Departamento de Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología
Departamento Matemática Aplicada
Trabajo Fin de Máster

MÁSTER EN PROFESOR DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA Y BACHILLERATO DE MATEMÁTICAS

La papiroflexia, una herramienta didáctica para aprender Matemáticas en la ESO

Autora: Elena Sarmentero Medina

Tutores: Philippe Giménez
Cesáreo González

Valladolid, 19 Julio de 2021

A mi familia.
Gracias por vuestro apoyo incondicional.

Índice general

Índice de figuras

Resumen

En el presente trabajo de fin de máster se pretende estudiar cómo distintas construcciones geométricas que forman parte del currículo de la Educación Secundaria Obligatoria pueden realizarse utilizando papiroflexia. Desde conceptos muy utilizados, como puede ser el Teorema de Pitágoras, hasta los problemas de la geometría clásica griega, pasando por las propiedades básicas del triángulo, la papiroflexia ofrece una alternativa a la regla y al compás para abordar y visualizar problemas y resultados geométricos de manera lúdica. Se pretende explotar este recurso para la creación de varias actividades que puedan ser útiles para ayudar a los alumnos a comprender ciertos conceptos matemáticos más abstractos en las que se indican unas pautas para su realización, además de abordar algunos problemas que pueden surgir durante su desarrollo y cómo solventarlas.

Palabras clave: papiroflexia, origami, recurso didáctico, educación, matemáticas, geometría.

Abstract

The objective of the present work is to study how different geometric constructions that are part of the educational curriculum of children between 12 and 16 years of age can be made using origami. From widely used concepts, such as the Pythagorean Theorem, to the problems of classical Greek geometry, passing through the basic properties of the triangle, origami offers an alternative to the ruler and the compass to approach and visualize geometric problems and results of playful way. It is intended to exploit this resource for the creation of several activities that may be useful to help students understand certain more abstract mathematical concepts in which some guidelines for their resolution are indicated, in addition to treating some problems that may arise during their development and how to solve them.

Palabras clave: origami, didactic resource, education, maths, geometry.

CAPÍTULO 1

Introducción

Las nuevas tecnologías han revolucionado numerosos ámbitos de nuestra vida cotidiana. La educación también se ha visto afectada por estos cambios dándole la posibilidad de acceder a numerosos recursos que antes sería impensable tener en un aula. Sin embargo, en este trabajo presentamos una herramienta que se dió por primera vez en China entre los siglos I-II. El origami o papiroflexia puede llegar a ser un recurso tan eficiente como cualquier otro de los que tenemos actualmente, en concreto, en la asignatura de matemáticas puede ser un excelente apoyo para explicar conceptos geométricos. Además, el aprendizaje a través de la manipulación de papel puede resultar una buena oportunidad para construir el aprendizaje significativo.

En este trabajo se pretende mostrar las ventajas y beneficios que tiene la papiroflexia y cómo ponerla en práctica dentro del currículo de la ESO en la asignatura de matemáticas. Se dividirá en cuatro capítulos en los que se tratarán diferentes cuestiones relacionadas con la papiroflexia y la educación. Habrá un primer capítulo en el que se trataran los siguientes temas:

- Se hablará del origen de la papiroflexia y de su expansión por en mundo occidental.
- Se recogerán los distintos tipos de papiroflexia que existen y cómo clasificarlos.
- Se indicarán una serie de instrucciones básicas utilizadas en actividades relacionadas con la papiroflexia: simbología y tipos de plegado.
- Se indicarán algunas aplicaciones en el mundo actual.
- Se mostrará cuáles son las matemáticas que hay tras la papiroflexia.

A continuación, se dedica un capítulo a mostrar cuál es el papel de la papiroflexia en la educación y algunos de los beneficios que tiene la utilización de este recurso en cualquier nivel educativo. También se dan algunos ejemplos de cómo podrían desarrollarse cada una de las competencias establecidas en Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

Por último, se muestra una colección de actividades aplicables a diferentes niveles dentro de la Educación Secundaria Obligatoria, centrándose sobre todo, en el bloque de geometría. Se plantean actividades más sencillas como la demostración de que la suma de los lados de cualquier triángulo es siempre 180º, u otras con un nivel de dificultad mayor, como la demostración de algunas de las identidades notables más utilizadas a través de la papiroflexia. Lo que se pretende con este capitulo es demostrar que se pueden elaborar numerosas actividades utilizando la papiroflexia que pueden ser desarrolladas en cualquier nivel de la ESO.

CAPÍTULO 2

Marco Teórico

2.1. Origen de la papiroflexia

La papiroflexia u origami es el arte o técnica de origen japonés que consiste en doblar papel para construir una figura deseada. En este país fue donde se comenzó a usar el término origami, que proviene de la composición dos símbolos, Ori, que significa doblar y kami, que es papel. Para su realización, únicamente se requiere un trozo de papel y las manos como materiales básicos. Su objetivo principal consiste en conseguir, haciendo distintos plegados al papel, unas formas y figuras que desarrollen la mente e imaginación de cada persona.

Figura 2.1: Símbolos que componen la palabra Origami. [1]

La característica de esta técnica es la posibilidad de transformar piezas de papel en formas de distintos tamaños que pueden abarcar desde modelos más sencillos hasta plegados con niveles de complejidad más elevados. Según la corriente más tradicional de la papiroflexia, sólo esta permitido hacer pliegues en el papel sin usar tijeras ni pegamento. Aunque estas condiciones puedan parecer muy restrictivas, veremos a lo largo de este trabajo, que las posibilidades que nos ofrece la papiroflexia son muy diversas.

La historia de la papiroflexia se inició en China entre los siglos I-II, llegando posteriormente a Japón unos siglos más tarde (S. VI). En un principio, debido que el papel era un recurso poco accesible, solo las clases altas podían disfrutar de esta actividad como entretenimiento. También fue muy popular entre los guerreros Samurai que la utilizaban para adornar sus regalos plegando trozos de papel en abanicos de varias formas. En el período Muromachi (1338 - 1573), el papel se convirtió en un recurso algo más accesible lo que hizo que surgieran algunas figuras características que identificaban a la persona que la portaba. Por ejemplo, era posible distinguir la clase social de cada persona según la figura realizada con papiroflexia que usara como distintivo [2].

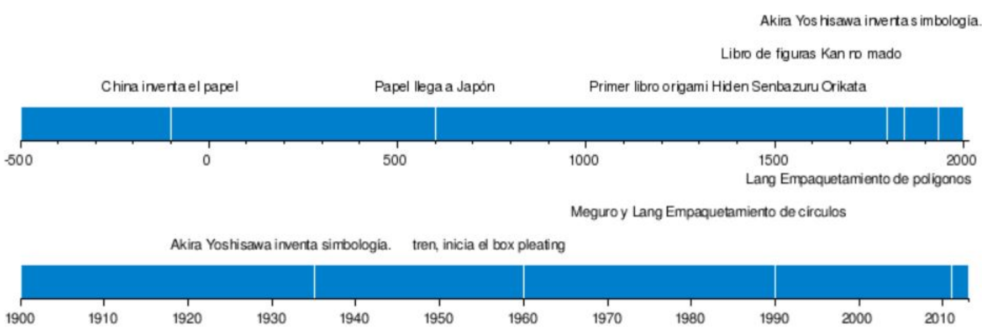


Figura 2.2: Línea de tiempo de la evolución del Origami. *Fuente:Wikipedia*

Algunos modelos se transmitieron junto con la difusión del papel, pero otros surgirían debido a las propias influencias culturales de los distintos territorios. Los musulmanes también mostraron interés por este arte y, gracias a su influencia en la Península Ibérica, comenzó a expandirse por nuestro territorio. El gran impulsor de la papiroflexia en el S XIX en España fue Miguel de Unamuno, el cuál, tras visitar una exposición en París quedo fascinado por el origami. Tal fue su interés por este arte, que creo su propia escuela nacional de dobladores.

Figura 2.3: Miguel de Unamuno plegando.

Otra figura destacada dentro de la papiroflexia moderna es el japonés Akira Yohizawa, considerado uno de los discípulos de los maestros orientales del origami. A él se le atribuye la simbología actual que se utiliza para las instrucciones de plegado y ha tenido importantes consecuencias, ya que esto ha permitido la difusión de contenido sin importar el idioma en el que estén escritas las publicaciones. La papiroflexia ha tenido grandes y destacadas aportaciones en estas últimas décadas debido a la mejor transmisión de los modelos, y al desarrollo de técnicas que permiten realizar figuras cada vez más complejas.

Dentro del mundo de la educación hizo su aparición en los centros gracias a Friedrich Fröebel en el siglo XIX como recreación de formas de su vida cotidiana y como medio de desarrollo de la creatividad.

2.2. Tipos de papiroflexia. Clasificación

El objetivo de este trabajo es relacionar la papiroflexia con el ámbito educativo por lo que es importante fijar una clasificación para utilizar una u otra en función de lo que se quiera trabajar en el aula. Por un lado, según Grados (2009), se podría realizar una clasificación atendiendo a los siguientes aspectos: la finalidad, el tipo de papel utilizado y la cantidad de piezas utilizadas:

Aspectos	Tipos y clasificación
Finalidad	Artístico: construcción de figuras de la naturaleza Educativo: construcción de figuras para el estudio de propiedades geométricas y desarrollar diferentes habilidades.
Forma del papel	Tiras: se parte de una tira de papel Papel completo: se parte de un trozo de papel en forma cuadrangular, rectangular o triangular
Cantidad de trozos	Tradicional: un solo trozo de papel inicial Modular: varios trozos de papel inicial simples que se pliegan o superponen para formar unidades, generalmente iguales, que se unen para dar lugar a una figura compleja.

Por otra parte, Vitor (2004) propone otra clasificación en la que únicamente se tiene en cuenta la técnica utilizada:

Tipos	Características
Papiroflexia de acción	Estáticas: figuras inmóviles Móviles: figuras con las que podemos emular movimientos de objetos/animales.
Papiroflexia modular	Se crean figuras más complejas colocando varias piezas iguales juntas.
Papiroflexia con plegado húmedo	Se humedecer el papel de figuras ya creadas para moldearlo a la forma deseada. Con esto se consigue mayor realismo a las figuras.
Papiroflexia pura	Únicamente se realiza mediante pliegues.
Papiroflexia teselada	Composición de figuras que se repiten para cubrir totalmente una superficie.

2.3. Simbología y tipos de plegado

Al igual que se ha realizado una clasificación de los tipos de papiroflexia más utilizados que existen, es necesario establecer una simbología clara para la compresión de las instrucciones de plegado. Por lo tanto, en este apartado se exponen los símbolos que se van a utilizar a lo largo de este trabajo y los tipos de plegados más utilizados. Todos los pliegues tienen una representación gráfica que esta compuesta por un tipo de línea y una flecha asociada a ella, así que simplemente viendo el tipo de flecha o de línea sabremos como debemos doblar. Se indican primero los más básicos:

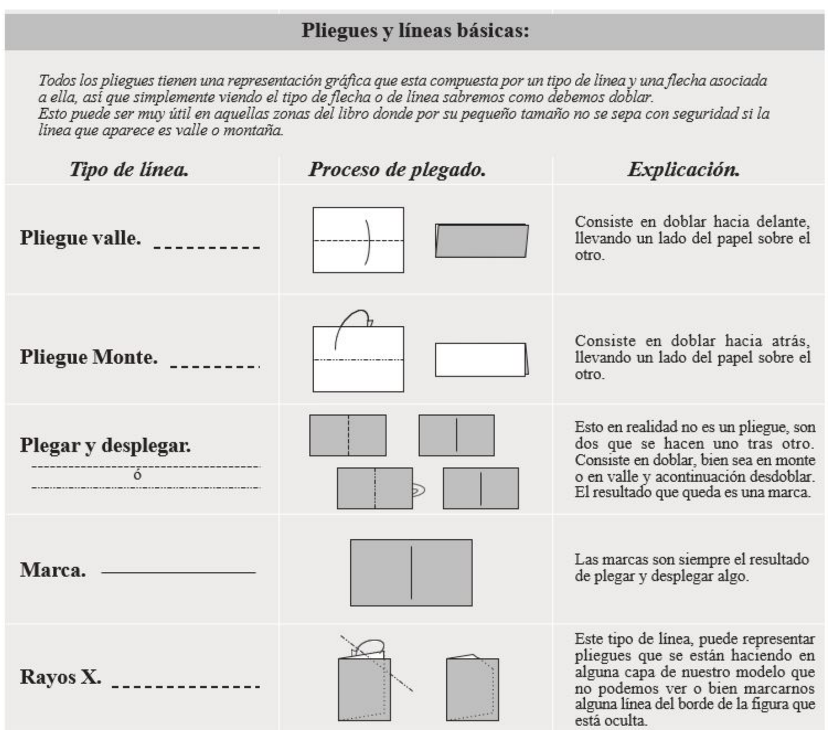


Figura 2.4: Tipos de pliegues simples. [16]

Existen otros tipos de pliegues denominados *Pliegues Compuestos* cuyo nivel de realización es más elevado. No se desarrollarán en este trabajo ya que son más difíciles de incluir en actividades dirigidas a la ESO, aunque se ha querido destacar su existencia y su utilidad en otros ámbitos.

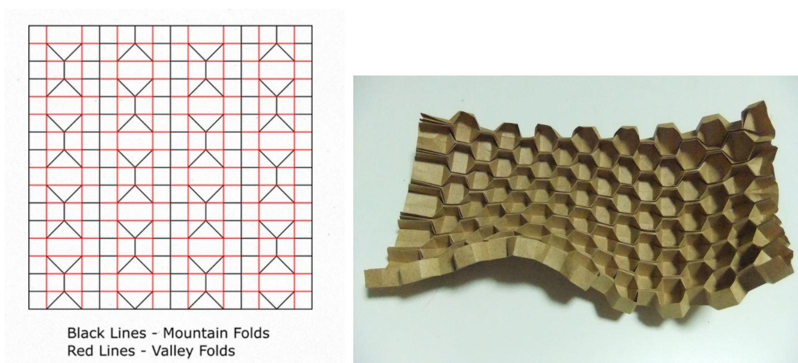
2.4. Aplicaciones de la papiroflexia en el mundo actual

La papiroflexia es un recurso que está al alcance de todos. Dentro del mundo artístico y creativo son muchas sus variantes, pero sus características y enorme potencial lo han llevado a abrirse camino también en la base de innovaciones tecnológicas importantes.

Tras varios años de esfuerzo e investigaciones por parte de ingenieros, físicos y matemáticos para lograr conseguir una unión entre las matemáticas y la papiroflexia, se han desarrollado unas bases y reglas teóricas, que han sido expuestas en apartados anteriores, con el fin de determinar cuándo podemos utilizar este recurso para construir una figura en concreto, qué tipos de pliegues se pueden realizar y qué características tiene un modelo de papiroflexia.

Esta técnica ha llegado a tener importantes contribuciones al campo de la tecnología. Se han creado algoritmos utilizando como base pliegues simples, tales como los de tipo valle o montaña, que han sido capaces de recrear estructuras mucho más complejas, incluso dejar a un lado el papel como único material con el que poder trabajar.

Una aplicación que tenemos en nuestro día a día es el caso de las cajas de cartón y los envases de tipo tetrabrik. Otra configuración común en el diseño de envases es la estructura tipo panal, que ayuda tanto a proteger el contenido como a reducir las vibraciones. Además este tipo de estructura se aplica en cosas tan cotidianas como pueden ser las cajas de cartón hasta en suelo del tren bala japonés o a las paredes de los cohetes de satélites artificiales.



(a) Mapa de plegado (b) Figura tipo panal de abeja

Figura 2.5: Ejemplo plegado tipo HoneyComb [20]

La papiroflexia también se ha hecho hueco en el sector de la ingeniería, utilizando las técnicas de plegado en otros materiales diferentes al papel. Por ejemplo, en la industria del automóvil se aplican programas informáticos que utilizan la papiroflexia como base para conseguir que los airbags de los vehículos queden planos una vez doblados.

Algunos investigadores están utilizando la papiroflexia en sus diseños 3D debido a las ventajas que ésta les ofrece a la hora de crear modelos tridimensionales. Consiguen, a través de programas informáticos, imprimir objetos prácticamente planos con una serie de cortes y patrones establecidos que posteriormente puedan ser doblados y ensamblados transformándose en objetos tridimensionales.

La aeronáutica también es un campo que está introduciendo diferentes usos de la papiroflexia en su sector. Actualmente existen numerosas investigaciones sobre cómo poder lanzar satélites de manera que sus paneles solares se envíen doblados y se desplieguen una vez en el espacio, situación que se simula por ordenador mediante técnicas y cálculos basados en las matemáticas de la papiroflexia. Para ello se realizan modelos en papel que posteriormente se trasladan a la construcción de los satélites.

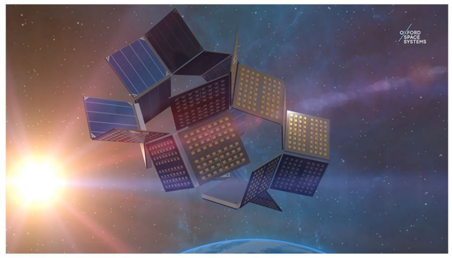


Figura 2.6: OrigamiSat diseñado por la empresa tecnológica Oxford Space System

El modelo de plegado de paneles solares más conocido es el pliegue de Miura: forma parte de una rama del origami clasificado como rígido, que estudia estructuras plegables con láminas planas rígidas, unidas entre sí por bisagras [3].

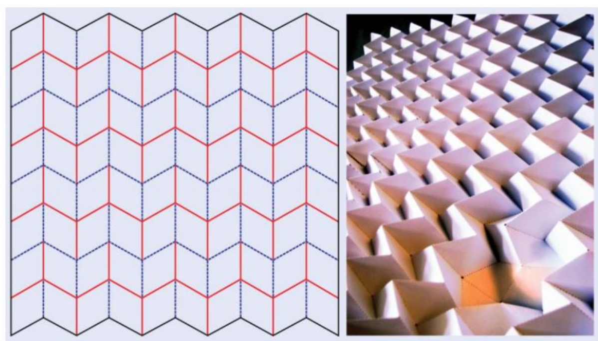


Figura 2.7: Plegados Miura [21]

Otra vertiente de la papiroflexia algo menos conocida, es su uso como terapia para combatir el estrés y tratar dolencias como el artritis o la depresión. Los sentidos que más se activan cuando se realizan ejercicios de plegado son el tacto y la vista. Por lo tanto, puede ser utilizada [4]:

- Como herramienta para terapias de rehabilitación en personas con dificultad de movilidad en las manos o reumatismos.
- Como estimulación en personas con discapacidad visual y problemas de memoria.
- Para mejorar la memoria espacial, la orientación y la habilidad para reconocer figuras tridimensionales.
- Para mejorar el desarrollo de las capacidades cognitivas, como por ejemplo, la memoria, la atención y la percepción.

Todo esto nos indica que la papiroflexia puede ser considerada una disciplina universal, con un lenguaje simple y unificado que permite su transmisión sin obstáculos y que puede utilizarse de forma práctica con resultados satisfactorios en numerosos campos, como por ejemplo, a la docencia en matemáticas.

2.5. Matemáticas y papiroflexia

Este apartado se centrará en ver las múltiples posibilidades que puede ofrecer la papiroflexia en relación con el mundo de las matemáticas. Destacaremos tres aspectos fundamentales, que trataremos a continuación, en los cuales existe gran relación:

1. Papiroflexia modular

2. Axiomas de constructibilidad
3. Diseño de figuras

2.5.1. Papiroflexia Modular

La papiroflexia modular consiste en hacer figuras utilizando varios trozos de papel dando lugar a piezas que se denominan *módulos*. Los poliedros estarían dentro de esta modalidad, aunque no son los únicos [1].

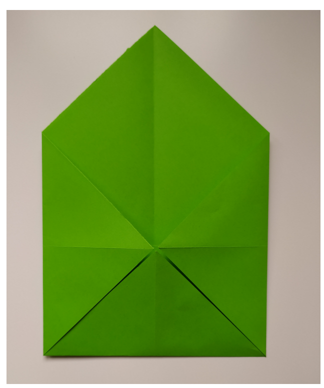
Las principales aportaciones de esta modalidad a las matemáticas son:

1. Es un recurso que permite ver físicamente la representación de problemas abstractos. Aunque actualmente existen numerosos programas de simulación que puedan ayudar con esta labor, en ocasiones es mucho más instructivo resolver el problema con *'tus propias manos'* y esto es algo que se puede lograr a través de la papiroflexia. Para esto, existen numerosos recursos que permiten la construcción de diferentes poliedros.
2. En la resolución de problemas, mientras se realiza el plegado y ensamblaje de los módulos, se pueden comprobar de manera muy visual algunos de las conceptos más destacados de los poliedros, tales como, el numero de vértices, las formas de las caras que lo forman, simetría, etc.

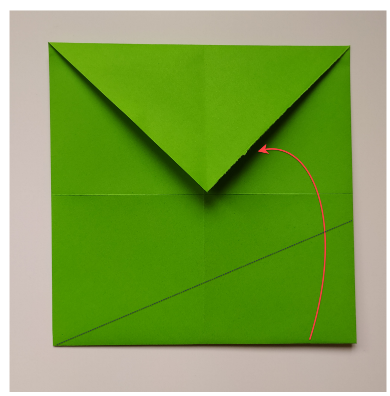
Se puede hacer una clasificación de los módulos dependiendo de en qué se base la descripción del poliedro [7]:

- Módulos basados en las aristas. Cada módulo corresponde a una arista. Suelen representar caras perforadas que permiten ver el interior. A esta familia pertenecen los módulos tipo tortuga. Son módulos compuestos por dos mitades, que se enlazan con otros módulos de manera que cada mitad forma parte de una pirámide distinta. Normalmente están formados por dos caras en forma de trapecio isósceles, más dos aletas. Como el módulo no cubre todo el triángulo, al unirlos queda una pirámide con agujero en la punta. Se incluye. Se puede ver a continuación un paso a paso de cómo fabricar estos módulos tipo tortuga:

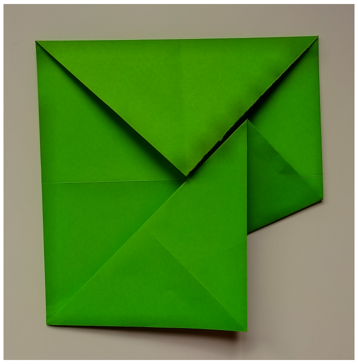
(a) Doblamos el cuadrado por las dos diagonales



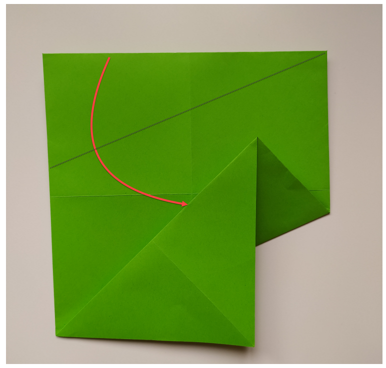
(b) Tomamos tres de los cuatro vértices del cuadrado y las trasladamos al punto de central



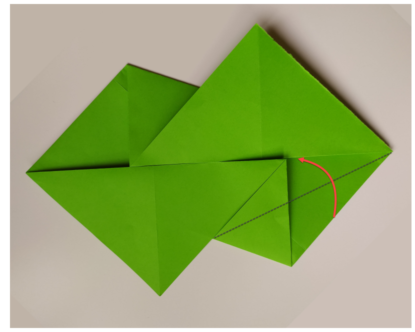
(c) Damos la vuelta y llevamos el cuarto vértice hacia el punto central. Luego realizamos el pliegue que se indica la imagen



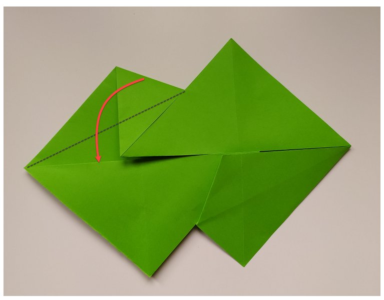
(d) Nos quedará tal y como muestra la imagen



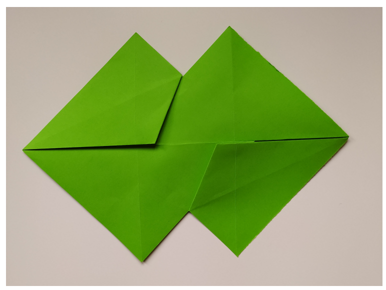
(e) Realizamos el mismo pliegue en el lado opuesto



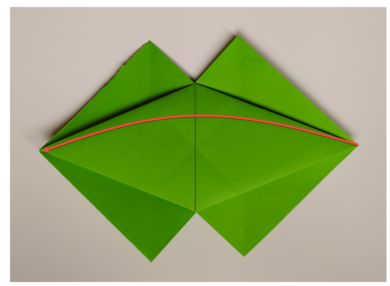
(f) Tomamos el lado marcado en la imagen y lo llevamos hasta que coincida con el eje central



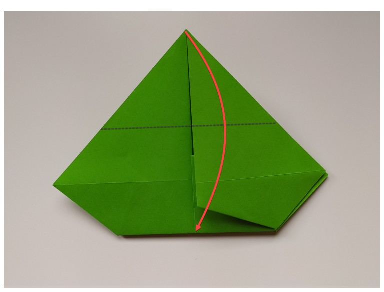
(g) Realizamos lo mismo en el lado opuesto



(h) Nos quedará una figura similar a la que muestra la imagen

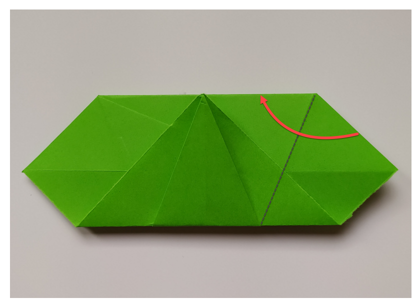


(i) Damos la vuelta a la figura y plegamos por el eje vertical central

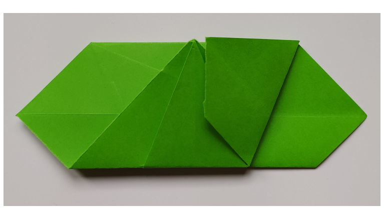


(j) Tomamos la punta superior de la figura y la llevamos hasta el lado inferior

(k) Damos la vuelta a la figura y hacemos lo mismo con la otra punta

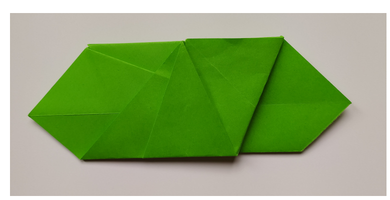


(l) Plegamos como se muestra en la imagen

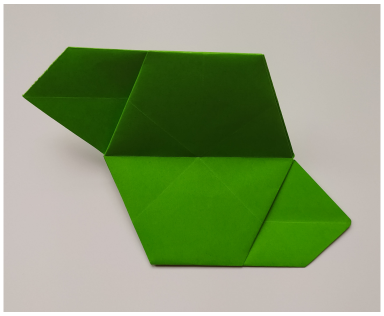


(m) De este modo nos quedará una especie de pestaña

(n) Introducimos la pestaña en el bolsillo del triángulo central



(ñ) Damos la vuelta a la figura y hacemos lo mismo por le otro lado



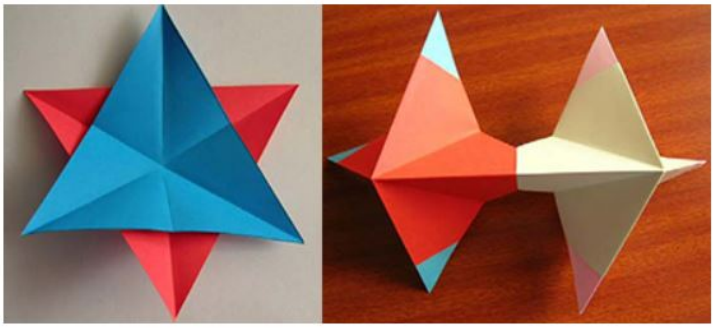
(o) Abrimos la figura y doblamos las pestañas para que se puedan ensamblar unos módulos con otros. Obtenemos así un módulo tipo tortuga

Figura 2.8: Paso a paso fabricación módulo tipo tortuga. *Fuente imágenes: Elaboración propia*

- Módulos basados en las caras. Suelen ser más débiles ya que las caras se juntan entre sí de dos en dos, mientras que las aristas se juntan en mayor cantidad en cada vértice. Dentro de esta categoría se clasifican los módulos Sonobè, que deben su nombre al japones Mitsunobu Sonobè. Estos módulos se juntan de tres en tres formando pirámides con base un triángulo equilátero y con ángulos rectos en el vértice. Se harán uso de estos módulos en la Actividad 4.1 del Capítulo 4 para crear diferentes figuras.

Figura 2.9: Figuras creadas con módulos Sonobè. *Fuente Imagen: IES Bahía de Babel*

- Módulos basados en los vértices. Cada módulo da lugar a un vértice y pueden clasificarse a su vez, según el grado del vértice que constituyen: los que agrupan aristas de tres en tres, de cuatro en cuatro, etc. Los más importantes son de tipo giroscopio.



(a) Modelos tipo giroscopio [5]

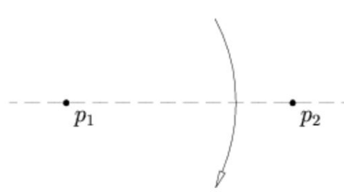
(b) Octaedro creado con módulos tipo giroscopio. *Imagen extraida del vídeo: https://www.youtube.com/watch?v=MJXs9Tcn1XA*

2.5.2. Axiomas de constructibilidad

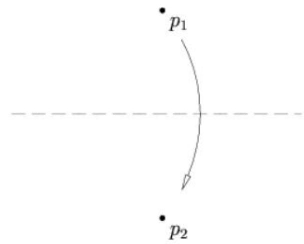
Resolver problemas matemáticos utilizando la papiroflexia como recurso puede ser muy útil en educación para estudiar la geometría plana elemental. Este tema se tratará en profundidad en el próximo capítulo por lo que aquí sólo se abordarán cuáles son los axiomas de constructibilidad que se pueden utilizar para resolver problemas acordes con los contenidos estipulados en el currículo de la ESO. La clave para la resolución de estos problemas es interpretar geométricamente lo que se hace al realizar cada pliegue e incluso hay casos que es más sencillo encontrar la solución utilizando esta técnica que con regla y compás. Lo que ocurre es que los números constructibles son mucho más sencillos de definir a través de la papiroflexia. De forma general se define que un número r es constructible si y solo si, dado un segmento de línea de longitud unitaria, un segmento de línea de longitud $|r|$ se puede construir con compás y regla en un número finito de pasos. Equivalentemente, r es construible si y solo si hay un expresión de forma cerrada por r usando solo los números enteros 0 y 1 y las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y raíces cuadradas. [8] Sin embargo, si se elimina la condición de utilizar regla y compás y añadimos la utilización de la papiroflexia, la definición de numero constructible se modifica ligeramente. En este caso, con los números origami-constructibles se añade la posibilidad de resolver ecuaciones cúbicas, cosa que con regla y compás no es posible. Esto está relacionado con es sexto axioma del origami, que nos permite encontrar una tangente común a dos parábolas y que se enunciará más adelante en este mismo capítulo. Dicho axioma es el que marca la diferencia entre trabajar con origami o con regla y compás, ya que usando el resto de axiomas (todos menos el O_6), serían herramientas totalmente equivalentes.

La matemática sobre la que se sustenta la papiroflexia se puede englobar en una serie de conocidos axiomas formulados por el matemático italiano-japonés Humiaki Huzita en 1992. Estos axiomas son [6]

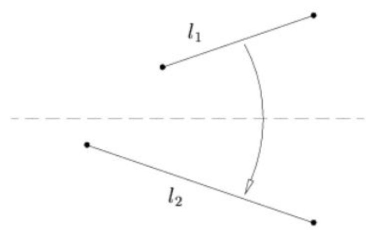
O1 Dados dos puntos p_1 y p_2, existe un único pliegue l que pasa a través de ellos. Este axioma es comparable con el primer axioma de Euclides: *Dados dos puntos se pueden trazar una recta que los une.*



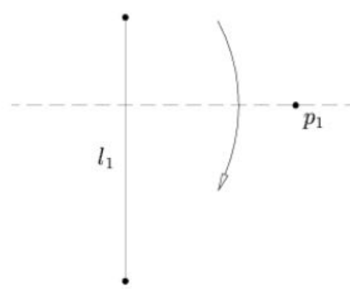
O2 Dados dos puntos p_1 y p_2, existe un único pliegue que lleva p_1 sobre p_2. Este axioma se relaciona con la construcción de la mediatriz del segmento que une p_1 con p_2 realizado con regla y compás.



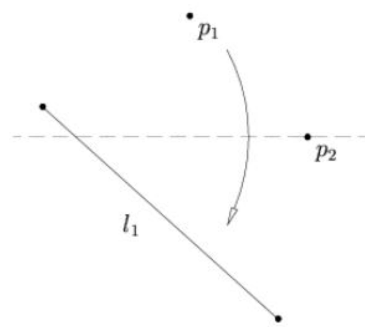
O3 Dados dos pliegues distintos l_1 y l_2, existen uno o dos dobleces que sitúan l_1 exactamente sobre l_2. Cuando l_1 y l_2 son paralelos, es equivalente a encontrar la recta paralela común que se encuentra a la misma distancia de ambos pliegues. En el caso de que no sean paralelos, se construye la bisectriz del ángulo que determinan ambos pliegues.



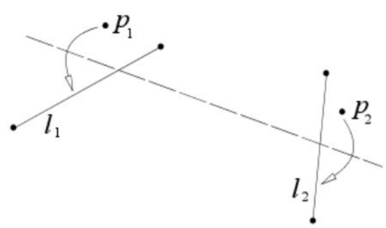
O4 Dados un pliegue l_1 y un punto p_1, existe un único pliegue que deja fijo el pliegue l_1 y contiene a p_1. Este axioma se relaciona con la construcción de la perpendicular a una recta que pasa por un punto que esta contenido o no en dicha recta.



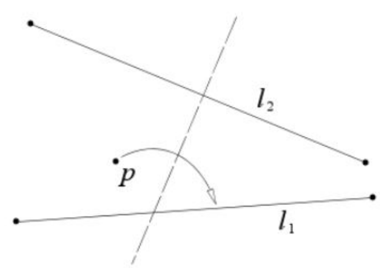
O5 Dados un doblez l y dos puntos p_1 y p_2, se pueden encontrar un máximo de dos pliegues de forma que al situar p_1 sobre l, también pertenezca a l el punto p_2. El punto p_2, es un punto que se mantiene fijo, ya que la construcción mueve p_1 sobre l, y p_1 recorre un movimiento circular hasta coincidir con un punto de dicho pliegue. Por lo tanto, existen tantas posibilidades como puntos de intersección entre la circunferencia de centro p_2 y radio p_1p_2 con la recta l_1, es decir, una, dos o ninguna.



O6 Dados dos puntos p_1 y p_2 y dos líneas l_1 y l_2 constructibles, la línea que refleja a p_1 en l_1 y a p_2 en l_2, si es que existe, es constructible. Según la posición relativa de p_1, p_2, l_1 y l_2 este axioma se puede realizar de 0, 1, 2, y hasta 3 formas distintas.



O7 Dados dos pliegues l_1 y l_2 y un punto p constructibles, se puede encontrar la recta tangente a la parábola de directriz-foco (l_1, p) perpendicular a l_2, realizando un pliegue perpendicular a l_2 y que lleve a p sobre l_1.



Utilizando los números origami-constructibles se consigue, por ejemplo, dar solución al problema de la trisección del ángulo o al de la duplicación del cubo que son imposibles de resolver utilizando regla y compás.

- Problema 1. Trisección del ángulo [9]. Se parte de la hipótesis de que dado un ángulo cualquiera α, se quiere demostrar que se puede construir geométricamente un punto P tal que al unir el vértice del ángulo con dicho punto se forme un ángulo $\alpha/3$. El problema de construir $\alpha/3$, es equivalente a construir $\cos(\alpha/3)$. Por lo tanto, considerando la identidad trigonométrica:

$$\cos\alpha = 4\cos^3(\alpha/3) - 3\cos(\alpha/3) \tag{2.1}$$

y reemplazando $\cos\alpha =$ c y $\cos(\alpha/3) =$ x, se obtiene la ecuación:

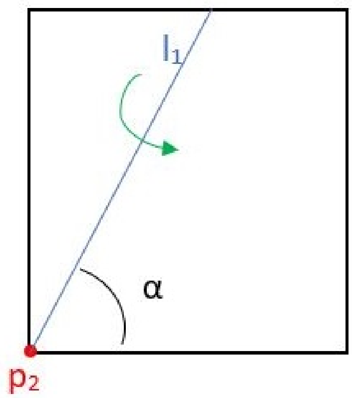
$$4x^3 - 3x + c = 0 \tag{2.2}$$

Particularizando para el caso en que $\alpha = \pi/3$ la ecuación anterior queda:

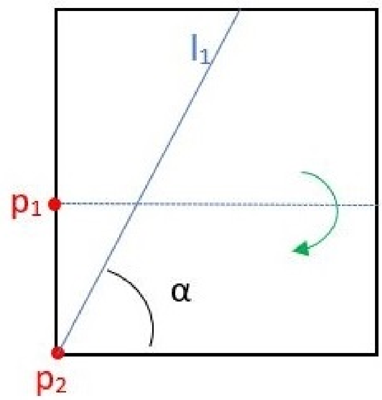
$$8x^3 - 6x + 1 = 0 \tag{2.3}$$

Llegados a este punto, el problema ahora es cómo resolver la ecuación 2.3, que según la definición que se ha dado de número constructible, no es posible resolver con regla y compás. Por lo tanto, se ha llegado a un absurdo, ya que no se puede encontrar un número constructible que sea solución de una ecuación cúbica y esto demuestra que no se puede realizar la trisección de un ángulo con regla y compás.

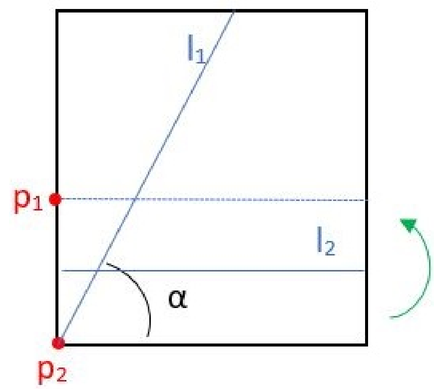
Sin embargo, utilizando la papiroflexia se podría resolver tal y como se muestra a continuación:



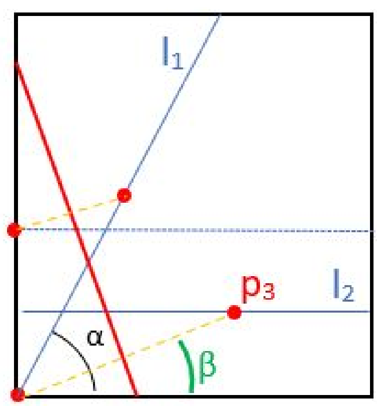
(c) Paso 1



(d) Paso 2



(e) Paso 3

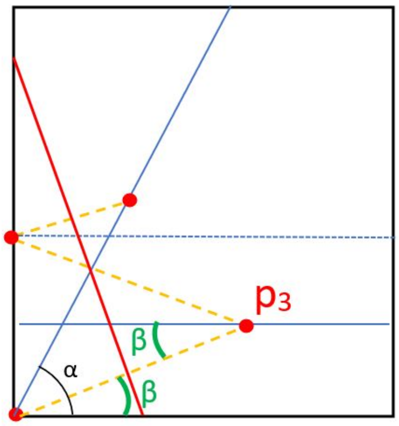


(f) Paso 4

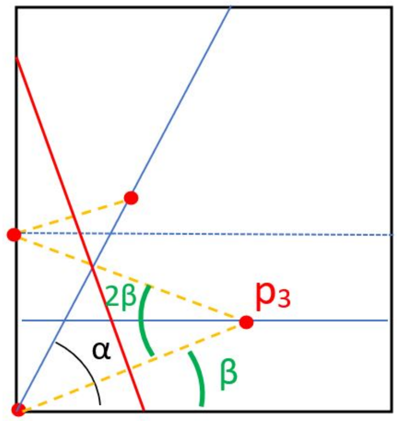
Figura 2.10: Trisección de un ángulo a través la papiroflexia. Fuente: Elaboración propia

Paso 1: En una hoja rectangular, se denomina p_2 al punto de la esquina inferior izquierda y se traza una línea que une dicho punto con uno elegido del borde superior formando un ángulo α tal y como se indica en la imagen. $[O_1]$
Paso 2: Se selecciona un punto p_1 que pertenezca al lado vertical izquierdo y se construye la línea perpendicular a dicho lado que pasa por p_1. $[O_4]$
Paso 3: Se realiza un pliegue, que se denota como l_2, paralelo al anterior y que esté a la misma distancia de la perpendicular trazada en el Paso 2 que del borde inferior.$[O_3]$
Paso 4: Se pliega de tal modo que el punto p_2 se traslade sobre l_2 y p_1 sobre l_1 de forma simultánea. Se denota p_3 la proyección del punto p_2 sobre l_2. $[O_6]$

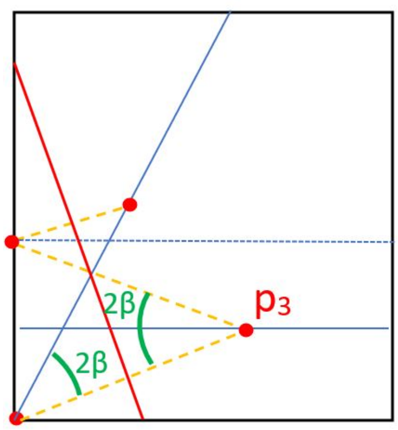
Se demuestra el ángulo final β que se forma es un tercio del inicial α:



(a) Se tiene que entre l_2 y el pliegue que traslada el punto p_2 sobre l_2, se forma también un ángulo β ya que al tener una intersección una recta oblicua con otras dos rectas paralelas.



(b) Del mismo modo, se forma otro ángulo β porque la recta l_2 está a igual distancia de las otras dos rectas paralelas, por lo que el ángulo se repite por simetría.



(c) Además, vemos que la suma de estos dos ultimos ángulos β es igual al ángulo α, menos el ángulo β inicial de la figura (a).

Figura 2.11: Demostración trisección del ángulo α

Por lo tanto, se concluye que:

$$2\beta = \alpha - \beta \tag{2.4}$$

o lo que es lo mismo, $\beta = \alpha/3$, tal y como se quería demostrar.

- Problema 2. Duplicación del cubo. En este caso se tendría que, partiendo de un cubo de lado 1, se podría construir con regla y compás otro cubo cuya arista midiera b y su volumen fuera 2. Dado que el volumen del cubo sería b^3, se debe poder construir un número b tal que $b^3 = 2$. Esto quiere decir que b debe ser raíz del polinomio $f(x) = x^3 - 2$. Los números contructibles con regla y compás son aquellos que pueden escribirse por medio de las cuatro operaciones elementales y raíces cuadradas. Dicho de otra manera, un problema puede ser resuelto con regla y compás, si y sólo si, la incógnita puede ser expresada en función de los datos mediante una expresión algebraica racional o irracional cuadrática. El número $\sqrt[3]{2}$ no es un número constructible, ya que es raíz de la ecuación cúbica $x^3 = 2$, y por lo tanto el problema de la duplicación del cubo no es resoluble con regla y compás [10] [14]. Pero sí que puede resolverse por origami tal y como se muestra en la siguiente imagen:

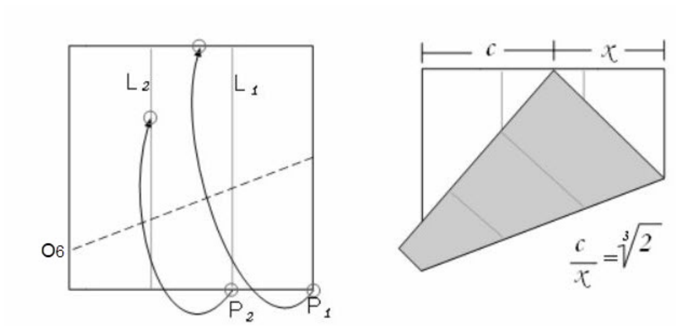


Figura 2.12: Duplicación del cubo utilizando la papiroflexia. *Fuente imagen: http://novalecortar.blogspot.com/*

2.5.3. Diseño de figuras

Por último, en esa sección se recogerán algunos de los resultados matemáticos obtenidos por famosos plegadores conocidos mundialmente que se apoyan en el uso de las matemáticas para diseñar sus modelos. Al desplegar un modelo de papiroflexia se descubre en el trozo de papel cuadrado un característico mapa de pliegues, que se denomina grafo, donde se forman valles y montañas. El problema que surge es cómo podemos saber si ese mapa de pliegues corresponde a un modelo de papiroflexia. En un principio, puede parecer un problema difícil, pero tal y como se hace en otros ámbitos de las matemáticas, se comparará con un modelo más sencillo, los modelos planos. Este tipo de modelos satisfacen que cada ángulo diedro de cada arista es múltiplo de π. El grafo del mapa de pliegues de un modelo plano cumple una serie de propiedades que se indican a continuación [1]. Algunas de ellas son elementales pero no triviales:

- **(Maekawa)** Este teorema establece que el número de pliegues montaña en un vértice de plegado plano difiere exactamente en dos pliegues, del número de pliegues valle. La diferencia entre el número de pliegues en montaña y en valle en un vértice es siempre 2. Esto implica que la suma de los ángulos formados por pliegues montaña suman 180º, al igual que la suma de los ángulos formados por pliegues de tipo valle. Entonces el teorema de Kawasaki establece que el mapa de pliegues se puede doblar plano si y solo si la suma y diferencia alternas de los ángulos da cero.

Figura 2.13: Teorema de Maekawa. [15]

- El grado de cada vértice es par, es decir, convergen un numero par de pliegues.
- **(Meguro)** Las caras de un mapa de pliegues son 2-coloreables.
- **(Kawasaki)** Sean α_1, $..\alpha_{2k}$ todos los ángulos concurrentes en un vértice, contiguos cada uno con el

siguiente. Entonces, tenemos:

$$\alpha_1 + \alpha_3 + .. + \alpha_{2k-1} = \alpha_2 + \alpha_4 + .. + \alpha_{2k} = \pi \tag{2.5}$$

Esto lo que indica es que si los ángulos alrededor de un vértice se agrupan en colores alternos, la suma de cualquiera de los grupos será igual a 180 grados en papiroflexia de pliegue plano.

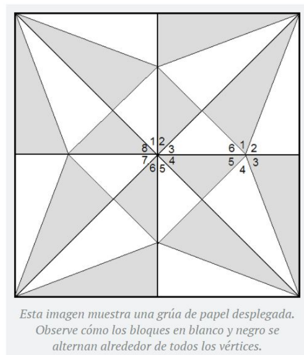


Figura 2.14: Teorema de Kawasaki [12].

- **(Hull)** Thomas Hull demostró que la condición que enuncia el Teorema de Kawasaki es una condición suficiente para que un mapa de pliegues corresponda a un modelo plano, además halló nuevas propiedades que deben satisfacer este tipo de modelos.

CAPÍTULO 3

La papiroflexia como recurso didáctico

La papiroflexia puede ser utilizada como recurso para enseñar y aprender geometría ya que es una técnica que permite elaborar figuras siguiendo instrucciones, que pueden estar pautadas por el docente o no, así como resolver problemas mediante pliegues del papel.

Este capítulo se centrará en analizar cómo se puede utilizar esta herramienta como recurso didáctico, así como las competencias que se trabajan con su uso y la utilidad que puede adquirir en la parte de geometría como apoyo en la asignatura de matemáticas en alumnos de la ESO.

3.1. Papel de la papiroflexia en la educación

La geometría se reconoce como uno de los conocimientos generales que el individuo debe obtener para una educación matemática de calidad, ya que el estudio de la geometría ayuda a potenciar habilidades de procesamiento de la información recibida a través de los sentidos y permite al estudiante desarrollar, a la vez, muchas otras destrezas de tipo espacial que le ayudan a entender el mundo que le rodea. Veremos a lo largo de este capítulo cómo podemos incluir la papiroflexia como herramienta para aprender geometría.

En primer lugar, se debe analizar cómo puede influir positivamente en los procesos de aprendizaje de los alumnos el uso de la papiroflexia. Son muchas las ventajas y cualidades que se le atribuyen a esta técnica, sobre todo cuando hablamos del ámbito educativo: puede ayudar a desarrollar algunas habilidades o destrezas básicas, puede ser utilizado como ejemplo de aprendizaje esquemático, que se basa en la repetición de acciones como base para adquirir nuevos conocimientos, etc. El alumno cuando realiza una actividad de este tipo debe escuchar las explicaciones del profesor, pero es trabajo propio el lograr el éxito en la tarea siguiendo las pautas marcadas minuciosamente. Esto es beneficioso para el alumno ya que aumenta su nivel de confianza y desarrollo personal. Todo esto, ha llevado a que se realicen numerosas investigaciones que demuestran que la papiroflexia utilizada como herramienta pedagógica logra resultados positivos en el desarrollo del alumno tanto en el ámbito educativo como personal, sobre todo en la Educación Primaria. Algunos de ellos son:

Autores y estudios	Beneficios de la papiroflexia
Zanolini, Vano y Barusso (2011) con el estudio *Origami como recurso pedagógico: experiencia en la enseñanza con niños de escuela primaria*	1. Es una herramienta muy potente como ayuda a la alfabetización. 2. Permite trabajar la expresión oral debido a que se utilizan las figuras creadas como personajes. 3. Refuerza el rendimiento emocional, moral y social.
Ayala (2013) con el estudio *El Origami en el desarrollo de la motricidad fina de los niños y niñas*	1. Incrementa la participación de los niños en el aula y su paciencia, así como, la constancia. 2. Fortalece la autoestima unido a la diversión y animación al elaborar figuras.
Grabauskienė, V. y Lapėnienė, R. (2019) con el estudio *The teaching of pattern comprehension in the 2nd grade of primary school using origami applique*	1. Ayuda a comprender los conceptos geométricos subyacentes que posteriormente aplican en otras tareas de forma correcta. 2. Ayuda a crear una forma de trabajo pautada y ordenada. 3. Las actividades son motivadoras para los alumnos.
Chang W. (2011) con su estudio *Computer enhanced instruction: A case study of a series of creative math activities design*	1. Ayuda al estudiante a llegar a un nivel de comprensión superior. 2. Las nuevas tecnologías junto el origami abren un nuevo camino en la resolución de problemas matemáticos.

Para las actividades en las que se utilice la papiroflexia como recurso, podemos establecer dos tipos de metodologías que ayuden alumno en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Éstas son:

- Metodología individual: el alumno trabaja de forma individual poniendo a prueba sus habilidades y destrezas, mientras el profesor dirige la actividad teniendo en cuenta las dificultades de cada alumno.
- Metodología grupal: este tipo de aprendizaje es mucho más activo y dinámico con el que los alumnos pueden trabajar otros aspectos tales como la comunicación, el respeto y el compañerismo.

Además, al ser una actividad que los alumnos desarrollan con sus propias manos, a través de unas instrucciones marcadas, pueden llegar a un resultado visiblemente satisfactorio ya que la actividad motora a través de movimientos coordinados es fundamental en el desarrollo del pensamiento intuitivo.

Si se combinan todos estos puntos positivos con la teoría de Van Hiele, aplicado en el área de la geometría, se puede lograr que el alumno consiga resultados satisfactorios. El modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele explica cómo se produce la evolución de los estudiantes dividiéndolo en cinco niveles consecutivos: la visualización, el análisis, la deducción informal, la deducción formal y el rigor, los cuales se repiten con cada aprendizaje nuevo. El alumno comienza en un determinado nivel en la fase inicial del aprendizaje, y según va avanzando el proceso, irá superando los distintos niveles. El modelo de Van Hiele también indica la manera de apoyar a los estudiantes a mejorar la calidad de su razonamiento, pues proporciona pautas para organizar el currículo educativo y así ayudar al estudiante a pasar de un nivel a otro [11]. Los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele se ordenan del siguiente modo:

- Nivel 1: Reconocimiento o visualización
- Nivel 2: Análisis
- Nivel 3: Deducción informal u orden
- Nivel 4: Deducción
- Nivel 5: Rigor

A continuación se explican brevemente cada uno de los niveles [11]:

- Nivel 1: El individuo reconoce las figuras geométricas por su forma pero no es capaz de diferenciar partes ni componentes de la figura. Puede reproducir una copia de cada figura particular o reconocerla. No reconoce ni es capaz de explicar las propiedades principales de las figuras y las compara con elementos familiares de su entorno para describirlas.
- Nivel 2: El individuo reconoce y analiza las partes y propiedades más características de las figuras geométricas y las reconoce a través de ellas, pero es capaz de establecer relaciones o clasificaciones entre distintas figuras. Establece las propiedades de las figuras a través de la experimentación y manipulación, no es capaz de elaborar definiciones.
- Nivel 3: El individuo determina las figuras por sus propiedades y reconoce cómo unas propiedades se derivan de otras, establece sus propias relaciones entre las figuras y las familias de figuras. Gracias a esto las definiciones comienzan a adquirir significado. Sin embargo, su razonamiento lógico sigue basado en la manipulación.
- Nivel 4: En este nivel el individuo comienza a realizar deducciones y demostraciones lógicas y formales. Comprende y maneja las relaciones entre propiedades y formaliza en sistemas axiomáticos, por lo que ya entiende la naturaleza axiomática de las Matemáticas. En este nivel el individuo tiene un alto nivel de razonamiento lógico por lo que comprende cómo se puede llegar a los mismos resultados partiendo de proposiciones o hipótesis distintas aunque le cuesta reconocer la necesidad del rigor en los razonamientos.
- Nivel 5: El individuo puede apreciar la consistencia, independencia y completitud de los axiomas de los fundamentos de la geometría. Capta la geometría en forma abstracta. Este último nivel, por su alto grado de abstracción, solo suele desarrollarse en alumnos con estudios universitarios superiores con una buena capacidad y preparación en geometría.

Por lo tanto, la combinación de la papiroflexia como herramienta didáctica junto con las pautas que marca la teoría de Van Hiele pueden resultar muy beneficiosas para que los alumnos comprendan mejor los conceptos matemáticos relacionados con la geometría. Ésto junto con otros puntos positivos que posee la papiroflexia expuestos en este apartado, hacen de ella un recurso muy útil para la asignatura de matemáticas tanto en la ESO como en otros niveles educativos inferiores y superiores. En el siguiente Capítulo se recogen una serie de actividades en las que se pone en practica este recurso, con la idea de que puedan ser incluidas en el currículo educativo como cualquier otra actividad más.

3.2. Beneficios y competencias que se desarrollan

Como se recoge a lo largo de este trabajo, son muchos los beneficios que puede aportar la papiroflexia al estudio de la geometría. Se debe tener en cuenta, que es un recurso muy accesible, por lo que se puede adaptar a muchos niveles educativos sin necesidad de que el centro o el profesor tenga que realizar una inversión económica importante. Simplemente con un poco de imaginación y creatividad se pueden crear actividades que ayuden a los alumnos con el aprendizaje de la geometría en la asignatura de matemáticas. A través de pliegues en papel se pueden obtener resultados muy similares a los que se tendrían utilizando regla y compás. Por ejemplo: trazar rectas (pliegue del papel), obtener puntos de corte (realizar varios pliegues que se intersecan), trasladar ángulos, etc. Lo único que puede limitar un poco este recurso es la imposibilidad de realizar circunferencias completas, aunque conociendo bien las herramientas que nos ofrece la papiroflexia se puede llegar a suplir esa carencia con otras técnicas propias. Aunque en este caso, se pretende utilizar la papiroflexia como material manipulativo para que los alumnos aprendan de una manera distinta, por lo que las normas no serán muy rígidas y se permitirá realizar 'pequeños ajustes' en las actividades que se realicen con dicho recurso, siempre y cuando no se pierda el objetivo de la actividad. Con estas actividades se puede conseguir:

1. Valorar las componentes estéticas de los objetos y las formas que los componen.
2. Promover el trabajo en equipo.
3. Concienciar a los alumnos en realizar un trabajo preciso.
4. Fomenta la motivación a los estudiantes ya que pueden investigar por de forma independiente la creación de nuevos modelos y ver, de este modo, la relación que tiene con la geometría plana y espacial.
5. Es una herramienta pedagógica útil para el profesor que le permite desarrollar diferentes tipos de contenidos, tanto conceptuales como procedimentales que ayudarán al alumno con su desarrollo intelectual así como la percepción espacial y la psicomotricidad.

Su uso en el aula puede ayudar al alumno en su desarrollo psicológico, aumentando su concentración visual y mental, ademas se puede utilizar como técnica de relajación tal y como se ha comentado en apartados anteriores. También ayuda a ejercitar el sentido del orden en el seguimiento de instrucciones, lo que puede ser una buena medida de atención a la diversidad para aquellos alumnos que tengan déficit de atención. Colabora con el desarrollo de la psicomotricidad [1] fina, sobre todo en niveles educativos más bajos, gracias a la manipulación del papel ya que ésto requiere observación, destreza y precisión manual, así como ser constante y realizar las instrucciones pautadas tantas veces como sea necesario hasta llegar a los resultados esperados.

También contribuye en el desarrollo de habilidades, ayudando a los alumnos a entender conceptos tales como el tamaño y la escala, figuras geométricas, formas geométricas, etc. Al realizar pliegues en el papel se consigue pasar de lo bidimensional a lo tridimensional, fomentando de este modo la visión y orientación espacial. Se consigue que partiendo de algo tan simple como es un trozo de papel, se llegue a conceptos mucho más complejos.

Finalmente, destacar otro importante beneficio de la papiroflexia, y en el que se centra este trabajo, que es el desarrollo de habilidades matemáticas y analíticas, ya que ayuda a estimular el pensamiento geométrico espacial a través de la realización de pliegues en el papel, lo que provoca también mejorías en la realización de cálculos matemáticos y en el pensamiento numérico.

Con todo lo expuesto anteriormente, se recogen las virtudes de este recurso en el aula como potenciadora de numerosas habilidades. A continuación, se proponen las competencias, establecidas en Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, que se podrían desarrollar a través de la papiroflexia.

- Competencia Matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
  - Favorece el desarrollo de la visión espacial.
  - Mejora la comprensión de conceptos geométricos.
  - Puede utilizarse tanto en matemáticas como en otras ciencias, tales como, tecnología o física.
- Competencia Aprender a Aprender.
  - Ayuda a los alumnos a ser a ser pacientes, perseverantes y seguir instrucciones para conseguir el objetivo de la actividad.
- Competencia en Comunicación lingüística.

[1] Es la coordinación de los movimientos musculares pequeños que ocurren en partes del cuerpo como los dedos, generalmente en coordinación con los ojos. Cuando se aplica a la teoría de la aptitud humana, esto se llama "la destreza manual" *Fuente: Wikipedia.*

  - Interpretación de las instrucciones de una figura para su correcta realización.
  - Transmisión escrita y gráfica de los pasos necesarios para realizar un modelo.

- Competencia Digital.
  - Utilización de las TICs para obtener nuestros propios recursos a través de las actividades realizadas en el aula (tutoriales para los alumnos, videos con los resultados obtenidos por los alumnos de las actividades, etc).
  - Utilización de algún tipo de Software específico para la realización de mapas de pliegues y modelos tridimensionales.
- Competencia sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.
  - Favorece la creatividad llevando a cabo sus propias iniciativas y proponiendo distintas posibilidades.
- Competencia social y cívica.
  - Favorece el trabajo en equipo.
  - Seguir las normas e instrucciones dadas.
- Competencia en conciencia y expresiones culturales.
  - Experimenta con diferentes materiales y técnicas.
  - Ayuda a valorar y apoyar las contribuciones de otros compañeros.
  - Aprender el lenguaje del origami nos ayuda a comprender las actividades sin importar el idioma origen en el que estén escritas.

CAPÍTULO 4

Colección de actividades para la asignatura de matemáticas.

En este apartado se recogen una serie de actividades de distintos niveles dentro de la ESO con los que se puede poner en práctica el uso de papiroflexia en el aula. Algunas de ellas han sido extraídas del documento [19].

4.1. Actividad 1. Geometría modular.

4.1.1. Planteamiento de la actividad

Esta primera actividad va dirigida a alumnos de 3ºESO de la asignatura de matemáticas académicas. En ella se trabajarán los siguientes contenidos establecidos en el currículo oficial de la Educación Secundaria Obligatoria [1] correspondientes al bloque 3 de Geometría:

- Hacer cálculos de las dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos conociendo la escala.
- Identificar las transformaciones de una figura a otra mediante movimiento en el plano, analizando diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones de la naturaleza.

Para esta actividad simplemente será necesario repartir a los alumnos folios tamaño DIN A4, si es posible de colores variados, que transformarán en cuadrados de 15x15cm y con éstos se crearán los módulos de Sonobè para la actividad. Se plantean una serie de pasos a seguir en el apartado *Propuesta para el alumno* de la tabla con el objetivo de que sirvan como guía de la actividad. El profesor dará las instrucciones necesarias para que los alumnos fabriquen por sí mismos los 12 módulos necesarios, tal y como se indica en la Figura 4.1. En cada paso indicado en la *Propuesta para el alumno* se desmontará la figura realizada para realizar la indicada en el siguiente apartado.

Conceptos matemáticos implicados	Poliedros regulares e irregulares. Geometría modular
Nivel educativo	3º ESO
Materiales	Doce cuadrados de papel del mismo tamaño
Objetivos	Construcción de poliedros regulares e irregulares con módulos de Sonobè
Propuesta para el alumno	
1. Construye 12 módulos de Sonobè siguiendo las instrucciones de la Figura 4.1 2.¿Qué formas geométricas bidimensionales reconoces en el módulo de Sonobè? 3. Utilizando 3 módulos, construye un tetraedro siguiendo las instrucciones de la Figura 4.3 4. Utilizando 6 módulos, construye un cubo. Puedes seguir los pasos indicados en la Figura 4.4 5. Utilizando 12 módulos, construye un octaedro siguiendo los pasos que se indican el video: `https://www.youtube.com/watch?v=Zuxl3Rbtai4` 6. Juntando a los alumnos en grupos de cuatro, dejar que creen otros poliedros distintos a los que se han explicado (así tendrán hasta 48 módulos disponibles cada grupo). Posteriormente, poner en común las distintas figuras que han elaborado todos los grupos.	

[1]Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato

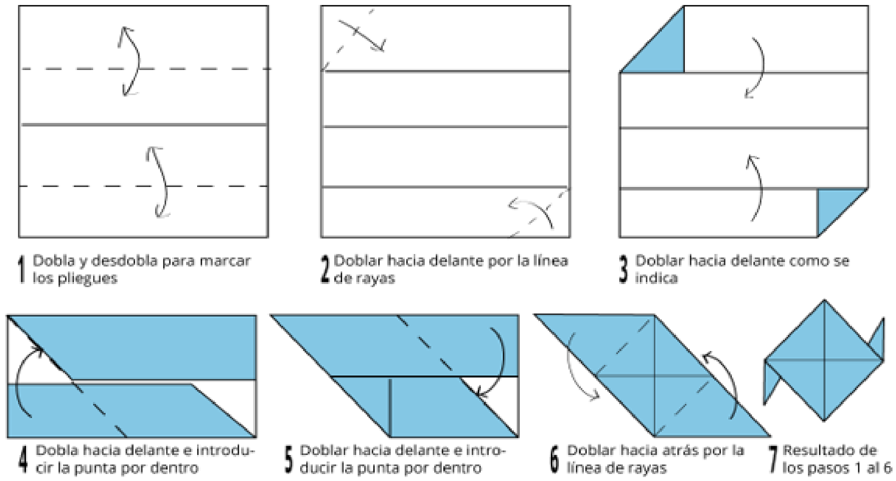


Figura 4.1: Instrucciones paso a paso para la elaboración del módulo Sonobè.*Imagen: Pablo Beltrán-Pellicer.*

En el paso 2, se propone que los alumnos identifiquen las diferentes formas geométricas planas que componen el módulo de Sonobè. Algunas de ellas pueden ser (esto queda a la libre interpretación de cada alumno, no hay una sola respuesta correcta):

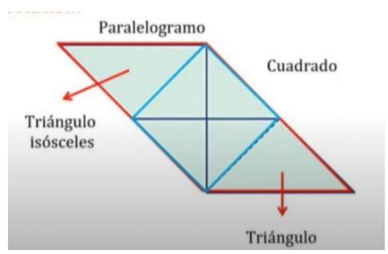


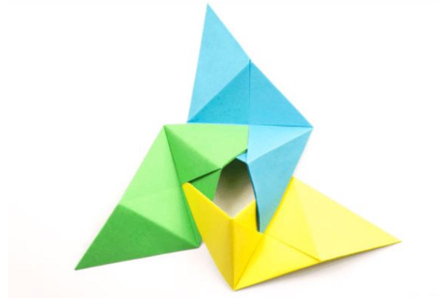
Figura 4.2: Posible solución del Paso 2 de la actividad propuesta.*Imagen: www.losinformativos.com*

Según se ve en la imagen anterior, se denominará *'pestaña'* a la parte triangular y *'bolsillo'* a la parte central cuadrada. Esta notación se utilizará en pasos siguientes.

Con esto se trabajará la relación entre las figuras planas y los objetos tridimensionales que se pueden construir con ellas, además servirá de repaso para recordar algunos conceptos básicos que se consideran conocimientos previos de cursos anteriores, tales como, clasificación de triángulos según sus ángulos, figuras planas básicas, qué es una arista, qué es un vértice, etc.

Para el paso 3, se pretende que los alumnos realicen un tetraedro utilizando tres de los módulos de Sonobè que han elaborado anteriormente. Para ello los alumnos deberán encajar las partes *'bolsillo'* de unas piezas con las partes *'pestaña'* de otras tal y como indica la Figura 4.3.

(a) Paso 1



(b) Paso 2

(c) Paso 3

Figura 4.3: Paso a paso tetraedro con módulos Sonobé. *Imágenes: web Escola Els Ti-lers. Generalitat de Catalunya*

En el paso 4, se aumenta el nivel de dificultad y se propone que los alumnos realicen un cubo utilizando 6 módulos de Sonobè. El procedimiento es similar al paso anterior, deberán ir encajando los distintos módulos hasta conseguir crear un cubo tal y como se indica en la Figura 4.4.

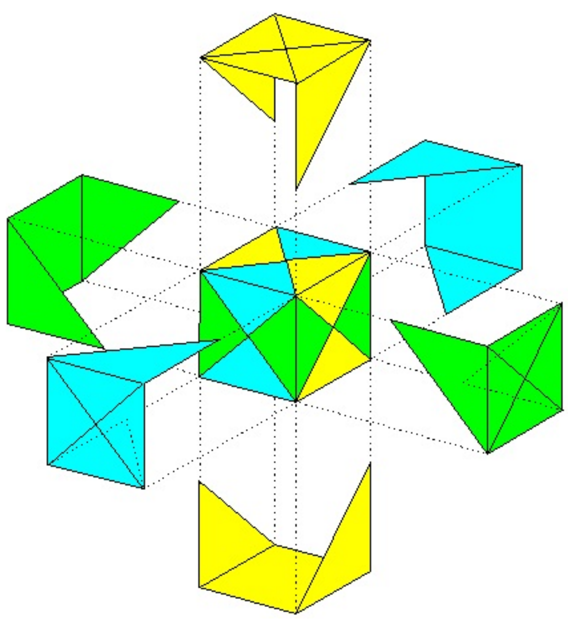


Figura 4.4: Instrucciones para la elaboración de un cubo.*Imagen: David Mitchell.*

En el paso 5, se les propone a los alumnos que realicen un octaedro utilizando todos los módulos que tienen disponibles. Para ello el profesor utilizará como apoyo el vídeo `https://www.youtube.com/watch?v=Zuxl3Rbtai4` en el que se explica paso a paso como lograr realizar dicha figura. Este es un nivel más alto de dificultad para que los alumnos se pongan a prueba y realicen tantos intentos como sean necesarios hasta conseguir crear la figura. Recibirán el apoyo del profesor siempre que sea necesario.

Figura 4.5: Octaedro estrellado creado con doce módulos de Sonobé

Por último, se crearán grupos de cuatro alumnos y se les dejará que experimenten por su cuenta la creación de otras figuras ensamblando los módulos de distintas formas. Al final de la actividad, se pondrán en común las de toda la clase y cada grupo deberá explicar los pasos que ha seguido para construir dicha figura.

4.1.2. Metodología

El Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, define la metodología didáctica como *conjunto de estrategias, procedimientos y acciones organizadas y planificadas por el profesorado, de manera consciente y reflexiva, con la finalidad de posibilitar el aprendizaje del alumnado y el logro de los objetivos planteados*. El objetivo de esta actividad, entre otros, es fomentar la capacidad de los alumnos de aprender por sí mismos y el trabajo en equipo. Se utilizará la clase magistral para explicar la actividad y algunos contenidos teóricos necesarios para la realización de ésta. En la última parte de la actividad, cuando se propone la separación de la clase en pequeños grupos para que experimenten por su cuenta, se esta haciendo uso de forma puntual de la metodología de 'Flipped classroom', ya que se pretende que llegados a este punto de la actividad, los alumnos sean los que expongan al resto, cómo han conseguido realizar las figuras que han construido de forma clara y precisa. También, al separarlos en grupos más reducidos, se fomentará el aprendizaje activo y colaborativo en el que todos los integrantes harán sus aportaciones y deberán trabajar en común para llegar al mismo objetivo.

4.1.3. Evaluación

Para saber si la actividad ha cumplido con los objetivos marcados y si los materiales empleados eran los adecuados, se evaluará en cada alumno los siguientes marcadores:

El alumno...	1	2	3	4	5
Es capaz de reconocer figuras planas simples					
Identifica correctamente las distintas figuras geométricas: hexaedro, cubo, octaedro					
Es capaz de realizar de forma independiente las distintas figuras propuestas con módulos de Sonobè					
En su grupo de trabajo ha sido capaz de crear más de dos figuras modulares distintas a las propuestas					
En la exposición oral, es capaz de expresarse con lenguaje matemático preciso y de forma clara					

4.1.4. Posibles dificultades en el desarrollo de la actividad

Al poner en práctica esta actividad pueden surgir diversos problemas entre los alumnos. La persona que dirige la actividad, en este caso el profesor, debe tener en cuenta las necesidades de todos los alumnos e intentar satisfacerlas de la mejor manera posible. En este caso en concreto, se destacan algunas dificultades que pueden surgir durante el desarrollo de la actividad y cómo intentar solventarlas.

En primer lugar, los alumnos pueden mostrar dificultades para entender la simbología utilizada en papiroflexia. Como método preventivo, se recomienda introducir los tipos de pliegues y la simbología concreta que se vaya a utilizar en la actividad justo al comenzar la sesión. La papiroflexia es un recurso muy útil pero se debe tener a los alumnos familiarizados con ciertos conceptos básicos porque sino puede resultar una tarea laboriosa y de difícil comprensión. Otra propuesta para este mismo problema, consistiría en realizar una serie de carteles informativos que el profesor expondrá en la pizarra durante toda la actividad para que los alumnos tengan a la vista los símbolos que se utilizan en ella y poder consultarlos siempre que quieran.

También es recomendable tener varios recursos alternativos para explicar la misma actividad. Por ejemplo, en este caso se propone realizar varias construcciones utilizando módulos de Sonobé. Para ello se dan unas instrucciones con las que los alumnos deben fabricar los módulos y posteriormente realizar diferentes figuras ensamblando los módulos. Dependiendo de cada alumno, unos pueden desenvolverse mejor con instrucciones en papel escritas, otros con vídeos (de elaboración propia o extraídos de Internet), etc. Por este motivo, para este tipo de actividades es útil sacar la información de distintas fuentes ya que así podremos darle a los alumnos varias posibilidades para que ellos avancen por sí solos sin la ayuda del profesor.

Otro problema que puede surgir es que el avance de la clase no se produzca de forma homogénea. Cada alumno tiene sus dificultades y lo que para uno puede resultar una tarea complicada para otro no y viceversa. Este es un contratiempo que suele aparecer con bastante frecuencia por lo que el profesor debe ser capaz de detectar cuándo un alumno se esta alejando del ritmo del resto de la clase. En este caso se propone que se realicen grupos entre los alumnos, tal y como se propone en la última parte de la actividad, para que aquellos que van más adelantados en el desarrollo de la actividad, ayuden al resto de compañeros, y de este modo, que ningún alumno se quede atrás durante el desarrollo de la actividad.

4.2. Actividad 2. Clasificación de ángulos.

4.2.1. Planteamiento de la actividad

Esta actividad va dirigida a alumnos de 1º-2ºESO de la asignatura de matemáticas. En ella se trabajarán los siguientes contenidos establecidos en el currículo oficial de la Educación Secundaria Obligatoria correspondientes al bloque 3 de Geometría:

- Elementos básicos de la geometría del plano. Relaciones y propiedades de figuras en el plano: Paralelismo y perpendicularidad.
- Ángulos y sus relaciones
- Construcciones geométricas sencillas: mediatriz, bisectriz. Propiedades.
- Figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales.

  Se resume brevemente la información de la actividad en la tabla siguiente:

Conceptos matemáticos implicados	Intersección de rectas y ángulos.
Nivel educativo	1º ESO y 2º ESO
Materiales	Un folio
Objetivos	Clasificación de distintos ángulos
Propuesta para el alumno	
1. Construye una grulla de papel utilizando las instrucciones que se indican bajo la tabla [17]	
2. Desdobla la figura y marca todos los pliegue formados	
3. Clasifica los ángulos que se han formado entre los pliegues.	

El objetivo de esta actividad es que los alumnos sean capaces de identificar y clasificar los distintos tipos de ángulos en función de los lados y de los ángulos (acutángulo, rectángulo y obtusángulo) en un mapa de pliegues.

Figura 4.6: Clasificación de los triángulos.

Para ello, en primer lugar, utilizando la papiroflexia tendrán que realizar la figura de una grulla siguiendo las instrucciones pautadas en la Figura 4.7

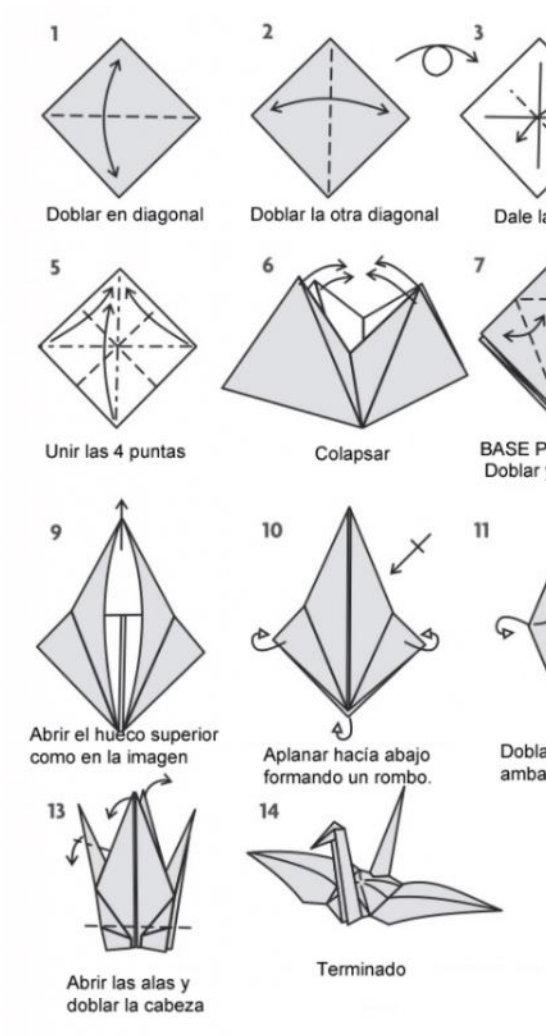


Figura 4.7: Instrucciones para construir una grulla con papiroflexia

También se incluye un vídeo en el que se explica paso a paso la construcción de una grulla de papel para ayudar a los alumnos a realizar esta parte de la actividad: `https://www.youtube.com/watch?v=LLbWxDWqtQg`

Una vez realizada la figura, se volverá al cuadrado inicial desdoblando todos los pliegues y se marcarán todas las líneas que se han formado utilizando un rotulador.

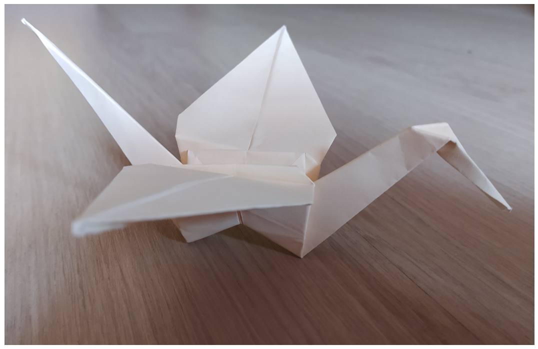


Figura 4.8: Grulla de papel.*Fuente imagen: Elaboración propia*

En el caso de que la figura de la grulla de papel resulte difícil de construir, en el apartado *Posibles dificultades en el desarrollo de la actividad* se proponen otras más sencillas.

Una vez se tenga el mapa de pliegues, se identificarán todos los triángulos posibles y se irán enumerando.

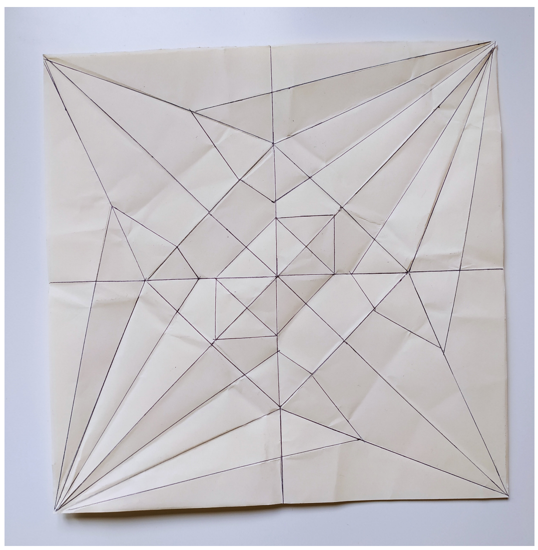


Figura 4.9: Mapa de pliegues de la figura

Cuando se localicen al menos diez triángulos en el mapa de pliegues, en el cuaderno de clase de la asignatura, se irá anotando la clasificación de cada uno de ellos en función de los ángulos/lados y la justificación de porqué se ha elegido dicha clasificación.

4.2.2. Metodología

Para esta actividad, se utilizará la clase magistral para explicar la actividad y algunos contenidos teóricos necesarios para la realización de ésta. Se trabajará una metodología individual de forma que el alumno realiza la actividad de forma individual poniendo a prueba sus habilidades y destrezas, mientras el profesor dirige la clase teniendo en cuenta las dificultades de cada alumno.

4.2.3. Evaluación

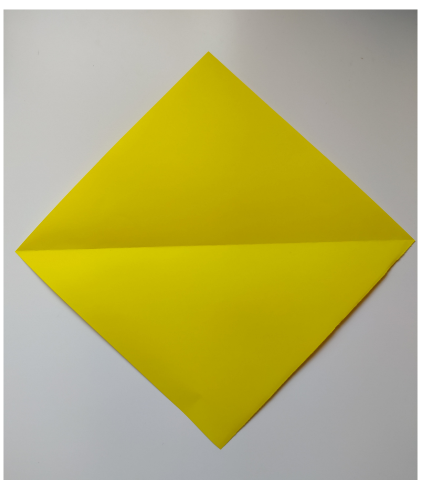
Para saber si la actividad ha cumplido con los objetivos marcados y si los materiales empleados eran los adecuados, se evaluará en cada alumno los siguientes marcadores:

El alumno...	1	2	3	4	5
Es capaz de interpretar correctamente las instrucciones para realizar la figura de papiroflexia					
Es capaz de comprender los símbolos y tipos de pliegues más comunes de la papiroflexia					
Es capaz de localizar distintos tipos de triángulos en el mapa de pliegues					
Realiza correctamente y de forma justificada la clasificación de los distintos triángulos					

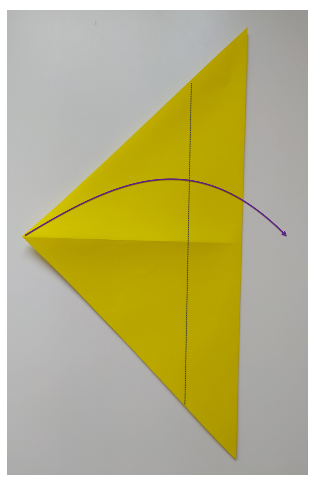
4.2.4. Posibles dificultades en el desarrollo de la actividad

Durante la puesta en práctica de esta actividad pueden aparecer algunas dificultades entre los alumnos que entorpezcan su desarrollo. En este caso, el punto más problemático es la construcción de la grulla de papel. Al igual que en la actividad 1, es recomendable tener varios recursos distintos para explicar los pasos a seguir para la construcción de la figura: vídeos, instrucciones de distintas fuentes, instrucciones de elaboración propia, etc. De este modo los alumnos pueden seleccionar la alternativa que les resulte más sencilla de entender. Como el objetivo principal de la actividad es que los alumnos sean capaces de clasificar distintos triángulos en función de sus lados/ángulos, la figura a realizar puede ser sustituida por otras más sencillas, quitando la condición de que deben encontrar como mínimo 10 triángulos. Por ejemplo, se puede intercambiar por alguna de las que se propone a continuación:

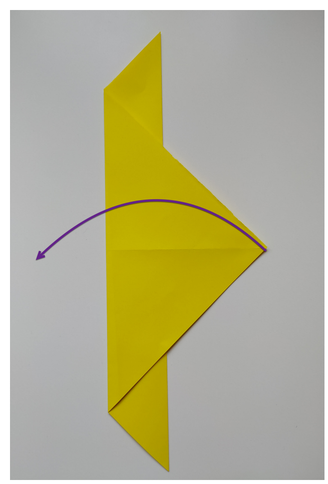
OPCIÓN A. Paloma de papel



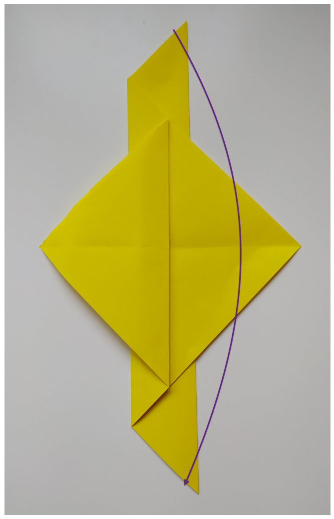
(a) Plegamos horizontalmente por una de las diagonales



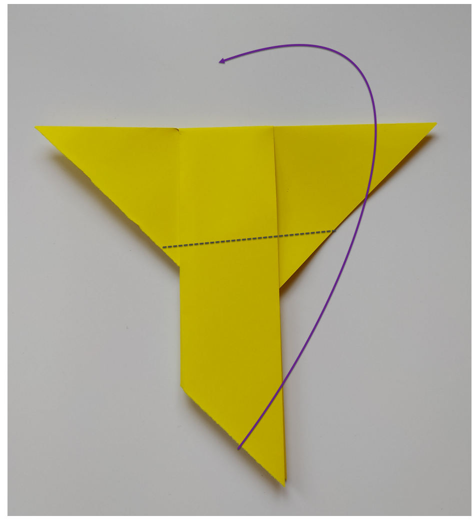
(b) Plegamos verticalmente por la otra diagonal. Tomamos el extremo izquierdo y formamos un pliegue vertical donde queramos entre el punto medio del eje horizontal y el lado derecho de la figura



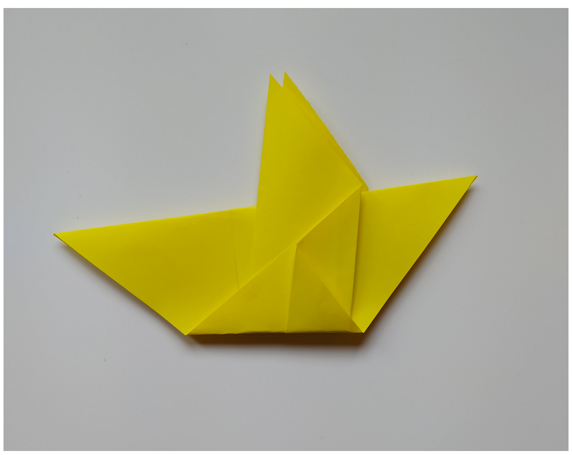
(c) Tomamos el extremo derecho y abrimos uno de los lados tal y como indica la imagen



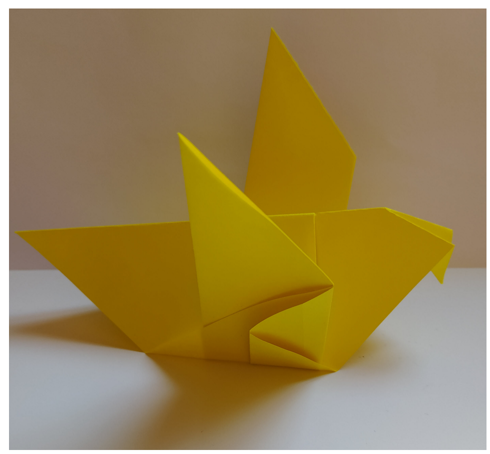
(d) Unimos el extremo superior con el inferior



(e) Realizamos un pliegue diagonal como se indica en la imagen. Damos la vuelta a la figura y hacemos lo mismo por el otro lado



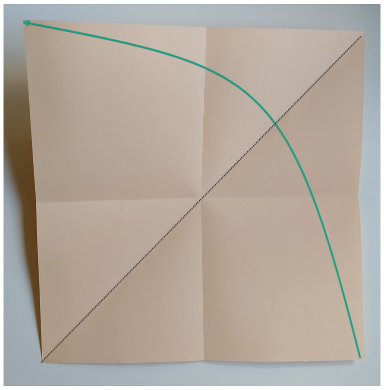
(f) Nos quedará una figura similar a la de la imagen



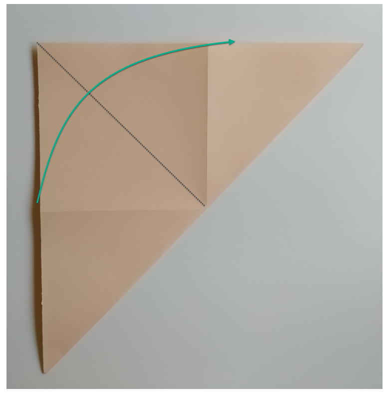
(g) Por último, doblamos el extremo derecho para formar el pico de paloma

Figura 4.10: Paso a paso fabricación paloma de papel. *Fuente imágenes: Elaboración propia*

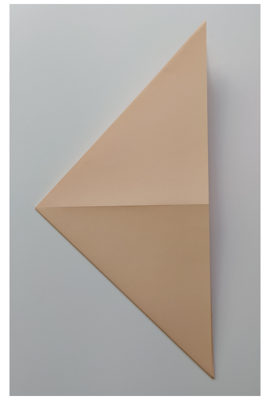
OPCIÓN B. Mariposa de papel



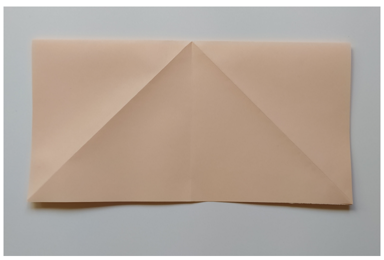
(a) Marcamos los ejes vertical y horizontal del cuadrado. Posteriormente plegamos por una de sus diagonales



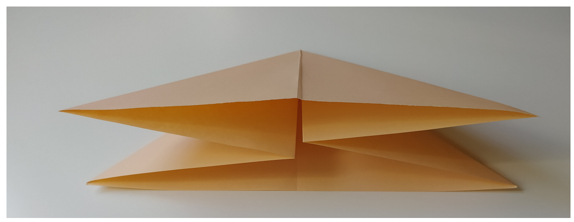
(b) Plegamos tal y como indica la imagen



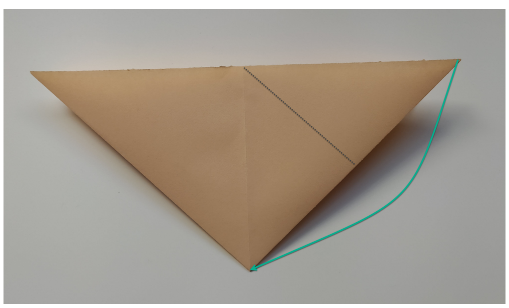
(c) Nos quedará un triángulo de aréa la mitad del original



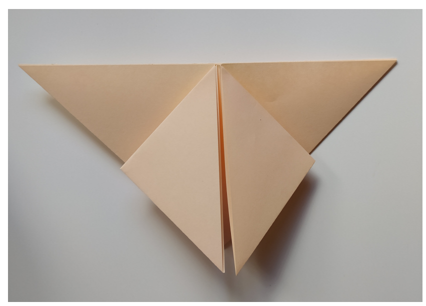
(d) Abrimos el cuadrado y plegamos por su eje horizontal



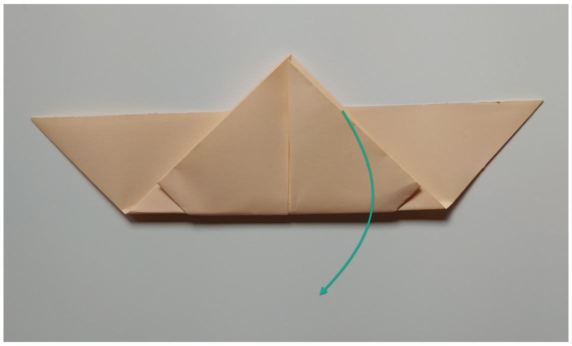
(e) Empujamos los dos extremos hacia dentro de forma que la figura quede tal y como se muestra en la imagen



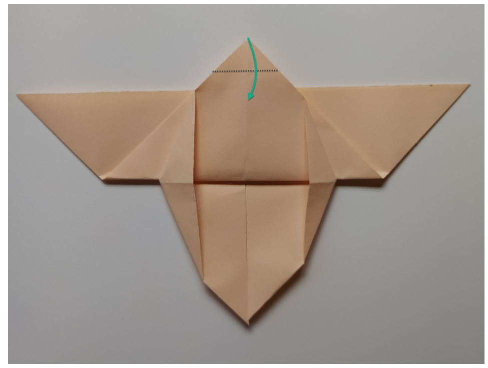
(f) Llevamos el vértice derecho del triángulo hacia el vértice inferior. Hacemos lo mismo con el otro vértice



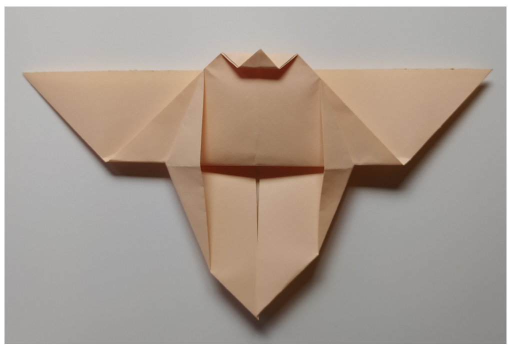
(g) Nos quedará la figura que se muestra en la imagen. Le damos la vuelta y plegamos horizontalmente



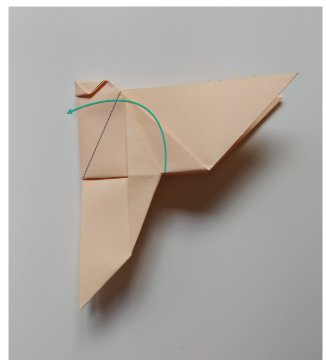
(h) Llevamos los extremos superiores haciendo un pequeño doblez



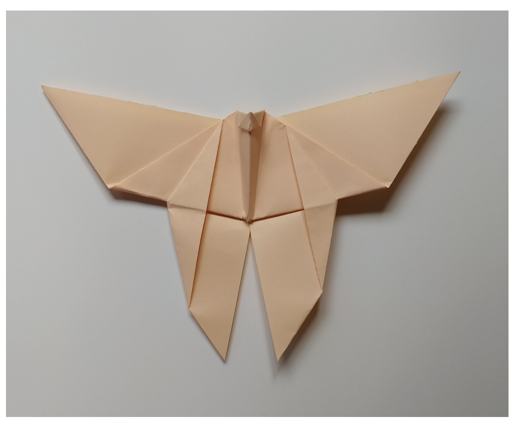
(i) Luego plegamos la parte superior, primero hacia abajo y, posteriormente, hacia arriba



(j) Doblamos la figura por la mitad



(k) Doblamos ambos lados diagonalmente para formar el cuerpo y las alas de la mariposa



(l) Por último colocamos las alas de la mariposa

Figura 4.11: Paso a paso elaboración de una mariposa de papel. *Fuente imágenes: Elaboración propia*

4.3. Actividad 3. Construcción de un rectángulo a través de un triángulo.

4.3.1. Planteamiento de la actividad

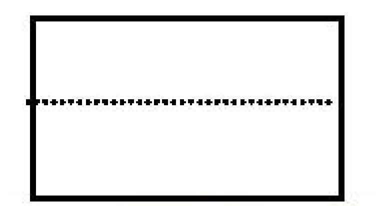
Esta actividad se dirige a alumnos de 4º ESO de la asignatura de matemáticas académicas. En ella se trabajarán los siguientes contenidos establecidos en el currículo oficial de la Educación Secundaria Obligatoria correspondientes al bloque 3 de Geometría:

- Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos
- Semejanza. Figuras semejantes. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.

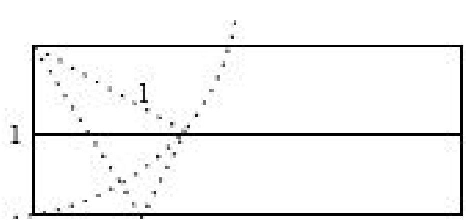
Se resume brevemente la información de la actividad en la tabla siguiente:

Conceptos matemáticos implicados	Diagonal, paralelismo y teorema de Pitégoras.
Nivel educativo	4º ESO
Materiales	Un folio
Objetivos	Reconocer los siguientes elementos implicados en la construcción: Diagonal, paralelismo, proporcionalidad, Teorema de Pitágoras.
Pistas para los alumnos	Recordar que un paralelogramo tiene los lados paralelos dos a dos. Además, un rectángulo tiene todos sus ángulos igual a 90º. Recordar que el $\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$
Propuesta para el alumno	
1. Construye con un folio un rectángulo de dimensiones 1: $\sqrt{3}$ 2. Explica cómo lo has realizado y por qué has seguido esos pasos.	

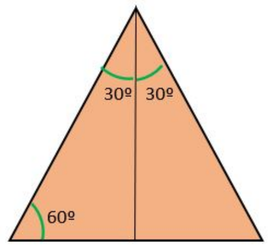
Para realizar esta actividad se utilizará un folio DIN A4. En primer lugar, se dobla el folio por la mitad haciendo coincidir los lados mayores (axioma O_3). Consideramos como una unidad el lado menor de este nuevo rectángulo.



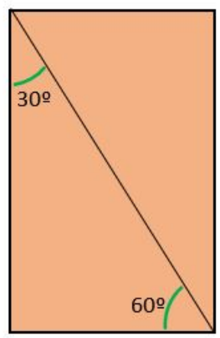
Se dobla de nuevo, el rectángulo de lado 1 unidad por la mitad haciendo coincidir los lados mayores (axioma O_3) y lo dejamos doblado. La esquina inferior izquierda se traslada hasta la el pliegue que se ha realizado en el paso previo de forma que el pliegue pase por la esquina superior izquierda (axioma O_5):



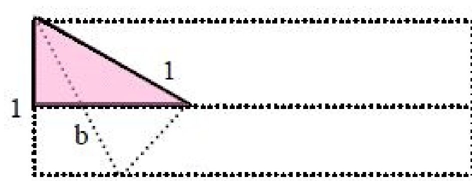
Ahora, se considera el triángulo marcado en la figura, cuya hipótenusa mide una unidad, y sus ángulos 30º y 60º. Esto se deduce a través del siguiente razonamiento:
Se parte de un triangulo equilátero, cuyos ángulos son todos igual a 60º



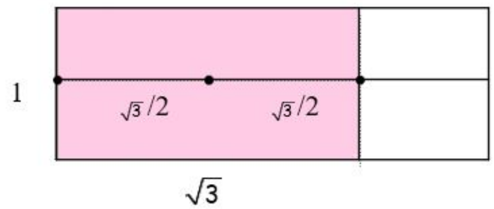
Con ese triángulo podemos formar un rectángulo, dividiéndolo por una de las alturas y trasladando una de las mitades encima de la otra. En nuestro caso, para esta actividad tendríamos la mitad de dicho rectángulo:



Con esta estrategia de reducir los lados del triángulo a la unidad se pretende que los alumnos encuentren la relación entre esta figura y la representación de ángulos en la circunferencia goniométrica. Por lo tanto, una vez se ha explicado como hallar el valor de los ángulos del triángulo, se deduce que el lado b será el seno de 60º y su valor será $\sqrt{3}/2$



Si trasladamos el lado b en la misma línea sobre la que se encuentra, se obtiene que $b + b = \sqrt{3}$ que es el valor buscado. Una vez fijado este punto, se realiza un pliegue perpendicular (axioma O_4) a él y se obtendrá un rectángulo de lado mayor $\sqrt{3}$ y lado menor una unidad.



4.3.2. Metodología

Para esta actividad, se utilizará la clase magistral para explicar la actividad y algunos contenidos teóricos necesarios para la realización de ésta. Se trabajará de forma individual para que el alumno desarrolle nuevas sus habilidades y destrezas, mientras el profesor dirige la actividad teniendo en cuenta las dificultades de cada alumno. Con esta actividad se pretende que los alumnos relacionen conceptos más teóricos, como puede ser la definición de seno de un ángulo, con casos prácticos sencillos.

4.3.3. Evaluación

Para saber si la actividad ha cumplido con los objetivos marcados y si los materiales empleados eran los adecuados, se evaluará en cada alumno los siguientes marcadores:

El alumno...	1	2	3	4	5
Es capaz de interpretar correctamente las instrucciones para realizar la figura de papiroflexia					
Es capaz de identificar gráficamente las propiedades trigonométricas de un trángulo					
Conoce las definiciones de seno, coseno y tangente de un ángulo					
Utiliza la papiroflexia con destreza para resolver el ejercicio					
Conoce el Teorema de Pitágoras y es capaz de aplicarlo correctamente en la resolución de problemas					

4.3.4. Posibles dificultades en el desarrollo de la actividad

Durante el desarrollo de esta actividad es posible que surjan algunas dificultades entre los alumnos. En este apartado se recogen algunas de ellas y se realizan algunas propuestas para solucionarlas o prevenir su aparición. Al comienzo de la actividad, el profesor dará una serie de pistas a los alumnos que les guiará hacia la resolución correcta del ejercicio. El paso que se considera clave para encontrar la solución de este ejercicio es comprender porqué se quiere crear un triángulo de hipotenusa igual a una unidad. Esto resulta más sencillo si los alumnos tienen asimilados ciertos conceptos teóricos esenciales, tales como:

- Teorema de Pitágoras
- Definición geométrica de seno
- Definición geométrica de coseno
- Proporcionalidad y escalas

Si durante la actividad, el profesor detecta que alguno de estos conceptos no está claro se parará la actividad y se dedicará una parte de la sesión a realizar una breve explicación de todos ellos.

En este caso, queremos que los alumnos trabajen de forma individual por lo que se descarta la opción de separarlos en grupos para realizar la actividad. Por lo tanto, el profesor deberá estar pendiente durante el desarrollo de la actividad para atender a los alumnos individualmente en todas aquellas dudas que les puedan surgir.

También se puede dar la situación de que los alumnos encuentren otras formas de resolver la actividad en lugar de la que se propone en el apartado *Planteamiento de la actividad*. Esto sería lo ideal, ya que quiere decir que el alumno comprende y aplica correctamente todos los conceptos teóricos indicados anteriormente pero puede hacer que el avance de la clase se descontrole un poco. En el caso de que esto ocurra con un porcentaje significativo de la clase, se recomienda que el profesor tome el control total de la actividad y comience a resolver, junto con la ayuda de los alumnos, la actividad tal y como se propone en este capitulo para que todos ellos tengan al menos una forma de resolver la actividad clara. Además, aquellos alumnos que hayan encontrado otras alternativas entregarán sus propuestas al profesor, que valorará positivamente en el caso de que se hayan realizado correctamente y de forma justificada.

4.4. Actividad 4. Demostración identidades notables.

4.4.1. Planteamiento de la actividad

Esta actividad [18] se dirige a alumnos de 4º ESO de la asignatura de matemáticas académicas. En ella se trabajarán los siguientes contenidos establecidos en el currículo oficial de la Educación Secundaria Obligatoria correspondientes al bloque 2 de Números y álgebra:

- Polinomios: raíces y factorización. Utilización de identidades notables.
- Interpretación y utilización de los números reales y las operaciones en diferentes contextos, eligiendo la notación y precisión más adecuadas en cada caso.

El material necesario y el objetivo de la actividad quedan recogidos en la tabla siguiente:

Nivel educativo	4º ESO
Materiales	Un cuadrado de papel
Objetivos	Demostración visual de algunas identidades notables

Utilizando un cuadrado de papel, los alumnos demostrarán algunas de las identidades notables más utilizadas siguiendo las pautas fijadas a continuación.

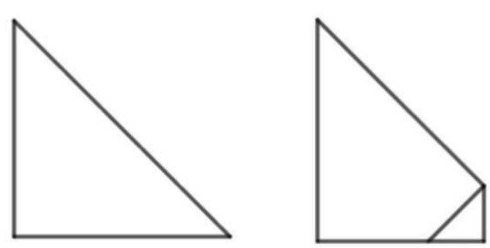
- Cuadrado de una suma y una resta En primer lugar, se demostrarán las siguientes identidades correspondientes a al cuadrado de un binomio, siendo ese binomio una suma o una resta.

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \tag{4.1}$$

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \tag{4.2}$$

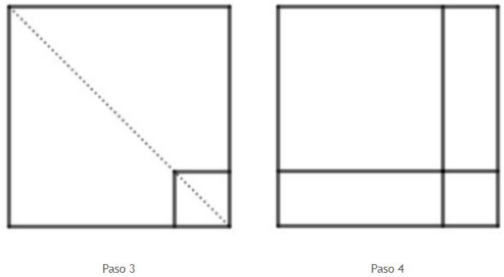
  El proceso a llevar a cabo es el mismo para ambas ecuaciones, lo que varía es la interpretación de los resultados obtenidos.

  1. Doblar el cuadrado por la diagonal sin marcar ese doblez.(axioma O_2)
  2. Se toma la esquina inferior correspondiente al ángulo agudo y se dobla hacia dentro. El doblez resulta es perpendicular al lado sobre el que se apoya el triángulo. (axioma O_4)

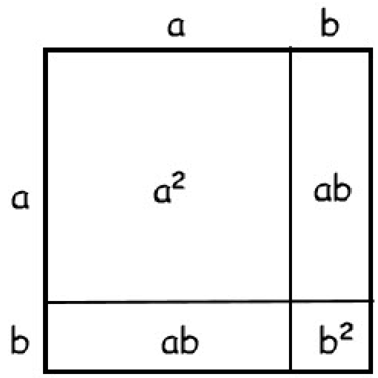


Paso 1 Paso 2

  3. Se desdobla la hoja y aparecerá un cuadrado pequeño dentro de la hoja cuadrada.
  4. Se pliega vertical y horizontalmente siguiendo los lados del cuadrado (axioma O_4) de de modo que se formen dos rectángulos iguales y dos cuadrados de distinto tamaño.



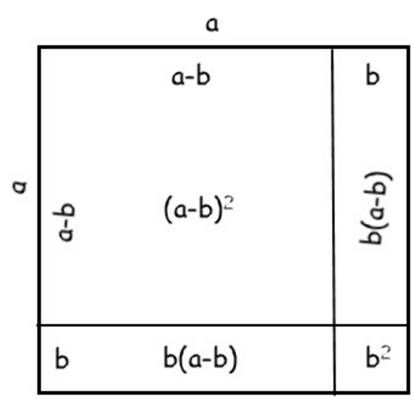
Se nombran como a los lados grandes del cuadrado y b los del pequeño, por lo tanto, tenemos que:



En donde se puede observar claramente que el área del cuadrado más grande es la suma de todos ellos y con esto se valida que el cuadrado de una suma es:

$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{4.3}$$

Para el caso del cuadrado de una resta, se nombra como a el lado del cuadrado grande de papel y b el lado pequeño del rectángulo. Con esto se tiene que:

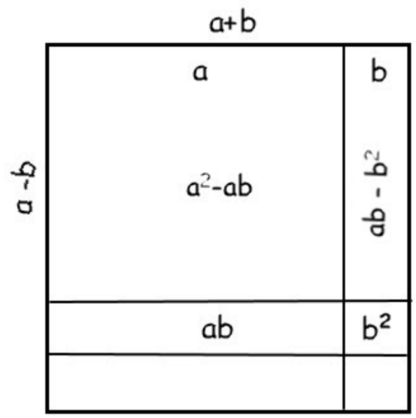


Por lo tanto la suma de todas las figuras será igual al área del cuadrado grande:

$$a^2 = (a-b)^2 + b(a-b) + b(a-b) + b^2 \tag{4.4}$$

$$a^2 = (a-b)^2 + ab - b^2 + ab - b^2 + b^2 \quad (4.5)$$
$$a^2 = (a-b)^2 + ab + ab - b^2 \quad (4.6)$$
$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \quad (4.7)$$

- Suma por diferencia de un binomio. Para esta demostración, los dos primeros pasos son los mismos que en el caso anterior. En el siguiente paso, se realiza un pliegue de forma que se cree otro rectángulo de igual tamaño al que ya tenemos.



Por lo tanto, tenemos que:

$$(a-b)(a+b) = (a^2 - ab) + (ab - b^2) \quad (4.8)$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \quad (4.9)$$

4.4.2. Metodología

Para esta actividad, se utilizará la clase magistral para explicar la actividad y algunos contenidos teóricos necesarios para la realización de ésta. En esta actividad se trabajará el aprendizaje basado en problemas. Se pretende que, partiendo de una situación sencilla, como pueden ser estas demostraciones visuales en las que simplemente se están sumando áreas de rectángulos y cuadrados, lleguen a deducir las identidades notables más utilizadas. El profesor realizará conjuntamente con los alumnos la primera de ellas, pero el resto se dejarán como trabajo individual para el alumno (siempre con la supervisión del profesor) ya que de este modo se comprobará si realmente han entendido el razonamiento llevado a cabo. El objetivo de esta actividad es que al comprobar ellos mismos cómo se deducen las identidades notables que utilizan con bastante frecuencia, en lugar de aprenderlas de memoria sin entenderlas, se eviten errores típicos de cálculo, sobre todo, relacionado con los signos.

4.4.3. Evaluación

Para saber si la actividad ha cumplido con los objetivos marcados y si los materiales empleados eran los adecuados, se evaluará en cada alumno los siguientes marcadores:

El alumno...	1	2	3	4	5
Conoce y maneja habitualmente las identidades notables que se van a demostrar					
Es capaz de relacionar las incógnitas de las ecuaciones con los cuadrados/rectángulos que se realizan					
Es capaz de demostrar otras identidades notables a través de las pautas indicadas en este ejercicio					
Valora positivamente la utilización de este tipo de demostraciones más visuales					

4.4.4. Posibles dificultades en el desarrollo de la actividad

Cada clase y cada alumno es un caso distinto, por lo que pueden aparecer algunas dificultades que no se han tenido en cuenta en el planteamiento inicial de esta actividad. A continuación se comentan algunas de ellas y cuál seria la propuesta que realizamos al profesor para ayudar a solventarlas.

Pueden aparecer dificultades para comprender las identidades notables. Esto puede estar debido a que los alumnos las utilizan sin llegar a entender de donde surgen o porqué pueden sustituir una expresión por otra y obtener el mismo resultado. Para ello, en el caso de que se detecte este problema, se harán en la pizarra los cálculos necesarios para que los alumnos comprendan, por ejemplo, porqué el cuadrado de una suma es similar al cuadrado de una resta pero cambiando el signo a uno de los términos.

También es posible que los alumnos tengan dificultades a la hora de identificar visualmente los términos correspondientes a a^2, b^2 o $2ab$. El profesor será el que realice la demostración de la primera de las identidades que se propone. Deberá ser claro a la hora de realizar esta demostración ya que el objetivo es que los alumnos vayan siendo cada vez más autónomos en las distintas demostraciones propuestas. Si se detecta que los alumnos tienen serias dificultades en plantear la figura para la segunda de las demostraciones, será el profesor el que la plantee en la pizarra junto con el apoyo de los alumnos. Aún así, se deberá dejar al alumno en, al menos, una de las demostraciones trabajar de forma totalmente independiente para que el profesor pueda comprobar si el alumno ha cumplido con los objetivos propuestos en esta actividad.

Siempre que lo necesiten, el profesor, que estará dirigiendo la actividad deberá dar apoyo a los alumnos para resolver dudas que puedan ir surgiendo durante la actividad.

4.5. Actividad 5. Lugares notables de un triángulo.

4.5.1. Planteamiento de la actividad

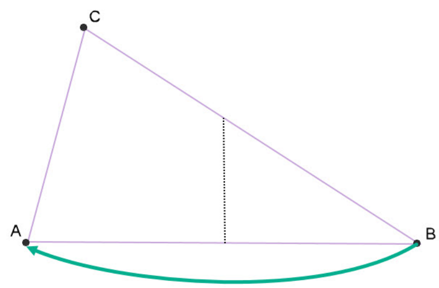
Esta actividad se dirige a alumnos de 3º-4º ESO de la asignatura de matemáticas académicas. En ella se trabajarán los siguientes contenidos establecidos en el currículo oficial de la Educación Secundaria Obligatoria correspondientes al bloque 3 de Geometría:

- Mediatriz, bisectriz, ángulos y sus relaciones, perímetro y área. Propiedades
- Ecuaciones de la recta. Paralelismo, perpendicularidad

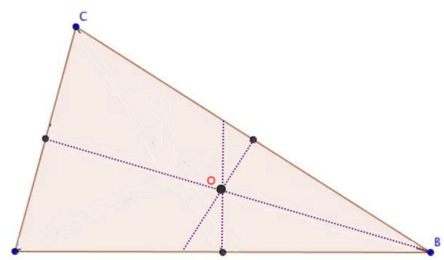
Se resume brevemente la información de la actividad en la tabla siguiente:

Conceptos matemáticos implicados	Mediatriz y circuncentro
Nivel educativo	3º ESO y 4º ESO
Materiales	Un folio DIN A4
Objetivos	Reconocer los siguientes elementos implicados en la construcción: Mediatriz de un segmento es la recta perpendicular trazada en su punto medio Perpendicularidad Punto medio Circuncentro y circunferencia inscrita Baricentro, ortocentro y recta de Euler Triangulo acutángulo, rectángulo y obtusángulo.
Pistas para los alumnos	Recordar el concepto de perpendicularidad. Recordar la definición de mediatriz. Recordar la definicion de circuncentro y circunferencia inscrita. Definición de triángulo acutángulo, rectángulo y obstusángulo.
Propuesta para el alumno	
1. Construye un triángulo acutángulo 2. Traza las mediatrices a cada uno de los lados. 3. ¿Qué pasa con las mediatrices? ¿Dónde se cortan con respecto al triángulo? 4. Dicho punto de corte se denomina circuncentro. Comprueba que este punto es el centro de la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo. 5. Repite los pasos del 1 al 4 para un triángulo rectángulo y uno obstusángulo. ¿Qué ocurre ahora con el punto de corte? 6. En el triángulo acutángulo, traza las medianas de los lados 7. ¿Qué diferencia existe entre mediatriz y mediana? 8. ¿Qué pasa con las medianas? ¿Cómo se denomina el punto de corte de todas ellas? 9. Traza las alturas en del triángulo acutángulo. ¿Cómo se denomina el punto de corte de todas ellas? 10. A través de los puntos hallados anteriormente, traza la recta de Euler.	

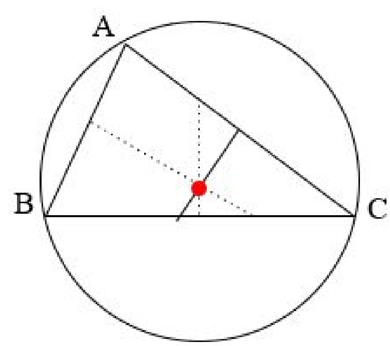
Se pide que dibujen un ángulo acutángulo para trazar sobre él las mediatrices de todos los ángulos, utilizando el axioma O_2 de Humiaki Huzita. Por ejemplo, se muestra como sería para el lado AB:



Se realiza el mismo proceso en el resto de lados. El punto de corte de las tres mediatrices sería el circuncentro.

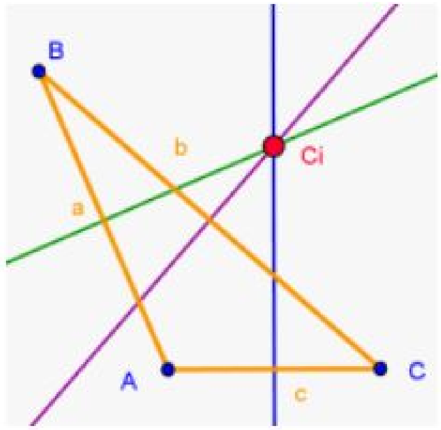


La definición de circuncentro indica que *es el punto donde se intersecan sus tres mediatrices, siendo además el centro de la circunferencia circunscrita*, por lo que podemos trazar una circunferencia de centro el punto de intersección de las tres mediatrices y radio hasta cualquiera de sus vértices, que pase por todos los vértices del triángulo.

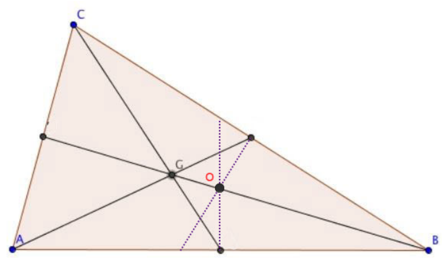


Esta parte no es necesaria que los alumnos la realicen, simplemente se incluye para ilustrar el concepto de circuncentro. Tal y como se ha indicado en apartados anteriores, la realización de circunferencias no es posible utilizando papiroflexia y lo que se quiere con estos ejercicios es potenciar su uso. Aún así podemos utilizarlo puntualmente si aporta mejoras en la resolución del ejercicio.

Posteriormente, se les plantea a los alumnos que realicen el mismo procedimiento pero utilizando un ángulo obtusángulo. Con ésto comprobarán que en este caso el punto de corte de las mediatrices queda fuera del triángulo original.

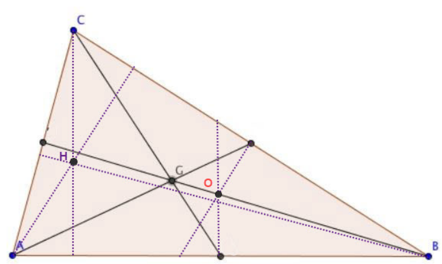


En el siguiente paso, se les indica a los alumnos que tracen las medianas. Para construir la mediana de uno de los lados del triángulo se necesita hallar el punto medio de dicho lado (es un punto conocido, se ha calculado para hallar el cicuncentro) y realizar un pliegue que una el punto medio con el vértice opuesto del triángulo. Se repite el mismo proceso con todos los lados.

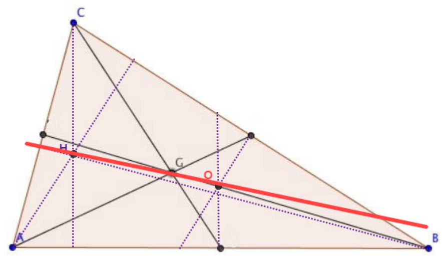


El punto de corte de todas ellas se denomina baricentro.

Por último, utilizando el mismo triángulo acutánculo que en pasos anteriores, se pide que se marquen las alturas. Se realizará un pliegue que una perpendicularmente un punto del lado con su vértice opuesto.



El punto de corte de todas ellas se denomina ortocentro. Unimos los tres puntos, realizando un pliegue que pase por todos ellos. Con esto se obtiene la recta de Euler.



4.5.2. Metodología

Para esta actividad, se utilizará la clase magistral para explicar la actividad y algunos contenidos teóricos necesarios para la realización de ésta. Se utilizará el método de Polya para resolver este ejercicio. Los pasos que indica este método son:

- Entender el problema: ¿Qué es lo que me pide? ¿Qué es un triángulo acutángulo? ¿Qué es un triángulo obtusángulo? ¿Qué es el circuncentro de un triángulo? ¿Qué es la recta de Euler? ¿Que es el ortoncetro de un triángulo? ¿Qué es el baricentro de un triángulo?
- Configurar un plan: ¿Cómo puedo hallar el circuncentro, ortocentro, baricentro de un triángulo?
- Ejecutar el plan: hacer los pasos del proceso por partes, comprobando los datos y los resultados.
- Examinar la resolución obtenida: ¿El resultado es lo que se pidió? ¿Cómo lo puedo comprobar? ¿Hay otros métodos para hallar el mismo resultado?

Con esto se pretende que los alumnos sean capaces de resolver cualquier tipo de problema siguiendo estos pasos reforzando así el trabajo individual del alumno poniendo a prueba sus habilidades y destrezas, mientras el profesor supervisa la actividad dando apoyo a los alumnos en las dificultades que les vayan surgiendo.

4.5.3. Evaluación

Para saber si la actividad ha cumplido con los objetivos marcados y si los materiales empleados eran los adecuados, se evaluará en cada alumno los siguientes marcadores:

El alumno...	1	2	3	4	5
Conoce el concepto de mediatriz de un segmento					
Es capaz de trazar mediatrices sin utilizar regla y compás					
Es capaz de razonar porqué el circuncentro de un triangulo obtusángulo estará fuera del triangulo					
Comprende la definición geométrica de circuncentro, baricentro y ortocentro de un triángulo					

4.5.4. Posibles dificultades en el desarrollo de la actividad

Se proponen a continuación una serie de medidas en el caso de que se detecten alguno de los problemas indicados durante el desarrollo de esta actividad.

El en planteamiento de esta actividad se incluye una tabla en la que se pueden encontrar *Pistas para el alumno* que se utilizarán, siempre que el profesor lo considere necesario, para ayudar a los alumnos durante la actividad y que tengan presentes en todo momento los conceptos teóricos que se involucran en esta actividad.

Puede que aparezcan dificultades a la hora de realizar las mediatrices de cada una de los lados de un triángulo. En ese caso, se comenzará planteando a los alumnos que realicen la mediatriz de un segmento cualquiera y luego extrapolen al caso de un triángulo. Si el profesor lo considera necesario durante la actividad, se dedicará una parte de la clase a recordar todos los conceptos teóricos involucrados en la actividad: mediatriz, baricentro, ortocentro, circuncentro, recta de Euler, etc.

También pueden surgir problemas para identificar los distintos tipos de triángulos que se necesitan durante la actividad. Son conceptos que se considera que deben estar asimilados de cursos previos, pero en el caso de que se detecten dificultades, se parará la actividad y el profesor expondrá cual es la clasificación de los triángulos en función de sus ángulos según lo que los alumnos le vayan indicando. De este modo, son los propios alumnos los que aportan esa información y quedará reflejada en la pizarra durante la realización de la actividad.

4.6. Actividad 6. Demostración Teorema de Pitágoras.

4.6.1. Planteamiento de la actividad

Esta actividad va dirigida a alumnos de 1º-2º ESO de la asignatura de matemáticas. En ella se trabajarán los siguientes contenidos establecidos en el currículo oficial de la Educación Secundaria Obligatoria correspondientes al bloque 3 de Geometría:

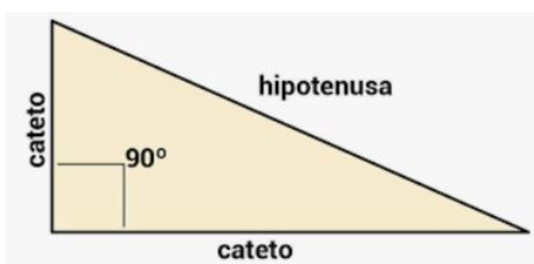
- Figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales.
- Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Justificación geométrica y aplicaciones.
- Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples.

También puede utilizarse en cursos superiores (3ºESO) como repaso de contenidos mínimos que los alumnos deberían tener asimilados al llegar a ese nivel.

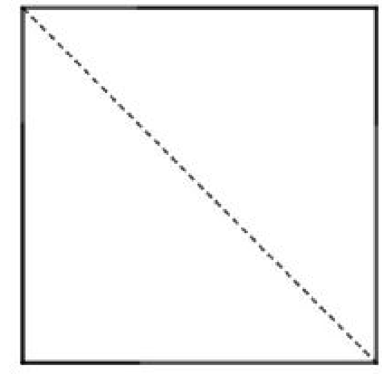
Se resume brevemente la información de la actividad en la tabla siguiente:

Conceptos matemáticos implicados	Cálculo de áreas. Propiedades de los triángulos rectángulos
Nivel educativo	1º-2º ESO
Materiales	Un cuadrado de papel
Objetivos	Demostración del Teorema de Pitágoras a través de la papiroflexia

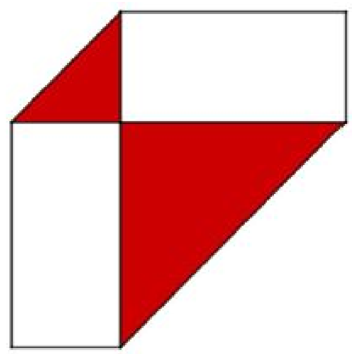
Comenzamos la actividad recordando qué características debe tener un triángulo para que se clasifique como triángulo rectángulo. De este modo se comprueba que los alumnos tienen los conceptos básicos asimilados para poder realizar la actividad satisfactoriamente. A continuación, se enuncia a los alumnos el Teorema de Pitágoras:
En un triángulo rectángulo la suma de los catetos al cuadrado es igual a la hipotenusa al cuadrado.



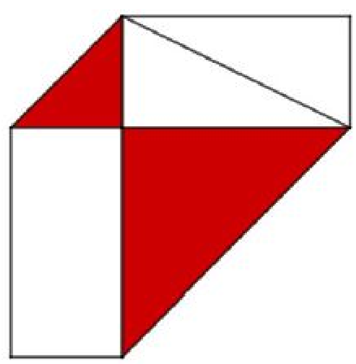
Una vez introducidos estos conceptos más teóricos pasamos a realizar la demostración del teorema. Para llevar a cabo la actividad, se utilizará como recurso una hoja cuadrada de papel. El primer paso será plegar el cuadrado por una de sus diagonales.



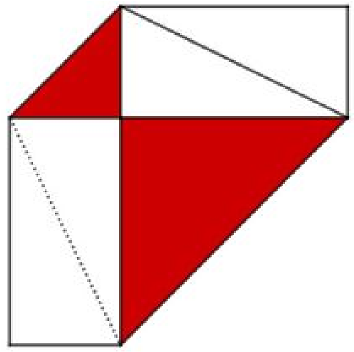
A continuación, se trasladan los vértices marcados la diagonal a un punto cualquiera que pertenezca a esa diagonal. No es necesario que sea el punto medio.



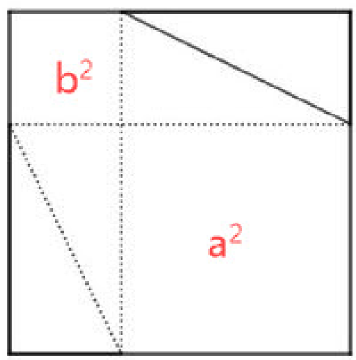
Se puede observar que se forman dos triángulos rectángulos de distintos tamaños (marcados en rojo en la figura) y dos rectángulos (marcados en blanco en la figura). En el siguiente paso, se realiza un pliegue hacia atrás (pliegue montaña) de forma que el rectángulo superior quede dividido en dos triángulos rectángulos.



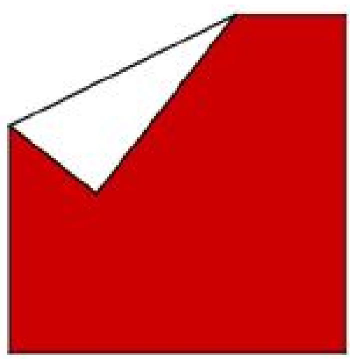
Se desdobla este último pliegue y se realiza en mismo proceso en el otro rectángulo.



Si abrimos la hoja, en el mapa de pliegues se puede observar que se han formado dos cuadrados y cuatro triángulos rectángulos cuyos catetos coinciden con los lados del cuadrado. Por lo tanto, habrá cuatro triángulos rectángulos iguales más dos cuadrados, que por lo general, no serán de igual tamaño. En esta figura, se puede ver claramente que si al cuadrado original le quitamos los cuatro triángulos rectángulos idénticos, se obtienen dos cuadrados más pequeños, de lados a y b respectivamente, cuya suma de áreas es $a^2 + b^2$.

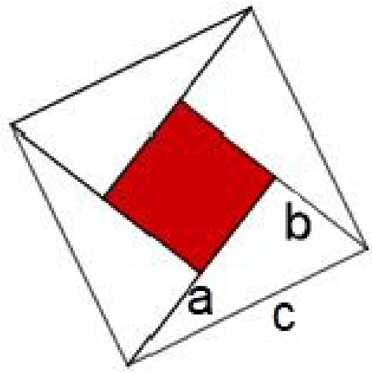


Para realizar el paso siguiente, en primer lugar damos la vuelta a la hoja y posteriormente doblamos la parte superior formando un triángulo utilizando el pliegue montaña realizado en la tercera imagen.



Se realiza el mismo proceso con todos los lados del triángulo de forma que nos quede algo similar a lo que se muestra en la siguiente imagen [2]

[2]Las imágenes para esta actividad han sido tomadas de la web http://www.grupoalquerque.es



Se puede observar que al quitar los mismos cuatro triángulos rectángulos idénticos de otra forma distinta a pasos anteriores, se forma un cuadrado de lado igual a la hipotenusa el triángulo rectángulo y cuyo área es c^2. Por lo tanto, si al cuadrado inicial le restamos los mismos cuatro triángulos rectángulos de distintas formas a través de la papiroflexia, el área final en ambos casos debe ser la misma. Esto indica que:

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{4.10}$$

Además, se puede ver que las medidas de lados de los distintos cuadrados, a, b y c, coinciden con los catetos e hipotenusa del triángulo rectángulo. Con lo que se demuestra que la suma de los cuadrados de lados a y b es igual al área del cuadrado de lado c. O lo que es lo mismo, la suma de los catetos al cuadrado en un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la hipotenusa, tal y como indica el Teorema de Pitágoras.

4.6.2. Metodología

Para esta actividad, la metodología principal a utilizar será la clase magistral. El profesor involucrará a los alumnos en la actividad haciéndoles preguntas sobre qué pasos seguirían ellos en el caso de que tuvieran que realizar solos la actividad o cuáles son sus dudas durante la explicación para llevar el avance de los alumnos de forma lo más homogéneamente posible. De este modo la clase participa conjuntamente con el profesor en la realización de la demostración, creando un ambiente más dinámico a pesar de que sea el que va a realizar/dirigir la actividad en la pizarra. Con esta demostración se pretende que los alumnos reconozcan el significado geométrico del Teorema de Pitagóras y sean capaces de reconocer las situaciones en las que se puede aplicar.

En el caso de utilizar esta actividad como forma de repaso de conceptos de cursos inferiores, la actividad no estará tan pautada por el profesor sino que los alumnos recibirán unas indicaciones básicas para que sea más sencillo llegar a la demostración del teorema. El profesor estará de apoyo durante la actividad para resolver las dudas que a los alumnos les vayan surgiendo pero no será el que la realice la actividad.

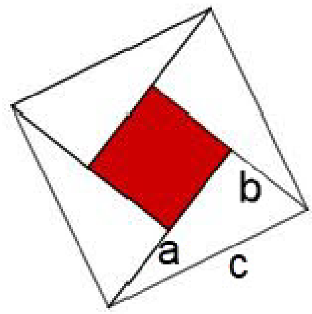
4.6.3. Evaluación

Para saber si la actividad ha cumplido con los objetivos marcados y si los materiales empleados eran los adecuados, se evaluará en cada alumno los siguientes marcadores:

El alumno...	1	2	3	4	5
Reconoce y clasifica los distintos tipos de triángulos según sus lados/ángulos					
Es capaz de reconocer el significado geométrico del Teorema de Pitágoras					
Es capaz de calcular áreas descomponiendo en suma de figuras					
Es capaz de distinguir en qué ocasiones es posible utilizar el T. de Pitágoras y en cuales no					

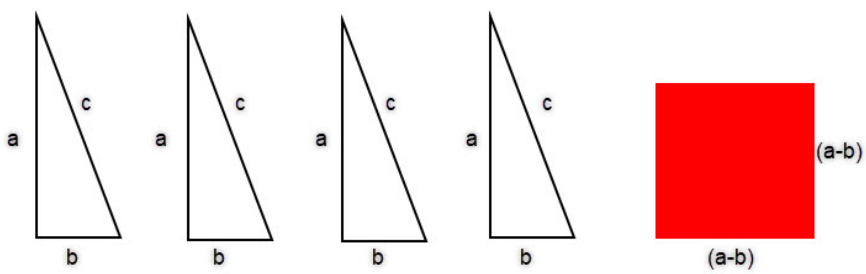
4.6.4. Posibles dificultades en el desarrollo de la actividad

A pesar de que en el planteamiento que se realiza para esta actividad se indican bastantes pautas a seguir para que se cumplan los objetivos planteados, siempre puede ocurrir que aparezcan dificultades entre los alumnos durante su desarrollo. Se considera que el punto más problemático es en el que los alumnos deben identificar que la figura indicada a continuación esta compuesta por cuatro triángulos iguales y un cuadrado:



En ese caso, se plantean dos alternativas:

- Se propone a los alumnos que pongan por separado las cinco figuras que componen la imagen anterior, indicando en cada caso las medidas de todos los lados. Con esto se pretende que, al indicar las medidas de los lados, los alumnos comprendan que los triángulos que forman la imagen son todos iguales.



  Una vez tengan todas las figuras por separado, simplemente tendrán que hallar la suma total de todas las áreas.Teniendo en cuenta que el cuadrado grande que contiene todas las figuras tiene lado c, llegamos al siguiente resultado:

$$c^2 = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + (a-b)^2 \tag{4.11}$$

$$c^2 = 4\left(\frac{ab}{2}\right) + a^2 + b^2 - 2ab \tag{4.12}$$

$$c^2 = 2ab + a^2 + b^2 - 2ab \tag{4.13}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{4.14}$$

- Se propone a los alumnos que con la ayuda de unas tijeras, recorten las distintas figuras y comprueben, superponiendo unas con otras, que todos los triángulos son iguales. Al recortar la figura, se obtienen las piezas de una especie de puzzle con el que el profesor puede retar a los alumnos a construir un cuadrado con ellas. Los alumnos conocen cuál es la solución a la que deben llegar, pero con este puzzle no es trivial llegar a ella, lo que se puede convertir en una actividad interesante para que compitan entre ellos o incluso para desafiar a los padres.

4.7. Actividad 7. División de un segmento en partes iguales

4.7.1. Planteamiento de la actividad

Esta actividad va dirigida a alumnos de 3º ESO de la asignatura de matemáticas aplicadas. En ella se trabajarán los siguientes contenidos establecidos en el currículo oficial de la Educación Secundaria Obligatoria correspondientes al bloque 3 de Geometría:

- Geometría en el plano.
- Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales.
- Aplicación a la resolución de problemas.

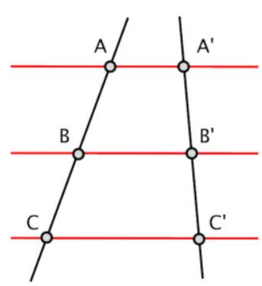
Se resume brevemente la información de la actividad en la tabla siguiente:

Conceptos matemáticos implicados	División de segmentos. Teorema de Tales.
Nivel educativo	3º ESO
Materiales	Varios cuadrados de papel del mismo tamaño
Objetivos	División de segmentos en partes iguales a través de distintos métodos
Propuesta para el alumno	
1. ¿ Sabrías cómo dividir un cuadrado de papel en dos partes iguales? ¿Y en cuatro? 2. ¿Cómo dividirías un cuadrado en siete divisiones rectangulares iguales? 3. Toma otro cuadrado de papel y divídelo ahora en cinco partes. Explica el método que has llevado a cabo para conseguirlo. ¿Has utilizado el mismo método que el paso anterior?	

En esta actividad se verán distintas formas de dividir un cuadrado de papel en partes iguales, haciendo uso del Teorema de Tales en algunas de ellas. En primer lugar, se comienza enunciando dicho teorema:

Si dos rectas, no necesariamente paralelas, son cortadas por un sistema de rectas paralelas, entonces los segmentos que resultan sobre una de las dos rectas son proporcionales a los correspondientes segmentos obtenidos sobre la otra.

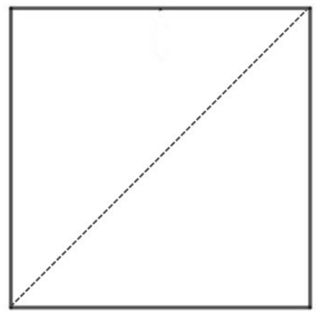
A continuación, se expone un caso sencillo para ejemplificar el teorema anterior:



donde se cumple que $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$.

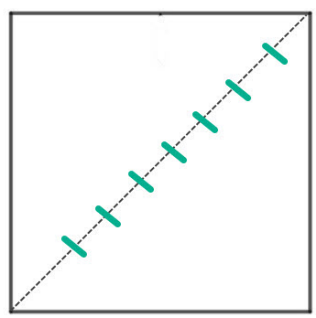
En la primera parte de la actividad se les pide a los alumnos que dividan un cuadrado en dos y cuatro partes iguales. Esta parte es muy sencilla pero la idea es que vayan aplicando los razonamientos de casos más simples en otros de mayor dificultad. Por lo tanto, simplemente tendrán que plegar el cuadrado por la mitad vertical u horizontalmente, utilizando el axioma O_2 para realizar la mediatriz de cualquiera de sus lados para dividirlo en dos partes iguales y para dividirlo en cuadro deberán realizar el mismo proceso con cada una de las divisiones que se han formado en el paso anterior.

A continuación, se pide que dividan un cuadrado en 7 divisiones rectangulares iguales. Para ello, en primer lugar marcamos la diagonal del cuadrado.



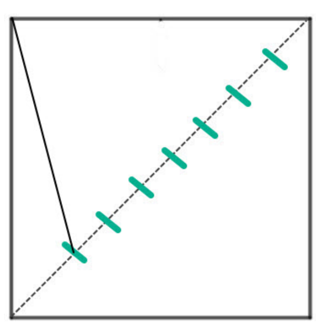
(a) Paso 1

Sobre la diagonal del triángulo, se marcan 7 segmentos de igual tamaño. Para ello, se marca a mano el primero de ellos que es el que delimitará la longitud del segmento y posteriormente iremos trasladando dicha distancia sobre la diagonal mediante pliegues. Es recomendable que la longitud del segmento elegido no sea demasiado grande, para que al trasladarlo siete veces sobre la diagonal del cuadrado no sobrepase la longitud de ésta.



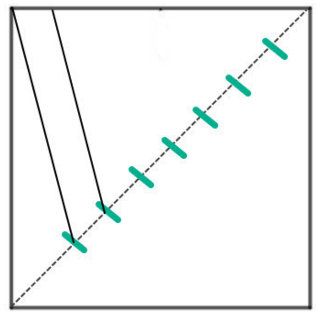
(b) Paso 2

Se realiza un pliegue que una el último de los puntos trasladados sobre la diagonal, con la esquina superior izquierda (el lado superior es el que queremos dividir en siete partes).



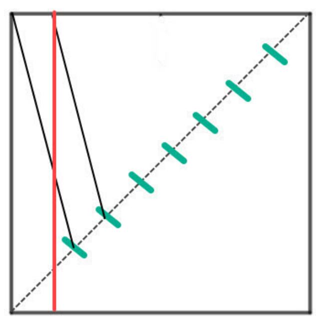
(c) Paso 3

Realizamos un pliegue paralelo al anterior y que pase por el punto anterior que delimita la longitud del segmento. Para hacer una linea paralela a otra dada con papiroflexia, primero se construye un pliegue perpendicular al de partida, y posteriormente, otro perpendicular a éste último (se aplica dos veces el axioma O_4) y que pase por la penúltima de las marcas que delimita las divisiones de la figura.



(d) Paso 4

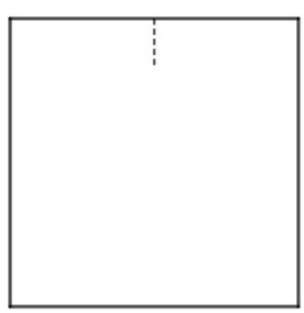
El punto de corte entre el pliegue que acabamos de realizar y el lado superior del cuadrado nos indica que esa distancia es $\frac{1}{7}$ del lado del cuadrado original. Si realizamos un pliegue vertical que pase por dicho punto, ya tenemos una de las siete divisiones rectangulares en las que queremos dividir el cuadrado. Esta división la trasladaremos a lo largo de todo el cuadrado y obtendremos el numero total de particiones.



(e) Paso 4

Por último, se pide que se tome otro cuadrado de papel y se divida en 5 secciones rectangulares iguales. Se elige este número de divisiones en concreto ya que al ser un número impar, no es tan sencillo a simple vista realizar las divisiones. Se propone otro método distinto al anterior en el que se siguen los pasos indicados a continuación:

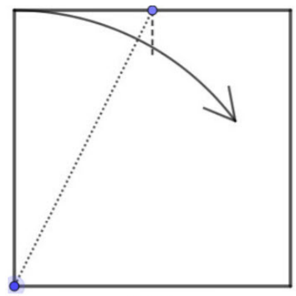
1. Plegamos la hoja por la mitad (axioma O_2), y posteriormente realizamos un pliegue que una el punto medio del lado superior con el extremo inferior izquierdo.



Paso 1

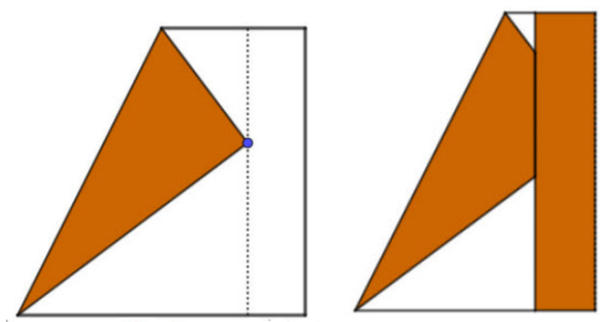
2. Se dobla la hoja por la línea que une el extremo inferior izquierdo del cuadrado con el punto de corte

que ha dejado el pliegue anterior en el lado superior (axioma O_1)



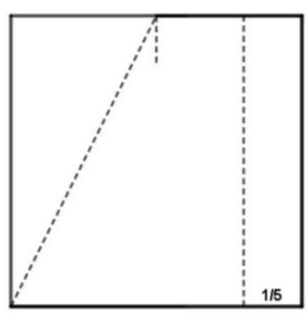
Paso 2

3. Doblamos verticalmente de modo que el pliegue contenga al vértice que acabamos de desplazar. Marcamos bien el pliegue ya que es uno de los que divide el cuadrado en cinco partes.



Paso 3 Paso 4

4. Por último desdoblamos la hoja y vemos el doblez correspondiente a una quinta parte del cuadrado. Esta división la trasladaremos a lo largo de todo el cuadrado y obtendremos de este modo las cinco divisiones.



Paso 5

4.7.2. Metodología

En esta actividad, se trabajará con los alumnos principalmente una metodología de trabajo individual. Tal y como se indica en el resto de actividades el profesor utilizará la clase magistral para plantear la actividad a la clase y explicarles los pasos que deben llevar a cabo. Como se puede ver en el apartado anterior, la actividad posee diferentes niveles de dificultad que les guiará de tal forma que lleguen por sí solos a completar la actividad. Además, si cada parte de la actividad es considerada como una problema independiente podremos hacer uso de una metodología basada en problemas. Se considera que este tipo de metodología es beneficiosa para los alumnos por las siguientes razones:

- Fomenta el pensamiento crítico, aumenta la motivación y las ganas de aprender.
- Aprenden a analizar información, a interpretarlos correctamente e integrarlos con los que ya tenían.
- Se pueden trabajar habilidades que podrán aplicar en un futuro en vida profesional y personal, como adaptarse a los cambios, la deducción, etc.

4.7.3. Evaluación

Para saber si la actividad ha cumplido con los objetivos marcados y si los materiales empleados eran los adecuados, se evaluará en cada alumno los siguientes marcadores:

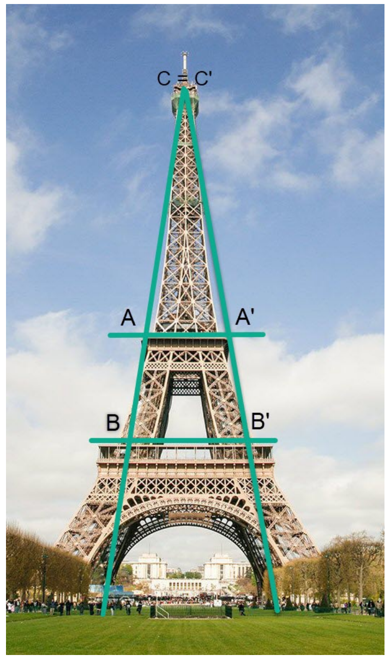
El alumno...	1	2	3	4	5
Conoce el Teorema de Tales y comprende su significado geométrico					
Utiliza la papiroflexia correctamente durante la realización del ejercicio					
Es capaz de razonar conceptos geométricos utilizando la papiroflexia. (Por ejemplo: si tenemos un segmento, al realizar un pliegue que una sus dos extremos estamos realizando la mediatriz de dicho segmento)					
Es capaz de expresar matemáticamente y de forma razonada el método que ha utilizado para cada apartado					

4.7.4. Posibles dificultades en el desarrollo de la actividad

Durante la puesta en práctica de esta actividad pueden surgir algunas dificultades entre los alumnos que impidan el avance homogéneo de la clase. A continuación se recogen algunas de ellas y se proponen algunas medidas, para su resolución o incluso para evitar su aparición. En primer lugar, nos podemos encontrar con que los alumnos tienes ciertas dificultades para entender el teorema de Tales. Para ello, proponemos una serie de ejemplos [3] reales en los que se puede ver la aplicación de dicho teorema.

- Ejemplo 1. Torre Eiffel
  Si consideramos que la estructura de la Torre Eiffel tiene forma triangular, los distintos pisos de ésta crearán puntos de corte de forma paralela con dicho triángulo tal y como se ve en la siguiente imagen:

[3] Las imágenes para este apartado han sido extraídas de *Google Imágenes*



Por lo tanto, según nos indica el Teorema de Tales existirá una relación entre los diferentes puntos de corte tal que: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ cosa que en este caso puede parecer más evidente porque sino la torre tendría aspecto de estar desequilibrada.

- Ejemplo 2. Torres Kio
  En este caso, la propia estructura de las Torres Kio posee unas lineas tanto verticales como horizontales que nos pueden servir de guía para este ejemplo. Los puntos de corte serían:

  Por lo tanto, aplicando el Teorema de Tales tendríamos que las distancias entre los pisos de la torre son todas iguales: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$

- Ejemplo 3. El Arco del Triunfo
  Un claro ejemplo sería utilizar edificios con líneas rectas en su estructura. En este caso, consideramos las

columnas como lineas verticales y marcamos algunas lineas horizontales paralelas entre sí que coinciden con la decoración del monumento. Los puntos de corte serían:

Entonces, lo que nos dice el Teorema de Tales es que: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$
Lo que en este tipo de estructuras cuadriculadas resulta bastante evidente y puede ser mucho más fácil de asimilar para el alumno.

Por otra parte, al utilizar una forma de trabajo individual, puede que ocurra que algunos alumnos no avancen tan rápido como otros. En ese caso, cambiaremos a una metodología grupal en la que el profesor dirigirá la actividad, indicando paso a paso lo que deber ir haciendo dejando siempre una cierta libertad para que los alumnos puedan hacer las pruebas ensayo-error que consideren necesarias. Con esto lo que se pretende es que los alumnos adquieran un razonamiento inductivo a través de la resolución de los distintos apartados. Si esto no lo consiguen de forma individual, el profesor intervendrá para dirigir la actividad de forma grupal.

4.8. Actividad 8. Análisis de un mapa de pliegues

4.8.1. Planteamiento de la actividad

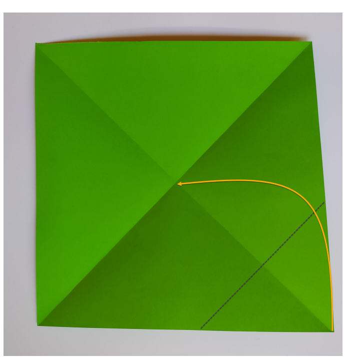
Esta actividad va dirigida a alumnos de 1º y 2º de la ESO de la asignatura de matemáticas aplicadas. En ella se trabajarán los siguientes contenidos establecidos en el currículo oficial de la Educación Secundaria Obligatoria correspondientes al bloque 3 de Geometría:

- Elementos básicos de la geometría del plano. Relaciones y propiedades de figuras en el plano: Paralelismo y perpendicularidad.
- Clasificación de triángulos y cuadriláteros. Propiedades y relaciones.
- Medida y cálculo de ángulos de figuras planas.
- Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Justificación geométrica y aplicaciones.

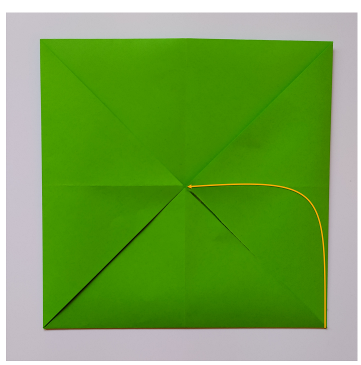
Se resume brevemente la información de la actividad en la tabla siguiente:

Conceptos matemáticos implicados	Clasificación de figuras planas. Ejes y centros de simetría.
Nivel educativo	1º- 2º ESO
Materiales	Un cuadrado de papel
Objetivos	Clasificar diferentes tipos de triángulos Reconocer combinaciones de figuras simétricas en el plano. Ejes de simetría.
Propuesta para el alumno	
1. Realiza una pajarita de papel siguiendo las instrucciones indicadas 2. Despliega la figura y observa el mapa de pliegues. ¿Cuántos tipos de figuras distintas eres capaz de identificar? 3. ¿Cuántos triángulos rectángulos isósceles idénticos localizas en el mapa de pliegues? 4. ¿Cuántos cuadrados existen?. Clasifícalos según su tamaño 5. ¿Existe simetría en la combinación de figuras del mapa de pliegues? ¿Eres capaz de localizar algún punto o eje de simetría?	

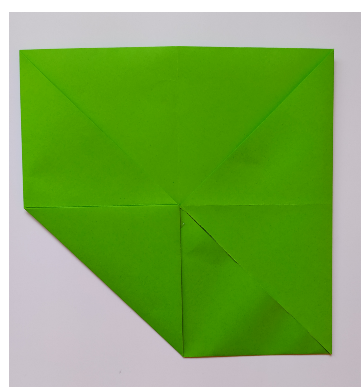
En primer lugar, los alumnos deberán construir una pajarita de papel a partir de un cuadrado de papel. Para ello deberán seguir las siguientes instrucciones:



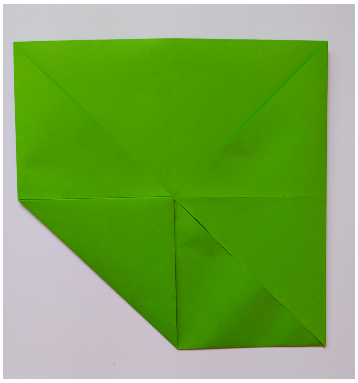
(f) Doblamos el cuadrado por las dos diagonales y llevamos los vértices del cuadradro al centro



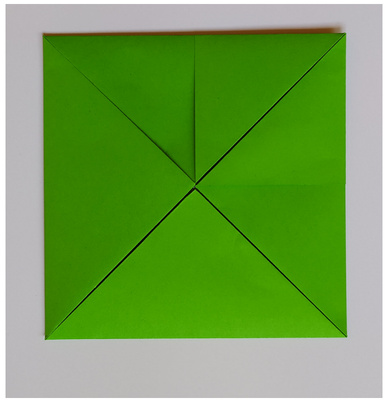
(g) Llevamos todos los vértices del nuevo cuadrado hasta el punto central



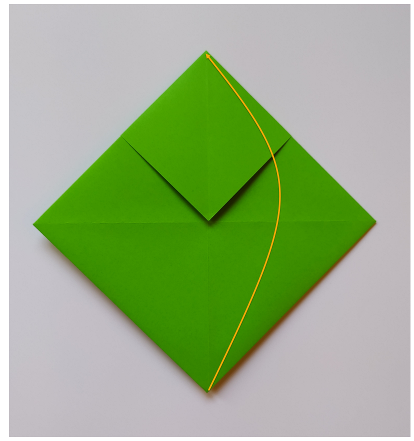
(h) Nos quedará tal y como muestra la imagen



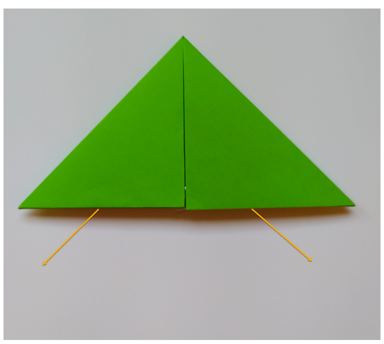
(i) Nos quedará tal y como muestra la imagen



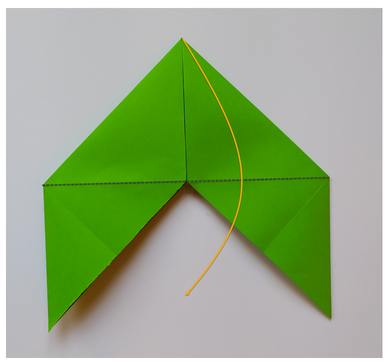
(j) Realizamos el mismo pliegu en el lado opuesto



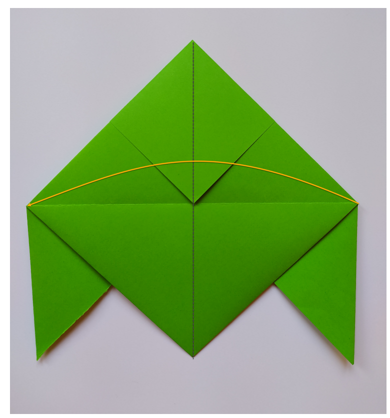
(k) Tomamos el lado marcado en la imagen y lo llevamos hasta que coincida con el eje central



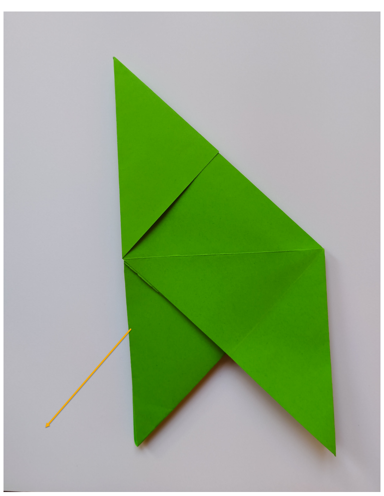
(l) Realizamos lo mismo en el lado opuesto



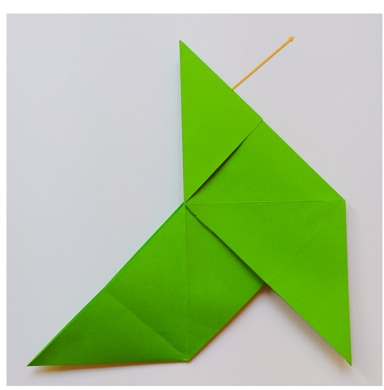
(m) Nos quedará una figura similar a la que muestra la imagen



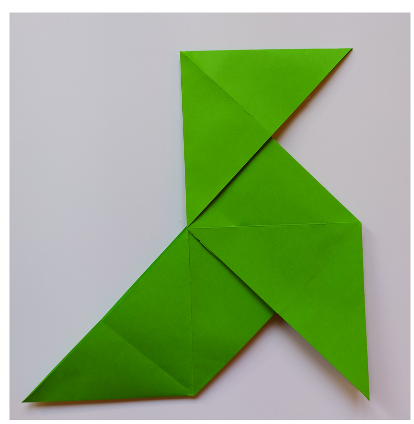
(n) Damos la vuelta a la figura y plegamos por el eje vertical central



(ñ) Tomamos la punta superior de la figura y la llevamos hasta el lado inferior



(o) Damos la vuelta a la figura y hacemos lo mismo con la otra punta



(p) Plegamos como se muestra en la imagen

Figura 4.12: Paso a paso elaboración pajarita de papel. *Fuente imágenes: Elaboración propia*

Una vez realizamos la figura, deshacemos todos los pliegues y realizaremos el resto de la actividad utilizando el mapa de pliegues de la pajarita de papel.

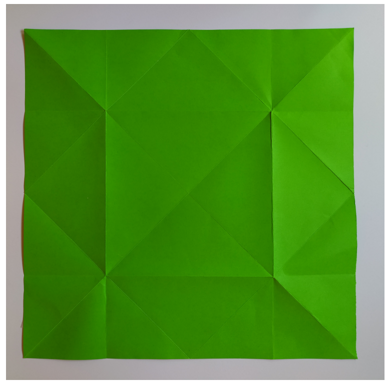
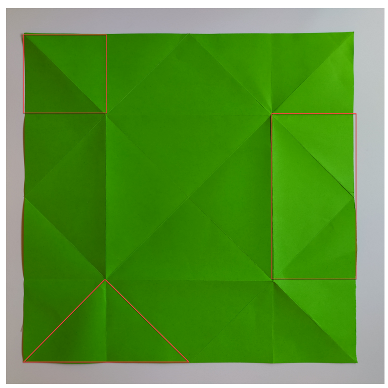


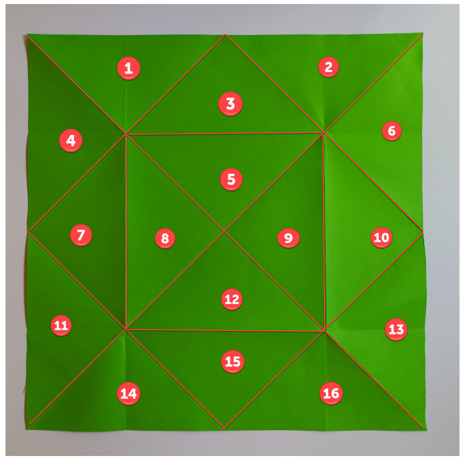
Figura 4.13: Mapa de pliegues pajarita de papel. *Fuente imágenes: Elaboración propia*

La primera cuestión que se les plantea a los alumnos es cuantos tipos de figuras distintas son capaces de identificar en el mapa de pliegues. A continuación, se propone una posible solución aunque para este apartado no existe una única respuesta:

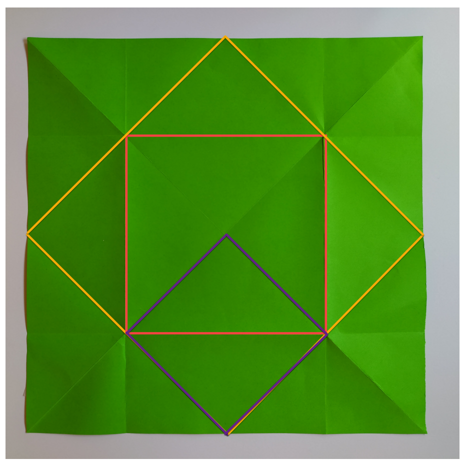


En este caso, señalamos un cuadrado en la parte superior izquierda, un rectángulo y un triángulo rectángulo.

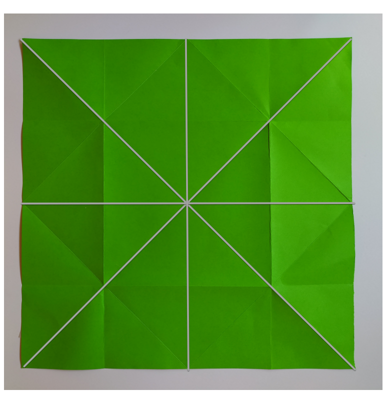
En el paso siguiente se pide localizar todos los triángulos rectángulos isósceles idénticos que veamos en el mapa de pliegues. Si tomamos como referencia el triángulo señalado en la imagen anterior, somos capaces de localizar hasta 16 triángulos iguales:

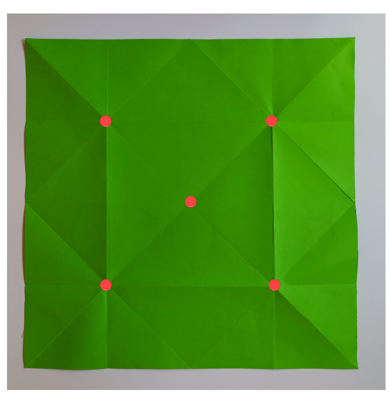


Después se pide que señalen los distintos tipos de cuadrados que localizan en el mapa de pliegues. Como indicamos anteriormente, no existe una única solución correcta (siempre y cuando esté razonada correctamente) para este paso y se propone a continuación una de las posibles:



Por último, les preguntamos por la simetría de las figuras que se han formado en el mapa de pliegues. Deberían ser capaces de localizar algún eje o punto de simetría, como por ejemplo, alguno de los que se muestran a continuación:





4.8.2. Metodología

Para esta actividad se propone utilizar la gamificación como metodología principal. La gamificación es una técnica de aprendizaje que tiene traslada la mecánica de los juegos al ámbito educativo con el objetivo de conseguir mejores resultados: sirve para asentar conocimientos, para mejorar habilidades sociales, para motivar a los alumnos con otra forma de aprender mucho más dinámica.

Al igual que en resto de actividades propuestas, el profesor explicará el desarrollo de la actividad (que en este caso denominaremos como juego) a los alumnos a través del método de la clase magistral. Posteriormente se dividirá la clase en pequeños grupos, como máximo de cinco alumnos.

Como se ha comentado en el apartado *Planteamiento de la actividad* para algunos apartados no existe una única solución posible, por lo tanto, la idea de utilizar la actividad como si fuera un juego es para que los alumnos se motiven entre ellos a buscar el mayor numero de soluciones posibles. Para el desarrollo del juego se establecerán unas normas básicas:

- Cada apartado de la actividad será una ronda del juego. Es decir, se plantearán los objetivos para cada apartado y se dará un tiempo para que los alumnos lo resuelvan. El tiempo variará en función de la dificultad de cada apartado.
- En cada grupo se nombrará un portavoz, que irá variando según vayan aumentando las rondas con el objetivo de que todos los componentes del grupo cumplan dicha función.
- Al final de cada ronda, cada grupo tendrá cinco minutos para exponer su propuesta.
- Una vez escuchadas todas las propuestas, cada grupo deberá evaluar la propuesta de sus compañeros, siendo la máxima puntuación un 10 y la mínima un 0.
- El grupo ganador será aquel que más puntos obtenga a través de las evaluaciones de sus compañeros.

4.8.3. Evaluación

En este caso, como la actividad es planteada para realizarse en grupo tendremos en cuenta el trabajo del alumno tanto individual como dentro del grupo de trabajo. Por lo tanto, en primer lugar, se evaluará en cada alumno los siguientes marcadores:

El alumno...	1	2	3	4	5
Es capaz de reconocer distintas figuras planas					
Comprende qué características cumple un triángulo isósceles y es capaz de localizarlo en el mapa de pliegues					
Reconoce ejes y puntos de simetría					
Localiza en el mapa de pliegues cuadrados de diferentes tamaños sin dificultad					

Por otro lado, se evaluará el trabajo del alumno dentro del grupo de trabajo teniendo en cuenta los siguientes criterios:

Su grupo de trabajo...	1	2	3	4	5
Cada uno de los componentes participa activamente en cada parte de la actividad					
Ha sido capaz de encontrar el número máximo de triángulos isósceles idénticos					
Ha encontrado más de dos tamaños diferentes de cuadrados en el mapa de pliegues					
Expone sus resultados con claridad al resto de la clase y trabajan de forma coordinada					

4.8.4. Posibles dificultades en el desarrollo de la actividad

Durante el desarrollo de esta actividad propuesta pueden aparecer algunas dificultades que provoquen que la actividad no tenga el avance esperado. Al utilizar la actividad como si fuera un juego puede ocurrir que el ambiente en la clase se vuelva algo disruptivo. Para evitar esto se intentará que los grupos de trabajo sean equilibrados, es decir, juntar alumnos que tengan normalmente más dificultades con las matemáticas con otros que no para que la actividad no les resulte tediosa, o incluso, aburrida por falta de entendimiento.

A pesar de que se considera que la figura de la pajarita de papel es sencilla de realizar, puede ocurrir que alguno se atasque en este paso. Al igual que se ha comentado en otras actividades se recomienda tener varios recursos distintos para explicar los pasos a seguir para la construcción de la figura: vídeos, instrucciones de distintas fuentes, instrucciones de elaboración propia, etc. Por lo tanto, los alumnos tendrán varias alternativas disponibles para realizar las pruebas necesarias con el objetivo de conseguir construir la figura por ellos mismos. Si este punto se vuelve demasiado problemático, el profesor intervendrá y ayudará al alumno que lo necesite a realizar la pajarita de papel.

Otro punto problemático puede ser la predisposición de los alumnos para trabajar en equipo. Con esta actividad se pretende fomentar el trabajo en equipo para que los alumnos aprendan a enfrentarse a situaciones en la que cada uno hace sus aportaciones con el fin de llegar a un objetivo común. Si se diera el caso de que en alguno de los grupos no se esta trabajando correctamente en grupo, provocando situaciones poco respetuosas con los compañeros, se podrá hacer cambios de alumnos entre los equipos creados para solventar esta situación.

Por lo demás, se considera que la actividad tiene un nivel de dificultad bastante asequible para una clase de 1º-2ºESO, aunque nunca se puede descartar la aparición de éstos u otros problemas durante el transcurso de la actividad.

4.9. Actividad 9. Suma de los lados de un triángulo

4.9.1. Planteamiento de la actividad

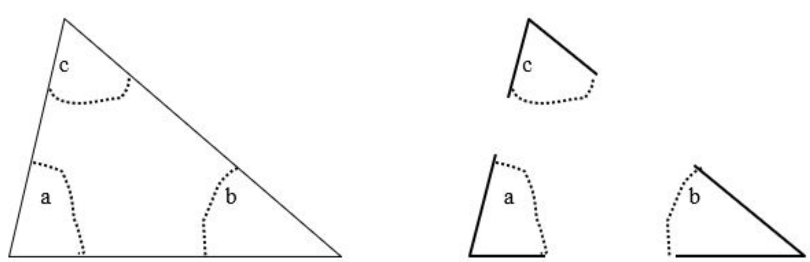
Esta actividad va dirigida a alumnos de 2º de la ESO de la asignatura de matemáticas aplicadas. En ella se trabajarán los siguientes contenidos establecidos en el currículo oficial de la Educación Secundaria Obligatoria correspondientes al bloque 3 de Geometría:

- Clasificación de triángulos y cuadriláteros. Propiedades y relaciones.
- Medida y cálculo de ángulos de figuras planas.

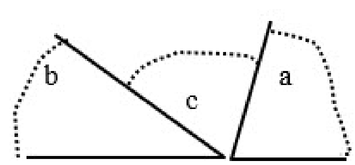
Se resume brevemente la información de la actividad en la tabla siguiente:

Conceptos matemáticos implicados	Triángulos y ángulos
Nivel educativo	2º ESO
Materiales	Un folio DIN A4
Objetivos	Se pretende que el alumno practique la suma geométrica de ángulos y compruebe o descubra manualmente la propiedad de la suma de los ángulos de un triángulo.
Pistas para los alumnos	¿Cómo se te ocuure que puedes sumar los ángulos del triángulo sin usar lápiz ni papel? Para sumar ángulos geométricamente (sin lápiz ni papel) debemos colocar los ángulos uno a continuación del otro.
Propuesta para el alumno	
1 .¿Cuánto suman los ángulos de un triangulo? Compruébalo utilizando un triángulo de papel. 2. Explica paso a paso cómo lo has hecho.	

En primer lugar, se transformará el folio DIN A4 en un triángulo cualquiera plegando el folio y quitando las partes sobrantes. Si fuera necesario, puede utilizarse la ayuda de unas tijeras para este paso.
Una vez se tenga el triángulo de papel, recortamos las esquinas del triángulo de papel con las manos.



Se toman las esquinas recortadas y se juntan en un punto todos los vértices de forma que:



4.9.2. Metodología

En esta actividad se trabajará una metodología individual de forma que cada alumno realiza la actividad individualmente para que, de esta manera, compruebe si es capaz de razonar esta demostración aparentemente sencilla que se plantea. De este modo, pone a prueba sus habilidades, destrezas y conocimientos adquiridos mientras el profesor sera el responsable de dirigir la actividad y aportar la ayuda a los alumnos a los alumnos que la soliciten.

4.9.3. Evaluación

Para saber si la actividad ha cumplido con los objetivos marcados y si los materiales empleados eran los adecuados, se evaluará en cada alumno los siguientes marcadores:

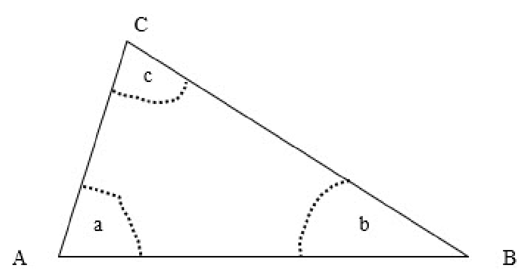
El alumno...	1	2	3	4	5
Conoce que la suma de los ángulos de un triángulo es 180º					
Es capaz de realizar la demostración sin ayuda del profesor					
Reconoce que la demostración es extrapolable a cualquier tipo de triángulo					

4.9.4. Posibles dificultades en el desarrollo de la actividad

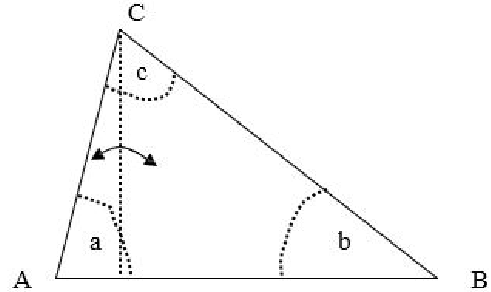
Durante el desarrollo de esta actividad pueden surgir la aparición de ciertas dificultades entre los alumnos. Se recoge en este apartado algunas posibles y la propuesta que se realiza para intentar solventarlas.

La demostración propuesta es bastante sencilla y fácil de comprobar visualmente, aun así, puede ser que la forma que se ha propuesto en el apartado *Planteamiento de la actividad* no resulte convincente para todos los alumnos. Por ello, se propone una segunda forma de resolver la actividad:

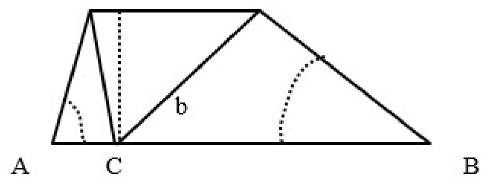
Se toma el folio y se transforma en un triángulo cualquiera. Se denominan a sus ángulos como a, b, c y se nombran sus vértices como A, B, C:



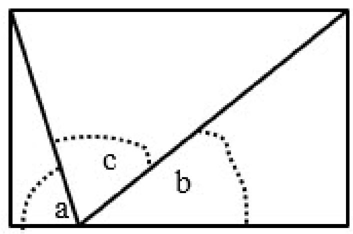
Se realiza un pliegue perpendicular al lado AB y que pase por C, que será una de las alturas del triangulo, en este caso desde el vértice C.



Se realiza un pliegue llevando el vértice C al punto intersección de la altura con la base del triángulo.



A continuación doblamos haciendo coincidir los vértices A y B con el C



Llegando así al resultado esperado, que es que la suma de los ángulos de un triángulo cualquiera es 180º.

4.10. Actividad 10. Transportador de ángulos

4.10.1. Planteamiento de la actividad

Esta actividad se dirige a alumnos de 3º-4º ESO de la asignatura de matemáticas académicas. En ella se trabajarán los siguientes contenidos establecidos en el currículo oficial de la Educación Secundaria Obligatoria correspondientes al bloque 3 de Geometría:

- Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes.
- Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos.

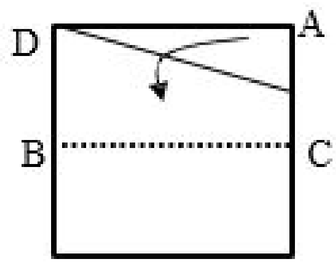
Se resume brevemente la información de la actividad en la tabla siguiente:

Conceptos matemáticos implicados	Noción de ángulo. Construcción de diversos ángulos.
Nivel educativo	3º-4º ESO
Materiales	Un cuadrado de papel
Objetivos	Percibir los siguientes elementos implicados en la construcción: Ángulo: región comprendida entre dos semirrectas Perpendicularidad y mediatriz. Triángulos rectángulos. Transportar distancias y ángulos. Medida de ángulos.
Pistas para los alumnos	Recordamos la definición de ángulos complementarios y suplementarios Teorema de Tales La suma de los ángulos de un triángulo es 180º.
Propuesta para el alumno	
1. Sigue las instrucciones indicadas para construir un transportador de ángulos 2. Desdobla los pliegues marcados y encuentra la medida de cada uno de los ángulos formados por los dobleces. Escribe los ángulos sobre los triángulos correspondientes en tu herramienta y guárdalo para utilizarlo posteriormente como referencia.	

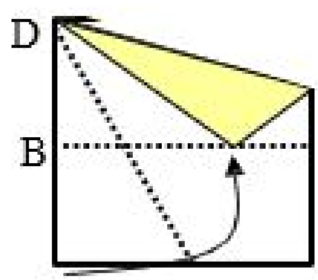
Para construir nuestro propio transportador de ángulos se seguirán los siguientes pasos:

1. Se toma una hoja de papel cuadrada, se dobla por la mitad realizando la mediatriz de uno de los lados del cuadrado, se marca bien el pliegue y se desdobla de nuevo.¿Cuál es la razón entre el largo y el ancho de cada rectángulo que se forma y el cuadrado completo? *Respuesta: El lado largo del rectángulo y el lado del cuadrado son del mismo tamaño. El ancho del rectángulo es la mitad del largo del cuadrado.*

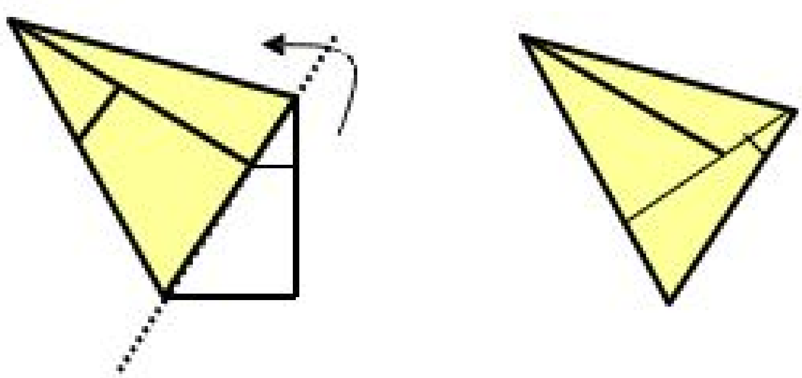
2. Se toma el vértice superior derecho y se realiza un pliegue de forma que dicho punto quede trasladado justo encima del pliegue realizado en el paso anterior. ¿Qué clase de triángulo acabas de construir?



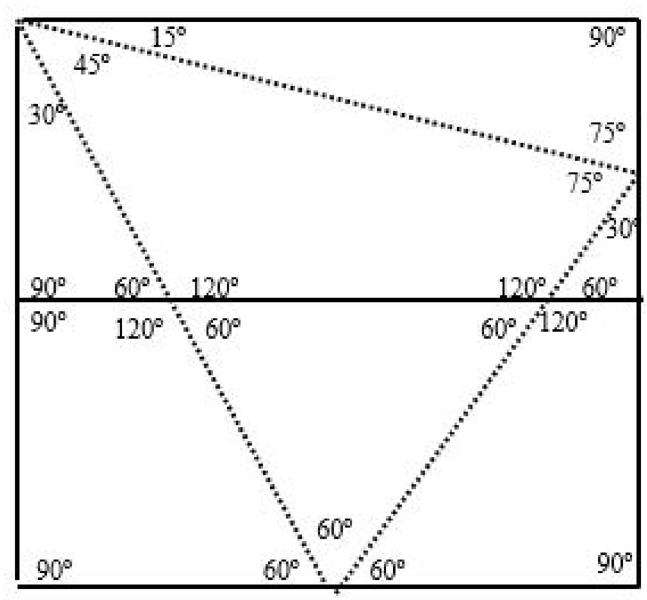
3. Se toma la esquina inferior izquierda y se traslada hasta que se una con la esquina superior derecha del cuadrado. Es muy importante que el doblez pase por el vértice D. ¿Qué clase de triángulo has formado? *Respuesta: Un triángulo rectángulo escaleno 30-60-90.*



4. Doblamos la base del triángulo tal como se indica en la figura. ¿Qué tienen en común todos los triángulos del dibujo? *Respuesta: Todos son triángulos rectángulos escalenos*



5. Se desdoblan todos los pliegues realizados y se identifican todos los ángulos formados en el mapa de pliegues. Se comienza identificando los ángulos mas sencillos a simple vista, como pueden ser los de 90º, y a partir de las relaciones entre triángulos se calculan todos los ángulos.



Una vez se tienen identificados todos los ángulos, es interesante realizar este paso a paso utilizando un papel más fino o trasladar el resultado obtenido a un papel transparente para así poder utilizarlo como un transportador de ángulos más cómodamente.

4.10.2. Metodología

Para esta actividad se propone una metodología grupal, en la que toda la clase trabajará a la vez siendo el profesor el que dirige la actividad. Los primeros pasos de la actividad son sencillos, pero queremos que los alumnos comprendan las relaciones entre triángulos que hay tras la realización de esos pliegues indicados en concreto. Por lo tanto, el profesor hará las aportaciones necesarias para que los alumnos comprendan cada paso realizado durante la actividad. Se validará el uso del transportador de ángulos fabricado utilizándolo en otras actividades.

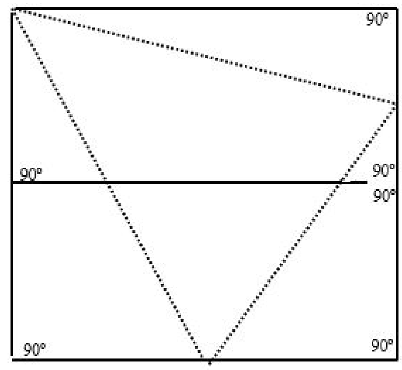
4.10.3. Evaluación

El alumno...	1	2	3	4	5
Es capaz de interpretar las instrucciones y obtiene el resultado esperado de forma autónoma					
Identifica y clasifica correctamente los distintos tipos de triángulos					
Aplica correctamente las propiedades conocidas de los triángulos					
Es capaz de hallar todos los ángulos marcados en el mapa de pliegues sin ninguna ayuda externa (regla, transportador, etc)					

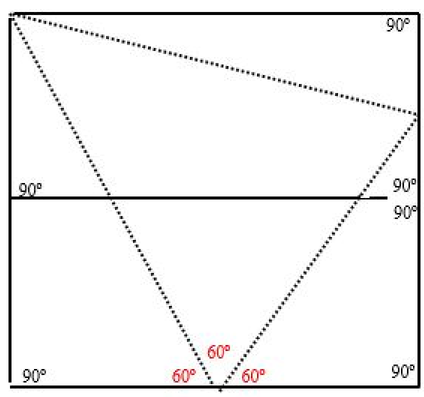
4.10.4. Posibles dificultades en el desarrollo de la actividad

En esta actividad, se considera que el punto que más dificultades puede provocar entre los alumnos es el de identificar todos los ángulos que se han creado en el mapa de pliegues. Por lo tanto, se indican a continuación una serie de pautas que se pueden llevar a cabo para que ese último paso resulte algo más sencillo.

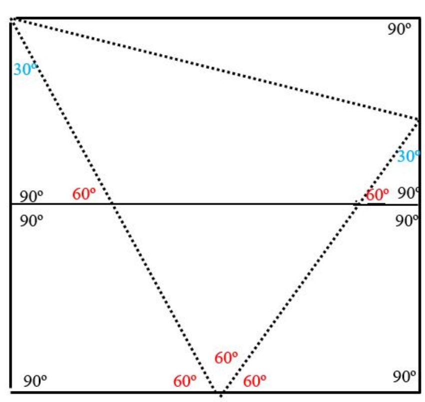
- En primer lugar se identifican los ángulos de 90º



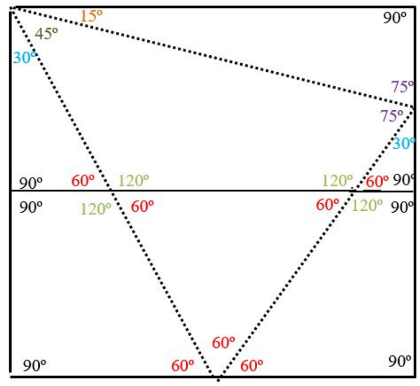
- Vemos en la parte inferior un ángulo de 180º dividido en tres partes iguales, por lo tanto, tendremos 3 ángulos de 60º. Si no se visualiza claramente que son ángulos iguales, plegamos uno sobre otro para comprobarlo.



- Ahora tenemos unos cuantos triángulos de los que conocemos dos de sus ángulos, por lo tanto, hallamos el tercero conociendo que la suma de todos los ángulos de un triangulo es 180º



- Por último, aplicamos las relaciones entre ángulos complementarios y suplementarios para hallar el resto de ángulos.



CAPÍTULO 5

Conclusiones

En este trabajo se muestra cómo es posible utilizar la papiroflexia cómo recurso didáctico en la asignatura de matemáticas, en este caso concreto, para alumnos de Educación Secundaria Obligatoria. La papiroflexia tiene numerosas ventajas para el alumno, sobre todo, en niveles educativos más bajos ya que ayuda al desarrollo cognitivo del alumno. En niveles más elevados, centrándonos sobre todo en la parte de geometría dentro de la asignatura de matemáticas, hemos comprobado que puede aplicarse de múltiples formas. Debemos tener en cuenta que es bastante común que los alumnos tengan dificultades para resolver problemas en los que tienen que aplicar una visión más espacial, cosa que la papiroflexia al ser un recurso manipulativo que ellos pueden manejar con facilidad, les puede ayudar a los alumnos a mejorar esos aspectos.

Se ha comprobado a lo largo del Capítulo 4 que se pueden crear numerosas actividades adaptadas a los distintos niveles de la ESO que cumplen con los contenidos establecidos en el currículo oficial de la Educación Secundaria Obligatoria, en las que en muchas de ellas simplemente se utiliza como material un simple folio. Destacaría este punto como uno de los más importantes, ya que el material necesario para realizar las actividades es muy económico y está al alcance de todos.

Además, se ha visto que se pueden utilizar metodologías muy variadas en este tipo de actividades, lo que hace que se sean muy versátiles y adaptables a cualquier tipo de unidad didáctica dentro bloque de geometría, que es el que nos centramos principalmente durante todo este trabajo. Sabemos que la enseñanza necesita un cambio radical, especialmente si hablamos de metodología y evaluación. En la actualidad, en bastante común que en la ESO se abuse de las clases magistrales como única metodología. Sin embargo en este trabajo vemos que es posible, incluso dentro de una temática tan concreta como es la utilización de la papipoflexia en actividades del bloque de geometría, variar las metodologías con las que se pongan en practica las distintas actividades. Esto es importante para mantener al alumno motivado y que vea más atractiva la asignatura de matemáticas, que suele ser una de las grandes asignaturas pendientes de nuestra educación.

Por otro lado, cabe destacar que el diseño de actividades de aprendizaje y enseñanza lleva consigo un gran trabajo, ya que al querer abordar diferentes niveles dentro de la ESO, relacionarlas con las competencias a desarrollar y sobre todo, plantearlas tal y cómo transcurrirían en el aula (incluso analizando los posibles problemas que pueden surgir en su desarrollo) para que se pueda comprobar su utilidad en la vida real es bastante complicado. Todo esto sin duda es un gran trabajo que recae directamente sobre el profesor que es el que debe buscar la forma de adaptar las actividades al temario, preparar las clases, y sobre todo, mantenerse en constante formación para estar al día de las nuevas metodologías, las herramientas tecnológicas etc., que le darán ventajas y le permitirán ayudar a los alumnos a comprender mejor el temario. Con este trabajo se pretende ayudar al docente dándole una serie de actividades adaptadas a distintos niveles que directamente preparadas para su desarrollo en el aula.

CAPÍTULO 6

Líneas futuras

Me hubiera gustado haber tenido la posibilidad de poner en práctica personalmente las actividades planteadas en el Capítulo 4, por lo tanto, como línea futura sería interesante comprobar en un aula de la ESO cómo reaccionan los alumnos al incluir este tipo de actividades y verificar realmente su utilidad.

Sería interesante, como labor de investigación, comparar los resultados académicos logrados en una clase de la ESO en la que se han incluido algunos de los ejercicios incluidos en este TFM con otra clase del mismo nivel en la que no se haya realizado dicha adaptación o con los resultados académicos de otros años de alumnos que hayan cursado ya ese nivel. Con esto se comprobaría la eficacia de este tipo de ejercicios y deja abierta la posibilidad de incluir otros recursos didácticos útiles dentro de la asignatura de matemáticas.

Bibliografía

[1] Royo Prieto, J.I. (2002). Matemáticas y papiroflexia *Revista matemática SIGMA Nº 21. págs. 175-192*

[2] Hatori, H. History of Origami https://origami.ousaan.com/library/historye.html

[3] Tramuns, E. (2019). Llega el origami científico. *Revista digital Muy Interesante* https://www.muyinteresante.es/ciencia/articulo/llega-el-origami-cientifico-25147314799

[4] Tramuns, E. (2016). El origami triunfa como terapia. *Revista digital Muy Interesante* https://www.muyinteresante.es/revista-muy/noticias-muy/articulo/el-origami-triunfa-como-terapia-981469775550

[5] Martín, B. (2015). La papiroflexia como recurso didáctico para las Matemáticas y el Arte. *Bernabé Martín - Educación, TIC y plástica* https://bermarez.com/papiro/43_mdulo_giroscopio.html

[6] García Díaz, A. (2017). Teoría de Galois tras el origami *Facultad de Ciencias. Universidad de La Laguna*

[7] Viso García, E. *Papiroflexia Modular*

[8] Número construible. (2019) *Wikipedia, La enciclopedia libre* https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=N%C3%BAmero_construible&oldid=120113806

[9] Contreras, J., del Pino, C. (2003). Acerca del problema de la trisección de un ángulo *Revista del Instituto de Matemática y Física. Universidad de Talca*

[10] Díaz Navarro, P. (2000). Fundamentos teóricos de la imposibilidad de algunas construcciones con regla y compás. *Revista digital Matemática. Educación e Internet.* https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/MundoMatematicas/Triseccion/node5.html

[11] Vargas Vargas, G., Gamboa Araya, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Revista digital Uniciencia* https://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia/index

[12] Hoi, A. (2016). Teorema de Kawasaki *Blog Origami Natural* https://naturalorigami.wordpress.com/2016/06/27/kawasakis-theorem/

[13] Editorial Dinosaurio (2015). La cuadratura del círculo y el Teorema Fundamental del Cálculo *Blog de divulgación matemática - entreparalelas* http://entreparalelas.blogspot.com/2015/09/la-cuadratura-del-circulo-y-el-teorema.html

[14] Contreras, J., del Pino, C. (2003). El problema de la Duplicación del Cubo *Revista del Instituto de Matemática y Física. Universidad de Talca*

[15] Hoi, A. (2016). Teorema de Maekawa *Blog Origami Natural* https://naturalorigami.wordpress.com/2016/06/27/the-maekawa-theorem/

[16] Tipos de pliegues y símbolos *Asociación Española de Papiroflexia* http://www.pajarita.org/

[17] Construcción grulla papel *Blog comohacerorigami.net* https://comohacerorigami.net/grulla-de-papel/

[18] MUÑOZ SANTOJA, J. (2020). IDENTIDADES NOTABLES CON PAPIROFLEXIA *Centro virtual de divulgación de las matemáticas (divulgaMAT)*
https://www.divulgamat.net/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=18379:mayo-2020-identidades-notables-con-papiroflexia&catid=77:juegos-matemcos&directory=67

[19] GRUPO PI (2009). GEOMETRÍA PLANA CON PAPEL *Universidad de Granada. Departamento de Didáctica de la matemática.*

[20] CHENG, HY (2013). FLEXING HONEYCOMB (ORIGAMI DESIGN) *Blog Abstract Art*
http://www.herngyi.com/blog/flexing-honeycomb-origami-design

[21] ROMÁN, S. (2016). ORIGAMI, EL ARTE DE DOBLAR *web mappingignorance*
https://mappingignorance.org/2016/12/02/origami-art-folding/