantes de niveles de Bachillerato.

Para ello, se pedirá al alumnado que en grupos de entre tres y cuatro estudiantes, planifiquen, creen y evalúen un producto final sobre la historia de los Tres problemas Clásicos de la Matemática Griega. El producto final constará de tres partes:

- Un trabajo escrito en formato digital que se entregará en la plataforma Moodle.
- Una presentación oral del trabajo que se deberá grabar en formato vídeo y se entregará en la plataforma Moodle.
- Rúbrica de coevaluación de uno de los vídeos presentados por otro de los grupos.

Ciertamente, las matemáticas detrás de las teorías y teoremas matemáticos necesarios para la demostración de irresolubilidad de los tres problemas exceden el nivel de los cursos de Bachillerato. Sin embargo, no es ese el objetivo del trabajo, sino que los estudiantes adquieran una visión global de la historia de las matemáticas y su evolución, así como las aportaciones de los matemáticos más importantes. Los componentes de cada grupo deberán realizar una adecuada búsqueda de las fuentes de información, así como el esfuerzo de seleccionar aquella información que les sea útil. Por ello, en el apartado sobre Evaluación, se hará especial hincapié en este aspecto y en que el trabajo no se limite a ser una mera reproducción de información previamente escrita, sino que los estudiantes hayan hecho el esfuerzo de redactarlo con sus palabras y realmente comprendan todos los resultados que aparezcan en el trabajo. Así, este proyecto supone un completo trabajo competencial para el alumnado ya que desarrolla cada una de las siete competencias por lo descrito en la Sección 2.3.

F. Temporalización. Situaciones de Aprendizaje.

La temporalización de esta actividad será la correspondiente a la seleccionada en la descripción del Proyecto. Como sugerencia, se propone dedicar una sesión semanal de la asignatura a que los grupos trabajen en el proyecto en el aula, de forma que el alumnado pueda exponer sus dudas y el docente pueda hacer un seguimiento del mismo. El resto de desarrollo del trabajo se relizará como tarea para casa de modo que serán los estudiantes de un mismo grupo los que deban organizar el proceso.

Un posible guión del trabajo es el siguiente:

Los tres problemas clásicos de la Geometría Griega.

Componentes del grupo: Alumno 1, Alumno 2 y Alumno 3.

Parte 1: Documento escrito.

Este documento deberá contener información relativa a los siguientes puntos:
1. *Breve introducción sobre la matemática en la antigua Grecia. Euclides y la regla no marcada y el compás.*
2. *Descripción y origen de los tres problemas clásicos de la matemática griega.*
3. *Ejemplos (al menos uno para cada problema) de intentos de resolución de algún matemático con herramientas distintas de la regla y el compás.*
4. *Nuevas invenciones o resultados matemáticos que surgieron como resultado de intentos de resolución de estos problemas (al menos dos).*
5. *Matemáticos que demostraron la irresolubilidad de los problemas mediante regla y compás.*
6.¿*Cuánto tiempo pasó desde el origen de los problemas hasta la prueba de irresolubilidad? ¿Disponían los matemáticos griegos de las herramientas matemáticas para demostrar la irresolubilidad?*
7. *¿Cuáles de los problemas pueden resolverse mediante Papiroflexia? Procedimiento y prueba del resultado.*
8. *Reflexión final.*

Se valorará el ajuste a los contenidos de los 8 puntos anteriores, la claridad de los mismos, la expressión escrita y la organización. Para el punto 7, se recomienda realizar el procedimiento en una hoja de papel y adjuntar en el documento fotografías o las imágenes escaneadas.

Los tres problemas clásicos de la Geometría Griega.

Componentes del grupo: Alumno 1, Alumno 2 y Alumno 3.

Parte 2: Vídeo de exposición oral.

Exposición oral del trabajo presentada en formato vídeo, con una duración de entre 10 y 15 minutos, en la que deberán tratarse los 7 mismos puntos de la Parte 1. El reparto del tiempo deberá ser igualitario entre los miembros del grupo. Se valorará el conocimiento de lo que se explica, la claridad de la explicación y la expresión oral. Para apoyar las explicaciones se podrá prepar un archivo Power Point o similar.

Los tres problemas clásicos de la Geometría Griega.

Componentes del grupo: Alumno 1, Alumno 2 y Alumno 3.

Parte 3: Coevaluación.

Cada uno de los miembros del grupo deberá realizar la evaluación de la presentación oral del Grupo X, valorando del 1 al 4 (siendo 4=Excelente, 3=Muy bien, 2=Suficiente, 1= Deficiente) cada uno de los puntos $1-8$ del trabajo junto con una breve argumentación del porqué de la calificación elegida en cada uno de ellos.

G. Evaluación.

La evaluación del aprendizaje del alumnado por medio de esta actividad se llevará a cabo a través de la evaluación de las dos primeras partes del proyecto final. En lo referente al trabajo escrito, se valorarán los criterios de evaluación y el nivel de consecución de cada uno de los 8 puntos propuestos en el mismo, así como la organización de los miembros del grupo durante el desarrollo del mismo. El docente podrá recoger información sobre este último aspecto durante las sesiones presenciales en el aula dedicadas al proyecto en las que se llevará a cabo un segumiento. La calificación de esta Parte 1 será la misma para todos los alumnos de un mismo grupo.

En lo que se refiere a la exposición oral, cada alumno tendrá una calificación individual según los criterios descritos en el guión del Trabajo.

Por otra parte, a cada grupo se le asignará la coevaluación de la presentación en vídeo de otro de los trabajos de sus compañeros, según lo descrito en el guión. Cada alumno obtendrá una calificación por su labor como tribunal en el que se evaluará la argumentación y la lógica de cada puntuación asignada.

La nota final de cada alumno se calcula como sigue: un 45 % corresponde a la calificación de la parte 1, un 35 % corresponde a la calificación de la parte 2 y el 20 % restante, a la parte 3.

La evaluación de la actividad podrá ser realizada por el docente durante el desarrollo de la misma, para al finalizar completar una rúbrica que deje analizar los puntos fuertes y aquellos que deberían mejorar en cuanto a la temporalización, a metodología, los recursos utilizados, las dificultades encontradas, etc.

Capítulo 4

Experiencia Práctica en el aula

Durante la fase de intervención del periodo de Practicum se llevó a cabo la puesta en práctica de una parte de la Actividad 1: Raíces de polinomios en un aula de 1º de Bachillerato. Si bien por limitaciones relativas a tiempo y adecuación a los contenidos que se estaban trabajando en ese momento no fue posible el desarrollo completo de la actividad como el descrito anteriormente en el Capítulo 3, se implementó una parte sobre resolución de ecuaciones cúbicas. A continuación se describe la intervención y análisis que se hizo de la misma.

4.1. Contextualización.

El grupo en el que se llevó a cabo la intervención fue el grupo de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I de 1º de Bachillerato del IES Pío del Río Hortega, centro público de enseñanza Secundaría Obligatoria y Bachillerato situado en la localidad vallisoletana de Portillo. Se trata de un grupo pequeño con un total de 9 alumnos, entre los que no se encuentra ninguno que requiera de atención especializada. El nivel académico es bueno, con prácticamente un 100 % de aprobados y el grupo muestra muy buena predisposición a aprender y es muy participativo en las sesiones, siendo óptimo el ambiente de aprendizaje en el aula.

El Departamento de Matemáticas del centro dispone de una gran variedad de materiales manipulativos que los docentes pueden utilizar como herramientas didácticas complementarias en sus lecciones, entre los que se encuentra papel de Papiroflexia. En efecto, es común que en los primeros cursos de la Educación Secundaria Obligatoria se emplee este recurso en diversas ocasiones, acuerdo común entre los profesores del departamento al preparar la programación y las unidades didácticas. Ejemplos de situaciones en las que se utilizan actividades de Origami en el aula son los siguientes:

- Demostración de las Identidades Notables: cuadrado de una suma, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, y cuadrado de una diferencia, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, como parte de la Unidad Didáctica titulada Expresiones Algebraicas de 2º de ESO.

- Construcción de un transportador de ángulos de Papiroflexia para trabajar la medición de ángulos y la correcta utilización de esta herramienta en la asignatura de Conocimiento de Matemáticas de 1º ESO, dentro de la Unidad Didactica titulada Geometría Plana.
- Construcción de poliedros regulares y cuerpos geométricos que ayuden a visualizar las propiedades y los elementos de los mismos, y el cálculo de áreas y volúmenes, como parte de las Unidades Didácticas de Geometría en 3 dimensiones de los cursos de 2º de ESO y 3º de ESO.

De la misma manera, es habitual que el departamento organice talleres de Papiroflexia dirigidos a los distintos niveles de Educación Secundaria impartidos por personal externo, como parte de su programa de Actividades Extraescolares y Complementarias. Por tanto, si bien el Departamento de Matemáticas del centro está familiarizado con la utilización de la Papiroflexia como herramienta didáctica para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, esta se emplea únicamente en los cursos de Secundaria, particularmente en 1º y 2º de ESO, sin darle cabida en los niveles de Bachillerato.

4.2. Intervención.

La intervención se lleva a cabo la última semana del segundo trimestre. En este momento, el grupo se encuentra inmerso en el Bloque 3: Análisis de esta asignatura, habiendo trabajado los contenidos relativos a resolución de ecuaciones en el primer trimestre del curso. Por tanto, se considera como una actividad de repaso de los contenidos del Bloque 2: Números y Álgebra. A su vez, tiene como finalidad analizar la actitud y la motivación del grupo de alumnado concreto durante el desarrollo, así como ofrecer al docente una propuesta didáctica que pueda implementar en cursos venideros.

El aula habitual del grupo disponía de ordenador conectado a una pantalla digital y pizarra. A cada alumno se le proporcionó papel de Origami para trabajar durante la sesión y para utilizar en la tarea de proyecto de vídeo didáctico. Previamente, tres días antes de la sesión práctica en el aula, se había facilitado al grupo mediante la plataforma Teams de l asignatura el vídeo explicativo sobre el Método de Lill que debían trabajar como parte de la metodología Clase Invertida. Únicamente se realizó una sesión presencial de 50 minutos que se organizó de la siguiente manera;

Los diez primeros minutos de la sesión se emplearon para repasar el Método de Lill con el apoyo de la presentación Power Point y la herramienta GeoGebra, con las que ya habían trabajado anteriormente. A continuación, se dedicarón otros diez minutos a la explicación del procedimiento del Método de Lill mediante Papiroflexia con el ejemplo de una ecuación cúbica concreta:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

En el resto de la sesión cada alumno, de manera individual[1], trabajó en la construcción y búsqueda de los tres pliegues mediante los que se obtenían las tres soluciones.

Por último, a cada alumno se le asignó una ecuación cúbica para realizar un vídeo en el que explicara la resolución de la misma mediante Papiroflexia, siguiendo el modelo de vídeo facilitado por el docente. Con un plazo de dos semanas, los alumnos deberían entregar dicho vídeo como respuesta a la tarea en Teams correspondiente.

4.3. Resultados.

La tarea que los alumnos debían entregar como resultado final de la actividad consistía en la realización de un vídeo en el que se explicara el procedimiento seguido para la obtención de las tres soluciones. El docente en prácticas había facilitado un ejemplo del mismo en el que se resolvía una ecuación cúbica realizando los tres pliegues del Método de Lill con Papiroflexia de forma que los estudiantes lo tomaran como referencia para grabar su proyecto de vídeo didáctico. Una vez vencido el plazo acordado entre alumnos y docentes para su presentación, el profesor del centro facilitó los trabajos efectuados por los estudiantes al docente en prácticas.

En total fueron siete los alumnos que entregaron la tarea solicitada en la actividad, fallando dos alumnos. De entre ellos, únicamente dos presentaron el proyecto de vídeo, mientras que el resto optó por presentar la documentación gráfica en forma de fotografía de su construcción del camino de Lill correspondiente al polinomio de su ecuación a resolver, y de los tres pliegues realizados que daban como resultado las soluciones de la misma. Seguidamente se muestran algunos ejemplos de los trabajos entregados por los alumnos:

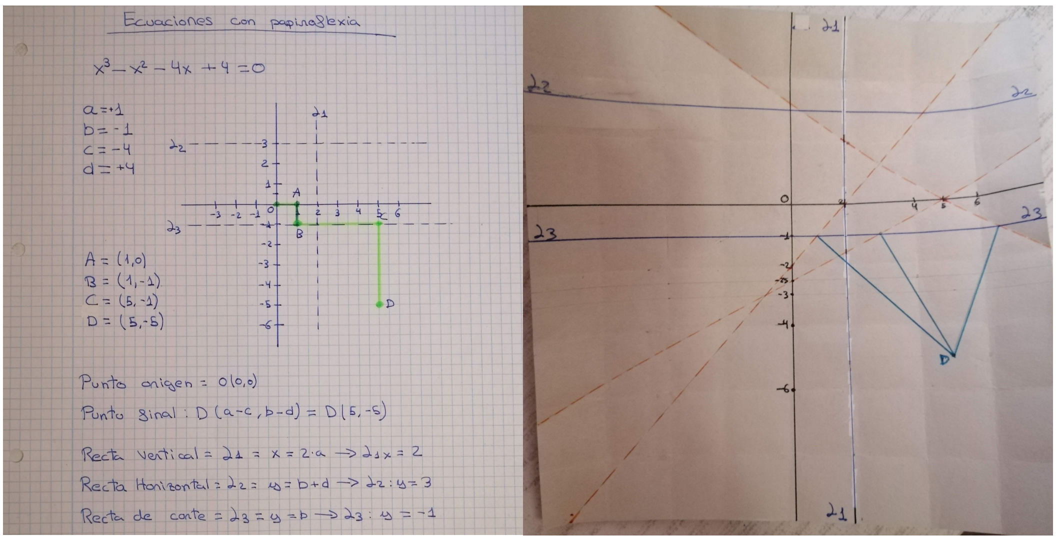


Figura 4.1: Solución Alumno 1, acompañada de vídeo explicativo.

[1]En este caso no fue posible que el alumnado trabajara en parejas por a las medidas sanitarias establecidas por el centro debido a la situación sanitaria por la COVID-19.

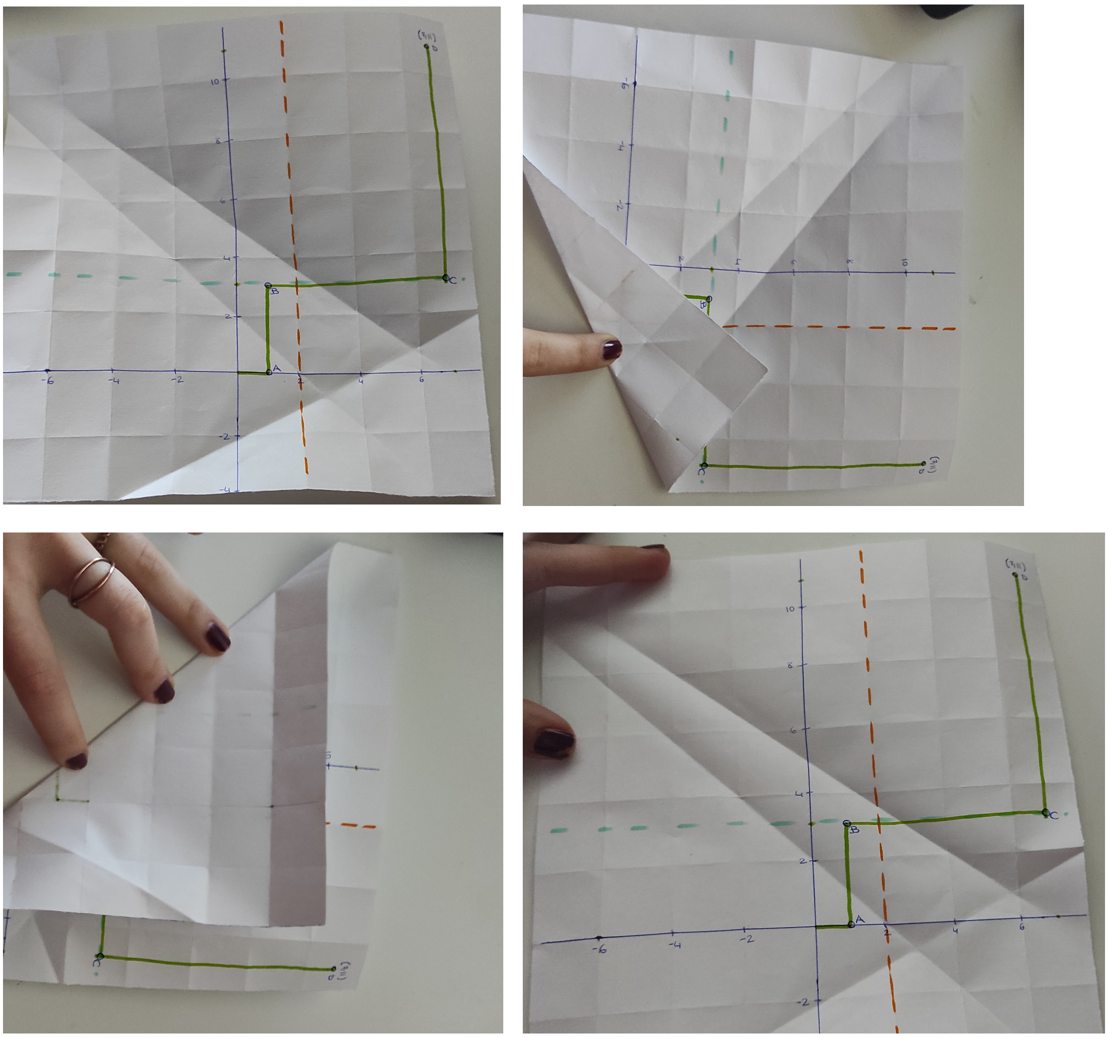
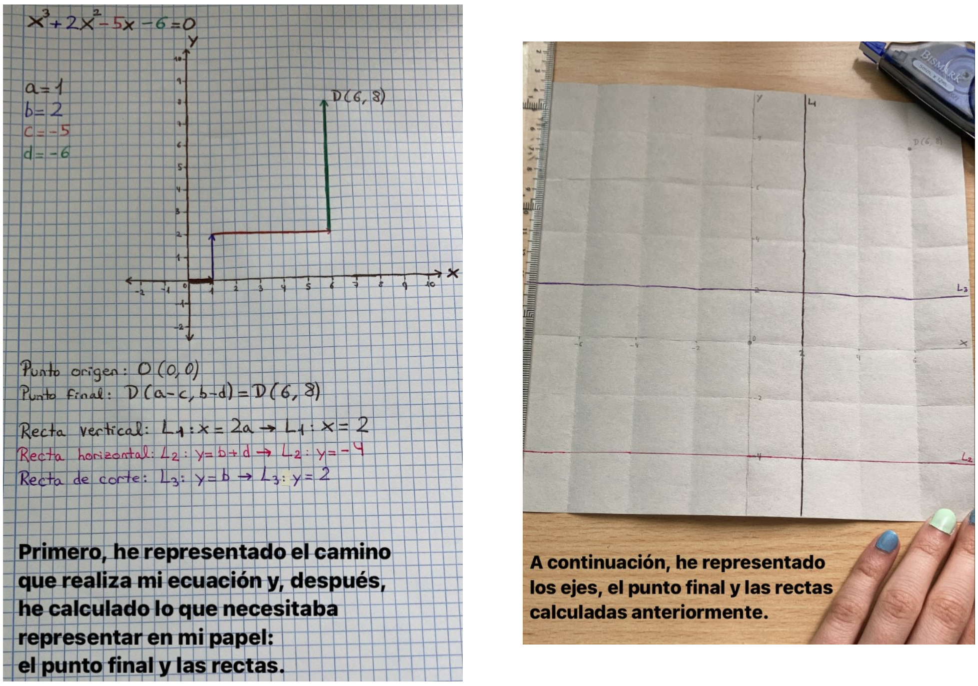


Figura 4.3: Solución Alumna 2.



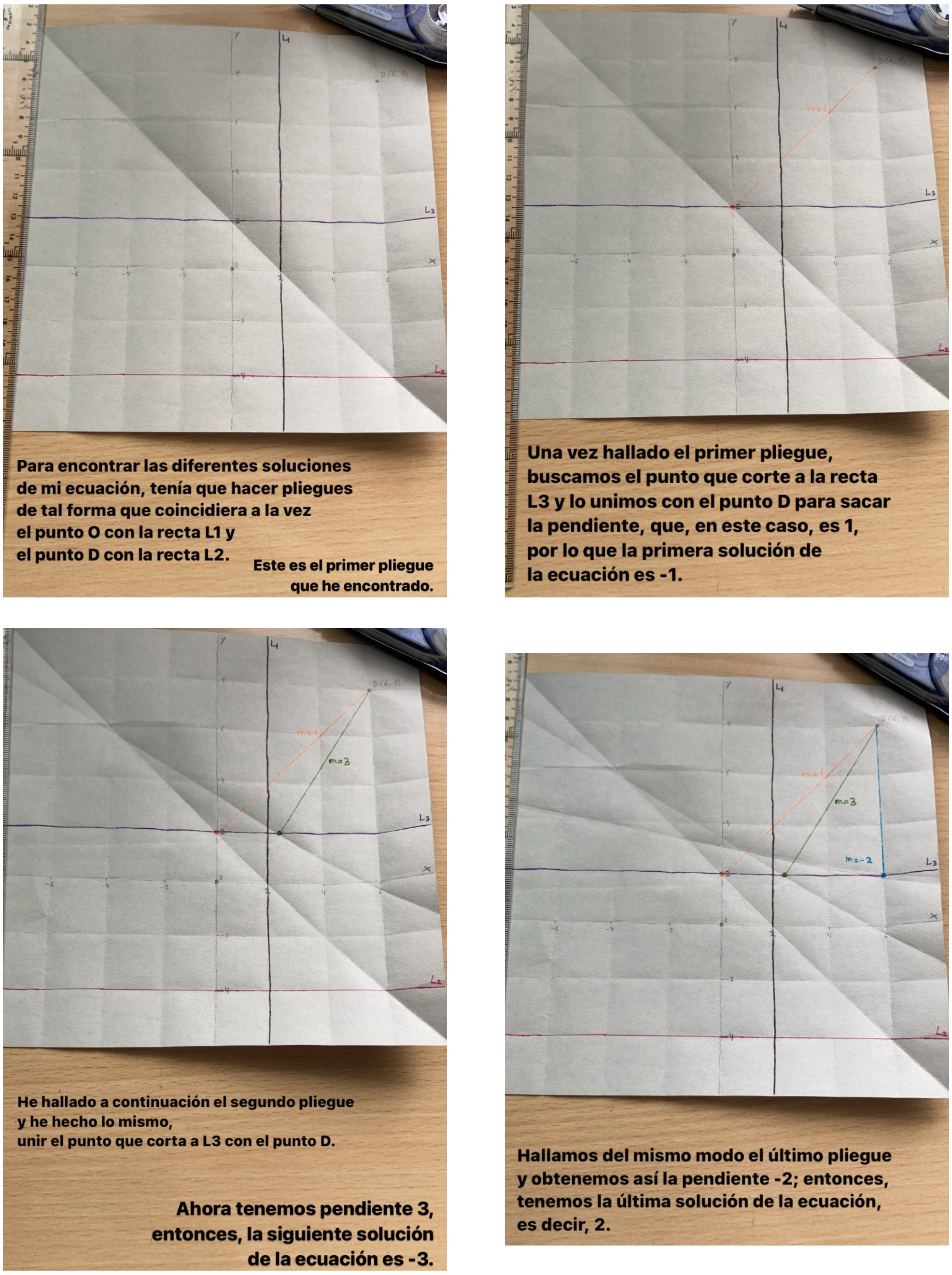


Figura 4.6: Solución Alumna 3.

4.4. Reflexiones.

Esta primera aproximación a la implementación de la actividad permitió obtener interesantes conclusiones que después sirvieron en la toma de decisiones sobre la elección de metodologías, temporalización, tareas y evaluación para completar esta y el resto de actividades.

En primer lugar, la enseñanza de las matemáticas en los niveles de Bachillerato está muy condicionada por el modelo de las pruebas de acceso a la universidad, EBAU. En consecuencia, los profesores de los cursos de 2º de Bachillerato no se mostraron predispuestos a ocupar algunas de las sesiones del horario lectivo de su grupo en realizar la actividad basada en Papiroflexia debido a la presión que, tanto docentes como alumnado, sufren por terminar el temario completo de las asignaturas de matemáticas de los cursos de 2º de Bachillerato. Asimismo, no se contemplan otras técnicas de resolución de ecuaciones que no sean las convencionales explicadas en la mayoría de los libros de texto, y probablemente la utilización de las soluciones alcanzadas a través de la técnica de la Papiroflexia no serían admitidas como válidas en estos exámenes. Por ello, el curso en el que se llevó a cabo la puesta en práctica fue en el nivel de 1º de Bachillerato.

Durante el desarrollo de la sesión el alumnado se mostró participativo e interesado de forma generalizada. Muchos de los estudiantes conocían la técnica de la Papiroflexia, pero a todos les resultó novedosa su relación con las matemáticas y su utilización en la resolución de ecuaciones polinómicas. Por ello, en la sesión práctica de la actividad el Origami despertó la motivación del grupo al tratarse de una nueva herramienta. Como era de esperar, algunos alumnos fueron capces de encontrar los tres pliegues aplicando el axioma ($\mathbf{O_6}$) rápidamente, y otros encontraron dificultades en la implementación de este axioma debido a la falta de práctica en esta técnica. Al evaluar las producciones entregadas por cada alumno, se puede observar que esta actividad desarrolló la faceta creativa de los alumnos, que utilizaron distintos colores o distintas formas de presentar sus trabajos. Sin embargo, únicamente en los casos en los que se presentó un vídeo de la explicación del proceso se pudo evaluar la expresión oral utilizada.

Capítulo 5

Conclusiones finales

A la pregunta, “¿es la Papiroflexia una buena herramienta didáctica para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en Bachillerato?” es razonable responder "Sí", a la vista de todas las ventajas que ofrece tanto a docente como a alumnado. Destaca, sobre todo, la motivación que despierta en el estudiante y sus innumerables posibilidades de implementación en el aula de Matemáticas, mejorando notablemente la capacidad de razonamiento abstracto del alumnado. Se trata de un recurso innovador que permite la visualización y representación de los conceptos matemáticos, permitiendo que los estudiantes lo consideren más cercano y cambiando, así, su percepción de la matería de Matemáticas.

Por lo expuesto anteriormente, se trata de una herramienta más adecuada para los cursos de 1º de Bachillerato frente a los de 2º de Bachillerato, debida a la presión externa que sufren docentes y alumnados a causa de las pruebas de acceso a la universidad a las que deben enfrentarse los estudiantes al finalizar este curso. Esto hace que por limitaciones de tiempo, y por las exigencias del currículo y los contenidos demandados en estas pruebas, los docentes se muestren reacios a introducir nuevas técnicas como la Papiroflexia en sus lecciones.

Es innegable la relación entre la Papiroflexia y las Matemáticas. Desde la base algebraica que se encuentra tras los resultados sobre números o puntos origami-construibles, hasta los resultados geométricos más apreciables al realizar los pliegues correspondientes a los Axiomas de Hatori-Huzita, se convierte en una herramienta que ofrece muchas posibilidades. No solo puede utilizarse para desarrollar Geometría, también en muy diversos ámbitos de las etapas educativas. Concretamente, en Bachillerato hay un gran número de contenidos propios del currículo que pueden explicarse con Papiroflexia.

Durante el diseño de las actividades, ha sido importante la reflexión sobre las metodologías utilizadas y las situaciones de aprendizaje creadas, en busca de sacar el máximo beneficio de cada uno de los procedimientos de Papiroflexia. El diseño de las cuatro actividades del tercer capítulo, ha supuesto una primera propuesta de entre todos los enfoques que pueden surgir a partir de los procedimientos de Papiroflexia descritos como parte de las mismas. En todo caso, se trata de una propuesta abierta a modificaciones y adecuación a las características y nivel del grupo específico de alumnos en el que se vaya a trabajar, según lo considerado por el docente. Por otra parte, es indudable que la propuesta ganaría riqueza mediante su puesta en práctica y experimentación en distintos centros educativos y distintos grupos de alumnado que dieran lugar a un análisis de las mismas, sugiriendo modificaciones de mejora.

En conclusión, aunque el uso de la Papiroflexia no es muy extendido en los niveles de Bachillerato, es claro que se trata de una herramienta didáctica muy completa y rica.

Bibliografía

NORMATIVA LEGAL

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obigatoria y del Bachillerato. (2015). *Boletín Oficial del Estado*, núm. 3, de 3 de enero de 2015. https://www.boe.es/eli/es/rd/2014/12/26/1105/con

Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. (2015). *Boletín Oficial del Estado*, núm. 25, de 29 de enero de 2015. https://www.boe.es/eli/es/o/2015/01/21/ecd65

ORDEN EDU/363/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo del bachillerato en la Comunidad de Castilla y León. (2015). *Boletín Oficial de Castilla y León*, núm. 86, de 8 de mayo de 2015. https://www.educa.jcyl.es/es/resumenbocyl/orden-edu-363-2015-4-mayo-establece-curriculo-regula-implan

REFERENCIAS

Asociación Española de Papiroflexia [AEP]. (2012–2020). *Pajarita.* Página de la Asociación Española de Papiroflexia. http://www.pajarita.org

Alperin, R. C. (2000). A mathematical Theory of Origami Constructions and Numbers. *New York Journal of Mathematics, 6*, 119–133. http://nyjm.albany.edu:8000/j/2000/6-8.html

Arıcı, S., & Aslan-Tutak, F. (2013). THE EFFECT OF ORIGAMI-BASED INSTRUCTION ON SPATIAL VISUALIZATION, GEOMETRY ACHIEVEMENT, AND GEOMETRIC REASONING. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*, 179–200. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9487-8

Arslan, O., & Işıksal-Bostan, M. (2016). Turkish Prospective Middle School Mathematics Teachers' Beliefs and Perceived SelfEfficacy Beliefs Regarding the Use of Origami in Mathematics Education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 12*(6), 1533–1548. https://doi.org/10.12973/eurasia.2016.1243a

Ayala, K. (2013). *El Origami en el desarrollo de la motricidad fina de los niños y niñas de primer año de educación general básica de la escuela María Teresa Dávila del sector de carapungo, propuesta de una guía para docentes.* (Tesis de pregrado). Universidad Central del Ecuador.

Azcoaga, L. (2013). *El Origami como herramienta educativa: experiencias docentes en el conurbano bonaerense.* I Encuentro hacia una pedagogía emancipatoria en nuestra América. (P. Imen, P. Frisch, & N. Stoppani, Eds.)
https://pedagogiaemancipatoria.files.wordpress.com/2014/04/prc3a1cticas-azcoaga.pdf

Barasona Villarejo, M. L., & Gutiérrez Rubio, D. (2015). Experiencia docente del uso del origami para la mejora del análisis y visión espacial. *Aula de Encuentro, 2*(17), 113–126.

Bergmann, J., & Sam, A. (2012). *Flip your classroom: Reach every student in every class every day.* The United States of America: International Society for Technology in Education, Association for Supervision and Curriculum Development.

Boakes, N.J.(2009). Origami Instruction in the Middle School Mathematics Classroom: Its Impact on Spatial Visualization and Geometry Knowledge of Students. *RMLE Online, 32*(7), 1-12. https://doi.org/10.1080/19404476.2009.11462060

Bombón, A. (2012). *La técnica del Origami y su incidencia en el desarrollo de la motricidad fina de los niños de prebásica del centro infantil Mundo de Ilusiones de la ciudad de Ambato provincia de Tungurahua.* (Tesis de pregrado.) Universidad Técnica de Ambato.

Buitron, P.A. & Echeverría,J.G. (2012). *Efecto del Origami en las dificultades de atención en niños de 9 años de edad en la Unidad Educativa Municipal Alfredo Albuja Galindo, Guía de intervención en el aula con el origami.* (Tesis de pregrado). Universidad Técnica del Norte.

Cakmak, S., Isiksal, M.,& Koc, Y. (2013). Investigating Effect of Origami-Based Instruction on Elementary Students' Spatial Skills and Perceptions. *The Journal of Educational Research, 107*(1), 59–68. https://doi.org/10.1080/00220671.2012.753861

Cambridge International. Education. (2019). *Aprendizaje Activo.* Cambridge International.
https://www.cambridgeinternational.org/Images/579618-active-learning-spanish-.pdf

Cox, D. A. (2004). *Galois Theory* (1.a ed.). Wiley-Interscience.

de la Peña Hernández, J. (2001). *Matemáticas y Papiroflexia.* (2.ª ed.). Asociación Española de Papiroflexia.

Engel, P. (1994). *Origami from Angelfish to Zen.* Dover Publications.

Fernández, S. (1999). *Los tres problemas clásicos de la Historia de las Matemáticas.* Slideshare. Santiago Fernández Fernández. https://es.slideshare.net/Arqui/los-tres-problemas-clsicos-de-la-historia-de-las-matemticas

García, M. (2021, 11 abril). *GEOMETRÍA.* Las mates de Mariel. https://marielmatesblog.wordpress.com/geometria/

Gómez Villamayor, J. (2017). *Math-Origami. Aspectos algebraicos de las construcciones con origami* (Trabajo Fin de Grado). Universidad de Valladolid. http://uvadoc.uva.es/handle/10324/25760

Goñi, J.M. (coord.) (2011). *Didáctica de las matemáticas.*(12º. ed., Vol. 2). GRAÓ. Ministerio de Educación, Secretaría General Técnica.

Haga, K. (2008). *Origamics: Mathematical Explorations Through Paper Folding.* (M. Isoda & J. C. Fonacier, Eds.). World Scientific Publishing Company.

Hatori, K. (s. f.). *History of Origami.* K's Origami. Recuperado 13 de mayo de 2021, de https://origami.ousaan.com/library/historye.html

Hatori, K. (2001). *Origami Constructions.* K's Origami. https://origami.ousaan.com/library/conste.html

Hull, T. (1995, noviembre). *On the Mathematics of Flat Origamis.* ResearchGate. https://www.researchgate.net/publication/2357716

Hull, T. (2012). *Project Origami: Activities for Exploring Mathematics.*(2.ª ed.). A K Peters/ CRC Press.

Huzita, H. (1989). *Axiomatic development of origami geometry.*Procedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology.

Justin, J. (1986, marzo). Resolution par le pliage de l'equation du troisième degré et applications géométriques. *L'Overt*, (42).

Lang, R.J. (2004). Origami Approximate Geometric Constructions. En *Tribute to a Mathemagician.* (pp. 223-239). A K Peters.

Lill, E. (1867). Résolution graphique des équations numériques de tous les degrés à une seule inconnue, et description d'un instrument inventé dans ce but. *Nouvelles annales de mathématiques, 2*(6). (pp. 359-362)

Lill, E. (1868). Résolution graphique des équations algébriques qui ont des racines imaginaires ; d'après M. Lill. *Nouvelles annales de mathématiques, 2*(7).

(pp. 363-367)

Mogollón, M. (2016). *La técnica del Origami y el desarrollo de la precisión motriz en niños y niñas de 5 a 6 años de la unidad educativa Nicolás Martínez del cantón Ambato, provincia de Tungurahua.* (Tesis de pregrado). Universidad Técnica de Ambato.

Office of Educational Research and Improvement [OERI]. (1987). *Japanese Education Today.* https://fundacionconvivencia.org/apc-aa-files/60e8cc4464eed61f01c071bc0caca88c/traduccion-japanese-education-today.pdf

Oller, A.M. (2007, septiembre). *Origami constructions. A characterization of real numbers constructible by paper folding.* https://arxiv.org/abs/0709.3270

Olson, A.T. (1976). *Mathematics Through Paper Folding.* The National Council of Teachers of Mathematics, INC.

Polo Madueño, L. (2010, octubre). Reflexiones sobre la Didáctica del Origami. *Plegando al Sur*, (1). http://www.origamiargentina.org/revista-plegando-al-sur.htm

Randlett, S. (1961). *The Art of Origami; Paper Folding, Traditional and Modern.* (1st ed.). E P Dutton.

Robichaux, R. R., & Rodrigue, P. R. (2003). Using Origami to Promote Geometric Communication. *Mathematics Teaching in the Middle School, 9*(4), 222–229. https://doi.org/10.5951/mtms.9.4.0222

Rodríguez Riaño, J. A. (2006, septiembre).*Influencia de la práctica del origami sobre el desarrollo de la percepción viso-espacial en un grupo de origamistas bogotanos entre 20 y 30 años de edad.* (Trabajo de Grado). Universidad Santo Tomás. http://www.pajarita.org/articulos/articulos

Roselli, N. D. (1999). *La construcción sociocognitiva entre iguales : fundamentos psicológicos del aprendizaje cooperativo.* Instituto Rosario de Investigaciones en ciencias de la educación.

Royo Prieto, J. I. (2002, octubre). Matemáticas y Papiroflexia. *Sigma: revista de matemáticas*, (21), 175-192. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=803877

Rué, J. (s. f.). *¿Qué es Aprendizaje Cooperativo?* Investigación e Innovación en Metodologías de Aprendizaje. RIMA. Recuperado 24 de mayo de 2021, de https://www.upc.edu/rima/es/grupos/giac-grupo-de-interes-en-aprendizaje-cooperativo/bfque-es-aprendizaje-cooperativo

Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998, enero). Mathematical Tasks as a Framework for

Reflection. *Mathematics in the Middle School, 3*(5), 268-275 https://www.nctm.org

Sundara Row, T. (1917). *Geometric Exercises in Paper Folding.*(W.W. Beman & D.E. Smith, Eds.; 3.ª ed.). The Open Court Publishing Company.

Torrego, J.C. (coord.) (2012). *Alumnos con altas capacidades y aprendizaje cooperativo.* SM.
http://www3.uah.es/convivenciayaprendizajecooperativo/54-tecnicas-de-aprendizaje-cooperativo/

Trelles Zambrano, C. A., Bravo Guerrero, F. E., & Barrazueta Samaniego, J. F. (2017, 6 junio).¿Cómo evaluar los aprendizajes en matemáticas?. *INNOVA Research Journal, 2*(6). (pp. 35-51). https://revistas.uide.edu.ec/index.php/innova/article/view/183

WEBGRAFÍA

DIBUJOTECNI.COM. Geometria Plana. Curvas Cónicas. https://dibujotecni.com/geometria-plana/curvas-conicas/

GeoGebra Clásico. https://www.geogebra.org/classic?lang=es

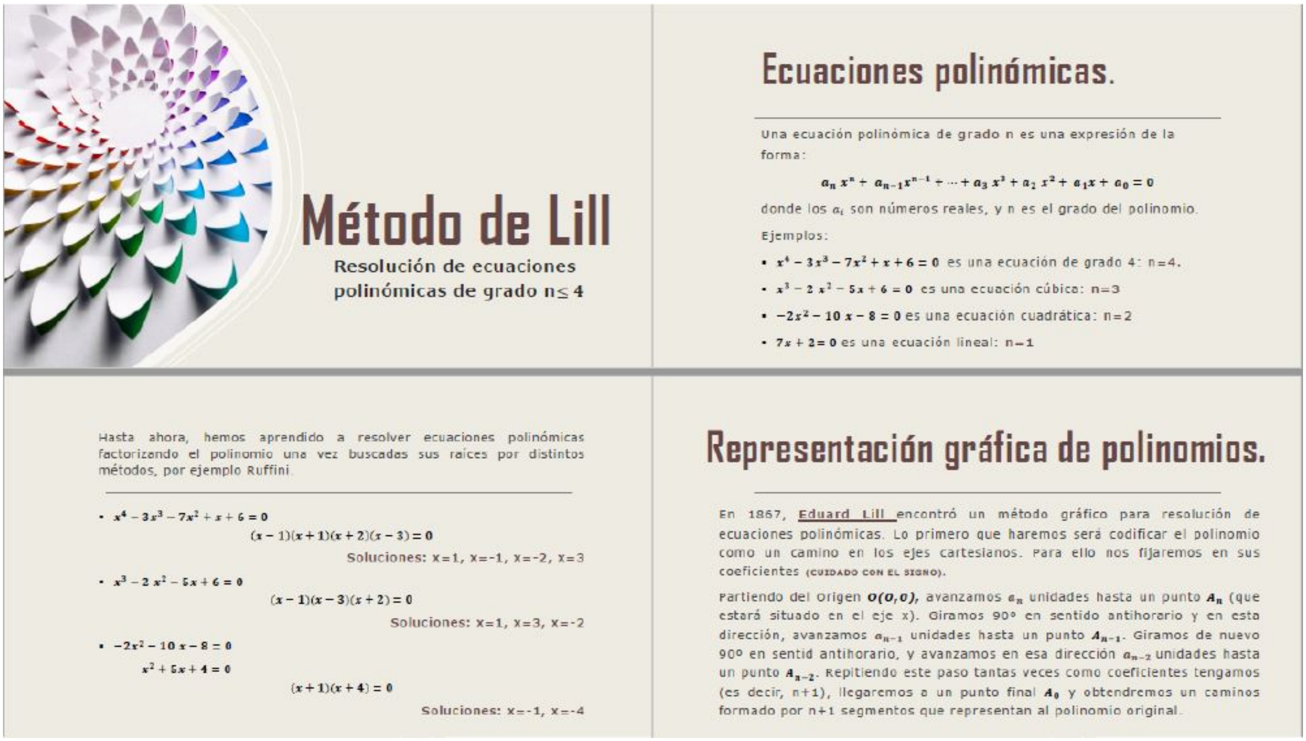
Todas las imágenes han sido creadas por la autora del documento mediante la herramienta GeoGebra Classic, a excepción de aquellas referenciadas en la Bibliografía.

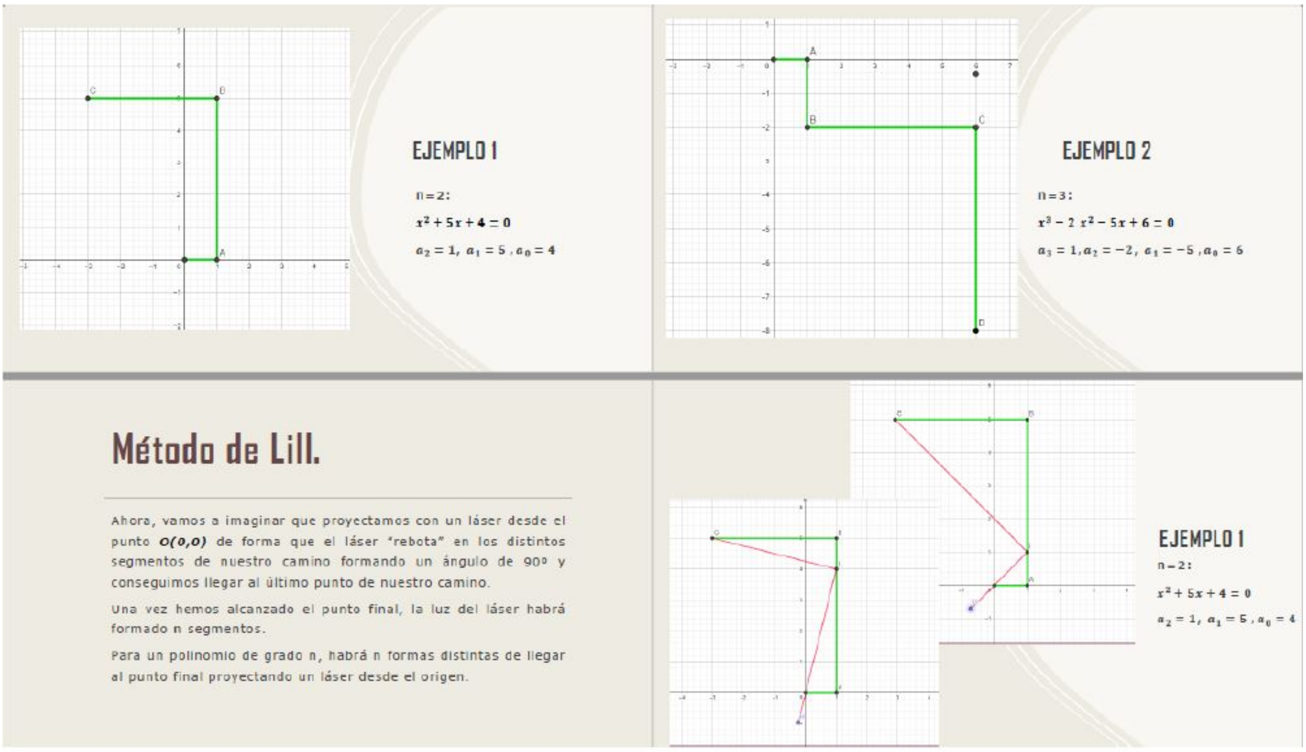
ANEXO I. RÚBRICA DE EVALUACIÓN DE LA ACTIVIDAD.

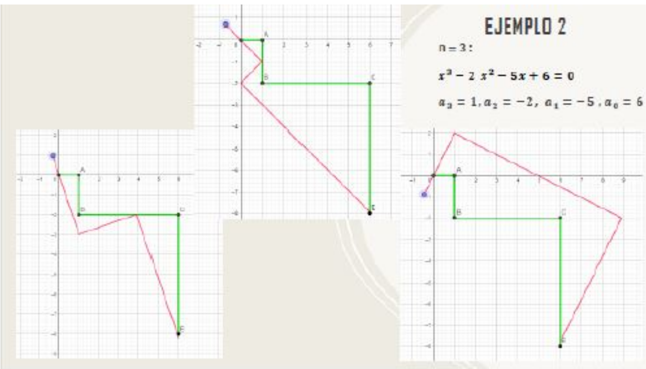
Se completará al finalizar cada actividad. En la primera columna, se completará con un valor de entre 1 y 5, siendo 1 la puntuación más baja y 5 la más alta para cada apartado.

	Del 1 al 5	A destacar	Posibles mejoras
Metodología			
Recursos			
Temporalización			
Dificultad del procedimiento			
Situaciones de Aprendizaje			
Desarrollo de competencias			
Adecuación al grupo de alumnos			
Instrumentos de evaluación			
Interés del alumnado			
Dificultades del alumnado			
Aprendizaje del alumnado			
Opinión del alumnado			

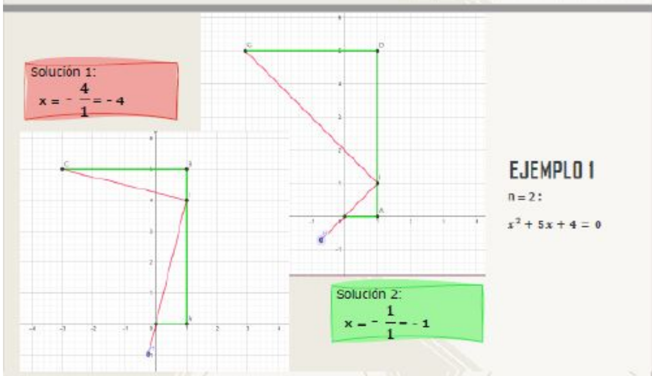
ANEXO II. POWERPOINT MÉTODO DE LILL.

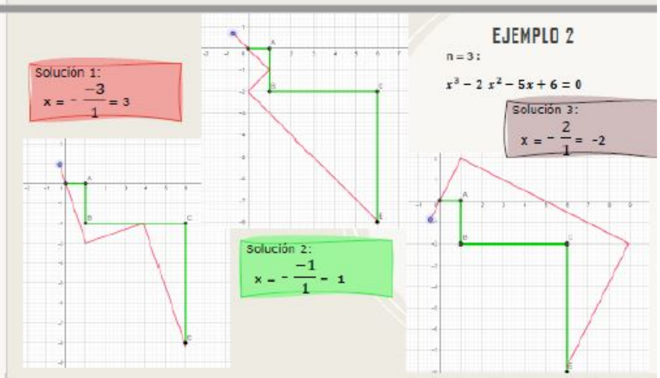


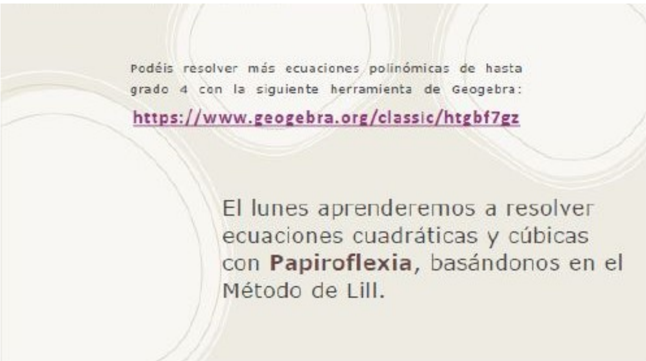



EJEMPLO 2
n=3:
$x^3-2x^2-5x+6=0$
$a_3=1, a_2=-2, a_1=-5, a_0=6$

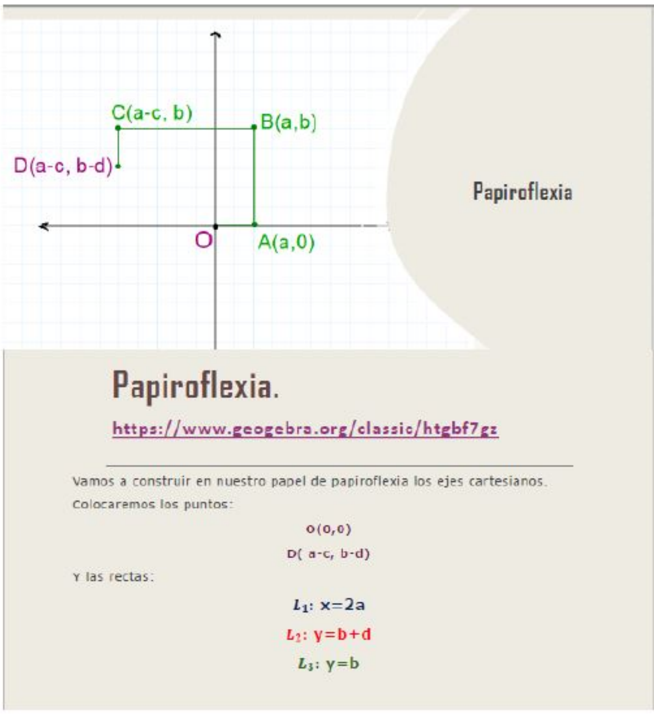

Método de Lill.
En cada una las trayectorias que forma el láser para llegar al punto final, podemos obtener una solución de la ecuación:
Calculamos la pendiente del primer segmento que forma el láser para llegar al punto final, desde el punto origen $O(0,0)$ hasta la recta vertical $x=a$.
Entonces, una solución de la ecuación será el valor de la pendiente multiplicado por (-1).

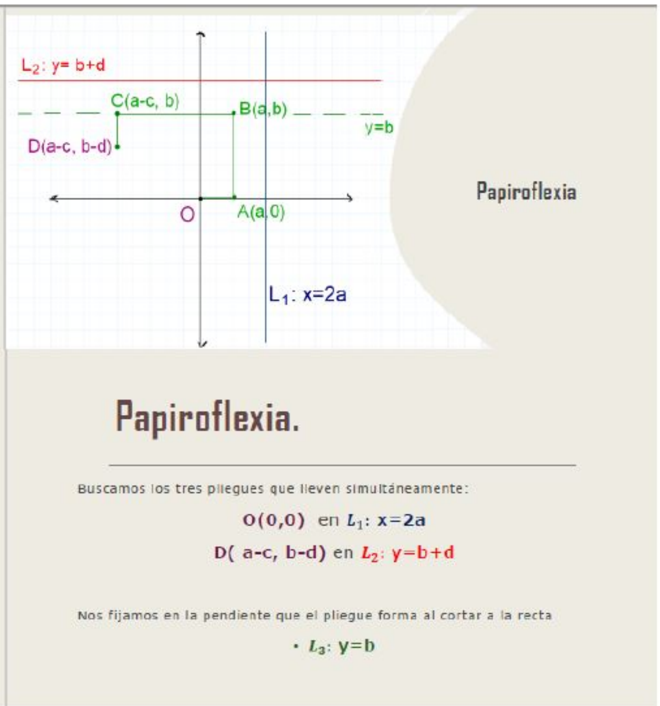

Solución 1:
$x=-\frac{4}{1}=-4$
Solución 2:
$x=-\frac{1}{1}=-1$
EJEMPLO 1
n=2:
$x^2+5x+4=0$


Solución 1:
$x=-\frac{-3}{1}=3$
Solución 2:
$x=-\frac{-1}{1}=1$
EJEMPLO 2
n=3:
$x^3-2x^2-5x+6=0$
Solución 3:
$x=-\frac{2}{1}=-2$


Podéis resolver más ecuaciones polinómicas de hasta grado 4 con la siguiente herramienta de Geogebra:
https://www.geogebra.org/classic/htgbf7gz
El lunes aprenderemos a resolver ecuaciones cuadráticas y cúbicas con Papiroflexia, basándonos en el Método de Lill.


Papiroflexia.
Las ecuaciones polinómicas de grado $n\leq 4$ se pueden resolver mediante pliegues en el papel, utilizando la Papiroflexia y basándonos en el Método de Lill.
Vamos a trabajar en la resolución de ecuaciones cúbicas de la forma:
$ax^3+bx^2+cx+d=0$
Construimos el camino que codifica nuestro polinomio:


C(a-c, b)
B(a,b)
D(a-c, b-d)
O
A(a,0)
Papiroflexia
Papiroflexia.
https://www.geogebra.org/classic/htgbf7gz
Vamos a construir en nuestro papel de papiroflexia los ejes cartesianos.
Colocaremos los puntos:
O(0,0)
D(a-c, b-d)
Y las rectas:
L_1: x=2a
L_2: y=b+d
L_3: y=b


L_2: y= b+d
C(a-c, b)
B(a,b)
y=b
D(a-c, b-d)
O
A(a,0)
L_1: x=2a
Papiroflexia
Papiroflexia.
Buscamos los tres pliegues que lleven simultáneamente:
O(0,0) en L_1: x=2a
D(a-c, b-d) en L_2: y=b+d
Nos fijamos en la pendiente que el pliegue forma al cortar a la recta
• L_3: y=b