UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Didáctica de las Ciencias Experimentales, Sociales y de la Matemática

Diseño de una propuesta didáctica para el trabajo comprensivo de la derivada de una función

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad de Matemáticas.

Alumno: José Antonio Pérez Fonseca

Tutor: Matías Arce Sánchez

Valladolid, 2021

ÍNDICE

1. Introducción y objetivos del trabajo de fin de máster

El propósito de este trabajo de fin de máster es ofrecer una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de derivada en alumnos de primero de Bachillerato de Ciencias, dentro de la asignatura Matemáticas I. En este curso el concepto de derivada aparece por primera vez y, al ser un concepto relativamente abstracto y cuya docencia suele ser tratada desde el punto de vista algorítmico, los alumnos no llegan a adquirir un entendimiento real. Es por ello por lo que en este trabajo se pretende, a partir del análisis de investigaciones realizadas, llevar a cabo una secuencia didáctica que deje algo de lado el tratamiento algorítmico de la derivada para centrarse en un tratamiento comprensivo de esta.

La motivación personal de este trabajo es que, como ingeniero de telecomunicación, conozco de primera mano la gran importancia que tiene el cálculo diferencial para cualquier persona que desee cursar una ingeniería, física o matemáticas. En mi caso personal no llegué a tener un entendimiento profundo del concepto de derivada, más allá del cálculo memorístico de problemas tipo, hasta primero de carrera. Por eso creo que es fundamental sentar las bases de la derivada.

Este trabajo se divide en tres partes fundamentales:

1. En la primera parte, el marco teórico, se expone cómo ha sido el desarrollo histórico de la derivada, cuál fue su origen y motivación y quiénes fueron los personajes principales en su desarrollo. Después, se citan algunos trabajos de investigación y sus conclusiones acerca de la enseñanza de la derivada en bachillerato. A continuación, se pasa a hablar de las tareas en matemáticas y su clasificación según su demanda cognitiva, las TIC en el aula de matemáticas y las metodologías docentes aplicables a esta unidad didáctica. Se finaliza este apartado hablando de los documentos normativos que configuran la docencia de las matemáticas en Castilla y León.
2. En este segundo apartado se lleva a cabo el análisis de la unidad didáctica de introducción a la derivada de tres libros de texto, examinando su exposición de contenidos y sus tareas propuestas con la finalidad de analizar y conocer mejor cuál es la propuesta didáctica que ofrecen.

3. Una vez realizada la exploración de los libros de texto se pasa a exponer la unidad didáctica de introducción a la derivada y sus aplicaciones para primero de Bachillerato de Ciencias con los apartados habituales de éstas, incluyendo la secuencia didáctica.
4. Por último, se cierra el presente trabajo llevando a cabo una reflexión sobre el trabajo realizado y las conclusiones que derivan de éste.

Los objetivos que se plantea este trabajo de fin de máster son:

1. Describir el concepto de derivada desde el punto de vista histórico y poner en valor la historia de las matemáticas como algo que debe ser trabajado en clase con los alumnos para que, al menos, puedan situar el desarrollo del concepto en el tiempo y conocer a los que han contribuido a su formación.
2. Entender y describir cómo se desarrolla la comprensión de un objeto matemático.
3. Realizar una búsqueda bibliográfica acerca de la comprensión del concepto de derivada en bachillerato que arroje luz sobre las dificultades que esto presenta.
4. Mostrar el potencial que herramientas como GeoGebra tienen para representar funciones y trabajar las derivadas.
5. Analizar qué nos dice el currículo y las leyes que rigen la educación en Castilla y León sobre la derivada.
6. Estudiar el contenido que los libros de texto ofrecen acerca de la derivada y ver si es suficiente para cumplir los contenidos y estándares de aprendizaje evaluables que previstos por el Real Decreto correspondiente.
7. Ver cómo es el tratamiento que los libros de texto hacen del tema de derivadas.
8. Establecer un marco teórico de estudio de actividades en matemáticas y analizar las de los libros de texto de acuerdo a ellas.
9. Generar un conjunto de tareas acerca de la derivada que pongan énfasis en su representación gráfica para incluirlas en una unidad didáctica.

Se pretende que este trabajo abarque en la medida de lo posible elementos de todas las asignaturas que han configurado el máster, especialmente del módulo específico. A continuación, se concreta cuáles son las relaciones del trabajo con las asignaturas del máster:

- La primera asignatura en aparecer será Ideas y conceptos matemáticos a través de la historia, dado que en apartado 2.1 se lleva a cabo un recorrido histórico del concepto de derivada y se pone en valor a la matemática como una rama de la ciencia cuya historia debe ser estudiada para ser comprendida en su totalidad.
- La siguiente asignatura en ser conectada con el trabajo es Iniciación a la investigación educativa en matemáticas, pues en el punto 2.2 se lleva a cabo una búsqueda bibliográfica sobre la enseñanza de la derivada y para ello se han buscado diversos artículos y tesis de investigadores en la materia. También, en el apartado cuarto del trabajo se ha llevado un análisis de libros de texto mediante la metodología de análisis de contenido expuesta en dicha asignatura.
- La asignatura Didáctica de la matemática está presente a lo largo de todo el trabajo, especialmente en el punto 2.3, donde se habla del nivel cognitivo de las tareas matemáticas.
- Los contenidos de Diseño curricular en matemáticas se han tenido en cuenta a la hora de diseñar la unidad didáctica y, además, están presentes en el punto 2.6 del marco teórico cuando se sitúa a la derivada dentro del currículo educativo español.
- De la misma manera, los contenidos de la asignatura Metodología y Evaluación en matemáticas han sido considerados y utilizados también en la unidad didáctica.
- La asignatura Innovación docente en matemáticas está presente por el uso de GeoGebra para la elaboración de gráficas y actividades.
- La asignatura Complementos de matemáticas se ve reflejada dado que la derivada y sus aplicaciones son elementos fundamentales de las matemáticas y fueron tratadas en la parte de Análisis de la asignatura.
- La asignatura Procesos y contextos educativos, del módulo genérico, se ve reflejada en trabajo este a la hora de manejar y utilizar las leyes y Reales Decretos que regulan la educación en España. En ese sentido lo que aporta esta asignatura se solapa con lo visto en Diseño curricular en matemáticas.

- Por último, la asignatura Aprendizaje y desarrollo de la personalidad aparece sobre todo en el punto 2.2 cuando se habla del aprendizaje de la derivada y los esquemas de aprendizaje.

2. Marco teórico

En este capítulo se lleva a cabo una exposición de elementos teóricos que asientan la base del trabajo. Primero, se analizará la derivada desde una perspectiva histórica, a continuación, se expondrán algunos resultados acerca del aprendizaje de la derivada en alumnos de Bachillerato. Después, se pasará a tratar el tema de las tareas matemáticas clasificándolas según su demanda cognitiva. En el siguiente punto, se concluirá un capítulo hablando de varias metodologías docentes y finalmente se cerrará este capítulo del marco teórico situando a la derivada dentro del currículo educativo vigente en Castilla y León en el curso 2020/2021.

2.1 Desarrollo histórico del concepto de derivada

El cálculo infinitesimal es la rama de las matemáticas que se encarga del estudio del cambio. La palabra cálculo procede del latín *calculus,* que significa piedra, dado que esto era lo que se utilizaba originariamente para contar. El cálculo nació para dar respuesta a dos problemas que habían ocupado la mente de los matemáticos desde la antigüedad: el cálculo de la recta tangente a una curva en cualquier punto y el cálculo de áreas. Del primer problema se encargó el cálculo diferencial; del segundo, el cálculo integral.

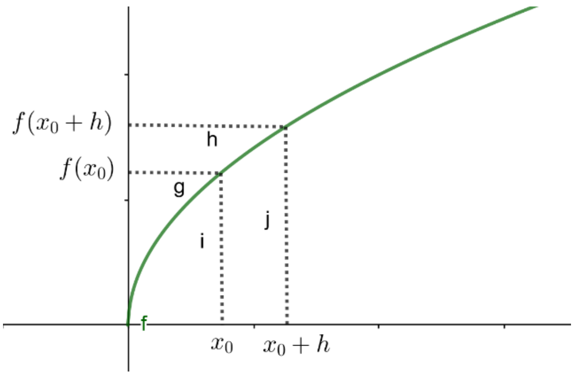


Figura 1 Derivada en un punto

Si se abre el tema de derivadas de cualquier libro de texto, lo más habitual es que tras una breve introducción histórica y una motivación para su enseñanza se presente la definición actual de derivada en un punto:

$$\frac{df}{dx}[x_0] = f'(x_0) = D[f(x_0)] = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Donde la primera notación se la debemos a Leibnitz, la segunda a Lagrange y la tercera a Cauchy.

Como se desprende de la figura 1 y de la definición de derivada presentada, calcular la derivada consiste en obtener la razón de cambio entre dos puntos infinitamente próximos.

Sin embargo, la derivada no siempre ha estado definida como el límite de un cociente incremental, de hecho, no fue hasta el siglo XVII cuando Augustin-Luis Cauchy (Francia, 1789-1857) terminó de definir la derivada de manera rigurosa tal y como la conocemos hoy día.

De acuerdo con Grabiner (1983), la derivada primero fue usada, luego, descubierta, a continuación, explorada y desarrollada y, finalmente, definida. Esto fue un proceso que duró más de 2000 años.

Los antiguos griegos conocían cómo trazar la recta tangente a varias curvas como las cónicas utilizando métodos puramente geométricos. En el libro II de *Las Cónicas* de Apolonio de Pérgamo (Grecia, 262-190 A.C.) se lleva a cabo un estudio de las tangentes a las cónicas y, en el libro V, uno sobre máximos y mínimos (Ortega del Rincón & Sierra Vázquez, 1998). Asimismo, Arquímedes de Siracusa (Grecia, 287-212 A.C) conocía cómo trazar la recta tangente a su espiral.

Ya en el siglo XVI, François Viète (Francia, 1540-1603) creó el álgebra simbólica y, por otro lado, René Descartes (Francia, 1596-1650) y Pierre de Fermat (Francia,1607-1655) crearon la geometría analítica de manera independiente en la década de 1630; en esta geometría, cualquier ecuación de dos variables representa una curva en el plano y cualquier curva en el plano puede ser representada mediante una ecuación de dos variables. El foco del problema de la recta tangente estaba ahora en, dada una curva cualquiera, crear un método que permitiera calcular la tangente en cualquier punto. Matemáticos del siglo XVII como Fermat, Descartes, John Wallis (Inglaterra, 1616-1703) e Isaac Barrow (Inglaterra, 1630-1677) utilizaron un método que ya dejaba entrever la definición de derivada: el método de la secante, que consistía en calcular la pendiente de la recta secante entre dos puntos de la curva, tal y como se ve en la figura 2. Cuanto más cerca estén esos dos puntos, más similar sería la secante a la tangente y, utilizando la terminología actual, se diría que en el límite coinciden. La pendiente de esta recta tangente tendería a $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ a medida que los puntos y están más y más próximos y cuando éstos están infinitamente próximos, la pendiente sería la de la recta tangente.

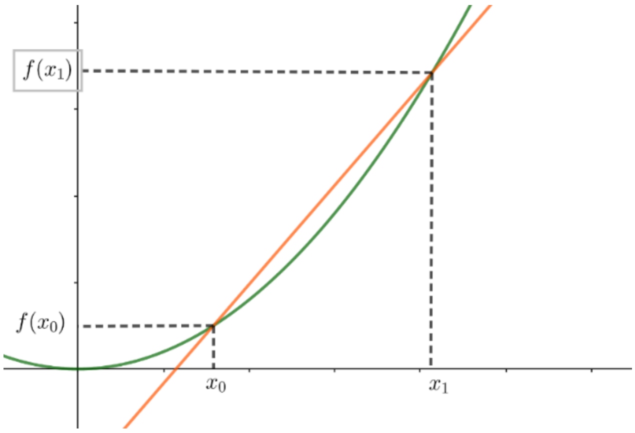


Figura 2 Cálculo de la tangente mediante la secante (elaboración propia)

Otro problema que propició el descubrimiento de la derivada fue el de los máximos y los mínimos, que posteriormente se vería que está muy relacionado con el problema de la tangente. Fermat en su obra *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* presenta el primer método general para calcular máximos y mínimos, el cual ilustra a través del siguiente problema, extraído de (Alarcón, Suescún, & de la Torre, 2005): "Dado un segmento de longitud B, dividirlo en dos partes tal que el producto de estas sea máximo". Si un trozo del segmento mide A, el restante medirá B-A, por lo tanto, tenemos que maximizar $\mathrm{A}(B-A) = AB - A^2$. Fermat suponía una segunda solución, A+E, de tal manera que $(A+E)(B-A-E) = AB - A^2 - AE + EB - EA - E^2$, entonces Fermat suponía que ambas soluciones eran la misma, por lo que las igualaba: $AB - A^2 = AB - A^2 - AE + EB - EA - E^2$, y simplificando términos se llega a $2AE - EB + E^2 = 0$. A continuación, dividía por E, obteniendo $2A - B + E = 0$ y finalmente hacia $E = 0$, obteniendo $A = \frac{B}{2}$. Fermat no explicó por qué primero podía dividirse por E y acto seguido suponer que ésta es cero, sin embargo, puede verse que este método ideado por Fermat es, en el caso de funciones polinómicas, análogo a calcular

$\frac{f(A+E)-f(A)}{E}$, a continuación, hacer tender E a cero, e igualar el resultado a cero, pero Fermat carecía aún de la idea de función (él quería maximizar cantidades, no funciones), de límite y de incremento infinitesimal. Podría usarse este método de Fermat para hallar la derivada de cualquier función polinómica; en 1659 Johann Hudde propuso que para una forma polinómica $y = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ existe un máximo o mínimo cuando $\sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = 0$ (Grabiner, 1983).

En (Alarcón, Suescún, & de la Torre, 2005) se exponen varios métodos más de carácter algebraico para el cálculo de la tangente a una curva.

En (Sanchez-Matamoros, 2010) se esbozan los cuatro tipos de problemas que motivaron el descubrimiento del cálculo infinitesimal por parte de Isaac Newton (Inglaterra, 1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (Alemania, 1646-1716):

1. Dada la posición de un cuerpo a lo largo del tiempo, obtener su velocidad y aceleración. Y, también el problema inverso: dada la velocidad a lo largo del tiempo obtener la posición y dada la aceleración encontrar la velocidad y la posición en función del tiempo.
2. Encontrar la tangente a una curva. Este problema era interesante, entre otros usos, en el contexto de la física, dado que la dirección del movimiento en un punto viene dada por la tangente. Este problema ya había sido enfocado por multitud de matemáticos, de manera geométrica por Descartes, Barrow y los griegos de la antigüedad y mediante un método que implicaba el proceso de derivada, como vimos previamente, por Fermat.
3. La obtención de valores máximos y mínimos.
4. Obtener la longitud de curvas. En el siglo XVII la astronomía estaba en pleno apogeo, principalmente por los trabajos de Johannes Kepler (Alemania, 1571-1630) y se quería calcular la distancia recorrida por un planeta.

Poco a poco los matemáticos del siglo XVII se dieron cuenta de que todos estos problemas podían catalogarse en dos tipos (Sanchez-Matamoros, 2010):

1. Los que implicaban calcular la tasa de cambio de una magnitud, que se vio era equivalente al problema de la tangente y al del cálculo de máximos y mínimos. Esto dio lugar a la derivada y al cálculo diferencial.
2. Los que implicaban el cálculo de un área o de una longitud o, de forma más general, el cálculo del efecto acumulado por parte de una magnitud. Por

ejemplo, el efecto acumulado por parte de la velocidad será el espacio recorrido. Esto dio lugar al cálculo integral.

Además, en el siglo XVII se vio que los dos tipos de problemas eran inversos uno del otro. Fue Isaac Barrow quien demostró, de forma geométrica, esta afirmación (Wussing, 1998), dando así lugar al Teorema Fundamental del Cálculo. Su discípulo en la Universidad de Cambridge, Isaac Newton, desarrollaría mucho más sus ideas sobre el cálculo infinitesimal.

Newton y Leibnitz son universalmente reconocidos como los descubridores del cálculo infinitesimal y, debido a la cercanía en el tiempo de sus descubrimientos y a que Newton no lo publicó hasta mucho tiempo después, ha habido cierta controversia sobre quién es el verdadero descubridor. Pero la diferencia de su metodología hace ver que ambos llegaron a los mismos resultados de forma independiente.

Newton denominó fluentes a las cantidades que variaban, y les asignó con las letras z, x, y, v, y fluxiones a la velocidad con la que éstas variaban con el tiempo, y las denominó $\dot{z}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{v}$. También definió las segundas fluxiones (que, en el contexto de la mecánica clásica, sería la variación de la velocidad, es decir, la aceleración) y las nombró colocando dos puntos sobre las variables en lugar de uno, $\ddot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{v}$. De esta manera, el valor de la variable x tras un incremento de tiempo o sería $x + \dot{x}o$. Newton tenía una concepción cinemática del cálculo infinitesimal (Wussing, 1998, p. 155), pues a él le interesaban cuestiones como conocer cuál es la velocidad instantánea y la aceleración en cada momento de un objeto que cae. Además, gran parte de los fenómenos físicos pueden ser modelados por ecuaciones diferenciales, que son ecuaciones en las que aparecen derivadas. Este tipo de ecuaciones fueron fundamentales para la Teoría de la Gravedad y de la Mecánica Clásica que Newton propuso en su *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (1687). El método de las fluxiones de Newton fue desarrollado durante el retiro de Newton durante la Gran Plaga de 1665-1667 y desarrollado en el libro *Method of Fluxions* que, pese a ser concluido en 1671, no sería publicado (póstumamente) hasta 1736.

Por su parte, Leibnitz se aproximó a la derivada a partir de incrementos muy pequeños de las variables x e y, de esta forma escribía $dy = f(x + dx) - f(x)$ de tal manera que (Stewart, 2008) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}$$

A través del estudio del triángulo carcterístico de Pascal, Leibniz vio que en el problema de la tangente están involucradas las diferencias de ordenadas de la función, mientras que en el del cálculo de área o cuadratura lo está la suma de estas ordenadas, por lo que dedujo que ambos problemas eran inversos uno de otro (Ortega del Rincón & Sierra Vázquez, 1998). En 1684 publicó un documento en el que exponía la notación del cálculo diferencial e integral, reglas para el cálculo de derivadas de diversas funciones, y la resolución del problema de máximos y mínimos, que era capaz de distinguir mediante la segunda derivada. Al contrario que la de Newton, que sólo se utiliza en ciertos ámbitos como el análisis de circuitos eléctricos, la notación de Leibniz ha sobrevivido hasta nuestros días. Introdujo el simbolo de integral que usamos hoy día como una deformación de la s de la palabra latina *summa,* $\int ydx$, así como $\frac{dy}{dx} = \frac{d(f(x))}{dx}$ para la primera derivada y $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2(f(x))}{dx^2}$ para la segunda, y sucesivas.

Otra publicación relevante fue el primer libro de texto sobre Análisis matemático por parte de Guillaume de L'Hôpital (Francia, 1661-1704) en 1696 titulado *Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes*. (Ortega del Rincón & Sierra Vázquez, 1998).

Posteriormente, Joseph-Luis Lagrange (Italia, 1736-1813) definió un nuevo tipo de función, la función derivada. Lo hizo a partir de la expansión en serie de potencias de la función. Esta nueva concepción de la derivada como una función permitió a Lagrange demostrar que una función es creciente en un intervalo si su derivada en ese intervalo es mayor que cero (y decreciente si esta derivada es menor que cero) (Grabiner, 1983). Además, Lagrange propuso la notación más utilizada en la actualidad, para la primera derivada, para la segunda y, en general para la enésima. Finalmente, sería Cauchy quien en 1823, valiéndose de la definición ε-δ de límite, llegó a la definición de derivada que se utiliza en la actualidad y que fue mostrada al principio del capítulo.

2.2 La investigación acerca de la enseñanza de la derivada

Llegar realmente a comprender un concepto en matemáticas no es algo sencillo ni tampoco es algo dicotómico en el que se pueda afirmar que el concepto es comprendido o que el concepto no es entendido. La comprensión de un concepto es algo que ocurre de manera gradual ya que cuando un alumno se enfrenta al trabajo de comprensión de un concepto en matemáticas, su entendimiento de éste pasa por diversas fases de desarrollo. Además, al menos en la enseñanza de secundaria y Bachillerato que es lo que nos concierne, no se puede hablar de una comprensión absoluta de un concepto matemático, y por lo tanto el docente no deberá buscar esa comprensión absoluta en su evaluación, sino que se deberá perseguir que el alumno alcance el nivel de comprensión del concepto establecido por la normativa para el nivel educativo en cuestión.

La comprensión de un concepto en matemáticas se alcanza mediante la aproximación a éste desde dos perspectivas diferentes: la conceptual y la procedimental, ambas mutuamente dependientes. Los aspectos conceptuales de la comprensión de un concepto se basan en las definiciones, hechos, términos, notaciones y resultados. Por otra parte, los aspectos procedimentales son aquellos que se refieren a las acciones y manipulaciones de los objetos matemáticos que se han de realizar para completar una tarea (Castro, Prat, & Gorgorio, 2016). En ambos aspectos, el conceptual y el procedimental, se pueden identificar tres niveles de complejidad creciente: las unidades de información; la abstracción, relación y generalización de dichas unidades de información y las estructuras. En el caso de la derivada, el aspecto conceptual abarcaría todas las definiciones y resultados que habitualmente encontramos en los libros de texto, como son las definiciones de derivada en un punto y función derivada o los resultados sobre existencia de máximos y mínimos y puntos de inflexión. Es decir, lo que habitualmente consideramos los aspectos teóricos del tema.

Por otra parte, los aspectos procedimentales abarcarían los aspectos prácticos, de acción, todo aquello que podamos catalogar con un verbo de acción como "calcula" o "halla" y que pueda ser encapsulado en un procedimiento, bien más algorítmico a niveles bajos o bien con más carga de razonamiento en niveles más altos de comprensión. En este aspecto, los aspectos procedimentales que encontramos en los libros de texto sobre la derivada son los procedimientos algorítmicos para calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento o los intervalos de curvatura cóncava y convexa.

En la tabla 1 se hace una descripción de los niveles y categorías de los aspectos conceptuales, ejemplificándolo para el caso de la derivada. En la tabla 2 se hace lo propio con los aspectos procedimentales. Las categorías de ambas tablas se han extraído de (Arce, Conejo, & Muñoz, 2019, p. 85).

Tabla 1 Niveles y categorías para los aspectos conceptuales

Niveles	Categorías	Ejemplos
Primer nivel: Unidades de información	Términos	Derivada en un punto, crecimiento
	Notaciones	Se usa f'(x) para la primera derivada, f''(x) para la segunda.
	Convenios	f'(x) se lee f prima de x, la variación de la gráfica de una función se estudia de izquierda a derecha
	Resultados	La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la función en el punto
Segundo nivel: abstracción, relación y generalización de las unidades de información	Conceptos	Derivada en un punto, función derivada, tasa de variación media e instantánea, crecimiento
	Relaciones entre conceptos	La función es creciente en un punto cuando la derivada en ese punto es mayor que cero.
Tercer nivel: Estructuras	Estructuras matemáticas	La función derivada es un objeto que puede representarse y operarse

Tabla 2 Niveles y categorías para los aspectos procedimentales

Niveles	Categorías	Ejemplos
Primer nivel: Unidades de información (destrezas)	Operaciones	La derivada de la suma de dos funciones es la suma de sus derivadas
	Reglas	Reglas de derivación
	Algoritmos	Cálculo de máximos y mínimos de forma simbólica igualando a cero la derivada
Segundo nivel: abstracción, relación y generalización de las unidades de información	Razonamientos	Obtención de la gráfica de la derivada a partir de la gráfica de la función
Tercer nivel: Estructuras	Estrategias	Manejo de la función derivada para resolver y dar sentido a problemas de variación, ejemplo: problemas de optimización

En (Skemp, 1978) se muestran dos tipos de comprensión de un concepto matemático: la comprensión instrumental y la relacional. La primera es la que proporciona al alumno la habilidad de aplicar reglar y algoritmos para obtener unos resultados, mientras que la segunda es la que relaciona estas reglas con el concepto. Por ejemplo, en el caso de la derivada, un conocimiento instrumental podría ser saber calcular los intervalos de crecimiento de una función y los extremos relativos, mientras que un conocimiento relacional implicaría conocer por qué la regla que aplicamos para esto es la que es: qué relación existe entre que la función sea creciente y la derivada sea positiva y que la derivada sea nula y pueda existir en ese punto un extremo relativo. Ambos tipos de comprensión, el instrumental y el relacional, están interrelacionados y deben ir de la mano a la hora de construir en la

mente del alumno un buen asentamiento del concepto matemático.
De manera habitual, la enseñanza de la derivada se centra en el cálculo de derivadas mediante reglas de derivación que los alumnos memorizan y ejecutan de manera mecánica pero que no conlleva una interiorización y comprensión del propio concepto de derivada. Por ello, la evaluación de la unidad didáctica de derivadas también tiende a focalizarse en estos procedimientos algorítmicos. Toda esta focalización en los procesos algebraicos hace que se olviden los elementos subyacentes del concepto de derivada como son la tasa de variación de una variable respecto a otra y el concepto físico de velocidad instantánea. Por ello, algunos autores como (Ortega del Rincón & Sierra Vázquez, 1998) abogan por la importancia de introducir la derivada mediante la velocidad media e instantánea, la pendiente de la recta tangente y la tasa de variación. En (Azcárate, Casadeval, Casellas, & Bosh, 1996) se lleva a cabo una secuencia didáctica en la que se va introduciendo, sin definir formalmente al principio, el concepto de derivada mediante tareas que presentan los datos en forma gráfica y de tabla y que están situadas en contextos realistas de la física, la economía o la vida cotidiana. De esta manera se intenta generar en la mente del alumno un entendimiento de la derivada como razón de cambio entre dos variables. En (Antonio, Escudero, & Flores, 2019) se expone el diseño de una secuencia didáctica que explota la relación entre espacio y velocidad y el trabajo y conversión entre los registros verbal, gráfico y simbólico. En este estudio también se enfatiza la necesidad de relacionar la derivada con los fenómenos físicos y con variaciones y cambios si se desea que el alumno adquiera un conocimiento de la derivada más allá del tratamiento algebraico y algorítmico. Sobre los modos de representación de los datos, en (Sanchez-Matamoros & Fernandez-Verdú, 2016) se analiza la necesidad de conectar el entendimiento de la derivada desde el punto de vista gráfico y analítico.
En este artículo se expone que muchos de los alumnos que están comenzando a trabajar la derivada no son capaces de obtener información a partir de la representación gráfica y que necesitan de la expresión analítica de la función para conocer información que pueden obtener de la gráfica.
La derivada se ubica dentro del bloque de análisis y esta rama de las matemáticas se caracteriza por lo que se conoce como Pensamiento Matemático Avanzado

(PMA) el cual exige al alumno la capacidad de definir, generalizar, abstraer y razonar deductivamente. En esencia, el PMA es necesario para trabajar con conceptos abstractos que nos son accesibles directamente por los sentidos (Arce, Conejo, & Muñoz, 2019). Este PMA se caracteriza porque un concepto puede ejecutar el papel de proceso y el de objeto. En el caso del tema de este trabajo, un proceso sería el cálculo de la derivada en un punto y un objeto la función derivada, pues ésta es un objeto con una serie de propiedades sobre la cual se pueden ejecutar diferentes procesos (sumarla, dibujarla, etc). A raíz de esta dualidad surge el marco APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema), que se describe en (Dubinsky, 1991). En este marco de aprendizaje, el conocimiento se genera a partir del confrontamiento del individuo con un concepto que requiere de él una cierta demanda cognitiva. El primer nivel de entendimiento son las acciones, que son manipulaciones de un objeto que la persona percibe como externo. Una vez que la persona interioriza esas acciones se convierten en un proceso, que puede ser una secuencia de pasos ejecutados sobre un determinado objeto. El objeto se construye a partir de la reflexión sobre un proceso, mediante la encapsulación de esos procesos en un objeto. Una vez el alumno ha construido en su cabeza diferentes objetos y procesos estos pueden coordinarse en su cabeza para formar un esquema, el cual abarca todo lo que el alumno conoce sobre un determinado concepto.

En (Sanchez-Matamoros, García Blanco, & Llinares Ciscar, 2006)se lleva a cabo un estudio sobre el nivel de comprensión de la derivada con 150 alumnos: 50 de primero de Bachillerato de Ciencias, 50 de segundo de Bachillerato de Ciencias y 50 de primer curso de la carrera de matemáticas. El instrumento de evaluación fueron una serie de cuestionarios y unas entrevistas a los alumnos. En el estudio se analiza el nivel de desarrollo del esquema, entendiendo éste como la totalidad del conocimiento que un individuo conecta a un tópico matemático, y clasifica a los alumnos según su nivel de desarrollo del esquema de la derivada en cinco niveles:

1. INTRA1: El alumno no es capaz de establecer relaciones lógicas entre elementos matemáticos.
2. INTRA: El alumno intenta entender relaciones lógicas (Por ejemplo, Si f'(a)=0 entonces hay un mínimo/máximo relativo en x=a)
3. INTER1: Se establecen algunas relaciones lógicas tanto en la representación

gráfica de la derivada como en la analítica.

4. INTER: Además de INTER1, el alumno comienza a ser capaz de sintetizar los modos de representación analítico y gráfico y a establecer equivalencias lógicas de doble implicación.
5. TRANS: En este nivel los estudiantes son capaces de establecer diferentes relaciones entre los elementos del esquema y son capaces de sintetizar estas relaciones.

El trabajo de investigación señala que la forma de pasar de un nivel de desarrollo del esquema de derivada al siguiente viene determinada por la síntesis de los modos de representación, utilizando información de lo gráfico y lo analítico para inferir lo que no se conoce. En los resultados de la investigación se ve que hay alumnos de primero de licenciatura que están en el nivel INTRA1 mientras que hay alumnos de primero de bachillerato que están en el nivel INTER1, y algunos en el nivel INTER en el caso de segundo de bachillerato. Esto es debido a que el desarrollo del esquema de la derivada no está necesariamente unido a conocer muchos conceptos, sino a ser capaces de relacionarlos y sintetizarlos para resolver la tarea propuesta. Por ello, una secuencia didáctica para enseñar el concepto de derivada debe estar encaminado a que los alumnos vayan poco a poco progresando de un nivel de esquema al siguiente.

En (Sánchez-Matamoros, García, & Llinares, 2008) se estudia la comprensión de la derivada y entre otros, se destacan los siguientes aspectos:

- Los modos de representación analíticos y gráficos de la derivada son vistos por los alumnos como independientes.
- Cuando se les pide a los alumnos que resuelvan alguna tarea donde la información viene dada de forma gráfica, los alumnos piden la expresión analítica de la función para resolverla, aunque puedan obtener esa información de las gráficas. Esto parece ser debido a que las definiciones matemáticas suelen estar presentadas de forma analítica.
- Los alumnos confunden la función derivada f'(x) con la derivada en un punto concreto f'(a). No son capaces de ver la función derivada como un objeto que pueda ser operado, transformado o representado.
- Dado que los alumnos no tienen la noción de infinitésimo pueden confundir

la derivada con la tasa de variación media calculada entre dos valores cercanos.

- La manera de llegar a conocer el concepto de la derivada es a través de su relación con los conceptos de límite y función; a través de los modos de representación, gráfico analítico y a través de conocer las diferentes propiedades y procesos.

De entre todos los resultados de investigación descritos en este apartado, lo más relevante es que para hacer progresar el entendimiento por parte del alumno de la derivada se han de trabajar de manera simultánea los aspectos simbólicos y gráficos, siendo éstos últimos los más olvidados y los que más problemas generan. Por lo tanto, en las tareas que propondré en la unidad didáctica que se encuentra en el punto 4 de este trabajo habrá una serie de tareas con énfasis en la representación gráfica de las funciones y sus derivadas.

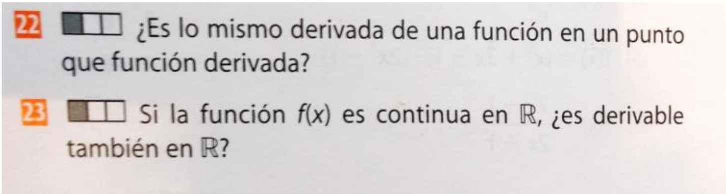
2.3 La demanda cognitiva de las tareas en matemáticas

El propio currículo de Bachillerato indica que la resolución de problemas es el eje vertebrador de la asignatura de matemáticas. Proponer un conjunto de tareas que permitan al alumno adquirir los conocimientos y desarrollar las competencias de la unidad didáctica será, por lo tanto, de vital importancia para el docente. Si bien en el currículum se habla de problemas, no todas las tareas serán problemas, puesto que para que una tarea sea, en efecto, un problema, ésta no debe tener un proceso de resolución totalmente claro por parte del alumno. Por lo tanto, una tarea puede ser un problema o no en función del alumno. (Polya, 1965) plantea que "tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata".

En (Smith & Stein, 1998) se plantea una categorización de tareas en cuatro grupos según su demanda cognitiva. De menor a mayor demanda cognitiva tenemos:

1. Nivel 1. Tareas de memorización. Son tareas en las que el alumno debe reproducir una definición, hecho, fórmula o regla que previamente ha memorizado. Este tipo de tareas son muy escasas en los libros de texto, puesto que no sólo se busca que el alumno memorice unas definiciones o fórmulas, sino que sepa aplicarlas con unos datos. En la figura 3 se ven un par de

ejemplos de tareas de nivel 1, ya que ambos requieren la reproducción de información que el alumno previamente ha memorizado. La respuesta a ambas preguntas aparece de manera literal en la parte de teoría del libro de texto.

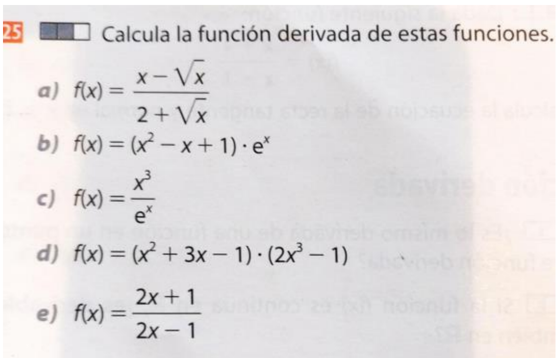


22 ¿Es lo mismo derivada de una función en un punto que función derivada?

23 Si la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, ¿es derivable también en $\mathbb{R}$?

Figura 3 Ejemplos de tareas de nivel 1 de un libro de texto de primero de Bachillerato de Ciencias, extraída de (Bescós & Zoila, 2015)

2. Nivel 2. Tareas de procedimientos sin conexiones. Son tareas algorítmicas en las que se busca que el alumno sepa aplicar alguna fórmula o procedimiento de manera aislada. El ejemplo típico de tarea de nivel 2 en el tema de derivadas consistiría en el cálculo de la función derivada utilizando las reglas de derivación. Este tipo de tareas suelen ser muy habituales en los libros de texto, y buscan que el alumno adquiera cierta soltura ejecutando procedimientos algorítmicos y que interiorice una serie de reglas. En la figura 4 aparecen 5 tareas de nivel 2, las cuales pertenecen a este nivel de demanda cognitiva porque sólo requieren del uso de un procedimiento algorítmico para su resolución y no requieren de un conocimiento de los conceptos subyacentes. En este caso, el alumno podría resolver satisfactoriamente las 5 tareas propuestas aplicando las reglas de derivación y sin la necesidad de entender lo que está haciendo ni qué significa el resultado obtenido.



25 Calcula la función derivada de estas funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}$

b) $f(x) = (x^2 - x + 1) \cdot e^x$

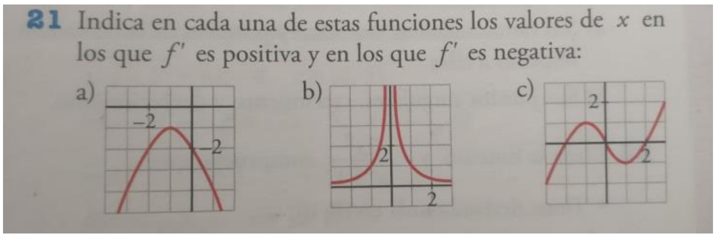
c) $f(x) = \dfrac{x^3}{e^x}$

d) $f(x) = (x^2 + 3x - 1) \cdot (2x^3 - 1)$

e) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{2x - 1}$

Figura 4 Ejemplo de tareas de nivel 2 de un libro de texto de primero de Bachillerato de Ciencias, extraída de (Bescós & Zoila, 2015)

3. Nivel 3. Tareas de procedimientos con conexiones. Buscan desarrollar la comprensión de conceptos e ideas matemáticas. Ya no se centran sólo en aplicar un procedimiento como las de nivel 2, sino que requieren conocer las ideas subyacentes de los conceptos, su definición y significado. Este tipo de tareas también son muy habituales en los libros de texto, ya que buscan que el alumno realmente entienda y sepa cuándo y cómo aplicar los contenidos de la unidad didáctica. Un ejemplo típico de tarea de nivel 3 en la unidad didáctica de derivadas sería el estudio del crecimiento y decrecimiento de una función y el cálculo de sus máximos y mínimos relativos, ya que no solo es necesario conocer cómo derivar la función (tarea de nivel 2), si no que el alumno necesita conocer el significado de la derivada y qué sentido tiene que ésta sea positiva, negativa o nula. En la figura número 5 aparecen dos tareas de nivel 3, las cuales pertenecen a dicho nivel debido a que requieren un conocimiento más o menos profundo del significado de la derivada y no pueden ser resueltas mediante un simple procedimiento.


21 Indica en cada una de estas funciones los valores de x en los que f' es positiva y en los que f' es negativa:

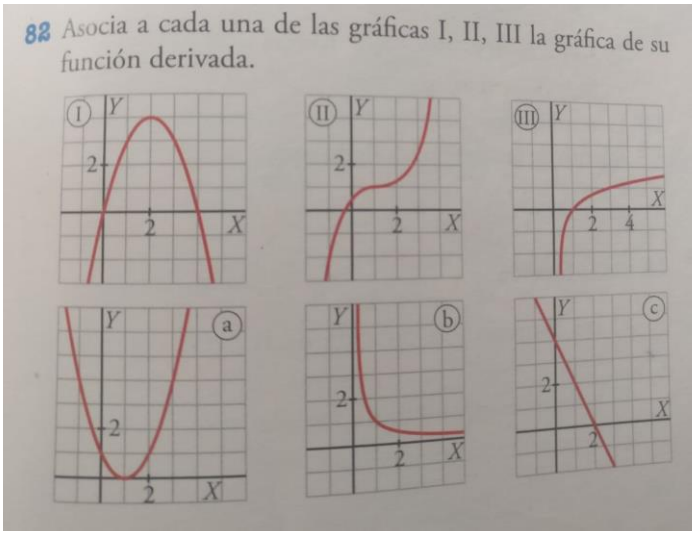
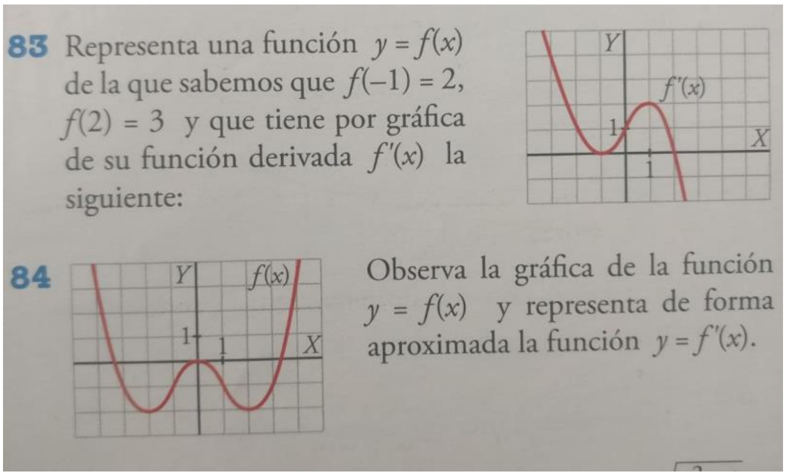

82 Asocia a cada una de las gráficas I, II, III la gráfica de su función derivada.

Figura 5 Ejemplos de tares de nivel 3 de un libro de texto de primero *de Bachillerato de Ciencias, extraída de (Colera, Oliveira, Colera, & Santaella, 2016)*

4. Nivel 4. Tareas que requieren hacer matemáticas. Requieren un pensamiento complejo y demandan la comprensión de los conceptos y procedimientos involucrados. El alumno no vislumbra un camino a seguir de manera inmediata. Es el tipo de tarea que podríamos denominar problema Lógicamente, una vez el alumno se ha enfrentado a varias tareas de nivel 4 similares éstas reducirán su demanda cognitiva y pasarían a ser catalogadas en el nivel 3. No son habituales en los libros de texto, si bien algunos libros incluyen algunas al final de cada tema como actividades de ampliación. Un ejemplo en el tema de derivadas podría ser la demostración de las reglas de derivación o la búsqueda de una función que cumple una serie de requisitos. En la figura 6 se muestran dos tareas de nivel cognitivo 4, ambas requieren de un conocimiento profundo del significado de la derivada por parte del alumno y, en principio, no se sugiere ningún procedimiento para resolverlas.


83 Representa una función $y = f(x)$ de la que sabemos que $f(-1) = 2$, $f(2) = 3$ y que tiene por gráfica de su función derivada $f'(x)$ la siguiente:

84

Observa la gráfica de la función $y = f(x)$ y representa de forma aproximada la función $y = f'(x)$.

Figura 6 Tareas de nivel 4 de un libro de texto de primero de Bachillerato de Ciencias, extraída de *(Colera, Oliveira, Colera, & Santaella, 2016)*

En el apartado cuarto de este trabajo realizaremos la clasificación según este criterio de todas las actividades de tres libros de texto. En (Arce, Conejo, & Muñoz, 2019) pueden verse otras clasificaciones de actividades, en función del contexto (real, realista, fantástico o matemático), del formato de los datos presentados (datos verbales, gráficos o tabulados), de la cantidad de datos del enunciado (estrictamente necesarios, superfluos o insuficientes) o del número de soluciones (final cerrado con una única solución o abierto con múltiples soluciones).

2.4 Metodologías y el uso de las TICs para la enseñanza de la derivada

En la actualidad existe un amplio abanico de recursos y aplicaciones tecnológicas que nos van a permitir implementar en el aula diferentes metodologías didácticas.

La clase invertida o flipped classroom, en inglés, supone un vuelco a la enseñanza tradicional: lo que tradicionalmente se hace en clase se hará en casa y lo que de manera habitual se hace en casa, se trabajará en la clase. De esta manera el trabajo en casa se reserva para tareas que puedan hacerse de manera individual y el trabajo en clase para todo aquello que requiera discusión, debate y trabajo colaborativo. Para tal efecto podemos utilizar plataformas como EdPuzzle (edpuzzle.com) que nos va a permitir crear clases para que los alumnos las vean a su propio ritmo fuera del horario de clase. Estas clases se pueden ser videos creados por el propio docente o videos creados por otros autores que pueden provenir de plataformas educativas como Khan Academy (https://www.khanacademy.org/) o plataformas generalistas como YouTube. Estos videos pueden ser editados según las necesidades del profesor, ya que éste puede añadir aclaraciones de voz y texto para incidir en aquello que considera más importante o que cree que puede generar confusión en sus alumnos y también puede recortar los videos para eliminar las partes que no sean de interés. Además, puede generar conjuntos de preguntas, tanto tipo test como abiertas, para verificar que sus alumnos están entendiendo lo que ven y el profesor puede monitorear si los alumnos están viendo los videos y los resultados de estos pequeños exámenes. De esta manera puede descargarse parte de la carga teórica de la clase mediante el visionado de un conjunto de videos y esto tiene la ventaja de que los alumnos pueden ver el video tantas veces como necesiten, pararlo para reflexionar o anotar preguntas y, además, deja libre más tiempo de la clase para las partes que requieran más interacción. La principal desventaja es que la clase invertida requiere un fuerte compromiso de los alumnos, ya que, si no trabajan la parte teórica en casa, tampoco podrán seguir la clase en el aula. Este método sólo funcionaría en clases donde la mayor parte o la totalidad de la clase tuviera una cierta motivación, así como los medios digitales necesarios. Además se pueden proponer videos de tipo divulgativo con la finalidad de hacer más atractiva la materia. En la figura 7 se puede ver una captura de EdPuzzle con un video de tipo divulgativo sobre derivadas y una pregunta propuesta por el profesor. En la figura 7 se ve un ejemplo de actividad con EdPuzzle. Otra plataforma online que nos va a permitir implementar otra metodología en el aula es Kahoot (kahoot.com), en este caso la gamificación. Esta plataforma educativa nos va a permitir generar cuestionarios en los que toda la clase va a participar simultáneamente de forma competitiva. El docente proyectará el cuestionario mediante el proyector o en la pizarra digital y los alumnos responderán desde una tableta, ordenador o teléfono. Los cuestionarios pueden ser tipo test con hasta cuatro respuestas posibles o de respuesta abierta. La ventaja de los tipo test en este caso es que se obtiene feedback inmediato.

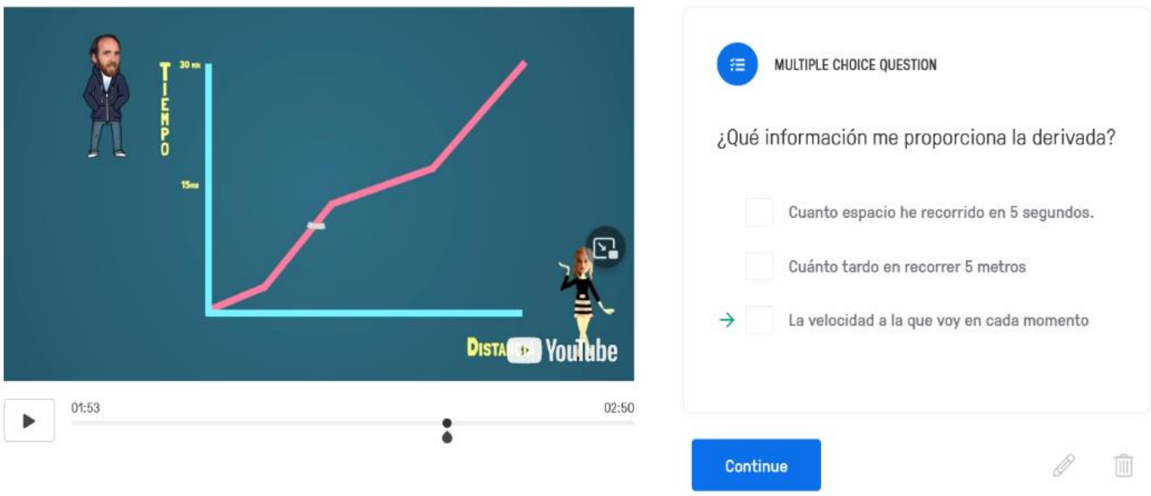


Figura 7 Captura de Edpuzzle con ejemplo de actividad, de elaboración propia usando a partir de un video del canal de YouTube Derivando (https://www.youtube.com/watch?v=AzTGmJGIpI8)

De esta manera se pueden comprobar los conocimientos de los alumnos de una manera más divertida y atractiva para éstos, pues lo verán más como un juego. En la figura 8 se puede ver un ejemplo de este tipo de preguntas en Kahoot en las que el profesor les ofrece la gráfica de una función y deben escoger cuál de las cuatro funciones propuestas se corresponde con la derivada. Al final de la prueba todos los alumnos obtienen una puntuación y se genera una clasificación. Estos resultados podrían utilizarse para la evaluación o dejarlos simplemente como parte de una evaluación de carácter formativo para hacerlos más distendidos.

Otra plataforma similar a Kahoot es Socrative (www.socrative.com), que también permite crear cuestionarios de diversos tipos y proporcionar información al docente sobre el desempeño de su aula.

Figura 8 Captura de Kahoot (elaboración propia)

Quizá la aplicación más relevante para un aula de matemáticas a día de hoy es GeoGebra, la cual nació para trabajar la geometría y el álgebra de manera dinámica, pero se ha expandido para poder ayudar al trabajo en todas las ramas de las matemáticas, particularmente en el cálculo. Geogebra va a permitir a los alumnos dibujar funciones para explorar sus características y realizar cálculos sobre estas, como la función derivada. Además, permite crear applets, que son pequeños programas que pueden ser útiles para explicar mejor algún concepto al poderlo visualizar de forma dinámica. En la figura 9 se muestra un ejemplo de este tipo de programas en el que se traza la recta tangente a una curva en cualquier punto, dicho ejemplo ha sido elaborado por el autor de este trabajo. El programa permite introducir cualquier función y variar el punto de estudio mediante un deslizador. De esta manera, conceptos que puedan ser abstractos y que requieran un apoyo visual para ser entendidos pueden ser mostrados mediante Geogebra de forma cómoda. Otro ejemplo, también creado por el autor de este trabajo, podría ser el mostrado en la figura 10, en la que el alumno puede introducir cualquier función en la caja de entrada y el programa le dará la expresión analítica y la gráfica de la función y su derivada. De esta manera el alumno puede analizar la relación entre éstas utilizando cualquier ejemplo a su antojo y obtener así mucha más información de la que podría obtener resolviendo tareas con lápiz y papel.

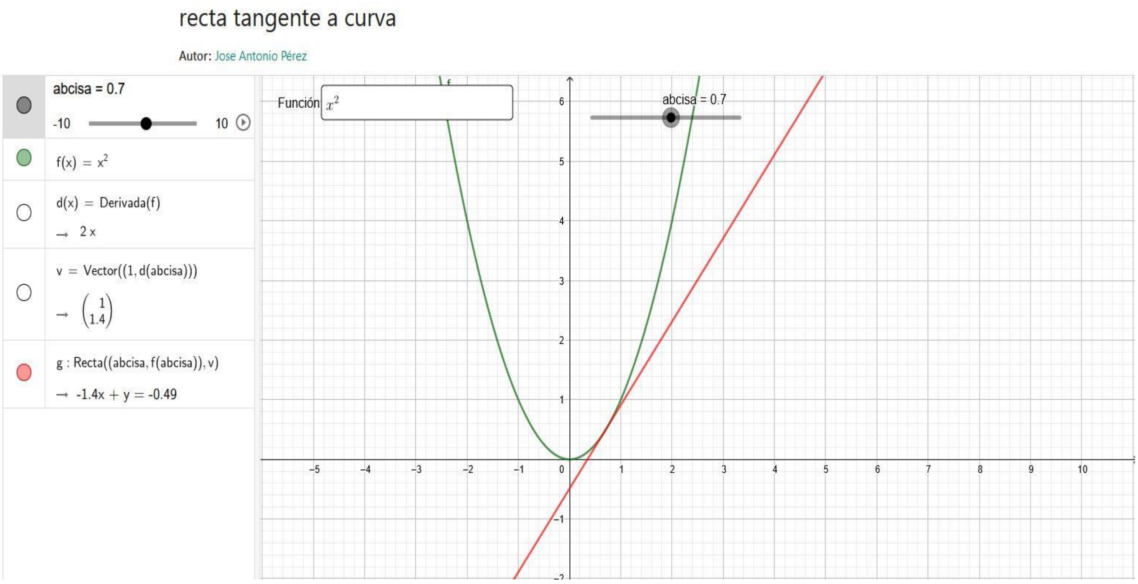


Figura 9 Ejemplo de applet de Geogebra. Cálculo de la recta tangente a una curva (elaboración propia disponible en https://www.geogebra.org/m/stn2jqqh)

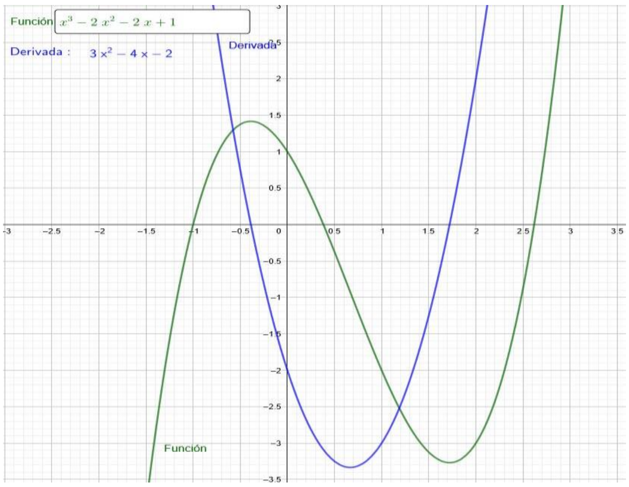


Figura 10 Función y su derivada (de elaboración propia, disponible en https://www.geogebra.org/m/esxs6a6y)

Además de los recursos que un profesor o sus alumnos puedan generar existe una basta colección de applets generados por miles de autores de todo el mundo que pueden ser utilizados libremente o incluso editados para adaptarlos a unas necesidades concretas. Además, estas actividades pueden ser agrupadas por el docente en colecciones llamadas libros, de tal manera que éste pueda presentarle al alumno varias actividades agrupadas por temática. Todas estas tareas pueden ser trabajadas por los alumnos individualmente o se podrían trabajar de manera grupal en clase.

Por otro lado, Geogebra incorpora una funcionalidad denominada Geogebra Classroom. Esta consiste en que se puede generar una aula virtual a la cual los alumnos se unen desde sus dispositivos y el profesor les asigna un conjunto de tareas. El docente puede ver en tiempo real qué están haciendo sus alumnos y el grado de realización de las actividades. Este es un tipo de funcionalidad excelente para las clases en remoto.

Otra metodología que puede ser implementada en el aula mediante recursos tecnológicos es la ludificación. En los últimos tiempos muchos docentes han creado lo que se conoce como escape rooms educativos en que los que el alumno debe resolver una serie de tareas matemáticas, normalmente juegos de lógica. Estas tareas suelen estar ambientadas con algún tipo de historia que sirve para darle realismo a la historia. Para tal fin numerosos docentes utilizan la plataforma Genially (https://www.genial.ly/), que es una plataforma online accesible via web que permite crear presentaciones interactivas por lo que pueden generarse escape rooms a partir de preguntas que el alumno deberá responder para poder avanzar y conseguir resolverlo.

2.5 Marco legislativo. La derivada en el currículo

En esta sección se lleva a cabo una descripción de los documentos legislativos y curriculares que regulan la educación en España y su aplicación a la enseñanza de la asignatura Matemáticas I de primero de Bachillerato de Ciencias, que es donde se enmarca el curso sobre el que versa este trabajo. Toda unidad didáctica debe estar diseñada de acuerdo a los documentos que vamos a exponer, que son válidos para el curso 20/21.

La Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE) es el elemento base que regula los aspectos generales de la educación en España en todos los niveles, incluidos la ESO y el Bachillerato.

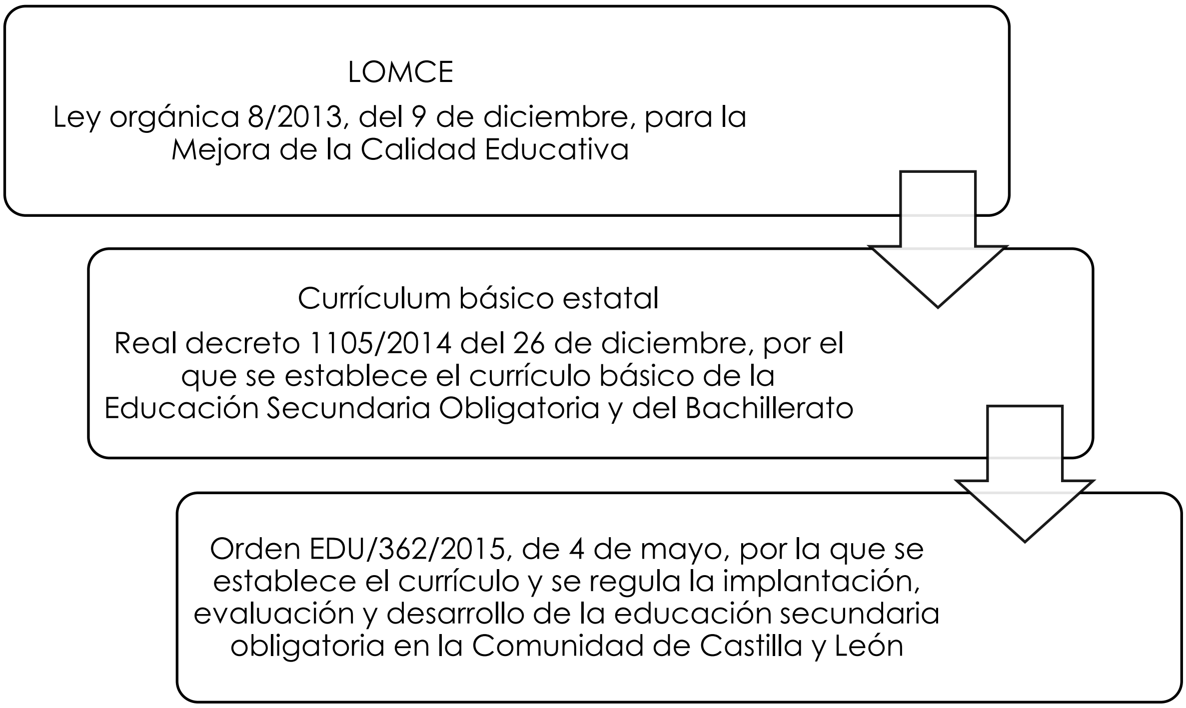


Figura 11 Documentos curriculares relativos a Castilla y León (elaboración propia)

En la orden ECD/65/2015 del 21 de enero se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación tanto en la educación Primaria, en Secundaria y en Bachillerato. Asimismo, se definen las competencias clave del currículo, que son:

1. Comunicación lingüística
2. Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
3. Competencia digital.
4. Aprender a aprender.
5. Competencias sociales y cívicas.
6. Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.
7. Conciencia y expresiones culturales.

El texto especifica que las competencias clave deben estar integradas en cada una de las materias, si bien es esperable que unas asignaturas contribuyan más que otras a diferentes competencias. La competencia más específica a la asignatura de matemáticas sería la Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología que el texto define en dos partes. La competencia matemática "implica la capacidad de aplicar el razonamiento matemático y sus herramientas para describir, interpretar y predecir distintos fenómenos en su contexto" (p. 6993) y las competencias básica en ciencia y tecnología "aquellas que proporcionan un acercamiento al mundo físico y a la interacción responsable con él desde acciones, tanto individuales como colectivas, orientadas a la conservación y mejora del medio natural, decisivas para la protección y mantenimiento de la calidad de vida y el progreso de los pueblos" (p. 6993).

El currículo básico a nivel estatal queda explicitado en el Real Decreto 1105/2014 del 26 de diciembre. Aquí se define el currículo para todos los niveles de la ESO y el Bachillerato en sus tres modalidades: Ciencias, Humanidades y Ciencias Sociales, y Arte. Además, es en este documento donde se citan los objetivos generales del bachillerato:

a) **Ejercer la ciudadanía democrática**, desde una perspectiva global, y adquirir una conciencia cívica responsable, inspirada por los valores de la Constitución española así como por los derechos humanos, que fomente la corresponsabilidad en la construcción de una sociedad justa y equitativa. b) **Consolidar una madurez personal y social** que les permita actuar de forma responsable y autónoma y desarrollar su espíritu crítico. Prever y resolver pacíficamente los conflictos personales, familiares y sociales.

c) **Fomentar la igualdad efectiva de derechos y oportunidades entre hombres y mujeres**, analizar y valorar críticamente las desigualdades y discriminaciones existentes, y en particular la violencia contra la mujer e impulsar la igualdad real y la no discriminación de las personas por cualquier condición o circunstancia personal o social, con atención especial a las personas con discapacidad. d**)** **Afianzar los hábitos de lectura, estudio y disciplina**, como condiciones necesarias para el eficaz aprovechamiento del aprendizaje, y como medio de desarrollo personal.

e) **Dominar, tanto en su expresión oral como escrita, la lengua castellana** y, en su caso, la lengua cooficial de su Comunidad Autónoma.

f) **Expresarse con fluidez y corrección en una o más lenguas extranjeras**.

g) **Utilizar con solvencia y responsabilidad las tecnologías de la información y la comunicación.**

h**) Conocer y valorar críticamente las realidades del mundo contemporáneo**, sus antecedentes históricos y los principales factores de su evolución. Participar de forma solidaria en el desarrollo y mejora de su entorno social.

i) **Acceder a los conocimientos científicos y tecnológicos fundamentales y dominar las habilidades básicas propias de la modalidad elegida**.

j) **Comprender los elementos y procedimientos fundamentales de la investigación** y de los métodos científicos. Conocer y valorar de forma crítica la contribución de la ciencia y la tecnología en el cambio de las condiciones de vida, así como afianzar la sensibilidad y el respeto hacia el medio ambiente.

k) **Afianzar el espíritu emprendedor con actitudes de creatividad, flexibilidad, iniciativa, trabajo en equipo, confianza en uno mismo y sentido crítico.**

l) **Desarrollar la sensibilidad artística y literaria**, así como el criterio estético, como fuentes de formación y enriquecimiento cultural.

m) **Utilizar la educación física y el deporte para favorecer el desarrollo personal y social.**

n) **Afianzar actitudes de respeto y prevención en el ámbito de la seguridad vial**

Estos objetivos generales de Bachillerato deben trabajarse de forma transversal desde todas las asignaturas, incluida Matemáticas, por lo que es labor del docente el incluir elementos y actividades que las fomenten dentro de su práctica diaria.

Finalmente, tenemos la normativa que regula la educación en el ámbito de la comunidad autónoma, en nuestro caso Castilla y León, y que concreta el currículo, la organización de las enseñanzas y otros aspectos. Ésta viene recogida en la Orden EDU/362/2015, de 4 de mayo. En la introducción a la asignatura de matemáticas, válida tanto para primero como para segundo de Bachillerato de Ciencias, se describen una serie de objetivos generales de las matemáticas en este periodo. De ellos, destacan:

a) La resolución de problemas y los proyectos de investigación constituyen ejes fundamentales de la materia.
b) Las matemáticas deben ayudar a adquirir un hábito de pensamiento que permita establecer hipótesis y contrastarlas, elaborar estrategias de resolución de problemas y ayudar en la toma de decisiones adecuadas, tanto en la vida personal como profesional.
c) Los nuevos conocimientos que deben adquirirse tienen que apoyarse en los

ya conseguidos.

d) Es prioritario realizar distintos tipos de actividades, que permitan la asimilación de contenidos de forma progresiva.
e) El uso de la historia de las matemáticas para introducir contenidos favorece el acercamiento de los alumnos a situaciones reales planteadas en diferentes momentos.

El currículo establece cinco bloques interrelacionados: Procesos, métodos y actitudes, Números y Álgebra, Análisis, Geometría, y Estadística y Probabilidad. El primero de ellos es un bloque de carácter transversal y abarca conocimientos como son la resolución de problemas, los métodos de demostración en matemáticas, el razonamiento matemático o la elaboración e interpretación de gráficas.

La derivada aparece por primera vez en primero de Bachillerato, tanto en la modalidad de Ciencias como en la de Humanidades y Ciencias Sociales. En el currículo de Ciencias, se ubica dentro del bloque de Análisis y el currículo de Castilla y León cita para ella los siguientes contenidos para la asignatura de Matemáticas I en el Bachillerato de Ciencias:

a) Derivada de una función en un punto.
b) Derivadas laterales.
c) Interpretación geométrica de la derivada de la función en un punto. Recta tangente y normal.
d) Función derivada.
e) Cálculo de derivadas. Regla de la cadena.
f) Representación gráfica de funciones: dominio, recorrido, simetrías, monotonía, extremos relativos y absolutos, curvatura, puntos de inflexión, asíntotas y periodicidad.

En el contenido f) se abarca contenido que no es estrictamente de la unidad didáctica, sino contenido previo que se ha debido cubrir en las unidades didácticas de funciones y de funciones elementales.

A modo comparativo, los contenidos para la asignatura homóloga en el Bachillerato de Ciencias Sociales (denominada Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I) son:

a) Tasa de variación media y tasa de variación instantánea.

b) Aplicación al estudio de fenómenos económicos y sociales.
c) Derivada de una función en un punto
d) Interpretación geométrica. Recta tangente a una función en un punto.
e) Crecimiento de una función en un punto y en un intervalo.
f) Función derivada.
g) Reglas de derivación de funciones elementales sencillas que sean suma, producto, cociente y composición de funciones polinómicas, exponenciales y logarítmica

Como se puede comprobar, hay varias diferencias. Por ejemplo, en Ciencias no se incluye la tasa de variación media e instantánea, pese a que todos los libros de texto analizados en el punto tercero del trabajo dedican varias páginas a este contenido. En Ciencias Sociales el cálculo de derivadas está limitado a un reducido conjunto de funciones, mientras que en Ciencias es más amplio (no se explicita en el currículum). Además, en Ciencias Sociales sí se incluye la aplicación de la derivada a otros ámbitos, lo cual suele materializarse en problemas de optimización en contextos de económicos y de empresa. Por el contrario, en Ciencias no se indican en el currículo contenidos sobre la aplicación de la derivada a ningún ámbito fuera de las matemáticas. Además, en Ciencias se incluya la representación gráfica de funciones entre los contenidos mientras que en Ciencias Sociales este contenido no aparece hasta segundo.

También, se establecen dos criterios de evaluación:

1. Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos.
2. Estudiar y representar gráficamente funciones obteniendo información a partir de sus propiedades y extrayendo información sobre su comportamiento local o global.

Además, estos criterios de evaluación quedan concretados en una serie de estándares de aprendizaje evaluables, que definirán los resultados de aprendizaje del alumno y concretan lo que éste debe saber hacer:

a) Calcula la derivada de una función usando los métodos adecuados y la emplea para estudiar situaciones reales y resolver problemas (Concreta el criterio de evaluación 1).

b) Deriva funciones que son composición de varias funciones elementales mediante la regla de la cadena (Concreta el criterio de evaluación 1).
c) Determina el valor de parámetros para que se verifiquen las condiciones de continuidad y derivabilidad de una función en un punto (Concreta el criterio de evaluación 1).
d) Representa gráficamente funciones, después de un estudio completo de sus características mediante las herramientas básicas del análisis (Concreta el criterio de evaluación 2).
e) Utiliza medios tecnológicos adecuados para representar y analizar el comportamiento local y global de las funciones (Concreta el criterio de evaluación 2).

En segundo de Bachillerato se trabajan los mismos contenidos acerca de la derivada que en primero y se añaden una serie de contenidos nuevos que no aparecen en primero, que son:

a) Derivada de la función inversa.
b) Teoremas de Rolle y del valor medio.
c) La regla de L'Hôpital. Aplicación al cálculo de límites.
d) Aplicaciones de la derivada: problemas de optimización

El currículo español es un currículo en espiral de esta manera en cada curso se revisa el contenido previo, incrementando la dificultad de manera progresiva y siempre relacionando los nuevos contenidos con los que ya el alumno conoce. Todos los nuevos contenidos siempre están vinculados, en mayor o menor medida, con contenidos de cursos previos. Si bien en el caso de la derivada se introduce por primera vez en primero de Bachillerato, ya desde primero de la ESO existe un bloque de Funciones en el currículo (en Bachillerato este bloque es denominado Análisis) en el que se introducen de manera paulatina todos los conocimientos que asientan la base del trabajo con funciones y que llevan de manera natural a la introducción de la derivada. Además, previo al tema de derivadas, de acuerdo al currículo se deben cubrir un conjunto contenidos esenciales para poder entender la derivada y trabajar con ella, así como el concepto de límite, que es introducido en este curso por primera vez. Dichos contenidos son:

a) Funciones reales de variable real
b) Funciones básicas: polinómicas, racionales sencillas, valor absoluto, funciones con radicales, trigonométricas y sus inversas, exponenciales, logarítmicas. Funciones definidas a trozos y funciones periódicas.
c) Operaciones y composición de funciones. Función inversa. Funciones de oferta y demanda.
d) Concepto de límite de una función en un punto y en el infinito. Cálculo de límites. Límites laterales. Indeterminaciones. Comportamiento asintótico de una función: asíntotas y ramas infinitas.
e) Continuidad de una función. Estudio de discontinuidades

3. Análisis comparativo de libros de texto de matemática

3.1 Motivación del análisis y estudios previos

El libro de texto es uno de los materiales didácticos más importantes y que suele estar presente, en mayor o menor medida, en muchas las aulas de matemáticas. En el caso de matemáticas, son a la vez un organizador de contenidos y un repositorio de tareas. Por ello el libro de texto puede influir notablemente tanto en los contenidos que realmente se imparten en un aula como en el estilo pedagógico. Se acepta que, en la práctica, influye más que los propios documentos del currículum ya que muchas veces es el propio contenido del libro de texto el que el docente decide impartir. Existen varios niveles de uso del libro de texto, según el docente; algunos lo utilizan como guía completa del curso, tanto para teoría como para tareas, otros lo emplean como repositorio de tareas, proporcionando al alumno todo el contenido teórico elaborado por ellos mismos y otros no lo emplean en absoluto en clase y lo dejan como manual de consulta adicional para el alumno (Arce, Conejo, & Muñoz, 2019).

Debido a la relevancia del libro de texto, éste está empezando a ser objeto de investigación por parte de la didáctica de la matemática. En (Ortega & Monterrubio, 2009) se propone un modelo de valoración de libros de texto de matemáticas según diversos indicadores: objetivos, contenidos, conexiones, actividades, metodología, lenguaje, ilustraciones, motivación, tecnologías de la información y de la comunicación, evaluación, enfatización, aspectos formales, recursos generales y entorno. A cada uno de estos indicadores el docente debe asignarles una ponderación, según su valoración personal de relevancia, y se obtendrá una calificación final que un departamento de matemáticas de un centro puede utilizar para escoger el libro de texto a utilizar.

En (Vargas, Fernandez-Plaza, & Ruiz-Hidalgo, 2020) se lleva a cabo una investigación acerca de las tareas propuestas en varios libros de texto en el tema de derivadas de 1º de Bachillerato y se clasifican éstas según el contenido al que hacen referencia, los sistemas de representación que utilizan, el tipo de función involucrada en la derivada y la demanda cognitiva de la tarea, entre otros indicadores. Este estudio, que abarcó el libro de texto de cinco editoriales (SM, Anaya, Edelvives, Santillana y Bruño) llegó a las siguientes conclusiones acerca de las tareas del tema de derivadas:

- La mayor parte de las tareas se presentan en una situación puramente matemática y una pequeña cantidad (inferior al 5%) en una situación física.
- La mayor parte de las tareas, más del 70% en todos los casos, son tareas de nivel de demanda cognitiva dos, procesos sin conexión. Las tareas de hacer matemáticas, nivel cuatro, son muy escasas, menos del 2%.
- Sobre las capacidades fomentadas, en todos los casos la capacidad más fomentada era el trabajo algorítmico con operaciones simbólicas (más del 80%). La representación gráfica y la argumentación aparecen con mucha menor frecuencia en las tareas, menos del 17% y 25% respectivamente.
- Sobre el tipo de función utilizado en las tareas, más del 50% de las tareas utilizan funciones polinómicas.

También el libro de texto ha sido objeto de investigación histórico, analizándose su evolución en distintos apartados a lo largo del tiempo. En (Conejo, Arce, & Ortega, 2015) se lleva a cabo una investigación en la que se analiza cómo ha evolucionado el esquema de prueba de dos teoremas de derivabilidad: el Teorema de Rolle y el del valor medio. En dicho estudio se concluye que, si bien la presencia de la demostración no ha disminuido (al menos para los teoremas y libros estudiados), sí se ha ido perdiendo formalismo y pasos en las demostraciones a lo largo del tiempo en favor de justificaciones más de tipo explicativo orientadas a que el alumno comprenda la situación.

Otro estudio que ha analizado la evolución del contenido de los libros de texto a lo largo del tiempo es el llevado a cabo en (Conejo, Arce, & Ortega, 2014). En concreto los autores analizan cómo ha evolucionado la presencia y tipo de los esquemas de prueba de las reglas de derivación.

La lectura de estos estudios me ha permitido conocer cómo es una investigación de análisis de contenido de libros de texto y su relevancia dentro del estudio de la didáctica de la matemática, ya que es un recurso que influye fuertemente en la práctica docente. De esta manera, si se quiere analizar cómo es la práctica docente se debe analizar cómo es el libro de texto que se usa en ese contexto académico, tanto su teoría como las actividades que propone. En el análisis que llevaré a cabo en el siguiente punto abarcaré toda la unidad didáctica de derivadas y sus aplicaciones, tanto la parte de teoría como las actividades, mientras que los estudios citados se centraban, con mucha más profundidad, en sólo una parte, como pueden ser las reglas de derivación, las demostraciones o las actividades. Además, los libros utilizados en el estudio están siendo utilizados actualmente en multitud de centros de Castilla y León. Respecto a las actividades, espero obtener conclusiones similares a las del estudio de (Vargas, Fernandez-Plaza, & Ruiz-Hidalgo, 2020) al ser libros redactados de acuerdo al mismo currículo y leyes a los tres que se analizan en los puntos siguientes de este trabajo.

3.2 Marco teórico del Análisis de los libros de texto

En este apartado se llevará a cabo un análisis de contenido de tres libros de texto ampliamente utilizados en España. Dos de ellos son libros son comerciales, uno editado por Anaya (Colera, Oliveira, Colera, & Santaella, 2016) y otro editado por Oxford University Press (Bescós & Zoila, 2015). Son, junto al de la editorial SM (al cual no he tenido acceso), los libros de matemáticas de primero de Bachillerato más vendidos en la plataforma Amazon. Además, El tercero, editado por la plataforma Marea Verde está disponible de manera gratuita online (Apuntes Marea Verde, 2021) y algunos docentes que no desean obligar a sus alumnos a adquirir un libro de texto utilizan este libro en sus clases. Se analizará solo el tema de derivadas y sus aplicaciones, que en el libro de Oxford es el capítulo once, en el de Anaya el doce y en el de Marea Verde el ocho.

En análisis de contenido es una técnica de investigación cuya finalidad es obtener información de una comunicación, escrita o de otra naturaleza, mediante una descripción analítica del contenido que ha de ser sistemática, objetiva, replicable y válida. En palabras de Bardin es "un conjunto de técnicas de análisis de comunicaciones tendente a obtener indicadores (cuantitativos o no) por procedimientos sistemáticos y objetivos de descripción del contenido de los mensajes, permitiendo la inferencia de conocimientos relativos a las condiciones de producción/recepción (variables inferidas) de estos mensajes" (Bardin, 1996).

En este caso vamos a dividir el estudio en tres partes, primero se analizará la unidad didáctica en su conjunto (punto 3.3), siguiendo varios de los indicadores descritos en (Ortega & Monterrubio, 2009), en el siguiente punto se estudiarán las reglas de derivación presentes en estos tres libros de texto (punto 3.4) y después, finalmente, se hará un estudio de las actividades de acuerdo al marco teórico descrito en punto 2.3 de este trabajo (punto 3.5).

Respecto al contenido de la parte de exposición de teoría de la unidad didáctica, primero se hará una descripción pormenorizada de esta, punto por punto. A continuación, para cada uno de los tres libros, en el apartado Adecuación a Objetivos y Contenidos, se analizan los aspectos recogidos en la tabla, basados en los expuestos en (Ortega & Monterrubio, 2009) pero reducidos y simplificados:

Tabla 3 Elementos a analizar de la parte de teoría de los libros de texto

Si el libro abarca todos los contenidos y permite alcanzar los estándares de aprendizaje evaluables previstos en la orden EDU/363/2015 del 4 de mayo para Castilla y León
Cómo se explica la teoría. Si dicha exposición teórica es completa, correcta y suficiente
Si se presenta una motivación a la introducción de un concepto
Si se ofrecen demostraciones de los resultados
Si la teoría se acompaña de gráficas para ayudar a la comprensión
Cómo es el lenguaje utilizado
Si existen conexiones con otros ámbitos, como la historia de la matemática, la física o la economía
Si se intenta motivar al alumno mediante curiosidades, juegos o humor
Si se fomenta el uso de elementos tecnológicos como pueda ser Geogebra, Desmos o aplicaciones similares.
Si se tratan temas transversales
Se concluye con una pequeña opinión en base a lo recogido en los puntos anteriores

Los resultados de esta parte del análisis se describen en el punto 3.3 y sus subapartados.

El siguiente paso en el análisis, que puede encontrarse en el 3.4, consiste en llevar a cabo un análisis de las reglas de derivación. El cálculo de funciones derivadas de forma simbólica a partir de estas reglas suele ser lo que más se trabaja en el aula y, a su vez, lo que más suele ser evaluado, por lo tanto es esencial que el libro de texto proporcione toda la información necesaria.

El objetivo de este análisis consiste en ver si:

- Se presenta la regla de derivación para cada función elemental.
- Se lleva a cabo la demostración de esta regla y, en caso afirmativo, cómo es esta demostración (axiomática, inductiva o gráfica).
- Se incluye un ejemplo en los casos en los que esto tenga sentido.

Por último, en el punto 3.5 se lleva a cabo un análisis de las tareas propuestas. El marco teórico se expuso en el punto 2.3. En este apartado clasificaremos las tareas de acuerdo a:

- El nivel de demanda cognitiva según el marco de Smith&Stein.
- El tipo de formato en el que se presentan los datos del problema, que puede ser verbal, simbólico, tabular o visual.
- El contexto en el que se enmarca la tarea, que puede ser real, realista, fantasiosa o matemática.
- Si los datos del enunciado son los estrictamente necesarios o si se presentan datos superfluos.
- Si la tarea tiene una única solución cerrada o si, por el contrario, se permite un final abierto con más de una solución válida.

3.3 Análisis del contenido teórico de los libros de texto

3.3.1 Libro de texto de la editorial Oxford

Descripción de los contenidos teóricos de la unidad didáctica de derivadas

1. Introducción contextual (1 página). Realiza una introducción a la derivada con la contextualización de una carrera de motociclismo. Presenta la velocidad instantánea como la velocidad media entre dos instantes muy próximos.
2. Ejercicios de repaso de unidades anteriores (1 página) Se centra en conceptos previos que serán de utilidad en esta unidad didáctica, como las ecuaciones de la recta y el concepto de límite.
3. Tasa de variación media (1 página) Presenta el concepto de tasa de variación media utilizando un símil de la física y a continuación de la definición formal, acompañándolo de una gráfica. Incluye una actividad resuelta para

mostrar al alumno cómo aplicar estos conceptos en un problema situado en un contexto de física.

4. Tasa de variación instantánea (1 página) Presenta el concepto de manera informal a partir de otro símil con las carreras de automoción y después da la definición formal, utilizando dos definiciones distintas. Introduce la derivada mediante la visión cinemática de la misma a partir de la velocidad instantánea.
5. Derivada de una función en un punto (2 páginas) Presenta la definición de derivada en un punto y su interpretación geométrica mediante dos gráficas, así como tres actividades resueltas en las que se calcula la derivada en un punto mediante la definición.
6. Derivadas laterales (2 páginas). Presenta la definición de derivadas laterales y lo acompaña de tres gráficas para ilustrar tres casos en los que la función no es derivable en un punto. Incluye tres actividades resueltas sobre derivadas laterales y las acompaña de tres gráficas para ilustrar el concepto.
7. Recta tangente y normal (2 páginas): Proporciona las definiciones de recta tangente y normal a partir de la derivada en un punto y la ecuación punto pendiente de la recta, proporciona las fórmulas que el alumno ha de usar para calcularlas. Incluye dos actividades resultas para mostrar el alumno el procedimiento de cálculo de estas dos rectas.
8. Continuidad y derivabilidad (2 páginas) Afirma que si una función es derivable en un punto es continua en ese punto y presenta una demostración axiomática. No habla del contrarrecíproco. Incluye dos actividades resueltas sobre derivabilidad de funciones definidas a trozos e incluye gráficas en ambos para ilustrar el concepto.
9. Concepto de función derivada (media página). Ofrece la definición de función derivada y propone un ejemplo de cómo calcular la derivada de una función usando la definición.
10. Cálculo de la derivada mediante reglas de derivación (3 páginas y media): Presenta las reglas de derivación de las funciones elementales, así como las reglas de derivación de la suma, producto y cociente de funciones y el producto de una función por una constante.

11. Derivada de la función compuesta. Regla de la cadena (1 página). Cita las condiciones de uso y la definición de regla de la cadena.
12. Derivadas sucesivas (2 páginas) Define la segunda, tercera y sucesivas derivadas y realiza una conexión con la física, indicando que si se tiene el espacio recorrido como función del tiempo, la primera derivada indica la velocidad del móvil y la segunda su aceleración. Incluye una actividad resuelta ilustrada con cuatro gráficas que ilustran la primera y segunda derivada de una función.
13. Crecimiento y decrecimiento de una función. Máximos y mínimos (2 páginas): Muestra las condiciones para que una función sea creciente/decreciente en un punto o en un intervalo y las condiciones para que exista un extremo relativo usando la primera y segunda derivada. Además incluye como actividades resueltas dos ejercicios en los que se calculan los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativas y se sistematizan los pasos que el alumno ha de seguir para resolver este tipo de ejercicios que son muy habituales en primero y segundo de Bachillerato.
14. Concavidad y convexidad (2 páginas): Muestra las condiciones que tiene que cumplir una función para ser cóncava o convexa en un intervalo a partir de la segunda derivada y la condición para la existencia de un punto de inflexión utilizando la segunda y tercera derivada. Incluye una actividad resuelta en la que se sistematizan los pasos que el alumno debe seguir para calcular los intervalos en los que una función es cóncava/convexa.
15. Representación de funciones polinómicas y racionales (4 páginas): En este apartado solo se trabaja la representación de funciones polinómicas y racionales sencillas a partir de su expresión analítica. Se muestra el conjunto de pasos que el alumno debe seguir y en qué características se ha de fijar. Se incluyen tres actividades resueltas en las que se ejemplifican estos pasos.
16. Optimización de funciones (1 página): Se explica qué es un problema de optimización desde el punto de vista matemático, sin exponer ejemplos de por qué este tipo de problemas son muy relevantes en muchos contextos reales y de otras ciencias. Se incluye una actividad resuelta con un problema de tipo geométrico.

17. Ejercicios y problemas resueltos (4 páginas): Ofrece cinco ejercicios resueltos paso a paso de cinco ejercicios tipo: cálculo de la recta tangente, calcular parámetros para que una función sea continua y derivable en toda la recta real, estudio del crecimiento y decrecimiento de una función y su curvatura, determinación de una función polinómica a partir de sus características y representación de funciones.
18. Tareas propuestas (5 páginas): Propone un total de 71 actividades (a las que habría que añadir 48 adicionales que venían incluidas en la parte teórica), clasificadas el contenido al que hacen referencia y con una clasificación de dificultad de uno a tres. Además, ofrece la solución en la mayoría de los casos.
19. Autoevaluación (1 página): Ofrece al alumno nueve actividades de autoevaluación y una lista de criterios de evaluación para que el alumno reflexione si es capaz de cumplirlos.

Adecuación de Objetivos y Contenidos

El libro de texto de Oxford ofrece la teoría como un conjunto de resultados y fórmulas y delega en el docente la tarea de explicarlas y demostrarlas. Los resultados y fórmulas más relevantes están resaltados en recuadros. No se lleva a cabo una explicación profunda de los conceptos ni se ofrece una motivación a su introducción o a la necesidad de que estos existan. Sin embargo, acompañando a la teoría sí que incluye multitud de gráficas de buena calidad para que el alumno pueda razonar el porqué de los conceptos que están siendo expuestos. El lenguaje utilizado en la parte de teoría es impersonal, conciso y sin ambigüedades ni adornos. Sin embargo, las actividades resueltas están escritas en primera persona del plural y utiliza un lenguaje más cercano al alumno, para intentar indicar a éste cómo debe expresarse cuando resuelva tareas similares, además, es muy sistemático a la hora de resolver estas tareas para intentar así inculcar al alumno un sentido de orden y de claridad. Estos ejercicios resueltos de tipo algorítmico están encaminados a familiarizar al alumno con la teoría, para que sepa aplicar las formulas y procedimientos mostrados en esta parte.

El libro prácticamente no ofrece conexiones con otros ámbitos, salvo alguna con la física, concretamente con la cinemática, pero esta es testimonial. De la misma forma, tampoco se ofrece una introducción histórica al concepto ni se menciona la historia de las matemáticas en ningún momento.

Respecto a los contenidos, están presentes todos los requeridos por el currículo en la orden EDU/363/2015 del 4 de mayo para Castilla y León. De hecho, incluso supera los contenidos requeridos por dicho currículo dado que el contenido de optimización de funciones no aparece en primero de Bachillerato (sí en segundo), aunque bien es cierto que es una consecuencia directa del estudio de máximos y mínimos de una función y que todos los libros de texto analizados lo incluyen.

Respecto a la adecuación del libro para superar los criterios de evaluación, no proporciona los recursos para alcanzar el primero de ellos "Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos", dado que no propone tareas aplicadas a esos fenómenos naturales sociales o tecnológicos.

Por otro lado, tampoco ofrece contenido para el cumplimiento de uno de los estándares de aprendizaje evaluables, concretamente: "Utiliza medios tecnológicos adecuados para representar y analizar el comportamiento local y global de las funciones", dado que no se hace referencia a ningún software de representación gráfica de funciones como pudiera ser Geogebra o Desmos. Esto es algo que el docente debería impartir valiéndose de otros recursos.

Oxford no ofrece elementos de motivación mediante humor, juegos. Tampoco ofrece ilustraciones más allá de las gráficas de funciones para ilustrar los conceptos de teoría.

No ofrece ningún tipo de tratamiento de temas transversales, se centra en lo puramente matemático.

En resumen, el libro de Oxford es un buen libro de texto si lo que desea el docente es que los alumnos tengan una guía de referencia para los conceptos y fórmulas y una amplia colección de ejercicios para comprender dicha teoría. Todas las lagunas que este libro presenta pueden y deben ser solventadas por el docente.

3.3.2 Libro de texto de la editorial Anaya

Descripción de los contenidos teóricos de la unidad didáctica de derivadas

1. Introducción (2 páginas) Lleva a cabo una introducción desde el punto de vista histórico con Newton y Leibnitz como protagonistas. Propone una actividad introductoria ambientada en un contexto de física cinemática.
2. Tasa de variación media (1 página): Acompaña la definición del concepto con una gráfica. Incluye dos actividades resueltas para familiarizar al alumno con el cálculo de la tasa de variación media.
3. Concepto de derivada en un punto (1 página): Define el concepto de derivada en un punto de manera gráfica como la pendiente de la recta tangente. Define recta tangente como la recta secante entre dos puntos infinitamente próximos. Acompaña la explicación de 4 gráficas.
4. Obtención de la derivada a partir de la expresión analítica (2 página): Presenta la definición de derivada en un punto y ofrece dos fórmulas para calcularla. Además, presenta los pasos de cómo hacer dicha derivada en un punto, tanto de forma general como con un ejemplo y gráficamente. Incluye dos actividades resueltas en las que se calcula la derivada en varios puntos y se proporciona la gráfica de las funciones para que el alumno pueda relacionar el valor de la derivada en un punto con la gráfica de la función
5. Función derivada (2 páginas). Presenta la definición de función derivada y algunas nociones de nomenclatura y notación. Incluye una actividad resuelta que muestra al alumno cómo calcular la función derivada según la definición.
6. Cálculo de la derivada mediante reglas de derivación (3 páginas): Presenta las reglas de derivación de las funciones elementales, así como las reglas de derivación de la suma, producto y cociente de funciones y el producto de una función por una constante, incluyendo dos actividades resueltas como varios ejemplos de cálculo de derivadas según estas reglas.
7. Derivada de la función compuesta. Regla de la cadena (1 página): Presenta la regla de la cadena para los casos de dos y tres funciones y tres ejemplos de uso.
8. Derivada de una función en un punto. Cálculo de la recta tangente y normal (1 página): Proporciona las ecuaciones punto pendiente de la recta tangente

y normal a una función en un punto, incluyendo una tarea resuelta sobre cómo hacerlo.

9. Obtención de los puntos singulares de una función (media página): Define los puntos singulares de la función como aquellos en los que la primera derivada es 0, pero no diferencia entre máximos y mínimos ni otros casos. Incluye una actividad resuelta de cómo calcular estos puntos singulares en una función polinómica y en esta tarea le indica al alumno que puede conocer si un punto singular es máximo o mínimo en función de si en ese punto la función pasa de creciente a decreciente o viceversa, pero no hace alusión a la segunda derivada.
10. Optimización de funciones (Media página): Explica qué es un problema de optimización y cómo hacerlo desde el punto de vista matemático. No incluye ninguna actividad resuelta de cómo hacerlo en un problema situado en algún contexto.
11. Cálculo de límites de funciones mediante la regla de L'Hôpital (1 página): Enuncia la regla de L'Hôpital, en qué casos puede ser aplicada y cómo hacerlo. Se incluyen dos ejemplos de cómo resolver indeterminaciones de límites utilizándola.
12. Representación de funciones polinómicas y racionales (4 páginas): Se muestran los pasos que el alumno ha de seguir y los elementos que debe tener en cuenta para representar funciones polinómicas y racionales sencillas, acompañando la explicación de tres actividades resueltas para las funciones polinómicas y dos para las racionales.
13. Ejercicios y problemas resueltos (5 páginas): Ofrece doce ejercicios resueltos paso a paso, algunos con varios apartados, de los ejercicios tipo de la unidad didáctica: cálculo de la derivada según la definición, uso de las reglas de derivación, cálculo de la recta tangente a una función en un punto, cálculo de la recta tangente a una función que es paralela a otra recta, cálculo de los puntos en los que la recta tangente es horizontal, cálculo de los coeficientes de una función polinómica para que tenga un punto singular concreto, cálculo de los intervalos de crecimiento y decrecimiento, problema de optimización, y tres tareas de representación de funciones. Además, por

cada ejercicio resuelto propone uno muy similar para que el alumno lo trabaje.

14. Ejercicios y problemas guiados (1 página): Ofrece cinco tareas que no están resueltas, pero sí están indicados los pasos que el alumno debe seguir. Ofrece la solución de éstas para que el alumno verifique su trabajo.
15. Tareas propuestas (5 páginas y media): El libro de texto de Anaya propone 87 ejercicios y problemas de diversas dificultados, aunque dicha dificultad no está explicitada como en el caso de Oxford. Hay cinco actividades de nivel cognitivo cuatro que sí están marcadas, dentro de la sección "Para profundizar". Las actividades están clasificadas según el contenido al que pertenecen y no se ofrece soluciones de ninguna de ellas.
16. Autoevaluación (media página): Son once tareas que el libro marca como representativas para verificar los conocimientos del alumno. Se ofrece la resolución de estas tareas en la plataforma online.
17. Evaluación del bloque de análisis (1 página): Ofrece veinte tareas para evaluar el bloque de análisis al completo, dado que la unidad didáctica de derivadas es la última de dicho bloque. Se ofrecen soluciones a estas tareas en la plataforma online.

Adecuación de Objetivos y Contenidos y opinión

El libro de texto de Anaya ofrece unas explicaciones de la teoría muy claras y completas. Además, están siempre acompañadas de varias gráficas de gran claridad que ilustran muy bien el concepto que se está estudiando. Además, ofrece versiones dinámicas de las gráficas e ilustraciones en Geogebra desde la plataforma online del libro. El libro está escrito en primera persona del plural y ofrece un lenguaje cercano al alumno, es menos formal que el libro de Oxford, pero a cambio un alumno de Bachillerato encontrará que el de Anaya es más fácil de comprender y más ameno de seguir. Al igual que en el caso de Oxford no se llevan a cabo demostraciones formales de los conceptos, pero sí existe un mayor esfuerzo en este libro por explicarlos y convencer al alumno de la lógica tras el concepto.

Por otro lado, el libro de texto hace énfasis en la notación de los conceptos de la derivada y hace incisos sobre aquellos asuntos que considera pueden ser más problemáticos entre los alumnos. También suele incluir en recuadros en el margen

elementos de teoría o fórmulas de otras unidades didácticas que pueden ser pertinentes para el concepto analizado y que considera que el alumno puede haber olvidado.
Para cada concepto el libro propone al uno o dos ejercicios resueltos donde muestra cómo aplicar las fórmulas y resultados presentados en la teoría y el libro es bastante completo en este aspecto, ya que además de ofrecer una tarea resuelta siempre propone otra similar al alumno para que compruebe su entendimiento.
Por otro lado, Anaya sí ofrece una aceptable introducción histórica al concepto y otra pequeña introducción conectada con la física, pero durante la unidad didáctica no se hace alusión a ninguna conexión a elementos que no sean puramente matemáticos, salvo en alguna de las tareas propuestas que están situadas en contextos de física o economía.

Respecto a los contenidos, están presentes todos los requeridos por el currículo en la orden EDU/363/2015 del 4 de mayo para Castilla y León, excepto las derivadas laterales, que no se mencionan. De hecho, incluso supera los contenidos requeridos por dicho currículo dado que los contenidos de optimización de funciones y la resolución de limites mediante la regla de L'Hôpital no aparece en primero de Bachillerato, aunque sí en segundo. Los problemas de optimización, no obstante, sí suelen incluirse en todos los libros de texto de primero al ser una consecuencia directa del cálculo de máximos y mínimos y es la manera más común de poder plantear problemas basados en este concepto.
Respecto a la adecuación del libro para superar los criterios de evaluación, al igual que en el caso de Oxford, fallaría en el primero de ellos "Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos", dado que las tareas propuestas a tal fin son mínimas, por lo que esto el docente debería solventar esta situación proponiendo tareas adicionales.
Por otro lado, acerca del tratamiento de funciones con herramientas digitales, si bien lo hace en el propio libro sí que ofrece actividades de Geogebra en su plataforma online.

Anaya no ofrece elementos de motivación mediante humor, juegos. Tampoco ofrece ilustraciones más allá de las gráficas de funciones para ilustrar los conceptos de teoría.
Aparte de lo mostrado en la introducción, no ofrece ningún tipo de tratamiento de temas transversales, se centra en lo puramente matemático.
En resumen, el libro de Anaya propone una más que correcta exposición de teoría, acompañada de gráficos ilustrativos de gran calidad y una batería de tareas bastante completa, si bien, al igual que el libro de Oxford, falla en ofrecer más tareas conectadas con otros ámbitos.

3.3.3 Libro de texto de Marea verde

Descripción de los contenidos teóricos de la unidad didáctica de derivadas

1. Introducción (media página): Comienza realizando una breve introducción histórica y unos ejemplos de uso de la derivada en el mundo cotidiano.
2. Actividad de introducción al concepto de derivada (2 páginas): Propone una actividad, basada en una gráfica para que los alumnos descubran el concepto de tasa de variación media por si mismos a través de una actividad situada en un contexto real.
3. Tasa de variación media (1 página): Da la definición de tasa de variación y tasa de variación media y lo enlaza con la recta secante entre dos puntos. Acompaña la teoría de tres pequeñas actividades resueltas.
4. Tasa de variación instantánea (4 páginas): Realiza la introducción al concepto, dando situaciones de la vida real en las que aparece el concepto de manera natural y, mediante una actividad resuelta, realiza el cálculo de la tasa de variación media tomando intervalos cada vez más pequeños para llegar así a la tasa de variación instantánea. Conecta esto con la vida real diciendo que es el procedimiento que usan los radares para calcular la velocidad de los automóviles. Intenta hacer llegar al alumno al concepto de derivada a partir de la visión cinemática de la misma, como la variación instantánea del espacio por unidad de tiempo. Propone otras dos actividades en las que se calcula la velocidad instantánea mediante límites.
5. Derivada de una función en un punto (3 páginas): Da la definición y

proporciona dos fórmulas para calcularla mediante límites, así como cinco gráficas que intentan dar al alumno la idea de derivada como pendiente de la tangente. Proporciona dos actividades en las que se muestra cómo usar la definición de derivada.

6. Derivada por la derecha y por la izquierda (2 páginas): Da las definiciones para calcular estas derivadas laterales y la condición para que una función sea derivable en un punto. Mediante una actividad resuelta se muestran al alumno los casos en los que una función puede no ser derivable en un punto.
7. Función derivada (1 página): Se introduce el concepto, se explicita la notación y se dan dos ejemplos de cálculo a partir de la definición.
8. Reglas de derivación (7 páginas): Ofrece las reglas de derivación que se pueden ver en la tabla 1, en la mayoría de los casos acompañadas de su demostración y de ejemplos de cálculo. Presenta la regla de derivación logarítmica, que no está presente en los libros de Anaya y Oxford.
9. Aplicación de la derivada: Recta tangente a una curva (Media página): Presenta cómo obtener la recta tangente a una curva usando la ecuación recta punto-pendiente.
10. Aplicación de la derivada: Interpretación física de la derivada: Define la velocidad como la derivada del espacio y la aceleración como la derivada de la velocidad. Utiliza la notación diferencial, muy común en física y presenta un ejemplo de cálculo.
11. Aplicación de la derivada: Crecimiento y decrecimiento: Ofrece un método para calcular cuándo una función es creciente o decreciente en un intervalo y presenta una demostración.
12. Aplicación de la derivada: Máximos y mínimos: Presenta la definición de máximo y mínimo de una función y cómo calcularlos a partir de la derivada, presentando varios ejemplos de cómo hacerlo.
13. Personajes históricos relevantes (4 páginas): Proporciona información de personajes matemáticos relevantes a esta unidad didáctica como son Newton, Leibnitz y Madame de Châtelet.
14. Tabla resumen de contenidos (1 página): Ofrece al alumno una tabla con los resultados más relevantes, como las reglas de derivación, las condiciones de

máximos y mínimos o la definición de derivada.

15. Tareas propuestas (5 páginas): Ofrece 45 tareas catalogadas como ejercicios y quince como problemas, sin ofrecer solución a las mismas.
16. Autoevaluación (1 página): Son diez tareas que el libro marca como representativas para verificar los conocimientos del alumno.

Adecuación de Objetivos y Contenidos

La primera impresión que transmite el libro de Marea Verde es que, al no ser un libro comercial, su presentación es inferior a la de los otros libros analizados. La edición es menos profesional y las gráficas, aunque numerosas y correctas, son de peor calidad y resolución. No obstante, su presentación es buena y clara y es sencillo acceder y encontrar los distintos contenidos

La exposición de teoría es buena y ahonda más en el porqué de los conceptos que los otros dos libros analizados. Además, es el que más demostraciones formales proporciona con gran diferencia. Los resultados y fórmulas más importantes están resaltados en recuadros y hay numerosos ejercicios resueltos para cada concepto.

Además de indicar posibles usos de la derivada en varios ámbitos, al principio de la unidad lleva a cabo una introducción al concepto de derivada con una actividad que explora la relación entre el espacio, el tiempo y la velocidad que hará que se forme una idea de tasa de cambio en la cabeza del alumno. Durante toda la unidad didáctica continúa utilizando en las explicaciones de teoría y en las tareas esta relación entre la derivada y la cinemática. De todos es el que más conexiones hace con otros ámbitos fuera de la matemática. Además, realiza una buena contextualización histórica del concepto. Por lo tanto, a este nivel es el mejor de los tres libros.

Cubre con creces los contenidos requeridos por EDU/363/2015 del 4 de mayo para Castilla y León, incluyendo algunos elementos adicionales como la técnica de derivación logarítmica, la notación diferencial utilizada en física, la derivada de la función inversa o la optimización de funciones, todos ellos contenidos de segundo de bachillerato (Excepto la notación diferencial, que se trabaja en la asignatura de Física) y que el autor del libro ha decidido incluir en el libro de primero para que los alumnos ya lleguen familiarizados con estos contenidos a segundo de bachillerato.

De nuevo, al igual que ocurrió con los otros dos libros de texto, no ofrece elementos de motivación como juegos, trucos de magia, ni humor. Las únicas fotografías que incluye el libro son las del apartado histórico, en las que se incluyen retratos de los matemáticos que han contribuido al desarrollo de la derivada. No se incluyen otro tipo de ilustraciones.

Dado que este libro está disponible de manera gratuita online, puede ser una buena fuente de referencia y un repositorio de tareas para aulas en las que se decida no adquirir un libro de texto comercial, dado que cumple con creces con los contenidos especificados para este nivel.

3.4 Análisis de las reglas de derivación presentes en los libros de texto

En la tabla 4 se resumen las reglas de derivación. La nomenclatura es la siguiente: P para indicar si esa regla está presente o no, J para indicar si se presenta alguna justificación o prueba y E para mostrar si se presenta algún ejemplo de cálculo. En los casos en que no tenga sentido presentar un ejemplo, se indicará con un guión. Sobre las pruebas, en caso de haberla, se incluye la abreviatura *Ax* para demostración axiomática, *In* para demostración inductiva y *Gr* para demostración gráfica.

El libro de Oxford es bastante pobre en cuanto al número de funciones elementales de las que ofrece la derivada. No aparece ni la derivada de la tangente ni la de las funciones inversas del seno, coseno y tangente, aunque el cálculo de esta última aparece en los ejercicios resueltos. Además, sólo ofrece prueba en los casos triviales, constante e identidad, y la prueba de la potencial la hace generalizando el caso de la cuadrática y la cúbica. Tampoco ofrece justificación de la derivada de las operaciones con funciones. No ofrece ejemplos de cálculo en ninguno de los casos de las funciones elementales, pero sí que lo hace para todas las operaciones entre funciones. El libro de Oxford no ofrece ninguna tabla resumen de derivadas como elemento de consulta.

Tabla 4 Demostración de las reglas de derivación

	Oxford			Anaya			Marea Verde		
	P	J	E	P	J	E	P	J	E
Suma	Sí	No	Sí	Sí	No	Sí	Sí	Sí/Ax	Sí
Producto real	Sí	No	Sí	Sí	No	Sí	Sí	Sí/Ax	Sí
Producto	Sí	No	Sí	Sí	No	Sí	Sí	Sí/Ax	Sí
Cociente	Sí	No	Sí	Sí	No	Sí	Sí	No	Sí
Regla cadena	Sí	No	Sí	Sí	No	Sí	Sí	Sí	Sí
Constante	Sí	Sí/Ax	No	Sí	Sí/Gr	No	Sí	Sí	Sí
Identidad	Sí	Sí/Ax	-	Sí	Sí/Gr	-	No	No	-
Potencial	Sí	Sí/In	No	Sí	Sí/Ax	Sí	Sí	Sí	Sí
$ln(x)$	Sí	No	-	Sí	No	-	No	No	-
$log_a(x)$	Sí	No	No	Sí	No	Sí	Sí	Sí/Ax	Sí
e^x	Sí	No	-	Sí	No	-	Sí	Sí/In	-
a^x	Sí	No	No	Sí	No	Sí	Sí	Sí/In	-
Seno	Sí	No	-	Sí	No	-	Sí	Sí/Ax	-
Coseno	Sí	No	-	Sí	No	-	Sí	Sí/Ax	-
Tangente	No	No	-	Sí	No	-	Sí	Sí/Ax	-
Arcsen	No	No	-	Sí	No	-	Sí	Sí/Ax	-
Arccos	No	No	-	Sí	No	-	Sí	Sí/Ax	-
Arctan	No	No	-	Sí	No	-	Sí	Sí/Ax	-
Secante	No	No	-	No	No	-	Sí	Sí/Ax	-
Cosecante	No	No	-	No	No	-	Sí	Sí/Ax	-
Cotangente	No	No	-	No	No	-	Sí	Sí/Ax	-
Seno hiperbólico	No	No	-	No	No	-	Sí	Sí/Ax	-
Coseno hiperbólico	No	No	-	No	No	-	Sí	Sí/Ax	-
Tangente hiperbólica	No	No	-	No	No	-	Sí	Sí/Ax	-

El libro de Anaya presenta las derivadas de todas las funciones elementales básicas. Es muy escaso en demostraciones, pues sólo ofrece la de la función potencial y la de los casos triviales de la constante y la identidad. Sí que ofrece ejemplos de cálculo de derivada de todas las funciones excepto de las circulares. Al igual que en el caso de Oxford no se ofrece ninguna tabla resumen de derivadas para consulta del alumno.

En el caso del libro de Marea Verde, presenta más derivadas que ninguno de los otros libros, incluye las de la secante, cosecante y cotangente, que no aparecen en los otros dos libros y, de manera sorpresiva, la del seno, coseno y tangente hiperbólica. Estas tres funciones no forman parte del currículo de bachillerato y no tienen utilidad para estudiantes de este nivel. Por otro lado, omite funciones básicas como la del logaritmo neperiano o la función identidad (si bien éstas son casos particulares del logaritmo y potencial). Algo digno de mención es que presenta demostraciones axiomáticas completas de la práctica totalidad de las reglas de derivación, incluso en los casos más complicados y que requieren conocimientos ajenos a los de la unidad didáctica, como es el caso de las funciones trigonométricas. Además, ofrece a los alumnos una tabla resumen.

3.5 Análisis de las tareas propuestas por los libros de texto

En este apartado se analizarán las tareas presentadas por los tres libros de texto, en los que se han identificado las siguientes tipologías:

1. Cálculo de la Tasa de Variación Media en intervalos dados.
2. Cálculo de la derivada en un punto mediante la definición.
3. Cálculo de la función derivada mediante la definición.
4. Cálculo de la recta tangente y normal a una función en un punto
5. Cálculo de derivadas mediante reglas de derivación.
6. Estudio de la derivabilidad de una función definida a trozos.
7. Obtención de los máximos y mínimos de una función.
8. Cálculo de los intervalos de crecimiento y decrecimiento
9. Problemas de optimización (Esto no forma parte del currículo de primero de Bachillerato, al menos de forma directa, sí del de segundo de Bachillerato).
10. Resolución de indeterminaciones en límites mediante la regla de L´Hôpital (sólo en el de Anaya. Esto no forma parte del currículo de primero de Bachillerato, sí del de segundo).

11. Determinación de funciones que cumplen una serie de propiedades.
12. Representación de funciones de tipo polinómico o racional.

A continuación, se llevará a cabo una clasificación de acuerdo a la clasificación de Smith y Stein, tal y como fue especificado en el punto 2.3 de este trabajo. Como unidad de estudio se ha tenido en cuenta cada tarea particular, sin dividirla en apartados, por simplicidad y porque los diferentes apartados de cada tarea eran de un tipo similar. En la tabla 5 se pueden ver los resultados.

Tabla 5 Clasificación de las tareas según Smith&Stein

	Oxford	Anaya	Marea Verde
Nivel 1 Tareas de reproducción	4 (3%)	6 (5%)	0 (0%)
Nivel 2 Procedimientos sin conexiones	62 (52%)	65 (53%)	59 (51%)
Nivel 3 Procedimientos con conexiones	39 (32%)	48 (38%)	43 (37%)
Nivel 4 Hacer matemáticas	14(11%)	5 (4%)	13 (12%)
Total	119	124	115

Acerca de las actividades de libro de Oxford, sólo nueve de las actividades presentaban la información en formato visual, ocho en formato puramente verbal y el resto en una combinación de verbal y simbólico. No se presentan los datos en forma de tabla en ninguno de los casos. Por otro lado, solo una de las tareas presentaba un contexto realista, que podía obviarse por completo y no aportaba nada. El resto de las tareas tenían un contexto puramente matemático y no están conectadas con otros ámbitos como pudiera ser la economía, física, medicina o el mundo real. Además, en todos los casos las tareas presentaban los datos estrictamente necesarios y tenían una solución única cerrada. Como se puede ver predominan las tareas de nivel 2, es decir, de aplicar algún algoritmo. En concreto las más habituales eran las tareas de cálculo de derivadas mediante reglas de derivación y las del cálculo de la recta tangente en un punto. Las tareas de nivel 1 no son nada comunes, sólo cuatro preguntas de teoría. Las tareas de nivel 4 han sido también muy poco comunes, la mayoría eran problemas de optimización y problemas en los que se requería encontrar una función que cumpliera unas determinadas características.

En el caso del libro de Anaya, trece de las actividades presentaban la información en formato visual, nueve en formato puramente verbal y el resto en una combinación de verbal y simbólico. Como en el caso de Oxford no se explota demasiado el formato gráfico. De nuevo, la forma tabular no se utiliza para presentar datos en las tareas En este caso se proponen cinco actividades en un contexto realista (una en contexto de medicina, dos de economía y dos de la vida real), pero el resto tenían un contexto matemático. No se proponen tareas con datos superfluos o con varias soluciones. Los resultados de Anaya son muy similares a los de Oxford, salvo por el hecho de ofrecer menos tareas de nivel cognitivo máximo.

En el caso del libro de Marea verde, de nuevo el grueso de las tareas son de nivel dos y nivel tres, principalmente calcular derivadas según las reglas de derivación, cálculo de rectas tangentes y máximos y mínimos. Sólo presentaba una tarea en la que la información se proporcionaba de manera gráfica, dos en las que se hacía en forma de tabla (al contrario que los de Oxford y Anaya que obviaban este registro). Marea Verde presenta 24 tareas en un contexto realista, todas en un contexto de cinemática, excepto una que lo hace en un contexto de medicina y otras dos en un contexto de la vida real. Todas las demás, 91, estaban en un contexto puramente matemático.

Como conclusión de este análisis, se puede ver que los libros de texto se centran en tareas procedimentales en las que tanto la tarea como su solución son dadas de forma analítica. Las tareas de repetición de teoría son prácticamente inexistentes, lo cual es lógico, puesto que proponiendo tareas de nivel dos ya se puede comprobar que el alumno conoce la fórmula o el procedimiento y además se verifica que sabe utilizarla.

4. Unidad didáctica: Introducción a la derivada

La unidad didáctica que se presentará en este cuarto punto está orientada a alumnos de primero de Bachillerato de Ciencias dentro de la asignatura Matemáticas I. La finalidad de la misma es que éstos adquieran las bases de la derivada tanto a nivel conceptual como a nivel operativo y que adquieran una perspectiva gráfica de la derivada, pues como se evidenció en el apartado tres de este trabajo suele ser olvidada por los libros de texto.

4.1 Introducción Contextual

La unidad didáctica "Introducción a la derivada" se enmarca en el bloque de Análisis, que es el tercero de los cinco que el BOCyL marca en la orden EDU/362/2015 del 4 de mayo. Aunque el currículo sitúe el bloque de Análisis como tercer bloque, en nuestro caso lo trabajaremos tras completar los bloques de Números y Álgebra (bloque II en el currículo) y el de Geometría (bloque IV), ya que varios de los conocimientos del bloque de Geometría en el plano serán de utilidad en el trabajo con funciones en el bloque de Análisis. El bloque I que marca el currículo, denominado Procesos, métodos y actitudes en matemáticas, es de tipo transversal, por lo que sus contenidos se impartirán dentro de los otros cuatro bloques de contenido. Se dividirá el currículo en trece en unidades didácticas:

Bloque I: Contenidos transversales

Bloque II: Unidades 1 y 2

Bloque III: 8,9,10, 11,

Bloque IV: 3,4,5,6, 7

Bloque V: 12

El primer trimestre abarcaría las unidades didácticas 1-4, el segundo de la quinta a la octava y el tercero cerraría con las cuatro últimas, de la nueve a la doce.

La unidad didáctica presente, "Introducción a la derivadas sus aplicaciones" sería la número once y cerraría el bloque III de Análisis. Y tras concluir ésta solo quedaría por impartir la unidad didáctica 12 que es la única que conforma el bloque de Estadística y Probabilidad. Por temporalización esta unidad se situaría en la tercera evaluación. Dado que el curso 20/21 presenta 136 horas para la asignatura de matemáticas, se podrían asignar 12 sesiones para esta unidad didáctica, siendo la última dedicada en su totalidad a la realización de una prueba escrita sobre los contenidos de la unidad.

4.2 Contribución a las competencias clave

De acuerdo a la orden ECD/65/2015 de 21 de enero se establece el desarrollo de competencias clave como fundamental y se exige que estas estén integradas en todas las asignaturas (artículo quinto) para favorecer la realización personal, académica y profesional del alumno. La contribución de esta unidad didáctica a dichas competencias clave es la siguiente:

Competencia en comunicación lingüística

El alumno debe ser capaz de utilizar el lenguaje para trasladar el lenguaje matemático al lenguaje verbal y para comprender y expresar raciocinios abstractos de cierta complejidad. Esta unidad didáctica contribuirá al desarrollo de esta competencia dado que tendrá que entender, producir y debatir información verbal de cierta complejidad.

Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología

Al igual que cualquiera de las otras unidades didácticas de la asignatura de Matemáticas I esta contribuirá a la competencia matemática dado que se desarrollará una herramienta fundamental como es el cálculo, que además es una herramienta fundamental para comprender cualquier otra ciencia natural o social en las que se necesite estudiar la tasa de cambio de cualquier magnitud.

Competencia digital

En esta unidad didáctica se utilizará el software GeoGebra para dibujar funciones y utilizar diversos applets creados por el docente, los alumnos o de internet.

Competencia en aprender a aprender

Las tareas propuestas en esta unidad didáctica fomentarán que el alumno adquiera la capacidad de aprender y aplicar lo que ha aprendido a nuevos ámbitos. Gracias al uso de GeoGebra los alumnos podrán explorar diversas características de las funciones por sí mismos y proseguir en su aprendizaje.

Competencia social y cívica

Esta competencia se trabajará mediante el trabajo grupal y la discusión de las actividades propuestas. Los alumnos deben ser capaces de debatir razonadamente y contrarrestar los argumentos de los compañeros de manera argumentada y educada.

Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor

Esta competencia se desarrollará proponiendo tareas situadas en contextos realistas, por ejemplo, en contextos de economía y empresa, que fomenten la conexión de las derivadas con el mundo real en la mente del alumno y establezca un marco de pensamiento formal que le ayude a pensar en situaciones complejas utilizando herramientas de la lógica y el análisis.

Conciencia y expresiones culturales

Se presentará a las derivadas como un hito del pensamiento humano que se ha labrado a lo largo de cientos de años y que, por lo tanto, forma parte de patrimonio cultural. Cualquier unidad didáctica de matemáticas es cultura en si misma.

4.3 Objetivos

Los objetivos generales del Bachillerato y los generales de la asignatura de matemáticas I pueden encontrarse en el punto 2.6 de este trabajo.

En esta unidad didáctica se pretende que los alumnos sean capaces de:

1. Entender el concepto de tasa de cambio y su sentido físico.
2. Entender el concepto de derivada de una función en un punto y su interpretación física y geométrica.
3. Hallar la ecuación de la recta tangente y normal a una función en un punto dado.
4. Obtener la función derivada a partir de la definición de derivada en casos sencillos, como polinomios.
5. Obtener la función derivada utilizando las reglas de derivación.
6. Conocer y entender la relación entre la gráfica entre una función y su derivada.
7. Esbozar la gráfica de la derivada a partir de la gráfica de una función y viceversa.
8. Conocer el sentido histórico de la derivada y qué problemas puede ayudar a resolver.
9. Dibujar funciones en un plano cartesiano a partir de las principales

características de ésta: dominio, recorrido, simetrías, monotonía, extremos relativos y absolutos, curvatura, puntos de inflexión, asíntotas y periodicidad.
10. Utilizar herramientas informáticas para la representación de funciones.
11. Exponer las características de una función que se exponen en el punto 9 a partir de la gráfica de esta.
12. Crear de pequeños programas en GeoGebra para ilustrar conceptos matemáticos.

4.4 Contenidos

De acuerdo con el currículum de la comunidad de Castilla y León (EDU/362/2015 del 4 de mayo), los contenidos mínimos para esta unidad didáctica deben ser:

1. Derivada de una función en un punto.
2. Interpretación geométrica de la derivada de la función en un punto.
3. Derivadas laterales.
4. Recta tangente y normal a una función en un punto.
5. Función derivada.
6. Cálculo de derivadas.
7. Regla de la cadena.
8. Representación gráfica de funciones polinómicas y racionales: dominio, recorrido, simetrías, monotonía, extremos relativos y absolutos, curvatura, puntos de inflexión, asíntotas y periodicidad

4.5 Metodología

El planteamiento metodológico que se plantea para las sesiones se basa en:

- Clase magistral de teoría para exponer los contenidos teóricos explicitados en el punto anterior. Se utilizará GeoGebra para mostrar los conceptos gráficamente siempre que sea relevante.
- Resolución de ejercicios y problemas, esto es la base de cualquier clase de matemáticas. Las matemáticas son una disciplina eminentemente práctica que sólo podrá dominarse mediante el trabajo continuo. En ocasiones será el docente quien resuelva las tareas, pero en otras ocasiones serán los propios alumnos, pues esto mejorará su comprensión y su motivación, intentando que cada vez sea uno quien exponga el problema a sus compañeros.

- Gamificación: En ocasiones se propondrán pequeños juegos para resolver tareas de forma competitiva, bien utilizando Kahoot u otros medios.

4.6 Recursos

Las sesiones se desarrollarán en el aula base en la que se utilizarán una pizarra tradicional, si está disponible sería provechoso utilizar una pizarra blanca en lugar de una pizarra de tiza para así poder tener diferentes colores para, por ejemplo, dibujar una función en negro y su derivada en rojo y resaltar diversos elementos de éstas. Además, se necesitará un ordenador con GeoGebra y un proyecto o una pizarra digital con este software integrado. Los alumnos podrán utilizar Geogebra en sus teléfonos móviles, tabletas o portátiles.

Además, se necesitará el apoyo de un libro de texto para utilizarlo como repositorio adicional de tareas y como apoyo para el alumno en la teoría, pues como se vio en el punto tres contienen muchas tareas para afianzar los contenidos teóricos. Estas actividades del libro de texto serán complementadas con las que el docente proporcione a los alumnos, algunas de ellas pueden verse en el punto 4.10.

Por supuesto, como para el resto del curso, se requerirá que los alumnos cuenten con un cuaderno de matemáticas tanto para llevar a cabo los apuntes de teoría como las tareas diarias. Este cuaderno servirá como testimonio de su aprendizaje. Para esta unidad didáctica no serán necesarios elementos de matemática manipulativa.

4.7 Desarrollo de las sesiones

Sesión 1

En la primera sesión se lleva a cabo una introducción a la derivada a partir de la tasa de variación media e instantánea y se trabajan algunos de los ejemplos del libro de texto. Se realizará la actividad 1.

Se terminará la clase con el visionado del video:

https://www.youtube.com/watch?v=AzTGmJGIpI8&t=26s

Tareas para casa: Actividades acerca de lo visto en clase.

Sesión 2

Se estudiará el concepto de derivada de una función en un punto y se hará uso del applet de GeoGebra https://www.geogebra.org/m/kc4hvkye (creado por el autor

de este trabajo) para ilustrar el paso al límite de la derivada.
Corrección de las tareas para casa del día anterior.
Tareas para casa: Actividades sobre el cálculo de la derivada en un punto.

Sesión 3

En la sesión tercera se trabajará la interpretación geométrica de la derivada como recta tangente donde se hará uso del applet https://www.geogebra.org/m/stn2jqqh (creado por el autor de este trabajo). Se realizarán ejercicios de cálculo de rectas tangentes a funciones y actividades como la 2, 3 y 4 de las propuestas en esta unidad.
Corrección de las tareas para casa del día anterior.
Tareas para casa: Actividades sobre el cálculo de rectas tangentes a curvas.

Sesión 4

Se explicará en clase el concepto de derivada lateral y la condición de derivabilidad. Se harán ejemplos en clase tanto con funciones simbólicas como actividades gráficas como la que se ve en la actividad 8.
Corrección de las tareas para casa del día anterior.
Tareas para casa: Actividades sobre derivabilidad, cálculo de parámetros para que una función sea derivable.

Sesión 5

El docente expondrá la función derivada y se comenzará, en orden de dificultad, la exposición de las reglas de derivación, acompañándolo de ejemplos de cálculo para que los alumnos tengan referencias de cómo hacerlo en sus cuadernos. Además, se realizará la demostración con la definición para los casos abarcables a este nivel: la constante, la identidad, la potencial (recordando el Binomio de Newton), la suma de dos funciones, el producto de dos funciones y el de un número por una función. En los casos en los que esta demostración no sea posible, como es el caso de las funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales, se usará GeoGebra para mostrar cada función junto a su derivada para, a través de la exploración de las gráficas, demostrar intuitivamente estas reglas de derivación.
Corrección de las tareas para casa del día anterior.
Tareas para casa: Realización de derivadas según las reglas de derivación.

Sesión 6

En esta sesión se continuará con la exposición de las reglas de derivación y su uso. El grueso de la clase se dedicará a que los alumnos salgan a la pizarra a realizar derivadas y exponer los pasos que siguen al resto de la clase.

Corrección de las tareas para casa del día anterior.

Tareas para casa: Realización de derivadas según las reglas de derivación.

Sesión 7

En esta séptima sesión se trabajará con las aplicaciones de la derivada. Se estudiarán las condiciones de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos. Se expondrá la relación de gráfica de la función y la de su derivada, haciendo uso del applet de GeoGebra https://www.geogebra.org/m/esxs6a6y (creado por el autor de este trabajo).

Corrección de las tareas para casa del día anterior.

Tareas para casa: Realización de ejercicios sobre máximos y mínimos, crecimiento y decrecimiento y acerca de la relación entre la gráfica de una función y su derivada, como las actividades 5, 6,7 9 ó 10.

Sesión 8

Esta sesión se desarrollará en el aula de informática. Los alumnos tendrán que desarrollar réplicas de los applets que hemos utilizado en clase para que así se familiaricen con el uso del programa, esto se ilustra en la tarea 17. A continuación, podrán jugar con este applet de Geogebra https://www.geogebra.org/classic/pyxqafgt en el que tienen que emparejar a las funciones con su derivada.

Finalmente, concluiremos la clase jugando a un Kahoot en el que los alumnos tendrán que identificar cuál de las cuatro gráficas de las respuestas es la derivada de la función graficada en la pregunta. Un ejemplo de esta actividad creada por el autor de este trabajo se puede ver en https://create.kahoot.it/share/funciones-y-sus-derivadas/e9ddd18d-50bb-4c47-8ce6-de634c7d3b08

Tareas para casa: Se pedirá realizar en casa las tareas 15 y 16.

Sesión 9

Se comenzará la clase con la corrección en la pizarra de las actividades 15 y 16 por parte de dos alumnos y se usarán estas para hacer un repaso de la relación entre la

gráfica de una función y su derivada.
A continuación, se introducirá el concepto de segunda derivada y sucesivas y a partir de esto, se expondrá la teoría acerca de la curvatura de la función y sus puntos de inflexión. Además, se iniciará el apartado de representación de funciones. Se realizará la actividad 11 en la que a partir de las características de una función se pide su gráfica aproximada.
Corrección de las tareas para casa del día anterior.
Tareas para casa: Realización de ejercicios de representación de funciones polinómicas y raciones.

Sesión 10

En esta sesión se llevarán a cabo diversas actividades de forma conjunta en clase. Primero, las actividades 12 y 13, que consisten en relacionar la gráfica de la función con la de su derivada. Haremos esto todos juntos en clase. Después, los alumnos trabajaran individualmente durante 15 minutos la actividad 14, en la que tienen que relacionar las gráficas de 18 funciones con las de sus derivadas. Una vez pasados estos 15 minutos se discutirán los resultados en conjunto y el docente intentará ver los razonamientos de los alumnos a la hora de relacionar las características de la función con las de su derivada.
Corrección de las tareas para casa del día anterior.
Tareas para casa: Realización de ejercicios de representación de funciones polinómicas y raciones.

Sesión 11

En esta última sesión antes de la prueba escrita se continuará trabajando la representación gráfica de funciones tras estudiar sus características. Serán los alumnos quienes, saliendo a la pizarra, estudien varias funciones polinómicas y racionales, extraigan sus características y las esbocen.
Corrección de las tareas para casa del día anterior.

Sesión 12

La última sesión está dedicada a la realización de una prueba escrita. Esta prueba escrita puede encontrarse al final del apartado 4.10 donde se indican las herramientas de evaluación.

4.8 Atención a la diversidad

La atención a la diversidad puede ser necesaria por diversos tipos de alumnos. Dado que las características de los alumnos no son uniformes tenemos que contemplar medidas de atención a la diversidad que ayudan a aquellos alumnos que lo necesiten a alcanzar los objetivos de la asignatura y a superar los criterios definidos por los estándares de aprendizaje evaluables. En el caso de que un alumno presente dificultades se le prestará atención individualizada mientras el resto de la clase trabaja, mientras que si, por el contrario, un alumno está aventajado de manera muy notoria y éste lo desea, se le buscarán actividades adicionales de mayor dificultad que supongan un reto. Por ejemplo, actividades como las que se proponen en las Olimpiadas matemáticas, que suelen ser actividades de las que hemos denominado de nivel cuatro "hacer matemáticas", algunas de estas tareas se recogen al final del punto 4.10. En caso de que en el aula existan personas con situaciones como transtorno por déficit de atención o problemas auditivos y sonoros se trabajará en colaboración y bajo la supervisión del Departamento de Orientación y del Pedagogo Terapéutico, pues son quienes han de guiar al docente en estos casos.

También se llevarían a cabo adaptaciones curriculares para los alumnos que el cuerpo docente estime oportuno.

4.9 Actividades de aprendizaje

Además de las actividades aquí recogidas, en esta unidad didáctica se hará uso de muchas otras provenientes del libro de texto, pues éste es una gran fuente de actividades tal y como se vio en el apartado tres de este trabajo.

Actividad 1

Un objeto al caer libremente recorre una distancia que es proporcional al cuadrado del tiempo transcurrido según la ecuación $e(t) = 4.9t^2$. Calcula la velocidad media entre los instantes 1 y 2, 2 y 3 y 3 y 4. ¿la velocidad es creciente o decreciente? Calcula además la velocidad instantánea en t=1, t=2 y t=3.

Actividad 2

Calcula la derivada de la función representada en verde en los punto A y B teniendo en cuenta las rectas tangentes en esos puntos que se muestran. ¿existe algún punto donde la derivada sea 0? Realiza un esbozo de la función derivada.

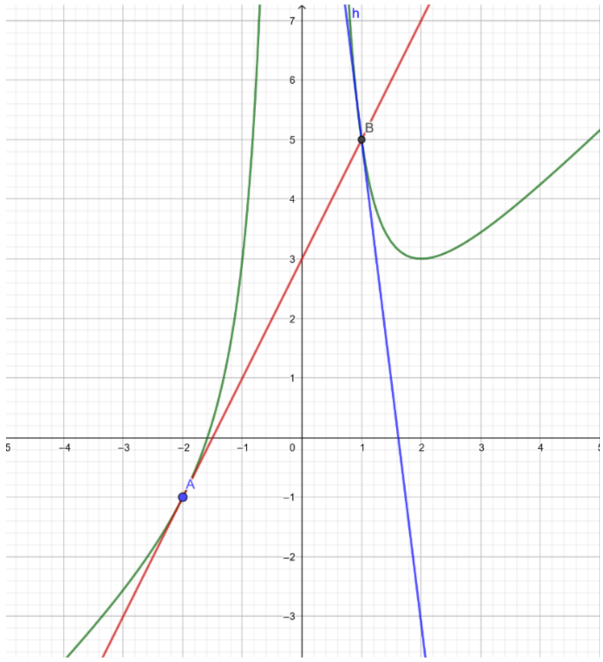


Figura 12 Actividad 2 (elaboración propia)

Actividad 3

Calcula la derivada de la función representada en verde en los puntos A, B y C prestando atención a las rectas tangentes y esboza la gráfica de la función derivada.

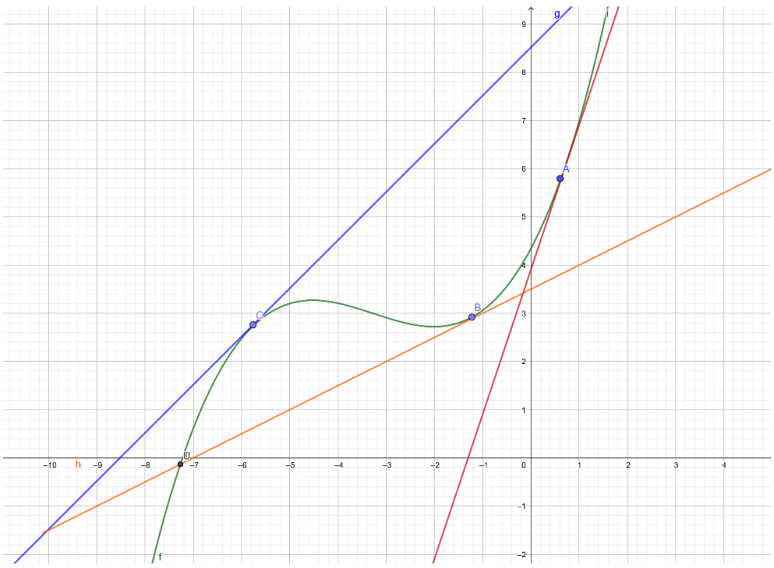


Figura 13 Actividad 3 (elaboración propia)

Actividad 4

Calcula la derivada de la función representada en gris en los puntos A, B y C ayudándote de las rectas tangentes. Esboza la gráfica de la función derivada.

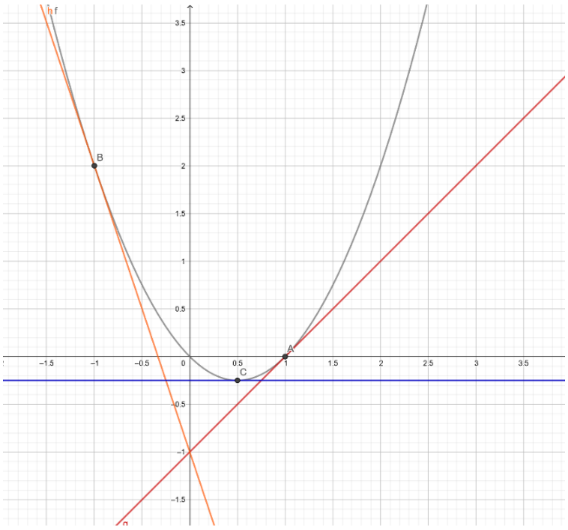


Figura 14 Actividad 4 (elaboración propia)

Actividad 5

En la figura se ven dos funciones definidas a trozos. Para cada una de ellas, dibuja su función derivada.

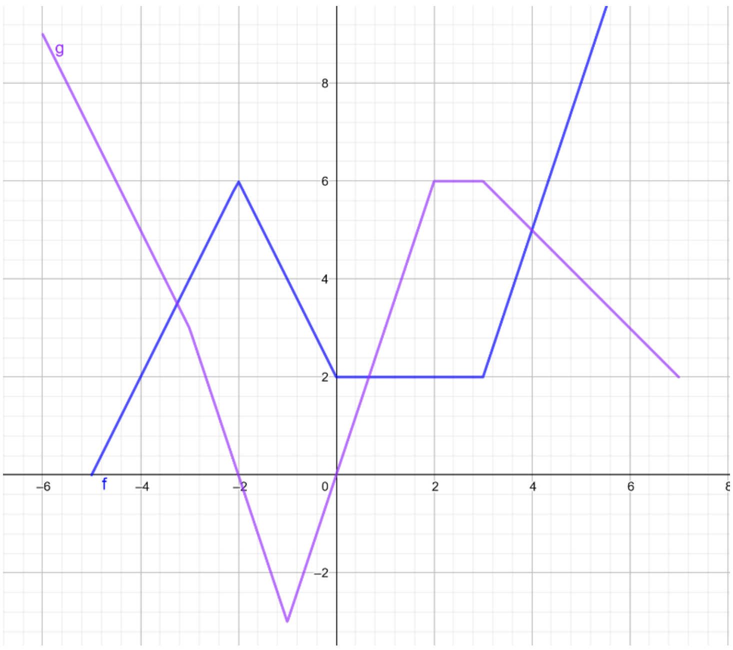


Figura 15 Actividad 5 (elaboración propia)

Actividad 6

De una función se sabe que tiene un mínimo en x=2. ¿cuál de las siguientes tres gráficas es la de la derivada de esa función?

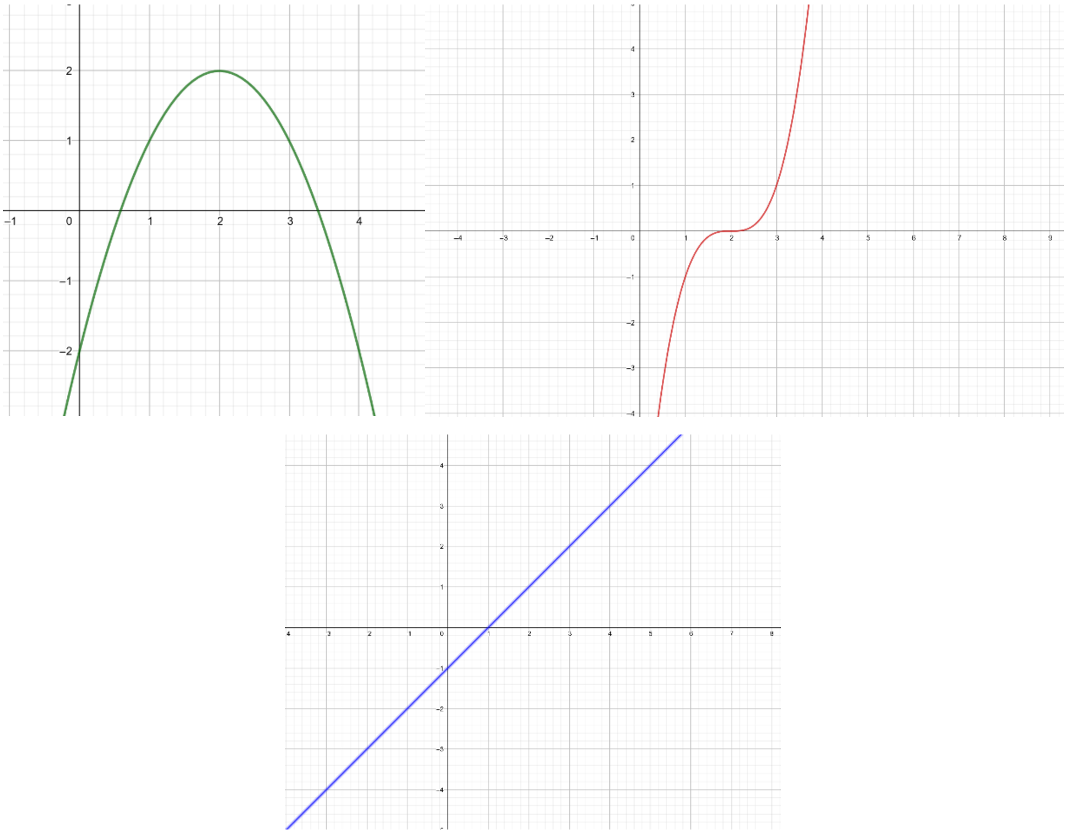


Figura 16 Actividad 6 (elaboración propia)

Actividad 7

En la figura se muestra una función y su derivada. ¿cuál es cada una? A partir de la información que has utilizado para deducirlo, enuncia la relación entre la gráfica de la función y la de su derivada, indicando qué pasa cuando la función crece, decrece y tiene un extremo relativo.

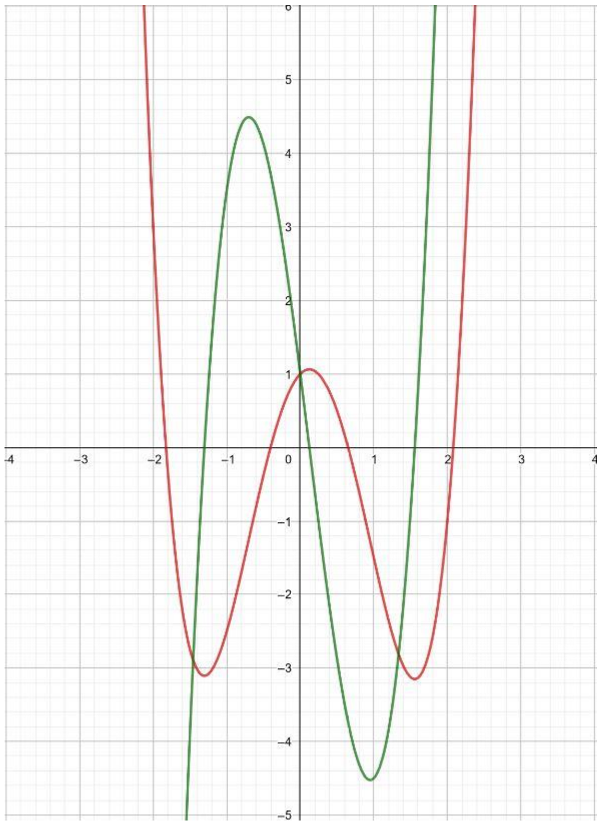


Figura 17 Actividad 7 (elaboración propia)

Actividad 8

¿Es la función de la figura derivable en todos sus puntos? ¿por qué?

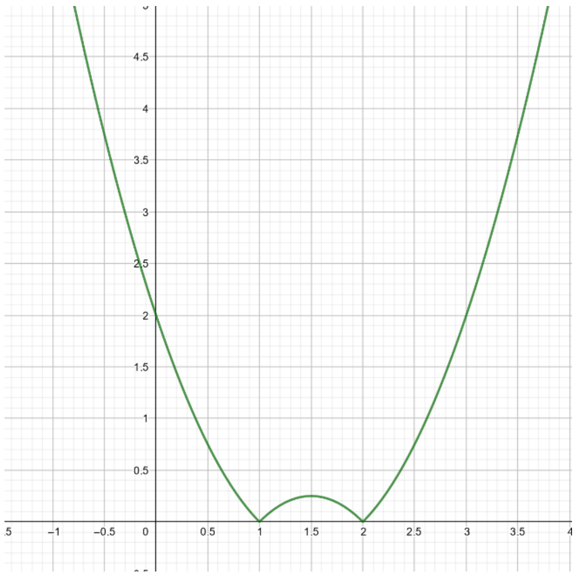


Figura 18 Actividad 8 (elaboración propia)

Actividad 9

En la figura se ven dos funciones definidas a trozos. Para cada una de ellas, dibuja su función derivada.

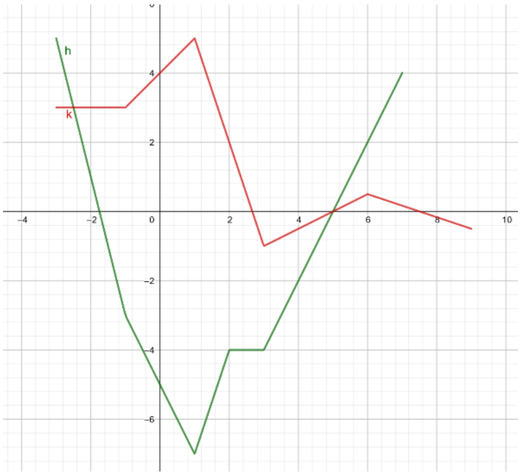


Figura 19 Actividad 9 (elaboración propia)

Actividad 10

En la figura se muestra la función derivada. A partir de ella, obtener la función original. ¿es esta función original única? ¿por qué? En caso de no serlo, dibuja al menos dos posibles funciones.

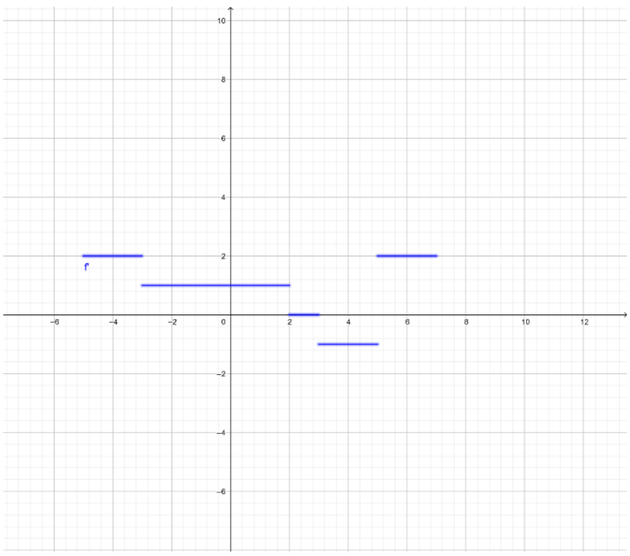


Figura 20 Actividad 10 (elaboración propia)

Actividad 11

De una cierta función f conocemos las siguientes características:

f’(-1)=f’(2)=0

f’(x)<0 cuando x<1 o x>1

f’(x)>0 cuando 1<x<2

f(0)=f(5)=0

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

Esboza la gráfica de f a partir de esta información.

Actividad 12

En la figura se presentan tres funciones y tres derivadas. ¿a qué función pertenece cada una de las derivadas? Indica los elementos en los que te fijas y el razonamiento que sigues.

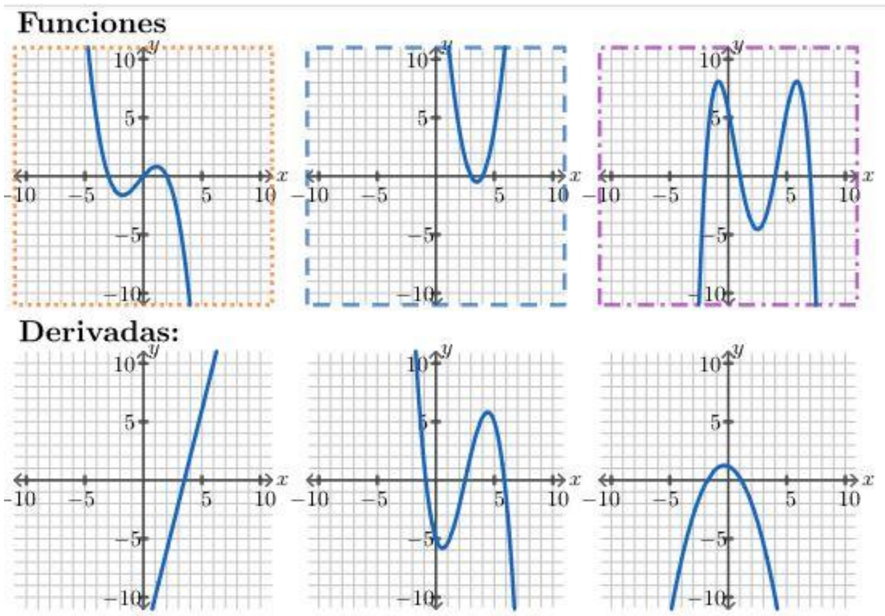


Figura 21 Actividad 12 (elaboración propia)

Actividad 13

En la figura se presentan tres funciones y tres derivadas. ¿a qué función pertenece cada una de las derivadas? Indica los elementos en los que te fijas y el razonamiento que sigues.

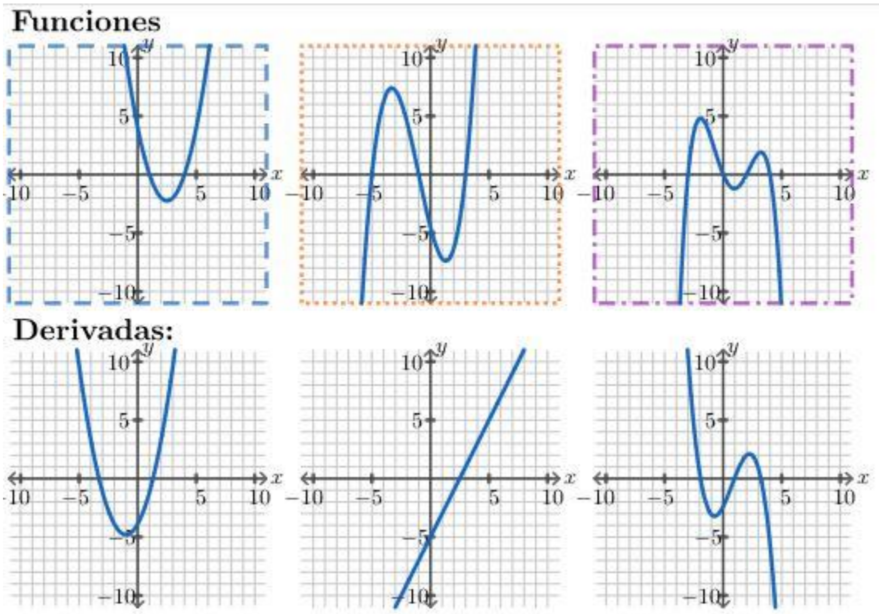


Figura 22 Actividad 13 (elaboración propia)

Actividad 14

Empareja las gráficas de funciones de la figura 23 con las gráficas de sus derivadas en la figura 24.

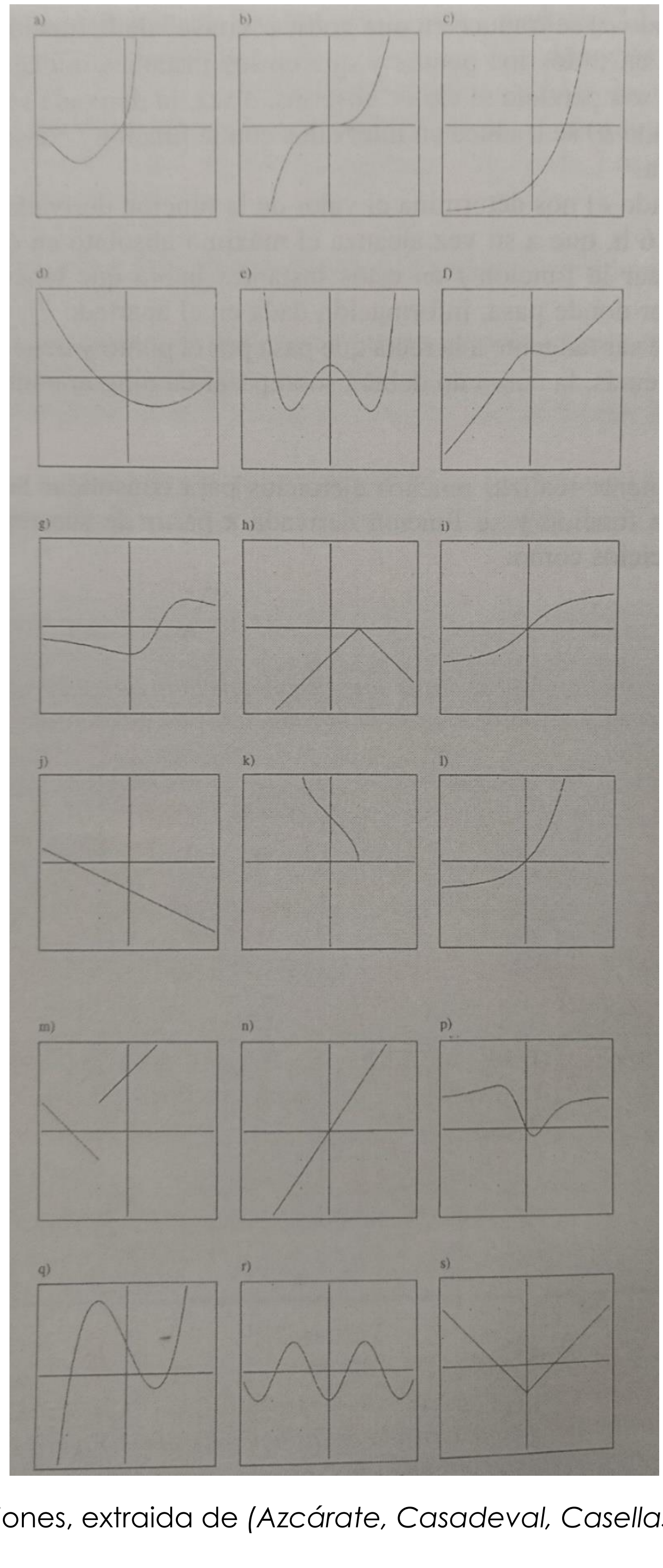


Figura 23 Funciones, extraida de *(Azcárate, Casadeval, Casellas, & Bosh, 1996)*

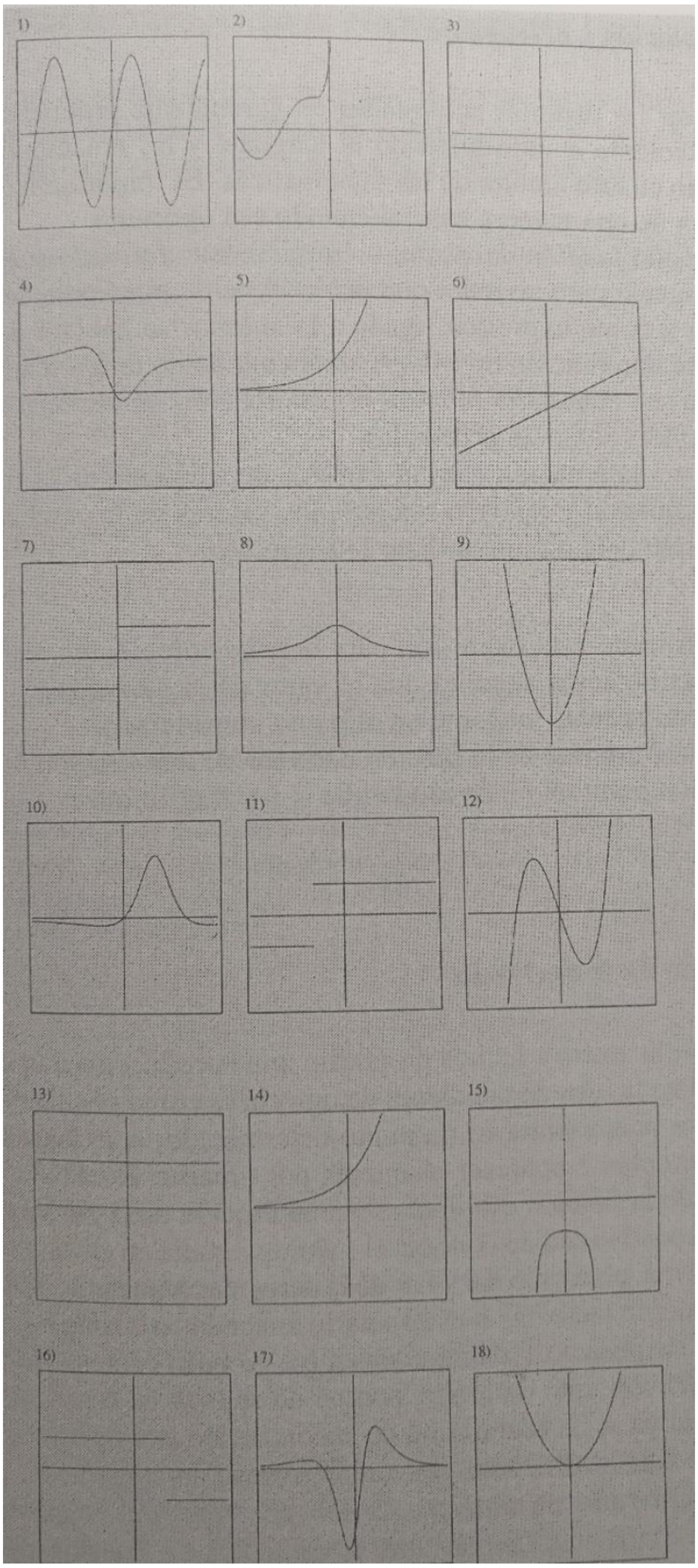


Figura 24 Derivadas, extraída de *(Azcárate, Casadeval, Casellas, & Bosh, 1996)*

Actividad 15

Dada la función $f(x) = x^2 + ax + b$ halla a y b para que sea la de la figura

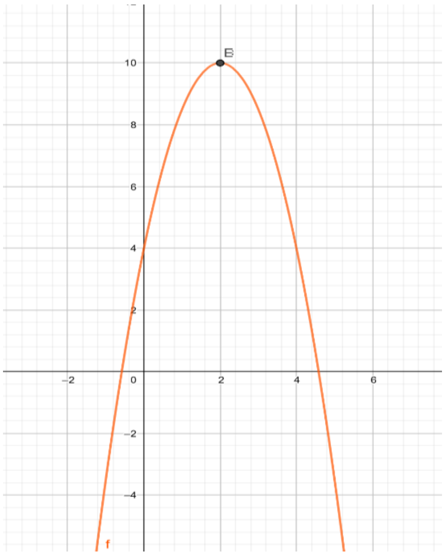


Figura 25 Actividad 15 (elaboración propia)

Actividad 16

De la función de la figura se sabe que es de la forma $f(x) = ax^3 + bx + c$, calcula los valores de a, b y c

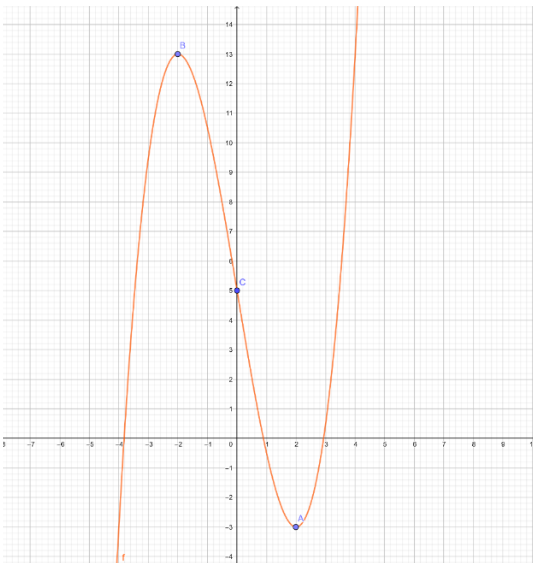


Figura 26 Actividad 16 (elaboración propia)

Actividad 17

Esta actividad propone la creación de tres applets de GeoGebra por parte de los alumnos.

Applet 1: Se quiere crear un applet que ilustre la definición de derivada como el límite de un cociente incremental. Como entrada, se pide una caja de texto para introducir la función a analizar, y dos deslizadores: uno, que indicamos como h, que indica la distancia entre los puntos entre los que vamos a calcular la recta secante y otro, que indicamos como a, que representa el primer punto donde vamos a calcular la recta secante. Después se trazará la recta entre esos puntos y se podrá ver que a medida que hacemos tender h a 0 la secante se aproxima más y más a la recta tangente. El ejemplo de este applet creado por el autor de este trabajo se puede consultar https://www.geogebra.org/m/hwpcyexw

Applet 2: Se quiere realizar un applet que muestre la recta tangente a una función. Como elementos de entrada se quiere una caja de texto para introducir la función deseada y un deslizador para seleccionar el punto de abcisa donde queremos ver la recta tangente. El programa debe ser capaz de calcular la derivada de la función y trazar la recta tangente y, mediante el deslizador, cambiar el punto donde se está trazando esta recta tangente. El ejemplo de este applet creado por el autor de este trabajo se puede consultar en https://www.geogebra.org/m/stn2jqqh

Applet 3: Se desea realizar un pequeño applet de Geogebra para que el estudiante pueda analizar la relación entre la gráfica de la función y la de su derivada, para fijarse especialmente en qué ocurre con los extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento. Como entrada se quiere una caja de texto para introducir la función y cómo salida otra caja de texto donde se proporcione la expresión analítica de la derivada y la gráfica de la función y su derivada. El ejemplo de este applet creado por el autor de este trabajo se puede consultar en https://www.geogebra.org/m/esxs6a6y

Actividad Ejemplo 1 para alumno de altas capacidades

Este problema se ha obtenido de (Esteban, Molano Romero et al. 2007, pág. 213).

Según una norma del Código de Circulación, la distancia entre dos coches que van a velocidad v km/h ha de ser igual a $(v/10)^2$ m. Suponemos que la longitud de los coches sea de 4 m la distancia entre coches consecutivos sea la mínima posible, se quiere conocer la velocidad que da la mayor fluidez al tráfico.

Actividad Ejemplo 2 para alumno de altas capacidades

Este problema se ha obtenido de (Esteban, Molano Romero et al. , 2007, pág. 215).

Un rubí, cuyo peso es p, se fracciona en dos trozos, lo que produce una pérdida de valor. Sabiendo que en estas piedras preciosas los cuadrados de los pesos son proporcionales a los cubos de sus valores, hallar cómo ha de fraccionarse la pieza inicial para que la depreciación sufrida por la rotura sea máxima.

4.10 Evaluación

Como punto de partida en la evaluación tenemos los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables expuestos por el BOCyL en la orden EDU/363/2015 del 4 de mayo:

Tabla 6 Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables de la unidad didáctica

Criterios de Evaluación	Estándares de Aprendizaje Evaluables
1 Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométrico	**1.1** Calcula la derivada de una función usando los métodos adecuados y la emplea para estudiar situaciones reales y resolver problemas. **1.2** Deriva funciones que son composición de varias funciones elementales mediante la regla de la cadena. **1.3** Determina el valor de parámetros para que se verifiquen las condiciones de continuidad y derivabilidad de una función en un punto
2 Estudiar y representar gráficamente funciones obteniendo información a partir de sus propiedades y extrayendo información sobre su comportamiento local o global	**2.1** Representa gráficamente funciones, después de un estudio completo de sus características mediante las herramientas básicas del análisis. **2.2**. Utiliza medios tecnológicos adecuados para representar y analizar el comportamiento local y global de las funciones

La ley LOMCE en los artículos 20 y 30 del Real Decreto 1105/2014 del 26 de diciembre establece que la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado en la etapa de bachillerato deberá ser continua y formativa, de tal manera que se puedan proponer medidas cuando el progreso del aprendizaje no sea el adecuado en

cualquier momento del curso.
Los instrumentos de evaluación utilizados en la unidad y su ponderación en la nota son los dispuestos en la tabla 7.

Tabla 7 Porcentajes en la evaluación del alumno

Instrumento de evaluación	Ponderación porcentual
Prueba escrita	70%
Trabajo en casa	15%
Desempeño en clase	15%

La prueba escrita estará diseñada para ser completada en menos de 50 minutos y constará de un mínimo de cinco y un máximo de siete tareas, algunas de las cuales pueden incluir subtareas. El motivo de incluir al menos cinco tareas es que ninguna de ellas tenga un peso excesivo en la calificación final. Esta prueba escrita comprobará el grado de cumplimiento de todos los estándares de evaluación, excepto el marcado como 2.2 en la tabla 3, puesto que al ser una prueba escrita en papel no podrá evaluarse esto. Este se comprobará mediante el trabajo en casa y la clase.
Para evaluar el trabajo en casa se tendrá en cuenta su cuaderno de matemáticas. En esta etapa educativa se debe fomentar que los alumnos sepan tomar apuntes y gestionar su propio aprendizaje. Por lo tanto, se tendrá en cuenta la calidad de la toma de apuntes, pero, sobre todo, se prestará atención a la realización de las tareas propuestas y a cómo las resuelven.
Sobre el desempeño en clase, los alumnos expondrán la realización de tareas frente a sus compañeros. Una de las competencias básicas es la lingüística, por lo que aquí se tendrá en cuenta cómo el alumno expone la realización de tareas matemáticas en lenguaje verbal de manera oral. Además, se valorará su participación y compromiso con el desarrollo de las sesiones mediante la observación sistemática del docente.
La calificación final trimestral será la media de la asignada a cada una de las unidades didácticas del tercer trimestre, que son la 9, 10, 11 y 12, siendo la presente la número 11. Para poder hacer media se necesitará una calificación superior a

cuatro en cada unidad didáctica y, en caso de no ser alcanzada se realizará una prueba escrita de recuperación.

Dada la importancia que tiene la calificación para los alumnos de primero de Bachillerato, se permitirá que aquellos que han aprobado se presenten a la prueba de recuperación para mejorar su calificación.

Ejemplo de muestra de prueba escrita para la unidad didáctica

Pregunta 1 (1 puntos). En gris se representa una cierta función y en morado, naranja y rojo tres rectas que son tangentes a la función en los puntos A, B y C, respectivamente. A partir de esta información calcula el valor de la derivada en los puntos A, B y C (0.25 puntos cada una) y esboza la gráfica de la derivada de la función (0.25 puntos).

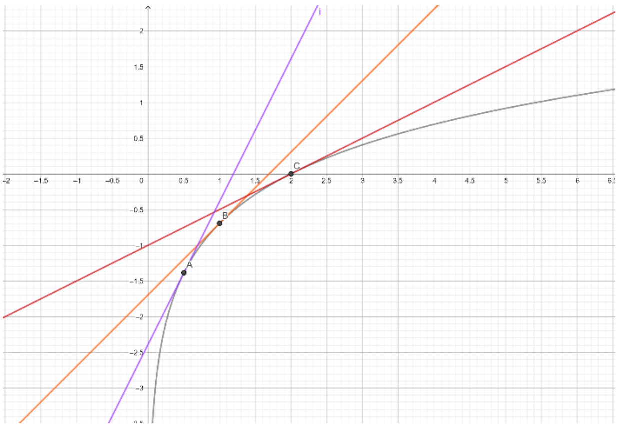


Figura 27

Pregunta 2 (1 punto) En la figura se muestra la gráfica de una cierta función definida a trozos. A partir de ella, esboza la gráfica de la función derivada (0.5 puntos) ¿cuál es el dominio de la función? (0.25 puntos) ¿Es la función derivable en todos los puntos del dominio? (0.25 puntos)

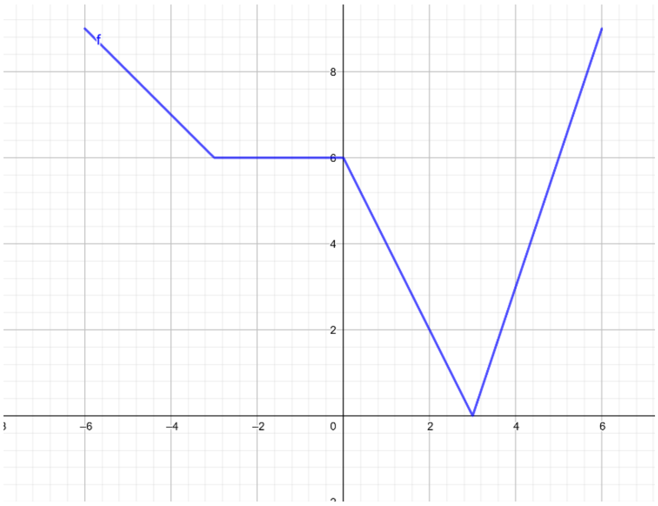


Figura 28

Pregunta 3 (3 puntos, 0.5 cada una). Deriva las siguientes funciones usando las reglas de derivación.

a) $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 8x + 1$

b) $f(x) = (4x^2 + 3x)^3 + cos(4x)^2$

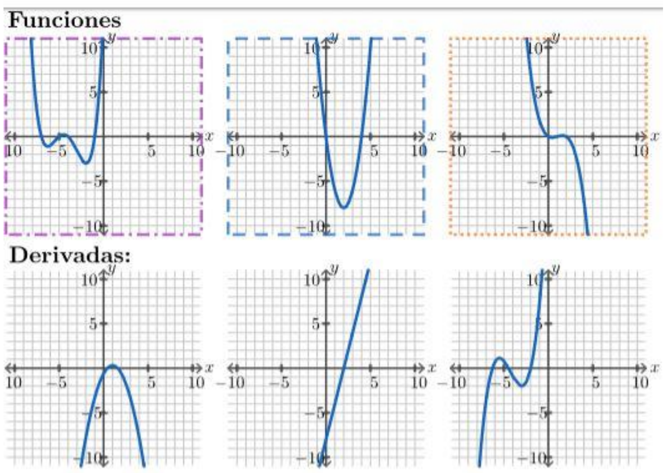
c) $f(x) = \sqrt[5]{(x^3 + 3x^2)}$

d) $f(x) = \log_2(7x^3 + 6x)$

e) $f(x) = \frac{x+5x^2}{2\sin 4x}$

f) $f(x) = \ln(7x^2) \cdot (\tan x^3)$

Pregunta 4 (1.5 puntos, 0.25 cada una) Empareja la gráfica de cada función con la de su derivada.



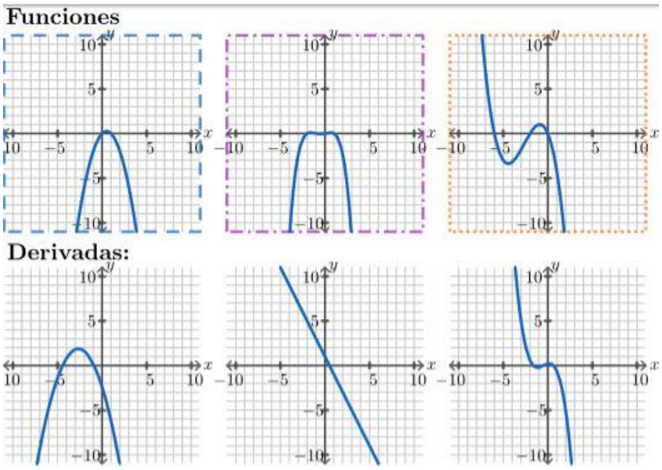


Figura 29

Pregunta 5 (2 puntos) Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{x^2-16}$ indicando su dominio, recorrido, puntos de corte con los ejes OX y OY, intervalos de crecimiento y decrecimiento, posibles extremos relativos, curvatura, puntos de inflexión y asíntotas.

Pregunta 6 (1.5 puntos) Una determinada función polinómica tiene la forma $f(x) = ax^3 + x^2 + bx + c$. Halla a, b y c para que la función tenga un máximo relativo en el punto (0,3) y un punto de inflexión en x=1.

5. Conclusiones y posibles mejoras

En líneas generales, creo que se han cumplido todos los objetivos que se marcaron en la introducción de este trabajo. Primero, se ha estudiado la derivada desde varios puntos de vista: el histórico, el curricular, el cognitivo y como tema de un libro de texto. Esto me ha hecho reflexionar sobre elementos que antes de cursar este máster nunca había tenido en consideración y que, tras ser tratados en las diversas asignaturas, he aprendido a valorar. Así, en mi futuro como docente, intentaré incluir la perspectiva histórica y siempre que sea posible e intentaré reflexionar y llevar a cabo pequeñas investigaciones en mi aula sobre los problemas de comprensión asociados del concepto tratado.

También se ha llevado a cabo el estudio acerca de la unidad didáctica de derivadas en tres libros de texto y esto me ha hecho concienciarme acerca del valor del libro de texto como recurso en el aula de matemáticas y poder tener una mayor perspectiva de cuál era su propuesta didáctica.

También se ha incluido la unidad didáctica de derivadas en la que se proponen actividades focalizadas en entender la derivada desde el punto de vista gráfico. También en esta unidad didáctica se ha intentado promover el uso de GeoGebra para dibujar las gráficas de las funciones. Por lo tanto, los objetivos relativos a estos aspectos también han sido cumplidos.

Como expuse en la introducción, quería que este trabajo englobara en la medida de lo posible aspectos de todas las asignaturas que he cursado en el máster y creo que, tras haberlo terminado, así ha sido. Cada asignatura ha aportado su granito de arena para poder completar el trabajo.

En conclusión, los nueve objetivos marcados en la introducción han sido abordados a lo largo del trabajo. Sin embargo, sí considero que hay elementos que podrían mejorarse para haber cumplido esos objetivos de manera más satisfactoria.

Primero, el apartado sobre el análisis de libros de texto podría ser mejorado en estudios futuros. Por un lado, ampliando la muestra para intentar abarcar todos los más usados en las aulas de Bachillerato, ya que el abanico de libros que se utilizan en España es mucho más amplio. Por otro, creando más categorías de análisis de tareas, como podría ser el tipo de función involucrada o la capacidad fomentada por la tarea.

Por otro lado, la mayor flaqueza de este trabajo es que durante mi periodo de prácticas no pude impartir la unidad didáctica de derivadas, ya que sólo intervine en segundo y cuarto de la ESO, por lo que no he podido poner en práctica la unidad didáctica ni tengo experiencia real de cómo impartir el tema de derivadas.

Otro aspecto que sería mejorable son las actividades incluidas, puesto que 16 es un número escaso y sería interesante ampliarlo para abarcar la totalidad de la unidad didáctica sin el libro de texto. Creo que todo docente, a lo largo de su trayectoria profesional, debe crear su propio catálogo de actividades para usar en sus clases, lo cual es una tarea ardua y que abarcará toda su carrera. Espero que las que he creado en este trabajo me sirvan como punto de partida de este catálogo personal.

A modo de síntesis, creo que lo que más me ha aportado este trabajo es la reflexión que he tenido sobre la labor del docente al leer los diversos artículos y libros que han sido necesarios para la confección de este trabajo.

Referencias

Alarcón, S. A., Suescún, C. M., & de la Torre, A. (2005). El método de las tangentes de Fermat. *Matematicas: Enseñanza Universitaria*, 101-123.

Antonio, R., Escudero, D., & Flores, E. (2019). Una introducción al concepto de derivada en estudiantes de bachillerato a través del análisis de situaciones de variación. *Educación Matemática, 31*(1), 258-280.

Apuntes Marea Verde. (08 de 06 de 2021). Obtenido de https://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/BACHILLERATOS.htm

Arce, M., Conejo, L., & Muñoz, J. (2019). *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.* Madrid: Editorial Sintesis.

Azcárate, C., Casadeval, M., Casellas, E., & Bosh, D. (1996). *Cálculo diferencial e Integral.* Madrid: Editorial Sintesis.

Bardin, L. (1996). *Análisis de contenido* (2ª ed.). Madrid: Akal.

Bescós, E., & Zoila, P. (2015). *Matemáticas I Bachillerato.* Madrid: Oxford University Press.

Castro, A., Prat, M., & Gorgorio, N. (octubre-diciembre de 2016). Conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas: su evolución tras décadas de investigación. *Revista de educación*(374), 43-66.

Colera, J., Oliveira, M., Colera, R., & Santaella, E. (2016). *Matemáticas I Bachillerato.* Madrid: Anaya.

Conejo, L., Arce, M., & Ortega, T. (2014). Justificación de las reglas de derivación en libros de texto de cuatro editoriales desde LGE hasta LOE. *Investigación en Educación Matemática*(XIII), 257-266.

Conejo, L., Arce, M., & Ortega, T. (2015). Análisis de las justificaciones de los teoremas de derivabilidad en los libros de texto desde la Ley General de Educación. *Avances de investigación en educación matemática*(8), 51-71.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking* (págs. 95-123). Kluwer Academic Publishers.

Esteban, M., Molano Romero, A., González García, L., & de Vicente González, M. (2007). *Problemas resueltos de olimpiadas matemáticas de Bachillerato.* Madrid: Tébar.

Grabiner, J. V. (1983). The changing concept of change: The derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics Magazine, 56*(4), 195-206.

Habre, S., & Abbound, M. (2006). Students' conceptual understanding of a function andits derivative in an experimental calculus course. *Journal of Mathematical Behavior, 25*, 57-72.

Muñoz, J. (2021). *Matemáticas I Bachillerato.* Libros Marea Verde.

Ortega del Rincón, T., & Sierra Vázquez, M. (Mayo/Agosto de 1998). El concepto de dervada: Algunas indicaciones para su enseñanza. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, págs. 87-115.

Ortega, T., & Monterrubio, M. (2009). Creación de un modelo de vaoración de textos matemáticos. Aplicaciones. *Investigación en Educación Matemática*, 37-53.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.*

Sanchez-Matamoros, G. (2010). *Analisis de la comprensión en los alumnos de Bachillerato y primer año de universidad sobre la noción matemática de derivada (desarrollo del concepto).* Sevilla: Edición Digital @tres, S.L.L.

Sanchez-Matamoros, G., & Fernandez-Verdú, C. (abril de 2016). Secuencia de actividades sobre derivada desde una trayectoria de aprendizaje. *UNO: Revista de didáctica de las matemáticas*(72), 40-45.

Sanchez-Matamoros, G., García Blanco, M., & Llinares Ciscar, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las ciencias, 1*(23), 85-98.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como

objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(2), 267-297.
Skemp, R. (Noviembre de 1978). Relational understanding and instrumental understanding. *The arithmetic teacher, 26*(3), 9-15.
Smith, M., & Stein, M. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*, 344-350.
Stewart, I. (2008). *Historia de las matemáticas en los últimos 10.000 años.* Madrid: Critica.
Vargas, M., Fernandez-Plaza, J., & Ruiz-Hidalgo, J. (2020). La derivada en los libros de texto de 1º de Bachillerato: Un análisis a las tareas propuestas. *Avances en investigación en educación matemática*, 87-102.
Wussing, H. (1998). *Lecciones de historia de las matemáticas.* Madrid: Siglo XXI de España Editores.