Departamento de didáctica de las matemáticas

MATEMAGIA: NÚMEROS Y ÁLGEBRA

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad de Matemáticas.

Alumno: Alberto García Cabrero

Tutores: Edgar Martínez Moro/ Philippe T. Gimenez

Valladolid, Julio 2021

ÍNDICE

1. Introducción

El aprendizaje del álgebra genera problemas a muchos alumnos en los primeros cursos de la ESO. Los profesores son conscientes de esta dificultad, pero afirman que a pesar de su gran esfuerzo y dedicación los alumnos no alcanzan el conocimiento algebraico necesario. Esto ha dado lugar a muchísimas investigaciones que estudien la problemática del álgebra, las causas que lo provocan y tratar de buscar las soluciones que palien dicha problemática.

Analizando las numerosas investigaciones se podría sintetizar los problemas del álgebra en tres tipos (Wagner y Parker, 1999): las intrínsecas al objeto, las inherentes al propio sujeto y aquellas otras que son consecuencia de las técnicas de enseñanza.

Respecto a las asociadas al objeto, estás son provocadas por la naturaleza del álgebra, su lenguaje, los elementos que los componen y las reglas que lo rigen. Las inherentes al sujeto tienen que ver con la complejidad que supone la abstracción y generalización, acciones fundamentales en el álgebra y que son las causantes de los problemas que tienen los estudiantes con el álgebra (Breiteig y Grevholm, 2006). Por último, están las dificultades del álgebra asociadas al tipo de enseñanza y este factor es destacable para algunos investigadores (Blanton y Kaput, 2005; Carpenter, Franke y Levi, 2003).

Si se analiza el párrafo anterior se observa que la dificultad asociada al objeto y sujeto es complicada de cambiar. Sin embargo, como docentes, lo que sí se puede cambiar es la metodología utilizada para tratar de potenciar el aprendizaje de nuestros alumnos.

La manera más tradicional de enseñar las matemáticas es un aula donde el docente explica y el alumno escucha y, además, el estudiante tiene una presencia pasiva en la clase. Con este trabajo se intenta motivar y favorecer el aprendizaje significativo del bloque números y álgebra, implantando un recurso novedoso conocido como *matemagia.* Para conseguir esto, se elaborará una serie de trucos de magia que servirán al docente para captar la atención de los alumnos, a la vez que se transmite el conocimiento y se profundiza en este.

Como acabo de comentar, utilizando este recurso se pretende, por un lado, incrementar el interés de los estudiantes, aumentando la participación en el proceso de enseñanza-aprendizaje y, por otro lado, ayudar a la comprensión de los fundamentos matemáticos, de manera que, el alumno comprenda mejor los conceptos a través de una herramienta llamativa e intuitiva como es la *matemagia.* tal y como mencionan Alegría y Ruiz (2002):

> *Magia y matemáticas han sido compañeros de viaje durante mucho tiempo. Tanto los magos como los matemáticos están motivados por el sentido de sorpresa que representa el misterio esencial del mundo. Los magos muestran tales hechos sorprendentes mientras que los matemáticos tratan de explicarlos: la ciencia de la ilusión versus la ilusión de la ciencia.*

Algunos autores defienden usar juegos en el aula como recurso educativo (Garcia,2013). Londoño (2004) señala que los juegos educativos permiten desarrollar y mejorar distintas habilidades y capacidades de la intervención educativa, además, de cumplir con la función recreativa. Martínez (2000) defiende que a través de la actividad lúdica y motivadora se logra captar el interés y la atención de los alumnos hacia la materia. Asimismo, Borges (2000) explica que el juego es un recurso fundamental para el desarrollo integral del estudiante, ya que, mediante él, el alumno adquiere conocimientos y habilidades y, sobre todo, brinda la oportunidad de conocerse a sí mismo, a los demás y al mundo que nos rodea. También Peña (2000) afirma que ayuda a los alumnos a socializarse y que desarrollan aptitudes favorables para su aprendizaje, tanto sociales como intelectuales. Además de estos autores, otros muchos se posicionan a favor de utilizar los juegos como herramienta didáctica, por lo que puede ser interesante plantear una metodología basada en un tipo de juego especial que es la magia.

Este documento se centrará en el bloque "*Números y Álgebra"* para los dos primeros cursos de la ESO, es decir, para primero y segundo. Cabe destacar la importancia indiscutible que plantea este tema, ya que es donde comienza el proceso de transición de la aritmética al álgebra, área que establece las bases para las matemáticas que va a estudiar el alumnado en los años siguientes. Además, en estos primeros cursos de la secundaria, desde mi punto de vista, es donde se define gran parte de las relaciones afectivas y emocionales hacia la asignatura, que condicionarán los resultados de los alumnos a lo largo de su paso por la etapa educativa. Por ello veo especialmente necesario trabajar la motivación y la creación de una buena perspectiva dentro de los alumnos, tópico en torno al cual girará este TFM.

Como se ha comentado anteriormente se usará el recurso de la *matemagia* para favorecer el aprendizaje de los alumnos y aumentar su motivación. Dicho recurso también podría ser implementado en geometría o en probabilidad, pero excede del ámbito de estudio del presente trabajo.

La estructura del trabajo es la siguiente:

1. Primer apartado. Introducción: Se han planteado los problemas que supone el álgebra para los alumnos de los primeros cursos de la ESO y la necesidad de motivarles mediante recursos, donde el alumno tenga una participación activa. Este trabajo se centrará en el recurso conocido como *matemagia*.

2. Segundo apartado. Justificación: Se explicará la necesidad de motivar a los alumnos y porque se produce la desmotivación. También se comentará las competencias que se desarrollan con el recurso de la *matemagia*.
3. Tercer apartado. Marco Teórico: Se mostrará la evolución de la magia a lo largo de la historia, qué relación tiene con las matemáticas, sus efectos y diferentes maneras de usarla en el aula.
4. Cuarto apartado. Contextualización: Se contextualiza para el centro donde se realizaron las prácticas. Se divide en dos partes:
    a) Contextualización didáctica
        - Características del centro y el alumnado
        - Objetivos
        - Metodología
        - Descripción y temporalización de los contenidos
        - Recursos
        - Evaluación
    b) Contextualización matemática. Se explicarán los fundamentos matemáticos que están relacionados con la colección de actividades mágicas que se ha planteado en el siguiente apartado (no se explican todos los contenidos del bloque números y álgebra).
5. Quinto apartado. Actividades propuestas: Se propondrá un conjunto de actividades de magia aplicables a las diferentes unidades didácticas del bloque y que resultarán realmente útiles para motivar y ayudar a la comprensión de los contenidos explicados en el aula.
6. Sexto apartado. Conclusiones: Se remarcarán las ideas más importantes del trabajo y se propondrá algunas líneas de investigación.

2. Justificación teórica

Esta metodología a implementar, conocida como *matemagia*, tienes dos finalidades claras: aumentar la motivación de alumnos hacia las matemáticas y, que en los alumnos se produzca un aprendizaje significativo, desarrollando diferentes competencias.

2.1. Motivación

2.1.1. ¿Qué es la motivación y tipos de motivación?

La motivación es un estado interno que dirige nuestros comportamientos y nos mantiene en algunas actividades. Así, aunque se aprenda una tarea, si no se está lo suficientemente motivado no se controlarán los procesos cognitivos voluntarios necesarios para llevar a cabo el aprendizaje. Por lo tanto, en el aula hay que tratar motivar a los alumnos y la habilidad del profesor será fundamental para conseguirlo.

Según las investigaciones de Maehr y Meyer (1997), la motivación está interaccionando con el aprendizaje y el rendimiento de diferentes maneras. Hay diversos estudios donde se demuestra que un alumno motivado aumenta su nivel de energía y de actividad, sucediendo también lo contrario. Las decisiones tomadas están en gran parte influenciadas por la motivación que tengan por cualquier asunto y las consecuencias que encuentren reforzantes. Entonces si un alumno, a pesar de las dificultades, persiste en la tarea a lo largo del tiempo es que está motivado, es decir, cuanto más tiempo dedique el alumno a realizar sus tareas académicas mayor será su rendimiento. Pero está claro que con el tiempo no es suficiente, los procesos cognitivos que despliega un individuo en la tarea son vitales para el aprendizaje y el almacenamiento a largo plazo.

Se puede hablar de dos tipos de motivación: motivación intrínseca y motivación extrínseca. Si la motivación se encuentra fuera del individuo, entonces se trata de una motivación extrínseca. Este tipo de motivación favorece en el aprendizaje ya que permite al individuo estar más tiempo realizando la tarea, pero al ser externa puede darse que busque el mínimo esfuerzo conductual y cognitivo para realizar la tarea. Sin embargo, si la motivación viene de dentro del individuo, porque le gusta, se tiene la motivación intrínseca. Este tipo de motivación es mucho más potente ya que el individuo puede realizar la tarea por iniciativa propia, presentar mayor tolerancia a la frustración, mejorar su rendimiento o buscar indicadores que evalúen forma de proceder para mejorar su eficacia y su ejecución. En las aulas es habitual que los estudiantes empiecen muy motivados y a medida que avanza el curso, vayan perdiendo gradualmente la motivación. Será habilidad del docente intentar mantener la motivación a lo largo de todo el curso.

2.1.2. ¿Causas de la desmotivación?

Son varios los factores que provocan que los alumnos no les guste las matemáticas. Muchos autores, como Carrillo (2009) y Swam (2004) consideran tres factores los principales causantes de la desmotivación: naturaleza de las matemáticas, profesor y el alumno.

Naturaleza de las matemáticas:

Los conceptos matemáticos: Muchas veces los conceptos que se quieren transmitir requieren de una gran abstracción por parte del alumnado lo que dificulta su aprendizaje. Este problema queda muy patente en el primer ciclo de la ESO, con el paso de la aritmética al álgebra. El docente debe ser consciente de ello e intentar utilizar diferentes recursos para motivar a los alumnos y facilitarles la adquisición de los conocimientos.

Estructura jerárquica del conocimiento: En la gran mayoría de las ocasiones es necesario para comprender un nuevo contenido, entender y comprender los conocimientos previos, como si los conocimientos estuviesen enlazados constituyendo una cadena. Esto quiere decir que si un alumno no entiende algún concepto es posible que éste, más adelante, vuelva a aparecer provocando que el alumno no entienda la explicación y se desmotive.

Lenguaje matemático: El lenguaje formal de las matemáticas es distinto a la lengua natural que se está habituado. Esto puedo provocar problemas de interpretación que harán más difícil la asignatura.

El docente:

El profesor puede tener un efecto negativo en los alumnos provocando que estos se desmotiven con las matemáticas.

Metodología: En las metodologías tradicionales apenas hay comunicación entre el alumno y el profesor. Como consecuencia, el alumno tiene una presencia pasiva en su aprendizaje afectándolo, ya que percibe las clases como aburridas. Además, el alumno comprende y profundiza mejor los conocimientos con metodologías más activas donde se encuentre más motivado y pueden realizar debates o utilizar diferentes recursos académicos.

Ritmo de trabajo: Es bien conocido que el temario de las asignaturas es muy extenso y esto dificulta la capacidad de profundizar en los diferentes conceptos. No obstante, es vital que el profesor sea capaz de marcar un ritmo que no sea demasiado lento para poder abordar el temario pero que no sea muy alto porque provocaría que la gran mayoría de los alumnos no entendiesen los conocimientos y se desmotivasen.

Efecto Pigmalión: Este efecto está relacionado con el hecho que la expectativa que tienen los demás sobre un individuo afecta en su propio rendimiento, es decir, si un profesor tiene una baja expectativa sobre un alumno esto le influye negativamente y viceversa, afectando sobre la motivación o desmotivación del alumno. (Rosenthal, R. y Jacobson, L,1968).

El alumno:

El propio alumno juega un papel relevante en la desmotivación. Destacan dos factores relacionados con el alumno:

Desarrollo cognitivo: Son dificultades que surgen a raíz de problemas como: las posibles alteraciones neuronales, proceso madurativo lento, alteraciones en la estructuración espacio-temporal, etc.

Creencias sobre las matemáticas: Las creencias que los alumnos desarrollan ante las matemáticas suelen ser un gran obstáculo a la hora de enseñarlas. Esto, se debe a que influyen en gran medida, en la motivación de los alumnos (Gómez-Chacón, Op't y De Corte, 2006). Las creencias sobre las matemáticas más habituales en los estudiantes son:

- Sólo hay una manera de hacer las cosas.
- Son abstractas.
- Son aburridas.
- No tienen relación con el mundo real.
- Hay que tener habilidades especiales para entender las matemáticas.

Después de observar todos los factores que influyen en la desmotivación de alumnado, se observa que hay algunos aspectos en los cuales, como docente, se puede influir para intentar conseguir la motivación de los alumnos. Éstos son tales como la metodología, que se utilizará para transmitir el conocimiento; el ritmo de trabajo, que se impartirá en la clase o, las expectativas que se tendrán de nuestros alumnos.

Los docentes deben tener en cuenta que no todos los alumnos tienen el mismo desarrollo cognitivo y tienen que adaptarse a la diversidad del alumnado, sin embargo, es cierto que en la mayoría de los casos, los profesores no tienen los recursos suficientes para que el seguimiento sea individualizado, pero si es aconsejable llevar un ritmo de trabajo adaptado a la clase y utilizar recursos manipulativos o visuales para favorecer el aprendizaje de todos los alumnos y fomentar la inclusión total en el aula. Esto último, es debido a que no todos los alumnos aprenden de la misma manera, existiendo estudiantes a los que les favorece un aprendizaje más visual o manipulativo que la forma tradicional de enseñanza. Por consiguiente, lo ideal sería enseñar de diferentes maneras para poder adaptarse a la mayoría de los alumnos. Por otro lado, hay otros factores, como la naturaleza de las matemáticas, que son más complicados de paliar.

2.1.3. Función del profesor para mejorar la motivación del alumno

Desde este punto de vista, el profesor debe plantearse un triple objetivo en su acción motivadora, (Martinez-Salanova,2001):

- Suscitar el interés
- Dirigir y mantener el esfuerzo
- Lograr el objetivo de aprendizaje prefijado

La motivación no debe ser solo el principio, en la actividad inicial, sino que debe mantenerse hasta el final y, ser el punto de partida de nuevas motivaciones para nuevos procesos, si el proceso de aprendizaje tiene éxito.

Por ello, es más importante crear interés por la actividad que por el mensaje, para lo que hay que tener en cuenta los intereses de los alumnos y conectarlos con los objetivos del aprendizaje. No todos los estudiantes se motivan por igual, por lo que es realmente importante buscar y llevar a cabo actividades motivadoras que produzcan una mayor participación del alumnado.

Éste, se encuentra más y mejor motivado cuantas mayores experiencias vive en el aula. Es bastante habitual escuchar que en situaciones de aprendizaje es más importante los procesos que los resultados. Aspecto, que en definitiva, se debe a que los procesos permanecen siempre y son clave para estar motivados en posteriores aprendizajes.

En el presente trabajo se llevará a cabo una metodología activa con la que se espera motivar al alumnado, atendiendo en todo caso a la diversidad y, apoyándose especialmente en un recurso: la *matemagia*. A través del mismo, no solo se busca motivar a los alumnos de forma inicial con el truco de magia, sino que éstos tendrán que reflexionar y comprender el fundamento matemático del truco, el cual, estará relacionado con contenidos del tema. Además, el docente se apoyará de la actividad de magia para seguir profundizando en la materia, pudiendo proponer a sus alumnos que se inventen otro truco similar que se explique con las propiedades matemáticas que se están aprendiendo fomentado la creatividad.

2.2. Competencias abordadas

Mediante el uso de la *matemagia* se ayuda a que los alumnos alcancen unas competencias básicas como son:

1. *La competencia en comunicación lingüística:* Los alumnos deberán debatir cual creen que es el fundamento matemático detrás del truco de magia realizado por el profesor.

En algunos casos, el docente les propondrá inventarse otro truco de magia, relacionado con las propiedades explicadas en clase, y presentarlo, produciendo un beneficio también en su autoestima.

2. *La competencia de aprender a aprender:* Será el propio alumno el que desarrollará un pensamiento crítico y reflexivo para averiguar dónde está la propiedad matemática utilizada por el profesor y, que le permite explicar dicho fenómeno.
3. *La competencia social y cívica:* A través del trabajo cooperativo tratarán de intercambiar puntos de vista para adivinar porque siempre se cumple el truco que realiza el docente.
4. *Competencia de autonomía e iniciativa personal:* Serán los alumnos los que elaboren sus propios trucos de magia a través de los conocimientos y propiedades matemáticas aprendidas en clase y siguiendo como modelo el juego mágico desarrollado por el docente previamente.
5. *La competencia matemática:* Está competencia está clara que se desarrollará a lo largo de toda la asignatura y, como se ha comentado, se utilizará la *matemagia* para potenciar su adquisición.

Otras competencias, como *la competencia digital* y *la competencia básica en expresión cultural y artística,* se trabajarán en menor profundidad a través de esta metodología. Aunque sí se podrá mandar que los alumnos investiguen sobre algún mago famoso, teniendo que buscar en internet información.

3. Marco Teórico

3.1. Evolución histórica de la magia

Las matemáticas y la magia han sido compañeras de viaje durante mucho tiempo. Los magos y matemáticos siempre han estado motivados por el sentido de la sorpresa que representa el misterio esencial del mundo. La diferencia es que los magos muestran tales hechos sorprendes y, en cambio, los matemáticos tratan de explicarlos. Esto es lo que se conoce como la ciencia de la ilusión contra la ilusión de la ciencia; se podría decir que esta la ciencia de la ilusión frente la ciencia de la ilusión. Arthur Clarke, escritor de ciencia ficción, decía que una tecnología suficientemente avanzada es indistinguible de la magia.

En la época pitagórica, los números venían más relacionados con cualidades místicas que con el ilusionismo (Alegría y Ruiz, 2002). En esa época ya se hacían estudios que afectaban a los números utilizando las configuraciones que formaban las piedras. Descubrimientos como la terna pitagórica o los cuadrados mágicos, lograron, en esa época, expandir la idea de que los números tienen poderes mágicos. Los sucesivos avances en el estudio de los números y las propiedades relacionadas con ellos han provocado que las sociedades más cultas ya no crean en tales propiedades místicas y, únicamente los utilicen en un ambiente más folclórico.

En la Edad Media, Fibonacci (1170 – 1250) consiguió asombrar a sus contemporáneos hasta llegar al punto que el emperador Federico II le proclamó Stupor Mundi (Asombro del mundo). Para ello, se valió de unas matemáticas numéricas que aprendió de los árabes.

En el siglo XIX, Charles Dogson, también conocido como Lewis Carroll, utilizaba trucos y puzles numéricos que hoy en día son utilizados por magos para sus actuaciones. Charles Dogson es matemático, sin embargo, poca gente lo sabe y solo lo conocen como el autor de "Alicia en el país de las maravillas".

En el siglo XX, se produjo el despegue de la magia debido a la magia de cartas (cartografía). En este periodo destaca el periodista Martin Gadner (1941-2010) quien recopiló muchos trucos de magia que estaban estrechamente relacionados con las matemáticas. Gadner afirmaba en su libro Mathematics, Magic and Mystery (1956) que la magia tiene su propio encanto ya que combinaba la belleza de las estructuras matemáticas con el valor de entretenimiento de los trucos de magia. La magia fue la más temprana y principal afición que tuvo y debido a su gran generosidad, por compartir sus trucos, y dedicación apareció en la revista MAGIC Magazine (junio de 1999) como uno de los cien magos más influyentes.

Actualmente en España, se puede destacar a Juan Tamariz (Madrid, 1942), que es considerado uno de los mejores magos del mundo, y que ha realizado juegos que se basan en propiedades matemáticas y que son conocidos como juegos automáticos. También destacan docentes de matemáticas que son expertos en *matemagia*, como Pedro Alegría o Fernando Blasco, entre otros.

Hoy en día, los grandes avances tecnológicos ofrecen muchas herramientas que, utilizadas convenientemente, permiten conseguir efectos sorprendentes, inexplicables o, incluso, milagrosos.

3.2. Relación magia y matemáticas

El mundo relacionado con la magia suele estar repleto de sorpresas e ilusión y, mediante engaños o astucia suelen hacerse cosas impensables. En el ámbito escolar a veces sucede lo mismo cuando el estudiante se encuentra en la clase de matemáticas. La sensación que provoca un mago en el público cuando hace desaparecer un elefante en medio del teatro puede equipararse a la de un alumno cuando se enfrenta a un problema del tipo,

> *"un padre y dos hijos están peleándose porque cuando el hermano mayor tenía la edad del hermano menor, la suma de las tres edades era el portal de la casa donde vivían, y cuando el hermano menor tenga la edad del mayor, el padre ya se habrá jubilado".*

El alumno observa como el docente resuelve el problema sin dificultades como si lo realizase utilizando magia.

La realidad de todo esto, es que muchos magos utilizan propiedades matemáticas para resolver sus trucos de magia. Es sabido por todos que la magia produce una gran fascinación en la mayoría de la gente, tanto jóvenes como adultos, y lo interesante es usar este interés de los individuos por la magia para atraer la atención de los estudiantes en clase. No se tiene que olvidar que en todo espectáculo de magia el espectador está rodeado de ambiente de misterio y sorpresa, que hace que se encuentre receptivo a todo lo que se encuentra. Además de captar la atención de los alumnos, el docente debe escoger adecuadamente los trucos de magia, que se basen en propiedades matemáticas, y que sirvan para explicar o introducir un contenido asignatura. La ventaja de los trucos de magia es que están fundamentados, en general, en propiedades matemáticas muy simples como son cálculos aritméticos, combinatorios y desarrollos de algebra sencillos.

Entonces si la magia es el arte o ciencia que permite hacer cosas sorprendentes y admirables, se puede considerar la *matemagia* como la ciencia que se basa en las matemáticas para realizar cosas asombrosas y extraordinarias.

En este trabajo se presentarán trucos sobre números primos, divisibilidad, potencias, sistemas de enumeración, propiedades aritméticas…

3.3. Magia como recurso educativo

El recurso de la *matemagia* puede usarse en una clase de diferentes maneras entre las que destacan:

1. La magia como recurso para motivar a los alumnos

Está claro que los alumnos solo pueden aprender si realmente están dispuesto a aprender (Vaello, 2007). Pero estas ganas de aprender no surgen sin hacer nada, sino que tiene que ser el propio docente el que favorezca que ocurra. Bajo este contexto es cuando la magia cobra especial importancia, logrando momentos asombros en la clase, provocando clases más dinámicas, de modo que los estudiantes encuentran más divertido el aprendizaje de las matemáticas. Con todo esto, además, se consigue una mayor participación, motivación y, están más dispuestos a aprender.

2. La magia para captar la atención de los alumnos

Además de la motivación, los alumnos necesitan estar atentos para poder aprender. Para conseguir está atención, la *matemagia* es un recurso brillante, pues los alumnos estarán prestando toda su atención para intentar descubrir por qué ocurre el truco de magia y, una vez se tiene esta atención todo lo que suceda minutos después será atentamente estudiado y escuchado por ellos (Ruiz, 2015).

3. La magia como entretenimiento entre actividades

Otra manera de usar este recurso es entre actividad y actividad. En vez de estar hablando los alumnos entre ellos, se pueden realizar varios trucos de magia y sin darse cuenta estarán, además de entreteniéndose y pasando un rato agradable, aprendiendo fundamentos matemáticos. El motivo es que los trucos de magia les asombran y querrán entender cómo funcionan para poder aprenderlos y hacérselos a sus amigos, familia… y ahí es donde entran las matemáticas.

4. La magia como un premio para el alumno

Está es una manera muy útil de conseguir motivar a los alumnos y que estén atentos en clase. Se les puede ofrecer que, si tienen un buen comportamiento y participan en la sesión, al terminar la clase se realizará un truco de magia o se explicará cómo funciona un determinado truco hecho previamente (fundamentos matemáticos). Estas actividades no solo pueden usarse en el aula, sino también en los recreos enseñándoselos a otros estudiantes (Casas, 2014).

5. *La magia para introducir un nuevo tema*

En vez de introducir un tema como siempre, se puede realizar una actividad de magia que utilice los fundamentos matemáticos de esa unidad didáctica y a partir del truco de magia, y su explicación matemática, empezar a desarrollar el contenido del tema. Es una manera ingeniosa de motivar al alumno y de empezar a explicar un contenido de una manera diferente y siempre más llamativa.

6. *La magia para relacionar las matemáticas con el mundo real*

La magia puede ayudar a acercar las matemáticas al mundo real ya que los alumnos si que asocian, fácilmente, la magia con el mundo real. Por lo tanto, si se usan trucos de magia con fundamentos matemáticos, los alumnos inconscientemente estarán presenciando una utilidad de las matemáticas en el mundo real.

3.4. Efectos de la magia educativa

Como ya se ha mencionado en la justificación, el uso del juego de magia puede ayudar a desarrollar y crecer determinadas competencias y valores. Además, este recurso no puede afectar únicamente a los alumnos, sino también a los propios profesores. Respecto a los alumnos, les aporta novedades didácticas que promueven y potencian el aprendizaje innovador frente a los habituales procesos de enseñanza (Rodríguez, 2015). Respecto al profesorado, les proporciona recursos para la motivación, un factor clave para lograr el aprendizaje, puesto que la motivación no solo se refiere a los estudiantes sino a los propios profesores.

Muchas veces, los estudiantes no se interesan por la asignatura porque no ven ninguna utilidad a lo que están aprendiendo, no entienden lo que se está intentando explicar, y esto puede provocar que el docente pierda la motivación. Utilizando juegos de magia, el profesor estará modernizando e innovando su enfoque de la enseñanza, usando metodologías diferentes a las habituales. Esto da lugar a que la clase sea más dinámica, produciendo la motivación de los alumnos.

Asimismo, los juegos de magia desarrollan el pensamiento crítico y creativo de los alumnos. Cuando el docente realiza un juego, el alumno despierta un interés por querer hacerlo, por lo tanto, realiza suposiciones acerca de cómo se desarrolla correctamente y cuáles pueden ser las soluciones posibles. También, cuando tratan de realizar un truco de magia, crean sus propias historias a la hora de presentarlo, dando lugar al desarrollo de su creatividad.

En particular, el uso de las matemáticas a través de la magia desarrolla y mejora el pensamiento matemático de los alumnos. Utilizando los juegos de magia, se consigue que los alumnos disfruten de las matemáticas de una manera más recreativa provocando una actitud positiva hacia las matemáticas, presentándolas de una manera más atractiva (Corbalán,1994).

Por otro lado, realizar y ejecutar trucos de magia ayuda a mejorar la comunicación lingüística de los alumnos. Esto es debido a que los estudiantes tienen que presentar oralmente los juegos de magia y debatir con los demás estudiantes de la clase cuales son las propiedades matemáticas que rigen dicho truco. Además, los alumnos ganan seguridad y confianza, perdiendo el miedo a realizar exposiciones en público.

Otra competencia que se trabaja es el desarrollo de las habilidades sociales de los alumnos, así como el aumento de la autoestima. La realización de los juegos en clase favorece a las relaciones entre los alumnos, otorgándoles seguridad y les ayuda a expresarse mejor (Monescillos, 2013).

Con los juegos de magia también se trabaja el pensamiento crítico ya que cuando los alumnos observan un truco comienzan a hacerse preguntas de manera espontánea como pueden ser: ¿cómo lo ha hecho? ¿Y si hubiera usado esto?... Esto es un mecanismo que está asociado a la necesidad esencial de comprender el entorno para ser capaz de interactuar con él (Ruiz, 2015). Además, cuando se desarrolla un juego de magia, los estudiantes se encuentran en alerta, analizando cada movimiento, favoreciendo a desarrollar la atención de los alumnos. En este contexto, Ruiz (2015) explica que los alumnos captan mejor los mensaje e ideas durante estos instantes y que perduraran durante más tiempo que si simplemente escuchan al docente en una clase tradicional. Por esto, el empleo de la magia por parte del docente puede generar más influencia en los alumnos, pudiéndose aprovechar para transmitir valores, evitar malas conductas, promover los buenos hábitos…

3.5. Implementación de la matemagia en la escuela

En una revista de didáctica se llevó a cabo la implementación de la matemagia para el segundo ciclo de la educación primaria y para medir el impacto se realizaron encuestas dirigidas tanto a los alumnos como a los docentes. Los resultados indicaron que la *matemagia* es un recurso muy interesante ya que se promueve la curiosidad, la creatividad y el espíritu crítico. También afirmaron que mejoraron los resultados de aprendizaje y el ambiente en las aulas (Cézar y Serrano, 2015).

Algunos de sus resultados se pueden ver en las figuras de abajo, donde se analiza la motivación por parte del alumnado.

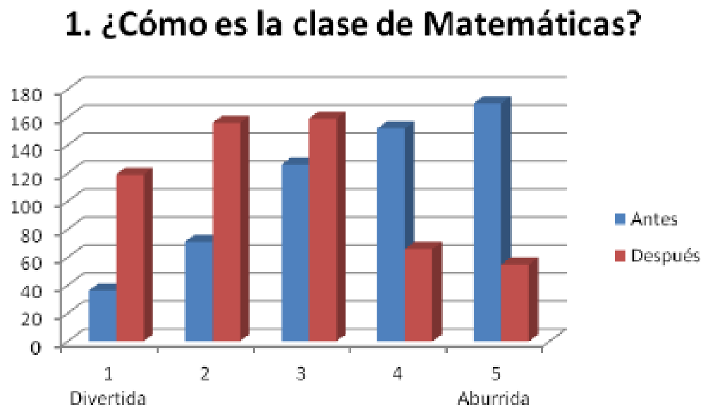

Figura 1. Comparación del nivel de entretenimiento de las clases de matemáticas (Cézar y Serrano, 2015)

Figura 2. Comparación del grado de realización de las actividades (Cézar y Serrano, 2015)

Los docentes, en sus clases, observaron los beneficios de la *matemagia*, ver figura 3.

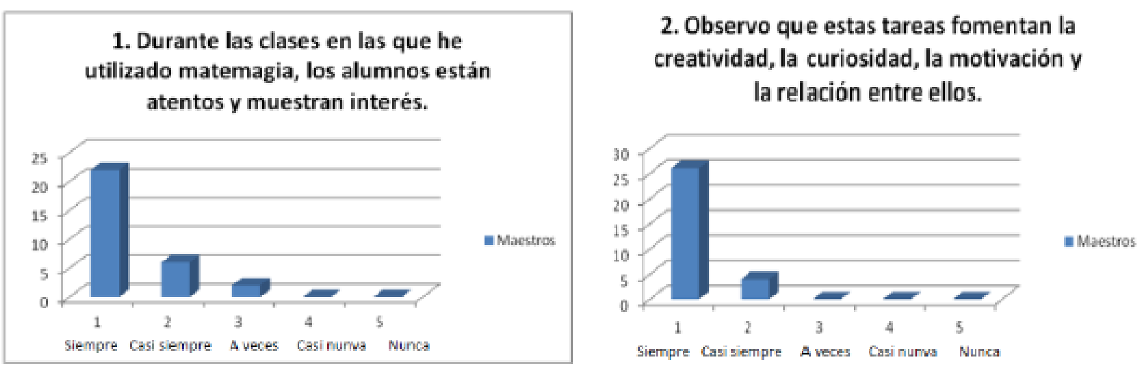

Figura 3. Aportación de la Matemagia (Cézar y Serrano, 2015)

Los docentes estaban de acuerdo que apenas había supuesto un esfuerzo extra preparar las clases y que tenían pensado seguir utilizando la *matemagía* en el futuro, ver figura 4.

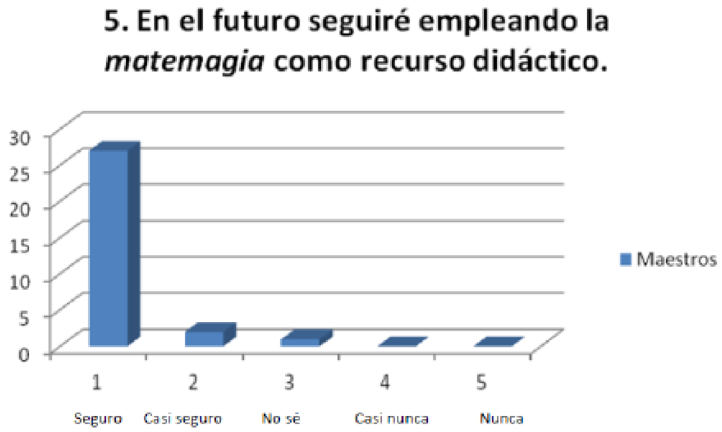

Figura 4. Intención de utilizar la Matemagia en el futuro (Cézar y Serrano, 2015)

Como se dijo antes, este estudio se realizó para niños y niñas del segundo ciclo de educación primaria. La muestra fue de 8 colegios donde participaron 555 alumnos y 30 maestros.

La idea es hacer un estudio similar, pero para alumnos de primero o segundo de la ESO. Se trata de realizar hacer la investigación en dos clases donde yo sea el docente (del mismo curso), y utilizar una clase de control donde se explica el contenido del bloque *números y álgebra* utilizando el método tradicional (*sin matemagia*) y luego el otro grupo es el experimental y es donde se explica el mismo temario a través de la *matemagia.*

Para poder analizar los resultados y poder sacar conclusiones se ha pensado utilizar un método mixto (método cuantitativo y cualitativo):

I. *Método cuantitativo:* Se realiza un pretest-postest en ambas clases. Estos test se llevan a cabo en ambos grupos y nos aportan información sobre la motivación y la comprensión del algebra de cada grupo (antes y después).
   a. Test emocional de Maslow (anexo 1)
   b. Test de comprensión de álgebra
II. *Método cualitativo:* Se realizan una serie de entrevistas para obtener información sobre que trucos les ha gustado más, si consideran más divertidas las clases y si sienten que asimilan mejor los conceptos. Además, el docente, con el permiso de los alumnos, graba las clases para poder obtener más información y con ello rellenar los cuestionarios, ver anexos 2 y 3.

Ahora bien, esta idea no fue posible llevarla a cabo en el *Practicum*, puesto que por asuntos laborales, solamente me era posible asistir por las tardes y, los únicos cursos que asistían en tal horario eran primero y segundo de bachillerato. Así las cosas, este estudio quedaría como una propuesta de investigación para el futuro y, se intentaría concluir si realmente la *matemagia* es tan interesante como *a priori* parece para los primeros cursos de la ESO.

4. Contextualización

4.1. Contextualización didáctica

Las actividades, utilizando el recuso de la *matemagia*, que se propondrán en el apartado 5 se contextualizarán en el centro donde realice el periodo de prácticas. Como he comentado a lo largo del trabajo estos recursos se centrarán en los dos primeros cursos de la ESO y se escoge, en particular, segundo de la ESO para el bloque de números y álgebra. Esta contextualización educativa se ha estructurado de la siguiente manera:

1. Características del centro y los alumnos
2. Objetivos generales
3. Metodología
4. Descripción y temporalización de los contenidos
5. Recursos
6. Criterios de evaluación

4.1.1. Características del centro y el alumnado del centro

El IES María Moliner está situado en la calle Tormes en Laguna de Duero, Valladolid. El IES María Moliner se crea en 1998 como consecuencia directa del espectacular crecimiento demográfico de la localidad, que anteriormente contaba con un único centro de educación secundaria, el IES Las Salinas. Desde su nacimiento, el IES María Moliner es un centro lleno de iniciativas pedagógicas y conciben la educación como un instrumento esencial para mejorar la vida de las personas.

La organización del centro es la que se presenta en la figura 5, consta de: Equipo directivo, orientación, actividades extraescolares, consejo escolar, claustro, personal no docente, AMPA y el alumnado.

Figura 5. Organización del Centro (webgrafía)

El horario ha variado respecto a otros años debido a la pandemia mundial. Por la mañana tienen clase los alumnos de la ESO con un horario de 8:30 hasta 14:20 y por la tarde tienen clase los alumnos de bachillerato con un horario de 15:30 a 21:20.

Las enseñanzas que se imparten son:

- Educación Secundaria Obligatoria (primero, segundo, tercero y cuarto)
- Programa PMAR en segundo y tercero de la ESO.
- Bachilleratos de Humanidades y Ciencias Sociales.
- Bachilleratos de Ciencias.
- Ciclo formativo de Grado Medio de “Instalaciones Eléctricas y Automáticas”.

Respecto a las instalaciones el centro María Moliner destaca por constar de aulas específicas de idiomas (inglés y francés), música, plástica, dibujo e informática. También tiene laboratorios diferenciando entre laboratorios de física, química, biología y geología. Por otro lado, contienen aulas con talleres de tecnología, automatismos y domótica. Además, el centro también dispone de sala de audiovisuales con pizarra digital, gimnasio y pistas polideportivas. Por último, todas las aulas del centro disponen de ordenador, proyector, altavoces y software de pizarra digital.

En lo que se refiere al perfil económico y sociológico del alumnado, éste procede mayoritariamente de un sector social de clase media formado por familias tradicionales, biparentales, que tienen un status económico acomodado, que dirigen sus expectativas académicas a obtener un título universitario y que muestran un alto grado de satisfacción con el instituto.

En cuanto a la convivencia escolar, por lo que he podido ver durante mis siete semanas en el centro es razonablemente buena. Algunos de los problemas de convivencia que personalmente he detectado durante el periodo de prácticas han sido:

1. En algunos momentos hay excesivo ruido en los pasillos por parte de los alumnos que permanecen fuera de las aulas mientras llega el profesor correspondiente.
2. Ciertos alumnos que no asistían a algunas clases, sobre todo los viernes a última hora.
3. En algunas ocasiones se ha tenido que esperar a algún estudiante para empezar la clase provocando retrasos.
4. Ciertas faltas de comportamiento en clase como es masticar chicle o faltarse el respeto entre alumnos.

4.1.2. Objetivos

Objetivos generales

Siguiendo lo establecido en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, se contribuirá a desarrollar en el alumnado las capacidades que le permitan:

1. Asumir sus deberes; conocer y ejercer sus derechos; practicar el derecho, la tolerancia, la cooperación y la solidaridad; ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato, como valores comunes de una sociedad plural, y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.
2. Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo para las tareas del aprendizaje y el desarrollo personal.
3. Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades. Rechazar cualquier tipo de discriminación, así como los estereotipos que derivan de ella y sus manifestaciones violentas.
4. Fortalecer sus capacidades afectivas y resolver conflictos pacíficamente, rechazar la violencia, los prejuicios y los comportamientos sexistas.
5. Desarrollar habilidades en el uso de las fuentes de información con sentido crítico. Adquirir una preparación básica en el mundo de las tecnologías.
6. Concebir el conocimiento científico como un saber integrado estructurado en disciplinas.
7. Conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento.
8. Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en uno mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.
9. Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la comunidad autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.
10. Comprender y expresarse en una o más lenguas de manera apropiada.
11. Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura, así como el patrimonio artístico y cultural.
12. Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, y contribuir así a su conservación y mejora.

13. Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

<u>Objetivos del área de matemáticas a las enseñanzas de 2º ESO (bloque 2)</u>

Siguiendo lo dispuesto en la ORDEN EDU/362/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León, se contribuirá a desarrollar en los alumnos y las alumnas las capacidades que les permitan.

Bloque 2: Números y álgebra

1. Utilizar y aplicar de manera práctica números naturales, enteros, fraccionarios, decimales y porcentajes sencillos, sus operaciones y propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria.
2. Conocer y utilizar propiedades y nuevos significados de los números en contextos de paridad, divisibilidad y operaciones elementales, mejorando así la comprensión del concepto y de los tipos de números. Aplicación de estos conceptos en situaciones de la vida real.
3. Desarrollar, en casos sencillos, la competencia en el uso de operaciones combinadas como síntesis de la secuencia de operaciones aritméticas, aplicando correctamente la jerarquía de las operaciones o estrategias de cálculo mental. Reconocer los paréntesis como elementos que permiten modificar el orden de ejecución de las operaciones.
4. Elegir la forma de cálculo apropiada (mental, escrita o con calculadora), usando diferentes estrategias que permitan simplificar las operaciones con números enteros, fracciones, decimales y porcentajes y estimando la coherencia y precisión de los resultados obtenidos.
5. Elegir la forma de cálculo apropiada (mental, escrita o con calculadora), usando diferentes estrategias que permitan simplificar las operaciones con números enteros, fracciones, decimales y porcentajes y estimando la coherencia y precisión de los resultados obtenidos.
6. Analizar procesos numéricos cambiantes, identificando los patrones y leyes generales que los rigen, utilizando el lenguaje algebraico para expresarlos, comunicarlos, y realizar predicciones sobre su comportamiento al modificar las variables, y operar con expresiones algebraicas.
7. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar y resolver problemas mediante el planteamiento de ecuaciones de primer, segundo grado y sistemas de ecuaciones, aplicando para su resolución métodos algebraicos o gráficos y contrastando los resultados obtenidos.

Objetivos relacionados con la matemagia

Además de los objetivos propios de la asignatura, se tienen otros objetivos relacionados con las posibilidades didácticas de la *matemagia*:

1. *Objetivo Personal:* Mediante el recurso de la *Matemagia* conseguir motivar a los alumnos en el bloque de números y álgebra, y que ayude a transmitir los contenidos de ese bloque.
2. *Objetivo Práctico:* Generar un nuevo recurso didáctico (elaborar una serie de trucos de magia) para emplear en clase para el bloque de números y algebra en el curso de segundo de la ESO.
3. *Objetivo Intelectual*: Analizar el impacto de la *matemagia* en el rendimiento de los alumnos.

Con este recurso se quiere contribuir a desarrollar las competencias básicas incluidas en el currículo de Educación Segundaria y Bachillerato vigentes en este momento en España. El diseño de las actividades actúa especialmente sobre la competencia afectiva, y sobre la competencia matemática, en los aspectos de esta última que se detallan a continuación:

1. Se desarrollan hábitos de reflexión, iniciativa personal, sentido crítico, curiosidad y creatividad en el aprendizaje.
2. Utilizar técnicas y estrategias personales para el cálculo mental.
3. Desarrollar una actitud de atención, esfuerzo y perseverancia en las tareas propuestas.
4. Participar activamente tanto en el aprendizaje individual como en grupo.
5. Utilizar la calculadora como instrumento para llevar a cabo cálculos complejos y comprobar resultados.
6. Explorar distintas maneras de resolver problemas.

4.1.3. Metodología

La metodología que se va a utilizar para desarrollar los contenidos del bloque de números y álgebra, es una metodología activa en la que se busca una mayor participación del alumnado, donde el alumno tendrá un papel importante en las clases, y también el rol del docente será fundamental. Además de centrarse en aumentar la participación de los estudiantes, se tiene como objetivos mejorar la atención, creatividad y pensamiento crítico de los alumnos, para ello se empleará un recurso muy novedoso, que se va a implementar por primera en el centro, que es la *matemagia.*

Como ya se explicó en el marco teórico, hay diferentes maneras de emplear el recurso de la *matemagía*. La forma más habitual en la que se utilizará es como una manera diferente y más llamativa de introducir un nuevo contenido en el aula. Un caso concreto podría ser:

- Apertura tradicional del docente: Abrir el libro por la pagina 20, hoy se va a explicar las operaciones con potencias.
- Apertura con el recurso de la *matemagia*: Se realiza un truco de magia donde intervenga operaciones con potencias y se pide a los alumnos que reflexionen sobre el truco y que descubran que matemáticas hay detrás.

Una vez que los alumnos comprenden cómo funciona el truco de magia (fundamentos matemáticos) se puede seguir profundizando en los contenidos de distintas formas:

- Apoyarse del truco inicial para continuar profundizando en los contenidos de la unidad didáctica
- Una vez que se ha introducido el contenido que se quiere explicar, a través del truco de magia, se profundiza en los conceptos y una vez terminado de desarrollar los contenidos, se pide al alumno que se invente un truco utilizando los conocimientos que se han explicado. Obviamente este truco de magia será similar al realizado inicialmente por el docente.

No siempre se resolverán los trucos de magia en clase, cuando se realice un truco con el simple propósito de captar la atención del alumnado se puede pedir que investiguen en casa a ver si averiguan en que propiedades matemáticas se basa, o si tienen mucho interés en conocer la solución, se puede realizar al final de una sesión como premio, si son participativos y están atentos.

4.1.4. Descripción y temporalización de los contenidos

En este apartado se va a exponer los contenidos y la temporalización de ellos para el bloque II números y álgebra. El curso, en el cuál se centrará esta temporalización, será segundo de la ESO. Para desarrollar este bloque se ha estimado alrededor de tres meses, es decir, desde mediados de septiembre hasta mediados de noviembre. En este tiempo se desarrollarán las siguientes unidades didácticas: números, potencias y raíces, divisibilidad, proporcionalidad y porcentajes y álgebra.

El tiempo invertido para cada unidad didáctica no es homogéneo y varía según: la cantidad de contenidos, si son de repaso o nuevos, y de la cantidad de juegos de magia empleados para desarrollar dichos fundamentos matemáticos.

<table>
<tr><th>BLOQUE</th><th>CONTENIDOS</th><th>TEMPORALIZACIÓN</th></tr>
<tr><td rowspan="2">NÚMEROS
Y
ÁLGEBRA</td><td>Unidad 1: Números

– Números
– El Sistema de numeración
– Números triangulares, cuadrados, pentagonales…
– Números Enteros
– Fracciones
– Expresiones decimales
– Aproximaciones, truncamientos y redondeos
– Representación gráfica
– Representación de la recta numérica
– Comparación de números
– Operaciones
– Suma, resta. Propiedades
– Producto y cociente. Propiedades
– Jerarquía de las operaciones</td><td>8 SESIONES</td></tr>
<tr><td>Unidad 2: Potencias y raíces

– Potencias
– Concepto de potencia: base y exponente
– Cuadrados y cubos
– Lectura de potencias
– Potencias de uno y de cero
– Potencias de 10. Notación científica
– Operaciones con potencias y propiedades
– Producto de potencias de igual base
– Cocientes de potencias de igual base
– Elevar una potencia a otra potencia
– Potencia de un producto
– Potencia de un cociente
– Potencia de números enteros
– Raíces
– Cuadrados perfectos
– Raíz cuadrada. Interpretación geométrica
– Raíz n-ésima de un numero
– Introducir factores en el radical</td><td>9 SESIONES</td></tr>
</table>

	– Extraer factores del radical – Suma y resta de radicales	

	Unidad 3: Divisibilidad
	
	– Divisibilidad
	  – Múltiplos y divisores de un numero
	  – Criterios de divisibilidad
	  – Obtención de todos los divisores de un número
	– Números primos
	  – Números primos y compuestos
	  – La criba de Eratóstenes
	  – Descomposición de un número en factores primos
	  – Máximo común divisor de varios números
	  – Mínimo común múltiplo de varios números
	  – Descomposición factorial
		9 SESIONES

	Unidad 4: Proporcionalidad y porcentajes
	
	– Razón y proporción
	  – Razón
	  – Proporción
	– Magnitudes directamente proporcionales
	  – Reglas de tres directas
	  – Porcentajes
	  – Descuento porcentual
	  – Incremento porcentual
	– Magnitudes inversamente proporcionales
	  – Proporción inversa
	  – Regla de tres inversa
	– Reglas de tres compuestas
		8 SESIONES

	Unidad 5: Álgebra
	
	– Lenguaje algebraico
	  – Letras y números
	  – Coeficiente y parte literal	

	– Valor numérico de una expresión algebraica – Equivalencia y simplificación de expresiones algebraicas – Polinomios. Suma y producto – Ecuaciones de primer grado con una incógnita – Resolución de problemas mediante ecuaciones – Ecuaciones de segundo grado – Concepto de ecuación de 2º grado – Resolución de ecuaciones de 2ºgrado incompletas – Resolución de ecuaciones de 2ºgrado completas – Sistemas de ecuaciones lineales – Concepto de sistemas de ecuaciones lineales – Resolución de sistemas por el método de sustitución – Resolución de sistemas por el método de igualación – Resolución de sistemas por el método de reducción	14 SESIONES

Tabla 1. Contenidos y temporalización

4.1.5. Recursos

Los recursos que se utilizarán para desarrollar el bloque II de números y álgebra serán:

- El libro de texto que se haya elegido por el departamento de matemáticas.
- Bibliografía extra por si fuera necesaria para el alumno.
- La pizarra donde se desarrollarán los diferentes contenidos de la asignatura, se resolverán los problemas y se explicará las propiedades matemáticas de los trucos mostrados en clase.
- Proyector que se utilizará para exponer alguno ejercicio práctico.
- El recurso de la *matemagia*

Respecto al recurso de la *matemagia* será muy diverso ya que dependiendo del truco se necesitarán unos materiales u otros. Los objetos que se utilizarán para desarrollar nuestro contenido serán: un juego de cartas, monedas y fotocopias donde desarrollarán la actividad a hacer.

4.1.6. Evaluación

Se realizarán dos evaluaciones bien diferenciadas. En la primera, se evaluará el funcionamiento de la nueva metodología con la intención de poder analizar si los datos son los esperados y como se podría mejorar para años venideros. En la segunda se evaluará a los alumnos y no habrá diferencias respecto a otros bloques en el valor que se atribuye al examen y a la evaluación continua.

Evaluación del recurso de la matemagia

Se llevará a cabo mediante tres evaluaciones:

- *Evaluación de la situación inicial:* Se recurrirá a un cuestionario, en el que se deberá establecer, el grado de motivación que sienten hacia aprender matemáticas. La escala utilizada se basa en las de tipo linkert (van desde los valores 1 al 6), ver anexo 1. Los alumnos también deberán rellenar un pre-test al inicio para analizar el rendimiento.

- *Evaluación del proceso de implementación:* La finalidad es localizar las diferencias observadas entre la propuesta y la ejecución de las actividades, y valorar los comportamientos intermedios de los alumnos para observar si se van alcanzando los objetivos propuestos. En esta fase también se valorará la práctica del docente mediante fichas de seguimiento, ver anexos 2.a y 2.b. Está fase es muy importante debido a que se obtendrá información para poder mejorar la implementación ese mismo año y los años sucesivos. Para facilitar esta labor se ha decidido grabar las clases, siempre y cuando, estén de acuerdo los alumnos.

- *Evaluación tras la implementación:* Se realiza con la finalidad de comprobar si se han conseguido los objetivos programados. Para ello, se volverá a realizar el mismo test de motivación (anexo 1) y a través del examen final se evaluará el aprendizaje del alumnado. También, se llevarán a cabo entrevistas, a algunos alumnos, al final del bloque números y álgebra para conseguir información sobre que trucos les han parecido mejores y para obtener ideas de cómo se podría mejorar para los próximos años. El docente tiene que realizar otra encuesta para que valore la innovación y el efecto en los alumnos, ver anexo 3.

Lo ideal sería tener otra clase del mismo curso, un grupo de control, donde no se haya aplicado el recurso de la matemagia y de esa forma comparar el impacto de la matemagia entre ambos cursos a través de los pre-test/post-test tanto motivacionales como de rendimiento.

Evaluación de los alumnos

La forma de evaluar será la misma que en otros bloques y otras clases, ya que no se quiere dar más valor a una mayor participación en la clase, un mejor comportamiento o, la realización de las actividades que se propongan. La razón es que se quiere ver la influencia que genera la *matemagia* en los alumnos y si evaluamos de manera diferente los resultados estarán sesgados. Sabiendo esto, el examen final tendrá un valor del 80% de la nota y el 20% restante será la evaluación continua que se realizará a lo largo de todo el bloque.

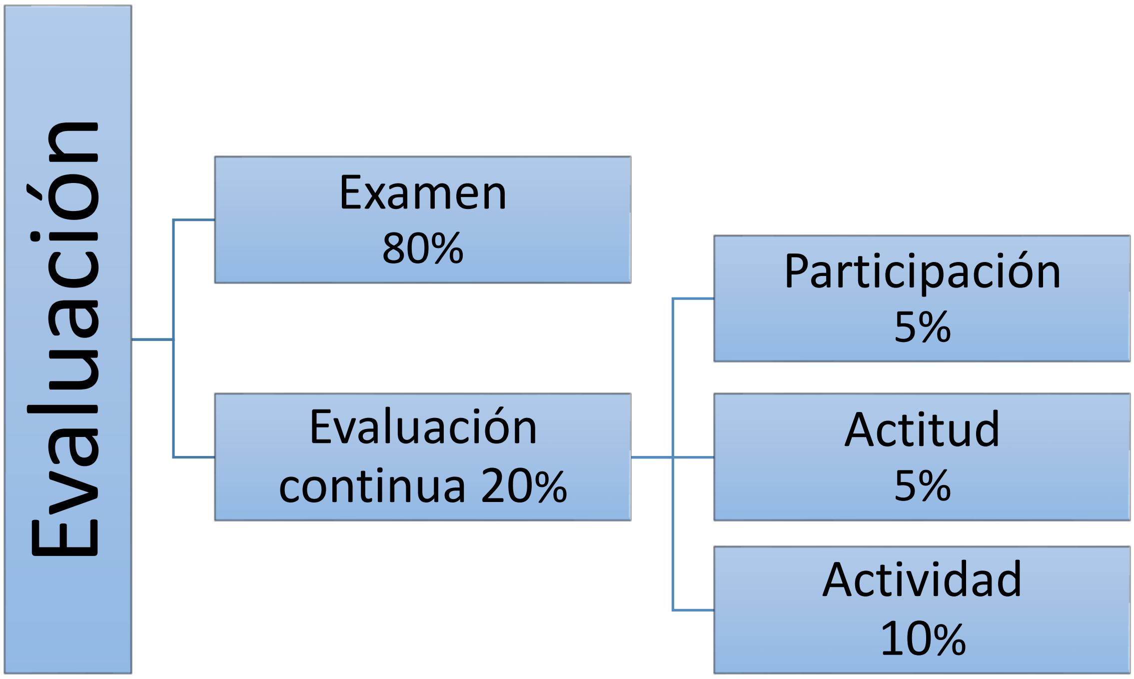

Figura 6. Evaluación alumnos

Para evaluar la participación y la actitud se recurrirá a las grabaciones de video realizadas en el aula. Además, para la actitud también se recurrirá a las fichas de observación que rellenará el docente, ver anexo 2.

En cuanto a la actividad, para este bloque se mandará a los alumnos realizar varias tareas donde tendrán que grabarse realizando un truco de magia que esté relacionado con los fundamentos matemáticos pedidos por el docente. En esta actividad se valorará la originalidad y la puesta en escena. La forma de entregar está tarea será a través de una grabación que los alumnos harán en sus casas y lo subirán a la plataforma de la asignatura. Además, los alumnos tendrán que salir, como mínimo una vez, en clase a presentar su juego de magia. Otra parte de este 10 % corresponde con las breves evaluaciones que se hacen al final de cada juego de magia para analizar si se han entendido los contenidos matemáticos.

4.2. Contextualización Matemática

En este apartado se van a comentar, brevemente, los contenidos matemáticos que van a aparecer en los trucos de magia que se van a explicar posteriormente. Estos contenidos serán desarrollados más profundamente en el anexo 4.

Para la parte de números, los contenidos que aparecen son:

1. *Operaciones aritméticas:* Se explica la suma, resta y multiplicación tanto de número enteros como de fracciones y decimales. Además, el docente enseña también sus propiedades. Para la división se desarrolla la división de números naturales. Para terminar, los alumnos aprenderán la jerarquía de las operaciones.
2. *Sistemas de numeración:* Se explica diferentes sistemas de numeración. El sistema de numeración que más se utiliza actualmente es el sistema de numeración decimal y se caracteriza porque el valor de una cifra en un número es diez veces mayor que el de la cifra situada a su derecha y diez veces menor que el valor de la situada a su izquierda. Por esta razón se dice que es un sistema posicional, es decir, el valor de una cifra en un número depende del lugar que ocupe esa cifra. Otros sistemas de numeración son el de los números romanos, el sistema binario…que se muestran brevemente.
3. *Expresiones decimales o exactas:* El docente muestra que una expresión decimal consta de dos partes: parte entera y parte decimal. Pero la parte decimal puede ser finita (expresión decimal exacta) o tener infinitos números (expresión decimal periódica). En este último caso se pueden tener dos tipos: periódicos puros (cuando el desarrollo decimal periódico comienza inmediatamente después de la coma) o periódicos mixtos (si el periodo está más allá de la coma).
4. *Potencias:* Una potencia es una forma de escribir de manera abreviada una multiplicación de factores iguales. El factor que se repite es la base y su exponente las veces que se repite. El docente explica las operaciones con potencias y sus propiedades (a este nivel se trabajará con potencias de números enteros).
5. *Raíces:* La raíz cuadrada de un número a es otro número b donde el cuadrado es igual al primero, es decir, obtener la raíz cuadra exacta es la operación opuesta de elevar al cuadrado. Al signo $\sqrt{}$ se le llama radical, y lo que está dentro se denomina radicando. También se enseña la raíz n-ésima de un número. Para terminar, el docente muestra cómo introducir extraer factores del radical y como sumar y restar radicales.

6. *Divisibilidad:* En este apartado se desarrollan diversos conceptos importantes entre los que destacan: múltiplos y divisores de un número y los criterios de divisibilidad. Algunos criterios de divisibilidad que se explican son el de 2,3,4,5,6,9,10 y 11.
7. *Números primos y compuestos:* Para comenzar se define lo que es un número primo y compuesto. A continuación, se enseña un algoritmo que permite hallar todos los números primos que un número natural dado (criba de Eratóstenes). Se termina explicando lo que es el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de varios números.
8. *Paridad:* Los números enteros pueden ser pares, divisibles por 2, o impares, no divisibles por 2. Si un numero termina la última cifra en 1,3,5,7,9, se dice que es impar, sin embargo, si termina en otro número es par. Los números pares e impares cumples unas reglas que se explicará detalladamente.

Para el álgebra, los contenidos que se desarrollarán en los juegos de magia son:

1. *Lenguaje algebraico:* Se empieza explicando lo que es el lenguaje algebraico (se utiliza números, letras y operaciones para representar la información). Cuando se habla de algo desconocido se suele utilizar la letra "*x*" aunque se puede utilizar cualquiera. Las expresiones que mediante letras y números se representa una situación se llaman expresiones algebraicas. Dichas expresiones están formadas por varios sumandos que se llaman términos o monomios (la parte literal se llama letra y al número se le conoce como coeficiente). La suma de monomios se llama polinomio. El profesor termina mostrando como se suman y multiplican polinomios. Hay que saber que el grado de un polinomio se determina como el mayor grado de sus monomios.
2. *Ecuaciones e identidad:* Se comienza explicando la diferencia entre una identidad y una ecuación, y es que la identidad siempre se cumple independientemente del valor de la incógnita (x). En ambos casos en la igualdad entre dos expresiones algebraicas, las expresiones a cada lado del igual se llaman miembros. La que está a la izquierda se llama primer miembro y el que está a la derecha se conoce como segundo miembro. Las letras que tienen las ecuaciones algebraicas se conocen como incógnitas y son desconocidas. El grado de una ecuación es el exponente mayor que aparece en algunas de las incógnitas. Se enseña ecuaciones de primer y segundo grado. En este último caso, se tratan de dos tipos: ecuaciones de segundo grado incompletas y completas.
3. *Sistemas de ecuaciones lineales:* Se explica el sistema de ecuaciones lineales con dos ecuaciones y dos incógnitas. Se pueden aplicar diversos procedimientos para resolver sistemas de ecuaciones. En este nivel, se ven tres métodos: sustitución, igualación y reducción.

Por último, se comentará brevemente los contenidos que aparecen en los juegos de magia pero que son de cursos superiores a primero y segundo de la ESO:

1. *Sucesiones:* Este contenido se comienza a desarrollar por el docente en el curso de tercero de la ESO. Se empieza explicando lo que es una sucesión, para luego centrarse en los dos tipos de sucesión que se explican en profundidad: progresiones aritméticas y progresiones geométricas
2. *Matrices:* Este contenido se desarrolla en segundo de bachillerato. Se explica el concepto de matriz, tipos de matrices que se pueden encontrar y se termina con operaciones de matrices. El tipo de operación que aparece en el juego de magia es la matriz transpuesta a una matriz dada.
3. Aritmética modular: Este contendido no se encuentra en el currículo de la ESO y bachillerato, pero puede resultar muy interesante explicar unas nociones básicas. Se explica que dos números enteros *a,b* son congruentes módulo n si tienen el mismo resto en su división por n. También se comenta las relaciones de equivalencia y las clases de equivalencia.

5. Actividades propuestas

En este apartado se van a presentar una serie de trucos de magia que se utilizarán en clase para introducir diferentes temas de manera diferente a la habitual y mediante las cuales se buscará captar la atención y aumentar la motivación del alumnado. Como es lógico, no se puede hacer un truco de magia para cada contenido nuevo que se vaya a desarrollar en clase, debido a que no habría tiempo suficiente para explicar todo el temario, además, de que no se tienen actividades de magia para cada contenido.

Los trucos de magia se han organizado en dos bloques: números y álgebra.

- *Números*
  - Cálculo mental, uso de la calculadora y operaciones aritméticas
  - Expresiones decimales periódicas y exactas
  - Sistemas de numeración
  - Potencias
  - Raíces
  - Números primos
  - Múltiplos y Divisores
  - Paridad
- Álgebra
  - Operaciones con expresiones algebraicas
  - Factorización
  - Identidad u ecuaciones
  - Ecuaciones de primer grado
  - Sistema de ecuaciones lineales

Para terminar, se propondrán otros trucos de magia muy interesantes relacionados con el bloque de números y álgebra, pero enfocado a cursos superiores a primero y segundo de la ESO. Para estos cursos se podrían hacer estas actividades con el objetivo de motivar, llamar la atención, pero no resulta recomendable centrarse, excesivamente en los contenidos, ya que no corresponden a su nivel Estas actividades de magia desarrollarían los conceptos de:

- Sucesiones (tercero ESO)
- Matrices (segundo de bachillerato)
- Aritmética modular

En cuanto a la aritmética modular, actualmente está fuera del currículo de secundaria y bachillerato, pero se podría hacer el truco de magia y realizar una breve explicación sobre lo que es la aritmética modular y los estudiantes lo entenderían perfectamente.

Además de buscar la motivación y atención de los alumnos con estos juegos de magia, se van a utilizar para introducir o profundizar en diferentes conceptos.

Las actividades de magia tendrán la siguiente estructura:

1. Materiales
2. Presentación del truco de magia (puesta en escena)
3. Explicación
4. Secuenciación
5. Evaluación

En ocasiones se pedirá a los alumnos que practiquen los contenidos explicados inventándose otro truco de magia similar al presentado por el docente en el aula.

5.1. Números

Cálculo mental, operaciones aritméticas y uso de calculadora: UNA MEMORIA PRODIGIOSA

Este truco de magia (Muñoz, 2004) se puede utilizar como introducción al tema de números y la intención es que los alumnos practiquen el cálculo mental y también el uso de la calculadora, comprobando el resultado. Otra forma de usarlo, como con todos los juegos de magia, es como descanso entre actividades o premio. Se tiene una gran variedad de actividades de magia de este tipo, aquí se expondrá uno.

Materiales

Fotocopias para los alumnos en las que vendrá representada una tabla mágica. Además, el docente tendrá un objeto para tapar una casilla de la tabla.

Puesta en escena

Una de las cualidades que debe tener un mago es una gran memoria y para demostrarlo se utiliza dicha tabla, figura 7.

35	23	80	32	17	46	44	34
22	41	20	81	68	56	61	78
16	59	77	63	50	11	79	75
62	13	37	82	58	57	10	39
9	38	36	26	27	15	72	24
60	48	53	70	14	33	12	73
42	3	71	67	8	51	69	55
50	49	2	31	54	5	29	74
19	7	64	16	1	30	28	18
6	25	4	65	52	40	45	62

Figura 7. Tabla mágica (Muñoz, 2004)

El mago, docente, tiene que incidir en la desordenación de los números que aparecen en la tabla 7. Se indica que hay un total de 80 números, pero se puede observar que está el número 82 y 83 y otros como el 50 aparecen repetidos.

El profesor comenta a los alumnos que se ha aprendido de memoria la tabla y que lo va a demostrar. Para ello se pide a un alumno que salga y tape un número cualquiera mientras el docente está de espaldas. Entonces el docente se da la vuelta y acierta el número tachado.

Explicación

En esta actividad, la magia está en cómo están distribuidos los números. Se parte del número tachado por el alumno y te mueves cuatro posiciones en cualquiera de las cuatro diagonales (siempre será posible alguna), de tal manera que si te mueves por una diagonal superior hay que restarle 8 al número que se ha llegado. Sin embargo, si te mueves por una diagonal inferior se tiene que sumar 8 al número que se ha llegado.

Para comprenderlo mejor se realizará un ejemplo, ver figura 8. Si se ha tachado el numero 60 (columna 1 / fila 6), y se cuentan cuatro posiciones en la diagonal superior, se obtiene el 68, que es justamente sumarle 8 al número tachado. Y, si se cuentan 4 cuatro posiciones en la diagonal inferior, se obtiene el 52, que es justamente restar 8 al número tachado. Esta propiedad ocurre con todos los números de la tabla.

				68
60				
				52

Figura 8. Ejemplo en la tabla mágica (Muñoz, 2004)

Una vez terminado este interesante truco, para potenciar el cálculo mental, se propone a los alumnos que creen su propio cuadro mágico y que se inventen su propia regla. El alumno puede elegir moverse en diagonal, vertical o horizontal y aplicar una operación más compleja del tipo: 3 x número +11. Este tipo de actividad mágica se puede complicar mucho más como se puede observar a continuación.

Ahora se tiene la siguiente tabla, ver figura 9:

1	34212	46223	58234	610245	712256
2	44404	56416	68428	7104310	8124412
3	54616	66609	786112	8106215	9126318
4	64828	768112	888016	9108120	10128224
5	750310	870215	990120	1011025	11130130
6	852412	972318	1092224	11112130	12132036
7	954514	1074421	1194328	12114235	13134142
8	1056616	1176524	1296432	13116340	14136248
9	1158718	1278627	1398536	14118445	15138354
	20	30	40	50	60

Figura 9. Tabla mágica (Muñoz, 2004)

Esta actividad de magia se basa en que cada casilla se encuentra codificada.

Columnas

Primera columna: Le corresponde el 20.

Segunda columna: Le corresponde el 30.

Tercera columna: Le corresponde el 40.

Cuarta columna: Le corresponde el 50.

Quinta columna: Le corresponde el 60.

Filas

A cada fila le corresponde su lugar, entonces:

Primera fila: Le corresponde el 1.

Segunda fila. Le corresponde el 2.

…

Octava fila: Le corresponde el 8.

Novena fila: Le corresponde el 9.

Con esta codificación, la casilla que le corresponde la tercera fila (3) y la cuarta columna (50) tiene como código el 53. Para descubrir el número se calculan las siguientes operaciones:

1. Sumar las cifras

$$5 + 3 = 8$$

2. Duplicar el número

$$53 \cdot 2 = 106$$

3. Restar las cifras (se resta a la mayor la más pequeña)

$$5 - 3 = 2$$

4. Multiplicar las cifras

$$5 \cdot 3 = 15$$

De esta manera se obtiene que en esa casilla se tiene un número que es 8106215. Por lo tanto, los alumnos pueden crear sus propios códigos y hacer números tan grandes como quieran.

Secuenciación

Para esta actividad de magia se seguirá está secuenciación:

1. Presentación del truco por parte del docente (5 minutos)

2. Los alumnos reflexionan porque el truco de magia funciona, el docente repite varias veces la actividad de magia y les va dando pistas. En este caso particular, se podría decir que los números presentes en la tabla siguen una regla y se podría poner algún ejemplo (15 min).
3. El docente resuelve el truco si los alumnos no han llegado a resolverlos por ellos mismos. (5 min).
4. El docente pide a los alumnos que se inventen otra tabla mágica con su propia codificación y que se la entregarán a través de la plataforma de la escuela (25 min, tarea para hacer en casa).
5. El docente seleccionará a varios alumnos, al día siguiente, para que muestren la tabla mágica que han diseñado y de esta manera trabajen el cálculo mental (15 min).

Evaluación

En este caso la evaluación será la tabla mágica realizada por los alumnos y que se entregará al docente, y también se valoraría la presentación si fuese uno de los alumnos seleccionados.

Expresiones decimales periódicas y exactas: NÚMEROS CÍCLICOS

Este truco de magia (Alegría y Ruiz de Arcaute, 2002) se puede utilizar para recordar que es un número decimal periódico y la diferencia con un número decimal exacto.

Materiales

Ninguno adicional a los habituales usados por el docente en las clases.

Puesta en escena y explicación

Se escribe en la pizarra las siguientes operaciones y se pide a los alumnos que se fijen en las operaciones:

142.857 x 1 = 142.857

142.857 x 2 = 285.714

142.857 x 3 = 428.571

142.857 x 4 = 571.428

142.857 x 5 = 714.285

142.857 x 6 = 857.142

142.857 x 7 = 999.999

Figura 10. Números cíclicos (Alegría y Ruiz de Arcaute, 2002)

Si se observa con atención las sucesivas multiplicaciones del número 142.857 por los números del 1 al 6, se puede ver que el resultado final es una permutación del número de partida. Y cuando se multiplica por 7 da lugar a un número donde todas las cifras son 9. Esta propiedad cíclica hace que se piense que este número es mágico. Pero esto no termina aquí, si se coloca este mismo número 142857, en los vértices de un hexágono y se suma una diagonal el resultado es siempre 9, ver figura 11.

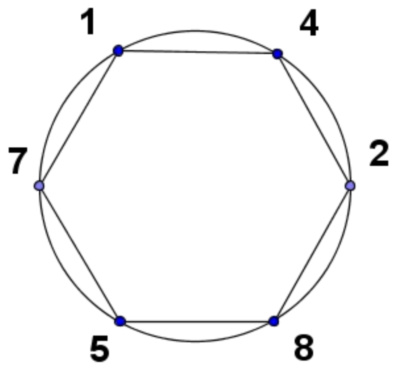

Figura 11. El número 142857 colocado en los vértices de un hexágono (Alegría y Ruiz de Arcaute, 2002)

Y encima si se divide 1/7 se obtiene un número decimal periódico cuyo periodo es justamente 142857. En este caso es un número decimal periódico puro.

Y de esta manera se puede repasar de manera sencilla y divertida lo que es un número decimal periódico (puro y mixto).

Secuenciación

Para esta actividad de magia se seguirá está secuenciación:

1. Presentación de las operaciones del número mágico por 1,2,3,4,5,6, 7 (5 min)
2. Los estudiantes reflexionan sobre esas operaciones y los resultados que salen. Debate con el docente (5 min)
3. El docente coloca los dígitos de ese número en los vértices de un pentágono en sentido horario. El docente pregunta a los alumnos si observan alguna regla con esa colocación (5 min).
4. Finalmente, pide a los alumnos realizar la división 1/7 y analizar el resultado (5 min).
5. El docente recuerda a los alumnos los conceptos de número decimal exacto y periódico, si no lo recordaban, y como pasar de una fracción a número decimal y viceversa (20 min).
6. Evaluación (10 min)

Evaluación

Se ponen una serie de ejercicios sencillos que se recogerán al terminar la clase.

1. El numero $X = 7{,}265\widehat{41}$ es, un número periódico mixto o puro?

2. Expresa este número decimal exacto en forma de fracción.
   $X = 31{,}528$
3. Expresa este número decimal periódico en forma de fracción
   $X = 7{,}6\widehat{31}$

4. Expresa este número decimal periódico en forma de fracción
   $X = 7,\widehat{31}$

Sistemas de numeración: NUMEROS TERNARIOS

Con esta actividad de magia (McOwan and Parker ,2010) se quiere introducir el contenido referente a sistemas de numeración. Los estudiantes están habituados a utilizar el sistema de numeración decimal y con este truco aprenderán otro sistema de numeración que es en base 3. A partir de aquí, el docente podrá enseñar otros sistemas de numeración como puede ser el sistema de numeración binario o el romano.

Materiales

Una baraja de cartas a mayores de los habituales utilizados por el docente.

Puesta en escena

El docente saca un paquete de cartas y selecciona 27 cartas, el resto las quita para esta actividad de magia. Mientras se hace esto, se puede ir comentando que el número 27 es tu número favorito porque es un número cúbico (3x3x3). Entonces se pregunta a los alumnos cuáles son sus números favoritos y se elige a un estudiante (que te acuerdes de su número favorito y que se encuentre entre 1 y 27). Le pide que elija la carta que quiera entre las 27 y se la enseñe a la clase mientras él está de espaldas. A continuación, el alumno junta la carta con el resto de las cartas de la baraja, barajea y se las devuelve al docente.

El docente va comentando a los alumnos que para adivinar que carta es, va a dividir las 27 cartas en tres bloques y le tienen que decir en que bloque se encuentra. Además, se puede comentar que se les vas a explicar como determinar que carta es. Mediante la primera división en tres bloques se reduce las posibilidades a 9 opciones. Repitiendo el proceso otra vez más se reduce a tres cartas y con la última división se tiene la carta seleccionada por ellos. Ahora se pide que digan que carta han elegido. Lo asombroso de este truco es que esa carta esta justamente situada en la posición del número favorito del alumno seleccionado.

Explicación

Todo lo que se ha hablado de memorizar las cartas e ir reduciendo las opciones no es lo que se hace. Lo que realmente el docente está prestando atención es como reordenar los tres montones en cada paso conociendo el número favorito del alumno.

A lo largo del truco, se realiza tres veces la división de las cartas en tres montones (siempre de izquierda a derecha), pero cuando los vuelves a juntar hay tres posiciones donde puedes poner el montón donde está la carta elegida por el alumno: arriba, medio o abajo.

Esta es la tabla que se necesita saber:

	1º Recombinación	**2º Recombinación**	**3º Recombinación**
Arriba	0	0	0
Medio	1	3	9
Abajo	2	6	18

Tabla 2. Tabla Inicial que debe conocer el docente

Se usarán los números de la tabla para colocar la carta en la posición que coincida con el número favorito del estudiante. Se va a suponer que se elige como número favorito el 17, entonces se necesitarán 16 cartas al final del truco arriba para que la carta elegida aparezca en la posición 17.

Ahora se tiene que averiguar cómo hacer el número anterior con los números de la tabla 2. Se necesitará el 1, 6 y 9 (1 + 6 + 9 = 16). De esta manera se sabe que en la primera recombinación se debe colocar en el medio, en la segunda recombinación se debe poner abajo y en la última en el medio otra vez. Y como si fuera magia, la carta está en la posición 17. Sin embargo, esto no es magia, son números en base 3 los cuales son llamados números ternarios.

Los números en base 10 tienen una columna unidad, una columna de las decenas y una columna de las centenas y, además, cada nueva columna es un múltiplo de 10 de la columna anterior. En base 3, se inicia con una columna unidad, pero cada columna posterior es múltiplo de tres de la anterior, entonces se tiene que la primera columna es la unidad la segunda columna es el triple que la primera y la tercera columna es nueve veces la primera. Y en vez de tener diez dígitos, base 10 (1,2,3,4,5,6,7,8,9) se tiene tres dígitos en base 3 (0,1 y 2).

Para convertir el número favorito del estudiante a base 3 se piensa, en primer lugar, cuantos nueves necesitas. Para 16 se necesita solo un nueve, entonces sobran 7, lo siguiente es saber cuántos treses se necesitan para cubrir el 7. En este caso se necesitan dos treses y sobra una unidad. Entonces 16 escrito en base 3 será 121.

Entonces en base 3 la tabla anterior quedaría:

	1º Recombinación Unidades	2º Recombinación Triple	3º Recombinación Nueves veces
Arriba	0	0	0
Medio	1	1	1
Abajo	2	2	2

Tabla 3. Tabla en sistema de numeración ternario

Y de esta manera se sabe cómo recombinar los montones para conseguir tener la carta en la posición deseada.

Secuenciación

Para esta actividad de magia se seguirá está temporalización:

1. El docente presenta la actividad de magia en el aula con la ayuda de un alumno (5 min).
2. Los alumnos reflexionan y debaten porque creen que el docente es capaz de colocar la carta elegida por el alumno en la posición de su número favorito. El docente les ayuda diciendo que se está trabajando en una base diferente a la base 10 (10 min).
3. El docente explica porque funciona la actividad de magia en la pizarra de una manera similar a la que se ha explicado en el punto anterior. Se aprovechará para explicar/ recordar cómo se realizan los cambios de base, en este caso particular, de base 10 a base 3 (15 min).
4. Los alumnos realizarán entre sí este juego de magia con la finalidad de que practiquen los cambios de base (15 min).
5. El profesor comentará brevemente otros sistemas de referencia (10 min).
6. Evaluación (5 min).

Evaluación

Se pedirá a los alumnos que resuelvan estos ejercicios para analizar si se entendieron bien los contenidos.

1. Calcula el número que se obtendría en base 2:
   $11111_{(3} =$
2. Determina el valor del número en base 3:

$36_{(10} =$

3. Determinar el valor en base 10:

   $11111_{(3} =$

Potencias: TRUCO DE FRABETTI

Se utilizará esta actividad mágica (Frabetti ,2000) para explicar lo que es una potencia, sus propiedades y sus operaciones. También se puede emplear para introducir sistemas de numeración en base 2.

Materiales

Para este juego de magia el docente utilizará fotocopias que se entregarán a los alumnos. En estas fotocopias vendrá representada la tabla que se utilizará para hacer el juego de magia.

Puesta en escena

Se les reparte a los alumnos una fotocopia en la que aparece una tabla, ver tabla 4. Se pide a un alumno que piense un número entre 1 a 15 y que diga en que columnas aparece.

El docente tendrá solo que sumar los primeros números de dichas columnas para acertar que número ha pensado el estudiante.

Un caso concreto: el alumno piensa el número 15. Dicho número aparece en las columnas 1,2,3 y 4, entonces sumando los cuatro números se obtiene el número 15. Entonces el docente acierta el número inicial que había pensado el estudiante.

1	2	4	8
5	10	6	11
11	7	14	10
9	15	12	13
3	6	7	9
7	11	15	12
15	3	13	15
13	14	5	14

Tabla 4. Tabla necesaria para el truco de magia sobre potencias

Explicación

Este truco funciona por las propiedades de las potencias de 2, donde se puede obtener cualquier número como la suma de varias potencias de 2 y se expresa solamente de una manera.

$\mathbf{1 = 2^0}$	$\mathbf{5 = 2^0 + 2^2}$	$\mathbf{9 = 2^0 + 2^3}$	$\mathbf{13 = 2^0 + 2^2 + 2^3}$
$\mathbf{2 = 2^1}$	$6 = 2^1 + 2^2$	$10 = 2^1 + 2^3$	$14 = 2^1 + 2^2 + 2^3$
$\mathbf{3 = 2^0 + 2^1}$	$7 = 2^0 + 2^1 + 2^2$	$11 = 2^0 + 2^1 + 2^3$	$15 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3$
$\mathbf{4 = 2^2}$	$8 = 2^3$	$12 = 2^2 + 2^3$	

Tabla 5. Se representan los primeros 15 números como suma de potencias de 2

En la primera fila se colocan los números que son potencia de 2, y posteriormente, se rellena la tabla con los números que tienen ese elemento. Para terminar, se mezclan los números de la tabla para que los alumnos no pillen el truco de inmediato.

Ejemplo si se elige el número 5, este se forma a través de dos potencias de base 2, que son la de exponente 0 y exponente 2, por lo tanto, el cinco tiene que aparecer en la columna 1 y la columna 3.

Este truco está muy bien porque los alumnos pueden observar que para sumar dos potencias de base dos no se suman los exponentes, ya que, en el caso particular del 5, la suma de los exponentes 0 y 2 daría 2 y todo el mundo sabe que 5 no es 2^2.

$$5 = 2^0 + 2^2 \neq 2^2 = 4$$

Secuenciación

Para esta actividad de magia se seguirá está temporalización:

1. El docente presenta la actividad de magia en el aula. Realiza la actividad con varios alumnos para que observen que siempre funciona (5min).
2. Los alumnos comienzan a reflexionar como están colocados los números en la tabla para que el docente siempre acierte el número que ha pensado el estudiante (5 min).

3. El docente les guía representando la tabla 5 donde aparecen los números del 1 al 12 como la suma de potencias de base 2. Con esta ayuda los alumnos debaten el funcionamiento del juego de magia. Finalmente, el docente resuelve el truco si los alumnos no han conseguido llegar a la solución (15 min).
4. El docente se apoya del juego de magia anterior para explicar las propiedades de las potencias (120 min).
5. Evaluación (15 min).

Evaluación

Se pedirá a los alumnos que resuelvan estos ejercicios para analizar si se entendieron bien los contenidos.

1. Escribir como forma de una única potencia:

$$\frac{(-3)^7 \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^1}{(-3)^4 \cdot (-3)^0}$$

2. Escribir como forma de una única potencia:

$$(7^{12} \cdot 49^3)^6$$

3. Calcula:

$$(2+3)^2 \; y \;\; 2^2 + 3^2 \quad ¿son\ iguales?$$

Raíces: HALLAR LA RAÍZ QUINTA DE UN NÚMERO

El siguiente truco de magia (Muñoz, 2004) se puede utilizar como introducción o como recurso para motivar a los alumnos en el tema de raíces y potencias.

Materiales

Ninguno adicional a los habituales usados por el docente en las clases.

Puesta en escena

El docente engaña a los alumnos haciéndoles creer que se sabe todas las potencias quintas de los números de dos cifras o, lo que es lo mismo, puede calcular la raíz quinta de un número que sea una potencia exacta.

Fue presentado un truco similar (hallar la raíz cúbica) por Francisco González (González,2003).

Entonces se pide a un alumno que diga un número que se acertará su raíz quinta (el número tiene que ser una potencia exacta). El alumno dice 32768 e inmediatamente el profesor contesta 8.

Explicación

Si se considera un número de dos cifras, y se calcula su potencia quinta:

$$(ab)^5 = (10 \cdot a + b)^5 = 10^5 \cdot\ a^5 +\ 5 \cdot 10^4 \cdot a^4 \cdot b + 10^4 \cdot a^3 \cdot b^2 +$$
$$+ 10^3 \cdot a^2 \cdot b^3 + 5 \cdot 10 \cdot a \cdot b^4 + b^5$$

Como se puede observar, las unidades del desarrollo que se acaba de hacer, solo dependen de la terminación de b^5. Sin embargo, si se calcula las potencias quintas de las cifras se tiene, ver tabla 6:

a	**a^5**	**a**	**a^5**
0	0	**5**	3125
1	1	**6**	7776
2	32	**7**	16807
3	243	**8**	32768
4	1024	**9**	59049

Tabla 6. Las potencias quintas de los nueve primeros números naturales

Como se puede apreciar, la potencia quinta de un número acaba siempre con la misma unidad que el número original. Entonces, solo mirando la solución se sabe la cifra de las unidades que se está buscando. Para determinar la cifra de las decenas, se necesita tener en cuenta las siguientes desigualdades:

$$10 \cdot a + 0 < 10 \cdot a + b = a \cdot b < 10 \cdot a + 10 = 10 \cdot (a + 1)$$

Entonces,

$$(10 \cdot a)^5 < (a \cdot b)^5 < [10 \cdot (a + 1)]^5$$

Si continuamos desarrollando,

$$10^5 \cdot a^5 < (ab)^5 < 10^5 \cdot (a + 1)^5$$

Si se divide por 10^5 se obtiene,

$$a^5 < \frac{(a \cdot b)^5}{10^5} < (a + 1)^5$$

Es decir, se descartan las últimas cinco cifras del número, y hay que fijarse entre que dos potencias quintas se encuentra el número restante y, se escoge la menor.

Por ejemplo, el alumno nos da la cifra 380204032. Aplicando el procedimiento, se sabe que el número acaba en 2. Lo siguiente es eliminar las cinco últimas cifras quedando el número 3802. Como se puede observar el número 3802 está entre $3125=5^5$ y $7776=6^5$. Entonces queda claro que el número elegido es el 52.

Para poder desarrollar este truco, el docente necesita saberse la tabla 6, es decir, las primeras potencias de 5.

Secuenciación

Para esta actividad de magia se seguirá está temporalización:

1. El docente presenta la actividad de magia en el aula. Realiza la actividad con varios alumnos para que observen que siempre funciona (5min)
2. Los alumnos debaten y reflexionan cuales son las reglas que rigen el truco de magia. El docente les va guiando para que lleguen a la solución. Por ejemplo, una pista puede que determinen la potencia quinta de los primeros números naturales y analicen si se cumple alguna regla (la potencia quinta de un número acaba siempre con la misma unidad que el número original). Finalmente, si los estudiantes no consiguen llegar a la solución mediante las sucesivas pistas será el docente quien lo termine de resolver (20 min)
3. Los alumnos practicaran este truco con sus compañeros. La idea es que trabajen el cálculo mental (5/10 min).
4. El docente desarrolla el contenido sobre raíces referente a la unidad didáctica potencias y raíces (120 min).
5. Evaluación (20 min).

Evaluación

Se pedirá a los alumnos que resuelvan estos ejercicios para analizar si se entendieron bien los contenidos.

1. Calcular las siguientes raíces5
   - $a)$ $\sqrt[5]{32}$
   - $b)$ $\sqrt[4]{81}$
   - $c)$ $\sqrt{625}$
2. Extrae factores de los radicales siguientes

   $a)\ \sqrt{49b^5x^8}$

   $b)\sqrt[3]{125b^6c^5}$
3. Calcula:

   $a)\ 9\sqrt{20}+2\sqrt{80}-4\sqrt{180}$

$b)\ 5 \cdot \sqrt{1632} \colon 2^3 + 2\sqrt{144} + \sqrt{49}$

$c)\ 3 \cdot 10^2 - 5 \cdot \sqrt{25} + 2^2$

Números primos: LA DOBLE LOCALIZACIÓN IMPOSIBLE

Este truco de magia (McOwan and Parker ,2010) se puede utilizar para recordar o explicar lo que es un número primo de una manera motivadora. También se puede emplear como descanso entre dos actividades ya que es un juego muy rápido.

Materiales

Una baraja de cartas, además, de los materiales habituales usados por el docente en las clases.

Puesta en escena

Se divide una baraja de cartas en dos montones y, se entrega cada uno a un alumno. Ambos alumnos tienen que seleccionar una carta, la que ellos quieran, y se la dan a su compañero, el que tiene el otro montón. Cada estudiante la introducirá entre sus cartas y se las entregará al docente. El profesor observa atentamente cada montón de cartas y encuentra en cada uno que carta no pertenecía inicialmente. Para este juego no se usarán los ases por lo que se tienen que eliminar de la baraja.

Explicación

Para realizar este truco se necesita una preparación previa de las cartas. Se deben separar las cartas en dos partes, para ayudarse se puede utilizar los jokers o los ases que no se usarán en el juego. En un grupo de cartas se tendrá las cartas cuyos números sean valores primos (2,3,4,7, J, K) y en la otra parte se tendrán las castas cuyos valores serán (4,6,8,9,10, Q). El palo de la carta no influye en este ejercicio, lo único que es importante es el valor de la carta.

Entonces, cuando se reparte un grupo de cartas a cada alumno, a uno se le está entregando todas las cartas que tienen como valor un número primo y al otro las cartas donde sus valores son números compuestos. Por lo tanto, cuando se intercambien una carta y las introduzcan en sus respectivos montones, será muy fácil para el docente detectar la carta introducida.

Si se dividen en factores los números que aparecen en las cartas se tiene:

Números Primos	**Números Compuestos**
2 = 1 x 2	4 = 2 x 2 x 1
3 =1 x 3	6 = 2 x 3 x 1

5 =1 x 5	8 = 2 x 2 x 2 x 1
7 =1 x 7	9 = 3 x 3 x 1
J = 1 x11	10 = 2 x 5 x 1
K = 1 x 13	Q = 12 = 2 x 2 x 3 x 1

Tabla 7. Las cartas divididas en números primos y compuestos

Con este juego los alumnos recordarán qué es un número primo: un número, mayor o igual que 2, que es solo divisible por sí mismo y por el uno. Se dice que el número no tiene otros factores. Entonces, un número es compuesto si es divisible por el mismo, el uno y otro factor como mínimo.

Secuenciación

Para esta actividad de magia se seguirá está temporalización:

1. El docente presenta la actividad de magia en el aula. Realiza la actividad varias veces para demostrar que un truco fiable (5min).
2. Les pregunta a los alumnos como creen que acierta cual es la carta que cambia de un montón a otro. El docente empieza a recitar las cartas de un montón y después las del otro, y hace reflexionar a los alumnos sobre que característica tienen los valores numéricos de un montón y del otro. Por ejemplo, el profesor incide que en un montón está el 1 (A), 2,3… ¿Qué sucede con esos números? (15 min).
3. El docente define los que es un número primo y compuesto y explica lo que es el mcd y el mcm (100 min).
4. Evaluación (10 min).

Evaluación

Se pedirá a los alumnos que resuelvan estos ejercicios para analizar si se entendieron bien los contenidos.

1. Define que es un número primo y número compuesto
2. Estos números son primos o compuestos. Razona.
   a) 14
   b) 58
   c) 253
   d) 2431
3. Calcula el mcd de 12,15.
4. Calcula el mcm de 24, 32 y 28.

Múltiplos, Divisores y Divisibilidad: LA CIFRA TACHADA

Con este truco de magia (Muñoz, 2004) se trabajarán los contenidos de divisibilidad, múltiplos y divisores. Se trata de una actividad muy rápida y fácil, pero realmente efectiva. A partir de este juego se puede explicar fácilmente el concepto de múltiplo y divisor de un número. Además, también se puede enseñar los diferentes criterios de divisibilidad, de los números más habituales como puede ser el 2,3,5,9,11…

Materiales

Ninguno adicional a los habituales usados por el docente en las clases.

Puesta en escena

El docente elige a un alumno para que piense un número de 4 cifras. A continuación, se pide que calcule la suma de sus cifras y que haga la simple operación de restar el numero original al número que sale de sumar sus cifras. Posteriormente, se pide que tache una de las cifras resultantes (que no sea un cero) y le dice al docente las cifras restantes en el orden que elija el alumno. Inmediatamente el mago conoce cuál ha sido la cifra tachada.

Explicación

Para resolver esta actividad se basa en la divisibilidad del 9. Si a un número cualquiera se le resta la suma de sus cifras, el resultado obtenido siempre es un número que es múltiplo de 9.

La forma de verlo es inmediata, si se considera el número *abcd* tal que:

$$abcd = 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d$$

La operación que se hace es:

$$(1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d) - (a + b + c + d) = 999 \cdot a + 99 \cdot b + 9 \cdot c$$

Por tanto, si el alumno tacha una de las cifras de ese número, el docente solo debe sumar mentalmente las cifras que le va diciendo el estudiante y cuando lo tenga, debe buscar la cantidad que le falta para que la suma de las tres cifras sea un múltiplo de 9. Entonces, esa cantidad es la cifra que se está buscando.

Por ejemplo, si el alumno ha pensado el número 5278 y se realiza la operación:

$$5278 - 22 = 5256$$

Ahora, el alumno decide tachar el número 6 del 5256, si se suma el resto de las cifras se obtiene el valor de:

$$5 + 2 + 5 = 12$$

Entonces, faltan 6 unidades para obtener el próximo múltiplo de 9, luego el número tachado es el 6.

El procedimiento no varía si se hubiese eliminado el número 5 que está repetido dos veces, en ese caso sería:

$$5 + 2 + 6 = 13$$

Entonces es necesario sumar 5 unidades para llegar al siguiente múltiplo que es 18.

Se podría dar el caso que, al sumar las cifras resultantes, saliese directamente múltiplo de 9, entonces necesariamente la cifra tachada tiene que ser un 9. La otra posibilidad es que fuese 0 pero se descartó al principio del truco de magia.

Este truco de magia también se puede presentar de diferente manera. Se le pide al alumno que piense un número de cuatro cifras pero que no sean todas las cifras la misma (se puede decir para que sea más difícil el juego) y a continuación el alumno debe reordenar las cifras para obtener otro número. Finalmente resta los dos números y ahora con el resto se hace lo mismo que antes.

Por ejemplo, si el alumno elige el número 5348, se podría escribir también como 3584 y si se realiza la resta se obtiene:

$$5348 - 3584 = 1764$$

El número 1764 es múltiplo de 9. Esto se puede demostrar fácilmente:

$$(1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d) - (1000 \cdot b + 100 \cdot a + 10 \cdot d + c)$$
$$= 900 \cdot a - 900 \cdot b + 9 \cdot c - 9 \cdot d$$

Esta es la otra alternativa al truco y se podía pedir a los alumnos que pensarán otras variantes para los conceptos de múltiplo, divisor y divisibilidad.

Secuenciación

Para esta actividad de magia se seguirá está temporalización:

1. El docente presenta la actividad de magia en el aula. Para ello, realiza el truco de magia con varios alumnos (5 min).
2. El docente deja un tiempo para que los alumnos debatan y empiecen a indagar acerca del funcionamiento del truco. En esta etapa, el docente va guiando a los alumnos para que

ellos, por si mismos, lleguen a la solución. Por ejemplo, una pista que se les puede dar es que realicen esa operación con un número *"abcd"* cualesquiera, y que observen si ese número es siempre múltiplo de otro número. Fácilmente, se darán cuenta que el número resultante de dicha operación es siempre múltiplo de 9, entonces ya sabrán cómo realizar dicho juego de magia (15 min).

3. El docente desarrollará el resto de la unidad didáctica, apoyándose en el truco de magia, incidiendo en los conceptos de múltiplos y divisores, y en los criterios de divisibilidad (50 min).
4. Se les pedirá a los alumnos que se inventen un truco de magia basado en los contenidos sobre divisibilidad (lo harán en casa y pueden buscar en internet) y lo tienen que entregar a través de la plataforma. Además, varios alumnos presentarán el juego de magia en clase y el resto de la clase intentará adivinar en que propiedades matemáticas se basa (20 min).
5. Evaluación (10 min).

Evaluación

Se pedirá a los alumnos que se inventen un truco de magia y que resuelvan una serie de ejercicios para analizar si se entendieron bien los contenidos.

1. Una parte de la evaluación es inventarse un juego de magia basado en los conceptos de divisibilidad.
2. Una serie de ejercicios fáciles para analizar si han entendido los conceptos básicos.
   a) Escribe cuatro números de tres cifras que sean divisibles por 11 y por 2 a la vez.
   b) Busca los divisores de 210
   c) Sustituye A por el valor apropiado para que (hay varias soluciones):
      – 15A72 sea múltiplo de 3
      – 2205A sea múltiplo de 6
      – 6A438 sea múltiplo de 11

Paridad: Cara o Cruz

El concepto de paridad está presente en varios aspectos de nuestra vida como son par/impar, si/no, blanco/negro. En matemáticas normalmente se refiere a la dualidad par/impar que existe entre los números naturales. A través de este truco de magia (Alegría,2008) se trabajará este concepto.

Materiales

El docente además de utilizar los recursos habituales, usará un conjunto de monedas para llevar a cabo este juego de magia.

Puesta en escena

El docente saca tres monedas y las deja caer sobre la mesa. Luego pide la ayuda de un alumno. Con el docente de espaldas el alumno, va girando las monedas, una a una, pero con la condición de que cada vez que voltea una moneda grite la palabra *giro*.

Una vez que el alumno ha terminado el proceso, este mismo tapa una moneda y el docente se gira al público y adivina si esta moneda es cara o cruz.

Explicación

Este truco de magia se basa en una propiedad que es las siguiente:

> *Si un elemento que admite dos estados está en uno de ellos y se cambia su estado un número par de veces, dicho elemento no cambia de estado. En cambio, si se cambia un número impar de veces, entonces cambiará su estado.*

Cuando comienza el juego, el docente deja las monedas sobre la mesa y, mientras esta explicando el juego a los alumnos, cuenta el número de caras presentes. Si el número es par, el docente debe recordar el número 0, sin embargo, si el número es impar debe recordar el número 1.

Cada vez que el alumno voltea una de las monedas y grita la palabra *giro*, el docente tiene que cambiar el valor asignado. Es decir, si se tenía un 0 se obtiene un 1 y viceversa.

Cuando se termina el proceso y el alumno tapa una moneda, el docente debe emplear este razonamiento para saber en qué posición (cara/cruz) está la moneda oculta.

- Sí el número final es 0 quiere decir que hay un número par de caras. Entonces, si una moneda es cara y la otra es cruz, la moneda que falta tiene que ser cara, mientras que, si las dos monedas está, de cara o las dos de cruz, la que falta será cruz.
- Sí el número final es un 1 quiere decir que habrá un número impar de caras. Entonces, si una moneda es cara y la otra cruz, la moneda que está oculta es cruz, sin embargo, si las dos monedas visibles son caras o las dos son cruz, la moneda oculta es cara.

Este truco se puede complicar, aparentemente, utilizando más monedas, sin embargo, el razonamiento es el mismo, solo hay que fijarse en la paridad de las monedas antes y después de la sucesión de giros.

Un ejemplo concreto puede ser que el docente utiliza cuatro monedas, y tres están en el estado cara y una en el estado cruz. Entonces cómo el número de caras es impar, se comienza con el número 1. El alumno decide realizar estos giros:

- Primer Giro: Pasa una moneda de cara a cruz. Entonces, se tiene dos caras y dos cruces. El docente cambia de 1 a 0.
- Segundo Giro: Pasa otra moneda de cara a cruz. Por lo tanto, se tiene una cara y tres cruces. El docente cambia de 0 a 1.
- Tercer Giro: Pasa otra moneda de cara a cruz. Se tiene cuatro cruces y ninguna cara. El docente cambia de 1 a 0.
- Cuarto Giro: Pasa una moneda de cruz a cara. Por lo tanto, se tiene una cara y tres cruces. Y el docente cambia de 0 a 1

El alumno decide terminar el proceso y oculta una de las monedas cuyo estado es cruz. El docente observa las monedas y cuenta, solamente, 1 cara y como terminó con el número 1, sabe que tiene que haber un número impar de monedas cara, entonces la moneda oculta tiene que estar en el estado cruz porque si fuera cara se tendría un número par de monedas caras y se acaba de decir que tiene que ser impar.

Una alternativa a este juego, es que el alumno oculte dos monedas en vez de una al final de proceso. A través de la misma propiedad se puede adivinar si las dos monedas tapadas tienen el mismo estado o no. Para ello, si las monedas visibles tienen la misma paridad que la inicial, las dos monedas ocultas tienen el mismo estado, pero, si la paridad ha cambiado, las dos monedas también tienen diferente estado.

Un ejemplo, para el caso anterior, después de los cuatro giros (se tiene una cara y tres cruces). Ahora el alumno decide ocultar dos monedas cruz, por lo tanto, el docente observa una cara y una cruz, por lo que obtiene un 1 (número de caras impar) y se da cuenta que coincide con el inicial. El docente asegura que las dos monedas tienen el mismo estado, es decir, que son dos caras o dos cruces y acierta.

Secuenciación

Para esta actividad de magia se seguirá está temporalización:

1. El docente realiza el truco de magia varias veces a los alumnos para que lo analicen (5 min).
2. Los estudiantes comienzan a reflexionar y debatir entre ellos cual es el fundamento, que creen, que se basa este juego de magia. Con la ayuda del docente, si fuera necesario, tienen que llegar que la regla que lo rige está relacionada con la paridad de los números enteros (15 min).
3. Para terminar, los alumnos practican realizando este truco de magia con sus compañeros (10 min). El docente manda para casa que se inventen un truco similar al presentado en clase (una alternativa sería el propuesto).

4. Evaluación (10 min).

Evaluación

Se pedirá a los alumnos que se inventen un truco de magia y que resuelvan una serie de ejercicios para analizar si se entendieron bien los contenidos.

1. Una parte de la evaluación es inventarse un juego de magia basado en los conceptos de divisibilidad.
2. Determinar, sin calcular, si estos números son pares o impares
   a) $2 \cdot 65834 + 1$
   b) $2 \cdot 65834 + 2$
   c) $6 \cdot 65834 + 5$
   d) $6 \cdot 65834 + 5 \cdot 43$

5.2. Álgebra

Operaciones con expresiones algebraicas: EL SIEMPRE PREVISIBLE 1089

Con este truco de magia (McOwan and Parker ,2010) se pondrá en práctica las operaciones con expresiones algebraicas y un buen ejercicio será que los alumnos se invente otro truco de magia donde se apliquen otras operaciones.

Materiales

Ninguno adicional a los habituales usados por el docente en las clases.

Puesta en escena

Se busca un voluntario en clase y se le dice que piense un número de tres cifras que no sea capicúa ya que sería demasiado fácil. A continuación, el docente se da la vuelta y escribe un número en un papel, lo dobla y se lo entrega a otro alumno.

Ahora, el alumno tiene que hacer las siguientes operaciones:

1. Cambiar entre sí la primera y última cifra.
2. Restar los dos números, el inicial y el que intercambio las dos cifras (restar al mayor el menor).
3. Al resultado obtenido se le vuelve a cambiar la primer y última cifra.
4. Sumar los dos números últimos.

Una vez que el alumno ha hecho estas operaciones dice el resultado que le ha salido es 1089 y casualmente coincide con el resultado que había puesto el docente en el papel.

Para un caso concreto, imaginar que el alumno ha elegido el número 675, entonces los paso a seguir son:

1. Se obtiene 576
2. Se resta:

$$675 - 576 = 99$$

3. Se obtiene 990
4. Se suma:

$$990 + 99 = 1089$$

Explicación

Se considera el número *abc*, se partirá del supuesto de que a es mayor que c, a > c.

Entonces:

$$abc = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c$$

El primer paso es cambiar la primera y última cifra, por lo tanto:

$$cba = 100 \cdot c + 10 \cdot b + a$$

El segundo paso es restar el número mayor al menor, como se ha supuesto que a es mayor que c, se tiene que:

$$(100 \cdot a + 10 \cdot b + c) - (100 \cdot c + 10 \cdot b + a) = 100(a - c) + (c - a)$$

Como a > c se tiene que c-a es negativo. Para anular ese número negativo lo que se va a hacer es sumar y restar por 100 unidades realizando estas operaciones:

$$\begin{aligned} 100(a - c) + (c - a) &= 100(a - c - 1) + 100 + (c - a) \\ &= 100(a - c - 1) + 90 + (10 + c - a) \end{aligned}$$

Con estas operaciones se consigue que $10 + c - a$ sea un número positivo entre 1 y 9. Analizando el resultado obtenido, se puede apreciar que el número tendrá siempre como segunda cifra un 9 y que la suma de la primera y tercera cifra también es 9 siempre:

$$(a - c - 1) + (10 + c - a) = 9$$

El tercer paso dice que se cambia entre sí la primera y última cifra, entonces:

$$100(10 + c - a) + 90 + (a - c - 1)$$

El último paso pide sumar los dos últimos números, por lo que operando resulta que se llega al valor de 1089:

$$100(a-c-1)+90+(10+c-a)+100(10+c-a)+90+(a-c-1)100=$$

$$=100(10+\mathrm{c}-\mathrm{a}+\mathrm{a}-\mathrm{c}-1)+180+(10+\mathrm{c}-\mathrm{a}+\mathrm{a}-\mathrm{c}-1)=$$

$$=900+180+0=1089$$

Como se ha podido demostrar matemáticamente, independientemente del número inicial, el valor final después de realizar las operaciones propuestas es 1089.

La puesta en escena de este truco se puede mejorar, por ejemplo, copiando una palabra en vez de un número en el papel. Cuando el alumno ha pensado un número y ha realizado las operaciones pertinentes se le da un libro, y se le pide que busque de la siguiente manera:

- Con los dos primeros números ,10, localiza la página del libro por donde se tiene que abrir.
- En esa página, el siguiente número indica la línea en la que se tiene que mirar.
- Y la última cifra indica la palabra dentro de esa línea que se está buscando y que coincidirá con la palabra que escribió inicialmente el docente.

Lo que se quiere poner en manifieste con esto, es que es muy importante la puesta en escena para captar la atención del alumno y por consiguiente conseguir motivarlo.

Secuenciación

Para esta actividad de magia se seguirá está temporalización:

1. El docente hace la actividad de magia en clase varias veces, con diferentes alumnos (5 min).
2. EL profesor deja un tiempo de reflexión para que los alumnos debatan porque el docente es capaz de acertar el resultado final, es decir, que fundamentos matemáticos está empleando. El docente va dando pistas según considere. Una buena pista es que elijan un número *"abc"* cualesquiera e intente realizar las operaciones. La idea es que los alumnos lleguen a la solución final por ellos mismos y el docente esta únicamente de guía (20 min).
3. Los alumnos tienen que inventarse para el próximo día un juego de magia similar que tienen que entregar al docente. Además, varios alumnos presentarán sus trucos a la clase (20 min).
4. El docente aprovechará el juego de magia para presentar el lenguaje algebraico y las operaciones habituales con polinomios (140 min).

5. Evaluación (15 min).

Evaluación

Se pedirá a los alumnos que se inventen un truco de magia y que resuelvan una serie de ejercicios para analizar si se entendieron bien los contenidos.

1. Una parte de la evaluación es inventarse un juego de magia basado en los fundamentos del algebra, similar al realizado en clase.
2. Una serie de ejercicios para practicar el lenguaje algebraico y sus operaciones:
   a) Expresa las siguientes frases en lenguaje algebraico:
      - El triple de un numero
      - El producto de dos números consecutivos
      - La edad de pedro hace 3 años
      - La diferencia de dos números

   b) Calcula el valor numérico de los siguientes polinomios:
      - 6x + 4y   para x = 3, y = 2
      - 2-3a   para a = -5

   c) Determina:
      - $(-x^3 + x - 7) + (x^2 + 4x - 1) + (3x^3 + 2x^2 - 5x)$
      - $(-2x) \cdot (3x^2 - 4)$

Factorización: TRUCO QUE VENCE A LA CALCULADORA

Con esta actividad de magia (McOwan and Parker ,2010) se trabaja el concepto de factorizar, es decir, sacar un factor común de unos monomios. Este truco se puede utilizar para captar la atención de los alumnos ya que es muy rápido y sorprendente. Además, se repasa la herramienta de factorizar la cual es muy útil para simplificar expresiones.

Materiales

Ninguno adicional a los habituales usados por el docente en las clases.

Puesta en escena

Se pide a un alumno que diga un número cualquiera de cuatro cifras, A, y se explica que otro alumno dará otro número de cuatros cifras, B. El mago, docente, usará sus poderes y hará la multiplicación más rápido que cualquier alumno con la calculadora.

Pero para hacerlo más complicado, el docente añadirá otro número de cuatro cifras, C, de tal manera que se multiplicarán de la siguiente manera:

$$A \text{ x} B \quad + \quad A \text{ x} C$$

Además, ahora el docente calculará la suma de los productos de una manera más rápida que cualquier alumno con calculadora.

Por ejemplo, un alumno da el primer número y su valor es 5791, el segundo estudiante da un valor de 3703. Entonces el docente da un número de 6296 y rápidamente da el resultado final que es 57904209.

Para el ejemplo anterior, como el primer alumno dijo el número 5791, se sabe que las primeras cuatro cifras del número final es 5790. Para conocer las otras cuatro cifras, simplemente, se debe poner el número complementario del número 5790. Entonces sería 4209, por lo que ya se tiene que el valor resultante es:

$$\mathbf{5791} \text{ x } 3703 + \mathbf{5791} \text{ x } 6396 = 57904209$$

Como se puede analizar, el valor final solo depende del primer número, es decir, el que nombró el primer estudiante. El número tanto del segundo estudiante como el del docente no influyen en el resultado final.

Explicación

Se quiere calcular el resultado de $A \text{ x} B + A \text{ x} C$, como se puede observar, el factor A está en ambos sumandos por lo que se puede sacar factor común a A :

$$A \text{ x} (B + C).$$

Otro estudiante elige un segundo número B, pero este no importa porque el docente puede elegir un valor C para que sea un número fácil de multiplicar.

Se podría elegir el valor de C para que $B + C = 10000$ y entonces poner el valor de A seguido de cuatro ceros. Sin embargo, muchos alumnos posiblemente se darían cuenta cómo se consiguió la respuesta y sería menos sorprendente.

Por esta razón se elige el valor $B + C = 9999$. C se llamará al número complementario de B. Entonces el resultado final es el producto de A x 9999 que es A-1 seguido de su complementario.

Secuenciación

Para esta actividad de magia se puede seguir dos temporalizaciones:

1. El docente presente el juego de magia a la clase, y lo realiza con varios estudiantes para que observen que funciona siempre (5min)
2. En este caso se puede optar por dos opciones:

a. El docente ha escogido este truco para captar únicamente la atención de los alumnos y no dedica más tiempo.
b. En este caso se utiliza dicho juego para recordar la importancia de factorizar para poder simplificarlas expresiones. Para este caso, seguiremos con los puntos sucesivos.

3. El profesor deja a los alumnos que debatan la razón por la que acierta el resultado de una manera tan rápida (10 min).
4. Si los alumnos no han conseguido llegar al resultado final, el profesor va guiando a los alumnos. Una pista que se puede dar es que se fijen como el docente elije el número. (10 min).
5. Evaluación (10 min) .

Evaluación

Se pedirá resolver un ejercicio muy sencillo en clase.

1. Simplifica estas expresiones:

a) $\frac{2x^4+2x+4}{2}$

b) $\frac{2x^3+x}{x}$

c) $\frac{2(x-2)-(x-2)}{x-2}$

Identidad y ecuaciones

Esta actividad de magia (Benítez Galarza, 2015) se puede realizar para introducir la unidad didáctica de ecuaciones y sistemas. Dicho truco mágico permite al estudiante aprender de una manera divertida la diferencia entre una identidad y una ecuación.

Materiales

Ninguno adicional a los habituales usados por el docente en las clases.

Puesta en escena

El docente pide a un estudiante que piense un número. A continuación, el alumno realiza estas operaciones:

1. Sumar 3
2. Multiplicar por 2
3. Restar 4

4. Dividir por 2
5. Restar el número inicial

Al terminar el alumno las operaciones, el docente comenta que el número final que ha obtenido es 1 y acierta.

Un ejemplo concreto: el alumno ha elegido el número 7 y realizando las operaciones paso a paso se obtiene:

1. Se suma el valor de 3:

$$7 + 3 = 10$$

2. Se multiplica por 2:

$$10\ x\ 2 = 20$$

3. Se resta 4 al valor anterior:

$$20 - 4 = 16$$

4. Se divide por 2:

$$\frac{16}{2} = 8$$

5. Finalmente se resta el número inicial

$$8 - 7 = 1$$

Explicación

Si se llama x al valor que ha elegido el alumno y se calculan las operaciones que se han mencionado anteriormente:

- Se suma el valor de 3:

$$x + 3$$

- Se multiplica por 2:

$$(x + 3) \cdot 2$$

- Se resta 4 al valor anterior:

$$(x + 3) \cdot 2 - 4$$

- Se divide por 2:

$$\frac{(x + 3) \cdot 2 - 4}{2}$$

- Finalmente se resta el número inicial

$$\frac{(x + 3) \cdot 2 - 4}{2} - x$$

Y operando esa expresión se obtiene:

$$\frac{(x+3)\cdot 2-4}{2}-x=\frac{2\cdot x+6-4-2\cdot x}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Entonces queda demostrado que independientemente del valor que se elija inicialmente el resultado es 1.

Después de realizar el truco, el docente explica que se encuentran frente a una identidad ya que independientemente del valor que tenga *x* el valor siempre es 1, es decir, se cumple para cualquier valor de *x*. Sin embargo, para una ecuación la igualdad se cumple sólo para algunos valores de *x*.

Este juego de magia es una buena oportunidad para que los alumnos se inventen otro truco de magia similar creando otra identidad.

Secuenciación

Para esta actividad de magia se seguirá está temporalización:

1. El docente hará la actividad de magia varias veces en clase, con diferentes alumnos (5 min).
2. Los alumnos intentan descubrir en que se basa el docente para acertar siempre el resultado. Para ello, los estudiantes pueden intercambiar opiniones entre ellos. Además, en este caso los alumnos tienen la "ventaja" de que observan que siempre se obtiene el mismo resultado. El docente va guiando a los alumnos, si lo necesitasen, con alguna pista (15 min).
3. Una vez realizado y entendido las bases del juego magia, el docente explica la diferencia entre ecuación e identidad (10 min).
4. El docente manda a los estudiantes invertirse otro truco de magia parecido, en casa, y enviárselo. Algunos alumnos lo presentarán en clase (15 min)
5. Evaluación (5 min).

Evaluación

En este caso, la evaluación consta de dos partes:

1. Será el juego de magia entregado y la presentación del truco si se ha realizado en clase.
2. Será una evaluación muy corta y sencilla. Podría ni hacerse si el docente no lo ve necesario.
   - Determina si es una identidad

     a) $(x-2)+(x^2+3)$

     b) $\frac{x-2-x+6}{4}$

c) $\frac{(x-2)+(x-2)x}{x-2}$

Ecuaciones de primer grado: ADIVINACION DE UNA CARTA

Este es el truco (Alegría y Carlos Ruiz de Arcaute, 2002) que se ha seleccionado para introducir las ecuaciones de primer grado. Es un truco muy fácil y útil para realizar en el aula.

Materiales

Además de los materiales habituales, el profesor reparte unas fotocopias para desarrollar este juego de magia.

Puesta en escena

El docente reparte una fotocopia a cada alumno, donde aparecerá una tabla con unas instrucciones. La tabla asigna unos valores a los palos de una baraja de cartas:

OROS	COPAS	ESPADAS	BASTOS
1	2	3	4

Tabla 8. El valor numérico de los palos

Del mismo modo, cada carta tiene un valor numérico que es el indicado por su número, donde la sota tiene un valor de 8, el caballo de 9 y el rey de 10.

Se selecciona a un alumno para que piense una carta y realice las siguientes operaciones:

1. Multiplicar el valor numérico de su palo por 2
2. Sumar 3
3. Multiplicar por 5
4. Sumar el valor de su número

Entonces, el alumno da el valor que le ha salido y el docente acierta la carta que ha elegido el estudiante.

Un ejemplo, el alumno ha pensado el 5 de copas entonces aplicando los cuatro pasos se tiene que:

1. Multiplicar el valor numérico de su palo por 2.

$$2\ x\ 2 = 4$$

2. Sumar 3.

$$4 + 3 = 7$$

3. Multiplicar por 5.

$$7\ x\ 5 = 35$$

4. Sumar el valor de su número.

$$35 + 5 = 40$$

El alumno dice 40 y el docente acierta que es el 5 de copas.

Explicación

Antes de empezar a explicar este juego de magia se va a aclarar que se llamará *"x"* al número de la carta e *"y"* al valor numérico equivalente al palo, ver tabla 8. Entonces aplicando los 4 pasos se tiene:

1. Multiplicar el valor numérico de su palo por 2.

$$y \cdot 2$$

2. Sumar 3.

$$y \cdot 2 + 3$$

3. Multiplicar por 5.

$$(y \cdot 2 + 3) \cdot 5$$

4. Sumar el valor de su número.

$$(y \cdot 2 + 3) \cdot 5 + x$$

Operando se obtiene que:

$$(y \cdot 2 + 3) \cdot 5 + x = 10 \cdot y + 15 + x = 10 \cdot (y + 1) + x + 5$$

Entonces para determinar el palo y el número hay que darse cuente que se pueden encontrar dos situaciones:

1. El valor que te da el alumno termina en una cifra mayor que 5, es decir, acaba en 6,7,8, o 9. Entonces se tendrían que resolver estas dos ecuaciones:

$$10 \cdot (y + 1) = Valor\ de\ la\ decena$$

$$x + 5 = Valor\ de\ la\ unidad$$

2. El valor que te da el estudiante acaba en una cifra menor o igual que 5, es decir, 0,1,2,3,4, o 5. En este caso se tendría estas ecuaciones:

$$x + 5 = 10 + Valor\ de\ la\ unidad$$

$$10 \cdot (y + 1) = -10 + valor\ de\ la\ decena$$

Ahora se va a comprobar para el caso que se propuso antes. Para el 5 de copas se obtiene un número cuyo valor es de 40. Entonces, dentro de las dos opciones posibles se está en la segunda posibilidad, resolviendo las dos ecuaciones se obtiene:

$$x + 5 = 10 + 0 \;\; \rightarrow \;\; x = 5$$

$$10 \cdot (y + 2) = 4 \;\; \rightarrow \;\; y = 2$$

Por lo tanto, según los valores de la tabla sería el 5 de copas ya que *x = 5*, el valor numérico de la carta, e *y=2*, el valor equivalente a las copas según la tabla de arriba.

Para el caso del 4 de oros se consigue un resultado, después de calcular las operaciones, de 29. Entonces, se está en el caso 1, donde la cifra de las unidades es superior a 5. Aplicando las dos ecuaciones se obtiene un valor de *x* e *y* de:

$$x + 5 = 9 \;\; \rightarrow \;\; x = 4$$

$$10 \cdot (y + 1) = 2 \;\; \rightarrow \;\; y = 1$$

Si se observa la tabla para un valor de y *= 1* es equivalente al palo de oros, y el valor de *x = 4* es equivalente al número de la carta por lo que se sabe que la carta inicial es el 4 de oros.

Secuenciación

Para esta actividad de magia se seguirá está temporalización:

1. El docente hace la actividad de magia en clase varias veces, con diferentes alumnos (5 min).
2. El docente deja un tiempo a los alumnos para que intenten averiguar cómo ha adivinado la carta. Después de todos los juegos de magia que se han hecho durante el curso, la mayor parte de los alumnos obtendrán el valor de la expresión en función de *x* (valor numérico de la carta) e *y* (valor que toma el palo de la carta). A partir de aquí tendrán que debatir como el docente adivina que carta es, para ello, posiblemente el docente tenga que ayudarles. Por ejemplo, diciendo que se analice atentamente la expresión obtenida en función de x e y, concretamente en las unidades. Para ciertos valores de *x* se tendrá que añadir una unidad a las decenas (25 min).
3. Los alumnos practican el juego de magia con sus compañeros (15 min)
4. A partir de este truco de magia, el docente explicará las ecuaciones de primer grado (50 min).
5. Evaluación (15 min)

Evaluación

Se pedirá hacer unos ejercicios sencillos sobre ecuaciones de primer grado.

1. Calcula:
   a) $5x - 1 = 3x - 4$

b) $2x - 27 = x$

c) $\frac{x}{3} = 7$

2. Si un repartidor de pedidos ha dejado los 2/5 de los paquetes que llevaba en la primera casa. Y aún le quedan 99 kg por repartir, ¿Cuántos kilos tenia al principio?

Sistemas de ecuaciones: EL EXPERIMENTO DE CONTROL DEL CEREBRO

Este es un truco (McOwan and Parker ,2010) interesante para introducir el sistema de ecuaciones lineales. En esta actividad de magia se hace creer que el poder del cerebro humano controla eventos a distancia.

Materiales

Una baraja de cartas, además, de los materiales habituales usados por el docente en las clases.

Puesta en escena

El docente empieza a barajear una baraja de cartas, consta de 52 cartas y la mitad son negras y la otra mitad son rojas. Mientras barajea comenta que tiene un gran poder que permite a su cerebro controlar las cartas. Para demostrarlo dice que va a pensar en el color rojo y con las cartas bocabajo selecciona trece cartas, siempre pensando en el color rojo. El docente vuelve a barajear y hace lo mismo pensando en el color negro y selecciona otras 13 cartas pensando ahora en el color negro. A continuación, junta las 26 cartas seleccionadas y las coloca montón (boca arriba) manteniendo el resto de las cartas bocabajo.

Ahora es cuando comienza el control remoto y el docente tiene que concentrarse. Tiene que separar las cartas que ha seleccionado y que están bocarriba en dos bloques, el bloque rojo y bloque negro del siguiente modo:

- El profesor coge una carta del bloque que tiene las cartas bocarriba, si la carta es de color rojo, coloca esta carta en el bloque de color rojo y selecciona una carta aleatoria de las cartas que están bocabajo y la coloca enfrente del bloque rojo (bocabajo).
- De la misma manera, si el docente coge una carta de color negro, la colocará en el bloque de las cartas de color negro y cogerá una carta aleatoria de las cartas bocabajo y la situará enfrente del bloque negro (bocabajo).

Este proceso se repite para todas las cartas de tal manera que al final se tiene un montón de cartas rojas con un montón enfrente (bocabajo) con la misma cantidad de cartas y que se selecciona pensando en rojo. Por otro lado, se tiene un bloque de cartas de color negro con un montón enfrente de cartas (bocabajo), con la misma cantidad, y que se selecciona pensando en el color negro.

Increíblemente los pensamientos han influido en las cartas que se han seleccionado de manera aleatoria. Para ello se selecciona a un voluntario, y se le pide que cuente, del montón de cartas que se colocó enfrente del montón rojo, el número de cartas rojas. Del mismo modo, el alumno cuenta el número de cartas negras que están enfrente del montón negro.

El alumno se da cuenta que son las mismas, entonces el docente comenta que ha elegido el mismo número de cartas rojas y negras de manera, aparentemente, aleatoria ya que su cerebro lo estaba controlando.

Pero la realidad es que no hay ningún control mental y solo están las matemáticas.

Explicación:

Se va a llamar R1 al montón de cartas rojas y B1 al montón de cartas negras. Los dos montones de enfrente tienen una mezcla aleatoria de cartas rojas y negras, por lo tanto, se dice que el montón enfrente de R1 contiene R2 cartas rojas y B2 cartas negras y el montón enfrente de B1 tendrá R3 cartas rojas y B3 cartas negras, ver figura de abajo.

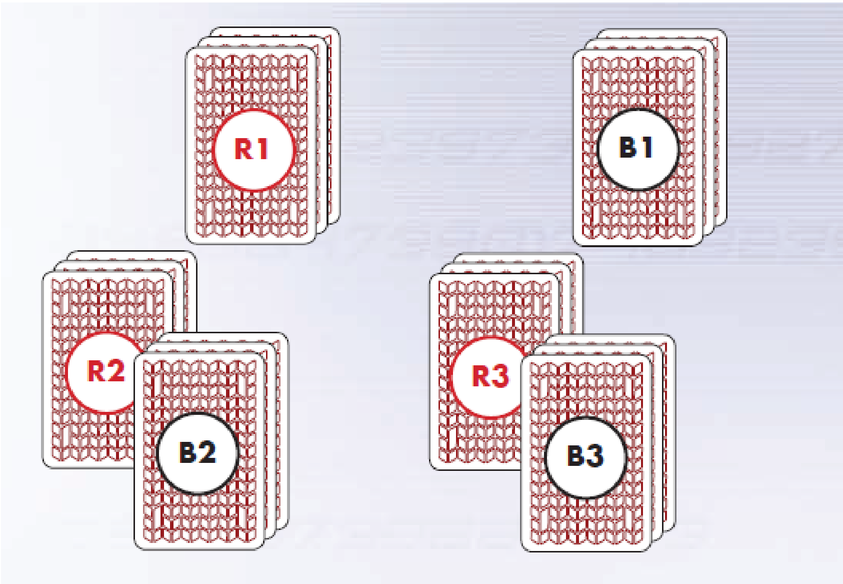

Figura 12. Colocación de cartas (McOwan and Parker ,2010)

En la primera parte del experimento los que se hizo es dividir las cartas en dos mitades. Se obtuvo dos montones de 13 cartas cada uno, es decir, 26 cartas que es la mitad de la baraja, 52.

También se sabe que la mitad de cartas son rojas y la otra mitad son negras, por lo que la suma de los montones rojos debe sumar 26 y lo mismo sucede con los negros. Sí se escribe matemáticamente se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} 1)\ R1 + R2 + R3 = 26 \\ 2)\ B1 + B2 + B3 = 26 \end{Bmatrix}$$

Por otro lado, también se conoce que el número de caras del montón rojo R1, es la misma cantidad que el número de cartas bocabajo colocadas enfrente de este, es decir, la suma de R2 y B2. De manera similar, el montón B1 deber contener las mismas cartas que la suma de R3 y B3. Escribiéndolo matemáticamente se tiene que:

$$\begin{Bmatrix} 3)\ R1 = R2 + R3 \\ 4)\ B1 = B2 + B3 \end{Bmatrix}$$

Se tiene un sistema de cuatro ecuaciones y 6 incógnitas. Si se sustituye la ecuación 3 en la ecuación 1, se puede eliminar R1:

$$5)\ (R2 + B2) + R2 + R3) = 26$$

Si se hace lo mismo, sustituyendo la ecuación 4 en la ecuación 2, se puede eliminar la incógnita B1:

$$6)\ (R3 + B3) + B2 + B3) = 26$$

Como ambas ecuaciones (5 y 6) suman 26, si se igualan se obtiene:

$$(2 \cdot R2) + b2 + R3 = 26 = R3 + (2 \cdot B3) + B2$$

Operando se puede eliminar R3 y B2 de tal manera que:

$$2 \cdot R2 = 2 \cdot B3 \ \rightarrow R2 = B3$$

Entonces, las matemáticas muestran que el número de cartas rojas (R2) en frente del monto rojo (R1) tiene que ser siempre igual al número de cartas negras (B3) colocadas en frente del monto negro (B1).

Secuenciación

Para esta actividad de magia se seguirá está temporalización:

1. El docente hará la actividad de magia en clase demostrando el poder que tiene su cerebro para controlar eventos (5 min).
2. Los alumnos reflexionan y debaten como el docente consigue realizar el juego de magia, es decir, que fundamentos matemáticos tiene el truco para que funcione. El docente les orienta y da pistas con la finalidad de que los alumnos lleguen a la solución. Una buena pista es que vayan asignando a cada montón el número de cartas rojas y negras, y que posteriormente intenten plantear ecuaciones. (25 min)

3. EL docente utiliza el truco de magia para explicar el contenido referente a sistemas de ecuaciones lineales (150 min).
4. Evaluación (20 min).

Evaluación

Se pedirá hacer unos ejercicios sencillos sobre sistemas de ecuaciones lineales.

1. Resuelve por el método sustitución:

$$\begin{Bmatrix} 2x + 4y = -5 \\ 3x - 6y = 7 \end{Bmatrix}$$

2. Resuelve por el método igualación:

$$\begin{Bmatrix} 6x + 7y = 8 \\ -3x + 2y = -4 \end{Bmatrix}$$

3. Resuelve por el método reducción:

$$\begin{Bmatrix} 5x + 3y = 2 \\ 4x + y = 7 \end{Bmatrix}$$

5.3. Actividades propuestas para cursos superiores

En este apartado se van a desarrollar tres juegos de magia muy interesantes con contenidos matemáticos pertenecientes a cursos superiores, por lo que estos trucos van enfocados a dichos cursos, pero se podrían realizar en los cursos de primero y segundo de la ESO, con el objetivo de motivar a los alumnos y dar una breve explicación a modo informativo. Estas actividades de magia, como antes, están relacionadas con el bloque de números y álgebra. En estos juegos de magia aparecerán los contenidos de sucesiones, matrices y el significado de la matriz transpuesta y la aritmética modular.

Sucesiones: CALCULOS RELAMPAGO DE FIBONACCI

Este juego (McOwan and Parker ,2010) se puede utilizar para introducir el tema de sucesiones en tercero de la ESO que es la primera vez que se va explicar la unidad didáctica de sucesiones. Además, servirá para mostrar una sucesión muy recurrente en matemáticas, que es la sucesión de Fibonacci.

Materiales

Ninguno adicional a los habituales usados por el docente en las clases.

Puesta en escena

Se elige un voluntario en la clase para que escriba en la pizarra dos números de dos dígitos cualesquiera. A continuación, el estudiante tiene que sumar ambos valores y este es el tercer número que escribe en la pizarra. El cuarto número se forma por la suma del segundo y tercer número y así consecutivamente hasta tener diez números. El docente calcula sin aparente esfuerzo la suma de esos 10 números escritos por el alumno.

Por ejemplo, si el alumno ha elegido como dos primeros números el 16 y el 21, entonces la sucesión formada hasta el término 10 es la siguiente:

1. **16**
2. **21**
3. **58**
4. **58**
5. **95**
6. **153**
7. **248**
8. **401**
9. **649**
10. **1050**

El docente puede mostrar lo brillante que es girándose a partir del séptimo número, una vez que el alumno ha cogido la dinámica de cómo se crean los números. Mientras el docente está girado, lo que está realmente haciendo es multiplicar el séptimo valor por 11 y de esa manera consigue el resultado final. En este caso la suma de esos diez números es 2728 ya que es el resultado del producto de $248 \cdot 11$. El docente debe permitir a los alumnos obtener esa suma con la calculadora para mostrar lo brillante que es y que sus habilidades funcionan.

Explicación

La secuencia de números que se ha creado, el siguiente termino es la suma de las dos anteriores, es conocida como la sucesión de Fibonacci. La secuencia de Fibonacci tiene especiales propiedades matemáticas que mucha gente desconoce.

Ahora se va a analizar el truco. Se inició con dos números cualesquiera A y B. El tercer número es A+B y a su vez el cuarto número es A+ 2B. Entonces, los diez números de la secuencia serían:

1. A
2. B
3. A + B
4. B + (A + B) = A + 2B

5. (A + B) + (A + 2B) = 2A + 3B
6. (A + 2B) + (2A + 3B) = 3A + 5B
7. (2A + 3B) + (3A + 5B) = 5A + 8B
8. (3A + 5B) + (5A + 8B) = 8A + 13B
9. (5A + 8B) + (8A + 13B) = 13A+21B
10. (8A + 13B) + (13A + 21B) = 21A + 34B

Si se suma los diez primeros números de la sucesión se obtiene un total de 55A + 88B. Pero se observa que el séptimo número de la columna es 5A + 8B, es decir, es exactamente el total de la suma, pero dividido por 11.

Esta es la manera de obtener la suma de los diez primeros números que siguen la sucesión de Fibonacci, no nos interesa los dos números iniciales A y B que se han elegido, si no el valor del séptimo número de la sucesión.

Este truco da la sensación de que la persona que lo hace es muy lista, pero realmente lo que sucede es que se conoce una propiedad de la secuencia de Fibonacci.

Secuenciación

Para esta actividad de magia se seguirá está temporalización:

1. El docente hace la actividad de magia en clase (5 min).
2. El docente deja unos minutos para que los alumnos debatan cómo puede sumar esos diez números de manera tan rápida. Entonces, el docente aprovecha para explicar que estos números forman una sucesión donde el término *"n"* se construye con la suma de los dos anteriores y se llama sucesión de Fibonacci. Finalmente cuenta la propiedad que tiene la sucesión de Fibonacci. (15 min).
3. EL docente aprovecha este juego de magia para explicar la unidad didáctica de sucesiones (250 min).
4. Evaluación (20 min).

Evaluación

Se pedirá hacer unos ejercicios sencillos sobre sucesiones:

1. Calcula el primer término de una progresión aritmética con $a_5 = 6$ u $d = -2$
2. Hallar la suma de los números impares menores de 1000
3. Determinar el término que ocupa el lugar 5 en una progresión geométrica cuyo primer término es 2 y la razón es 3.
4. Hallar la suma de los 11 primeros términos de una progresión geométrica sabiendo que el primer término es -2 y la razón -3.

Matrices: COMO DESCRUBIR LA CARTA PENSADA

Este juego (Hoffmann, 1876) se puede utilizar con el tema de matrices para introducir el concepto de matriz traspuesta.

Materiales

Una baraja de cartas, además, de los materiales habituales usados por el docente en las clases.

Puesta en escena

El docente reparte sobre una mesa 25 cartas, bocarriba, formando un cuadrado de 5 filas y 5 columnas. Posteriormente, el docente selecciona a un alumno para que piense una de las cartas y, además, le indique en que fila se encuentra. A continuación, el docente recoge todas las cartas que había sobre la mesa, pero de una manera determinada: coloca la última carta de la última fila sobre la última carta de la cuarta fila; coloca estas dos cartas sobre la última carta de la tercera fila y así se repite a lo largo de esa columna. Al terminar de recoger la última columna, coloca las cinco cartas sobre la última carta de quinta fila, esas cartas sobre la última carta de la cuarta fila y así hasta recoger todas las cartas.

Para que se entienda mejor se va a poner un ejemplo:

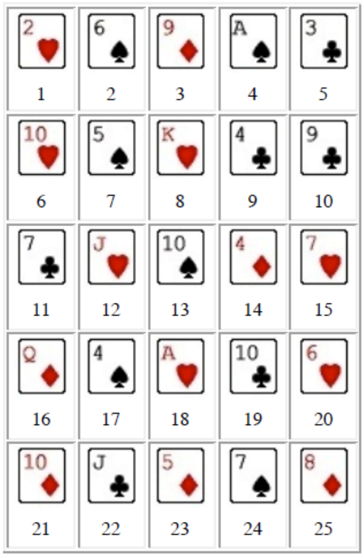

Figura 13. Posición 1 del juego de magia (Hoffmann, 1876)

El orden en el cual se recogen las cartas es:25-20-15-10-5-24-19-14-…-2-21-16-11-6-1.

Ahora el profesor vuelve a repartir todas las cartas de la misma manera que antes, formando otra vez un cuadrado de cinco filas y cinco columnas.

Según el caso anterior, la colocación de las cartas será la siguiente:

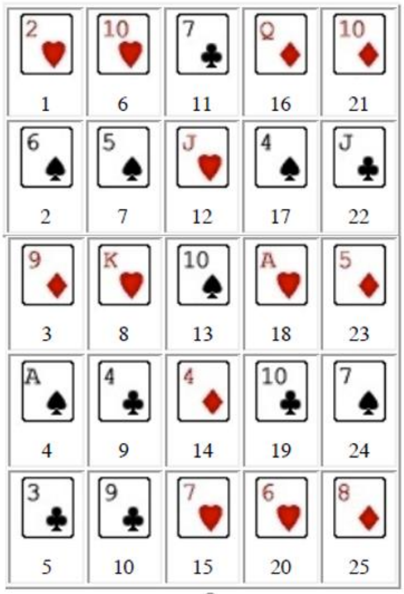

Figura 14. Posición 2 del juego de magia (Hoffmann, 1876)

El alumno indica en que fila esta la carta pensada y el docente, automáticamente, acierta la carta que había pensado el estudiante.

Un caso concreto, sería que el alumno pensase el 10 de diamantes, entonces en la primera distribución está en la fila 5, sin embargo, en la segunda distribución aparece en la fila 1. Automáticamente con estos datos el docente acierta que es el 10 de diamantes la carta pensada por el alumno y acierta.

Explicación

El docente es capaz de descubrir cuál es la carta del alumno debido al principio de localización tan trivial como el siguiente:

> *"si un conjunto de n^2 cartas se distribuye en un cuadrado de n filas y n columnas, cualquier carta está determinada de forma única por la fila y la columna en las que se encuentra."*

La forma en la que se aplica este principio al truco de magia se observa claramente en el proceso de recoger y repartir las cartas, haciendo que todas las cartas intercambian la fila con la columna. Así, si una carta está en la fila A y la columna B, cuando se recoge y se vuelve a repartir, esa carta está colocada en la fila B y columna A. Ejemplo, si la carta esta inicialmente en la fila 4 y luego en la fila 2, se trata de 4 de picas ya que en segundo reparto es la 4 carta de la 2 fila.

En matemáticas se dice que la nueva matriz es la transpuesta de la matriz inicial, y este ejercicio de magia se puede utilizar en el aula para que quede claro el concepto de matriz transpuesta.

Cuando se comienza con los ejes de coordenadas siempre los alumnos plantean el problema de que confunden la abscisa con la ordenada y para ellos el punto (3,2) pasa a ser el punto (2,3), dibujándolo mal. Con este truco se puede ver claramente la diferencia entre uno y otro, ya que al cambiar los órdenes se cambia la ubicación de la carta.

Una simple consecuencia de este principio es que el juego puede realizarse con 9, 16, 25, 36 o, en general, con cualquier número cuadrado de cartas. Sin embargo, no hay ninguna limitación matemática que impida realizar el juego con n x m cartas, siendo n y m distintos.

Bastará con que, en el primer reparto, se formen n filas y m columnas y, en el segundo reparto, se formen m filas y n columnas. En la práctica, esta distribución asimétrica no es natural y hace sospechoso el proceso, por lo que es más fácil que descubran el truco.

Secuenciación

Para esta actividad de magia se seguirá está temporalización:

1. El docente hace la actividad de magia en clase varias veces con diferentes alumnos (5 min)
2. Los alumnos intentan adivinar como el docente acierta la carta que ha pensado el estudiante. EL docente les guía diciéndoles, por ejemplo, que tiene que ver con la relación que hay entre las filas y columnas entre el primer y segundo reparto de cartas. Finalmente, el docente les explica lo que es la matriz transpuesta y como la primera fila de la matriz inicial es la primera columna de la matriz transpuesta (20 min).
3. Los alumnos practican este truco entre ellos (10 min).
4. Evaluación (5 min)

Evaluación

Se pedirá hacer unos ejercicios sencillos para comprender si saben realizar la transpuesta de una matriz:

Determina la matriz transpuesta de estas matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Aritmética Modular: EL TEST MAS JUSTO DE HABILIDADES PSIQUICAS

Aunque no aparece en el currículo de matemáticas de la ESO y bachillerato, se puede hacer este truco magia y dar una breve explicación de lo que es la aritmética modular. Otra forma de usar esta actividad de magia es, simplemente, para motivar al alumno sin necesidad de explicar matemáticamente en que se fundamenta. Aquí se desarrollará un truco (McOwan and Parker ,2010) y se propondrá otro juego interesante acerca de la aritmética modular en el anexo 5.

Materiales

Una baraja de cartas, además, de los materiales habituales usados por el docente en las clases.

Puesta en escena

El docente elige a un voluntario que piense que tiene buenas habilidades psíquicas. Entonces el docente coge 10 cartas (el A,2,3,4,5 de un palo rojo y las mismas cartas de un palo negro).

Los pasos a seguir son los siguientes:

1. El docente extiende las cartas y el alumno le señala el punto exacto por donde quiere cortar las cartas. Se repite el proceso tantas veces como el alumno quiera para que estén bien barajeadas las cartas.
2. El docente extiende todas las cartas sobre la mesa, boca abajo y de izquierda a derecha, para a continuación formar dos montones de cinco cartas cada uno (movimiento secreto).
3. El docente va eliminando pares de cartas mediante elecciones libres del estudiante (usará su buena intuición).
4. Las dos últimas cartas tienen que casar, es decir, que le quede el 3 de color rojo y el 3 de color negro.

Lo curioso de este truco de magia es que no solo casan las dos últimas cartas que se han eliminado, si no que casan todos los pares de cartas que se fueron eliminando libremente.

La forma de ir eliminando cartas esta predeterminada y es la siguiente: al principio se tienen 5 cartas en cada bloque, entonces se permite 4 movimientos tales que el estudiante puede mover la carta de arriba de su bloque a abajo del todo. Los movimientos pueden ser todos en el mismo bloque o tres en un bloque y otro en el otro o como se quiera, de tal manera que al final se realicen los 4 movimientos. Después de realizar los movimientos pedidos, las dos cartas de arriba de cada bloque se eliminan. Para el siguiente paso quedan 4 cartas en cada bloque y se permite 3 intercambios y así sucesivamente hasta quedar solo una carta en cada bloque.

Explicación

Al comenzar se tiene un solo bloque de 10 cartas del orden A2345A2345. Las cartas están colocadas en posición circular como si fuera un reloj con posiciones del 1 al 5. Haciendo cortes no se modifica el orden. Por ejemplo, un corte entre 2 y 3 da lugar a esta colocación: 345A2345A2.

Simplificando, se va a suponer que las cartas están en el orden original. Ahora es cuando el docente hace el movimiento secreto que consiste en revertir uno de los dos mazos de cinco de tal manera que el orden en uno es A2345 y el otro 5432A. Esto es lo que se conoce como "*palindromic stack".* Este movimiento secreto se realiza cuando se tiene las diez cartas extendidas sobre la mesa, para un montón se recogen las 5 primeras cartas como se extendieron, de izquierda a derecha, pero para el otro montón de 5 cartas se recogen al revés, de derechas a izquierdas.

Para que se entienda mejor, se supone que ya se tienen solo tres cartas en cada mazo A,2,3 (mazo de la izquierda) y 3,2, A (mazo de la derecha) por lo que se puede hacer dos intercambios, por lo tanto, se tiene varias opciones:

1. Los dos intercambios re realizan en el mazo de la izquierda, entonces se tiene un 3 arriba en el mazo de la izquierda que coincide con el 3 del mazo de la derecha.
2. Los dos intercambios se llevan a cabo en el mazo de la derecha, entonces se tiene el A arriba en dicho mazo que coincide con el A del mazo de la izquierda.
3. Un intercambio en cada mazo, por lo tanto, en el mazo de la izquierda se tiene el 2 y en el de la derecha también se obtiene un 2.

Como se puede observar, lo que está ocurriendo es que las dos cartas superiores de caza mazo, después de los intercambios, son la misma y entonces, las dos cartas eliminadas en cada ciclo coincidirán siempre.

Esto funciona siempre que se tienen N cartas y se permiten N-1 intercambios si están apilados mediante el "*palindromic stack*". Esta es una propiedad de la aritmética modular. A partir de este juego de magia, el profesor puede hacer una breve introducción de la aritmética modular.

Secuenciación

Para esta actividad de magia se sigue está temporalización:

1. El docente realiza el juego de magia con un voluntario del aula (5min)
2. Este juego se puede plantear de dos maneras:
    a. Los alumnos empiezan a debatir y discutir entre ellos cómo el docente consigue casar las cartas (10 min).

b. El docente realiza este juego para motivar a los alumnos, pero como el contenido esta fuera del temerario, no dedica tiempo a explicar cómo funciona la aritmética modular y la propiedad que se utiliza en este truco (0 min).

3. Si se opta por la opción 2.a, el docente les explica que este juego se basa en la aritmética modular, explicándoles brevemente en que se basa y la curiosa propiedad que utiliza el juego (20 min).
4. En este caso puede no hacerse una evaluación ya que es un contenido fuera de currículo. Es simplemente para que les suene, a modo de curiosidad, y sí algún alumno tiene especial interés en aprender más sobre aritmética modular, que tenga la base para poder investigar y profundizar más en dicho contenido (0 min).

Evaluación

Para este juego no se tiene pensado hacer una evaluación para observar si se ha entendido el contenido explicado ya que es contenido fuera de temario.

Pero si el docente quisiese hacer una pequeña evaluación, para adquirir información a modo informativo podría realizar algo del tipo:

1. Determinar sí 12 y 15 son congruentes módulo 3
2. Determinar sí 20 y 17 son congruentes módulo 5
3. ¿Una congruencia módulo 3 cuantas clases tiene? Da dos números que pertenezcan a cada clase.

6. Conclusiones

Es bien conocido que la transición de la aritmética al álgebra supone un problema de adaptación para muchos de los alumnos de los primeros cursos de educación secundaria, tanto por el formalismo como por lo poco motivantes que suelen ser los ejercicios llevados a cabo al respecto. En diversas investigaciones se ha observado la gran utilidad que pueden tener los juegos recreativos en el aula, siendo un recurso muy útil para motivar al alumnado y ayudarse para desarrollar el contenido. En el presente trabajo se han propuesto un conjunto de actividades de magia para desarrollar en el bloque de números y álgebra en los cursos de primero y segundo de la ESO. Éstas, se han estructurado de la siguiente manera: materiales, puesta en escena, explicación, secuenciación y evaluación.

Además de conseguir motivar al alumnado, este recurso permite al estudiante desarrollar distintas competencias y habilidades. A título de ejemplo y entre otras, desarrolla el pensamiento crítico y la creatividad de los estudiantes.

Otros autores han investigado, para los cursos de primaria, la utilidad de la *matemagia*, concluyendo que resulta útil para motivar y mejorar el rendimiento de los alumnos.

De manera similar, inicialmente se tenía la intención de investigar, durante las prácticas, la utilidad de la *matemagia* para los primeros cursos de la ESO, es decir, si realmente consigue una mayor motivación en el alumnado y, una mejora en su rendimiento. No obstante, como ya se ha precisado, no fue posible, pudiendo solo asistir a clases con alumnos de primero y segundo de bachillerato.

Por ello, como línea de investigación para futuro, se podría hacer este estudio para corroborar los beneficios de este recurso para estos cursos.

Otra línea de investigación interesante sería intentar aplicar la *matemagia* en otros bloques, con la intención de motivar al alumnado y ayudar a la compresión de los conocimientos.

Anexos

Anexo 1: Cuestionario para los alumnos

Cuestionario en relación con las matemáticas

Soy chica ☐ Soy chico ☐

Tengo………… años y voy a…….……. curso.

Estudio en el colegio ……………………………………………………… de ………………………….…..

Sobre mis clases de Matemáticas puedo decir lo siguiente:

1. ¿Cómo es la clase de Matemáticas? ☐

1	2	3	4	5
Divertida	No tan divertida	Ni divertida ni aburrida	No tan aburrida	Aburrida

2. Me gusta la clase de Matemáticas más que otras clases

SI ☐ NO ☐

3. Las cosas que aprendo en la clase de Matemáticas me sirven para la vida fuera de clase.

SI ☐ NO ☐

4. Realizo en casa actividades de Matemáticas, aunque no tenga la obligación de hacerlas

1	2	3	4	5
Siempre	Casi siempre	A veces	Casi nunca	Nunca

5. Me gustaría tener más actividades de Matemáticas en mi colegio

SI ☐ NO ☐

6. En mi colegio me enseñan Matemáticas con juegos y magia

SI ☐ A veces ☐ NO ☐

Figura 15. Cuestionario para los alumnos (Cézar y Serrano, 2015)

Anexo 2: Indicadores del proceso de enseñanza-aprendizaje

A) Indicadores del proceso de aprendizaje (a rellenar por el docente)

Alumno	Curso				
Indicadores	SI 1	2	3	4	NO 5
¿Mantiene una actitud positiva ante las actividades planteadas?					
¿Participa activamente en el desarrollo de las tareas?					
¿Comprende y sigue las indicaciones para realizar los trucos?					
¿Aplica convenientemente las operaciones necesarias y comprueba el resultado obtenido?					
¿Utiliza ordenadamente el lenguaje numérico cuando participa en las puestas en común?					
¿Maneja estrategias personales de cálculo mental?					
¿Explora distintas posibilidades y afronta con autonomía las situaciones problemáticas y se esfuerza por superarlas?					
OBSERVACIONES:					

Figura 16. Cuestionario sobre el proceso de aprendizaje (Cézar y Serrano, 2015)

B) Indicadores del proceso de enseñanza: autoevaluación del docente

MATETRUCO 1			
Indicadores:	SÍ	NO	Mejora
¿He respetado los principios metodológicos sugeridos?			
¿He desarrollado la actividad de una forma lúdica y motivadora?			
¿He cuidado la puesta en escena de los trucos con el fin de hacer la actividad más divertida?			
¿He conseguido crear un ambiente de ilusión para desarrollar las tareas?			
¿Siguen los alumnos las indicaciones con interés y atención?			
¿El agrupamiento elegido y la organización del aula son los más adecuados para el desarrollo de la actividad?			
OBSERVACIONES:			

Figura 17. Cuestionario sobre el proceso de enseñanza (Cézar y Serrano, 2015)

Anexo 3: Encuesta para docentes

Cuestionario sobre posibilidades didácticas de la matemagia

Soy docente del colegio ……………………………………………………………………. en……………………………

1. Durante las clases en las que he utilizado *matemagia*, los alumnos están atentos y muestran más interés

1	2	3	4	5
Siempre	Casi siempre	A veces	Casi nunca	Nunca

2. Observo que estas actividades fomentan la creatividad, la curiosidad, la motivación y la relació
entre ellos

1	2	3	4	5
Siempre	Casi siempre	A veces	Casi nunca	Nunca

3. Realizar los trucos propuestos me ha supuesto un esfuerzo extra o una preparación especial

1	2	3	4	5
Casi nada	Poco	Algo	Bastante	Mucho

4. Tras la realización del programa ha mejorado el nivel de los alumnos en el área

SI ☐ NO ☐ Alguno/as ☐

5. En el futuro seguiré empleando la *matemagia* como recurso didáctico

1	2	3	4	5
Seguro	Casi seguro	No sé	Casi nunca	Nunca

Figura 18. Cuestionario para los docentes (Cézar y Serrano, 2015)

Anexo 4: Contextualización matemática

En este apartado se van a desarrollar los contenidos matemáticos de primero y segundo de la ESO que han aparecido en los trucos de magia que se han desarrollado en el apartado 5.

Operaciones Aritméticas

En estos niveles se explica la suma y resta tanto de número enteros como de fracciones y decimales. La manera en la que se suele enseñar a restar dos números es sumando al primero el opuesto del segundo. Los alumnos también tienen que conocer las propiedades de la suma:

- Conmutativa: No importa en qué orden se sumen los números

$$a + b = b + a$$

- Asociativa: Se puede sumar más de dos números agrupándolos como se quieran, de dos en dos.

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

- Elemento Neutro: El número 0 se suma a cualquier número y no lo altera.

- Opuesto de un número: El otro número de mismo valor absoluto y distinto signo

$$Op(+a) = -a$$

Al igual que con la suma y la resta, el docente muestra a los alumnos el producto de números enteros, de fracciones y de expresiones decimales. Y como antes, también se enseña las propiedades de la multiplicación:

- Conmutativa: No importa en qué orden se multipliquen los números

$$a \cdot b = b \cdot a$$

- Asociativa: Se puede multiplicar más de dos números agrupándolos como se quieran, de dos en dos.

$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

- Elemento Neutro: El número 1 multiplicado por cualquier otro número, no lo altera.

$$1 \cdot a = a = a \cdot 1$$

Para terminar con la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Respecto a la división se enseña la división de números naturales donde se tiene que:

$$D = (d \cdot c) + r$$

Donde D es el dividiendo, del divisor, c el cociente y r el resto. Entonces se obtiene que dividiendo es igual a divisor por cociente más resto.

Para la división de números enteros hay que tener en cuenta los signos del dividiendo y el divisor para conocer el signo del cociente, ver figura 19.

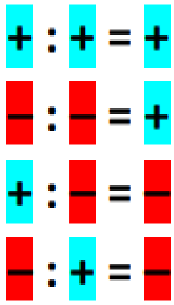

Figura 19. Signos del dividiendo, divisor y cociente (webgrafía)

Y para terminar este apartado se explica la jerarquía de las operaciones. Las reglas son:

- Primero se realizan las operaciones dentro de los paréntesis y luego el resto.
- Primero se efectúan las multiplicaciones y divisiones y luego, las restas y las sumas.
- En operaciones con la misma prioridad, se realizan de izquierda a derecha.

Sistemas de numeración

En este apartado se explican diferentes sistemas de numeración, el sistema de numeración que más se utiliza actualmente es el sistema de numeración decimal y se caracteriza porque el valor de una cifra en un número es diez veces mayor que el de la cifra situada a su derecha y diez veces menor que el valor de la situada a su izquierda.

Por esta razón se dice que es un sistema posicional, es decir, el valor de una cifra en un número depende del lugar que ocupe esa cifra.

Hay otros sistemas de numeración decimal actualmente como son los que se usan en los países árabes, ver figura 20:

Europeo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Arábigo-Índico	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
Arábigo-Índico Oriental (Persa y Urdu)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

Figura 20. Sistema decimal en los países árabes (webgrafía)

Otro sistema de numeración interesante, que todavía se usa actualmente, es el de los números romanos cuyas equivalencias se muestran en la imagen de abajo:

Figura 21. Sistema de numeración romano (webgrafía)

Por último, se explica otros sistemas de numeración como es el sistema de numeración en base 12 que ya se utilizó hace más de 5000 años y que se utiliza aun actualmente cuando se miden los objetos por docenas o con mediciones de tiempo (el reloj de muñeca clásico). Este sistema tiene 12 números que son 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11.

Otro sistema, cada vez más usado, es el sistema binario, base 2, y se utiliza sobretodo en ordenadores y calculadoras. Dicho sistema solo tiene dos posibles valores que se suelen representar como 0 o 1. Su equivalencia con el sistema decimal se puede observar en la figura de abajo, y como el sistema decimal es un sistema de numeración posicional.

DECIMAL	BINARIO
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001
10	1010

Figura 22. Representación en base 2 los 10 primeros números del sistema decimal (webgrafía)

Para pasar del sistema decimal al sistema binario hay expresar dicho número como una suma de potencias de 2.

Ejemplo, el número 17 expresado como suma de potencias de 2:

$$17 = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4$$

Entonces en el sistema binario es 10001 ya que solo tiene potencias de 2 para el exponente 0 y 4.Y de manera viceversa, si se tiene el número 110 expresado en el sistema binario, si se quiere determinar su valor en el sistema decimal:

$$0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 = 6$$

En definitiva, en estos primeros cursos se explica diferentes sistemas de numeración y sus equivalencias con el sistema de numeración decimal que es el que más se usa actualmente.

Expresiones decimales o exactas

El docente enseña que una expresión decimal consta de dos partes:

- Parte entera, lo que está a la izquierda de la coma.

- Parte decimal, lo que se encuentra a la derecha de la coma.

Pero la parte decimal puede ser finita, entonces se encuentra en el caso de una expresión decimal exacta. Por ejemplo 11.623.

Sin embargo, también se puede tener una parte decimal con infinitos números y en este caso se pueden encontrar de dos tipos:

- Periódico puro: Cuando el desarrollo decimal periódico comienza inmediatamente después de la coma. Ejemplo 2. 4545454545…
- Periódico mixto: Si el periodo está más allá de la coma. La parte decimal situada entre la coma y el periodo se llama ante periodo. Ejemplo 5,2765656565…

Además, el docente también explica la conversión de una fracción a una expresión decimal y viceversa.

Conversión de una fracción a una expresión decimal

Dada una fracción se obtiene su expresión decima dividendo el numerador entre el denominador.

Conversión de una expresión decimal en fracción

Se puede tener de tres tipos:

- Si la expresión decimal es exacta, se divide por una potencia de 10 de tal manera que desaparezca la coma. Ejemplo: $X = 31.528$

$$31.528 = \frac{31528}{1000}$$

- Si es periódico puro, el procedimiento es el siguiente. Para el ejemplo: $X = 7.\widehat{31}$

$$100 \cdot X = 100 \cdot 7.\widehat{31} = 100 \cdot 7.313131 \ldots = 731.3131 \ldots = 731.\widehat{31}$$

$$100 \cdot X - X = 731 - 7 \rightarrow 99 \cdot X = 724 \rightarrow X = \frac{724}{99}$$

- Si es periódico mixto, el procedimiento es el siguiente. Por ejemplo $X = 7.6\widehat{31}$

$$10 \cdot X = 10 \cdot 7.6\widehat{31} = 76.313131 \ldots$$

$$1000 \cdot X = 1000 \cdot 7.6\widehat{31} = 7631.313131 \ldots$$

$$(1999 - 10) \cdot X = 7631 - 76 \rightarrow X = \frac{7631 - 76}{990} = \frac{6555}{990}$$

Potencias

Se explica que una potencia es una forma de escribir, de manera abreviada, una multiplicación de factores iguales. El factor que se repite es la base y su exponente las veces que se repite.

$$a^n = a \cdot a \cdot a \ldots n\, factores \ldots \cdot a\; donde \quad n > 0$$

Las potencias de exponente tres se llaman cubos y de exponente 2 se llaman cuadrados.

A continuación, el docente muestra las operaciones con potencias y sus propiedades:

- Potencias de igual base: Se deja la misma base y se suman los exponentes.
$$7^3 \cdot 7^4 = 7^{3+4} = 7^7$$
- Cociente de potencias de igual base: Se deja la misma base y se restan los exponentes.
$$8^7 : 8^3 = 8^{7-3} = 8^4$$
- Elevar una potencia a otra potencia: Se deja la misma base y se multiplican los exponentes.
$$(9^3)^4 = 9^{3 \cdot 4} = 9^{12}$$
- Potencia de un producto: Es igual al producto de cada uno de los factores elevados al mismo exponente.
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$
- Potencia de un cociente: Es igual al cociente de cada uno de los factores elevados al mismo exponente.
$$(a : b)^n = a^n : b^n$$

A este nivel se trabaja con potencias de números enteros, entonces hay que tener claro algunas ideas:

- Si la base es positiva independientemente de si el exponente es positivo o negativo, el resultado es un número positivo.
$$3^3 = 27 \qquad 2^{-2} = \frac{1}{4}$$
- Si la potencia es negativa, se pueden dar dos opciones:
    - Exponente par, se obtiene un número positivo.
    $$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$$
    - Exponente impar, se obtiene un número negativo.
    $$(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)} = -\frac{1}{8}$$

Raíces

La raíz cuadrada de un número *a* es otro número *b* donde el cuadrado es igual al primero:

$$\sqrt{a} = b \leftrightarrow b^2 = a$$

Es decir, obtener la raíz cuadra exacta es la operación opuesta de elevar al cuadrado. Al signo √ se le llama radical, y lo que está dentro se denomina radicando. Por ejemplo para $\sqrt{64}$, el 64 es el radicando y el valor de la raíz es 8.

Para aquellos números naturales que no tienen raíz cuadrada exacta, su expresión decimal es un número irracional, con infinitas cifras decimales no periódicas. Por ejemplo $\sqrt{5}$, pero se puede afirmar que $2 < \sqrt{5} < 3$.

También el docente enseña lo que es la raíz n-ésima de un número. La raíz enésima de un número a, es otro número b, cuya potencia enésima es igual al primero.

$$\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow b^n = a$$

Para terminar, el docente explica cómo introducir/extraer factores del radical y como sumar y restar radicales.

- Introducir factores en el radical

$$10\sqrt{3} = \sqrt{10^2 \cdot 3}$$

- Extraer factores en el radical

$$\sqrt[4]{80} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 5} = 2 \cdot \sqrt[4]{5}$$

- Sumar y restar radicales, para poder sumar o restar radicales deben ser semejantes y eso se produce cuando tienen el mismo índice y el mismo radicando.

$$2\sqrt{8} + 5\sqrt{32} = 2\sqrt{2^3} + 5\sqrt{2^5} = 4\sqrt{2} + 20\sqrt{2} = 24\sqrt{2}$$

Hay que tener cuidado con este error común:

$$10 = \sqrt{100} = \sqrt{64 + 36} \neq \sqrt{64} + \sqrt{36} = 8 + 6 = 14$$

Divisibilidad

En esta unidad didáctica se explican diversos conceptos importantes entre los que destacan: múltiplos y divisores de un número, criterios de divisibilidad.

Múltiplos de un número

Se definen los múltiplos de un número entero *n* a los números que se obtienen de multiplicar ese número *n* por todos los números enteros. Por ejemplo, los múltiplos de 3 son:

0,3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,33,36,39,42,45…

Divisores de un número

Un número entero *a* es divisor de otro número entero *b* cuando al dividir *b* entre *a* da lugar a un resto que es igual a 0.

Hay que tener en cuenta que todo número tiene siempre como divisor a 1 y a sí mismo. Por ejemplo, 5 es divisor de 100 porque al dividir 100 entre 5, el resto es 0. Sin embargo, 7 no es divisor de 100.

Si *a* es divisor de *b*, entonces también se dice que b es divisible por a. Por ejemplo, 6 es divisible por 3 porque el 3 es divisor de 6, al dividir 6 entre 3, el resto es 0.

Criterios de divisibilidad

Para saber si un numero entero es divisible por otro número entero, basta con dividirlo y si el resto es cero, se cumple. Sin embargo, cuando los números son grandes las operaciones se complican. La solución para simplificar esto son los criterios de divisibilidad, que permite determinar si un número es divisible por otro sin calcularlo.

Algunos de los criterios que se desarrollan en el primer ciclo de la ESO son:

- Criterio de divisibilidad del 2: Cuando su última cifra es 0 o cifra par.

  490,564,876,4 son divisibles por 2

- Criterio de divisibilidad del 3: Suma de sus cifras es múltiplo de 3.

  531 es divisible por 3 porque 5 + 3 + 1 = 9 que es múltiplo de 3

- Criterio de divisibilidad del 4: El numero formado por las dos últimas cifras del número considerado es múltiplo de 4.

  5728 es divisible por 4 porque las dos últimas cifras son 28 y es múltiplo de 4, ya que 7 x 4 = 28

- Criterio de divisibilidad del 5: cuando termina en 0 o 5.

  2925 es divisible por 5

- Criterio de divisibilidad del 6: Cuando lo es por 2 y 3.

  5532 es divisible por 6 ya que es divisible por 2 (terina en cifra par) y por 3 (sus cifras suman 15)

- Criterio de divisibilidad del 9: La suma de sus cifras es 9 o múltiplo de 9.

  3313 no es divisible por 9 ya que 3 + 3 + 1 + 3= 10 que no es múltiplo de 9

- Criterio de divisibilidad del 10: Cuando el numero termina en 0.

  654930 es divisible por 10 ya que termina en 0

- Criterio de divisibilidad del 11: Cuando la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugar impar y la suma de las cifras que ocupan lugar par da 0 o múltiplo de 11

71335 es divisible por 11 ya que (7 + 3 + 5) – (1 + 3) = 11

Por último, para determinar todos los divisores de un numero dado *N*, se va dividiendo por los valores entre 1,2,3, 4..., N. y los divisores de *n* serán aquellos números en los que la división da exacta. Realmente si *N* es par con probar con los *N/2* primeros números naturales vale y si es primo sería con el número natural inferior más próximo a la división *N/*2.

Números primos y compuestos

En primer lugar, el docente define lo que es un número primo y compuesto.

- *Número primo:* Aquellos números naturales que tienen solo dos divisores: el 1 y él mismo.
- *Número compuesto:* Aquellos números naturales que tiene más de dos divisores, es decir, que no es primo.

Luego se explica un algoritmo que permite hallar todos los números primos a un número natural dado (la criba de Eratóstenes).

El algoritmo consta de estos pasos:

- Se construye una lista con todos los números desde 1 a 100 (ordenados de 10 en10).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 23. Criba de Eratóstenes etapa 1 (webgrafía)

- Se comienza tachando el 1 porque se sabe que es primo.

- El primer número que quede sin tachar ha de ser primo. Se marca y se tachan sus múltiplos. En este caso es el 2, entonces se deja sin tachar y se tachan sus múltiplos.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
51	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	57	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	63	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	69	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	75	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
81	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	87	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	93	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	99	~~100~~

Figura 24. Criba de Eratóstenes etapa 2 (webgrafía)

- Se repite el paso anterior hasta que se acaben los números

~~1~~	**2**	**3**	~~4~~	**5**	~~6~~	**7**	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	**13**	~~14~~	~~15~~	~~16~~	**17**	~~18~~	**19**	~~20~~
~~21~~	~~22~~	**23**	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	**29**	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	**37**	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	**43**	~~44~~	~~45~~	~~46~~	**47**	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	**53**	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	**59**	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	**73**	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	**79**	~~80~~
~~81~~	~~82~~	**83**	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	**89**	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	**97**	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Figura 25. Criba de Eratóstenes etapa 3 (webgrafía)

Posteriormente, se explica la descomposición de un número en factores primos. En primer lugar, está claro que si el número es primo se descompone por su propio número y el 1.

$$11 = 11 \cdot 1$$

Si el número es compuesto, se descompone como el producto de números primos.

$$18 = 3^2 \cdot 2$$

Para terminar, se enseña lo que es el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de varios números.

Máximo común divisor de varios números

Se llama máximo común divisor de varios números naturales al mayor de los divisores que son comunes a ellos y se escribe como M.C.D.

$$M.C.D(60{,}84) = 12$$

Para calcularlo se tiene que seguir estos pasos:

1. Factorizar todos los números
2. Se toman los factores comunes a todos los números elevados al menor exponente.
3. El M.C.D es el producto de todos los factores considerados en el paso anterior.

Como ejemplo se va a determinar el M.C.D de estos tres números:60,72 y 84

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

Dos números naturales cualesquiera siempre tienen como mínimo el 1 como M.C.D, en este caso se dice que ambos números son primos entre sí.

Mínimo común múltiplo de varios números

El mínimo común múltiplo de varios números naturales se refiere al menor de los múltiplos que tienen en común, y se escribe m.c.m.

$$m.c.m(20{,}15) = 60$$

Para determinar el m.c.m hay que seguir los siguientes pasos:

1. E factorizan los números.
2. Se cogen los factores comunes y no comunes con el mayor exponente
3. M.c.m es el producto de estos factores.

Un ejemplo, se va a determinar el mínimo común múltiplo de 60,72 y 84.

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$82 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

Entonces el m.c.m es:

$$m.c.m\ (60{,}72{,}84) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$$

Paridad

Los números enteros pueden ser pares, divisibles por 2, o impares, no divisibles por 2.

Si un numero termina la última cifra en 1,3,5,7,9, se dice que es impar, sin embargo, si termina en otro número es par. Los números pares e impares cumples unas reglas:

Suma

Par + Par = Par

Par + Impar = Impar

Impar + Impar= Par

Producto

Par x Par = Par

Par x Impar = Par

Impar x Impar= Impar

Para demostrar estas reglas se va llamar un numero par como *2 x n* y un número impar por *2 x n + 1*. Entonces se puede demostrar fácilmente esas reglas:

- Par + Par = Par

$$2xn + 2xm = 2x(n + m)$$

  Este número es par porque cualquier número multiplicado por 2 es par.

- Par + Impar = Impar

$$2xn + 2xm + 1 = 2x(n + m) + 1$$

  El primer factor es par por lo que si se suma una unidad pasa a ser impar.

- Impar + Impar= Par

$$2xn + 1 + 2xm + 1 = 2x(n + m) + 2 = 2x(n + m + 1)$$

  Este número es par porque cualquier número multiplicado por 2 es par.

- Par x Par = Par

$$2xn\ x\ 2xm$$

  Este número es divisible por 2.

- Par x Impar = Par

$$2xn\ x\ 2x(m + 1)$$

  Este número es divisible por 2.

- Impar x Impar= Impar

$$(2xn + 1)x\ (2xm + 1) = 4xnxm + 2xn + 2xm + 1$$

  Los tres primeros factores son pares, por lo tanto, su suma es par, como se le está sumando una unidad a un número par pasa a ser un número impar.

Lenguaje algebraico

Se empieza explicando lo que es el lenguaje algebraico y consiste en que se puede expresar mensajes en los que las letras representan variables de valor desconocido. Se utiliza números, letras y operaciones para representar la información.

Cuando se habla de algo desconocido se suele utilizar la letra *x*, aunque se podría utilizar cualquiera.

Las expresiones que mediante letras y números se representa una situación se llaman expresiones algebraicas. Dichas expresiones están formadas por varios sumandos que se llaman términos o monomios (la parte literal se llama letra y al número se le conoce como coeficiente). La suma de monomios se conoce como polinomio.

$$7x, 7 \text{ seria el coeficiente y x la parte literal}$$

Para poder restar y sumar monomios se tiene que tener la misma parte literal y se les conoce como semejantes, ejemplo:

$$9xy^2 + 7xy^2 = 16xy^2$$

A continuación, se explica que si se da un valor a las incógnitas se tiene el valor numérico. Si x = 1 e y = 2 entonces:

$$16xy^2 = 64$$

Se termina mostrando como se suman y multiplican polinomios. Hay que saber que el grado de un polinomio se determina como el mayor grado de sus polinomios.

$$\frac{1}{4}x^2 - 7x^3, el\ grado\ del\ polinomio\ es\ 3\ en\ la\ variable\ x$$

Suma de polinomios

Un polinomio es la suma de monomios, por lo tanto, la suma de polinomio es la suma de monomios. Como se dijo anteriormente para sumar monomios tienen que tener la misma parte literal.

Por ejemplo, se tienen los polinomios $p(x) = -3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ y $g(x) = -x^4 + 4x^2 - 5x - 6$, entonces:

$$p(x) + g(x) = \left(-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2\right) + (-x^4 + 4x^2 - 5x - 6) =$$

$$= -4x^4 + \frac{21}{5}x^2 - 5x - 4$$

Producto de polinomios

El producto de polinomios siempre da como resultado otro polinomio. A la hora de multiplicar polinomios, se utilizan las propiedades de la suma y el producto de números, concretamente la propiedad distributiva del producto respecto de la suma, por lo tanto, todo queda en función del producto de monomios, y se resuelve con facilidad:

$$ax^n \cdot bx^m = abx^{n+m}$$

Por ejemplo, si se tienen los polinomios $p(x) = \frac{1}{5}x^2 + 2$ y otro $g(x) = 5x - 6$, entonces:

$$p(x) \cdot g(x) = \left(\frac{1}{5}x^2 + 2\right) \cdot (5x - 6) =$$

$$= x^3 + 10x - \frac{6}{5}x^2 - 12$$

Por lo que se obtiene un polinomio de grado 3 al multiplicar un polinomio de grado 2 por otro de grado 1.

Ecuaciones e identidad

Se empieza enseñando la diferencia entre una identidad y una ecuación y es que la identidad siempre se cumple independientemente del valor de la incógnita (x).

- Identidad

2 * (x + 1) = 2x + 2

- Ecuación

2 * (x + 1) = 6   x = 4

En ambos casos, las expresiones a cada lado del igual se llaman miembros. La que está a la izquierda se llama primer miembro y el que está a la derecha se conoce como segundo miembro. Las letras que tienen las ecuaciones algebraicas se conocen como incógnitas y son desconocidas.

El grado de una ecuación es el exponente mayor que aparece en algunas de las incógnitas.

$$x^3 + 10x - \frac{6}{5}x^2 - 12 = 0, tiene\ grado\ 3$$

Para resolver la ecuación hay que encontrar los números que cuando las incógnitas tomen ese valor, se verifique la igualdad, es decir los dos términos de la ecuación valen lo mismo. Para una ecuación de primer grado con una incógnita:

$$7x - 3 = 5x + 9$$

No se verifica la solución para el valor de x = 1 ya que:

$$7 - 3 = 5 + 9 \rightarrow 4 \neq 14$$

Sin embargo, se observa que se cumple para el valor de x = 6:

$$7 \cdot 6 - 3 = 5 \cdot 6 - 3 \rightarrow 39 = 39$$

Para resolver una ecuación es muy pesado ir probando con valores para ver para cuales se cumple, lo que se hace es transformar la ecuación inicial por otra más sencilla y que tienen las mismas soluciones. A estas ecuaciones se les llama equivalentes. Las trasformaciones que se pueden hacer son:

- Sumar y restar los dos miembros de una ecuación por la misma cantidad.
- Multiplicar y dividir los dos miembros de una ecuación por una misma cantidad.

Finalmente, el docente termina haciendo problemas de ecuaciones de primer grado, tanto problemas numéricos como geométricos.

Una vez que se ha enseñado las ecuaciones de primer grado, se desarrolla las ecuaciones de segundo grado.

A diferencia de las de primer grado, ahora la mayor potencia de la incógnita es 2 y se escriben de la siguiente manera:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad donde\ a, b\ y\ c\ son\ números\ reales, con\ a \neq 0$$

Las ecuaciones pueden aparecer de manera incompleta o completa:

Ecuaciones de segundo grado incompletas

Se puede tener de dos tipos, cuando el coeficiente b es 0 o el coeficiente c es 0.

Si el coeficiente b es b = 0: Se resuelve con el mismo procedimiento que las ecuaciones de primer grado.

$$ax^2 + c = 0 \rightarrow ax^2 = -c \rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Si el coeficiente c es c = 0: Se resuelve de la siguiente manera:

$$ax^2 + bx = 0 \rightarrow x(ax + b) = 0$$

Para que se cumpla alguno de los dos factores deber ser 0, entonces se tiene como soluciones:

$$X = 0\ o\ ax = -b \rightarrow x = \frac{-b}{a}$$

Ecuaciones de segundo grado completas

Son aquellas en los que los calores de a, b y c son distintos de 0. Para calcular estas ecuaciones se utiliza esta fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Usando esta fórmula se determinan las dos soluciones de la ecuación. Se llama discriminante a la parte de la fórmula que está en el interior de la raíz.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Sistema de ecuaciones lineales

Se empieza explicando el sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Se puede expresar de la manera:

$$\left\{ \begin{matrix} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{matrix} \right\}$$

Donde *a, b, a' y b'* son números reales y se les llama coeficientes y c y c' son números reales que se les conoce como términos independientes.

La solución de dicho sistema debe verificar amabas ecuaciones.

Se dice que dos sistemas son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

Se pueden aplicar diversos procedimientos para resolver sistemas de ecuaciones. A este nivel, se verán tres métodos:

- *Método de sustitución.* Consiste en despejar una incógnita de una ecuación (x o y) y sustituirla en la otra ecuación.
- *Método de igualación.* Consiste en despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones e igualarlas.
- *Método de reducción.* Consiste en eliminar una de las dos incógnitas haciendo la suma de las dos ecuaciones. Para ello se multiplican una o ambas ecuaciones por un número de modo que los coeficientes de x o y sean iguales, pero de signo contrario.

Ahora se va a desarrollar brevemente los contenidos matemáticos correspondientes a sucesiones, matrices y aritmética modular. Estos contenidos se utilizan en las actividades propuestas, apartado 5, sin embargo, corresponde a niveles superiores a primero y segundo de la ESO.

Sucesiones

Este contenido se empieza a desarrollar por el docente en el curso de tercero de la ESO.

Se explica lo que es una sucesión. La sucesión de números reales es una secuencia ordenada de números.

$$2,4,6,8,10,12,14, \ldots$$

Se denomina término de la sucesión a cada uno de los elementos que forman la sucesión.

Se llama al termino general de la sucesión al término que ocupa la posición n-ésimo y se escribe de la manera a_n.

El docente desarrolla los dos tipos de progresiones que se van a enseñar en la unidad didáctica: progresiones aritméticas y progresiones geométricas.

Progresiones aritméticas

Se produce cuando la diferencia entre dos términos consecutivos de la sucesión es contante. A esta constante se llama diferencia de la progresión y se denota por la letra d.

De tal manera en una progresión aritmética se denota como:

$$a_{i+1} - a_i = d \text{ siendo i cualquier número natural}$$

Entonces si se tiene un a_i y una diferencia de progresión d:

a_1 dado

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$

$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$

…

$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-2)d + d = a_1 + (n-1)d$

Entonces el termino general de una progresión aritmética es:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Mas general, se puede expresar como:

$$a_n = a_k + (n-k)d$$

Para sumar los términos de una progresión aritmética se aplica dicha fórmula:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

Progresiones geométricas

Es una sucesión donde el cociente entre cada termino y el anterior es constante, es decir:

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = r \quad siendo\ i\ un\ número\ natural\ y\ a_i \neq 0$$

La constante se le llama razón de la progresión.

Entonces para un a_1 dado y una razón de progresión r:

a_1 dado

$a_2 = a_1 \cdot r$

$a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^2$

$a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^2 \cdot r = a_1 \cdot r^3$

…

$a_n = a_{n-1} \cdot r = a_1 \cdot r^{n-2} \cdot r = a_1 \cdot r^{n-1}$

El termino general de la progresión geométrica es:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Mas general, se puede expresar como:

$$a_n = a_k \cdot r^{n-k}$$

La suma de los *n* primeros términos de una progresión geométrica viene dada por:

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

Si se quiere determinar la suma de un número ilimitado de términos de una progresión geométrica, solo toma un valor finito si $|r| < 1$ y se calcula como:

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$

Matrices

Este contenido se enseña en segundo de bachillerato. Se explica el concepto de matriz, tipos de matrices que se pueden encontrar y se termina con operaciones de matrices, centrándose en la matriz traspuesta que es el concepto que se utiliza en el juego de magia.

Se denomina matriz de orden *n x m* al conjunto de números reales ordenados en m filas y n columnas tal que:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

La dimensión de la matriz es dada por el número de filas y columnas.

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \text{ tiene dimensión 2x3}$$

Los tipos de matrices que se pueden encontrar son:

- Matriz fila: Sólo tiene una fila.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

- Matriz columna: Sólo tiene una columna.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Matriz diagonal: Los elementos que no están en la diagonal son nulos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Matriz triangular: Los elementos que están por encima o debajo de la diagonal son nulos.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Matriz escalar: Los elementos de la diagonal son todos iguales siendo la matriz diagonal.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Matriz unidad: Es una matriz escalar en la que los elementos distintos de cero son 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Matriz Nula: Todos sus elementos son nulos.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, se enseña las operaciones con matrices: suma, producto de un número escalar por una matriz, producto de matrices, matriz inversa, método de Gauss-Jordan, matriz transpuesta y rango de una matriz.

Ahora se va a desarrollar únicamente la operación de matriz transpuesta ya que es la operación que se va a utilizar en el truco de magia.

Matriz transpuesta

Si te tiene una matriz A de dimensiones *n x m*, se conoce por matriz transpuesta de A y se representa por A^t, a la matriz que se obtiene de cambiar las filas de A por sus columnas. Entonces la matriz A^t tendrá de dimensiones *m x n*.

Dada una matriz A, su matriz transpuesta A^t será:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Una matriz cuadrada se dice que es simétrica cuando coincide con su transpuesta $A=A^t$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Se llama anti simétrica si la matriz cuadrad es igual a la opuesta de su transpuesta $A = -A^t$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Las matrices transpuestas cumplen estas dos propiedades:

- La transpuesta de una suma de matrices es igual a la suma de las matrices transpuestas:

$$(A+B)^t = A^t + B^t$$

- La transpuesta de un producto de matrices es igual al producto en orden inverso de las matrices transpuestas:

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

Aritmética Modular

Se dice que dos números enteros *a,b* son congruentes modulo *n* si tienen el mismo resto en su división por *n*. Se denota como:

$$a \equiv b(mod\ n)$$

Por ejemplo, para a = 12 y b = 20 y n = 4, se puede afirmar que *a y b* son congruentes modulo *n*. La razón es que el resto de dividir 12 entre 4 es 0, y coincide con el resto de dividir 20 entre 4.

Un primer resultado de esta definición es el siguiente lema que se puede demostrar fácilmente (aquí no se hará):

$$a \equiv b\ mod(n) \leftrightarrow (a-b) es\ un\ múltiplo\ de\ n$$

Para el caso concreto expuesto anteriormente se observa que se cumple ya que 8 es múltiplo de 4.

Finalmente, se comenta las relaciones de equivalencia y las clases de equivalencia.

Se considera un conjunto *X* y se define sobre *X* una relación binaria, que es simplemente una forma de relacionar los elementos *X* entre sí.

Si esta relación es reflexiva, simétrica y transitiva se dice que la relación es de equivalencia.

1. Reflexividad: $\forall x \in X, \;\; x\, R\, x$
2. Simetría: $\forall x, y \in X, \;\; x\, R\, y \;\rightarrow y\, R\, x$
3. Transitividad: $\forall x, y, z \in X, \quad x\, R\, y, y\, R\, x \rightarrow x\, R\, z$

Un caso concreto de relación de equivalencia es la relación *tener la misma paridad* ya que se cumplen las tres propiedades anteriores.

Se supone ahora que se tiene un conjunto X ($\neq \emptyset$) y $\sim$ una relación de equivalencia sobre X. El conjunto de todos los elementos de X relacionados con un elemento dado *x* se le denomina clase de equivalencia y se denota por $\bar{x}$.

$$\forall x \in X, \bar{x} = \{y \;\in X/x{\sim}y\}\, C\, X$$

De tal manera que, si dos clases tienen algún elemento común, tienen que ser iguales.

Para el ejemplo anterior, es decir, para el conjunto *X* perteneciente a los números enteros, se tiene la relación *tener la misma paridad.* Para esta relación se tiene dos clases de equivalencia: el conjunto de los números pares y el de los impares. Y como se ha dicho antes no puede haber ningún elemento común ya que si fuera el caso serían la misma clase de equivalencia.

El número de clases de equivalencia que tiene una congruencia de módulo 4 es:

1. $\bar{0}\;\; constituida\; por\; el - 4, 4{,}8{,}16 \ldots$ (resto 0)
2. $\bar{1}\; constituida\; por\; el - 1, -5{,}5{,}17 \ldots$ (resto 1)
3. $\bar{2}\; constituida\; por\; el - 2, -6{,}6{,}18 \ldots$ (resto 2)
4. $\bar{3}\; constituida\; por\; el - 3, -15{,}23{,}11 \ldots$ (resto 3)

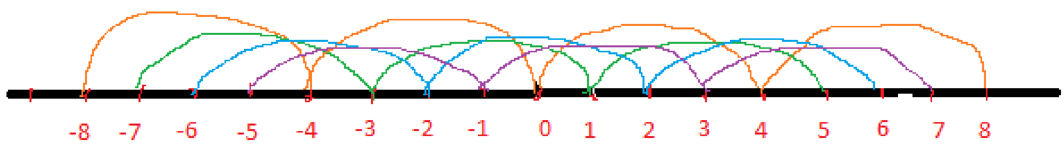

Figura 26. Clases de equivalencia módulo 4 (elaboración propia)

Y con esta breve explicación se puede terminar la introducción a la aritmética modular. Se puede realizar en los cursos de primero o segundo de bachillerato si hay tiempo y el docente lo considera valioso para los alumnos.

Anexo 5: Otras propuestas de actividades de magia

Aritmética modular

En este anexo se realiza otra actividad de magia (McOwan and Parker ,2010) relacionada con la aritmética modular pero que también utiliza el concepto de sucesión aritmética por lo que es un truco muy interesante para desarrollar en el aula.

Para llevar a cabo este truco de magia se necesita una preparación previa de las cartas.

CHaSeD es una palabra nemotécnica para ordenar los palos de las cartas: Clubs (treboles), Hearts (Corazones), Spades (picas) and Diamonds (Diamantes). Este es el orden que siguen los palos en la baraja.

Entonces, los palos de las cartas están colocadas en una posición determinada que viene definida por la palabra CHaSeD y donde cada carta tiene un valor numérico de más tres respecto a la carta anterior.

Para obtener la colocación inicial de la baraja se realiza el siguiente procedimiento:

Se ordena cada palo, boca arriba, con el A en la parte inferior y el rey en la parte superior. Los cuatro palos están colocados de izquierdas a derechas según el orden CHaSeD, es decir, Clubs,Hearts,Spades y Diamonds .

El montón de los Clubs se mantiene igual. Para el montón de Hearts se mantienen el A,2 y 3 en el mismo orden, pero pasan a estar arriba del montón, entonces, la primera carta que se observa es el 3. Para el montón de Spades se mantiene el orden del A al 6 pero pasan a estar arriba del montón. De la misma manera para al montón de Diamonds, las cartas del 1 al 9 se colocan arriba del montón.

Por lo tanto, se tiene los cuatro palos en posición CHSD, siendo sus cartas superiores el rey (K=13),3,6 y 9 de izquierdas a derechas. Para crear el orden en la baraja de cartas, se van cogiendo las cartas de los 4 mazos, primero se coge el rey de picas, después el 3 de corazones, a continuación, el 6 de tréboles y se termina con el 9 de diamantes. Y se repite el proceso hasta quedarse sin cartas. Se van colocando boca arriba encima de las cartas que ya se tienen colocadas. Cuando se termina se gira el mazo de cartas para ponerlo boca abajo.

Si se ha hecho correctamente, las primeras cartas serían el rey (K=13) de tréboles, el 3 de corazones, el 6 de picas, el 9 de diamantes, el caballo (Q=12) de tréboles… en otras palabras, las cartas están con los palos ordenados de la forma CHSDCHSD y el valor numérico de las cartas sigue una progresión aritmética de diferencia 3.

Materiales

Una baraja de cartas, además, de los materiales habituales usados por el docente en las clases.

Puesta en escena

Se empieza cortando la baraja de cartas tantas veces como se quiera y, a continuación, se coge a un voluntario de la clase para que corte la baraja de cartas por donde quiera, de manera que se formen dos montones. El docente coge el montón superior y pide al alumno que coja la carta superior del otro montón, la mire y la devuelva a dejar donde estaba antes. Mientras el docente va a unir los dos montones en uno, mira disimuladamente la carta de debajo del montón superior y rápidamente le dice al alumno la carta que ha cogido.

Explicación

Se puede cortar tantas veces como se quiera la baraja de cartas, previamente colocada, ya que esto no variará el orden cíclico creado. Pero cuidado no barajes las cartas, solo se tiene que cortar para no variar dicho orden.

La explicación de este truco está en cómo se han colocado las cartas en la baraja, de tal manera que con saber la posición de una carta se conoce la siguiente.

Se va a realizar un caso concreto. Se supone que el alumno corta la baraja en dos montones y la carta superior del montón inferior es el rey de picas, entonces el docente mira, disimuladamente, la última carta del montón superior y observa que la carta es la sota (10) de corazones. Entonces suma un valor de 3 unidades al valor de 10 de la carta y se obtiene 13, que es justamente el rey. Además, como se ha visto el palo de corazones, la siguiente carta debe ser de picas. Por lo tanto, el docente dice que la carta es el rey de picas y acierta.

Otro juego de magia muy parecido a éste es la *colocación de los 8 reyes* (McOwan and Parker ,2010). Los palos siguen colocados según la palabra CHaSeD, pero no es tan claro como están colocados los valores numéricos las cartas:

8♣, K♥, 3♠, 10♦, 2♣, 7♥, 9♠, 5♦, Q♣, 4♥, A♠, 6♦, J♣, 8♥, K♠,
3♦, 10♣, 2♥, 7♠, 9♦, 5♣, Q♥, 4♠, A♦, 6♣, J♥, 8♠, K♦, 3♣, 10♥,
2♠, 7♦, 9♣, 5♥, Q♠, 4♦, A♣, 6♥, J♠, 8♦, K♣, 3♥, 10♠, 2♦, 7♣,
9♥, 5♠, Q♦, 4♣, A♥, 6♠, J♦.

Figura 27. Colocación de las cartas en el juego de los 8 reyes (McOwan and Parker ,2010)

Está claro que los palos se basan en el patrón CHaSeD, sin embargo, el orden de los valores de las cartas no está claro y es: 8, K,3,10,2,7,8,5, Q, A,6 y J. Y se repite el ciclo.

El patrón no es tan claro como antes que seguía una progresión aritmética, ahora se tiene un orden aleatorio. El secreto está en la frase*: 'Eight kings threatened to save ninety five queens for one sick Jack'*.

Esto es una frase nemotécnica. Esta frase ayuda recordar el patrón:

1. Eight Kings (8, K)
2. ThreaTened (3,10)
3. To (2)
4. Save (7)
5. Ninety-Five (9,5)
6. Queens (Q)
7. For (4)
8. One (A)
9. Sick (6)
10. Jack (J)

Se realiza de la misma manera que el juego anterior, lo único que cambia es la preparación inicial de las cartas, donde es más complicado descubrir cómo están colocadas.

Secuenciación

Para esta actividad de magia se sigue está temporalización:

1. El docente realiza el juego de magia con un voluntario del aula (5min)
2. El docente puede elegir dos opciones:
   a. Dejar un tiempo para que los alumnos reflexionen sobre los fundamentos del juego de magia. Posteriormente, el docente explica cómo hace para saber la carta elegida por el alumno, paso a paso. En este caso es el docente quien explica directamente los fundamentos matemáticos que hay detrás de este truco ya que no es inmediato. (15 min)
   b. El docente realiza el truco simplemente para motivar a los alumnos y captar su atención, pero no explica el truco.
3. Si se opta por la opción 2.a, el docente les explica que este juego se basa en la aritmética modular, explicándolo brevemente. (20 min).
4. En este caso puede no hacerse una evaluación ya que es un contenido fuera de currículo. Es simplemente para que les suene, a modo de curiosidad, y sí algún alumno tiene especial interés en aprender más sobre aritmética modular, que tenga la base para poder investigar y profundizar más en dicho contenido (0 min).

Evaluación

Para este juego no se tiene pensado hacer una evaluación para observar si se ha entendido el contenido explicado ya que es contenido fuera de temario.

Pero si el docente quisiese hacer una pequeña evaluación, para adquirir información a modo informativo podría realizar algo del tipo:

1. Determinar sí 12 y 15 son congruentes módulo 3
2. Determinar sí 20 y 17 son congruentes módulo 5
3. ¿Una congruencia módulo 3 cuantas clases tiene? Da dos números que pertenezcan a cada clase.

Sistemas de numeración

Este es otro truco de magia (Muñoz, 2004) muy interesante para trabajar el contenido referente al cambio de base.

Materiales

Además de los recursos habituales que utiliza el docente, se reparten unas fotocopias para llevar a cabo esta actividad.

Puesta en escena

Esta actividad de magia consiste en adivinar un número que ha pensado el alumno, buscando dicho número en una serie de tarjetas.

Entonces, se les entrega a los estudiantes las siguientes tarjetas:

Tarjeta 1

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

Tarjeta 2

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

Tarjeta 3

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

Tarjeta 4

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

Tarjeta 5

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Tarjeta 6

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Figura 28. Conjunto de tarjetas en sistema binario (Muñoz, 2004)

Un alumno piensa un número entre 1 y 63, y devuelve, al docente, las tarjetas en las que aparece. El mago mira dichas tarjetas y rápidamente acierta el número que ha pensado el alumno. Para ello, el mago solo tiene que sumar el primer número que aparece en cada una de las tarjetas que le ha entregado el estudiante.

Por ejemplo, si se ha elegido el 46, ese número se encuentra en las tarjetas 2, 3,4 y 6. Entonces si se suma los primeros números de esas tarjetas se tiene:

$$2 + 4 + 8 + 32 = 46$$

Explicación

Desde el punto de vista matemático, lo interesante es como se han construido las tarjetas. Los números se han repartido en ellas atendiendo a su escritura binaria.

Para saber en qué tarjetas debe ir cada número, simplemente se debe escribir dicho número en base 2. Una manera sencilla de determinarlo es ir dividiendo el número entre 2, y el cociente otra vez entre dos hasta obtener un cociente de 1.

Para el caso anterior de 46 se obtiene:

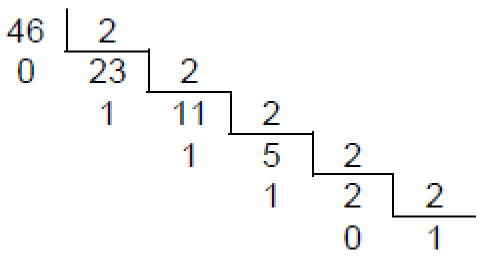

Figura 29. Calcular el número 26 en base binario (Muñoz, 2004)

Por lo tanto, 46 expresando en binario es:

$$46_{(10} = 101110_{(2}$$

Esto significa que dicho número debe estar en la tarjeta 2,3,4,6 porque se tiene un 1 en esas posiciones (empezando a contar por la izquierda), sin embargo, en las tarjetas 1 y 5 no aparece porque se tiene un 0 en esa posición.

La forma de encontrar el número que nos piden se reduce (utilizando las tarjetas) en convertir el número de su forma binaria a la decimal. Por lo tanto:

$$101110_{(2} = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 46_{(10}$$

Hay que tener en cuenta que la numeración binaria limita los números que se pueden colocar en las tarjetas. Con 6 tarjetas el número más grande que se puede utilizar es:

$$111111_{(2} = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 63_{(10}$$

Con siete tarjetas se puede llegar hasta el número:

$$1111111_{(2} = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 127_{(10}$$

Y utilizando un número n de tarjetas:

$$\underbrace{111 \ldots \ldots \ldots 111_{(2}}_{n} = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 2^n - 1$$

Esta misma actividad de magia se puede hacer con otras tarjetas, pero el funcionamiento es el mismo. Por ejemplo:

Tarjeta 1

1	2	4	5	7	8	10	11	13
14	16	17	19	20	22	23	25	26
28	29	31	32	34	35	37	38	40

Tarjeta 2

2	3	4	5	6	7	11	12	13
14	15	16	20	21	22	23	24	25
29	30	31	32	33	34	38	39	40

Tarjeta 3

5	6	7	8	9	10	22	12	13
14	15	16	17	18	19	20	21	22
32	33	34	35	36	37	38	39	40

Tarjeta 4

14	15	16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29	30	31
32	33	3	35	36	37	38	39	40

Figura 30. Conjunto de tarjetas en sistema ternario (Muñoz, 2004)

En este caso se tienen cuatro tarjetas, pero la forma de usar las tarjetas es la misma. Un alumno elige un número menor o igual a 40 e indica en que tarjetas se encuentra y además en este caso el color. El docente hace una fácil operación y acierta el número.

En este juego de magia es más complicado que el alumno adivine el truco ya que no consiste en sumar los números más pequeños que aparecen en las tarjetas. Estas tarjetas están codificadas en base 3:

1. Primera tarjeta, le corresponde el $1=3^0$
2. Segunda tarjeta, le corresponde el $3=3^1$
3. Tercera tarjeta, le corresponde el $9=3^2$
4. Cuarta tarjeta, le corresponde el $27=3^3$

Lo que hay que hacer es sumar el código si está en negro o restarlo si está en rojo. Por lo tanto, si el alumno dice que el número pensado está en rojo en la tarjeta 1, negro en la tarjeta 2 y negro en tarjeta 4, el número será:

$$-1 + 3 + 27 = 29$$

En este caso el número más grande que se puede formar con las cuatro tarjetas es:

$$1111_{(3} = 1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 40$$

Con 5 tarjetas es:

$$11111_{(3} = 1 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 40$$

En general se calcula con la expresión:

$$\frac{3^n - 1}{2}$$

Ahora se va a analizar cómo se distribuyen los números en las tarjetas. Se va a pasar a base 3 el número 29, entonces:

$$29_{(10} = 1002_{(3}$$

Se observa que el problema es el 2 de las unidades. La manera de arreglarlo es sumar y restar uno a la cifra 2, ya que se obtendría 3 y se puede añadir una cifra a la siguiente. El proceso es el siguiente:

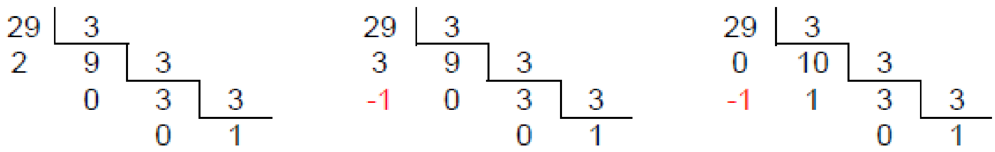

Figura 31. Calcular el número 26 en base ternario adaptado al juego de magia de colores (Muñoz, 2004)

Luego se tiene que:

$$29_{(10} = 1002_{(3} = 29_{(10} = 1011_{(3} = 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 - 1 \cdot 3^0 = 29$$

Secuenciación

Para esta actividad de magia se seguirá está temporalización:

1. El docente realiza el juego de magia a varios alumnos, acertando, en todos los casos, el numero pensado por el estudiante (5min).
2. EL docente permite a los alumnos debatir entre ellos, proponiendo ideas de cómo el profesor es capaz de adivinar el numero pensado por ellos. EL docente va guiando a los alumnos con la idea que consigan resolver y comprender el juego de magia. Por ejemplo,

el docente puede proponer a los alumnos que descompongan los números de una tarjeta como la suma de potencias de 2 y que analicen que observan. (20 min)

3. EL docente aprovecha este juego para explicar los diferentes sistemas de numeración y como se trasforma un número de una base a otra.
4. Se haría una pequeña evaluación (10 min)

Evaluación

Se pide a los alumnos que resuelvan estos ejercicios para analizar si se entendieron bien los contenidos.

1. Calcula el número que se obtendría en base 2:

   $11111_{(3} =$
2. Determina el valor del número en base 3:

   $36_{(10} =$
3. Determinar el valor en base 10:

   $11111_{(3} =$

Bibliografía

Libros

Breiteig, T. y Grevholm, B. (2006). *The transition from arithmetic to algebra: to reason, explain, argue, generalize and justify*. Vol. 2, 225-232. PME. Prague.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic y algebra in elementary school.* Portsmouth: Heinemann.

Corbalán Yuste, F. (1994). *Juegos matemáticos para Secundaria y Bachillerato*. Madrid: Editorial Síntesis.

Frabetti, C. (2000). *Malditas matemáticas*. Madrid: Alfaguara juvenil.

Hoffmann, P. (1876). *Modern magic*. London.

Rosenthal, R., & Jacobson, L. (1968). *Pygmalion in the classroom: Teacher expectation and pupils' intellectual development*. New York, NY, US: Holt, Rinehart & Winston.

Ruiz Domínguez, X. (2015). *Educando con magia: El ilusionismo como recurso didáctico*, tercera edición, Madrid: Narcea.

Vaello Orts, J. (2007). *Cómo dar clase a los que no quieren*, primera edición, Barcelona: Graó.

Wagner, S. y Parker, S. (1999). *Algebraic Thinking, Grades K-12*, 328-340. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

Artículos y trabajos académicos

Alcázar Álvarez Antonio, J. *La motivación en el aula*. Federación de Enseñanza de CCOO de Andalucía. Disponible en: https://feandalucia.ccoo.es/docu/p5sd5341.pdf

Alegría, P. y Ruiz, J.C. (2002). *La matemagia desvelada*. Suma, 26, 145-174. Disponible en: http://www.ehu.eus/~mtpalezp/descargas/lamat.pdf

Blanton, M. L. y Kaput, J. (2005). *Characterizing a Classroom Practice that Promotes Algebraic Reasoning*. Journal for Research in Mathematics Education, 36(5), 412-446. Disponible en: https://mathed.byu.edu/kleatham/Classes/Fall2010/MthEd590Library.enlp/MthEd590Library.D ata/PDF/BlantonKaput2005CharacterizingAClassroomPracticeThatPromotesAlgebraicReasoning1974150144/BlantonKaput2005CharacterizingAClassroomPracticeThatPromotesAlgebraicReasoning.pdf

Carrillo, B. (2009). Dificultades en el aprendizaje matemático. Innovación y experiencias educativas, (16). Disponible en: http://www.csicsif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_16/BEATRIZ_CARRILLO_2.pdf

Cimiano Fernández, C. *Matemáticas a través de la magia*. Universidad de Cantabria. Disponible en: https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/13145/FernandezCimianoCarlos.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Fernández Cezar, R. y Lahiguera Serrano, J.F. (2015). *Matemagia y su influencia en la actitud hacia las matemáticas en la escuela rural*. Volumen 89, paginas 33-53. Disponible en: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/89/Articulos_02.pdf

García Fernández, R. (2015) Los juegos: Una herramienta para aprender álgebra. Universidad de Cádiz. Disponible en: https://rodin.uca.es/xmlui/bitstream/handle/10498/17536/TFM.%20Regino%20Fern%c3%a1ndez%20Garc%c3%ada.pdf?sequence=1&isAllowed=y

García Solís, P. A. (2013). *Magia y educación. (Tesis doctoral).* Universidad Rafael Landívar, Queztaltenango, Guatemal

Gómez-Chacón, I. M., Op't, P., y De Corte, E. (2006). C*reencias de los estudiantes de matemáticas. La influencia del contexto de clase. Enseñanza de las ciencias,* 24(3), pp.309-324. Recuperado de: http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/76029/96646

González, F. (2003). *Matemagia: la magia de las matemáticas*. En Actas de las IV Jornadas de Educación Matemáticas de la Comunidad Valenciana. 471-476. Disponible en: http://www.ua.es/personal/SEMCV/Actas/IVJornadas/pdf/Part81.PDF

Maehr, M. L., & Meyer, H. A. (1997*). Understanding motivation and schooling: Where we've been, where we are, and where we need to go*. Educational Psychology Review, 9, 371-409. Disponible en: https://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/handle/2027.42/44456/10648_2004_Article_414425.pdf;jsessionid=5DA612F55C1E5A99E65F1FDE41E3B6CB?sequence=1

Martinez-Salanova Sánchez,E.(2001) *La motivación en el aprendizaje*. Disponible en: https://educomunicacion.es/didactica/0083motivacion.htm

Monescillos Rubio, M. (2013). *Títeres, cómic y magia como recursos de motivación y comunicación en el aula.* (Trabajo final de máster). Universidad Internacional de la Rioja, Madrid. Disponible en: https://reunir.unir.net/handle/123456789/1873

McOwan, P and Parker, M. *The manual of methematical magic*. University of London. Disponible en: http://www.mathematicalmagic.com/docs/mathsmagic_full.pdf

Rodríguez Alfieri, R. (2016). Magia y educación. (Trabajo final de grado). Universidad Jaume I, Castellón de la Plana. Disponible en: http://repositori.uji.es/xmlui/bitstream/handle/10234/162446/TFG_2015_rodriguezR.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Swam, P. (2004). *I hate mathematics*, MAV Annual Conference, Monash University. Disponible en: http://www.mav.vic.edu.au/files/conferences/2004/Swan.pdf

Webgrafía

http://ies-mariamoliner.centros.educa.jcyl.es/sitio/index.cgi?wid_seccion=3

http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/ESO.htm