Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias

Trabajo Fin de máster

Máster en profesor de educación secundaria obligatoria y bachillerato, formación profesional y enseñanzas de idiomas

Otro álgebra es posible: enredos y contradanzas

Autor: Daniel Nieto Medina

Tutor: Edgar Martínez Moro

Introducción

La matemática discreta es una rama de las matemáticas que trata las estructuras finitas y numerables. Esta definición no es los bastante precisa, a grandes rasgos la matemática discreta se ocupa de las técnicas de enumeración, las estructuras combinatorias, la teoría de grafos y las estructuras algebraicas, que es donde se centrará este trabajo, concretamente en la teoría de grupos. Hay que destacar que, dentro de la matemática discreta, la algoritmia es muy útil a la hora de construir soluciones problemas.

A lo largo de los años la matemática discreta ha visto un gran número de problemas sin resolver, la teoría de grafos vino motivada por los intentos de resolver el teorema de los cuatro colores, el teorema de los puentes de Königsberg, algunos de los problemas de Hilbert… En la Segunda Guerra Mundial surgió la necesidad de descifrar los códigos alemanes lo que dio paso a avances en la criptografía y la ciencia computacional teórica, esto junto a la Guerra Fría hicieron avanzar estos campos y con ellos la matemática discreta dentro de la computación.

Durante la historia todas las áreas que formaban la matemática discreta no formaban un todo estructurado, pero debido a la evolución tecnológica e informática, se les ha dado una importancia siendo una de las ramas de las matemáticas con más vitalidad en la actualidad. Por tanto, cabe preguntarse si está presente en los contenidos que se imparten en secundaria.

En el primer capítulo se establece el marco teórico del trabajo. En este capítulo se estudia cómo y porqué introducir la matemática discreta en currículo de secundaria. Debido a que en la actualidad el aprendizaje se realiza por competencias, se realiza un análisis de las competencias clave, destacando claro está la competencia matemática, todo ello dentro de la asignatura de matemáticas.

En la actualidad es muy importante revitalizar la matemática escolar, debido a que cada vez las matemáticas tienen una importancia tanto para el día a día, como para encontrar trabajo, ya que cada vez surgen más empleos relacionados con la computación. Se analiza las ventajas de la matemática discreta en este aspecto, buscando motivar al alumno, crear actividades interesantes que acerquen las matemáticas a la realidad Se busca acercar las matemáticas a los alumnos mediante juegos, enigmas, el descubrimiento, desafíos… En ocasiones los alumnos pierden el interés por las matemáticas debido a la dificultad en la abstracción, en generalizar los conceptos o en razonar de manera inductiva, se busca utilizar la visualización como una herramienta para poder reforzar estos aspectos clave, pasando de lo concreto a lo abstracto de manera progresiva. Se analizará al final del capítulo cómo se van a seleccionar las actividades de los capítulos siguientes, así como los objetivos y ventajas que han de tener.

Una vez analizadas las ventajas de la matemática discreta surge entonces la necesidad de analizar su presencia en el currículo de secundaria. Por lo que, en el segundo capítulo, siguiendo la editorial mareaverde, se estudia su peso en el currículo, además de las técnicas de enseñanza aprendizaje, aportando alguna actividad interesante. Las técnicas de enseñanza aprendizaje se definen como el conjunto de actividades que el docente estructura con el objetivo de que el alumno construya el conocimiento, lo transforme y lo evalúe, además de participar con el alumno en el desarrollo y recuperación de su propio proceso. En este capítulo se destaca la facilidad de encontrar actividades sencillas, útiles y representativas con las que reforzar estas técnicas de enseñanza aprendizaje por medio de la matemática discreta. Dentro de estas técnicas de enseñanza aprendizaje cabe destacar la importancia que se le dará a la técnica expositiva, donde se busca que el alumno de manera oral presente un ejercicio, una actividad o un concepto de manera que tenga que profundizar en ello y de esta manera interiorizarlo y comprenderlo. En la unidad posterior se busca que los alumnos expongan los ejercicios en clase y sean capaces de explicar la actividad por medio de un video.

La matemática discreta tiene aspectos en común con conceptos que se imparten en el currículo, pero hay que destacar la falta de contenido computacional en este, en el sentido de la necesidad acercar las matemáticas a la computación. En cursos superiores la matemática discreta toma un papel fundamental, por su importancia en computación y por la capacidad lógica y de resolución de problemas y algoritmos. Debido a que en el currículo de secundaria y bachillerato no toman la suficiente importancia o debido a que la base necesaria para entender conceptos abstractos y novedosos, hay partes de esta materia que crean dificultades en los alumnos. En concreto, teoría de grupos es una materia abstracta en la que es necesario obtener una visión general y que forma la base de los contenidos matemático de estos cursos superiores.

Se plantea una manera de introducir la teoría de grupos en el curso de 4 º de ESO, para ello se elabora una unidad didáctica como una manera introducir la teoría de grupos en el currículo apoyándose en unas actividades visuales que sean capaces de acercar estos conceptos a la realidad. Con esta unidad se planificará el proceso de enseñanza-aprendizaje alrededor de los enredos y contradanzas, aportándole consistencia y significatividad. Se pretende programar esta unidad por competencias, por tanto, es importante que el alumno perciba la utilidad y funcionalidad de la programación. Esta unidad viene motivada por acercar al alumnado el saber, las capacidades y las actitudes que responden al perfil del ciudadano de la sociedad actual.

En una primera instancia se habla del porqué de introducir teoría de grupos en el currículo, así de cómo se relaciona con los contenidos previos y dónde encuadrar este tema dentro del currículum actual.

En toda unidad didáctica es necesario analizar los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables, en esta unidad se ha intentado incluir unos conceptos novedosos, pero no excesivamente complejos y estrechamente relacionados con otros ya vistos anteriormente. La metodología a utilizar ha de ser activa, en la que el alumno sea el protagonista de su aprendizaje, en esta unidad se destacan cuatro, pero en este aspecto el profesor toma una pieza fundamental a la hora de escoger cuál cree que es la más conveniente según el tipo de alumnado y el contenido que presentar.

En cuanto a la temporalización, los conocimientos a introducir no son números ni muy extensos, por lo que la unidad didáctica se puede llevar a cabo en dos semanas de clase, en unas 7 u 8 sesiones. Se presentan seguidamente la teoría y actividades junto a la temporalización de las mismas, debido a que no se ha puesto en práctica esto ha de ser estimado, ya que cada clase asimila mejor o peor unos conocimientos y a veces es necesario recalcar algunos puntos con el fin de que la gran mayoría lo entienda. La exposición de ejercicios por parte de los alumnos es una pieza fundamental en el desarrollo de la unidad para que sean capaces de interiorizar mejor la teoría. Con el fin de buscar el interés de los alumnos es de gran ayuda la introducción de historia de las matemáticas y curiosidades, esto hará que estén más atento y participativos durante la clase magistral.

Las actividades de enredos y contradanzas son el eje central de esta unidad, mediante las cuales acercar los conocimientos impartidos a la realidad, para que los alumnos sean capaces de visualizarlos y comprenderlos. La manera óptima de realizar esta actividad es en grupo, ya que existen muchos beneficios a la hora de aprender mediante esta metodología, pero en la realidad actual no se podría realizar de esta manera por lo que se presenta también otra manera de realizarla de manera individual. Estas actividades se desarrollarán en tres sesiones, se presenta un guion de cómo establecerla de manera que los alumnos vayan descubriendo que lo que están realizando es un grupo y que se cumplen todas las condiciones necesarias, demostrándolas ellos mismos con sus movimientos.

Al ser una unidad innovadora en la que gran peso de la unidad lo tiene la actividad, este peso también ha de verse reflejado en la evaluación. Se establece una manera de evaluar esta unidad, si bien es cierto que este ámbito suele ser diferente según los gustos de cada profesor, en este caso tendrá el mismo valor la actividad que el examen de la unidad. Se establece la elaboración de un video como modelo de evaluación en la que el alumno ha de explicar la teoría aprendida por medio de la actividad con el objetivo de que interiorice el contenido y pueda mediante ensayo error interiorizar los conocimientos.

Es fundamental tener en cuenta la atención a la diversidad, se busca que todos los alumnos sean capaces de llegar a las competencias necesarias para superar el curso. También ocurre que en clase haya alumnos con altas capacidades que quieran profundizar en la materia y a los que se les pueda orientar ampliando el temario, ya que en esta teoría es fácil continuar con grupo libre o con anillos. Para estos alumnos y para su posible uso en la universidad se presenta en el siguiente capítulo en el que se habla de grupo libre y del grupo del cubo de Rubik.

Índice

Introducción.. 3

Marco teórico.. 9

Competencia matemática..9

Matemática discreta..11

El currículo de matemáticas en continuo debate..12

Revitalización de la matemática escolar...13

Importancia de la visualización..13

Actividades..14

Matemática discreta en secundaria... 17

Números figurados..17

Conjuntos y operadores 18

Funciones.. 19

Movimientos en el plano y el espacio...21

Combinatoria...23

Conclusión..24

Enredos y contradanzas... 27

Justificación...27

Competencias básicas..29

Metodología...31

Temporalización...31

Contenidos previos...32

Desarrollo de los contenidos..32

Actividad de enredos...41

Actividad contradanzas...46

Evaluación...52

Recursos..55

Atención a la diversidad..55

Conclusiones de la unidad didáctica...56

Grupo libre...61

El grupo de entedos.. 63

El grupo de simetrías del cuadradro..64

Elementos del grupo libre de dos generadores….. 66

Otro grupo interesante: el grupo del cubo de Rubik..……..……………………….67

Conclusión………………………………………….. 69

Bibliografía………………………………………... 71

Marco teórico

Competencia matemática

La introducción que la Ley Orgánica de Educación (LOE) hace en el currículo del término "competencias básicas", no sólo es una definición de un concepto, esto implica una reformulación de los métodos de enseñanza. Desde el "saber" se pasa al "saber hacer", pasa de "aprender" a "aprender a aprender", se busca que los alumnos cuando hayan completado su etapa educativa estén preparados y hayan alcanzado una serie de competencias que les permitan incorporarse a la vida adulta y al mercado laboral de manera satisfactoria. En educación primaria no será suficiente con que el alumno sepa sumar, restar, multiplicar y dividir, si no es capaz de aplicarlo en la vida cotidiana, no habrá conseguido superar una de estas competencias básicas y no habrá alcanzado los objetivos de la asignatura.

El currículo por lo tanto se ha diseñado para que los alumnos desarrollen y adquieran, en mayor o menor medida las siguientes competencias básicas:

- Competencia matemática.
- Competencia en comunicación lingüística.
- Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.
- Tratamiento de la información y competencia digital.
- Competencia social y ciudadana.
- Competencia cultural y artística.
- Competencia cultural y artística.
- Autonomía e iniciativa personal.

Estas competencias han sido introducidas con el objetivo de que los alumnos no adquieran solamente conocimientos, sino unas destrezas y habilidades que les resulten útiles para desenvolverse de manera autónoma. La introducción de estas competencias supuso un cambio en el currículo, en las áreas de aprendizaje, en la organización escolar, las normas de los centros, instalaciones…En este trabajo nos centraremos en la competencia matemática y en analizar el currículo con el objetivo de que el alumno adquiera esta competencia de la manera más satisfactoria.

Para empezar a analizar la competencia matemática se puede observar que el ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015), en la *orden ECD/65/2015* en la que se describen todas las competencias anteriores, describe la competencia matemática y competencias básicas en ciencias y tecnología como sigue:

> La competencia matemática y las competencias básicas en ciencia y tecnología inducen y fortalecen algunos aspectos esenciales de la formación de las personas que resultan fundamentales para la vida. En una sociedad donde el impacto de las matemáticas, las ciencias y las tecnologías es determinante, la consecución y sostenibilidad del bienestar social exige conductas y toma de decisiones personales estrechamente vinculadas a la capacidad crítica y visión razonada y razonable de las personas. A ello contribuyen la competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología:
>
> a) La competencia matemática implica la capacidad de aplicar el razonamiento matemático y sus herramientas para describir, interpretar y predecir distintos fenómenos en su contexto. La competencia matemática requiere de conocimientos sobre los números, las medidas y las estructuras, así como de las operaciones y las representaciones matemáticas, y la comprensión de los términos y conceptos matemáticos. El uso de herramientas matemáticas implica una serie de destrezas

que requieren la aplicación de los principios y procesos matemáticos en distintos contextos, ya sean personales, sociales, profesionales o científicos, así como para emitir juicios fundados y seguir cadenas argumentales en la realización de cálculos, el análisis de gráficos y representaciones matemáticas y la manipulación de expresiones algebraicas, incorporando los medios digitales cuando sea oportuno. Forma parte de esta destreza la creación de descripciones y explicaciones matemáticas que llevan implícitas la interpretación de resultados matemáticos y la reflexión sobre su adecuación al contexto, al igual que la determinación de si las soluciones son adecuadas y tienen sentido en la situación en que se presentan. Se trata, por tanto, de reconocer el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo y utilizar los conceptos, procedimientos y herramientas para aplicarlos en la resolución de los problemas que puedan surgir en una situación determinada a lo largo de la vida. La activación de la competencia matemática supone que el aprendiz es capaz de establecer una relación profunda entre el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental, implicados en la resolución de una tarea matemática determinada. La competencia matemática incluye una serie de actitudes y valores que se basan en el rigor, el respeto a los datos y la veracidad.

Obviamente en la asignatura de matemáticas no solamente desarrolla la competencia matemática, es fundamental por ejemplo la competencia lingüística en la asignatura de matemáticas, así como la competencia de aprender a aprender y la digital. Cabe destacar que tanto la asignatura de matemáticas como la de lengua son las que tienen un papel más importante en el currículo, y, según la LOMCE, es necesaria una mejora dado a su saber transversal y a los resultados obtenidos en los informes PISA.
Podemos añadir también que la importancia de la asignatura de matemáticas no es solamente por lo anterior, sino que es fundamental para poder desarrollar correctamente otras asignaturas que se imparten a lo largo de toda la etapa educativa (en especial en secundaria), como por ejemplo física y química o geografía.
En este trabajo definiremos la competencia matemática como:

> "La aptitud de un individuo para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, alcanzar razonamientos bien fundados y utilizar y participar en las matemáticas en función de las necesidades de su vida como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo" (OCDE, 2004).

Las competencias matemáticas incluyen muchos aspectos tales como pensar matemáticamente, plantear y resolver problemas matemáticos, analizar y diseñar modelos, razonar y representar objetos y situaciones matemáticas, comunicar sobre matemáticas y comunicarse con las matemáticas. Podemos encontrar muchas definiciones diferentes de cada una de las competencias, atendiendo a diferentes autores. Si volvemos al principio, el ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015) engloba la competencia matemática dentro de cuatro áreas de las matemáticas: "Así pues, para el adecuado desarrollo de la competencia matemática resulta necesario abordar cuatro áreas relativas a los números, el álgebra, la geometría y la estadística, interrelacionadas de formas diversas". Si observamos la disposición del currículo por parte de la Junta de Castilla y León (2015) tenemos cinco bloques: "Número y Álgebra", "Geometría", "Funciones", "Estadística y probabilidad" y un bloque transversal: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas, donde se trabaja la abstracción y el razonamiento que se destaca en la competencia matemática.
Por tanto, viendo cómo se distribuye el currículo, se puede preguntar si la disposición actual del currículo es la correcta, y si se le puede añadir otras áreas de matemáticas de manera que se pueda desarrollar mejor la competencia matemática y otras competencias.

En este trabajo introduciremos la matemática discreta como una nueva posibilidad de contenido curricular. El motivo principal para introducir matemática discreta en el currículo viene motivado por sus beneficios a la hora de comprender las matemáticas, su utilidad en computación y facilidad de aprendizaje. Podemos añadir también que cada vez más autores y especialistas hablan sobre su utilidad a la hora de aprender matemáticas y que puede llegar a ser muy conveniente su introducción en el currículo de secundaria. Además, cada vez más, se están creando actividades visuales relacionadas con la matemática discreta que son muy útiles y representativas a la hora de adquirir y recordar conceptos matemáticos.

Matemática discreta

Este trabajo viene motivado por la necesidad de plantear la integración de la matemática discreta dentro del currículo de secundaria, y esto se debe a que es un área de las matemáticas muy dinámica e interesante, que proporciona el desarrollo del pensamiento matemático y que es prácticamente ignorada en el currículo de secunda. Siguiendo a Rivera-Marrero, O. (2007) la matemática discreta proporciona una oportunidad al docente de poder enseñar matemáticas de una forma innovadora, en su trabajo investiga y estudia como a los futuros docentes introducir la matemática discreta sería muy significativas para los estudiantes, ya que enfatiza en la resolución de problemas y el desarrollo del pensamiento matemático.

Hay que destacar la importancia de introducir las actividades visuales y representativas que ofrecen un enfoque diferente, mediante las cuales los alumnos se realizan un esquema mental de manera que les resulte más fácil recordar los conceptos aprendidos. Se busca principalmente acercar las matemáticas a los alumnos a la realidad, por lo que la matemática discreta es una manera mediante la que se puede llevar a cabo estas actividades. Antequera, A.T. (2012) relaciona la idea de ser competente propuesta por PISA con esta adaptación curricular en la que interviene la matemática discreta, se resume en cinco partes: resolución de problemas, modelización matemática, competencia matemática, matemática realista y matemática discreta.

Otro de los ámbitos en el que destaca la matemática discreta es en la computación, y en el desarrollo, por ende, del pensamiento computacional. Este engloba cuatro componentes como son el pensamiento abstracto, pensamiento lógico, pensamiento de modelización y pensamiento constructivo. (Flores, A., 2011).

Las ventajas que tiene la introducción de la matemática discreta en el currículo de secundaria se pueden resumir en los siguientes puntos:

- Aplicabilidad, es un área con muchas aplicaciones en matemáticas y otras áreas como ciencias sociales, se puede acercar a la vida cotidiana de los alumnos.
- Accesibilidad, el contenido teórico básico necesario para entender estas aplicaciones es muy sencillo, no es necesario saber manejar unos conceptos difíciles, sino que se pueden adaptar a todos los cursos, obteniendo un contenido transversal que se adapta a todos los niveles.
- Atracción, la matemática discreta propone unos problemas que fomentan la curiosidad de los alumnos, al suponerles desafíos mentales, pero sin una gran dificultad. Esto, por tanto, mejorará la motivación de los alumnos y fomentará el interés por las matemáticas, el aprendizaje por descubrimiento que es tan importante para la asimilación de conceptos.
- Adecuación, el contenido de la matemática discreta será beneficioso para todos los alumnos. El alumno que está acostumbrado a sacar buenas notas obtendrá, mediante estos contenidos, unos desafíos y materiales que les serán muy útiles en el futuro. Por otro lado, al alumno que no suele tener buenas calificaciones en la asignatura de matemáticas le proporcionará una manera diferente de enfocar las matemáticas, más visual y aplicable

de manera que puedan volver a retomar el interés por esta área. Cabe destacar la capacidad de la matemática discreta de relacionarse con las otras áreas matemáticas e informáticas del currículo, y por tanto los alumnos tendrán una visión más completa del saber matemático.

En conclusión, debido a los argumentos expuestos, se considera plausible plantearse una reforma en el currículo con el fin de introducir en mayor o menor medida la matemática discreta en secundaria.

El currículo de matemáticas en continuo debate

Debido a la continua evolución social, tecnológica, política, económica... es necesario estudiar el currículo continuamente y con ello adaptar los conocimientos y enseñanzas impartidas a la realidad del momento.

Nos encontramos ante una evolución tecnológica, en la que cualquier elemento estudiado en clase se puede resolver con una calculadora o un ordenador, por tanto, es necesario adaptar e integrar estas herramientas en el aula y que los alumnos se familiaricen con ellas. La matemática discreta nos proporciona herramientas para fomentar este pensamiento computacional y abstracto, cada vez más útil en la realidad en la que vivimos.

La economía forma una de las partes más importantes de la realidad social de cada individuo, además de adaptarse a las necesidades de la era de la información, requiriendo cada vez más puestos en el sector analítico y programador. Para todo esto es necesario conocer y entender las matemáticas, y tener que establecer nuevas pautas y contenidos para su óptimo desarrollo.

El aprendizaje no es un proceso de asimilación pasiva de la información y de almacenamiento de este en fragmentos recuperables como resultado de una práctica y de un refuerzo repetitivos. Todo lo contrario, los alumnos afrontan las tareas con conocimientos previos, asimilan la nueva información y construyen sus propios significados (Resnick, 1987). No solo eso, las ideas no están aisladas en la memoria, sino que se asocian y organizan con el lenguaje natural que se utiliza y las situaciones que ha experimentado en el pasado, por lo que cobra una gran importancia realizar actividades que puedan recordar y una buena manera es que sean manipulativas, entretenidas y muy representativas. Entonces si queremos cambiar el currículo, este tiene que prever que los alumnos sean activos y amplíen constantemente la estructura de las matemáticas que conocen haciéndolas realizar, probar y confirmar conjeturas. Si los alumnos hacen conjeturas, estructurarán su conocimiento matemático, de manera consciente o inconsciente, ya que la conjetura no se puede crear de la nada.

Para terminar, es fundamental el trabajo del profesor para el completo desarrollo del alumno, el profesor es libre de impartir, siguiendo los márgenes establecidos por el currículo, los conocimientos a su gusto, pero siempre debería de tener en cuenta la mejor manera para que los alumnos consigan asimilar los conocimientos acordes a su edad. El trabajo de los profesores apoyar, promover, estimular y facilitar de cualquier modo la creación de conocimiento por los alumnos. No sólo eso, ha de crear un entorno cooperativo de aprendizaje en el que los alumnos puedan explorar e investigar problemas, esto es, deben guiar, escuchar, dirigir, discutir, sugerir, preguntar y clarificar el trabajo de los alumnos. Para todo esto, los profesores han de crear actividades, como las que se sugieren en este trabajo, apropiadas e interesantes para que los alumnos formen sus conocimientos y lo relacionen de una manera sencilla, atendiendo siempre a las necesidades de los alumnos.

Por todo esto, el currículo ha de estar en continuo debate y es necesario retocarlo e ir cambiando determinados aspectos con el fin de no estancarse y evolucionar junto con la realidad en la que se encuentre. Por lo tanto, como hablaremos en el siguiente punto es necesario una revitalización de la matemática escolar.

Revitalización de la matemática escolar

El concepto de revitalización de la matemática escolar se utiliza siguiendo a los autores Rosenstein, J., Franzblau, D. y Robert, F. (1997), con el que se quiere hacer entender que a medida que se introducen nuevos contenidos, también es necesario introducir un enfoque más motivador, que produzca un interés al alumno. Se busca relacionar los conceptos con la vida real de los alumnos, que no se entiendan las matemáticas como algo difícil, abstracto y lejano, sino como algo que está en el día a día de cada uno, útil y cercano.

Se cree que es necesario dejar de lado la educación más antigua que se basa en teoría y resolver problemas o ejercicios, es necesario introducir actividades que sean más visuales y dinámicas, para que los alumnos puedan recordar esos conceptos mediante la relación con la realidad. Surge la necesidad de que el alumno por sí mismo pueda relacionar, generalizar, hipotetizar y aplicar por sí mismo, mediante actividades en las que él mismo descubra e investigue.

Muchas veces es difícil establecer esta relación entre la teoría matemática y la realidad, o simplemente que su aplicación no sea acorde al contexto escolar, esto no quiere decir que no exista tal relación. Esto puede estar motivado porque los alumnos no conocen en gran medida la realidad social en la que se vive y es complicado relacionarlo de este modo, por lo que el cambio ha de ser no solo en matemáticas sino en general con el objetivo de preparar mejor al alumnado y fomentar su interés en todas las áreas.

Otra manera de fomentar el interés de los alumnos es por medio de la gamificación, en la actualidad se dispone de un gran abanico de posibilidades de realizar juegos con diferentes contenidos de materia, tanto por medio de un ordenador como sin uso de tecnología. De esta manera siguiendo a Saénz, E: (2019), no se busca asimilar la teoría, sino que los alumnos logren las competencias necesarias, para ello buscar que las matemáticas supongan desafíos para los alumnos y de esta manera se interesen y diviertan aprendiendo matemáticas, y una gran manera de hacer es por medio de la gamificación.

Importancia de la visualización

Según los Standars del NMCT (1989) los alumnos deben experimentar regularmente problemas reales, de hecho, dice que la enseñanza se debe realizar a partir se situaciones problemas. Esto nos dice que mediante estas situaciones reales se facilita el aprendizaje, y por tanto se crearán actividades que conecten las ideas o procedimientos tanto entre distintos temas matemáticos, como en otras áreas de contenidos.

Cabe destacar la Teoría del Descubrimiento de Bruner, J., en la cual se habla de que los alumnos tendrán que alcanzar los conocimientos mediante un aprendizaje activo y constructivo, para posteriormente concluir con la resolución de problemas y la reflexión sobre las diferentes situaciones.

Los psicólogos afirman que el conocimiento, las destrezas y los contextos afines se establecen en la memoria mediante “esquemas”. Estos se crean en la memoria del alumno mediante la exposición prolongada a conceptos contextuales afines. Estos esquemas ayudan al alumno a resolver los diferentes problemas planteados, y le ayudan a recordar los conocimientos. De esta manera, el alumno aprenderá mejor cuando el contenido se enseñe de manera estructurada.

La representación mental que se propone pasa por lo siguiente:

- Inactivo: se basa en la acción, se puede decir que en matemáticas serian ejemplos concretos.
- Icónico: representación mediante imágenes o dibujos.
- Simbólico: donde se genera la abstracción, representar mediante letras y símbolos.

En muchas ocasiones se generan problemas al pasar de un conocimiento inactivo, lo que sería algo concreto, a uno simbólico y este procedimiento es más sencillo si se poseen unas estructuras visuales para comprender el conocimiento.

Es muy común en las escuelas para alumnos con dificultad de aprendizaje en matemáticas, en concreto niños con TDAH, la utilización de herramientas visuales, así como dibujos, materiales o juegos. Un ejemplo de estos materiales son la representación gráfica de problemas, las regletas de Cuissenaire, el ábaco, Miniland Educational…

Se pueden resumir las principales ventajas del aprendizaje visual en las siguientes:

- Intervienen todos los sentidos en el proceso,
- Mejora la memoria del alumno.
- Permitirá a los alumnos obtener un punto de vista global.
- Estimula la creatividad.
- Ayuda a ordenar y organizar las ideas.
- Es compatible con otras metodologías de trabajo colaborativo o por proyectos, en propuestas de ramificación o para hacer presentaciones de seguimiento del propio aprendizaje.
- Útil para alumnos con dificultad de aprendizaje.
- Otorga a los alumnos la capacidad de ver las matemáticas desde distintos puntos de vista.
- Ayuda a entrelazar las diferentes áreas de las matemáticas (incluso de otras ciencias), en busca de un contenido completo y transversal.

Por último, hay que destacar que ya se usan metodologías que se basan en el aprendizaje visual, dos ejemplos conocidos son el método Singapur y el Visual Thinking. El método Singapur se realiza en tres fases (concreto, pictórico y abstracto), la primera etapa concreta donde se privilegia la manipulación y exploración, etapa visual, en la que se traduce la información dibujándola y, por último, la etapa abstracta, en la que se encuentra la operación matemática correspondiente. Visual Thinking se basa en realizar esquemas o mapas conceptuales dibujando, los dibujos ayudan a los alumnos a estudiar y a organizarse los conocimientos.

La inclusión en los libros de texto de matemáticas de dibujos o esquemas visuales, para ayudar a que visualicen y asocien la materia es de gran ayuda también para el aprendizaje.

Actividades

Antes de cerrar el capítulo es conveniente hablar acerca de las actividades que se proponen en este trabajo. En primera instancia, las actividades que se proponen en el capítulo siguiente son un ejemplo de cómo mediante la matemática discreta se pueden crear actividades de modo que los alumnos aprendan y recuperen el interés por las matemáticas. También es importante destacar las ventajas de las actividades visuales, en grupo, colaborativas y de descubrimiento, que ayudan a los alumnos a elaborar un esquema mental de manera que les resulte más sencillo recordar los conocimientos. Así mismo, la utilización de materiales manipulativos puede ayudar a elaborar esa base necesaria a la hora de aprender conceptos novedosos y abstractos.

En cuanto a las actividades o ejercicios que se proponen en cada apartado de la unidad, pueden resultar un tanto complicadas en primera instancia, pero su realización no es muy costosa si se guía a los alumnos. La elección de estas actividades se debe a intentar acercar estos conceptos a los que ya están establecido y les son familiares, por lo que se toman conjuntos conocidos o se utilizan tablas de operaciones que son visuales y fáciles de comprender. También hay que destacar que en esta unidad y con las actividades se busca fomentar la utilización del lenguaje matemático saber comprenderlo y escribir con él.

Las actividades de enredos y contradanzas son el pilar de la unidad didáctica, mediante las cuales acercar estos conceptos a algo real, a algo que puedan visualizar y comprender. Si bien es cierto que muchos alumnos de 4º de ESO pueden comprender la teoría sin la necesidad de realizar la actividad, sin embargo, esta ofrece profundizar en la materia y asimilar los conocimientos, ayudando a todos los alumnos, en especial a los que más dificultades les crea. Como actividad adicional se pide que ellos expliquen que o bien los enredos o bien las contradanzas son un grupo por medio de un video, en esta actividad ellos han de interiorizar la materia para poder explicarla, además utilizarán las TIC que toman un papel fundamental en la sociedad actual.

En todo momento se busca adecuar la dificultad al curso en el que se encuentra encuadrado el tema, incrementando la dificultad con el objetivo de que el aprendizaje sea lineal.

Matemática discreta en secundaria

En este capítulo se realizará un análisis de los contenidos relacionados a la matemática discreta que ya están contenidos en el currículo, y muchos conceptos de teoría de grupos, que es la parte de la matemática discreta en la que más se va a incidir en este trabajo. Para realizar este análisis se seguirán los contenidos establecidos en los temas de la editorial mareaverde, ya que debido a la situación en la que se está en la actualidad resulta muy complicado conseguir y tener prestado libros de otras editoriales, por lo que es necesario tomarlos por internet.

Se van a destacar los siguientes aspectos de la matemática discreta que aparecen en la editorial mareaverde, si bien es cierto que se pueden presentar otros según la editorial, pero la idea a tener en cuenta es que hay conceptos que están presentes, aunque no aparecen de manera implícita.

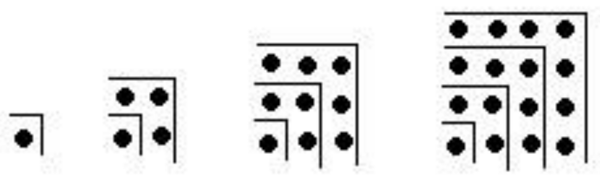
Números figurados

Los números figurados aparecen en los contenidos de 2º de ESO, y si bien es cierto que no se les da una gran importancia, son interesantes y parte de la matemática discreta. Con ellos se pueden realizar actividades interesantes y además son un tema que puede generar curiosidad en los alumnos.

Los números figurados surgen en la antigüedad, en concreto los griegos y los pitagóricos los utilizaban al representar los números con piedras o sobre la arena, ellos los dibujaban como triángulos, cuadrados, pentágonos…, representando cada número como una cantidad de elementos igual a su valor. Principalmente los pitagóricos eran quienes los usaban, para ellos los números naturales y su relación entre ellos (las fracciones), podían explicar cualquier realidad universal. Pitágoras afirmaba que “Todo es número”, de hecho, Hipaso de Metaponto fue desterrado al descubrir los números irracionales, debido a que demostró que la razón entre la diagonal del cuadrado y su lado no es una fracción. Existen fuentes que dicen que realmente él fue el que demostró el teorema de Pitágoras. Este tipo de historias que tienen detrás estos números añaden curiosidad a los alumnos a la hora de afrontar una actividad, de manera que la realizarán con más interés.

-Suma de los n primeros impares

Hay que destacar la ventaja que tienen estos números a la hora de realizar demostraciones visuales, que son de gran utilidad para comprender realmente las matemáticas y despertar la curiosidad y el interés de los alumnos. Se propone, por ejemplo, con los números cuadrados, mediante los cuales podemos demostrar visualmente que la suma de los n primeros impares es un número al cuadrado, concretamente n^2. Se puede ver que a medida que aumentamos el cuadrado lo que hacemos es añadir una L que su número de puntos o cuadraditos coincide concretamente con el siguiente número impar $(2n + 1)$, como se ve en la figura.



(1) (4= 2 x 2 = 1+3) (9 = 3 x 3 = 1+3+5) (16 = 4 x 4 1+3+5+7)

(*)Imagen tomada de ; Olivera, M. Los puntazos de Pitágoras. Recuperado de : http://www.geocities.ws/matesbueno/articulos/los_puntazos_de_pitagoras.htm

-Suma de los n primeros números

Otro ejemplo que puede ser muy interesante para los alumnos es realizar la suma de los n primeros números, y para esto se pueden utilizar los números triangulares. Para realizar esto de una manera más interesante se contaría la historia de Johann Carl Friedrich Gauss, en la que sumó los 100 primeros enteros y entre todos intentar llegar a la fórmula $\frac{n(n+1)}{2}$. Si bien es cierto que para 2º de ESO es de un nivel superior, buscamos principalmente fomentar el interés y la capacidad de abstracción por medio de actividades diferentes y visuales.

La siguiente figura muestra cómo se demostraría visualmente la suma de los n primeros números, con números triangulares:

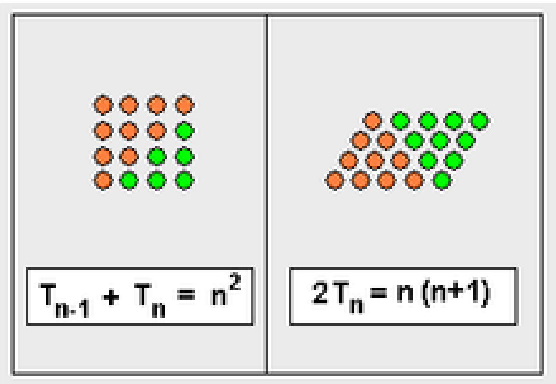


Imagen tomada de : Wikipedia. https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_triangular

Construyendo los números triangulares con fichas como en la figura, se denotará como T_n al número triangular de n filas que coincide con la suma de los n primeros números. Si se colocan como en la primera figura la suma de un número triangular con su anterior crea un cuadrado de lado n y, por tanto, su suma es igual al área del cuadrado, n^2. De otra manera si juntamos dos veces el mismo número triangular, formamos un rectángulo de lados n y $n+1$, por tanto

$$2T_n = n(n+1)$$

De aquí obtenemos la fórmula de la suma de los n primeros números:

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Además de estos existen muchos ejemplos de este tipo de demostraciones visuales que se pueden realizar con estos números, que pueden ser de gran utilidad para comprender conceptos en el futuro. Para realizar estas actividades se pueden utilizar materiales manipulativos como pueden ser regletas o Algetiles.

Conjuntos y operadores

A principio de curso, como norma general, se realiza un repaso de todos los conjuntos de números, los números naturales, enteros, racionales y reales, además de las operaciones que se realizan entre sus elementos, y esto se suele realizar en todos los cursos de ESO.

Es claro que los conjuntos y operadores forma parte de todas las áreas de las matemáticas, y por lo tanto de la que nos ocupa a nosotros, la matemática discreta, y en concreto es una de las primeras nociones para entender la definición de grupo. Un grupo es un conjunto con un operador que cumple una serie de propiedades como son la existencia de elemento neutro y de inverso de cada elemento del conjunto.

Se considerará entonces de importancia conocer cómo funcionan estos conjuntos y sus propiedades internas. En primer lugar, será beneficioso conocer el elemento neutro para la suma y para el producto dentro de estos conjuntos, el elemento inverso, que me hace volver al número anterior y lo mismo para otros operadores posteriores, como son las raíces, logaritmos, exponenciales, operadores trigonométricos, etc.

También será necesario conocer y comprender las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva de los diferentes operadores, y saber dominarlas para poder comprender elementos más complejos, en concreto la noción de grupo. Esto se suele explicar en todos los cursos de secundaria e incluso en alguno de primaria, y forma parte de la base de las matemáticas para saber realizar operaciones correctamente.

Toda esta parte es fundamental para poder comprender y trabajar en matemáticas, ya que es la base de todas las áreas. Es necesario que los alumnos sepan trabajar bien con fracciones, con la jerarquía de las operaciones, representar la recta real, comparar números, conocer en principio los decimales periódicos y puros y de ahí pasar a racionales e irracionales. Esto es la base de todo el saber de matemáticas.

Funciones

El tema de funciones se empieza a ver en 3º de ESO y luego se profundiza en 4º de ESO. En 3º se presta más atención a la representación y análisis de gráficas, que en ver las funciones teóricamente. En 4º de ESO se profundiza bastante más con el tema de funciones de manera teórica de manera que se conoce la composición, la inversa y se aprende a calcular los aspectos de la función de manera matemática y no atendiendo a la gráfica solamente.

Hay que destacar que el tema de funciones forma parte de muchas áreas de las matemáticas, en concreto de la matemática discreta y la teoría de grupos. En el caso que nos ocupa el operador composición será de gran utilidad en las actividades que se van a proponer posteriormente, a la hora de componer distintos movimientos.

En 3º de ESO el tema de funciones comienza mostrando a los alumnos como se representa un punto en los ejes cartesianos, para posteriormente introducir el concepto de función. Esta parte suele generar problemas debido a que es necesario abstraerse y entenderlo es difícil, a su vez no es sencillo encontrar actividades que lo refuercen acercándolo a una realidad palpable. Una vez entendido el concepto de función se comienza a ver cómo se representan en el plano coordenado, y como interpretar otras gráficas. Este tema se basa en saber representar una función y una vez representada analizar su crecimiento, decrecimiento y extremos absolutos y relativos. Por tanto, no se analiza matemáticamente la función salvo para calcular su dominio y su simetría, el resto consiste en la interpretación de gráficas de diferentes funciones.

-Bingo

Se considera necesario introducir en este tema alguna actividad representativa para que los alumnos no pierdan el interés y comprendan mejor este tema que es de gran importancia tanto en matemáticas como en otras asignaturas. Se van a proponer dos actividades a realizar con este tema y una manera de llevarlas a cabo y evaluarlas.

Se propone la realización de un bingo de 24 números y 24 tarjetas diferentes cuya solución corresponderá a un número. Los alumnos seleccionarán 9 números de los 24, 3 por fila de 8.

Las tarjetas tendrán preguntas del tipo:

- Hallar dada una función y el valor de x, el valor de y.
- Dadas las coordenadas de un punto de una recta y su ordenada en el origen calcular la pendiente.
- Sabiendo la pendiente y un punto, calcular la ordenada en el origen.
- Calcular un punto de corte con el eje x o y.
- Calcular el extremo de una parábola.

Se sacarán las tarjetas de una en una. Cada una de las tarjetas se resolverá por cada alumno y se explicará su solución. Es fundamental para realizarla otorgar algún premio al ganador y al que cante línea, así como por participar e intentar resolver las tarjetas, por ejemplo, se puede otorgar en el examen del tema 0,4 puntos al ganador del bingo y 0,2 al ganador de la línea, por otro parte se darán positivos a los alumnos que resuelvan y sean participativos en la actividad.

Esta actividad será realizada satisfactoriamente si vemos que los alumnos comprenden cómo se calculan los aspectos relativos a la ecuación de la recta, saber calcular un punto de la recta, su pendiente y su ordenada en el origen, evaluar una función en un punto, calcular puntos de corte… También será satisfactoria si los alumnos se muestran participativos e interesados en la actividad y por ende en el tema en cuestión. Cabe destacar que esta actividad se puede realizar con otros temas de la asignatura, por lo que si funciona con una clase se puede realizar en cada tema con el objetivo de mejorar el aprendizaje y el interés por la asignatura.

-Representar gráficas

Proponemos otra actividad para ayudar a interpretar y representar gráficas. Disponemos a la clase en grupos de 4, 6 u 8 alumnos y otorgamos una gráfica diferente a cada alumno sin que pueda verla ningún compañero. Posteriormente, otorgamos una ficha en la que cada alumno ha de rellenar con la descripción de la gráfica obtenida y una vez hecho, se retiran todas las gráficas. Cada alumno intercambiará su ficha con la de un compañero de equipo e intentará dibujarla. Se pueden realizar varias rondas de tantos minutos intercambiando las gráficas de un grupo a otro, con el objetivo de que sea igualado. Después de la actividad se realizará algún ejemplo en clase de las gráficas entregadas. El ganador será el grupo que más gráficas haya representado bien y será recompensado con lo que crea conveniente el profesor.

Se busca fomentar el interés del alumno y es fundamental premiar al ganador para incentivar la actividad y se esfuercen más en hacerlo bien. Se puede otorgar al grupo ganador 0,3 puntos en el examen del tema, también el profesor si cree necesario que el trabajo de algún alumno, a pesar de no haber ganado, ha sido bueno en cuanto a realizar bien la actividad o a esforzarse mucho, se le podrán dar puntos positivos en actitud.

El resultado se considerará satisfactorio si los alumnos aprenden a interpretar gráficas siguiendo los pasos necesarios, si trabajan para facilitar a los compañeros que sean capaces de poder representar la gráfica, si se esfuerzan en hacerlo bien y preguntan, si se ve una evolución y un aprendizaje durante la actividad, si disfrutan de la actividad y se divierten con sus compañeros, esto ayudará a que las próximas actividades se tomen con una mejor actitud.

Las actividades en grupo son muy beneficiosas, los alumnos pueden ayudarse unos a otros e intercambiar ideas, incluso divertirse de una manera sana. Existen otros tipos de actividades que pueden funcionar como podían ser cartas con funciones y sus respectiva descripción y gráfica, o un plano cartesiano en el que se juegue a destruir la flota entre otras.

El tema de funciones en 4º de ESO es más teórico y en él ya se presentan conceptos de inversos, elemento neutro y como se establece mediante la composición de una función y su inversa, todos ellos muy presentes en la teoría de grupos y en la base de las actividades principales de este trabajo. Este tema comienza explicando el concepto de función como la relación que se da entre dos magnitudes y cómo se puede representar matemática y gráficamente, para posteriormente, estudiar los diferentes aspectos como el dominio, recorrido, periodicidad, simetría, puntos de corte, inversa… A diferencia de 3º de ESO prácticamente todos estos puntos pueden ser calculados matemáticamente y no solamente interpretando la gráfica de la función. En el tema siguiente se enseñan los diferentes tipos de funciones, polinómicas, exponenciales, racionales…analizándolas de forma particular.

Durante el periodo en el que se realizó el prácticum este fue uno de los temas a impartir, se propuso como actividad diaria que un alumno de cada fila saliese a exponer todos los elementos de una función que se otorgaba a cada fila, los alumnos de las otras filas debían de copiar las otras funciones nuevas viendo que estaban correctas y los de su misma fila comprobarlo. Es una actividad que funcionó bastante bien hasta que no se pudo seguir realizando debido al confinamiento. Se propuso por tanto como una manera de evaluar durante el confinamiento la elaboración de un video en el cada alumno con una función distinta explicase cómo se calculaba todos los elementos de la función ayudándose de GeoGebra. El resultado fue muy satisfactorio ya que muchos alumnos se trabajaron un video en el que el lenguaje debería ser natural, y en el que demostraron que entendieron los conceptos.

Se propondrá una actividad en este trabajo mediante la que los alumnos asocien el movimiento composición, inverso, identidad… a la vida real mediante el uso de enredos y contradanzas, esto es, mediante la composición de diferentes movimientos. Por tanto, podemos relacionar este punto con el siguiente.

Movimientos en el plano y en espacio

Este tema aparece en el curso de 3º de ESO tanto de enseñanzas aplicadas como de enseñanzas académicas, por lo que se podría relacionar durante los cursos con el tema de funciones ya que es sencillo visualizar la composición como una concatenación de movimientos, y una función como el paso de una posición a otra por medio de un movimiento que sería la función. En la unidad didáctica que se propone se relacionarán estos conceptos con el fin de acercar ambos temas a la realidad y que los alumnos sean capaces de comprender conceptos teóricos más complejos de una manera más cercana y visual.

Pasemos a analizar los contenidos de este tema y su relación con la teoría de grupos. En primer lugar, vemos cuales son los diferentes tipos de isometrías, las semejanzas y como se componen las diferentes transformaciones geométricas. Una vez visto esto se habla de vectores, traslaciones y traslación inversa, conceptos que están relacionados con la teoría de grupos, como componer estas traslaciones para volver al punto inicial.

El apartado siguiente corresponde a los giros de ángulo α, este apartado tiene especial interés al ser un grupo cíclico en el que podemos encontrar el orden del grupo, el elemento neutro, el elemento inverso, la composición de diferentes giros… Este tema es muy útil para entender estos conceptos de una manera visual, ya que es muy sencillo poder representarlos en la vida real por medio del mismo cuerpo humano girando y los alumnos serán capaces de visualizar estos conceptos.

Por último, la simetría es un movimiento que es muy intuitivo para los alumnos, que suelen conocer este aspecto antes de ser explicado en clase. Mediante el grupo de las simetrías podemos vemos que realizando dos simetrías de mismo eje volvemos a la posición original, por lo que el orden del grupo es 2, podemos ver por tanto que el inverso de la simetría es otra simetría, componiendo dos simetrías tenemos la identidad… Por tanto, con las simetrías podemos introducir nociones de esta teoría sin entrar en detalles muy teóricos, pero que pueden ser de gran ayuda cundo se vean estos conceptos.

Hay que destacar que las isometrías, giros, traslaciones y simetrías son elementos fundamentales del álgebra básica que se estudia en muchas carreras universitarias y por lo que tener unos conceptos básicos de este tema es fundamental para poder comprender posteriormente estos conceptos que se vuelven muy teóricos y abstractos.

Este tema tiene una gran ventaja al poder elaborar muchas actividades relacionadas con el mundo real, por ejemplo, en muchos de los logotipos de las empresas más conocidas se pueden apreciar simetrías, traslaciones o giros y una actividad que se puede realizar en el aula es que los alumnos los encuentren y los determinen guiados por el profesor. Como esta se pueden realizar muchas otras actividades con diferentes imágenes de mosaicos, paisajes o elementos conocidos por los alumnos para encontrar estos movimientos, incluso dentro de la clase reorganizando las mesas utilizando diferentes movimientos como traslaciones o simetrías.

En este trabajo tiene una gran importancia los movimientos, ya que es la base de los enredos y las contradanzas, mediante los cuales se realizan giros y simetrías. Los enredos y contradanzas tienen estructura de grupo al utilizar como operador la composición, podemos obtener todas las propiedades necesarias para la estructura de grupo mediante la composición de dos movimientos, podemos generar todos los diferentes movimientos a partir de solamente dos, lo que se traduce en un grupo de generadores. Es de gran ayuda para abordar esta actividad, que los alumnos conozcan y comprendan este tema, y sean capaces de relacionarlo para poder comprender gran parte de las implicaciones teóricas de estas actividades.

Combinatoria

La combinatoria, el estudio de las posibles posiciones de los elementos, es una parte muy importante de la matemática discreta, ya era conocida en el siglo XVII debido a que en esta época se estudiaban los modelos combinatorios de los juegos de azar.

Este tema se estudia en 4º de ESO de enseñanzas académicas, en él se estudian las diferentes maneras de seleccionar un objeto: variaciones, permutaciones y combinaciones, con o sin repetición, y donde se presta especial atención a las propiedades de los números combinatorios. Este tema es de gran utilidad ya que proporciona la capacidad de contar el número de objetos en diferentes contextos.

Para realizar y entender bien el funcionamiento de este tema, es fundamental saber realizar e interpretar un diagrama de árbol, mediante el cual podemos llegar a todos los sucesos posibles, otro aspecto que también hay que tener en cuenta es conocer la regla de la multiplicación en combinatoria.

Este tema se divide en tres, permutaciones, variaciones y combinaciones. Es de gran ayuda para los alumnos esta disposición al ir pasando de menos a más, al principio en permutaciones las restricciones son menores que en variaciones y que en combinaciones. En cada caso varía si importa el orden, si se pueden repetir, el número de objetos con el número de plazas… y esto dificulta su comprensión.

Una gran ventaja que tiene este tema es que es muy visual, se puede acercar a la realidad de forma sencilla ya que existe miles de ejemplos de situaciones reales en los que se puede usar combinatoria. Por lo tanto, se propone en este tema la realización de acertijos de manera que fomente la curiosidad de los alumnos y el aprendizaje por descubrimiento, como el que se muestra a continuación que es conocido por todos.

- ¿Cómo cruzar el río?

Esta actividad se basa en el acertijo del lobo, la gallina y el maíz, un campesino lleva un lobo, una gallina y un saco de maíz, el campesino nunca puede dejar a los tres solos por razones obvias. En un momento de su trayecto se encuentra con un río y una barca en la que solo puede llevar a uno de los tres.

P1: ¿Cómo hará para cruzar el río?

Los alumnos deberán de elaborar un diagrama de árbol en el que puedan encontrar la solución y todos los demás caminos hasta que puedan realizarse.

Además de este acertijo, existen variantes que son más interesantes. Dos padre y dos hijos construyen una barca para cruzar el río, pero es débil y solo pueden ir montados o un adulto, o dos niños.

P2: ¿Cómo harán para llegar todos a la otra orilla?

P3: ¿Cuántos viajes como mínimo necesitarán para lograrlo? ¿Cuántos se necesitarán si hubiese tres niños?

Por último, se puede añadir el caso de dos parejas en las que el marido no puede dejar a la mujer sola con otro hombre.

P4: ¿Podías resolver este enigma?

Si hay algún alumno más interesado en el tema se podía estudiar el caso para mas parejas y preguntarse si tiene una relación matemática.

Esta actividad será de gran utilidad para aprender a elaborar diagramas de árbol, abstraerlos a la realidad y fomentar el interés, debido a la satisfacción resolver acertijos o enigmas y el esfuerzo recompensado. Además, funcionará como un ejercicio práctico en el que se valoraría de forma positiva en los puntos destinado a comportamiento y actitud en clase, y los resultados serían satisfactorios si se consigue aprender a elaborar diagramas de árbol y si los alumnos se han interesado y han estado participativos.

La combinatoria forma una parte fundamental de la teoría de juegos dentro de la matemática aplicada, por lo que existen números juegos que se pueden realizar e intentar buscar una manera en la que sea más fácil ganar. Se pueden utilizar monedas, cartas, tableros de ajedrez, se propone alguno como los siguientes:

- Se colocan 8 monedas en fila, de manera que hay que apilarlas saltando unas sobre otras hasta que queden 4 grupos de 2. Además, cada moneda ha de pasar sobre otras dos, en fila o apiladas. ¿Eres capaz de conseguir realizarlo?
- Se toma un tablero de ajedrez y 8 torres, ¿Puedes colocarlas de tal manera que ninguna pueda atacar a otra? ¿y con 4 reinas y 4 torres?
- En un tablero de 7x8 casillas (una fila menos que en el de ajedrez) se coloca una dama en la esquina superior izquierda. Cada uno de los dos jugadores puede mover en su turno una, dos o tres casillas en horizontal, y hacia abajo en vertical y diagonal. Gana el que consigue llegar a la esquina inferior derecha.
- En el encerado se escriben 10 unos y 10 doses, el profesor podrá jugar con un alumno. Cada jugador podrá borrar dos números en cada turno, si son iguales se convierte en un dos y si son distintos en un uno. El jugador que empiece gana si queda un uno y el otro jugador si queda un dos.

Como estos juegos existen muchos otros que se pueden realizar en clase y que tienen estrecha relación con este tema. Como en todas las actividades anteriores se pretende que los alumnos se interesen, tener una sesión diferente a la de teoría y problemas, y que aprendan de una manera más entretenida para ellos viendo que las matemáticas son útiles en la realidad para resolver determinados aspectos.

Conclusión

Como hemos visto la matemática discreta está presente en secundaria, pero no se le da importancia como tal a esta área de las matemáticas. En muchos de los aspectos seleccionados no se dan a conocer conceptos que son importantes dentro de las matemáticas y que posteriormente son de gran utilidad en múltiples estudios universitarios, en concreto en carreras en las que las matemáticas son una pieza fundamental.

Un aspecto que se ve reflejado en este análisis es la facilidad de adaptación de estos conceptos a la realidad por medio de actividades visuales y representativas para los alumnos, en las cuales se recobre el interés por las matemáticas. Como ya se ha dicho muchos autores afirman en la necesidad de introducir este tipo de actividades, y la matemática discreta ofrece esta facilidad.

Otro aspecto que no se ha podido destacar de la matemática discreta es su uso en la computación, debido a que no se introducen estos contenidos en el currículo de secundaria. En la actualidad con la revolución tecnológica que existe cabe plantearse la introducción de conceptos de este tipo acorde a la necesidad social en la que se vive, y la matemática discreta ofrece esta posibilidad.

En el capítulo siguiente se presenta una manera de introducir conceptos de teoría de grupos dentro del currículo, realizando una unidad didáctica de unas pocas sesiones con unas actividades que sirvan para ayudar a los alumnos a entender estos conceptos abstractos acercándolos a la realidad.

Enredos y contradanzas

En este capítulo se expone un ejemplo de una unidad didáctica mediante la cual se introduciría la matemática discreta, en concreto conceptos de teoría de grupos, en el currículo de 4º de ESO. Estos conceptos de teoría de grupos son abstractos y suelen presentarse dificultades cuando se estudian en carreras universitarias, se pretende acercarlo a secundaria, de forma sencilla, mediante actividades visuales y representativas para poder acercarlos a la realidad.

Justificación

El motivo principal, que responde a por qué introducir Teoría de grupos en el currículo, viene dado por la dificultad que supone a los alumnos estos conceptos en sus estudios universitarios. Este problema se debe a la falta de abstracción de los alumnos en matemáticas, por lo que introducir conceptos básicos de Teoría de Grupos ayudaría a mejorar la base necesaria para aprender álgebra en unos estudios superiores. Realmente con mejorar la base necesaria, para poder entender estos conceptos tan abstractos, sería suficiente.

La introducción de esta teoría en el currículo es muy difícil, es complejo demarcarla en una parte de los conocimientos que ya están establecidos y al igual que suprimir unos temas por otros. La mejor opción es introducirla en 4º de ESO, de forma posterior al tema de funciones y de corta duración, de manera que ya se puedan asociar con este tema por medio de las actividades que se proponen. Es muy complicado entredecir este tema en Bachillerato debido a la carga a la que ya se está expuesto y con un temario muy enmarcado.

Las funciones representan las relaciones entre conjuntos, en Teoría de Grupos es algo básico, se presentan unos motivos por los cuales se relacionarán en esta unidad didáctica:

- La noción de conjunto de elementos, cómo utilizar los conjuntos, que representan y cómo las funciones relacionan dichos conjuntos elemento a elemento.
- Un grupo es un conjunto con un operador que cumple una serie de condiciones, este operador será la composición de funciones para las actividades que se van a utilizar, realmente mediante funciones se puede representar cualquier operación.
- La función inversa, cómo se utiliza, qué representa. Esta se relaciona con que cada elemento tenga inverso.
- La función identidad, el elemento neutro en teoría de grupos. Profundizar en su uso que, aunque parezca simple, es necesario comprender bien su funcionamiento.
- Es necesario que el operador sea asociativo, y se puede comprobar que el operador composición es asociativo, pero no conmutativo.
- En las actividades que se presentan además de reafirmar lo dicho en los puntos anteriores podemos establecer un grupo libre, mediante un sistema de generadores formado por dos elementos, una manera de asociar estos conceptos a un nivel más alto.

Con esto se pretende introducir la noción de conjunto, de grupo, de elemento neutro, elemento inverso y la asociatividad y conmutatividad, conceptos que son abstractos, pero se pueden comprender con unos conocimientos básicos necesarios.

Pero ¿los alumnos podrán comprender estos conceptos? Responder a esta pregunta es muy complicado, ya que para ello es necesario tener una base de conocimientos bien formada para poder entender estos conceptos tan abstractos. Para intentar mejorar esta base se propone utilizar los materiales manipulativos, actividades visuales que les acerque los problemas a la realidad, juegos en clase y con dispositivos tecnológico y demás materiales que son muy útiles para recobrar el interés y facilitar el aprendizaje. Por ejemplo, para comprender bien las funciones es necesario un dominio de las ecuaciones en dos variables y materiales como Algeblocks son muy útiles para visualizarlas, comprenderlas y recordarlas. Realmente no va a resultar fácil que los alumnos entiendan esta teoría, pero si asimilar los conceptos de conjunto, operados, elemento neutro y elemento inverso, que son sencillos en principio y muy útiles en álgebra.

Se proporciona unas actividades en grupo, o en el caso de que haya distanciamiento de manera individual, en las que los alumnos primero podrán comprender las funciones mediante una actividad real, y posteriormente asociarla a teoría de Grupos como un medio para su fácil comprensión. Estas actividades se podrían introducir no sólo en 4º de ESO, sino en todos los cursos desde infantil hasta la universidad, aunque nos centraremos en desarrollarlos para este curso. Se puede introducir dentro del tema de funciones de 3º y 4º de ESO, e incluso en los temas de fracciones y operaciones con fracciones en 1º y 2º de ESO.

Por tanto, se propone el siguiente desarrollo de los contenidos, establecidos en 4º de ESO, aunque si bien es cierto que se puede establecer en otros cursos y se puede relacionar al tema de movimientos.

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
4º ESO		
Bloque: Matemática discreta		
Noción de conjunto y elemento de un conjunto. Relaciones entre conjuntos, producto cartesiano. Inverso y orden de un elemento. Elemento neutro de un conjunto. Concepto de operador, asociatividad y conmutatividad. Noción de grupo.	1. Conocer las definiciones de la teoría de grupos: conjunto, operador, elemento neutro, elemento inverso, propiedades del operador y definición de grupo. Aplicar las definiciones para ver si un conjunto con un operador forma estructura de grupo. 2. Conocer y saber establecer el elemento inverso y con el formar el elemento neutro de todas las formas posibles, y el orden de cada elemento. 3. Conocer las propiedades de los diferentes operadores y cómo se usan. 4. Aplicar estos conceptos a la vida cotidiana. 5.Utilización adecuada de las herramientas necesarias.	1.1. Conoce y aplica las definiciones. 1.2. Entiende las relaciones entre conjuntos. 1.3. Conoce la noción de grupo y sabe identificarlo. 1.4. Entender el concepto de orden de un elemento. 1.5. Entiende el lenguaje matemático utilizado. 2.1. Encuentra el elemento neutro e inverso. 2.2. Relaciona el elemento neutro con el inverso. 2.3. Calcula el orden de un elemento. 3.1. Reconoce las propiedades del operador y las utiliza. 3.2. Realiza las tablas de operación e identifica una LCI. 4.1 Relaciona los conceptos aprendidos a la vida real. 4.2. Entiende la relación de la actividad con la teoría. 5.1. Utiliza las TIC de manera responsable y eficaz. 5.2. Utiliza los elementos de aula en su beneficio.

Competencias básicas

La unidad didáctica se basa en programar por competencias, entonces se hará pie en fortalecer las competencias clave, siendo flexible para poder trabajar la naturaleza de la propia unidad.

Las competencias que se van a desarrollar, en orden de importancia son las siguientes:

Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología

Se señalan los siguientes puntos que se van a trabajar para fortalecer esta competencia:

a) Tener conciencia del uso de las matemáticas en la vida cotidiana, tanto como la importancia de la ciencia en la vida.
b) Comprender la realidad en la que se vive desde un punto de vista científico y riguroso.
c) Solucionar problemas y aprender a manejar conocimientos científicos y tecnológicos.
d) Comprender y manejar el lenguaje matemático en cualquier ámbito y contexto.
e) Saber identificar y manejar el lenguaje matemático tanto en clase como en la vida cotidiana.
f) Aplicar las estrategias de resolución de problemas en la vida real usando un enfoque matemático. También en otras asignaturas y cualquier situación problemática.

Esta competencia se va a desarrollar constantemente durante todas las sesiones, buscando acercar las matemáticas a la vida real, que es lo que se pretende con las actividades propuestas. También se pretende fortalecer el uso del lenguaje matemático y la capacidad de abstracción de los alumnos.

Competencia lingüística

Se señalan los siguientes puntos a trabajar en esta competencia:

a) Utilizar los conocimientos lingüísticos para buscar información.
b) Comprender el lenguaje matemático escrito y en general cualquier texto escrito.
c) Expresar de forma oral ideas, conceptos y procedimientos matemáticos de forma clara, ordenada y con sentido. En matemáticas como de forma general.
d) Escribir textos tanto en matemáticas como en otras áreas de manera clara, ordenada, con sentido y corrección.
e) Comprender las expresiones utilizadas para saber identificar ordenes, descripción, explicación, relato…

Se busca mediante la exposición oral de ejercicios en clase y mediante la realización de un video que los alumnos aprendan a expresarse de forma clara en matemáticas y de esta manera sean capaces de establecerse un esquema mental. La competencia lingüística es fundamental en la asignatura de matemáticas.

Que los alumnos se intenten explicar los conocimientos de forma oral siempre sirve para mejorar en la asignatura e interiorizar mejor los contenidos.

Competencia digital

Se señalan los siguientes puntos que se pretender reforzar para esta competencia:

a) Saber seleccionar de las diferentes fuentes de información.
b) Manejar diferentes tipos de herramientas digitales.
c) Saber utilizar la tecnología con responsabilidad.
d) Aprender a trabajar con información de diferentes fuentes.
e) Saber aplicar el manejo de estas herramientas digitales en la vida diaria y en el trabajo.

En esta unidad mediante el uso de diferentes tecnologías par realizar el video con el que se les evalúa se busca que aprendan a utilizar estos medios. Además, en clase se utilizarán otros elementos tecnológicos como GeoGebra, pizarra digital, calculadora…

Competencias sociales y cívicas

Los puntos que se pretenden reforzar son los siguientes:

a) Aprender a dialogar entre los compañeros, saber exponer sus ideas de manera ordenada e intentar llegar a un consenso entre todos.
b) Mostrar una participación activa e intentar ayudar a los demás en todos los ámbitos.
c) Valorar la riqueza de las diferentes opiniones e ideas.
d) Aprender a trabajar en equipo atendiendo a las necesidades del grupo y no solamente a las personales.

Mediante las actividades en grupo se pretende reforzar esta competencia, que sean capaces de ayudarse unos a otros aprendiendo y profundizando en la materia. Hay que destacar que durante las sesiones se abogará por el respeto entre los compañeros, con sus opiniones, el turno de palabra, etc.

Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor

Se pretenden reforzar los siguientes puntos:

a) Actuar con responsabilidad y con sentido ético.
b) Tener una constancia en el trabajo.
c) Optimizar todos los recursos de los que se disponga.
d) Capacidad de asumir la responsabilidad.
e) Capacidad de pedir ayuda cuando sea necesario.
f) Priorizar el interés grupal antes del personal.
g) Saber gestionar las diferentes alternativas con unos conocimientos previos.

Mediante el aprendizaje colaborativo se pretende fomentar estos aspectos, además de crear problemas abiertos de manera que tengan que pensar e investigar. Siempre se valorará la creatividad y el esfuerzo.

Aprender a aprender

Los aspectos que reforzar son los siguientes:

a) Saber identificar los diferentes potenciales de cada persona, como las inteligencias múltiples, estilos de aprendizaje…
b) Aplicar estrategias con el objetivo de mejorar el pensamiento crítico, creativo, emocional…
c) Evaluar la consecución de los objetivos del aprendizaje.
d) Tener conciencia de los procesos de aprendizaje.
e) Desarrollar estrategias para facilitar el aprendizaje y la comprensión de los contenidos.
f) Ser capaz de planificarse utilizando los recursos necesarios.

Mediante la sistematización de ejercicios, proporcionar problemas abiertos, utilizar elementos útiles, se pretende fortalecer esta competencia.

Conciencia y expresiones culturales

En esta unidad esta competencia no está muy presente, pero sí se pueden reforzar algunos aspectos:

a) Apreciar los valores de la historia y de la evolución del pensamiento científico.
b) Realizar trabajos de manera que sean estéticos y ordenados.
c) Aprender a valorar el patrimonio, ya se cultural, visual, escrito, histórico…

Metodología

En este apartado se van a presentar las principales metodologías que se van a utilizar, si bien es cierto que se pueden dar diferentes según el punto de vista de cada profesor. Las que se van a utilizar principalmente son las siguientes:

- **El método expositivo o lección magistral.** El profesor expone a los alumnos los conocimientos que se quieren impartir, estos conceptos han de estar lógicamente estructurados con la finalidad de facilitar información organizada siguiendo los criterios adecuados para tal fin. Esta metodología se suele utilizar en todos los temas y es fundamental que se desarrolle de manera óptima para que los alumnos tengan una buena primera toma de contacto con los conocimientos a aprender.
- **Estudio de casos.** Esta metodología se basa en encontrar un problema real, simplificarlo y motivar al alumno a resolverlo mediante un proceso de toma de decisiones. El profesor orientará a los alumnos en esta toma de decisiones para que encuentren las soluciones y logren el objetivo del aprendizaje. Sus características son:
  - Basarse en el caso como herramienta educativa.
  - Incluir preguntas críticas con el objetivo de estimular a los alumnos para que indaguen en la materia.
  - Considerar el trabajo en pequeños grupos.
  - Incorporar preguntas para estimular la discusión en los estudiantes en torno al caso.
  - Añadir actividades de seguimiento.
- **Aprendizaje basado en problemas (ABP).** Esta metodología se centra en que el estudiante aprenda, adquiera conocimientos, habilidades y actitudes a través de situaciones de la vida real. La finalidad es que los alumnos sean capaces de enfrentarse a situaciones y poder analizarla de la misma manera que lo harán en su vida profesional. En esta metodología el alumno es el principal protagonista de su aprendizaje. Esta será la metodología que se utilizará principalmente en la actividad junto con la siguiente.
- **Trabajo cooperativo.** Como su nombre indica esta metodología se basa en la cooperación, una estructura cooperativa de incentivo, trabajo y motivaciones. Se busca crear una interdependencia positiva alumno-alumno y alumno-profesor tanto en la evaluación individual como en el uso de habilidades interpersonales a la hora de actuar en pequeños grupos. Esta metodología ayuda a que los alumnos se unan, se cansen menos, que tengan mayor voluntad e iniciativa, que se apoyen entre ellos… En esta metodología es muy útil que se ayuden entre ellos, que se intenten explicar los conocimientos, de esta manera los conocimientos se instauran más fuertemente debido en parte a la interacción entre iguales y al uso de sus palabras para poder describir dichos conocimientos, estableciendo una idea más consolidada.

Temporalización

Debido a que los contenidos que se pretenden instaurar en el currículo son novedosos y no se conoce si puede funcionar o no, esta unidad no puede llevar más de dos semanas de clase.

Separaremos esta unidad en tres partes:

- Teoría y ejercicios: 4 sesiones de 50 minutos.

- Actividades de enredos y contradanzas: 3 sesiones de 50 min.
- Pequeño examen y visualización de videos: 1 sesión de 50 min.

En cada apartado se desarrollará la temporalización de cada parte, para que quede bien demarcado el tiempo que se pretende dedicar a cada parte.

Contenidos previos

Este tema se encuadra principalmente en el tercer trimestre de 4º de ESO, ya que para su óptimo desarrollo es de gran ayuda haber interiorizado conocimientos de otros temas que se imparten anteriormente.

En primera instancia es de gran ayuda conocer el concepto de conjunto de elementos, así como de los conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$. Estos conceptos se imparten durante toda la secundaria, principalmente al principio de cada curso. La noción de conjunto, unión e intersección se profundiza algo más en el tema de estadística y probabilidad de 3º de ESO donde se aprenden a utilizar los diagramas de Venn.

Para el correcto desarrollo del tema es fundamental que se haya comprendido el concepto de función, así como función inversa y función identidad. Para el correcto desarrollo de la actividad es necesario añadir también el concepto del operador composición.

Desarrollo de los contenidos

-Noción de conjunto

Temporalización

Este apartado se desarrollará en una sesión de clase, de la siguiente manera:

Contenido	Tiempo
Clase magistral	25 min
Ejercicios con el profesor	15 min
Ejercicios para clase y casa	10 min

Definición 1. Un **conjunto** en matemáticas es una colección de elementos, que tienen una característica en común. De esta manera sabremos si un elemento pertenece o no al conjunto. Un conjunto es finito si tiene un número determinado de términos, un conjunto es infinito si tiene infinitos términos.

Diremos que $x \in X$ para decir que un elemento x pertenece al conjunto X.

Decimos que el conjunto A está contenido en B, y lo escribimos como $A \subset B$, si todo elemento de A está en B. En caso contrario decimos que A no está contenido en B, y lo denotamos como $A \not\subset B$.

Ejemplo: Llamemos $F = \{pera,\ manzana, uva\}$, un conjunto de tres elementos de tres frutas de manera que $pera \in F$, pero $perro \notin F$.

Definición 2. La **unión** de dos o más conjuntos es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a ambos conjuntos. La unión de los conjuntos A y B se denota $A \cup B$.

Definición 3. La **intersección** de dos o más conjuntos es el conjunto formado por todos los elementos que tienen en común. La intersección de los conjuntos A y B se denota $A \cap B$.

Ejemplo: Sean $A = \{perro, gato, conejo\}$, $B = \{perro, canario, iguana\}$ y $C = \{canario, iguana\}$. Se tiene:

- $A \cup B = \{perro, gato, conejo, canario, iguana\}$, $A \cap B = \{perro\}$.
- $A \cup C = \{perro, gato, conejo, canario, iguana\}$, $A \cap C = \{\emptyset\}$.
- $B \cup C = \{perro, canario, iguana\}$,$B \cap C = \{canario, iguana\}$

Definición 2. El producto cartesiano de dos conjuntos X e Y, es el conjunto $X \times Y$ con elementos (x, y) tal que $x \in X$ e $y \in Y$.

Dos elementos $(x, y) \in X \times Y$ y $(x', y') \in X \times Y$ son iguales si y sólo si $x = x'$ e $y = y'$.

Ejemplo: Sea $F = \{pera, manzana, uva\}$ y $G = \{perro, cabra, vaca\}$. Entonces tenemos que $(pera, cabra) \in F \times G$, pero $(pera, gato) \notin F \times G$.

Ejercicios:

1. Considera los siguientes conjuntos y completa con $\in$ y $\notin$:

El conjunto $A = \{coche, tren, avión\}$.

$$tren \ldots . A, autobus \ldots .. A, coche \ldots \ldots A$$

El conjunto $B = \{múltiplos\ de\ 3\} = \{x \in \mathbb{N}: x = 3n, n \in \mathbb{N}\}$

$$3 \ldots .. B, 8 \ldots \ldots B, 24 \ldots \ldots . B, 43 \ldots \ldots B$$

El conjunto C formado por las cifras del número 325.014.

$$1 \ldots \ldots C, 2 \ldots \ldots C, 6 \ldots \ldots C, 7 \ldots \ldots C, 0 \ldots \ldots C$$

2. Indica si los siguientes conjuntos son finitos o infinitos, en el caso de ser finitos indica si son vacíos o no:

-$A = \{x: x\ es\ múltiplo\ de\ 5\}$
-$B = \{x: x\ es\ un\ número\ natural\ en\ 4\ y\ 5\}$
-$C = \{x: x\ son\ los\ dinosaurios\ vivos\ en\ la\ actuaidad\}$
-$D = \{x: x\ es\ un\ número\ impar\}$

3. Considerando los siguientes conjuntos F y G completa con los símbolos $\subset, \not\subset$.

$$F = \{x: x\ es\ un\ número\ natural\ y\ n \leq 10\},$$
$$G = \{x: x\ es\ un\ número\ natural\ par\ y\ x \leq 10\}$$

$$F \ldots \ldots . G \qquad G \ldots \ldots . F$$

4. Si $A = \{a, b, c, d, e\ f\}$ y $B = \{a, b, e, g, h\}$ entonces marca si cada una es correcta con un tick:

-$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$
-$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, a, b, e, g, h\}$
-$A \cup B = \{a, b, e\}$

5. Si $C = \{10,20,30,40,50\}$ y $D = \{100,200,300,400,500\}$ marca con un tick si es correcta:

-$C \cap D = \{10,20,100,200\}$
-$C \cap D = \emptyset$
-$C \cap D = \{10,20,30,40,50,100,200,300,400,500\}$

6. Determinar la intersección del conjunto de los 20 primeros números pares y los 10 primeros múltiplos de 3. Determinar la intersección de este con el de los 10 primeros múltiplos de 5.

7. Completa la siguiente frase: "Si $A \subset B, entonces\ A \cup B =$…."

8. Si $A = B$ entonces $A \cup B$ es:

-Vacío
-Es A o B.
-No se puede determinar.

9. Completa la siguiente frase: "Si $A \subset B$, entonces $A \cap B =$……".

-Operadores

Temporalización

Este apartado se desarrollará en una sesión de clase, de la siguiente manera:

Contenido	**Tiempo**
Corrección de ejercicios por parte de los alumnos en clase	10 min
Clase magistral	25 min
Ejercicios con el profesor	10 min
Ejercicios para clase y casa	5 min

Definición 3: Un **operador** es un símbolo matemático que representa una operación matemática. Un operador permite reconocer la operación con su respectiva regla de definición.

Vamos a separar los operadores matemáticos en dos tipos:

-Operadores clásicos: en este grupo tenemos los operadores ya conocidos, la suma, resta, multiplicación, división, raíz cuadrada…

-Operadores arbitrarios: son los no conocidos y según se presentan se tendrá que mostrar una norma a seguir utilizando los operadores clásicos. Por ejemplo, definimos el operador triángulo como:

$$a \vartriangle b = \frac{a+b}{3}$$

Añadiremos la siguiente historia para aumentar la curiosidad de los alumnos:

Los símbolos han ido cambiando a lo largo de la historia. En el año 2000 a.C. los babilonios utilizaban métodos de algebra para resolver problemas, pero no utilizaban operadores matemáticos.

Para llegar a cuándo se empezó a utilizar los símbolos + y -, tenemos que irnos al año 1489 d.C., pero no se empezaron a utilizar con normalidad hasta el año 1544 d.C. El símbolo igual se empezó a utilizar en Inglaterra por Robert Recorde en 1557. El símbolo de multiplicar con el punto no surge hasta el 1600 y el símbolo de la división no aparece hasta 1659.

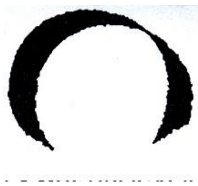
Pero ¿a quién podemos atribuir el mérito de la representación simbólica en matemáticas? Posiblemente sería al matemático francés Vieta, él fue el que empezó a utilizarlas letras para representar los números desconocidos.

Veamos el origen de los principales operadores:

- Adición: El calculista del Renacimiento Tartaglia utilizó la primera letra del italiano piú (más) para representar la adición. El signo + es una forma abreviada del latín et(y). El símbolo original era este:

- Sustracción: Este signo menos fue utilizado en los tiempos griegos por Diofanto. Nuestro símbolo de sustracción puede derivar de una barra que utilizaban los comerciantes medievales. El símbolo era el siguiente:

- Multiplicación: Nuestro signo x, basado en la cruz de San Andrés, ya se conocía cuando el signo arriba representado fue utilizado por Leibniz en la Alemania del S. XVII.



- División: En la Francia del siglo XVIII, J. E. Gallimard utilizó esta D invertida para la división. El signo que utilizamos puede provenir de la línea fraccionaria adomada con dos puntos.

Durante el resto del tema se utilizará un conjunto junto a un operador, por ejemplo, el conjunto de los números naturales y la operación suma, y lo escribiremos de la siguiente manera:

$$(\mathbb{N}, +)$$

El operador establece las relaciones que se pueden dar entre los elementos del conjunto.

Definición 4. Un operador # es **asociativo** en un conjunto A, si para tres elementos $a, b, c \in A$, se tiene que:

$$a\#(b\#c) = (a\#b)\#c$$

Por ejemplo, si tenemos el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, el operador suma $+$ es asociativo.

Definición 5. Un operador # es **conmutativo** en un conjunto A, si para dos elementos $a, b \in A$, se tiene que:

$$a\#b = b\#a$$

Por ejemplo, en el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, el operador suma $+$ es conmutativo.

También, en los números naturales $\mathbb{N}$ y en los enteros $\mathbb{Z}$, el operador multiplicación es conmutativo ya que $a \cdot b = b \cdot a \, \forall \, a, b \in \mathbb{Z}$.

Ejercicios:

1. Si $a \# b = a - b + 2$. Calcula:

   -5 # 3
   -7 # 9
   -1 # 3

2. Si $a \,\&\, b = 3a - 5b$. Calcula: $6 \,\&\, 8$.

3. Si $a\varphi b = a^b$. Calcula: $4\varphi 5$.

4. ¿Es conmutativa la sustracción en $\mathbb{Z}$?

5. ¿Qué sucede con la sustracción en $\mathbb{N}$?

6. En el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, ¿Es asociativa la sustracción, la multiplicación y la división?

7. Si $a\varphi b = a^b$ y $A = \{0,1,2,3\}$.

- ¿Con qué elemento b del conjunto A se obtiene $a\varphi b = a$?, con a cualquier elemento de A.

- Con el b obtenido en el apartado anterior, ¿Qué elemento c del conjunto A hace que $2\varphi c = b$?

-Elemento neutro y elemento inverso

Temporalización

Este apartado se desarrollará en una sesión de clase, de la siguiente manera:

Contenido	Tiempo
Corrección de ejercicios por parte de los alumnos en clase	10 min
Clase magistral	20 min
Ejercicios con el profesor	10 min
Ejercicios para clase y casa	10 min

Definición 6. Sea A un conjunto, y sea # un operador. Decimos que en A existe una ley de composición interna # y lo llamaremos LCI si tomamos dos elementos de A, el elemento que se obtiene al operar esos dos elementos también va a pertenecer al conjunto A. Esto es:

$$\forall a, b \in A, a\#b \in A$$

Ejemplo: El conjunto $A = \{0,1\}$, la operación multiplicación es una LCI ya que:

$$0 \cdot 0 = 0 \in A, 0 \cdot 1 = 1 \in A, 1 \cdot 0 = 0 \in A, 1 \cdot 1 = 1 \in A$$

Definición 7. Si # es un operador que es LCI en el conjunto A, existe un elemento ε del conjunto A, tal que se cumple que

$$a\#\varepsilon = \varepsilon\#a = a,$$

para cualquier elemento a del conjunto A. A este elemento le llamaremos **elemento neutro** de $(A, \#)$.

Ejemplo: En el ejemplo anterior el elemento neutro es el 1, ya que cumple la propiedad de la definición.

Definición 8. Sea # es un operador que es LCI en el conjunto A, y ε el elemento neutro de $(A, \#)$. Sea a un elemento de A, al elemento $b \in A$ que cumple que

$$a\#b = b\#a = \varepsilon$$

le llamaremos **inverso** del elemento a. Podemos denotar el inverso de a como a^{-1}.

Ejemplo: En el conjunto del ejemplo anterior el 1 tiene inverso y es el mismo, pero el 0 no tiene inverso, ya que no se puede multiplicar por 0 y obtener 1.

Ejercicios:

1. Dada la siguiente tabla, donde se aplica una LCI en el conjunto $A = \{a, b, c\}$, responde a las preguntas:

#	**A**	**b**	**c**
a	A	b	c
b	B	c	a
c	C	a	b

- ¿Esta LCI es asociativa?
- ¿Cuál es el elemento neutro?
- ¿Cuál es el inverso de cada elemento?
- ¿Es conmutativa esta LCI?

2. Tenemos la siguiente LCI para el conjunto $M = \{0,1,2,3\}$:

#	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Averigua si existe elemento neutro para esta LCI. Si existe elemento neutro calcula el inverso de cada uno de los elementos de M.

3. Dada la siguiente ley de composición, calcula el inverso de b y c:

#	**a**	**b**	**c**
A	a	b	c
B	b	b	a
C	c	a	c

4. Cuando tenemos el operador multiplicación ¿qué número se intuye que va a ser el elemento neutro? ¿Por qué multiplicaríamos a cualquier número para obtener este elemento neutro?

5. Cuando tenemos el operador adición, ¿qué número se intuye que es el elemento neutro? ¿Cómo se obtendrá el inverso de un número para la suma?

-Noción de Grupo

Temporalización

Este apartado se desarrollará en una sesión de clase, de la siguiente manera:

Contenido	Tiempo
Corrección de ejercicios por parte de los alumnos en clase	10 min

Clase magistral	15 min
Ejercicios con el profesor	15 min
Ejercicios para clase y casa	10 min

Definición 9. Un conjunto G en el que se ha definido una ley de composición interna $\#$, es un **grupo** si se cumplen las siguientes propiedades:

i) Se cumple la propiedad asociativa en G. Esto es:

$$\forall\, a, b, c \in G, a\#(b\#c) = (a\#b)\#c$$

ii) Existe un elemento neutro ε de G para $\#$ de manera que:

$$a\#\varepsilon = \varepsilon\#a = a, \forall a \in G.$$

iii) Todo elemento de G tiene inverso. Esto es:

$$\forall a \in G, \exists\, b \in G \text{ tal que } a\#b = b\#a = \varepsilon.$$

Ejemplo: En el ejercicio 1 anterior tenemos la LCI para el conjunto $A = \{a, b, c\}$ de la siguiente manera:

#	**A**	**B**	**c**
a	A	B	c
b	B	C	a
c	C	A	b

Veamos que se cumplen las tres propiedades:

i) Propiedad asociativa:

$$a\#(b\#c) = a\#(a) = a$$

$$(a\#b)\#c = (b)\#c = a$$

Por tanto, $a\#(b\#c) = (a\#b)\#c$ y se cumple la propiedad asociativa.

ii) Existencia del elemento neutro:

Se puede ver que a es el elemento neutro ya que:

$$a\#a = a \qquad b\#a = a\#b = b \qquad c\#a = a\#c = c$$

iii) Veamos que todo elemento tiene inverso:

Para a:

$$a\#a = a$$

Por tanto el inverso de a es el mismo, o sea, $a.\ a^{-1} = a$.

Para b:

$$b\#c = c\#b = a$$

Por tanto el inverso de b es c, $b^{-1} = c$. Y si c es el inverso de b, entonces el inverso de c es b, $c^{-1} = b$.

Ejemplo: Ver si el conjunto $G = \{a, b, c\}$ es un grupo con la siguiente LCI:

#	A	B	c
a	A	C	b
b	C	B	a
c	B	C	a

i) Veamos si se cumple la propiedad asociativa:

$$a\#(b\#c) = a\#(a) = a$$
$$(a\#b)\#c = (c)\#c = a$$

Se cumple la propiedad asociativa en este caso, si cambiamos el orden no se cumple:

$$b\#(c\#a) = b\#(b) = b$$
$$(b\#c)\#a = (a)\#a = a$$

Por tanto, no se cumple la propiedad asociativa y no es grupo.

ii) Vemos que tampoco existe el elemento neutro, ya que a cada elemento le lleva otro diferente a el mismo, es decir:
Para a, $a\#a = a$. Pero $b\#a \neq b$ y por tanto no existe el elemento neutro.

Definición 10. Sea G un grupo finito, y sea ε el elemento neutro de G. Se define el **orden** de un elemento como el número de veces que se opera con el mismo para obtener ε.

Ejemplo: En el grupo anterior el orden de los elementos es el siguiente:

El orden de a es 1 ya que el mismo es el elemento inverso.

Calculemos el orden de b:

$$b\#b = c, c\#b = a$$

Por tanto, el orden de b es 3, ya que $b\#b\#b = a$.

Para c es igual:

$$c\#c = b, b\#c = a$$

Y por tanto el orden de c es 3.

Ejercicios:

1. Ver si los conjuntos dados junto con su LCI en los ejercicios 2 y 3 anteriores son grupo.

2. Dado $A = \{-1,1\}$ con la operación multiplicación, se pide realizar la tabla de la multiplicación y ver si forma un grupo. ¿Se cumple la propiedad conmutativa?
3. Demostrar si el conjunto $B = \{a, b\}$, con la siguiente LCI es grupo:

#	a	b
a	a	a
b	a	b

4. Demostrar si el conjunto $C = \{a, b\}$, con la siguiente LCI es grupo:

#	a	b
a	b	b
b	b	b

5. Ver que el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, con la operación adición, que cumple que es una LCI es un grupo.

Actividad enredos

Todos los conocimientos que se han ido introduciendo hasta ahora no son sencillos, pero tampoco son muy complicados. La principal dificultad recae en la abstracción para entender los conceptos y en ocasiones también en el dominio del lenguaje matemático. Para reforzar esto se proponen dos actividades mediante las que los alumnos puedan visualizar estos conocimientos acercándolos a la vida real por medio de enredos y contradanzas.

La manera de realizar esta actividad puede variar según la situación en la que se viva en la actualidad, ya que si existe distanciamiento social no se pueden realizar actividades en grupo y esto siempre perjudica el aprendizaje de los alumnos. Se establecerán las dos maneras de hacerla para según qué situación.

En el caso de realizar la actividad de manera individual, cada alumno necesitará cuatro cartulinas de diferente color para identificar la posición de cada elemento, cuatro objetos distintos, en nuestro caso se representa con peluches, pero se pueden usar chapas, fichas, figuras, etc. y dos cintas o cuerdas de unos 30 cm.

Se desarrollará la actividad en grupo que es como se considera más fructífera, para ello en primera instancia se coloca a 4 alumnos en frente de la clase formando un cuadrado y demarcando la posición de cada uno. Se les da a los alumnos dos cuerdas y cada uno cogerá un extremo de manera que las cuerdas estén paralelas a la clase. Esta será la posición inicial, se muestra en la figura representándolo con objetos, ellos lo harán posteriormente con el trabajo para casa.

Representaremos la posición inicial como la posición 0. Nótese que la posición 0 será la posición en la que dos cuerdas están desenredadas en paralelo en frente de la clase, por tanto, cualquier posición en la que las cuerdas estén en paralelo en frente de la clase es la posición 0.

-Movimientos

1. Posición original: Se asigna a cada uno de los cuatro alumnos las letras A, B, C y D, o las iniciales de sus nombres. Las líneas representan las cuerdas A cogerá un extremo y B el otro de la primera cuerda, y para la segunda B un extremo y C el otro, formando un cuadrado. Llamaremos 0 a la posición original.

Todas las imágenes de este capítulo son de elaboración propia del trabajo.

2. Cruce: El alumno D cambiará su posición con el alumno C, siempre sin soltar el extremo de la cuerda, esto es C pasa a la posición estrella y D a la posición círculo, como se muestra en la figura.

3. Rotación: Los 4 alumnos rotan en sentido de las agujas del reloj una posición hacia la izquierda del cuadrado, sin soltar las cuerdas. Los que produce una rotación de la forma inicial como muestra en la figura.

Los alumnos que estén en frente de la clase realizarán los movimientos varias veces para que queden claros y se repartirá la clase en grupos de 5 donde 4 de ellos realizan la actividad y uno realiza la anotación de las posiciones y dirige al resto.

A cada alumno se le proporcionará unas hojas para rellenar y en la que se desarrolla la actividad, el contenido sería muy similar al que se expone a continuación. Cabe destacar que en cada paso que se realice se ha de pausar la actividad y el profesor ha de explicar lo que se realiza y la relación con la teoría expuesta en clase.

-Desarrollo de la actividad

Primero es necesario establecer una relación matemática a los movimientos que se acaban de exponer. Para ello se utilizarán las siguientes reglas, donde partiendo de un número cualquiera llegamos al número 0, es decir, la posición inicial:

Sea $\frac{m}{n}$ una fracción se realizan los siguientes pasos:

1) Si el número es positivo tomamos el recíproco: ($\frac{m}{n} \to -\frac{n}{m}$).
2) Si el número es negativo sumamos 1.
3) Continuar con las reglas 1) y 2) hasta llegar a 0.

Ejemplo:

Dada la fracción $\frac{3}{5}$.

Usamos la regla 1: $\frac{3}{5} \longrightarrow \frac{-5}{3}$

Usamos la regla 2: $\frac{-5}{3} + 1 = \frac{-5}{3} + \frac{3}{3} = \frac{-2}{3}$

Usamos la regla 2: $\frac{-2}{3} + 1 = \frac{-2}{3} + \frac{3}{3} = \frac{1}{3}$

Usamos la regla 1: $\frac{1}{3} \longrightarrow \frac{-3}{1} = -3$

Usamos la regla 2: $-3 + 1 = -2$

Usamos la regla 2: $-2 + 1 = -1$

Usamos la regla 2: $-1 + 1 = 0$

Llegamos a donde queríamos.

Ejercicio 1. Siguiendo las reglas anteriores hacer que la fracción $-\frac{2}{5}$ llegue a 0.

Estas reglas corresponderán a los movimientos aprendidos, por tanto, tenemos:

1) Realizar el recíproco equivale a realizar una rotación. Por tanto, si tenemos una posición equivalente a un número positivo realizamos una rotación.
2) Sumar 1 equivale a realizar un cruce. Por tanto, si tenemos una posición equivalente a un número negativo hacemos un cruce.

Pregunta: ¿A qué número equivale la posición original?

Ejercicio 2. Entre todo el grupo establecer una serie de cuatro movimientos y escribirla.

Ejemplo: Cruce, cruce, rotación, cruce

Si partimos de la posición original, ¿a qué número equivale la posición obtenida al realizar la serie de movimientos?

Se realizan dos cruces consecutivos, por lo tanto 0+1+1=2, posteriormente una rotación luego se toma el recíproco $2 \longrightarrow \frac{-1}{2}$ *y por último el cruce en el que sumamos 1, por tanto, tenemos* $\frac{1}{2}$. *Haremos que la clase lo vaya haciendo según realizamos cada movimiento.*

¿Qué movimiento tendremos que realizar para volver a la posición original?

Partimos de $\frac{1}{2}$, *primero entonces se tendrá que realizar el recíproco, que es hacer una rotación y tenemos* $\frac{1}{2} \longrightarrow \frac{-2}{1} = -2$. *Por tanto, ya sólo queda hacer dos cruces para volver a la posición original, lo que sería sumar dos veces 1,* $-2+1+1=0$.

Pregunta en clase: Hay que relacionar estos movimientos con lo aprendido en clase, por tanto: ¿Cuál será el conjunto de elementos?
Se tiene un conjunto de dos movimientos que equivalen a realizar una operación (lo que serían dos funciones) por lo tanto nuestro conjunto será $G=\{r,c\}$ donde r es la rotación y c es el cruce. Los elementos del conjunto son movimientos que llevan de una posición a otra, por lo tanto, son como una función.
¿Cuál será el operador que utilizaremos?
Como estamos realizando secuencias de movimientos, se relaciona con la composición de funciones, en el caso que nos ocupa de movimientos por lo que se tendrá el operador composición.

Por tanto, se tiene un conjunto y un operador. ¿Se puede ver qué forma un grupo? Vamos paso por paso. Primero veamos si podemos definir matemáticamente la función rotación y la función cruce.

Ejercicio 2. Ya hemos visto que la función cruce equivale a sumar uno, por tanto, ¿cómo podemos definir matemáticamente $c(x)$?

$$c(x)=x+1.$$

De la misma manera hemos visto que la rotación equivale a hacer el reciproco, entonces, ¿cómo se puede definir matemáticamente $r(x)$?

$$r(x)=\frac{-1}{x}.$$

Ejercicio 3. Si partimos de la posición original y realizamos una rotación, ¿qué movimiento o secuencia de movimientos habrá que hacer para volver a la posición inicial?

Habrá que realizar otra rotación.

Por lo tanto, ¿cuál es el inverso del elemento r o de la rotación?

$$r^{-1}=r$$

Si partimos de la posición original y realizamos un cruce, ¿qué movimiento o secuencia de movimientos habrá que realizar para volver a la posición original? (esto es difícil de intuir por lo que puede ser de ayuda guiar a los alumnos y que ellos realicen los movimientos y los cálculos necesarios)

Habrá que realizar rotación, cruce, rotación, cruce, rotación

Por lo tanto, ¿cuál es el inverso del elemento c o del cruce?

$$c^{-1}=r\circ c\circ r\circ c\circ r$$

(Hay que destacar a los alumnos cómo se van a denotar estos movimientos, de la misma manera que las funciones, estando a la derecha del todo el primer movimiento que se realiza)

Puede parecer que el inverso de c sea $c^{-1}(x)=c\circ r$ ya que realizándolo con las cuerdas funciona. Comprueba matemáticamente que $c^{-1}(x)\neq c\circ r$:

$$c\circ r\circ c(x)=c\circ r(x+1)$$

$$
\begin{aligned}
&= c(\frac{-1}{x+1}) \\
&= \frac{-1}{x+1}+1 \\
&= \frac{x}{x+1}
\end{aligned}
$$

Entonces, ¿Por qué cuando se realiza con las cuerdas se llega a la posición original?

Debido a que al partir de la posición original es como si evaluamos en 0:

$$c \circ r \circ c(0) = \frac{0}{0+1} = 0.$$

Ya se tienen por tanto los inversos de los dos elementos, pero falta el elemento neutro.
Pregunta: Si tenemos una función f, ¿qué ocurre si la componemos con su inversa?

Que obtenemos la función identidad: $f \circ f^{-1} = Id.$

Ejercicio 3. ¿Podría dar dos secuencias de movimientos de manera que partiendo de la posición original se vuelva a la posición original?

$$r \circ r \qquad\qquad r \circ c \circ r \circ c \circ r \circ c$$

¿Serán estas dos secuencias el elemento neutro? Compruébalo matemáticamente usando el valor de $r(x)$ y $c(x)$:

Comprobación matemática:

$$
\begin{aligned}
r \circ c \circ r \circ c \circ r \circ c(x) &= r \circ c \circ r \circ c \circ r(x+1) \\
&= r \circ c \circ r \circ c\left(\frac{-1}{x+1}\right) \\
&= r \circ c \circ r(\frac{-1}{x+1}+1) \\
&= r \circ c \circ r(\frac{x}{x+1}) \\
&= r \circ c(\frac{-x-1}{x}) \\
&= r(\frac{-x-1}{x}+1) \\
&= r(\frac{-1}{x}) \\
&= \frac{-x}{-1} \\
&= x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r \circ r(x) &= r\left(\frac{-1}{x}\right) \\
&= \frac{-x}{-1} \\
&= x
\end{aligned}
$$

Hasta aquí ya se ha visto que los enredos tienen elemento inverso, y elemento neutro, sólo quedaría ver si la composición de estos movimientos es asociativa. En el tema de funciones se ha de ver que la composición de funciones es asociativa, por tanto, en este caso sí que lo es. Se pide a los alumnos que practiquen con movimientos, de manera que ellos vean que la composición de estos movimientos es asociativa.

Pregunta: ¿El conjunto $G = \{r, c\}$ con la operación composición $(G,\circ)$ es u grupo?

Sí, es un grupo ya que $\circ$ *es una LCI y se cumplen las tres condiciones para ser grupo.*

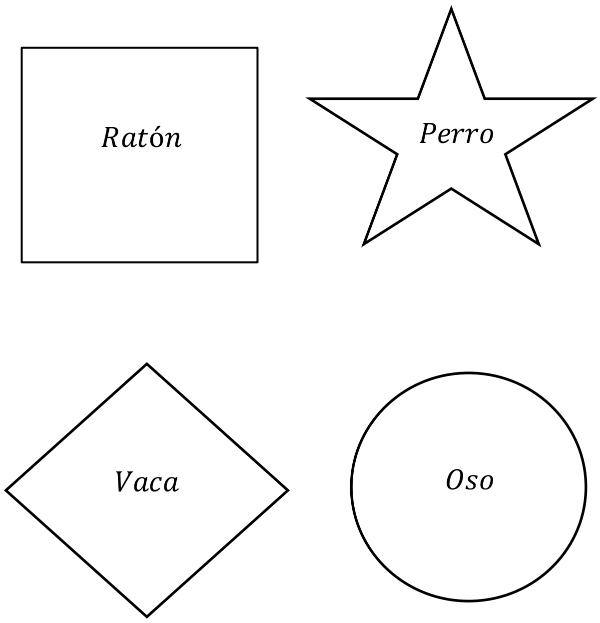
Actividad contradanzas

La base de la actividad de contradanzas es la misma que la de enredos, acercar esta teoría abstracta a la realidad. Para realizar esta actividad operamos de la misma forma, o de manera individual o en grupos según la situación de la actualidad.

Como en la actividad de enredos, nos separamos en grupos de 5. Llamaremos a cada alumno de cada grupo de la siguiente manera, se podrán denotar como el nombre propio de cada alumno, facilitando su resolución y escribiendo primero siempre la posición inicial, no es tan importante escribir bien la solución, sino asimilar los conceptos que se pretenden:

1. Líder 1 ($Ratón$)
2. Seguidor 1 ($Perro$)
3. Líder 2 ($Vaca$)
4. Seguidor 2(Oso)
5. Orador

Nos colocaremos como en las anteriores actividades de contradanza, formando un cuadrado los cuatro primeros, y mirando hacia el centro del cuadrado. El orador se situará fuera del cuadrado, pero mirando frente a él como se muestra en la figura:



Orador

-Movimientos de contradanzas

Se procederá a explicarles los movimientos de contradanzas, para ello saldrán en frente de la clase un grupo de 4 con los que mostrar los diferentes movimientos. Es fundamental que se practiquen durante unos minutos para familiarizarse con ellos.

1. *Cuarto de círculo a la izquierda:* Consiste en rotar una posición en sentido de las agujas del reloj, ocupando la posición que tiene el compañero de la izquierda. Como se muestra en la figura.

2. *Medio círculo a la izquierda:* Rotamos dos posiciones hacia la izquierda, ocupando la segunda posición correspondiente hacia la izquierda.

3. *Cadena:* El alumno en la posición del rombo cambia con el de la estrella.

4. *Un cuarto de círculo a la derecha.* La formación del cuadrado rota 90° en sentido contrario a las agujas del reloj. Cada alumno se mueve a la posición de la derecha.

5. *Medio círculo a la derecha*. La formación del cuadrado rota 180° en sentido contrario a las agujas del reloj. Cada alumno se mueve dos posiciones a la derecha.

6. *Derecha-izquierda*. El alumno en la posición del cuadrado cambia su posición con el de la estrella, y el alumno en la posición del rombo con el del círculo. (Los de la izquierda se cambian por los de la derecha).

7. *Arriba-abajo.* El alumno en la posición del cuadrado cambia su posición con el rombo, y el alumno en la posición estrella cambia su posición con el del círculo. (Los de abajo cambian su posición con los de arriba)

Es conveniente practicar los movimientos antes de realizar las actividades. Como en la actividad de enredos se les otorgará a los alumnos unos folios en los que vendrá desarrollada la actividad, que será algo similar a lo siguiente, pero se les añadirá posiciones (cuadrado, estrella, rombo y circulo) donde puedan ir apuntando la posición original y cómo va cambiando, además de la descripción de cada movimiento y que vayan apuntando en qué posición están al realizar dicho movimiento.

-Desarrollo de la actividad

Una vez conocidos los movimientos se realizar unas preguntas para encauzar los conceptos a teoría de grupos:

Pregunta. ¿Qué ocurre si se realizan varias veces seguidas medio círculo a la izquierda? ¿y varias cadenas?

Que se vuelve a la posición original.

¿Cuántas veces repetimos el movimiento para volver a la posición original? Completa la tabla. ¿Qué concepto se ha visto en clase que tiene que ver con esto?

Movimiento	Veces que se repite para volver a la posición original
Medio círculo a la izquierda	(2)
Cuarto de círculo a la izquierda	(4)
Cadena	(2)

Como no se especifica el mínimo de movimientos, se puede llegar a discutir si valdría por el ejemplo para las cadenas el 4, 6, 8… en definitiva 2n para n natural.

El orden de un elemento es dicho concepto.

Pregunta. Parece que cada movimiento, al igual que en enredos, nos lleva de una posición a otra. ¿Qué operador utilizaremos para combinar los movimientos?

El operador composición.

Se tiene el conjunto de los movimientos y el operador composición, se pueden ver las condiciones para que sea grupo.

Ejercicio 1. Partiendo de la posición original y realizando cada uno de los movimientos, ¿qué movimiento habrá que realizar para volver a la posición original? Completa la siguiente tabla:

Figura de contradanza	**Inverso**
Cuarto de círculo a la izquierda	(Cuarto de círculo a la derecha)
Cuarto de círculo a la derecha	(Cuarto de círculo a la izquierda)
Medio círculo a la izquierda	(Medio círculo a la derecha)
Medio círculo a la derecha	(Medio círculo a la izquierda)
Cadena	(Cadena)
Izquierda-Derecha	(Izquierda-derecha)
Arriba-abajo	(Arriba-abajo)

Una vez visto esto se tiene el elemento inverso de cada movimiento, y por lo tanto, se tiene el elemento neutro ya que si componemos un movimiento con su inverso se tiene la identidad o el elemento neutro, en funciones $f \circ f^{-1} = Id$.

Hasta aquí parece que todo funciona para poder establecer este conjunto de contradanzas como un grupo, pero se puede profundizar más.

Sea $G = \{r, c\}$ donde r es cuarto de círculo a la izquierda y c es una cadena, y la operación composición.

Ejercicio 2. Utilizando $G = \{r, c\}$ y el operador composición, escribir el resto de movimiento en la siguiente tabla, comprobar cada uno realizando los movimientos:

Figura	Descripción
Un cuarto de círculo a la derecha	$r \circ r \circ r$
Medio círculo a la izquierda	$r \circ r$
Medio círculo a la derecha	$r \circ r$
Izquierda-derecha	$r \circ c$
Arriba-abajo	$r \circ r \circ r \circ c$

Por tanto, se pueden escribir todos los movimientos mediante la composición de cadenas y cuartos de círculo a la izquierda. Pasemos a ver entonces el elemento neutro.

Ejercicio 3. Establecer tres elementos neutros, uno sólo con cadenas, uno sólo con cuarto de circulo a la izquierda y otro componiendo ambos.

$$\varepsilon = c \circ c \qquad \varepsilon = r \circ r \circ r \circ r \qquad \varepsilon = c \circ r \circ c \circ r$$

Ejercicio 4. Entre todo el grupo, probad cuantas posiciones diferentes se pueden obtener con estos dos movimientos y la composición.

La respuesta son 8 posiciones diferentes que son las siguientes:

$$r, r^2, r^3, r^4 = e, c, r \circ c, r^2 \circ c, r^3 \circ c$$

Para realizar este ejercicio puede ser de utilidad establecer la siguiente tabla como ya se ha realizado en los ejercicios del tema.

$\circ$	e	r	r^2	r^3	c	rc	r^2c	r^3c
e	e	r	r^2	r^3	c	rc	r^2c	r^3c
r	r	r^2	r^3	c	rc	r^2c	r^3c	c
r^2	r^2	r^3	c	rc	r^2c	r^3c	c	rc
r^3	r^3	c	rc	r^2c	r^3c	c	rc	r^2c
c	c	r^3c	r^2c	rc	e	r^3	r^2	r
rc	rc	c	r^3c	r^2c	r	e	r^3	r^2
r^2c	r^2c	rc	c	r^3c	r^2	r	e	r^3
r^3c	r^3c	r^2c	rc	c	r^3	r^2	r	e

Una vez llegados a este punto sólo queda para ver que las contradanzas forman grupo ver que la composición de funciones es asociativa. Esto al igual que en enredos se supone que se ha aprendido en el tema correspondiente a funciones, no obstante, los alumnos practicarán con los movimientos para ver que realmente lo es.

Pregunta: ¿El conjunto G con la operación composición forma un grupo?

Pregunta: ¿Se cumple la propiedad conmutativa en $(G,\circ)$? Da un ejemplo:

No se cumple la propiedad conmutativa, basta con componer distintos movimientos para demostrarlo.

Con esto terminaríamos con esta actividad, se dejaría al final de la actividad un tiempo para exponer dudas, opiniones, en general, debatir sobre la actividad y de si han sido capaces de seguirla y entender los contenidos.

Hay que recalcar que estas actividades se pueden realizar sin introducirse en teoría de grupos, sino solamente para que intuyan contenidos que posteriormente se impartirán en determinados estudios superiores con el objetivo de reforzar esa base necesaria para obtener esa abstracción en el álgebra.

Temporalización de las actividades

Estas dos actividades se realizarán durante tres sesiones de clase, de 50 min cada sesión. Cada actividad tendrá por tanto una duración de una hora y 15 minutos. Al final de las actividades se les dará un cuestionario a los alumnos sobre sus impresiones de la actividad.

Se puede realizar una temporalización más detallada, pero esta variará según la diversidad de alumnos del aula por lo que no se presentará paso por paso, ya que para su correcto desarrollo se tiene que realizar sin prisa y estableciendo en su momento los pasos y las pautas necesarias.

Evaluación

Esta unidad la evaluaremos de dos formas, una parte será la realización de una prueba escrita no muy complicada de una duración de 30 a 45 min. La otra parte de la nota lo conformará la actividad de enredos y contradanzas y la realización de un video.

En primer lugar, hablaremos de la evaluación de las actividades. La manera de evaluar esta actividad recae en el profesor, él será quien decidirá su peso en la nota o si simplemente lo realiza como una actividad complementaria. Se considera más beneficioso para el mejor desarrollo de la actividad, que están tengan peso en la nota, de esta manera los alumnos se esforzarán más al ver que esto les beneficiará posteriormente.

La actividad de enredos y contradanzas tendrá un peso para los alumnos del 50% de la nota final de la unidad. Se separa la nota en dos partes, la primera será la actividad en clase y la segunda un video a realizar en casa.

La primera parte se evaluará el trabajo que realicen durante la clase y pesará medio punto de la calificación final. En esta parte separaremos a los alumnos en grupos de 5 personas, de manera que trabajarán en equipo buscando que se ayuden entre ellos. En los tiempos que corren en la actualidad que se escribe este trabajo es fundamental guardar la distancia de seguridad, por lo que esta actividad sería imposible de realizar. No obstante, como hemos podido observar en las imágenes, se puede realizar con una manualidad y diferentes objetos, en este caso se han usado peluches para hacerlo más visual, pero serviría con fichas de diferentes colores, figuras de ajedrez, elementos del estuche, etc. y, en el caso de enredos un par de cuerdas o cintas. Y en la base bastaría con cuatro cartulinas de diferente color, si no se quiere perder el tiempo en realizar la base expuesta, ya que es importante remarcar las cuatro posiciones o vértices del cuadrado. Por tanto, de esta manera podemos realizarla individualmente y nos servirá posteriormente para realizar el video.

Para que los alumnos sepan cómo obtener la mayor calificación posible se pondrá a su disposición una rúbrica como la que se presenta a continuación, la actividad en clase tendrá un valor de 2,5 puntos de la nota de la unidad que se evaluarán de la siguiente manera:

- Participación y actitud en clase (1 punto). En esta parte se evaluará la participación en la actividad tanto dentro como fuera del grupo, ayudar a los compañeros, exponer la actividad para toda la clase, intentar responder a las preguntas que se realicen, colaborar en todo momento, estar atento a la actividad y no a distraerse con los compañeros, preguntar dudas, añadir ideas nuevas, etc. En el caso de tener que hacer la actividad individualmente, la participación será la misma y se preguntará a todos los alumnos para fomentar este aspecto. Es de tener en cuenta también la actitud durante las clases teóricas y si han realizado las tareas para casa.
- Hoja de la actividad (1 punto). A cada alumno se le otorgará de una o varias hojas en la que se irá rellenando paso por paso lo que vamos realizando en clase, junto a cada paso se pedirá que escriban que ideas dadas en clase hemos utilizado, su opinión o un

breve comentario de la actividad y si se les ha ocurrido alguna idea nueva u otra cosa que se podría hacer con lo explicado en clase.

- Lenguaje matemático (0,5 puntos). En este punto se analizará la manera en que los alumnos se explican utilizando el lenguaje matemático tanto de manera oral como escrita. Se evaluará los razonamientos lógicos, explicarse ordenadamente y con claridad, el respeto hacia otros compañeros y el intercambio de ideas en orden, respetar el turno de palabra, utilizar de símbolos y conceptos matemáticos, añadir ideas nuevas…También se premiará el esfuerzo por intentar explicarse bien y la evolución del alumno

Con estas valoraciones pretendemos fomentar la participación y actitud en clase, que intenten expresarse en matemáticas intentando realizar argumentos lógicos. Buscamos sobre todo que razonen y relacionen los contenidos, y el hecho de ayudar a los compañeros y debatir entre ellos, fomentando el intercambio de ideas para crear una idea general más sólida.

Los otros 2,5 puntos lo conforman la realización de un vídeo. Este video constará de dos partes:

- Explicación del grupo asignado (1,5 puntos): El alumno grabando a una mesa y con unos objetos como ya hemos descrito anteriormente deberá explicar los dos movimientos del grupo que le toque, o bien enredos, o bien contradanzas y por qué tomar la composición como operador. Explicar el inverso de cada movimiento, y un elemento neutro, y con sus palabras la propiedad asociativa y que por tanto es grupo.
- Cálculo del inverso (1 punto): A cada alumno se le dará una serie de entre 4 y 6 movimientos de enredos, deberán calcular y explicar cómo se calcula. Una vez calculado el valor numérico han de calcular cómo volver a la posición original y explicarlo matemáticamente. Luego realizarlo con los objetos para ver que realmente se cumple.

Pero para que sepan como guiarse en el video, ya que ellos no están acostumbrados a explicarse en alto, es necesario darles una rúbrica de qué es lo que se valora. Sería como la siguiente:

- La presentación tiene un orden lógico. Se pide que la presentación sea ordenada y los pasos a realizar sean los correctos.
- El material que se utiliza tiene buena presentación. Se pide que se vea bien el video, que estén trabajado los materiales utilizados, valorando elementos nuevos y la manera de presentar los conocimientos.
- Utiliza un lenguaje matemático acorde e introduce elementos teóricos. Se valora cómo se expresa el alumno, su capacidad a la hora de explicar, de argumentar los conocimientos, la capacidad de razonar, etc.
- Los resultados son correctos. Se pide que los resultados que se presenten sean correctos, y se realicen los movimientos de manera ordenada y correcta. Así como los conceptos matemáticos explicados.
- Originalidad del video. Se valora la originalidad del video y todo lo que sea añadir elementos nuevos y originales en la presentación. En algún caso esta nota puede ampliarse dando 0,25 puntos a mayores si lo presentado lo requiere.

Pretendemos fomentar que el alumno sea capaz de expresarse en matemáticas, así como la capacidad de razonar y exponerlo a los demás. Muchas veces es costoso para los alumnos el explicarse a los demás, de definir conceptos, de expresar las ideas que tienen sobre un tema, de esta manera realizarán esto, pero sin gente delante y pudiendo practicar cuanto se quiera a modo de que ellos mismos refuercen la idea de la actividad, ya que al tener que explicarlo es necesario interiorizarlo primero.

Como dato añadido, los videos que se suelen realizar son difíciles de enviar mediante correo electrónico, esto se debe a que el peso del video el alto y no lo admite. Les presentaremos la web WETRANSFER, que es muy útil para enviar estos archivos y posiblemente la usen en el futuro.

Por último, en la actualidad las clases online han cobrado un gran protagonismo debido a no poder asistir a clase por no poder respetar el distanciamiento social. A los profesores les cuesta realizar exámenes u otras actividades online, por lo que se considera que realizar un videotutorial por parte de los alumnos proporciona una buena manera de evaluación del alumno. Buscamos que los alumnos se familiaricen con usar las nuevas tecnologías y fomentar su creatividad con las mismas ya que, como se ha comprobado por el confinamiento, es algo necesario en la sociedad actual en la que vivimos.

Sólo queda hablar de la parte de la prueba escrita a realizar en una sesión de clase y que tendrá una duración de entre 30 y 45 min, y su valor en la nota de la unidad será de 5 puntos. Se va a exponer lo que podría ser un modelo de preguntas de examen:

Ejemplo de prueba escrita.

Ejercicio 1: Dado el conjunto $A = \{-1,0,1\}$ y la operación multiplicación.

a) Probar que es una LCI y escribir la tabla para la multiplicación en A.
b) ¿Tiene elemento neutro?
c) ¿Puedes dar el inverso de cada elemento? ¿Qué ocurre con el 0?
d) ¿Es un grupo? ¿Y si quitamos un elemento de A? ¿Cuál?

Ejercicio 2: Indique si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, en caso de ser falsas escribe las correctas:

a) $7 + x \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Z}$
b) $5 + x = x + 5, \forall x \in \mathbb{Z}$
c) En los números enteros $\mathbb{Z}$, dado un número cualquiera x existe un número y tal que $x \cdot y = 1$. (Dar ejemplos para verlo)
d) En los números racionales (fraccionarios) $\mathbb{Q}$, dado un número cualquiera x existe un número y tal que $x \cdot y = 1$. (Dar ejemplos para verlo)

Ejercicio 3: Suponemos que tenemos como conjunto los números enteros $\mathbb{Z}$. Dado el siguiente operador, que además es LCI, $x\$y = 2x + y$, ver si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) $x\$y = y\$x$
b) $x\$0 = 2x$
c) $x\$(-x) = 0$
d) $(x\$x)\$x = 7x$

Ejercicio 4. ¿Cuál de las siguientes dos tablas cumple la condición de grupo?

#	a	b
a	a	b
b	b	a

#	a	b
a	b	b
b	b	b

En el caso de que el alumno no llegue a la nota necesaria para aprobar la asignatura se le hará un examen cuyo contenido estará junto el resto de unidades. En el caso de que el video haya sido el problema del aprobado del alumno se le podrá permitir repetirlo una vez, y en caso de suspender iría al examen de recuperación.

Recursos

Los recursos didácticos son fundamentales para el buen desarrollo del aprendizaje, nos aportan información y sirven de guía a los alumnos.

Cabe destacar que los recursos didácticos no solo facilitan la tarea del docente, sino que también ayudan a los alumnos, al presentar los contenidos de una manera más cercana y menos abstracta. Además, deben ayudar a fomentar la creatividad y motivación del alumno.

Veremos los principales materiales que vamos a utilizar:

- Pizarra: Se utilizará para explicar la teoría y para la realización de problemas, es fundamental que se presente la información de manera clara y ordenada, si es necesario se utilizarán tizas de colores.
- Libro de texto o material impreso: Los alumnos han de tener la teoría y los problemas a realizar de manera física en papel. Además, se le podrá facilitar contenidos aparte.
- Cuaderno del alumno: Este ha de ser complementario al libro de texto y es donde el alumno realice los ejercicios, apunte los conceptos teóricos necesarios y al profesor le servirá para realizar el seguimiento del trabajo del alumno.
- Material audiovisual: En el caso que nos ocupa puede ser de utilidad enseñar algún video que los alumnos han realizado sobre enredos y contradanzas para que entre ellos lo comenten de manera sana y ordenada con el objetivo de profundizar en la materia.
- Material manipulativo necesario para la actividad: si la actividad se realiza de manera individual es necesario que los alumnos tengan los materiales necesarios para realizarla. En el caso de que sea en grupo también será necesario tener cuerda y espacio en clase para su óptima realización.
- Internet y un soporte informático: Es necesario para que realicen el video que tengan un soporte donde puedan realizarlo y posteriormente enviarlo.

Atención a la diversidad

Esta unidad está situada en 4º de ESO, debido a la obligatoriedad de esta etapa, en secunda existe una gran heterogeneidad de los alumnos que cursan este curso. Si bien es cierto que en 4 º de ESO suele ser menor que en los primeros cursos, ya que normalmente cuando se llega a este curso es porque se pretende finalizar esta etapa y no hay muchos alumnos que no quieran continuar estudiando.

Para atender a la diversidad es necesario prever diferentes maneras de desarrollar el currículo, así como diferentes maneras de practica pedagógica para que la gran mayoría de los alumnos sean capaces de comprender y trabajar con los conocimientos a impartir.

Las medidas de esta atención a la diversidad se centran en la necesidad educativa de cada alumno, para que puedan desarrollar de la mejor manera las competencias básicas y los objetivos de esta etapa. En ningún caso puede suponer una discriminación del alumnado y hacer que no pueda alcanzar los objetivos y la titulación correspondiente.

Para intentar que todos los alumnos logren el objetivo se intentarán tomar las medidas siguientes.

i) Si durante la clase el profesor nota que algún alumno no ha sido capaz de seguir la clase o no ha entendido los conceptos nuevos, en el tramo final de clase, cuando ellos hacen ejercicios el profesor intentará explicárselo individualmente otra vez.
ii) Proponer a los alumnos con más dificultad algún trabajo sencillo con el que recuperar y alcanzar el nivel de la clase.
iii) Juntas con el claustro para hablar con los profesores de los mismos alumnos con necesidades especiales.
iv) Asesoramiento por parte del departamento de orientación.
v) Reuniones orientativas con las familias.
vi) Entrevistas con el alumno.
vii) Realizar actividades enfocadas a aprender a pensar, enseñar a convivir, enseñar a decidir…

Por otra parte, puede que en clase se tengan alumnos con altas capacidades que estén interesados en ampliar este tema, que les parezca interesante y quieran avanzar más. La teoría se podría ampliar para este alumnado, por tanto, el capítulo de grupo libre de este trabajo podía ir destinado a este tipo de alumnado con el fin de que ellos avancen y puedan entender conceptos más complejos, pero de una manera sencilla mediante ejemplos reales como los enredos y las contradanzas.

Conclusiones de la unidad didáctica

Esta es una propuesta novedosa de unidad didáctica en la que se introduce la teoría de grupos en el currículo de secundaria, por tanto, es necesario que tanto el profesor como los alumnos evalúen y autoevalúen su experiencia y opiniones acerca de cómo se ha desarrollado la unidad. Por tanto, cada habrá que apuntar cómo se ha desarrollado la sesión y que tal lo comprenden los alumnos y sus dificultades, así como los alumnos que lo han comprendido y son capaces de explicarlo.

Es necesario crear una tabla donde el profesor evalúe su propia experiencia de la unidad, para ello se presenta la siguiente tabla:

Aspectos que evaluar	**Destaca**	**Aspectos que mejorar**	**Propuestas de mejoras**
Temporalización de la unidad			
Desarrollo de los contenidos			
Manejo de los contenidos de la unidad			
Realización de tareas			
Actitud y desempeño de las actividades			
Metodología utilizada			
Recursos			
Uso de las herramientas de evaluación			
Modelo de evaluación			
Atención a la diversidad			
Interdisciplinariedad			
Uso de las TIC			

Es necesario también crear una tabla que se otorgará a los alumnos con el objetivo de que ellos evalúen la unidad didáctica, será algo de la forma:

Elemento	**Nota (0-10) o sí o no**	**Opinión**	**¿Qué mejorarías?**
Dificultad de contenido			
Has entendido el contenido			
Explicación del profesor			
¿Los ejercicios del tema se entendían?			
¿Pudiste realizar los ejercicios sin ayuda?			
¿Entendiste la relación de la actividad con la teoría?			
Actividad de enredos			
Actividad de contradanzas			
Forma de evaluar (porcentajes a cada apartado)			
Realización del video			
Examen de la unidad			
Opinión en general de la unidad			
¿Te ha parecido más difícil que otros temas de este curso?			

¿Te ha parecido interesante?			

Por último, hacer un breve comentario sobre cualquier aspecto que no les ha gustado, o que quieran destacar o cambiar.

Grupo libre

En este capítulo se va a profundizar un poco más en los enredos y contradanzas dentro de la Teoría de Grupos, va dedicado tanto a los alumnos que deseen ampliar conocimientos como a la universidad como una manera de acercar estos conceptos a la realidad. Para ello primero nos vemos en la necesidad de introducir los siguientes conceptos para poder ponernos en contexto.

Consideremos el conjunto $A = \{a\}$. Usando A como el alfabeto, podemos crear palabras mediante la operación concatenación, de esta manera tendríamos: $a, aa, aaa, aaaa \dots$

Será de utilidad denotar estas palabras como $a^1, a^2, a^3, a^4 \dots$ respectivamente. Las palabras se pueden crear concatenando otras palabras, si a^j, a^k son dos palabras, entonces $a^j a^k = a^{j+k}$ es también una palabra. Además, dos palabras son iguales si tienen la misma longitud, esto es, a^m es igual a a^n sí y solo si $m = n$.

Denotaremos el conjunto de palabras de A como $F[A]$. Por lo tanto, la concatenación es una función $F[A] \times F[A] \longrightarrow F[A]$. La definición de concatenación funciona como la exponencial que se enseña a los alumnos de secundaria, con exponentes con la misma base. Además, la concatenación es asociativa.

Cuando usemos la concatenación omitiremos el símbolo $\circ$, esto es, $a \circ a$ lo escribiremos aa. La palabra que no tenga elementos la denotaremos e y la llamaremos palabra vacía, es conveniente definirla como a^0. Si concatenamos cualquier palabra con la palabra vacía obtendremos la original. Esto realmente funciona igual que en la exponenciales, de manera que cualquier número elevado a 0 nos da 1 y cuando multiplicamos por 1 obtenemos el mismo elemento, por lo que concatenar palabras con la palabra vacía es como multiplicar por 1. Por todo esto, la palabra vacía es el elemento neutro para el conjunto $A = \{a\}$ con la operación concatenación.

Sea a^{-1} una nueva letra, a la que llamaremos el inverso del elemento a, asumimos que se cumple $aa^{-1} = e = a^{-1}a$. Extenderemos la definición de **palabra** formada por el alfabeto A, permitiendo componer con a y a^{-1} y pudiéndolas repetir. De esta manera las palabras de A se verán reducidas, ya que sustitiremos por e cuando tengamos aa^{-1} o $a^{-1}a$. Por lo tanto, $F[A]$ será el conjunto de todas las palabras reducidas formadas por el alfabeto A, con la operación concatenación. Tenemos entonces que $F[A]$ es un grupo.

De manera general, para todo conjunto $A = \{a_i\}$, siempre podemos extender la definición de palabra de A y de palabra reducida.

Definición: Una **palabra** es una secuencia de elementos a_i y de sus inversos a_i^{-1} unidos por concatenación, donde está permitida la repetición.

Definición: Una palabra $a_1^{b_1}a_2^{b_2}a_3^{b_3}$ ... es una **palabra reducida** si satisface las dos condiciones siguientes:

1. a_i y a_i^{-1} no son adyacentes para todo $a_i \in A$.
2. Si $a_j = e$ entonces $a_k = e$ para todo $j \leq k$.

Como ya hemos dicho, si $F[A]$ es un conjunto de palabras reducidas en A, entonces es un grupo. Con esta definición de $F[A]$, A es un conjunto generador de $F[A]$.

Definición: Sea S un subconjunto del grupo G. Decimos que S es un **generador** de G, si cumple la propiedad de que todos los elementos de G se pueden escribir como combinación de elementos de S y de sus inversos.

Dado un grupo G y un conjunto S generador de G, diremos que G es un grupo libre cuando todas las relaciones son libres. Esto es, cuando los elementos de A se relacionan libremente.

Definición: Las ecuaciones de un grupo G que satisfacen los generadores las llamaremos **relaciones**.

Definición: Si A es un conjunto de elementos que satisfacen todas las relaciones, y $F[A]$ es el conjunto de palabras reducidas de A, entonces $F[A]$ es el **grupo libre generado por** A.

Definición: Sean G y H dos grupos bajo las operaciones $\circ$ y $\bullet$, respectivamente. Una función $f: G \longrightarrow H$ es un **homomorfismo** si

$$f(x \circ y) = f(x) \bullet f(y)$$

Para todo $x, y \in G$.

Los homomorfismos establecen relaciones entre las estructuras de los grupos.

Teorema: (Propiedad universal de los grupos libres) Sea $F[A]$ un grupo libre de un conjunto A e $i: A \longrightarrow F[A]$ la función inclusión. Si G es un grupo y $f: A \longrightarrow G$ una función, entonces existe un único homomorfismo de grupos $\bar{f}: F[A] \longrightarrow G$ tal que $\bar{f} \circ i = f$.

Por lo tanto, cada grupo es la imagen por un homeomorfismo de un grupo libre

El grupo de enredos.

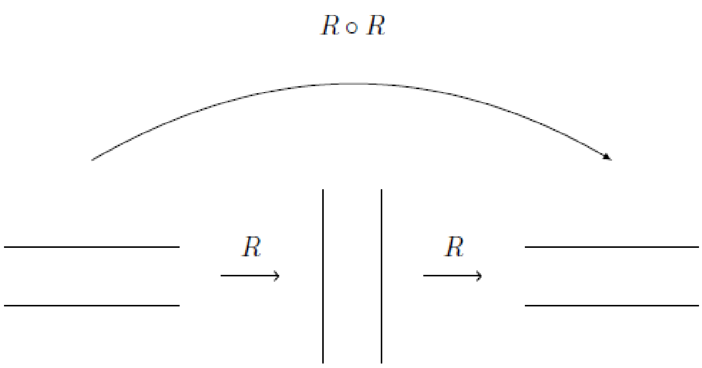
Pasemos ahora a ver si el grupo de enredos cumples las condiciones de ser grupo libre, ya hemos visto en los capítulos anteriores que forma un grupo, y que se forma con sólo dos movimientos y la operación composición.

Las actividades relacionadas al grupo de enredos se basan en un grupo libre de dos generadores que satisfacen dos relaciones, lo denotaremos $\mathcal{T}$.

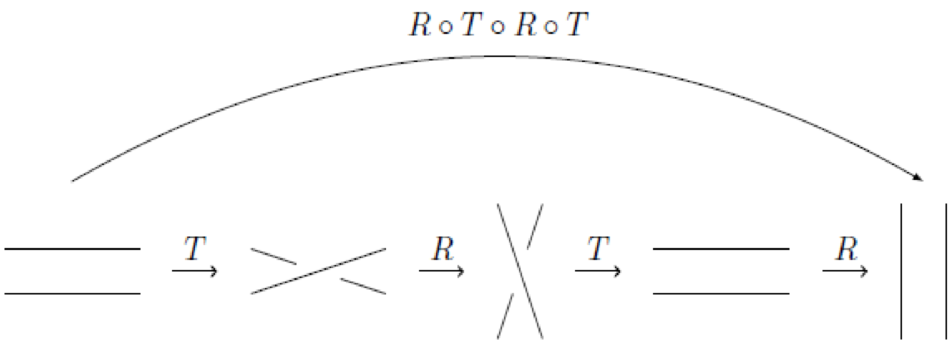
Ya nos es conocidos los dos movimientos que se llevan a cabo en estas actividades, el cruce que lo llamaremos T y la rotación denotada como R.

Podemos definir $\mathcal{T}$ mediante los dos generadores, T y R. Sea $A = \{T, R\}$. Los elementos de A satisfacen las siguientes relaciones:

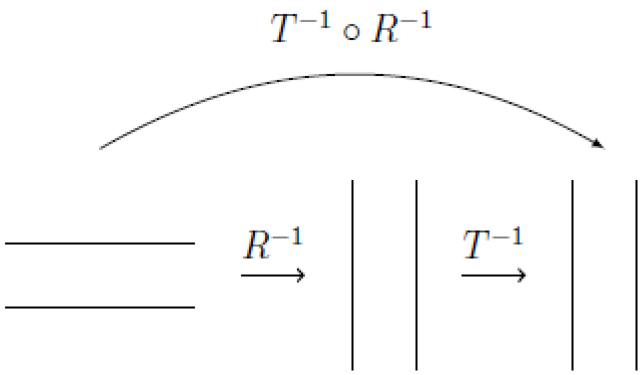
1. $R \circ R = e$.



2. $R \circ T \circ R \circ T = T^{-1} \circ R^{-1}$.



Las imágenes de esta capitulo han sido tomadas de: Wheeler. J. (2016). *Instructing Group Theory Concepts from Pre-Kindergarten to College through Movement Activities*. Recuperado de https://etd.ohiolink.edu/!etd.send_file?accession=osu1461184131&disposition=inline



El grupo de generadores $A = \{T, R\}$ con la operación composición y las dos relaciones anteriores es un grupo. Cualquier combinación de T y R produce un enredo entre las dos cuerdas y por lo tanto una operación binaria. Por el teorema 1 la composición de funciones es asociativa, además se tiene el elemento identidad en $R \circ R$ y $R \circ T \circ R \circ T \circ R \circ T$. El inverso de T es $R \circ T \circ R \circ T \circ R \circ T$ y el de R es R. Por lo tanto, $\mathcal{T}$ satisface las condiciones de la definición de grupo.

Veamos cómo se cumple la propiedad universal de los grupos libres para $\mathcal{T}$. Consideramos $A = \{\rho, \phi\}$, entonces $i(\rho) = \rho$ e $i(\phi) = \phi$. Tenemos que $F[A]$ es el grupo libre del conjunto A. Definiremos la función f como $f(\rho) = R$ y $f(\phi) = T$, y la función $\bar{f}$ como $\bar{f}(\rho) = \mathrm{R}$ y $\bar{f}(\phi) = T$ con $R \circ R = e$ y $R \circ T \circ R \circ T \circ R \circ T = e$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & F[A] \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & \mathscr{T} \end{tikzcd}$$

Se puede, por tanto, extrapolar todos estos conceptos que se imparten en estudios universitarios a actividades de enredos. Es sencillo ver mediante estos enredos cómo se cumplen todas las propiedades de grupo y posteriormente de grupo libre generado por dos movimientos.

El grupo de simetrías del cuadro, contradanzas.

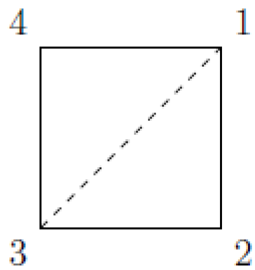
Durante este trabajo nos hemos familiarizado ya con los movimientos de contradanzas, los cuatro alumnos se colocan formando un cuadrado y realizando diversos movimientos.

Como se ha visto en el capítulo anterior, nos podemos quedar simplemente con dos movimientos a partir de los que creamos el resto, estos son la rotación a la izquierda y la cadena.

Vamos a extrapolar todo esto hacia el grupo diédrico de simetrías del cuadrado:

Definición 15: El **n-ésimo grupo diédrico**, denotado D_n, es el grupo de simetrías del n-ésimo polígono regular.

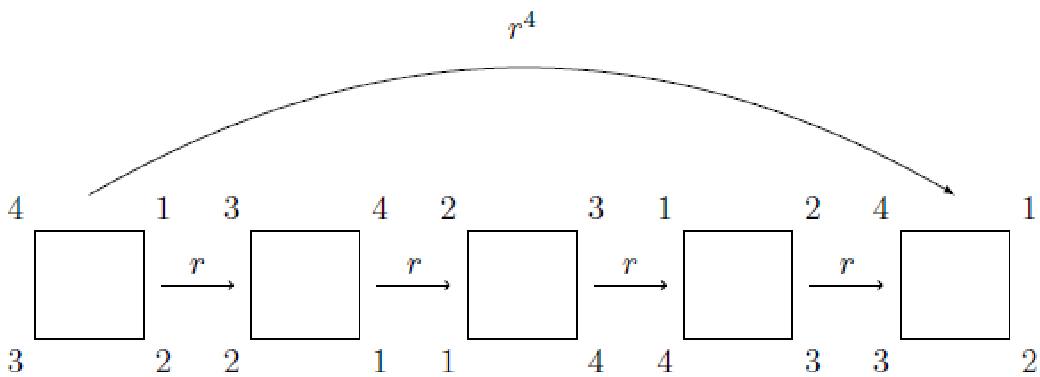
Nos centraremos en el grupo diédrico de grado 4, D_4, de las simetrías del cuadrado. Sean 1, 2, 3, 4 los vértices de un cuadrado.



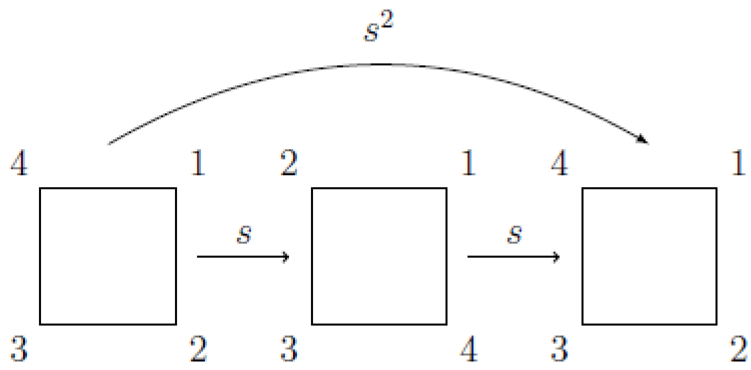
Sea r la rotación de 90° en sentido de las agujas del reloj sobre el centro del cuadrado y sea s la reflexión sobre la línea de simetría del vértice 1 al 3. Podemos definir D_4 basado en sus generadores, r y s.

Sea $A = \{r, s\}$, los elementos de A satisfacen las siguientes relaciones:

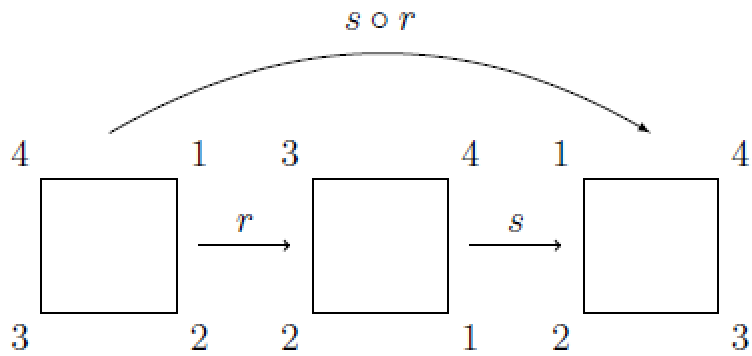
1. $r^4 = e$.

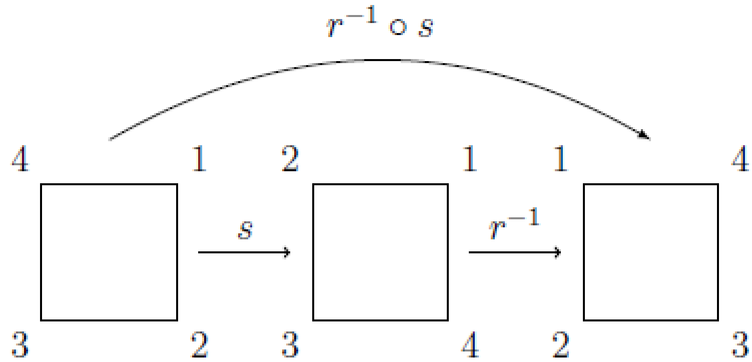


2. $s^2 = e$.



3. $s \circ r = r^{-1} \circ s$,





El grupo de generadores $A = \{r, s\}$ bajo la operación composición, con las tres relaciones anteriores, forma un grupo. Cualquier combinación de r y s produce un movimiento rígido del cuadrado y es por tanto una operación binaria. La asociatividad se satisface por el Teorema 1. La identidad la obtenemos mediante r^4 y s^2. El inverso de r es r^3 y el inverso de s es el mismo. Por lo tanto, el grupo D_4 con estos generadores y sus relaciones es un grupo.

Veamos cómo se cumple la propiedad universal para grupos libres para D_4. Sea $A = \{\rho, \phi\}$, entonces $i(\rho) = \rho$ e $i(\phi) = \phi$. Por lo tanto, $F[A]$ es el grupo libre de este conjunto A. La función f lleva $f(\rho) = r$ y $f(\phi) = s$, y la función $\bar{f}$ lleva $\bar{f}(\rho) = r$ y $\bar{f}(\phi) = s$, con $r^4 = e$, $s^2 = e$, y $s \circ r = r^{-1} \circ s$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & F[A] \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & D_4 \end{tikzcd}$$

Nótese que D_4 es un grupo no conmutativo con la operación composición, que no es conmutativa. Por ejemplo, $r \circ s \neq s \circ r$.

Hemos visto que este conjunto de contradanzas es un grupo libre con la operación composición generado por dos elementos. Veamos ahora cómo podemos realizarlo con unas actividades que se complementarán a las ya explicadas en el capítulo anterior, para realizar estas es necesario pasar antes por todo lo anterior.

Elementos de un grupo libre de 2 generadores

Sea $A = \{a, b\}$, podemos crear palabras del conjunto A concatenando elementos de A y sus inversos, que los denotaremos por a^{-1} y b^{-1}, en cualquier orden.

1. Crea 5 palabras para A.

Una palabra reducida es una palabra que se ha simplificado. Un elemento junto a su inverso se puede suprimir, por ejemplo:

$$aaabbb^{-1}b^{-1}b^{-1}ba^{-1}a = aaabb^{-1} = aaa$$

es una palabra reducida.

2. Reduce las palabras de la actividad 1.

El grupo libre del conjunto A es el conjunto de todas las posibles palabras reducidas de A.

La propiedad universal de los grupos libres no da una buena conexión entre grupos y grupos libres:

Sea $F[A]$ un grupo libre de un conjunto A e $i: A \longrightarrow F[A]$ la función inclusión tal que $i(a) = a$. Si G es un grupo y $f: A \longrightarrow G$ una correspondencia de conjuntos entonces existe un único homomorfismo de grupos $\bar{f}: F[A] \to G$ tal que $\bar{f} \circ i = f$.

Definiremos entonces, para nuestra actividad, las funciones de la siguiente manera:

$$i(a) = a$$

$$i(b) = b$$

$$f(a) = r$$

$$f(b) = c$$

$$\bar{f}(a) = r$$

$$\bar{f}(b) = c$$

Donde $r^4 = s^2 = (rs)^2 = e$.

Los homomorfismos muestran la estructura de un grupo y un grupo libre.

3. Para cada elemento de la actividad 2 escribe su correspondiente elemento del grupo de contradanzas, como si aplicásemos $\bar{f}$.

Por ejemplo:

Elemento del grupo libre	Elemento del grupo de contradanzas
$ababa^{-1}b$	$rcrcr^{-1}c = r^{-1}c = \boldsymbol{r^3c}$
$bbbbbb$	$c^6 = e$
$a^{-1}a^{-1}b$	$r^{-1}r^{-1}c = r^3r^3c = r^6c = \boldsymbol{r^2c}$
$aba^{-1}b^{-1}$	$rcr^{-1}c^{-1} = rcr^3c = rcr^3rcr = rccr = rr = \boldsymbol{r^2}$
$abbbbba$	$rcccccr = rcr = c$

Con todo lo expuesto has aquí llegamos a que tenemos una manera de abordar este tema en estudios universitarios, otorgando una manera visual de entender la parte primera de Teoría de Grupos, que tanto cuesta en los primero años de Universidad.

Buscamos acercar el álgebra abstracta a la realidad, hacer que los alumnos formen este esquema mediante simplemente dos movimientos y la concatenación de ambos. Todo surge por la necesidad del alumnado de recordar conceptos básicos de manera rápida y clara, mediante reglas nemotécnicas sencillas.

La eficacia de estas actividades ha de ser evaluada por los profesores, y son ellos los que valoren su utilidad, así como cambios según sus preferencias.

Otro grupo interesante: El grupo del cubo de Rubik

Además de los enredos y contradanzas existen grupos en muchos elementos de la vida real, como por ejemplo en el cubo de Rubik.

Para ver que los movimientos del cubo de Rubik forman un grupo, veamos que se cumplen las condiciones de grupo:

1. En primer lugar, es claro que el elemento neutro es no hacer ningún movimiento, o hacer un movimiento y repetirlo hacia atrás.
2. También es claro que el inverso de cualquier movimiento es repetir el movimiento hacia atrás.
3. La asociatividad no es tan sencilla: si tenemos tres movimientos que se agrupan de derecha a izquierda $a \circ b \circ c$ (primero se realiza c, luego b y por último a). Por tanto, si agrupamos $(a \circ b) \circ c$ supone hacer primero c y luego $a \circ b$ por tanto hacer primero c, luego b y luego a. Hacer $a \circ (b \circ c)$ supone hacer primero $b \circ c$, por lo que primero se hace c, luego b y al final a. Por lo que es asociativa.

Se intentará profundizar un poco más demarcando el grupo en sí. Los giros de las caras son los siguientes: U(up), F(front), D(down), B(back), R(right) y L(left). Los giros son siempre de 90 grados, y en el sentido de las agujas del reloj. A los giros en contrario a las agujas del reloj se les denotará con una prima, denotaremos entonces U^2 como girar 180 grados y se tiene $U' = UUU$, $UU' = U'U = 0 = U^2U^2$.

Obviamente el número de combinaciones del cubo de Rubik es finito, se puede hacer una cota estimada: todas las combinaciones vienen dadas por las permutaciones de las 8 esquinas 8 (8!), permutaciones de las 12 aristas (12!), rotaciones de las esquinas, (3 por esquina, 3^8) y rotaciones de las aristas (2 por arista, 2^{12}). Por tanto, el número de combinaciones posibles es $2^{12}3^8 8!\,12!$.

Se tiene que el grupo del cubo de Rubik es un grupo finito, este tipo de grupos son muy útiles en matemáticas, por ejemplo, el teorema de Lagrange que dice que el orden de los elementos del grupo divide al número de elementos del grupo.

Conclusión

Al desarrollar contenidos que no forman parte del currículo se parte de un pensamiento utópico ya que es muy complicado llevar esto a la practica en general y más en un alumno, para poder estudiar si realmente es factible y beneficioso.

Realmente se pueden realizar estas actividades y conceptos en dos o tres sesiones, pero con este trabajo se pretende que los alumnos profundicen un poco más en la teoría de grupos e ir introduciendo la matemática discreta en el currículo. De esta manera, estableciendo una unidad didáctica con teoría, ejercicios, actividades se puede analizar mejor la eficacia de la introducción de teoría de grupos dentro del currículo. Además, es necesario establecer una evaluación de manera que realmente se comprueba si los alumnos comprenden la materia y sean capaces de explicar por ellos mismos estos contenidos.

Pero, a pesar de que es prácticamente imposible la introducción de estos contenidos, se ha realizado un estudio del contenido a implantar y en crear una serie de actividades de manera que los alumnos visualicen esta teoría y les sea más sencillo comprenderla. Se ha realizado una programación por competencias en la que intentar que los alumnos superen las mismas y no tanto centrarse en la metodología en sí, pero es necesario comentar la metodología que se considera más conveniente para introducir esta teoría de la mejor manera posible.

Una de las motivaciones para introducir la teoría de grupos es que los alumnos comprendan mejor estos conceptos en estudios superiores y que de esta manera les sean más sencillos conceptos matemáticos abstractos y complejos. Estos conceptos suelen crear problemas por lo que es necesario buscar una solución, por lo que cabe preguntarse si es necesario introducir conceptos nuevos en el currículo o simplemente mejorar la base necesaria. Lo que sí es claro es que es necesario renovar y avanzar en el currículo con el objetivo de evolucionar con la situación de la actualidad, y para ello introducir materiales, conocimientos, actividades, recursos, etc.

Hay que plantearse también que es igual de necesario revisar los contenidos, materiales, recursos…como los objetivos que tiene la docencia de las matemáticas en todos los estudios obligatorios y cómo se evalúan los conocimientos por competencias. Debido a esto se proporciona una manera de evaluar diferente para conseguir desarrollar al máximo estas competencias.

Se concluye con una invitación a la reflexión, hay que comprender el porqué de los contenidos curriculares, por qué muchos alumnos no disfrutan ni tienen interés en las matemáticas y por qué no se llega con los conocimientos necesarios a cursos superiores. Una vez encontrado el por qué buscar la solución y por tanto hay que pensar si habrá que reformular algo del currículo, la manera de dar la clase, de evaluar, u otros aspectos para mejorar el conocimiento matemático y, algo muy importante para la vida cotidiana, la capacidad de razonar, que viene estrechamente ligada a las matemáticas.

Bibliografía

A. Romberg, T.. (1997). CARACTERÍSTICAS PROBLEMÁTICAS DEL CURRÍCULO ESCOLAR DE MATEMÁTICAS . 2020, julio 16, de www.educacionyfp.gop.es Recuperado de http://www.educacionyfp.gob.es/dam/jcr:e912a3d6-f2f3-4935-b314-3b34763cf020/re29416-pdf.pdf

Ambros, A., 2020. *La Programación De Unidades Didácticas Por Competencias*. [online] Ub.edu. Available. Recuperado de: http://www.ub.edu/dllenpantalla/sites/default/files/3%20%20AU%20188%20Alba%20Ambr%C3%B2s%20programar%20por%20competencias.pdf [Accessed 18 October 2020].

Azarquiel, Grupo (1993) Ideas y actividades para enseñar Álgebra. Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid: Síntesis.

Bruner, J. (2011). Aprendizaje por descubrimiento. NYE U: Iberia. Citado a partir de https://www.psicologia-online.com/teorias-del-aprendizaje-segun-bruner-2605.htm

Contreras, J. (1997). La autonomía del profesorado. Madrid :Morata.

Fernandez Rodriguez J.M., López Fernández E.. (2015). Introducción al álgebra. 2020, julio 16, de xeix.org Recuperado de http://www.xeix.org/IMG/pdf/introduccion_al_algebra_1o.pdf

Flores, A. (2011) Desarrollo del Pensamiento Computacional en la Formación en Matemática Discreta. Lámpsakos, 5, 28-33.

Garcia Ramos. Á. (2013). Ejercicios de álgebra para niños y niñas. 2020, julio 16, de reeduca.net Recuperado de https://redsocial.rededuca.net/ejercicios-de-algebra-para-ninos-y-ninas.

Junta de Castilla y León (Consejería de Educación). (4 de mayo de 2015). ORDEN EDU/362/2015. Recuperado de https://www.bocyl.jcyl.es/

LibrosMareaVerde. (2014). Matemáticas. 1º de ESO.. (2014). Recuperado de http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/index.html

LibrosMareaVerde. (2014). Matemáticas. 2º de ESO.. (2014). Recuperado de http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/index.html

LibrosMareaVerde. (2014). Matemáticas. 3º B de ESO. (2014). Recuperado de http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/index.html

LibrosMareaVerde. (2014). Matemáticas. 4ºB de ESO.. (2014). Recuperado de http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/index.html

Lorenzo, P. (2019) Propuesta de inclusión de contenidos de teoría de números y matemática discreta en la enseñanza secundaria con un enfoque visual. Valladolid: Universidad de Valladolid. Facultad de Ciencias.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (29 de enero de 2015) Orden ECD/65/2015, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. «BOE» núm. 25, 6986-7003. Recuperado de https://www.boe.es/buscar/pdf/2015/BOE-A-2015-738-consolidado.pdf

Oteiza Beletu, M.. (2015). Enseñanza del Álgebra en Secundaria: Estado actual y propuestas didácticas. 2020, julio 16, de dspace.uib.es Recuperado de https://dspace.uib.es/xmlui/bitstream/handle/11201/151008/tfm_2018-19_MFPR_mob868_2544.pdf?sequence=1

Pastore Mello, J.L.. (2017). Teoría de los números en la escuela secundaria: algunas posibilidades menos convencionales. 2020, julio 16, de www.scielo.org Recuperado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262017000200209

Pesce, C. M. C., Piquet, D. J., Ruiz, J. J., & Úbeda, M. L. (s. f.). *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria obligatoria (Spanish Edition)* (1.ª ed.).

Rico, L., Castro, E. y Coriat, M. (1997). Revisión teórica sobre la noción de currículo. En L. Rico (Ed.). Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria. Madrid: Síntesis.

Rico, L.. (1997). Consideraciones sobre el Curriculo de Matemáticaspara Educación Secundaria. 2020, julio 16, de www.researchgate.net Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/277787454_Consideraciones_sobre_el_curriculo_de_matematicas_para_educacion_secundaria

Rico, L.. (1998). CARACTERÍSTICAS PROBLEMÁTICAS DEL CURRÍCULO ESCOLAR DE MATEMÁTICAS 2020, julio 16, de dialnet.com Recuperado de dialnet.com

Rico, L. (2014). Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación Secundaria. Madrid: Síntesis.

Rivera-Marrero, O. (2007). The Place of Discrete Mathematics in the School Curriculum: An Analysis of Preservice Teachers' Perceptions of the Integration of Discrete Mathematics into Secondary Level Courses. Dissertation submitted to the faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University. Blacksburg, Virginia. Recuperado de http://scholar.lib.vt.edu/theses/available/etd-04252007-140123/unrestricted/DM-Dissertation-Olgamary-May2007.pdf

Rosentein, J., Franzblau, D. y Roberts, F. (Eds) (1997). Discrete Mathematics in the Schools, DIMACS Series in Discrete Mathematics Computer Science, Volume 36, Providence, RI: American Mathematical Society (AMS).

Salvador, A.. (2017). El juego como recurso didáctico en el área de matemáticas. 2020, julio 16, de www2.caminos.upm.es Recuperado de http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/grupomaic/conferencias/12.Juego.pdf

Smith, M. S. y Stein, M. K. (1998) Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice. Mathematics Teaching in the Middle School, 3, 344–350.
Smithers, D. B. (2005) Graph Theory for the Secondary School Classroom. Electronic Theses and Dissertations. Paper 1015. Recuperado de https://dc.etsu.edu/etd/1015

Socas, M., Camacho, M., Palarea, M., y Hernández, J. (1989). Iniciación al álgebra. Madrid: síntesis.

Vallejo-Nájera, A. (2002) ¿Odias las matemáticas? Barcelona: Martínez Roca.l.
Villani, C., Torossian, C., et Dias, T. (2018). 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques. Paris, France: Ministère de l'Education Nationale (France).
Recuperado de http://hdl.handle.net/20.500.12162/1695

Wheeler. J. (2016). *Instructing Group Theory Concepts from Pre-Kindergarten to College through Movement Activities*. Recuperado de https://etd.ohiolink.edu/!etd.send_file?accession=osu1461184131&disposition=inline