



**UNIVERSIDAD DE VALLADOLID**

**Dpto. Matemática Aplicada**

**ANÁLISIS DIDÁCTICO DE LA TRIGONOMETRÍA EN  
4º DE ESO Y PRIMER CURSO DE BACHILLERATO DE CIENCIAS**

**Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad de Matemáticas.**

**Alumno: Jorge Sainz Pascual**

**Tutora: M<sup>a</sup> Encarnación Reyes Iglesias**

**Valladolid, junio de 2021**

## INDICE

1	Presentación del trabajo .....	1
2	Marco legislativo .....	2
2.1	Objetivos y contenidos generales .....	3
2.2	Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables aplicables al tema de trigonometría .....	3
2.2.1	4º de ESO, Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas .....	3
2.2.2	1º de Bachillerato, Matemáticas I .....	4
3	Análisis didáctico .....	4
3.1	Análisis de contenido.....	5
3.1.1	Perspectiva histórica.....	5
3.1.2	Conceptos objeto de estudio. Mapa conceptual.....	23
3.2	Análisis cognitivo .....	26
3.2.1	Dificultades de aprendizaje .....	27
3.2.2	Expectativas de aprendizaje .....	30
3.2.3	Contribución de la materia al desarrollo de las Competencias Clave .....	31
3.3	Análisis de instrucción .....	35
3.3.1	Análisis comparado de los libros de texto.....	35
3.3.2	Planificación de actividades.....	42
4	Propuesta de Unidad Didáctica .....	46
4.1	Introducción contextual .....	46
4.2	Competencias clave .....	49
4.3	Objetivos.....	50
4.4	Contenidos.....	51
4.5	Metodología .....	53
4.6	Recursos.....	55
4.7	División de tiempos y espacios.....	56
4.8	Actividades de enseñanza y aprendizaje .....	58
4.9	Planes complementarios .....	74
4.10	Evaluación.....	74
4.11	Atención a la diversidad .....	78
4.12	Evaluación y conclusiones de la Unidad Didáctica. ....	79
5	Conclusiones del TFM.....	82
6	Bibliografía - Webgrafía.....	84

## ANEXOS

**Anexo 1:** Objetivos generales marcados en el RD 1105/2014 para la Enseñanza Secundaria Obligatoria y el Bachillerato.

**Anexo 2:** Contenidos, Criterios de evaluación y Estándares de aprendizaje evaluables, aplicables a la trigonometría en las asignaturas de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de ESO (BOCYL, Orden EDU/362/2015) y Matemáticas I de 1º de Bachillerato (BOCYL Orden EDU/363/2015).

**Anexo 3:** Descripción del desarrollo del contenido de la trigonometría en los libros de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de ESO y Matemáticas I de 1º de Bachillerato de las editoriales SM Proyecto Savia, EDELVIVES Proyecto somoslink# y Apuntes Marea Verde.

# 1 Presentación del trabajo

Este trabajo tiene como objetivo la realización de una propuesta didáctica para la enseñanza de la trigonometría, la cual se imparte a los alumnos de 4º de ESO y 1º de Bachillerato.

Para ello se van a analizar los contenidos de Trigonometría en Cuarto Curso de ESO en la asignatura de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas, y Primer Curso de Bachillerato de Ciencias, elaborando una Unidad Didáctica sobre este tópico. Una parte de este trabajo versará sobre los orígenes y desarrollo de la Trigonometría a lo largo de la historia, a fin de que los alumnos puedan conocer la evolución de los conocimientos en este campo, situándolos en el contexto en que se originaron, al tiempo que con ello puedan ver las necesidades que originaron los diferentes avances y descubrimientos, permitiéndoles visualizar las aplicaciones prácticas de la trigonometría en el mundo científico, tecnológico, médico, artístico - arquitectónico...

Todo ello se llevará a cabo integrando las diferentes competencias propias del máster, en particular las relacionadas con el diseño curricular, la práctica docente, la metodología y la evaluación, entre otras.

En muchas ocasiones estamos empleando de forma implícita los conceptos de trigonometría en nuestro entorno, si bien en la mayor parte de los casos sin ser conscientes de ello. Al subir por una pendiente, al hablar de la superficie de un solar o de una distancia entre dos puntos, o al determinar la posición con el GPS que tiene nuestro móvil, estamos empleando trigonometría. Asimismo, al construir la mayor parte de las estructuras en las que vivimos o que utilizamos, desde carreteras a edificios, es imprescindible su uso.

Sin embargo, no nos acordamos, o lo hacemos poco, de sus fundamentos, de cómo nos lo enseñaron o de la dificultad que tuvimos para aprenderla.

Es frecuente enseñar esta materia mediante una clase magistral, con resolución de ejercicios y problemas relacionados con la materia impartida, y los alumnos suelen memorizar los conceptos sin reflexionar en ellos, aplicándolos directamente. Ello suele provocar muchas dificultades en la retención de las diferentes fórmulas (es muy fácil que se confundan a la hora de emplear las relaciones existentes en las razones trigonométricas de diferentes ángulos), cometiendo, por tanto, errores a la hora de hacer los ejercicios y problemas propuestos. Por todo ello en este TFM se pretende la elaboración de una Unidad Didáctica, correspondiente al tema de Trigonometría, seleccionando una serie de materiales y recursos adicionales, principalmente manipulativos con los que el alumno pueda trabajar, así como el diseño de actividades prácticas relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de la Trigonometría y la resolución de triángulos.

Con ellos, se intenta incrementar la motivación de los alumnos y que les sirvan para una mejor comprensión de lo enseñado, permitiendo que fijen los conceptos matemáticos que se les han explicado antes en clase, operando con ellos, comprendiendo su significado y aplicándolos a aspectos prácticos de la vida. Estas tareas se van a proponer a los alumnos de un curso de 4º de ESO.

Además de ello, en este trabajo se desarrollará una Unidad Didáctica en la que se ligue el empleo de la trigonometría con la historia de las Matemáticas, y en particular, con la evolución histórica del campo objeto de estudio: la Trigonometría.

El presente trabajo se divide en cuatro partes diferenciadas:

- En primer lugar, se encuadra la enseñanza de esta Unidad Didáctica dentro del marco legislativo actual, en este caso el currículo marcado en el BOCYL, y en concreto en las órdenes EDU/362/2015, y EDU/363/2015 de 4 de mayo, en las cuales se indican para todos los cursos de ESO y Bachillerato, respectivamente, los contenidos de cada asignatura, los criterios de evaluación de la adquisición de esos contenidos y los estándares de aprendizaje evaluables.

- Una vez marcados los objetivos básicos a cumplir en esta Unidad Didáctica, se procederá a elaborar un Análisis Didáctico del proceso de enseñanza – aprendizaje de la Trigonometría, analizando, por una parte, los contenidos matemáticos que incluye, así como su evolución a lo largo de la historia, y, por otra parte, las capacidades cognitivas y dificultades de aprendizaje de los alumnos a la hora de cursar cuarto curso de Educación Secundaria Obligatoria.

Dentro de este tema se va a conceder una especial importancia a la historia de la trigonometría, a fin intentar incrementar la motivación de los alumnos, introduciéndoles en el contexto en que se hicieron los descubrimientos o justificando la necesidad de los mismos. Para ello se emplearán ejemplos reales de las aplicaciones de la trigonometría, tanto en la historia, el arte o la arquitectura, la tecnología, como en la vida cotidiana de los alumnos, de tal manera que estos puedan comprender la importancia y utilidad del estudio de esta materia.

- A partir de los objetivos básicos y de la perspectiva histórica subyacente, se desarrollará una Unidad Didáctica de Trigonometría, proponiendo a los alumnos diferentes actividades secuenciadas que faciliten su aprendizaje, incluyendo la realización de actividades prácticas basadas en la historia de la Trigonometría que sirvan como compendio y repaso de lo enseñado.

- Por último, se exponen las conclusiones extraídas a lo largo de la elaboración de este trabajo, comprobándose que, a la hora de redactar este TFM, se han asimilado y empleado los conocimientos recibidos en las diferentes asignaturas que componen este Máster.

## 2 Marco legislativo

Para la realización de la Unidad Didáctica se partirá de la enseñanza de los conocimientos básicos marcados por la legislación actualmente vigente, en este caso, el currículo recogido en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, publicado en el BOE del 3 de enero de 2015, para todo el territorio español, el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

Sin embargo, dado que las competencias de educación corresponden a las Comunidades Autónomas, cada una de ellas desarrolla su propio currículo tomando como base de mínimos el marcado en el RD citado.

En concreto, para Castilla y León, los currículos de Educación Secundaria Obligatoria y de Bachillerato, vienen marcados, respectivamente, en las órdenes EDU/362/2015 y EDU/363/2015 de 4 de mayo, publicadas en el BOCyL, en las cuales se indican, para todas las asignaturas que componen los diferentes cursos, los contenidos de cada asignatura, los criterios de evaluación de la adquisición de esos contenidos y los estándares de aprendizaje evaluables y, en particular, aquellos aplicables a nuestro caso, en las asignaturas de Matemáticas.

Los contenidos de trigonometría analizados corresponden a las asignaturas de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de ESO y en Matemáticas I de primer curso de Bachillerato. Dentro de estas

asignaturas, la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría se incluye como uno de los objetivos que deben alcanzar los alumnos, dentro del bloque 3 (Geometría) en el caso de 4º de ESO y dentro del bloque 4 (Geometría) en el caso de 1º de Bachillerato.

## 2.1 Objetivos y contenidos generales

El RD 1105/2014 marca una serie de objetivos generales válidos para el conjunto de la **Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato**.

Dichos objetivos se han tenido en cuenta a la hora de realizar este trabajo, y se incluyen en el Anexo 1 del mismo.

## 2.2 Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables aplicables al tema de trigonometría

Para cada una de las asignaturas que componen la Enseñanza Secundaria Obligatoria y el Bachillerato, el BOE y el BOCyL desarrollan el currículo a través de la exposición de los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables.

En dicha legislación, una vez indicados los contenidos a impartir en cada asignatura, se enumeran los criterios de evaluación para determinar el grado de adquisición de esos contenidos, pudiendo considerarse, por tanto, estos criterios de evaluación como los objetivos a alcanzar en el proceso de enseñanza – aprendizaje.

El objetivo del profesor, a través de la enseñanza de la materia correspondiente, deberá ser que los alumnos alcancen los criterios marcados, es decir, el logro de un aprendizaje significativo por parte de los alumnos, y estos, por su parte, deberán ser capaces de alcanzar esos conocimientos mínimos marcados por la legislación y sobre los cuales va a ser evaluado por el profesor.

Tanto en 4º de ESO como en 1º de Bachillerato el currículo se divide en varios bloques existiendo en ambos casos un bloque inicial o bloque 1 el cual es transversal a todo el curso.

### 2.2.1 4º de ESO, Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas

En la orden EDU/362/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de ESO en la Comunidad de Castilla y León, se dividen los contenidos de la asignatura de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de ESO en cinco bloques:

- Bloque 1. Contenidos comunes.
- Bloque 2. Números y álgebra.
- Bloque 3. Geometría.
- Bloque 4. Funciones.
- Bloque 5. Estadística y Probabilidad.

De estos cinco bloques, el primero es transversal a toda la asignatura, no enseñándose aparte, sino que debe alcanzarse a lo largo de todo el curso.

Por ello, el bloque que afecta a nuestro caso sería el 3, Geometría, si bien no en su totalidad, por lo que en el Anexo 2 se indican, de manera expresa, aquellas partes que han de ser tenidas en cuenta en el caso del diseño de una unidad didáctica en la que se estudie la trigonometría, tanto del bloque 1 como del 3.

Dichos contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje se han tenido claramente en cuenta a la hora de realizar este trabajo, debiendo ceñirnos a ellos y tenerlos en cuenta como mínimos para el desarrollo de la Unidad Didáctica.

### 2.2.2 1º de Bachillerato, Matemáticas I

Si bien la Unidad Didáctica que se va a desarrollar corresponde a 4º de ESO, dado que la trigonometría se expone con una mayor amplitud 1º de Bachillerato, y a modo de comparar los contenidos y objetivos a alcanzar en ambos cursos, se han estudiado, al igual que en el caso de 4º de ESO los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje aplicables al tema de la trigonometría para este curso en la asignatura de Matemáticas I (modalidad de Ciencias).

En la orden EDU/363/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo del Bachillerato en la Comunidad de Castilla y León, se dividen los contenidos de la asignatura de Matemáticas I de 1º de Bachillerato en cinco bloques:

- Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.
- Bloque 2. Números y álgebra.
- Bloque 3. Análisis.
- Bloque 4. Geometría.
- Bloque 5. Estadística y Probabilidad.

De estos cinco bloques el primero, al igual que en 4º de ESO, es transversal y el bloque que afecta de manera explícita a la trigonometría en este caso sería el 4, Geometría, si bien no en su totalidad.

En el Anexo 2 se recogen aquellas partes de ambos bloques que han de ser tenidas en cuenta en el caso del diseño de una unidad didáctica en la que se estudie la trigonometría para este curso.

## 3 Análisis didáctico

En este TFM se desarrolla una propuesta de Unidad Didáctica para la enseñanza de la Trigonometría. Con el objeto de adecuar el proceso de enseñanza y lograr facilitar a los alumnos el proceso de aprendizaje, es preciso, previamente al diseño de la misma, estudiar los factores que intervienen en el mismo, englobados en el análisis didáctico de dicho tema.

De acuerdo al artículo “*Análisis cognitivo en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*” escrito por José Luis Lupiáñez y Luis Rico, “el análisis didáctico es un procedimiento cíclico en el que el profesor ha de movilizar y poner en juego su conocimiento didáctico para diseñar, implementar y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje”. Según ello, el análisis didáctico se sustenta en una serie de tareas, que se agrupan, para la fase de planificación de la enseñanza, en tres categorías, con énfasis en diferentes aspectos:

- Análisis de contenido.
- Análisis cognitivo.
- Análisis de instrucción.

Estos diferentes análisis se relacionarían entre sí de acuerdo a lo indicado en la figura 1:





### 3.1.1.1 Egipto 2000-1800 a.C.

Para la construcción de pirámides en la civilización egipcia, un problema de gran importancia era mantener una inclinación constante en cada una de sus caras y la misma para todas ellas. Esto les condujo a trabajar con un concepto equivalente al actual de cotangente de un ángulo, surgiendo lo que podría considerarse como la primera razón trigonométrica.

Asimismo, los egipcios empleaban los conceptos rudimentarios de la trigonometría a la hora de realizar mediciones de los campos, pues las lindes de estos desaparecían debido a las inundaciones del Nilo. Para ello empleaban la cuerda con 12 nudos, formando triángulos rectángulos con la terna pitagórica 3, 4 y 5.

El **papiro de Rhind** o de Ahmes, por el nombre del escriba, fue escrito en torno a mediados del siglo XVI a.C., a partir de textos anteriores trescientos años más antiguos, lo cual implicaría que estaría basado en cálculos en torno al año 1850 a. C. y contiene 87 problemas prácticos de diferentes ámbitos matemáticos, así como su solución. Dicho papiro parece corresponder a un texto didáctico para enseñar a los alumnos y practicar conocimientos matemáticos.

En el problema 56 de dicho papiro aparecen por primera vez nociones elementales de trigonometría y de triángulos semejantes. Dicho problema es el siguiente:

*“¿Cuál es el seqt de una pirámide de 250 cubits de altura y 360 cubits de lado en la base?”*

El seqt corresponde a lo que en la actualidad se conoce como pendiente de una superficie plana inclinada. Los egipcios medían la relación entre “el avance” en sentido horizontal y “la subida”, en sentido vertical, con el objeto de determinar la inclinación o pendiente, siendo el “seqt”, por tanto, el cociente entre la variación horizontal y la vertical entre los puntos inicio y final. Actualmente esta razón sigue teniendo gran importancia en arquitectura e ingeniería, por ejemplo, las pendientes de los desmontes y terraplenes de carreteras se miden como relación entre horizontal y vertical, p.e  $3H/2V$  o  $1H/1V$ , de modo similar a como lo hacían los egipcios. Los egipcios, para efectuar las mediciones verticales, utilizaban el codo como unidad de medida y en el caso de mediciones horizontales se utilizaba la mano o palmo, que equivalía a  $1/7$  del codo.

La solución propuesta por su autor es:

“- Calcula  $1/2$  de 360 que da 180.

- Multiplica 250 hasta obtener 180, que da  $1/2 + 1/5 + 1/50$ .

- Un cubit son 7 palmos. Multiplica ahora 7 por  $1/2 + 1/5 + 1/50$  que da  $5 + 1/25$ . Luego el seqt es  $5 + 1/25$  palmos por codo.”

El seqt coincidiría entonces con lo que actualmente conocemos por cotangente del ángulo, y correspondería a la pendiente de las caras laterales de la pirámide.

Sin embargo, curiosamente, el mismo escriba, en el problema 60 del papiro, similar al 56, da una respuesta errónea (después de efectuar la división de la mitad de la base entre la altura no multiplicó el resultado por 7).

### 3.1.1.2 Babilonia

Aproximadamente por la misma época, en otra de las grandes civilizaciones de la antigüedad también se enfrentaban a problemas similares.

La cultura babilónica surgió en Oriente Medio, en la zona comprendida entre los ríos Tigris y Éufrates, zona del actual Irak, en torno a los siglos IV y III a.C.

La escritura de esta civilización fue denominada cuneiforme (latín *cuneus*); y escribían en tablillas de barro húmedas sobre las que hacían unas muescas con un palito en forma de cuña y luego secaban, de ahí su nombre. Su sistema de numeración era posicional de base 60, sistema que se ha conservado hasta nuestros días en algunos aspectos, como al medir el tiempo (minutos, segundos), y ángulos en los que  $60' = 1^\circ$ .

Muchas de estas tablillas escritas en barro han llegado hasta nuestros días y entre ellas, para el campo que nos interesa, destaca la denominada **Plimpton 322** (o P-322), escrita en torno al año 1800 a.C. y conservada en la Universidad de Columbia.

En dicha tabilla se encuentran 15 filas de números distribuidos en 4 columnas, de las cuales la primera está parcialmente rota, y por tanto incompleta, pudiendo faltar incluso más columnas.

Según las interpretaciones dadas por diferentes expertos, para una misma fila, el número de la segunda columna podría ser la medida del cateto pequeño ( $c_p$ ) de un triángulo rectángulo y el de la tercera columna sería la longitud de la hipotenusa de dicho triángulo ( $h$ ). La primera columna correspondería al cociente  $c_p^2/c_m^2$  o bien  $h^2/c_m^2$  siendo  $c_m$  el cateto mayor de dicho triángulo rectángulo (no se sabe cuál sería la explicación correcta al faltar el primer dígito de dicha columna).

Con ello, los números de las columnas 2 y 3 formarían parte de ternas pitagóricas, lo que evidenciaría que los babilonios ya conocían el teorema de Pitágoras, pero con una finalidad eminentemente práctica y destinada a medir distancias.

Sin embargo, en los papiros egipcios y en las tablillas mesopotámicas, al igual que en el resto de documentos matemáticos anteriores a los griegos, aparecen únicamente casos prácticos de aplicación de las matemáticas, sin entrar a desarrollar formulaciones generales ni demostraciones. Son, por tanto, unas matemáticas principalmente prácticas y utilitarias.

### 3.1.1.3 *La trigonometría griega*

La trigonometría se desarrolló notablemente con la cultura griega, habiéndoles llegado los conocimientos de egipcios y mesopotámicos, primeramente, como consecuencia de viajes e intercambios entre dichas culturas y posteriormente debido a la conquista de estos territorios por parte de Alejandro Magno, lo cual facilitó el transvase de conocimientos y la extensión de la cultura helena a estos territorios.

Asimismo, se ha de tener en cuenta que la cultura griega no solo se extendía por la actual Grecia, sino también por la actual Turquía, sur de Italia, norte de África, etc, y con las conquistas de Alejandro Magno se extendió por el Oriente Medio, Egipto, e India; además, a su muerte, el imperio que creo fue regido por dinastías procedente de sus antiguos generales de origen griego, dando lugar a los diferentes reinos helenísticos que perduraron varios siglos.

Para los griegos, la motivación principal en su actividad matemática fue la astronomía, la cual provocó las primeras nociones de conceptos trigonométricos, por ejemplo, al intentar medir el radio de la Tierra o la distancia entre la Tierra y el Sol o la Luna.

Con el objetivo de realizar y facilitar sus investigaciones astronómicas, los griegos desarrollaron técnicas para la medición numérica de ángulos, precursoras de la trigonometría, y produjeron tablas para su cálculo práctico. Cronológicamente ordenados, se destacarán los siguientes matemáticos griegos, los cuales se apoyaron en los conocimientos previos de egipcios y babilonios, al tiempo que desarrollaron nuevos conceptos e ideas que

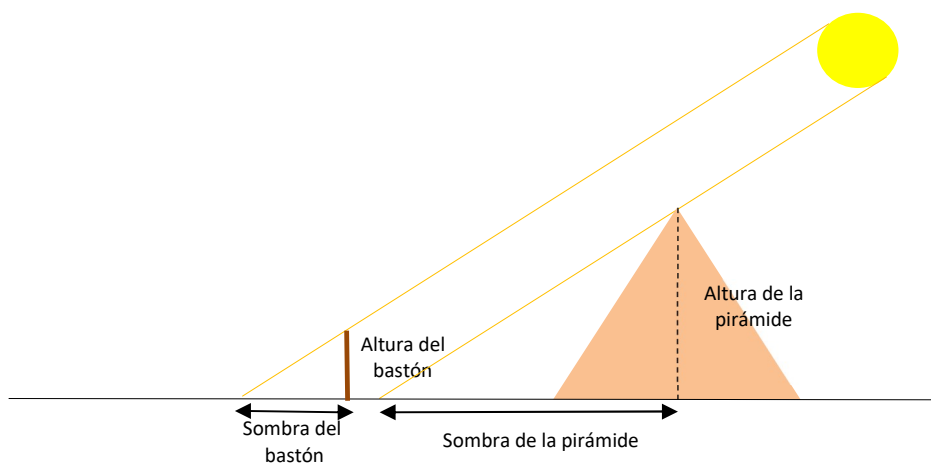
sirvieron de apoyo y base para posteriores descubrimientos.

El primero a considerar fue **Tales de Mileto**. (c 624 a.C. - c 546 a.C). Nació y murió en Mileto. en la costa de la actual Turquía, si bien su vida está llena de mitos y misterios, pues no se conserva ninguna obra escrita directamente por él. Hizo estudios de filosofía, matemáticas, geometría, física, etc. Dentro del ámbito matemático se le atribuyen varios descubrimientos recogidos en Los Elementos de Euclides.

Es muy conocida la leyenda según la cual midió la altura de una pirámide al comparar la longitud de la sombra de dicha pirámide con la suya (o la de un bastón), lo que constituye el fundamento del teorema que lleva su nombre y que está representado en la figura 2.

### Figura 2

*Medida de la altura de una pirámide por Tales.*



Nota: Elaboración propia.

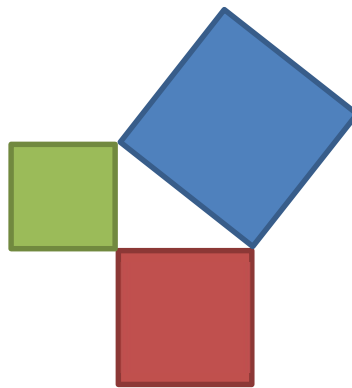
A él se atribuye la afirmación de que los ángulos básicos de un triángulo isósceles son iguales, o las propiedades existentes entre los ángulos formados al cortar con una línea recta dos rectas paralelas. Muchos de estos conocimientos eran ya sabidos por los antiguos egipcios, incorporándose a la cultura y conocimiento griegos.

El siguiente gran matemático griego fue **Pitágoras**, (c 569 a.C. - 475 a.C.). No se conservan datos fiables de su vida, pues sus biografías fueron escritas 200 o 250 años después de su muerte, si bien se cree que pasó sus primeros años en Samos y viajó mucho a fin de aprender de los diferentes pueblos que visitaba: Egipto, Arabia, Fenicia, Babilonia e incluso la India. Se comenta que llegó a visitar a Tales de Mileto, el cual le influyó mucho en su obra futura. Después de sus viajes se instaló en Crotona, ciudad del sur de la actual Italia, donde fundó su famosa escuela pitagórica, una sociedad filosófica y religiosa.

A él y a sus discípulos, en el campo de la trigonometría, se les atribuye el famoso teorema que lleva su nombre y su demostración, así como el descubrimiento de que los ángulos internos de un triángulo suman  $180^\circ$ .

**Figura 3**

Representación gráfica del Teorema de Pitágoras.



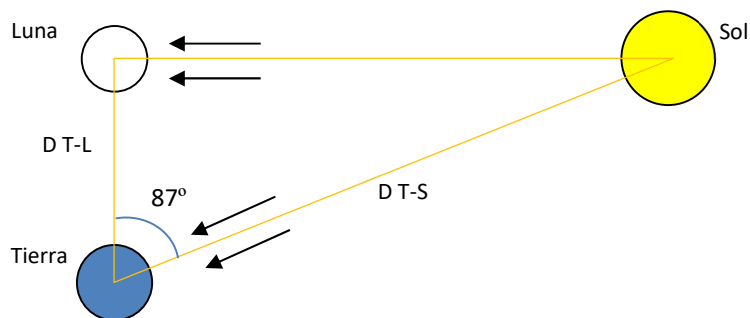
Nota: elaboración propia.

El siguiente fue **Euclides** (330 a.C. - 275 a.C.), quien en su famosa obra “*Los Elementos*” recopiló el saber matemático griego, hasta el siglo III a.C. e influyó notablemente en los matemáticos posteriores, siendo el libro más editado de la historia, después de la Biblia.

**Aristarco de Samos**, (c 310 a.C. - 230 a.C.) fue el primero que afirmó que los planetas giraban alrededor del sol. Escribió una obra, en torno al 260 a.C. titulada “*De los tamaños y distancias del Sol y la Luna*” en la que, usando semejanza de triángulos y suponiendo que la Tierra, el Sol y la Luna formaban un triángulo rectángulo en cuarto creciente o menguante, intentó obtener la relación entre las distancias Tierra-Sol y Tierra-Luna, si bien las medidas del ángulo Sol-Tierra-Luna no eran correctas, y por tanto la distancia entre ellos tampoco.

**Figura 4**

Medición de la distancia entre el Sol y la Luna a la Tierra por Aristarco de Samos.



Nota: Elaboración propia.

A partir del trabajo de Aristarco comenzaron a aparecer las ideas básicas de trigonometría, al empezar a necesitarse el estudio de la relación existente entre cuerdas, sus arcos y el ángulo central en una circunferencia (los nombres de cuerda y arco hacían referencia a la forma del arco de los arqueros).

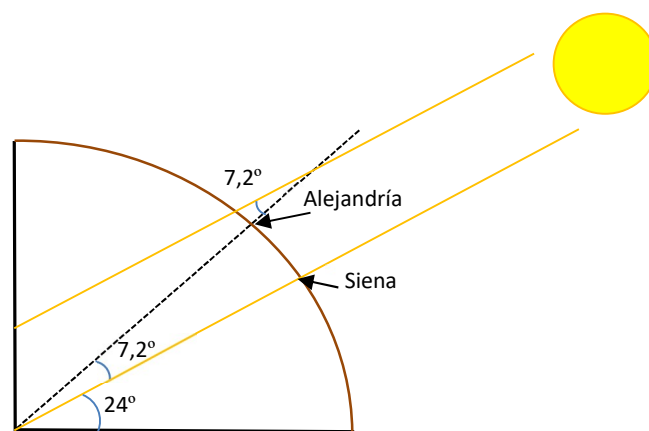
El siguiente trabajo importante en el campo de la trigonometría del que se tiene noticia corresponde al realizado por **Eratóstenes de Cirene** (276 a.C. - 194 a.C.), quien, en su libro “*Sobre la medida de la Tierra*”, realizó un cálculo del tamaño de esta a partir de la medida de la inclinación de los rayos de Sol al incidir en el suelo el día

21 de junio al mediodía en dos ciudades Alejandría y Siena (actual Asuán), pues en esta última los rayos de luz al entrar en un pozo vertical no proyectaban sombras y en Alejandría, a esa misma hora, en otro pozo sí que daban sombras, lo cual solo podía explicarse si la Tierra no fuese plana, suponiendo los rayos del Sol paralelos. Estando ambas ciudades en el mismo meridiano y sabiendo la distancia entre ellas y la diferencia en la inclinación de los rayos solares con relación a la Tierra pudo obtener una buena aproximación de la circunferencia de la Tierra, de acuerdo a lo representado en la figura 5.

En estas mediciones se empiezan a relacionar los ángulos en una circunferencia con las longitudes de arco. Al intentar mejorar el conocimiento de estas relaciones, para poder emplearlo en problemas de medición de campos, astronomía, navegación, etc., se produjeron notables avances en la trigonometría.

**Figura 5**

*Experimento de Eratóstenes para medir el radio de la Tierra.*



Nota: Elaboración propia.

Como posible consecuencia de estos trabajos, aparecen poco después los trabajos de Hiparco de Nicea, el cual es considerado el padre de la trigonometría, al elaborar la tabla trigonométrica más antigua que se conoce.

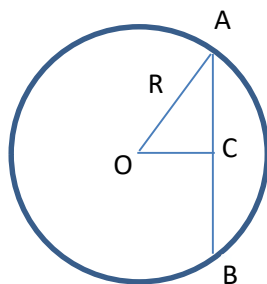
**Hiparco de Nicea** (190 a.C. - 120 a.C.) realizó una tabla en la que relaciona los valores de arcos en la circunferencia con los de sus cuerdas, y la razón entre ambos, para una serie de ángulos. Dicha tabla equivaldría a una tabla de senos, pero en vez de obtener el valor del seno, Hiparco da el valor de la cuerda AB para un radio R correspondiente a 60 unidades y diferentes valores de ángulos, de acuerdo a lo representado en la figura 6. Sin embargo, parece que solo para cuerdas de arcos que eran múltiplos de  $7,5^\circ$ .

Para ello Hiparco mantiene la división de la circunferencia y las fracciones sexagesimales babilónicas, por lo que habría compilado y organizado los datos empíricos obtenidos por los babilonios.

Se desconoce cuándo se empezó a emplear la división de la circunferencia en 360 partes (actualmente grados), sin embargo, esta división, que perdura hasta nuestros días, parece deberse a Hiparco, al haberla utilizado en su tabla de cuerdas, y ello fue probablemente debido a la influencia de la astronomía, al haber sido dividido el zodiaco en 12 “signos” o 36 “decanes”, divididos a su vez, respectivamente, en 30 o 10 partes, dando como consecuencia las 360 partes.

**Figura 6**

*Arcos y cuerdas de una circunferencia en las medidas de Hiparco de Nicea.*



Nota: elaboración propia.

**Herón de Alejandría** (10 d.C. - 70 d.C.) fue otro gran matemático griego, autor de *La Métrica* y es conocido por su fórmula para la determinación del área de un triángulo conocidos sus lados, a, b y c y siendo s el semiperímetro del triángulo, es decir  $s=(a+b+c)/2$ :

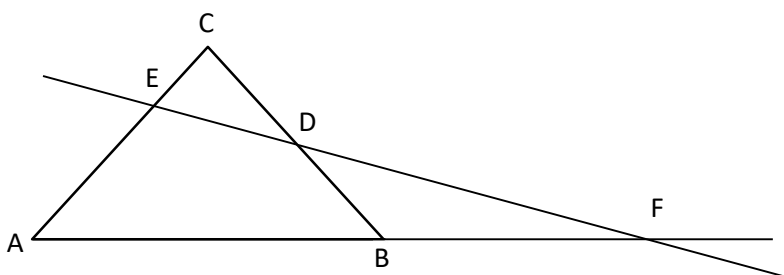
$$\text{Área de un triángulo} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

El siguiente de los grandes matemáticos de esta época que ayudó al desarrollo de la trigonometría fue **Menelao de Alejandría** (c. 70 d.C. - 140 d.C.), quien estableció los fundamentos de la trigonometría esférica, en su obra *Esférica*, libro I. Asimismo, se le atribuye el enunciado del teorema que lleva su nombre en trigonometría plana: dados los puntos A, B, C, vértices del triángulo ABC, y los puntos D, E, F que se encuentran en las rectas BC, AC, AB, respectivamente, entonces los puntos D, E, F estarán en la misma recta cuando y solo cuando:

$$\frac{EA}{EC} \cdot \frac{DC}{DB} \cdot \frac{FB}{FA} = 1$$

**Figura 7**

*Representación del Teorema de Menelao.*



Nota: elaboración propia.

Pero fue en la obra de **Claudio Ptolomeo** (c. 100 d.C. - c. 170 d.C.), que vivió y trabajó en Egipto, cuando culmina la obra trigonométrica de los griegos. Los trabajos de este matemático en los campos de trigonometría y astronomía, se recogieron en su obra "*Sintaxis matemática*" (o *Almagesto*, 'el más grande' como fue llamada por los árabes), la cual se encuentra dividida en trece libros, de ellos, el primero recoge sus estudios sobre trigonometría y en el resto se ocupa de la astronomía. En concreto, en el capítulo IX de este libro I calcula las cuerdas correspondientes a diferentes arcos de una circunferencia, ampliando con ello los trabajos anteriores de

Hiparco. Dichas tablas se usaban para determinar la posición de los astros. Además, dividía la circunferencia, como Hiparco, en 360 partes o unidades (sin emplear la palabra grado), las cuales se subdividían en 60 partes (partes *minutae primae*, de donde procede el término minuto) y cada una ellas se subdividía a su vez en otras 60 partes más pequeñas (partes *minutae secundae*, de donde procede el segundo). Ptolomeo optó por emplear subdivisiones en 60 partes debido a que, para operar con fracciones, el sistema de numeración sexagesimal babilónico era más práctico que las fracciones unitarias (con numerador 1) usadas por los egipcios. Por su parte, el diámetro lo divide en 120 unidades. A partir de ello, para un arco con un determinado número de las 360 partes de la circunferencia, intenta obtener la longitud de la cuerda correspondiente que expresa en función de las 120 unidades que contiene el diámetro.

Ptolomeo, en un principio, calculó las cuerdas correspondientes a los ángulos de  $36^\circ$ ,  $60^\circ$  y  $72^\circ$  utilizando la longitud de los lados de un decágono, hexágono y pentágono regulares respectivamente, empleando propiedades geométricas y la razón áurea, y para el caso de  $90^\circ$  empleó un cuadrado inscrito. Con ello, una vez conocidos los valores de las cuerdas para estos ángulos, Ptolomeo pudo determinar las longitudes de las cuerdas de otros ángulos empleando la propiedad de que el ángulo inscrito en una circunferencia, que abarca un diámetro, es de  $90^\circ$ .

En esta obra de Ptolomeo aparece una consecuencia, a partir de la cual se pueden deducir los cálculos de cuerdas correspondientes a la suma y diferencia de arcos, empleando el ahora denominado Teorema de Ptolomeo, y con ello se pueden obtener las cuerdas correspondientes al arco de un ángulo doble y mitad. Como consecuencia de este descubrimiento pudo construir más fácilmente tablas de longitudes de cuerdas con una mayor precisión, e incorporó en su obra una tabla para ángulos que iban, cada medio grado, desde  $0.5^\circ$  hasta  $180^\circ$ .

Estas tablas incluidas en el Libro I del *Almagesto* fueron un instrumento indispensable para los cálculos astronómicos a lo largo de varios siglos y si bien fueron prácticamente olvidadas en occidente durante la alta Edad Media, fueron recuperadas por los árabes, de donde volvieron a introducirse en occidente a partir del siglo XII. Asimismo, su obra tuvo una gran influencia en la trigonometría hindú.

Como conclusión se puede decir que en las matemáticas griegas se observa un gran avance en el campo de la trigonometría, recogiendo y profundizando en los conocimientos egipcios y babilónicos anteriores, pudiendo comprobarse que, lo que hoy se conocen como razones trigonométricas, se trabajaron desde la época de Tales de Mileto, si bien no se tenía el concepto actual de dichas razones.

El avance de la trigonometría, en todo caso, es debido al concepto utilitario de las matemáticas que se tenía en dicha época, de tal manera que cuando la trigonometría solucionaba las necesidades prácticas, principalmente de la astronomía, ya no se profundizaría más en su estudio. Posteriormente estos problemas estudiarían estudiados por hindúes y posteriormente por los árabes, quienes recogerían y transmitirían los conocimientos matemáticos antiguos.

En este punto es necesario indicar que algunos conocimientos trigonométricos se conocían además en otras culturas, como la china, en la que hay evidencias de que conocían geoméricamente el teorema de Pitágoras, en concreto en el texto matemático chino *Zhoubi Suanjin*, datado entre los años 500 y 300 a.C. y en los trabajos del matemático Shen Kuo (1031-1095), el cual utilizó la trigonometría esférica para solucionar problemas y determinar longitudes de cuerdas y arcos, descubriendo una fórmula que aproxima la longitud “s” de un arco de

circunferencia en función del diámetro “d”, la longitud de la cuerda “c” y la sagita “v” (distancia entre el punto medio del arco y su cuerda)

$$s=c+2v^2/d.$$

Esta fórmula fue empleada por otro matemático posterior Guo Shoujing (1271-1378) en trigonometría esférica para calcular la duración del Año Solar, en el que consiguió un error inferior a 26 segundos.

Sin embargo, la trigonometría china estuvo alejada de la principal corriente de desarrollo de la trigonometría a nivel mundial, basándose en la matemática hindú y más tarde en la griega y en la islámica, con la traducción a su idioma de Los Elementos de Euclides.

#### 3.1.1.4 La trigonometría hindú

La civilización hindú tiene sus orígenes en el subcontinente indio en torno al año 2000 a.C. si bien no se tiene constancia de conocimientos matemáticos en dicha civilización antes del año 800 a.C.

Al igual que en el caso griego, la trigonometría hindú tiene su origen en la astronomía y los estudios astronómicos.

Los *Sulvasutras* o reglas de las cuerdas son unos libros escritos entre los siglos VIII a.C. y II d.C., en los que se encuentran recogidos los conocimientos que necesitaban para edificar los templos, entre los que se incluían ternas pitagóricas.

Posteriormente, en torno al siglo IV d.C. aparecen los *Siddhāntas* o sistemas astronómicos, los cuales recogen los conocimientos sobre astronomía mezclando teorías astronómicas de origen griego con viejas creencias hindúes, conociéndose cinco *Siddhāntas*. En ellos se observa una importante influencia de la astronomía y conocimientos trigonométricos griegos, y en particular de la obra de Ptolomeo, en la que está basada uno de los *Siddhāntas*.

Sin embargo, al contrario que los griegos, para los cuales la trigonometría se fundamenta en las relaciones entre las cuerdas y sus arcos, los hindúes analizaron la relación entre la mitad de la cuerda (semicuerda) y la mitad del arco, siendo el antecesor de nuestro actual seno, al corresponder la semicuerda al cateto opuesto al ángulo formado por dos radios, uno que pasa por el extremo inferior de la semicuerda (punto medio de la cuerda griega) y el otro el que incide en la circunferencia al inicio de la semicuerda, dando lugar con ello a un triángulo rectángulo.

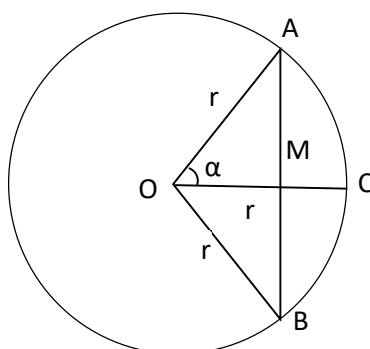
La relación entre la semicuerda hindú, a la que se llamaba *jya* y nuestro actual seno sería, por tanto, en la figura 8,  $jya \alpha = AM = r \operatorname{sen} \alpha$ .

La razón seno verso en dicha figura sería el segmento MC de valor  $r - r \cos \alpha = r (1 - \cos \alpha) = r \operatorname{seno verso de } \alpha$ .



**Figura 8**

*Representación de la semicuerda hindú.*



Nota: elaboración propia.

Algunos de los grandes astrónomos y matemáticos hindúes fueron Aryabhata I (c 476 – c 550), Brahmagupta (c 598 - c 660), Mahavira (c 850-?), Sridhara (c 870 – c 930), Bhaskara I (c 600 - c 680) y Bhaskara II (1114-1185).

De ellos los más relevantes en el campo de la trigonometría fueron los siguientes:

**Aryabhata**, (476 – 550). Es el primer gran matemático hindú. En su libro titulado *Aryabhatiya*, escrito en verso, recoge el conocimiento científico de la época, incluyendo en el campo de la trigonometría la determinación del área de un triángulo: "para un triángulo, el resultado de una perpendicular con el semi-lado es el área.". Asimismo, discutió en su obra los conceptos equivalentes de la actual función seno y la función seno verso, es decir 1-coseno, tal como se ha indicado anteriormente, dando valores para ambos. En el caso de los senos establece valores para ángulos cada 3° y ¾ (es decir cada 3° 45') hasta 90°. Aryabhata empleó para los cálculos una circunferencia de longitud 360·60=21.600 unidades, para la cual consideró un radio de 3.438 unidades (con ello obtenía una aproximación al valor de  $\pi$  exacta hasta el tercer decimal). Para obtener los valores de los senos actuales, se dividirían los datos de la tabla entre el valor del radio, siendo los resultados bastante precisos.

**Brahmagupta** (c 598 – c 660). Se le considera el matemático más relevante de esta época, habiendo escrito dos obras sobre matemáticas y astronomía: el *Brāhmasphuṭasiddhānta* (del año 628) y el *Khandakhadyaka* (del año 665), siendo en esta última obra en la que describió como obtener los senos de ángulos intermedios a partir de una tabla dada de senos y en ella se encuentra una regla para construir ternas pitagóricas.

El libro de Brahmagupta fue traducido por los árabes y posteriormente, a través de ellos, llegó a Europa, con lo que se pudo tener conocimiento en el mundo occidental de la astronomía y matemáticas hindúes.

**Bhaskara I** (c 600 – c 680) fue, aparentemente, el primer matemático en escribir números en el sistema decimal indo-arábigo con un círculo para el cero y en su obra *Maja-bhaskariya* establece una fórmula racional de aproximación para  $\sin x$  muy precisa:

$$\sin x \approx \frac{16x(\pi - x)}{5\pi^2 - 4x(\pi - x)}$$

**Bhāskara II**. Vivió en la India actual entre los años 1114-1185. Está considerado el más grande matemático indio del siglo XII, habiendo escrito, entre otros el libro *Siddhānta Shiromani*. Con relación a la trigonometría, aportó una demostración del teorema de Pitágoras.

Las obras de los matemáticos y astrónomos indios no hubieran llegado a occidente sin la intervención de los árabes, los cuales hicieron la función de conservadores, recopiladores y transmisores de los antiguos conocimientos griegos e hindúes.

### 3.1.1.5 La trigonometría árabe e islámica

Aproximadamente unos 200 años después del matemático hindú Aryabatha, se encuentran las primeras referencias sobre trigonometría en el mundo árabe. Inicialmente los matemáticos árabes adoptaron el modelo del estudio de las cuerdas griego, sin embargo, más tarde optaron por el modelo hindú, tomando como base en sus cálculos la función seno, siendo a través de ellos como llegó a Europa el concepto del seno trigonométrico. Además de estos conceptos hindúes del seno y seno verso, como consecuencia de la observación por Tales de las sombras (y por las que, según la leyenda, pudo medir la altura de la pirámide), otros matemáticos también emplearon la medida de las alturas y, en especial, de las sombras. Estas sombras se denominaban en la trigonometría árabe como *umbra versa* (primera sombra) y *umbra extensa* (segunda sombra), las cuales equivaldrían a la tangente y la cotangente actual respectivamente.

Una de las primeras obras desatacadas en el campo de la trigonometría es la de **Al-Battani** (850-929), conocido en Europa como Albategnius, el cual en su obra “*Sobre el movimiento de las estrellas*” obtuvo una fórmula, para el caso del triángulo rectángulo, que en la actualidad equivaldría a:

$$b = a \frac{\text{sen}(90 - A)}{\text{sen}A}$$

siendo a y b los catetos de un triángulo rectángulo y A el ángulo opuesto al lado a.

Asimismo, empleó el concepto de las sombras para resolver ecuaciones en las que aparecieran los conceptos equivalentes a las tangentes y cotangentes y definió y elaboró las tablas de las razones trigonométricas de la secante y la cosecante.

Unos 100 años más tarde, otro gran matemático islámico, en este caso persa, **Abu'l-Wefa** (939-998), consideró estas relaciones de sombra o umbra ya como segmentos trigonométricos, pues al tomar el radio de la circunferencia igual a la unidad, la función tangente ya se conocía y se podía expresar la relación entre los catetos de un triángulo rectángulo como  $a=b \text{ tg } A$ .

Al contrario del caso de los senos hindúes, los matemáticos árabes ya calculaban la función tangente sobre la circunferencia de radio unidad, aproximándose algo más a los conceptos trigonométricos modernos.

En el trabajo de Abu'l-Wefa se demuestran las fórmulas de los senos y cosenos del ángulo doble y del ángulo mitad. Además, compuso una tabla de senos de hasta ocho decimales de precisión, con intervalos de  $0.25^\circ$ , una tabla de tangentes, y empleó en sus cálculos las seis funciones trigonométricas y varias relaciones entre ellas, las cuales, sin embargo, no fueron muy seguidas en el periodo medieval.

El siguiente gran matemático del mundo islámico fue el erudito **Al-Biruni**, Corasmia (973 - 1048), quien, entre otros campos, estudió la trigonometría, intentando inscribir en una circunferencia un polígono de nueve lados, a través de la fórmula del coseno del ángulo triple llegando a la ecuación  $x^3=1+3x$  como solución del problema geométrico.

Aproximadamente por esas mismas fechas, **Ibn-Yunus**, (c 950 - 1090), empleó, para determinar la altitud del Sol o de las estrellas, métodos que eran equivalentes a la fórmula:  $2 \cos x \cos y = \cos (x+y)+\cos(x-y)$ .

En siglos posteriores los avances en el campo de la trigonometría disminuirán, y ya en el siglo XIII, **Nasir Eddin Al-Tusi**, Jorasan (1201 - 1274), siguiendo a Abu'l-Wefa, fue el primero en tratar la trigonometría, en su obra "*Tratado sobre los cuadriláteros*", como una disciplina independiente dentro de las matemáticas, y ya no ligada a la astronomía.

#### 3.1.1.6 *La Europa medieval y renacentista*

A partir del siglo XII empezaron a aparecer en Europa las primeras traducciones de textos árabes, hebreos y griegos al latín, gracias, principalmente, a los viajes por comercio de algunos estudiosos occidentales que conocen la lengua árabe, (destacando a Fibonacci), así como al nacimiento de las escuelas de traductores y al trasvase de conocimientos desde el imperio Bizantino.

Entre las escuelas de traductores destaca la de Toledo, en la que Gerardo de Cremona realizó una traducción del Almagesto a partir de textos árabes.

Gracias a ello, la gran traba del idioma puede superarse, facilitando la expansión de los conocimientos acumulados en las culturas greco bizantina y árabe, esta última en aquella época principal depositaria de los antiguos saberes griegos e hindúes, permitiendo la difusión por Europa de dichos conocimientos.

Según el historiador matemático Boyer, en una de esas traducciones, realizada por Roberto de Chester sobre el año 1150, aparece por primera vez el término seno. Dicho nombre parece deberse a que los hindúes llamaron *jiva* a la semicuerda, tal como se ha indicado anteriormente, y los árabes adoptaron este nombre como *jiba*; sin embargo, en árabe también existe la palabra *jaib* que significa bahía o ensenada, y el traductor, al no escribirse las vocales en árabe, confundió la palabra *jiba* con la más habitual *jaib*, traduciéndola como *sinus*. nombre latino para bahía o ensenada.

Con la llegada de estos conocimientos empieza a conocerse la trigonometría en Europa, sin embargo, no se llegó a alcanzar un elevado nivel en este ámbito hasta la aparición de los trabajos de Regiomontano (1436 - 1476).

**Johann Müller**, auténtico nombre de "**Regiomontano**", apodo que tiene su origen en la traducción latina de Königsberg, (Montaña Regia) ciudad donde nació, escribió su obra "*De triangulis Omnimodis*" en torno al año 1464, compuesta de cinco libros, estructurada de una manera similar a "*Los Elementos*".

En el primer libro, aparecen expuestos los conceptos fundamentales sobre magnitudes y razones, basadas en "*Los Elementos*" de Euclides, y contiene más de cincuenta proposiciones sobre resolución de triángulos, empleando ángulos rectos.

El libro II comienza enunciando el teorema de los senos y su demostración e incluye seguidamente problemas para obtener ángulos, lados y áreas de triángulos planos, conociendo algunos datos o estableciendo condiciones.

En el libro III aparecen teoremas sobre esferas que aparecían en los escritos griegos.

El libro IV trata la trigonometría esférica y en él se incluyen las leyes de los senos esféricos.

En su obra "*De triangulis Omnimodis*", Regiomontano no considera la función tangente, la cual, en cambio sí aparece en una obra posterior, "*Tabulae directionum*". Asimismo, hizo una traducción resumida del "*Almagesto*".

A fin de evitar el uso de fracciones, era usual utilizar valores elevados para el radio de la circunferencia. Empleó para el radio, en una de sus tablas de senos, un valor de 600.000; en otras, los valores del radio eran de 10.000.000 o 600.000.000. En "*Tabulae directionum*", adoptó un valor de 100.000 para la tabla de tangentes,

si bien no empleó el nombre actual de función tangente.

Las obras de Regiomontano se publicaron después de su muerte (*“De triangulis Omnimodis”* en 1533) y tuvieron una gran influencia en las matemáticas de principios del siglo XVI, siendo conocidos sus trabajos principalmente en el norte de Europa y en particular en Nuremberg, de manera que, en esa época las ciudades de Nuremberg y Viena eran los focos líderes del conocimiento astronómico, en particular, esta última, con la escuela astronómica de Viena, que tuvo su periodo de esplendor entre los siglos XIV y XV.

A partir de los trabajos de Regiomontano, otros matemáticos se interesaron por la trigonometría, las mediciones y los cálculos que se podrían efectuar a partir de ella. Destaca **Niccolò Fontana** (c 1501 - 1557) apodado **Tartaglia**, quien en su obra *“Nova Scientia”* (1537) trató la trigonometría a modo de preguntas, cuestiones o problemas que le gustaría responder y calcular, indicando a continuación como proceder para su resolución. Este libro se ha usado como base para alguna de las actividades prácticas propuestas en la Unidad Didáctica.

Otro de los grandes científicos de esta época, **Nicolás Copérnico**, Prusia (1473 - 1543), contribuyó igualmente al desarrollo de la trigonometría. Es más conocido por su revolucionaria (para la época) teoría heliocéntrica, si bien su obra en el campo de la trigonometría estaba muy influenciada por los trabajos de Regiomontano, de los cuales habría tenido conocimiento a través del círculo de matemáticos de Nuremberg.

El siguiente gran continuador en el desarrollo de la trigonometría en Europa fue el matemático prusiano **Georg Joachim Rheticus** (1514 - 1576), educado en la escuela de latín de Feldkirch y posteriormente en la universidad de Wittenberg. Fue discípulo de Copérnico entre los años 1539 a 1541 y debido a sus estudios y estancia en Nuremberg conocía la trigonometría de Regiomontano.

Rheticus escribió el tratado, en dos volúmenes, *“Opus palatinum de triangulis”*, considerado el más completo hasta la fecha. En dicha obra abandona la definición y el tratamiento tradicional de las razones trigonométricas que hasta el momento se consideraban respecto a arcos de circunferencia, y pasa a definir las a partir de los lados de un triángulo rectángulo. Asimismo, el seno, que hasta entonces se empleaba como el seno del arco, pasa a ser el seno del ángulo.

Estudió las seis funciones trigonométricas, elaborando tablas de todas ellas, con una exactitud de  $10''$ . Para su realización utilizó una hipotenusa (radio) de 10.000.000 unidades para el seno y coseno, y para el resto de las funciones empleó un cateto adyacente de 10.000.000 partes.

### 3.1.1.7 *Preludio a la matemática moderna*

Una vez traducida la mayoría de las obras matemáticas de la antigüedad a partir de las fuentes árabes, que el álgebra árabe había sido introducida en Europa, y convertida la trigonometría en una materia independiente, se estaba en camino de producirse una serie de nuevos y rápidos avances en este campo, los cuales superarían los conocimientos anteriores griegos, árabes, hindúes y medievales y renacentistas europeos. Este periodo incluye desde fines del siglo XVI al XVIII.

El matemático más importante de esta época de transición en Europa fue el francés **François Viète** (1540 - 1603), cuyos estudios trigonométricos están caracterizados por un enfoque analítico general, sistematizando y extendiendo la geometría plana y la esférica. La obra de Viète tiene dos períodos: el primero entre 1564 y 1568, el segundo en 1584 a 1589. En su obra *“Canon mathematicus”* (1579) elaboró tablas con una precisión de siete decimales para las seis razones trigonométricas, con intervalos de  $1'$ , para lo cual utiliza, al igual que Rheticus

un radio de gran magnitud a fin de evitar las fracciones.

En dicha obra realiza una aproximación analítica a la trigonometría, aplicando sistemáticamente el álgebra a la trigonometría.

Viète vuelve a descubrir la mayoría de las identidades trigonométricas básicas y obtiene fórmulas equivalentes a los valores de  $\text{sen}(nx)$  y  $\text{cos}(nx)$  en función de  $\text{sen } x$  y  $\text{cos } x$  relacionando la trigonometría con la teoría de números. Asimismo, en su obra, se encuentran las fórmulas de productos de senos y cosenos en función de sumas y diferencias de estas razones, así como el teorema del coseno, si bien no enunciado de la manera actual. En otra de sus obras, “*Variorum de Rebus Mathematicis*”, aparece un enunciado equivalente al teorema de la tangente.

A partir de las fórmulas obtenidas por Viète pudieron realizarse productos de cantidades elevadas aplicando dichas fórmulas, conocidas como las “*reglas de prostafairesis*”. Estas fórmulas permitían transformar un producto de funciones trigonométricas en sumas o diferencias. Entre ellas se encuentran las siguientes:

$$\text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\text{cos}\alpha \cdot \text{cos}\beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\text{sen}\alpha \cdot \text{cos}\beta = \frac{1}{2} [\text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta)]$$

Dichas reglas se extendieron a finales del siglo XVI, pues al no haberse descubierto aún los logaritmos ayudaban a realizar, especialmente en navegación o en observatorios astronómicos, cálculos largos y tediosos, apoyándose en tablas trigonométricas muy precisas. Las divisiones se realizaban de una manera semejante empleando tablas de secantes y cosecantes.

Todo ello permitió el uso por parte de Viète de la trigonometría aplicándola para la resolución de ecuaciones, dando un importante salto hacia la resolución de problemas algebraicos y aritméticos.

Poco después aparece el trabajo del médico y matemático danés, **Thomas Fincke** (1561 - 1656), el cual estudió principalmente en Estrasburgo, donde publicó su libro más famoso “*Geometriae rotundi*” en el año 1583. Fue escrito como un libro de texto, y en él hace referencia a los trabajos de Regiomontano. Se divide en 14 libros o capítulos: los libros 1 al 4 tratan de la teoría elemental del círculo, del 5 a 11 de la trigonometría plana y los tres restantes de la trigonometría esférica. En este libro introduce los términos 'tangentes' y 'secantes' y Fincke ideó nuevas fórmulas como la ley de las tangentes.

**Bartolomé Pitiscus**, Matemático y astrónomo alemán (1561 - 1613), en su obra “*Trigonometria: sive de solutione triangulorum tractatus brevis et perspicuus*” publicada en 1595, compuesta por cinco libros de trigonometría plana y esférica, apareció por primera vez el nombre de trigonometría. También publicó otra obra, “*Thesaurus mathematicus*” (1613), en la que mejoró las tablas trigonométricas elaboradas por Rheticus.

Poco después, fue realizada una gran aportación a las matemáticas con el descubrimiento de los logaritmos por parte de **John Napier**, matemático escocés (1550 - 1617), quien en su obra “*Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*”, publicada en 1614, indica cómo emplear los logaritmos a fin de resolver problemas con triángulos y proporciona una tabla de logaritmos, lo que facilitó enormemente la realización de operaciones de multiplicaciones largas y tediosas, llevando al desuso las reglas de prostafairesis.

Poco después, el matemático francés **Gilles de Roberval** (1602 - 1675) dio paso a un nuevo aspecto de la

trigonometría, realizando en 1635 el primer dibujo de la mitad de un arco de la curva “seno”, orientando su tratamiento como una función. Este mismo matemático, aplicando su método de indivisibles, fue capaz de determinar el área bajo la función seno, demostrando que:

$$\int_a^b \text{sen } dx = \text{cosa} - \text{cosb}$$

Pocos años más tarde, la trigonometría también fue estudiada por los hermanos **Jacob Bernoulli** (1654 - 1705) y **Johann Bernoulli** (1667 - 1748), quienes redescubrieron los valores de las razones trigonométricas de ángulos múltiple de uno dado,  $\text{sen}(n\alpha)$  y  $\text{cos}(n\alpha)$ , en función del  $\text{sen } \alpha$  y  $\text{cos } \alpha$ , ya desarrollados anteriormente por Viète, generalizándolos para valores de “n” racionales. Con ello, continuaron el desarrollo de la trigonometría analítica, llegando a descubrir teoremas de suma de funciones trigonométricas e hiperbólicas empleando las ecuaciones diferenciales que satisfacen, obra en concreto de Johann Bernoulli.

Fundamental en el estudio de este nuevo aspecto analítico fue el trabajo de **Roger Cotes** (1682 - 1716), colaborador de Newton. Debido a su temprano fallecimiento, solo pudo publicar en vida algunos trabajos incompletos y, posteriormente a su muerte, en 1722, la mayor parte de su obra fue recogida y publicada con el nombre de “*Harmonia mensurarum*”. En ella aparecieron representadas las funciones tangente y secante por primera vez, y se reconocía la periodicidad de las funciones trigonométricas, dándoles un tratamiento sistemático, incluyendo una tabla de integrales de dichas funciones.

Cotes también descubrió la relación entre las funciones trigonométricas y el logaritmo  $\text{ix}=\ln(\text{cosx}+\text{isenx})$  y estudió el problema de la descomposición de polinomios.

En esta época (en torno a los años 1650 - 1700) se desarrolló el cálculo diferencial de **Newton** y **Leibniz** que facilitó innumerables avances en el campo de las matemáticas, incluidas las funciones trigonométricas.

**Abraham De Moivre**, matemático francés (1667 - 1754), publicó en 1707 un artículo en la “*Philosophical Transactions*” donde propuso la fórmula, que lleva su nombre, equivalente a la siguiente:

$$(\text{cos}(x)+\text{isen}(x))^n=\text{cos}(nx)+\text{isen}(nx)$$

donde se relacionan los números complejos con la trigonometría.

De Moivre, en sus estudios, continuó empleando la trigonometría para trabajar con números complejos, los cuales permitieran la resolución de ecuaciones polinómicas o descomponer polinomios sin raíces reales en factores cuadráticos, trabajos ya iniciados anteriormente por Cotes.

El paso de las razones trigonométricas a las funciones periódicas se inició en el siglo XVI con Viète, avanza notablemente en el siglo XVII con el cálculo infinitesimal de Newton y Leibniz, culminando con los trabajos de Euler.

**Leonhard Euler** (1707 - 1783), nació en Basilea, sin embargo, vivió principalmente en Rusia y Prusia, fue el más matemático más notable del siglo XVIII y uno de los más importantes de toda la historia. Efectuó multitud de trabajos en diferentes ramas de las matemáticas y publicó más de 500 libros y artículos, además de otras obras publicadas póstumamente. Sus dos obras más importantes fueron “*Introductio in analysin infinitorum*” e “*Institutiones calculi differentialis*”.

Con relación a la trigonometría, Euler consideraba que el seno de un ángulo “ya no era un segmento, sino simplemente un número, la ordenada de un punto de la circunferencia de radio unidad, o bien el número definido

por una serie infinita” según el historiador Boyer. Los desarrollos de las funciones trigonométricas por medio de una serie fueron empleados por Euler para obtener la suma de series infinitas.

Euler enuncia la serie infinita para las funciones trigonométricas y, si bien no emplea la palabra radián, demuestra que  $\pi$  es medida de la semicircunferencia de radio unidad y, por tanto, es la longitud de arco de  $180^\circ$ . Con ello, la trigonometría, gracias a los trabajos de Euler, se convirtió en una potente herramienta del análisis. Además, analizó las propiedades periódicas de las funciones trigonométricas, determinando las expresiones para la suma de ángulos, suma de senos y cosenos, multiplicación y división.

Uno de los descubrimientos más conocidos de Euler es la fórmula que lleva su nombre, en la cual se define la función exponencial para números complejos, y descubre su relación con las funciones trigonométricas, incluyendo la exponencial en lugar del logaritmo como hiciera Cotes. Para cualquier número real  $\varphi$  que representa un ángulo en el plano complejo, expresando el argumento del seno y el coseno en radianes, la fórmula de Euler indica que la función exponencial compleja se puede establecer mediante la siguiente fórmula:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Como consecuencia de esta fórmula también se podrían expresar las funciones seno y coseno a partir de la función exponencial.

Otro de los aportes de Euler a la trigonometría corresponde a la actual notación que se emplea para designar las funciones trigonométricas, sen, cos, tan, cot, sec, cosec, según aparece en “*Introductio in analysin infinitorum*” Al adoptar la unidad como medida del radio de la circunferencia, con Euler la trigonometría adquiere su forma actual.

### 3.1.1.8 *La trigonometría en la matemática actual*

La matemática ha evolucionado muy rápidamente en estos últimos siglos, con descubrimientos y herramientas cada vez más complejas, sin embargo, a partir de Euler la trigonometría ha sido y sigue siendo una de las herramientas fundamentales en el análisis moderno.

Los matemáticos que han continuado con el desarrollo de esta ciencia, a lo largo de los dos últimos siglos, han tenido la necesidad de trabajar y familiarizarse con las funciones trigonométricas, encontrándose estas en muy diferentes ámbitos dentro de las matemáticas.

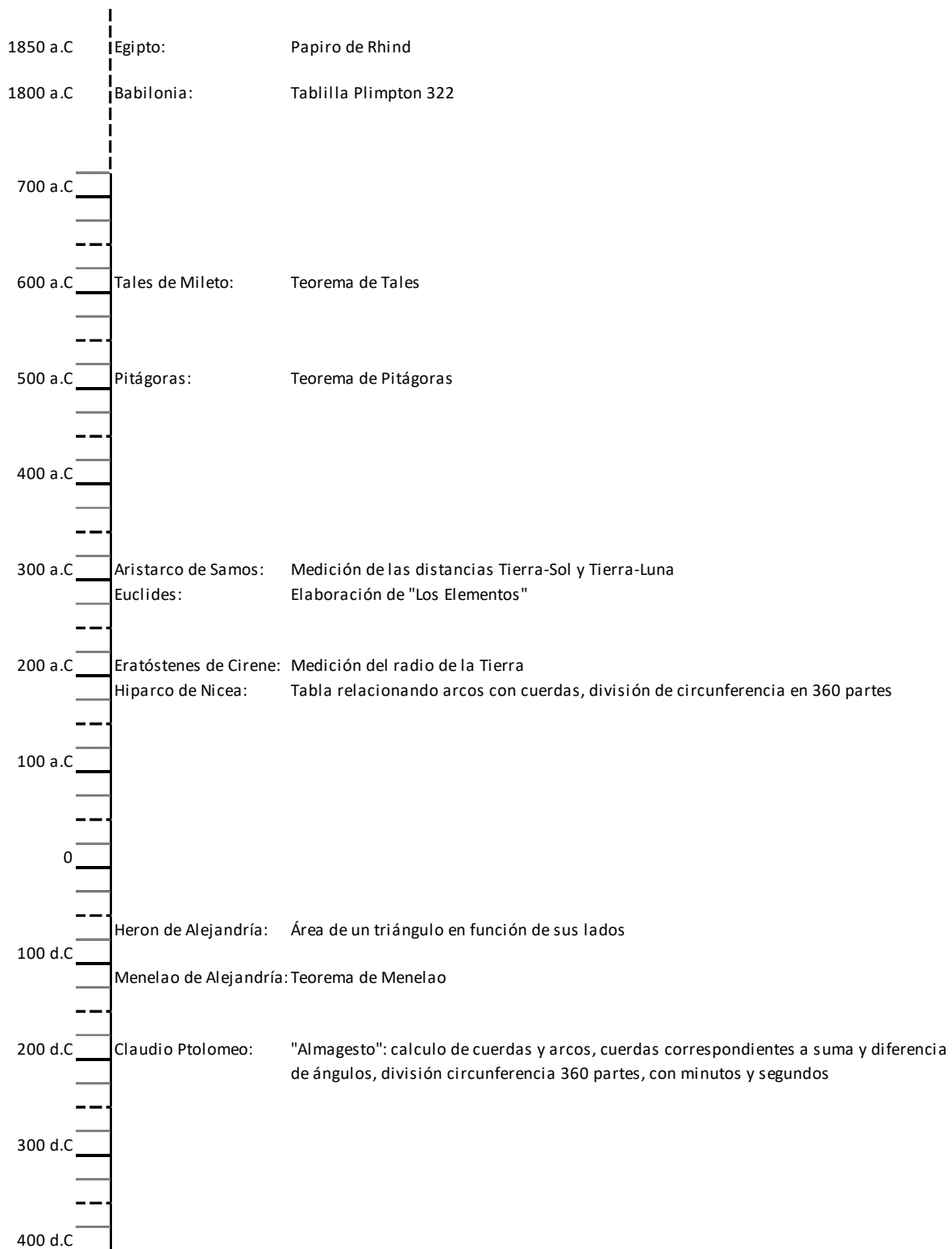
De igual modo, las funciones trigonométricas aparecen implicadas en gran cantidad de problemas relacionados con el estudio de la física, arquitectura, geodesia, mecánica, etc.

Por ello, en el siglo XXI se sigue empleando la trigonometría para el cálculo de alturas, distancias y áreas, en el campo de las telecomunicaciones, termodinámica, electricidad, navegación, astronomía, etcétera.

### 3.1.1.9 Escala temporal esquemática de los avances de la trigonometría

**Figura 9**

*Escala temporal de los avances en el campo de la trigonometría.*





400 d.C		
500 d.C	Aryabhata:	Concepto de seno y seno verso
600 d.C	Brahmagupta:	Calculo de senos de ángulos intermedios en función de una tabla de senos regla para construir ternas pitagóricas
700 d.C	Bhaskara I:	Formula racional precisa para el seno
800 d.C		
900 d.C		
1000 d.C	Abu'l Wefa:	Relaciones de sombra (tg) radio circunferencia unidad; formulas de senos y cosenos de los ángulos doble y mitad; emplea las seis funciones trigonométricas, realizando tablas de senos y tangentes
	Ibn Yunnus:	Aplica la fórmula del doble producto de dos cosenos para el calculo de alturas
	Al Biruni:	Coseno del ángulo triple
1100 d.C		
	Bhaskara II:	Demostración del teorema de Pitágoras
	Gerardo de Chester:	Traducción de obras árabes, aparece por primera vez el término seno
1200 d.C		
	Nasir Eddin Al-Tusi:	Trigonometría como disciplina independiente
1300 d.C		
1400 d.C		
	Regiomontano:	"De Triángulis Omni modis": teorema de los senos, problemas de cálculo de áreas y ángulos de triángulos, función tangente, tablas precisas de senos y tangentes para valores grandes del radio
1500 d.C	Nicolás Copérnico.	
	Rheticus:	Razones a partir de lados de un triángulo rectángulo; las seis funciones trigonométricas
	Francois Viète:	sen(nx) y cos (nx) en función de sen(x) y cos(x), teoremas del coseno y la tangente, fórmulas de productos de senos y cosenos en función de sumas y diferencias de senos y cosenos
1600 d.C	Fincke:	Introduce los términos tangente y secante
	Pitiscus:	Aparece por primera vez el nombre de trigonometría
	Napier:	Logaritmos
	Gilles de Roberval:	Dibuja la mitad del arco de la curva del seno y determina el área bajo dicha curva
1700 d.C	Johann Bernoulli:	Teoremas para la suma de fracciones trigonométricas
	Roger Cotes:	Carácter periódico de las funciones trigonométricas, representación de las gráficas tg y sec
	De Moivre:	Fórmula de Moivre, relación entre números complejos y trigonometría
1800 d.C	Euler:	Fórmula de Euler, desarrollo en serie de las funciones trigonométricas, notación actual de las funciones trigonométricas
1900 d.C		
2000 d.C		

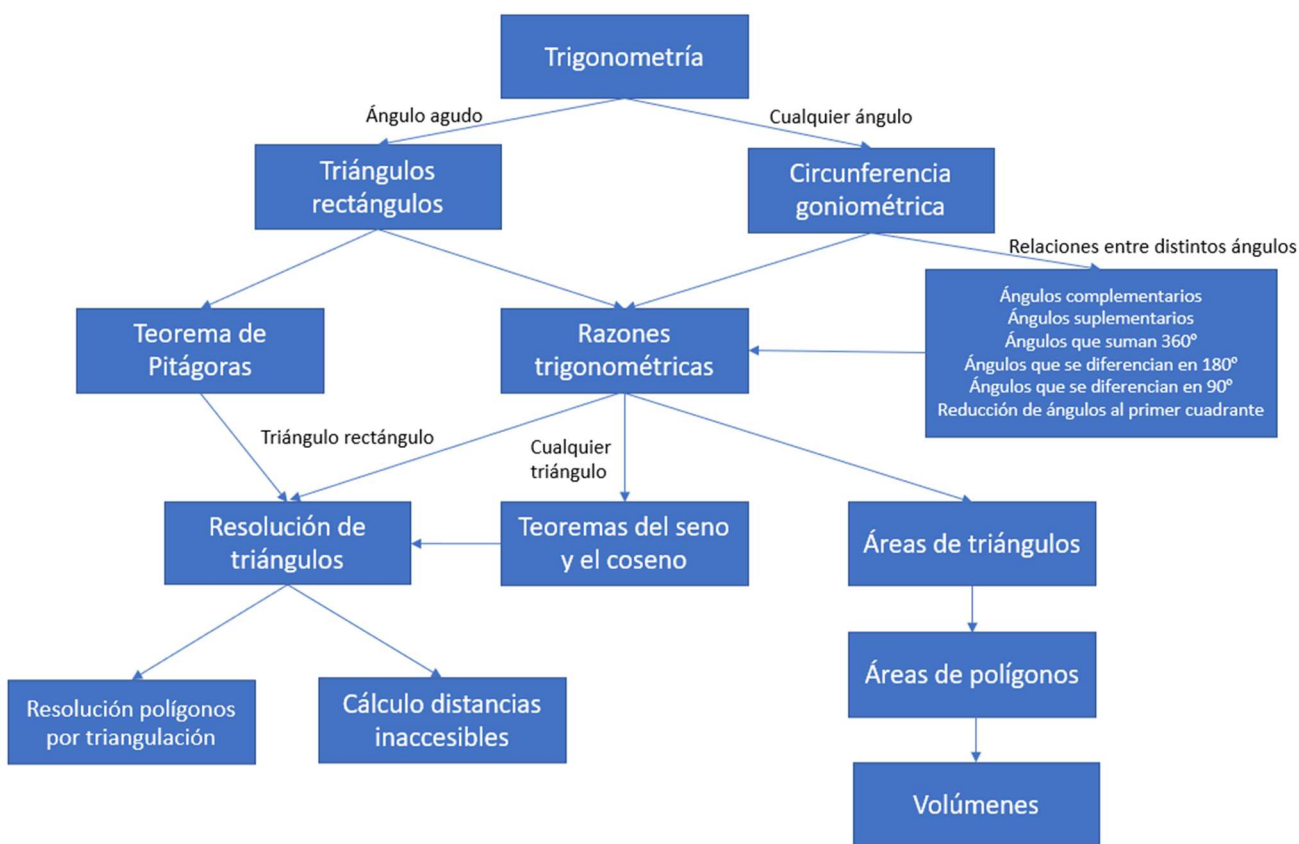
### 3.1.2 Conceptos objeto de estudio. Mapa conceptual

Efectuado este breve recorrido a lo largo de la historia de la trigonometría, a continuación, se concretarán los conceptos inherentes a este campo, así como los procedimientos empleados para su manejo y las destrezas y competencias a alcanzar con su estudio.

El mapa conceptual en el que se va a basar el desarrollo de esta Unidad Didáctica, orientada a alumnos de cuarto curso de ESO que cursen la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas, es el siguiente:

**Figura 10**

*Mapa conceptual de la Trigonometría para 4º de ESO.*



Nota: elaboración propia.

En función de dicho esquema se pueden agrupar los conocimientos a adquirir en cinco bloques fundamentales, en cada uno de los cuales será necesario:

- Establecer definiciones que sirvan como base para el lenguaje y terminología empleados.
- Fijar convenios y notaciones, que sirvan para expresar los conceptos tratados.
- Aplicar una serie de razonamientos para la comprensión y manejo de los conceptos.
- Alcanzar unos resultados y conclusiones.
- Lograr una serie de destrezas en el manejo de dichos conceptos.

Dichos bloques son los siguientes:

### - Medida de ángulos:

Definiciones	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Qué es un ángulo.</li> <li>- Ángulos agudo, recto, obtuso y llano.</li> <li>- Definición de grado sexagesimal.</li> <li>- Definición de radián.</li> <li>- Ángulos complementarios y suplementarios.</li> </ul>
Notaciones y convenios	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Un grado sexagesimal se representa por <math>1^\circ</math>.</li> <li>- Un radián se representa por 1 rad.</li> </ul>
Razonamientos	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Figurativo: relación entre radianes y grados sexagesimales en una circunferencia.</li> </ul>
Resultados	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Relación entre ángulos y arcos de circunferencia.</li> <li>- Relación entre grados sexagesimales y radianes.</li> </ul>
Destrezas	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Identificar y representar diferentes tipos de ángulos.</li> <li>- Medición de ángulos con transportador.</li> <li>- Paso de un ángulo medido en grados sexagesimales a otro medido en radianes y viceversa.</li> <li>- Manejo de grados y radianes con la calculadora.</li> <li>- Aplicación de los ángulos en la vida cotidiana.</li> </ul>

### - Razones trigonométricas de un ángulo agudo:

Definiciones	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Triángulo.</li> <li>- Triángulo equilátero, isósceles y escaleno.</li> <li>- Triángulo acutángulo, rectángulo y obtusángulo.</li> <li>- Catetos e hipotenusa.</li> <li>- Definición de seno, coseno, tangente, cosecante, secante, cotangente, para un ángulo agudo.</li> </ul>
Notaciones y convenios	<ul style="list-style-type: none"> <li>- En un triángulo, los vértices se denotan con letras mayúsculas A, B, C; los ángulos como <math>\hat{A}</math>, <math>\hat{B}</math>, <math>\hat{C}</math> o por medio de letras griegas: <math>\alpha</math>, <math>\beta</math>, <math>\gamma</math>; los lados opuestos al ángulo, con la misma letra que dicho ángulo, en minúsculas, a, b, c.</li> <li>Se escribe <math>\text{sen } \alpha</math>, <math>\text{cos } \alpha</math>, <math>\text{tan } \alpha</math>, <math>\text{cosec } \alpha</math>, <math>\text{sec } \alpha</math>, <math>\text{cotan } \alpha</math> para representar las diferentes razones de un ángulo <math>\alpha</math>.</li> </ul>
Razonamientos	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Figurativo: obtención de las razones trigonométricas a partir de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo.</li> <li>- Deductivo: relación entre las razones trigonométricas de los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo.</li> </ul>
Resultados	<ul style="list-style-type: none"> <li>- El valor de las razones trigonométricas depende únicamente de la amplitud del ángulo <math>\alpha</math>, no de la longitud de los lados del triángulo que lo forman.</li> <li>- <math>\text{tan } \alpha = \text{seno } \alpha / \text{coseno } \alpha</math>.</li> <li>- <math>\text{cosec } \alpha = 1/\text{sen } \alpha</math>, <math>\text{sec } \alpha = 1/\text{cos } \alpha</math>, <math>\text{cotg } \alpha = 1/\text{tg } \alpha</math>.</li> </ul>
Destrezas	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Identificar y dibujar distintos tipos de triángulos.</li> <li>- Obtención de las razones trigonométricas de ángulos agudos, a partir de su definición en triángulos rectángulos.</li> <li>- Empleo de la calculadora para la obtención de las razones trigonométricas de un ángulo dado.</li> </ul>

**- Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera / Identidades trigonométricas:**

Definiciones	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Circunferencia goniométrica.</li> <li>- Sistemas de coordenadas cartesianas.</li> <li>- Cuadrantes y signos de los cuadrantes.</li> </ul>
Notaciones y convenios	<ul style="list-style-type: none"> <li>- En la circunferencia goniométrica los ángulos positivos se miden partiendo del semieje positivo de las x en sentido contrario a las agujas del reloj.</li> <li>- <math>(\operatorname{sen} \alpha)^n = \operatorname{sen}^n \alpha</math>. Notación válida para cualquier valor de n y cualquier razón trigonométrica.</li> </ul>
Razonamientos	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Figurativo: obtención de las razones trigonométricas de un ángulo agudo partir de la circunferencia goniométrica.</li> <li>- Inductivo: obtención de la regla de los signos.</li> <li>- Deductivo: obtención de las razones trigonométricas de ángulos singulares a partir de triángulos equiláteros e isósceles en la circunferencia goniométrica.</li> <li>- Deductivo: obtención de las razones trigonométricas en los cuadrantes 2º, 3º y 4º.</li> <li>- Deductivo: cálculo de las razones trigonométricas para ángulos mayores de 360º.</li> <li>- Deductivo: demostración de identidades trigonométricas a partir de las relaciones fundamentales.</li> </ul>
Resultados	<ul style="list-style-type: none"> <li>- La abscisa y ordenada de un punto de la circunferencia de radio unidad son, respectivamente, el coseno y seno del ángulo que forma el eje de las x positivo con el radio de la circunferencia en ese punto.</li> <li>- Regla de los signos.</li> <li>- Carácter periódico de las razones trigonométricas:  <math>\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(\alpha + 360^\circ)</math>,      <math>\operatorname{cos} \alpha = \operatorname{cos}(\alpha + 360^\circ)</math>.</li> <li>- Los valores de seno y coseno varían entre -1 y 1.</li> <li>- La tangente no está definida para múltiplos impares de <math>\pi/2</math>.</li> <li>- Fórmulas para las razones trigonométricas de ángulos complementarios, suplementarios, que se diferencian en 180º y que suman 360º.</li> <li>- Identidades trigonométricas para un mismo ángulo, pudiendo ser este cualquiera.</li> </ul>
Destrezas	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Representar ángulos cualesquiera en la circunferencia goniométrica.</li> <li>- Obtener ángulos complementarios, suplementarios, que difieran en 180º y que sumen 360º.</li> <li>- Proyectar puntos de la circunferencia sobre los ejes.</li> <li>- Obtención de las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera a partir de la circunferencia goniométrica.</li> <li>- Identificar los cuadrantes y los signos de las razones trigonométricas en ellos.</li> <li>- Empleo de las identidades trigonométricas para, a partir de una razón trigonométrica de un ángulo determinado, obtener el resto de sus razones.</li> </ul>

### - Resolución de triángulos:

Definiciones	<ul style="list-style-type: none"><li>- Qué se entiende por resolución de triángulos.</li><li>- Definición de las funciones arco.</li></ul>
Notaciones y convenios	<ul style="list-style-type: none"><li>- En la calculadora <math>\text{sen}^{-1}</math>, <math>\text{cos}^{-1}</math>, <math>\text{tan}^{-1}</math>, corresponden a las funciones arco.</li></ul>
Razonamientos	<ul style="list-style-type: none"><li>- Inductivo para la demostración del teorema de Pitágoras.</li><li>- Inductivo: imposibilidad de resolver un triángulo conocidos solo los tres ángulos.</li><li>- Inductivo: resolución de triángulos rectángulos conociendo dos elementos distintos del ángulo recto, uno de los cuales ha de ser un lado.</li><li>- Deductivo: obtención de los teoremas del seno y del coseno.</li><li>- Inductivo: resolución de triángulos cualesquiera conocidos dos ángulos y un lado, dos lados y el ángulo comprendido, dos lados y un ángulo no comprendido, conocidos los tres lados.</li></ul>
Resultados	<ul style="list-style-type: none"><li>- Solución única en el caso de triángulos rectángulos.</li><li>- Solución única en caso de triángulos conocidos dos ángulos y un lado y conocidos dos lados y el ángulo comprendido.</li><li>- Una, dos o ninguna solución en caso de triángulos conocidos dos lados y un ángulo no comprendido.</li><li>- Una o ninguna solución en caso de triángulos conocidos los tres lados.</li></ul>
Destrezas	<ul style="list-style-type: none"><li>- Resolver triángulos cualesquiera conociendo tres elementos si estos no son tres ángulos.</li></ul>

### - Aplicaciones de la trigonometría:

Definiciones	<ul style="list-style-type: none"><li>- Polígono regular.</li><li>- Elementos de un polígono regular: lado, apotema, radio, ángulo interior, ángulo central, diagonales.</li><li>- Área.</li></ul>
Notaciones y convenios	
Razonamientos	<ul style="list-style-type: none"><li>- Deductivos: buscar las fórmulas adecuadas a aplicar para resolver un problema.</li></ul>
Resultados	<ul style="list-style-type: none"><li>- Obtención del área de un triángulo conocidos dos lados y el ángulo comprendido.</li></ul>
Destrezas	<ul style="list-style-type: none"><li>- Obtención de distancias, áreas y volúmenes empleando trigonometría.</li><li>- Empleo de otros conocimientos geométricos para la obtención de áreas y volúmenes.</li><li>- Resolución de problemas geométricos empleando las relaciones conocidas.</li></ul>

## 3.2 Análisis cognitivo

En este capítulo se estudia el análisis de las capacidades de aprendizaje por parte de los alumnos, de los conceptos que sean de más fácil comprensión por su parte, de las dificultades de aprendizaje de esta materia, así como de los errores que el alumnado comete a la hora de aplicar los conceptos.

El objetivo es, por tanto, analizar la materia a enseñar desde el punto de vista cognitivo de los alumnos a fin de poder desarrollar una enseñanza adaptada a ellos y a la diversidad que presentan.

Para ello se van a estudiar las dificultades de aprendizaje de la trigonometría para prevenirlas en lo posible y subsanarlas. Se expondrán las expectativas de aprendizaje y los objetivos específicos, así como la contribución de la materia al desarrollo de las Competencias Clave.

### 3.2.1 Dificultades de aprendizaje

Con el objetivo de determinar las dificultades de los alumnos a la hora de comprender y aplicar los conceptos de esta Unidad Didáctica (trigonometría), se ha consultado una serie de artículos resumen de varios estudios realizados sobre profesores y alumnos de diferentes países acerca de las principales dificultades que presenta su enseñanza/aprendizaje.

En el estudio realizado por Brito, A. de J., Morey, B. B. (2004) "*Trigonometria: dificuldades dos professores de Matemática do ensino fundamental*" se consultó a ocho profesores que impartían enseñanza de trigonometría en Brasil. Estos indicaron las principales dificultades que habían encontrado para la **enseñanza** de la trigonometría y que se resumen en:

- Relacionar el concepto de semejanza con los conceptos involucrados en la trigonometría.
- Entender las expresiones "cateto opuesto" y "cateto adyacente" como una relación entre los lados y los ángulos del triángulo rectángulo.
- Comprender por qué en la circunferencia goniométrica la medida del radio es la unidad.
- Transferir conocimientos sobre la simetría de la circunferencia goniométrica.

En el estudio de Sampaio, H.R. & Batista, I.L. (2018). "*Mathematics history and cognitive values on a didactic sequence: Teaching trigonometry*" realizado a tres profesores y veintitrés alumnos de secundaria de Brasil, se indican algunas dificultades experimentadas por los alumnos para el **aprendizaje** de la trigonometría, en concreto:

- Los estudiantes no visualizaban las gráficas de funciones.
- Los estudiantes no tenían un buen desempeño geométrico y algebraico.
- El hecho de que los estudiantes reducen la trigonometría al caso del triángulo rectángulo, dificultando el aprendizaje de razones y funciones trigonométricas en los distintos cuadrantes.
- Los estudiantes no comprenden el estudio del período de las funciones, así como tampoco dominan las funciones trigonométricas.
- Cómo convertir grados en radianes.
- La falta de contextualización del contenido de trigonometría es otro factor destacado como problema para los estudiantes.

A partir de esto, en el citado estudio, se ha indicado que las dificultades más esperables por parte de los alumnos relativos al aprendizaje de las funciones trigonométricas son las siguientes:

- Los estudiantes no comprenden que los arcos tienen medidas lineales y angulares.
- No comprenden el significado del estudio de la trigonometría y su representación gráfica del ciclo trigonométrico.
- No se dan cuenta de la relación entre los contenidos de trigonometría estudiados en los cursos de primaria y secundaria.

- No aplican las fórmulas de funciones trigonométricas cuando se enfrentan a tareas de resolución de problemas.

En el estudio “*Engaging problems on trigonometry: Why were student hard to think critically?*” de Aminudin, M., Nusantara, T., Parta, I.N., (...), As'Ari, A.R., Subanji, se indica que los errores comunes que cometen los estudiantes al responder preguntas sobre trigonometría incluyen:

- El uso de ecuaciones incorrectas.
- Secuencias de operaciones y mal uso de senos y cosenos.
- Malas interpretaciones del lenguaje matemático.
- Inferencias ilógicas.
- Definiciones distorsionadas.

Estos mismos errores son casi idénticos a los expuestos en el estudio de H Gür “*Trigonometry learning*“, el cual detecta los siguientes errores:

- Datos mal utilizados.
- Lenguaje mal interpretado.
- Inferencia lógicamente inválida.
- Definición distorsionada.
- Errores técnicos mecánicos.

Por último, dentro de los estudios realizados en otros países se ha consultado el estudio “*Ghanaian Senior High School students' error in learning of trigonometry*” de FS Mensah, que clasifica los errores cometidos por los estudiantes dentro del marco de error de MA Newman (1997), utilizado usualmente para clasificar los diferentes tipos de error en la resolución de problemas, clasificándolos en seis tipos: error de lectura, comprensión, transformación, habilidad de proceso, error de codificación y descuido. En este estudio se encontró que los alumnos cometían principalmente errores de habilidades de proceso, errores de transformación y errores de comprensión.

Finalmente, se ha consultado el estudio de las españolas Ana María Escudero Domínguez y Josefa Domínguez Viñas “*De los errores identificados en la investigación a los errores encontrados en un aula de primero de bachillerato*”. Este estudio se ha analizado con más detalle debido a su aplicación inmediata a este TFM. Entre los principales errores detectados se encuentran los siguientes:

**- Errores debidos a inferencias o asociaciones incorrectas o a la recuperación de un esquema previo.**

En esta categoría las autoras incluyen los errores que se producen por razonamientos falsos y que no se deben a la materia trabajada. En dichos errores los alumnos generalizan reglas o propiedades que serían correctas en contextos parecidos a los de la materia trabajada, pero las emplean en contextos para los que no son válidas. Entre ellas, destacan los errores por una generalización incorrecta de la linealidad de algunas funciones.

En el caso concreto de la trigonometría exponen como ejemplo el cálculo de:  $\text{sen}70^\circ = \text{sen}(90^\circ - 20^\circ) = \text{sen}90^\circ - \text{sen}20^\circ$ , donde los alumnos aplican una linealidad que no poseen las funciones trigonométricas.

**- Errores debidos al uso de teoremas, expresiones o definiciones deformadas.**

Son originados por deformaciones o desarrollo inadecuado de definiciones, teoremas y principios. Dentro de este error incluyen dos subgrupos diferenciados.

- Los errores debidos a que los alumnos han aprendido de memoria las expresiones a considerar, pero no lo hacen correctamente, p.e. al no diferenciar los catetos de la hipotenusa o al no identificar correctamente el lado y ángulo a aplicar en el caso del teorema del seno.

- Los errores cometidos al aplicar razones trigonométricas cuando estas no están definidas, p.e. en el caso de determinación de la  $\text{tg}(70^\circ) = \text{tg}(90^\circ - 20^\circ)$ .

- **Errores que tienen su origen en la ausencia de sentido en los pasos realizados o notaciones defectuosas.**

Son aquellos provocados al procesar de forma inadecuada la información, de tal manera que se responde con expresiones sin sentido matemático, es decir son aquellos errores en los que no es correcta la interpretación o procesamiento del lenguaje matemático por parte de los estudiantes.

Como error común dentro de este campo los alumnos confunden el valor de una razón trigonométrica con el valor del ángulo correspondiente y ponen el siguiente ejemplo:

$$\text{sen}1550^\circ = (4 \times 2\pi + 110^\circ) = (8\pi + 110^\circ) = \text{sen}110^\circ = \text{sen}20^\circ = 0,342$$

Y dentro de **otros errores no clasificables** directamente en las categorías anteriores se encontrarían:

- **Errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales.**

Pueden ser muy variados; en esta categoría se incluyen: los errores de cálculo, errores al copiar enunciados, al realizar algoritmos básicos, no respetar la jerarquía de las operaciones, etc.

- **Errores debidos a la falta de explicación de los pasos seguidos.**

Entre ellos un error muy común en la trigonometría es considerar que las funciones trigonométricas son inyectivas, p.e.  $\text{sen}(x + 1) = \text{sen}45^\circ$ , luego:  $x + 1 = 45^\circ$ , y, en realidad sería  $x+1=45^\circ+2k\pi$  o  $x+1=135^\circ+2k\pi$ , dependiendo del cuadrante.

Las investigadoras creen que estos errores son debidos a que el alumno interioriza únicamente los cálculos y memoriza situaciones sin asimilar los conceptos matemáticos implicados.

- **Errores debidos a la ausencia de conocimientos previos o a actitudes negativas.**

Si bien no son errores en sentido estricto, estas situaciones son aquellas en las que el estudiante no responde a las cuestiones o no resuelve el problema al faltarle conocimientos previos, o bien responde aleatoriamente por no dejarlo en blanco.

Como consecuencia de estos errores las investigadoras concluyen que “la trigonometría puede convertirse en un proceso memorístico y rutinario, sin ningún sentido ni utilidad, si no se brindan las condiciones para que logren una comprensión profunda, dinámica, visual y útil de los conceptos, sus propiedades y relaciones”. Las principales dificultades que se le plantean al alumno al operar con la trigonometría son el desarrollo y ejecución de los diferentes pasos conducentes a su resolución y la interpretación de las soluciones obtenidas. Dichos obstáculos suelen deberse a una deficitaria comprensión de los conceptos involucrados.

Así, por tanto, se ha podido comprobar que las dificultades y errores encontrados por los diferentes investigadores y en diferentes países, son comunes a estudiantes y profesores de muy variada procedencia. Asimismo, las conclusiones a que llegan son similares, siendo la dificultad más común reportada la abstracción de los conceptos trigonométricos, además de que no los relacionan con conceptos previos; todo ello origina que los alumnos los aprendan de una manera memorística sin comprenderlos significativamente.



Muchos de estos errores están ligados a la mala comprensión de las razones trigonométricas y sobre todo a su paso desde los triángulos a su aplicación a la circunferencia goniométrica de radio unidad y la comprensión de esta última.

A fin de poder evitar estos errores, en el desarrollo de la Unidad Didáctica que se realizará más adelante, se han intentado seguir dos procedimientos complementarios que se espera puedan mejorar el interés del alumno por esta materia y la comprensión de la misma. Estas dos vías complementarias son:

- La enseñanza de la trigonometría a través de una perspectiva histórica, a fin de que los alumnos puedan comprender el contexto en que se descubrieron y aplicaron los diferentes conceptos trigonométricos.
- La enseñanza de la trigonometría a través de actividades manipulativas, de tal manera que los alumnos, al trabajar manualmente con ellas, puedan interiorizar más fácilmente los conceptos involucrados.

En cuanto a la aplicación de la historia de las matemáticas para aumentar la motivación de los alumnos, esta se ha mostrado como altamente eficaz en varios estudios realizados. En concreto las investigadoras Helenara Regina Sampaio Figueiredo, e Irinéa de Lourdes Batista, en el estudio “*Mathematics History and Cognitive Values on a Didactic Sequence: Teaching Trigonometry*”, han constatado un importante potencial educativo en este campo concreto.

Con respecto al empleo de actividades manipulativas, su objetivo es la fijación de los conceptos explicados de una manera teórica en clase, aplicando los cuatro principios de Dienes, el cual considera imprescindible la manipulación de materiales para la comprensión y adquisición de los conceptos matemáticos. Dichos principios se expondrán más adelante, al desarrollar la Unidad Didáctica.

Por último, a la hora de enseñar a resolver problemas a los alumnos se empleará la estrategia de resolución de problemas de Polya.

### 3.2.2 Expectativas de aprendizaje

De acuerdo al currículo de 4º de ESO y del mapa conceptual expuesto en la figura 10, existen, tal como se ha indicado, cinco temáticas básicas de trigonometría en este curso que se deben enseñar/aprender, y a partir de las cuales se pueden establecer una serie de objetivos específicos a alcanzar por parte de los alumnos:

Los objetivos específicos de cada temática, para los que se ha tenido en cuenta los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables, marcados en el BOCyL, son:

#### **I- Medida de ángulos**

- 1) Construir y medir ángulos en grados sexagesimales. Manejo con soltura del transportador de ángulos.
- 2) Capacidad de medir ángulos en radianes. Comprensión y manejo del concepto de radianes.
- 3) Capacidad para el paso de grados sexagesimales a radianes y viceversa. Utilización de la calculadora.
- 4) Capacidad de determinación de ángulos y su aplicación a la vida cotidiana.

#### **II- Razones trigonométricas de un ángulo agudo.**

- 5) Comprensión del concepto de seno como cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa, así como capacidad para el manejo del mismo y su aplicación para la determinación de ángulos o lados.

- 6) Comprensión del concepto de coseno como cociente entre el cateto adyacente y la hipotenusa, así como capacidad para el manejo del mismo y su aplicación para la determinación de ángulos o lados.
- 7) Definición y comprensión del concepto de tangente como cociente entre cateto opuesto y cateto adyacente y como cociente de seno entre coseno, así como capacidad para el manejo del mismo y su aplicación para la determinación de ángulos o lados.
- 8) Comprensión y manejo de las inversas del seno, coseno y tangente.
- 9) Utilización de la calculadora para la obtención de las razones trigonométricas de un ángulo dado.

### **III- Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.**

- 10) Comprensión del concepto de circunferencia goniométrica. Representación en la misma de un ángulo cualquiera.
- 11) Comprensión de las razones trigonométricas de ángulos en el primer cuadrante y su similitud con las razones trigonométricas de un ángulo agudo, así como su obtención analítica y gráfica.
- 12) Comprensión de las razones trigonométricas de ángulos en el resto de cuadrantes, así como su obtención analítica y gráfica. Signos que toman en cada cuadrante.
- 13) Capacidad de relacionar las razones trigonométricas de algunos ángulos con otros del primer cuadrante. Reducción al primer cuadrante. Aplicación a cualquier ángulo.
- 14) Comprensión y manejo de las identidades trigonométricas en un mismo ángulo.

### **IV- Resolución de triángulos.**

- 15) Comprensión y manejo del teorema de Pitágoras y su demostración.
- 16) Capacidad para la resolución de triángulos rectángulos en función de diferentes elementos.
- 17) Comprensión y manejo de los teoremas del seno y del coseno.
- 18) Capacidad para la resolución de un triángulo cualquiera, en función de diferentes elementos.
- 19) Analizar y comprender ejemplos de resolución de triángulos a lo largo de la historia.

### **V- Aplicaciones de la trigonometría.**

- 20) Capacidad para el cálculo de longitudes y su aplicación al caso de distancias inalcanzables y a alturas.
- 21) Capacidad para la aplicación de la trigonometría para el cálculo de áreas de polígonos.
- 22) Capacidad para calcular áreas de polígonos por triangulación, y sus aplicaciones.
- 23) Capacidad para calcular volúmenes empleando trigonometría.
- 24) Analizar y comprender los ejemplos de aplicación de la trigonometría a lo largo de la historia.

#### **3.2.3 Contribución de la materia al desarrollo de las Competencias Clave**

Una vez marcados los objetivos a alcanzar en la enseñanza de la trigonometría, se va a indicar a continuación su relación con las siete competencias clave, indicando para cada objetivo las competencias clave que se trabajarán primordialmente a la hora de intentar lograr el mismo.

Las competencias clave de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato se recogen en el artículo 2.2 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre.

Estas competencias no son estáticas, sino que se van desarrollando a lo largo del tiempo, en el que el individuo va adquiriendo nuevos conocimientos. Además, deben ser alcanzadas en todas las asignaturas que se imparten en el currículo, no siendo exclusivas de una u otra asignatura, y la función de la enseñanza es integrar el desarrollo de dichas competencias de manera transversal a todas las asignaturas, favoreciendo su adquisición día a día como consecuencia del trabajo en todas ellas.

Por ello, uno de los principales objetivos de la Enseñanza Secundaria Obligatoria y el Bachillerato es que los alumnos vayan mejorando progresivamente, y finalmente alcancen plenamente, las siete competencias básicas recogidas en la legislación. Obtener tales competencias preparará al alumno para su vida adulta, facilitando la adquisición de nuevos conocimientos y permitiendo el desarrollo de todo su potencial personal y profesional, favoreciendo su adecuada inclusión en la sociedad.

Dichas competencias, así como la contribución de la trigonometría a su desarrollo, son las siguientes:

### **C1. Competencia en comunicación lingüística (CCL).**

Al trabajar en Matemáticas se desarrolla la competencia en comunicación lingüística, pues se emplea de manera continua la comprensión y expresión oral y escrita. La comprensión a la hora de asimilar las explicaciones teóricas o al interpretar los enunciados de los problemas que se plantean a los alumnos, y la expresión a la hora de exponer los conceptos e ideas trabajados, así como a la hora de explicar, tanto el proceso seguido para la resolución de los problemas, como los resultados obtenidos. Si se aplican las estrategias de Polya para la resolución de problemas, el primer paso, comprender un problema, implica claramente el uso de esta competencia pues este paso implica, entre otras cosas, entender el enunciado.

En la parte de trigonometría, como en toda la asignatura, se emplea un lenguaje específico propio de las Matemáticas, a través del cual se intenta representar la realidad, con el objetivo de comprenderla y obtener las conclusiones adecuadas. Por ello, es esencial que los alumnos entiendan lo que significan los términos y expresiones matemáticas a emplear. En particular, en trigonometría se están utilizando expresiones nuevas para los alumnos como seno, coseno, tangente, etc., que tendrán que comprender y manejar, además de enriquecer su vocabulario.

### **C2. Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT).**

Los conocimientos, destrezas, habilidades y actitudes adquiridas al trabajar la trigonometría contribuyen al desarrollo de la competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología, pues los alumnos, a la hora de realizar los ejercicios y problemas que se les planteen, deberán aplicar el razonamiento matemático para resolverlos. Asimismo, este razonamiento matemático ayudará a la adquisición del resto de competencias. La trigonometría, al igual que en todos los contenidos de esta asignatura de Matemáticas, contribuye al desarrollo de esta competencia, ya que uno de los objetivos de aprendizaje corresponde a emplear las distintas formas del pensamiento matemático para describir la realidad y simbolizar nuestra actuación sobre ella. Como también es lógico, esto nos permite usar el razonamiento matemático, es decir, comprender las cosas desde el punto de vista matemático empleando para ello las herramientas que las Matemáticas ponen a nuestra disposición. De hecho, a lo largo de esta Unidad Didáctica se ha intentado que la mayor parte de las actividades hagan referencia a problemas reales o del mundo cotidiano, facilitando, de esa manera que el alumno pueda ver las aplicaciones prácticas e inmediatas de las Matemáticas.

### **C3. Competencia digital (CD).**

La competencia digital se trabaja por medio del uso adecuado de las tecnologías de la información y la comunicación. Si bien a estas edades la mayor parte de los alumnos poseen un elevado grado de esta competencia, se les propondrán algunas actividades para que puedan ejercitar su empleo de una de forma responsable, pues las TIC constituyen herramientas muy útiles tanto a la hora de resolver problemas como a la hora de comprobar sus soluciones.

### **C4. Competencia para aprender a aprender (CPAA).**

Esta competencia se desarrolla en el campo de la trigonometría, a través de la comprobación de resultados y autocorrección, por parte de los alumnos, así como por la revisión y corrección de las tareas por parte del profesor y su comprensión por parte del alumno.

En ningún caso se criminalizará el error, sino que, a través de él, se intentará que los alumnos reflexionen acerca del proceso que han seguido y los errores que han cometido: dónde y porqué los han cometido y como sería la forma correcta de razonar u operar, a fin de que, al realizar las próximas tareas, pueden aplicar lo que han aprendido sobre el error, evitando cometerlo de nuevo.

Por tanto, se promoverá que los alumnos hagan una reflexión crítica de su actuación, que les permita sacar conclusiones de cómo han interpretado y operado con el lenguaje matemático, para su aplicación posterior.

En el cuarto paso de la estrategia de Polya para la resolución de problemas, correspondiente a “mirar hacia atrás”, un aspecto clave es: ¿Puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema? Con él, claramente, se está enseñando al alumno a aprender a aprender.

### **C5. Competencias sociales y cívicas (CSC).**

Estas competencias se trabajan cuando los alumnos aprenden a convivir en el aula, valorando y respetando tanto a sus compañeros como al profesor. También se adquieren cuando los alumnos respetan los errores cometidos por los compañeros sin mofarse de ellos ni menospreciarlos por su nivel, procedencia o situación.

### **C6. Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor (SIE).**

Al plantear a los alumnos problemas, en muchos casos relacionados con la vida cotidiana, y que ellos tendrán que resolver, se favorece especialmente el sentido de iniciativa y el espíritu emprendedor, al tener los alumnos que establecer un plan de trabajo y aplicarlo, de modo similar a como lo harán en su vida cotidiana. Por otro lado, al encontrarse en situaciones de incertidumbre, p.e. en el caso de problemas, estos deberán ser capaces de tomar la iniciativa, optando por uno de los caminos que se les presentan, a la hora de tratar de solucionarlos. Dentro del método de Polya los pasos dos y tres: Elaborar un plan y Ejecutar el plan respectivamente, conllevan claramente el desarrollo de esta competencia en la medida que los alumnos, al enfrentarse a un problema, tendrán que planificar la estrategia a seguir, y asumir riesgos al encontrarse en una situación de incertidumbre, al mismo tiempo que deberán ser conscientes de las decisiones tomadas en cada caso y controlarlas, siendo capaces de ver las consecuencias de cada una.

### **C7. Conciencia y expresiones culturales (CEC).**

Las Matemáticas ya constituyen por sí mismas parte de la cultura universal, cuyo lenguaje propio y simbolismo supera la barrera que presentan los diferentes lenguajes y culturas, al ser su interpretación y uso común a toda

la humanidad, sea cual sea el origen de quien las emplee. Por tanto, servirse de ellas favorece el desarrollo de la competencia en conciencia y expresiones culturales.

La trigonometría, en particular, es parte integral de la Geometría, y esta se encuentra en innumerables manifestaciones artísticas y de ingeniería, siendo uno de los medios para representar e interpretar el mundo que nos rodea en una gran variedad de situaciones comunes, como pinturas, monumentos, estructuras metálicas, construcciones, etc. que en muchos casos constituyen parte de nuestro Patrimonio.

La aplicación concreta de estas competencias a cada uno de los objetivos de la Trigonometría de 4º de ESO, indicados en el punto anterior son:

Objetivos	CCL	CMCT	CD	CPAA	CSC	SIE	CEC
1		X					
2		X					
3		X	X				
4	X	X		X		X	X
5		X					
6		X					
7		X					
8		X					
9		X	X				
10		X					
11		X					
12		X					
13		X		X			
14		X					
15		X	X				
16		X	X	X			
17		X					
18		X	X	X			
19	X	X		X	X		X
20		X	X	X	X	X	X
21		X	X				
22		X	X	X	X	X	X
23		X	X				
24	X	X		X	X	X	X

Como se puede comprobar, la competencia que más se trabaja es, lógicamente, la matemática. Sin embargo, las competencias lingüística, y sociales y cívicas, además hacerlo claramente en los objetivos indicados, se trabajarán en un segundo plano de una manera continua a lo largo de la impartición de la materia de trigonometría.

La competencia lingüística se desarrolla al producirse la comunicación entre profesores y alumnos, al entender estos últimos las explicaciones, ejercicios, etc. que se les propongan y al producirse el feedback con el profesor, explicando lo que han entendido y lo que no, al realizar los ejercicios y explicar el proceso de resolución seguido, al escribir el examen, etc.

Las competencias cívica y social se trabajarán continuamente a lo largo de todo el desarrollo de esta unidad por parte del profesor, intentando la consecución de un adecuado clima en el aula.

### 3.3 Análisis de instrucción

Una vez efectuado el análisis de contenido, en el que se considera el tema matemático que se va a enseñar, y que, en este caso, se hará teniendo en cuenta una perspectiva histórica; y analizado el aprendizaje del estudiante y las dificultades que pueda encontrar en el análisis cognitivo; en el análisis de instrucción se estudiarán los medios que empleará el profesor para lograr los objetivos esperados. La atención en este análisis se centrará, por tanto, en la enseñanza.

Para ello, se consultarán, por un lado, los diferentes libros de texto que tratan esta materia haciendo un estudio comparado de los mismos, y por otro, teniendo en cuenta su análisis, se indicarán los principios que van a orientar las tareas seleccionadas para los alumnos, las cuales serán elegidas en función de cómo contribuyan a alcanzar los objetivos preestablecidos, intentando, en todo momento que dichas actividades faciliten la comprensión y fijación de los conceptos por parte de los alumnos. De igual modo, se intentará que esas actividades sirvan como ejemplo de aplicación de los conceptos estudiados, y con ello, que los alumnos minimicen los errores que puedan cometer al emplear tales conceptos.

Por último, se intentará motivar a los alumnos al presentarles retos asequibles y de dificultad graduada, cuya resolución esté su alcance, y que generen interés acerca de las aplicaciones prácticas de los conceptos estudiados.

Dichas tareas se seleccionarán de acuerdo a los dos principios indicados en el análisis cognitivo, y que se espera disminuyan la dificultad de aprendizaje de la trigonometría: la enseñanza a través de una perspectiva histórica y a través de actividades manipulativas y prácticas.

#### 3.3.1 Análisis comparado de los libros de texto

Los libros de texto se encuentran entre los recursos más utilizados en las aulas, sirviendo de guía tanto al profesor como al estudiante.

En general, todos están escritos por autores con amplia experiencia pedagógica, cumpliendo los requisitos del currículo marcado por la legislación, sin embargo, puede haber diferencias en las formas de presentación y enseñanza de las diferentes materias, en este caso de la trigonometría.

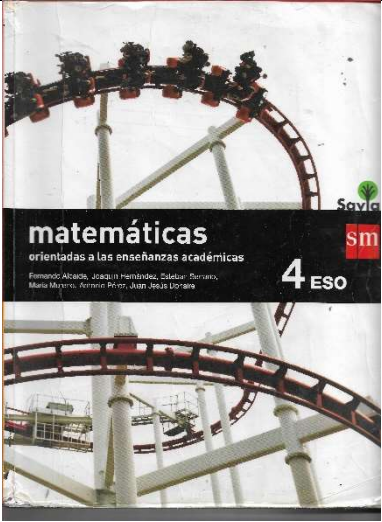
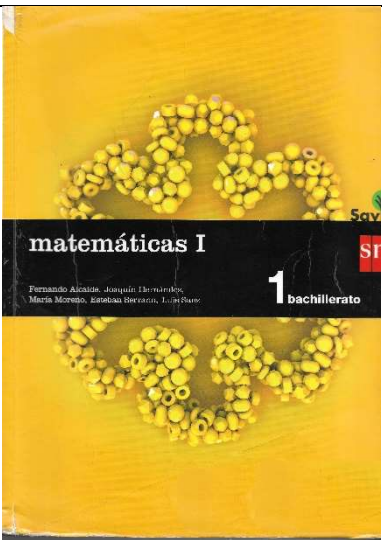
En este apartado se van a comparar libros de texto de tres editoriales diferentes, tanto de la asignatura de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de ESO como de Matemáticas I de 1º de Bachillerato, y en concreto de los capítulos que tratan la trigonometría en ambos cursos.

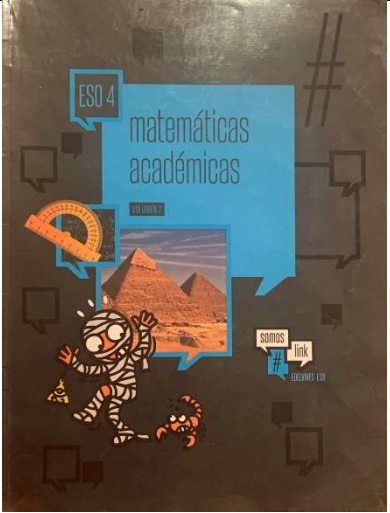
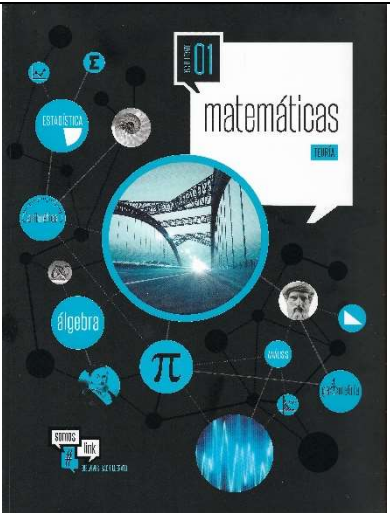

Se ha tenido en cuenta la adecuación del contenido de los libros analizados al currículo básico vigente, marcado por la legislación en ambas asignaturas (Real Decreto 1105/2014 y Ordenes EDU 362/2015 y 363/2015), así como los aspectos didácticos de los contenidos tratados; entre otros, se han analizado los siguientes:

- Introducciones motivacionales a la materia objeto de estudio.
- Claridad de los conceptos enunciados y rigor en las explicaciones.
- Profundidad del tema tratado.
- Apartados gráficos: capacidad de aclarar los conceptos, facilidad de interpretación, adecuación de los mismos, etc.
- Adecuación de las actividades propuestas a los contenidos estudiados y dificultad de las mismas.


Finalmente, se extraerán algunas conclusiones acerca de cómo tratan las editoriales estos conceptos.

Para realizar esta comparativa se han seleccionado los siguientes libros de texto, de tres editoriales, para cada uno de los cursos:

<p>Editorial SM. Proyecto Savia</p>	<p>Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas (4º ESO)</p>	
	<p>Matemáticas I (1º Bachillerato)</p>	

<p>Editorial Edelvives. Proyecto #somoslink</p>	<p>Matemáticas Académicas 4º ESO</p>	
	<p>Matemáticas 1º Bachillerato</p>	
<p>Apuntes Marea Verde</p>	<p>Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas: 4º B de ESO</p>	



	Matemáticas I 1º Bachillerato	
--	-------------------------------	--

La descripción detallada del contenido que cada uno de estos proyectos editoriales incluye en los capítulos dedicados a la trigonometría, así como la extensión de los mismos, su distribución, y el tipo de actividades que proponen en cada caso, se incluye en el Anexo 3 de este trabajo.

A continuación se hace un análisis resumen de las conclusiones obtenidas en dicho estudio.

#### - Análisis libros SM.

Adecuación de Objetivos y Contenidos: Los Objetivos Generales de la Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato marcados en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre sí se reflejan en los textos analizados de esta editorial. Concretamente, en el lenguaje empleado, se ha cuidado el respeto e igualdad por los alumnos y alumnas. Los textos están bien redactados y son de fácil comprensión; asimismo incentivan el uso de las tecnologías, por ejemplo, invitando a la realización de ejercicios con GeoGebra o enseñando a manipular la calculadora y, por último, integran los conocimientos del tema y algunos de los problemas propuestos, con sus aplicaciones en diferentes ámbitos, como la física, mediante problemas realistas, constatando que el conocimiento científico es un saber que se aplica en múltiples disciplinas.

Los Contenidos marcados por la legislación para la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanza Académicas de 4º de ESO o Matemáticas I de 1º de Bachillerato, están todos ellos reflejados en el texto e incluso, es el único de los analizados de 4º de ESO que trata las ecuaciones trigonométricas, que no aparecen en el currículo de este curso.

Los ejercicios y problemas propuestos a los alumnos se encuentran graduados desde ejercicios básicos hasta problemas con un grado de dificultad más elevado para que el alumno desarrolle su pensamiento matemático. Un apartado final “para pensar más” o “para profundizar” culmina la sección, con tareas de nivel 4 según la clasificación de Smith y Stein. En varias de ellas se pide al alumno expresamente que razone (con lo que deberán aplicar sus conocimientos matemáticos y reflexionar sobre ellos) y que justifiquen sus respuestas (con lo que tendrán que desarrollar su competencia lingüística, promoviendo el uso de la expresión verbal en matemáticas).

En muchos de los problemas (especialmente en el apartado “ponte a prueba” en 4º de ESO y “entorno matemático” de 1º Bachillerato) se muestran ejemplos de la vida real que deben resolverse aplicando

trigonometría, y en algunos de ellos se pide al alumno que realice su propio proyecto de forma manipulativa y lo explique, fomentando el desarrollo de su autonomía, la competencia lingüística y la competencia de aprender a aprender.

La conexión de conocimientos entre 4º de ESO y 1º de Bachillerato en estos libros está bien realizada, pues en 1º de Bachillerato se repasan los contenidos dados en 4º y apoyándose en ellos se amplían, siguiendo con ello el diseño en espiral de nuestro sistema educativo.

Por tanto, se pueden destacar como puntos fuertes de esta editorial: la claridad de las explicaciones; la buena organización de los conceptos explicados que permite seguir fácilmente el desarrollo de esta unidad; la inclusión de un esquema resumen al final de la misma; la presencia de actividades con aplicaciones reales y algunas de ellas manipulativas; y la inclusión de ejercicios y actividades motivacionales a través de hechos y problemas históricos.

#### **- Análisis libros Edelvives.**

Adecuación de Objetivos y Contenidos: Los Objetivos Generales de la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato sí se reflejan en los libros analizados de esta editorial. En concreto, el lenguaje empleado es en general bastante aséptico y los textos están bien redactados y son de fácil comprensión, si bien en 1º de Bachillerato algunos conceptos aparecen dos veces (caso de las razones trigonométricas de ángulos suplementarios o ángulos negativos). Se incentiva el uso de las tecnologías, por ejemplo, explicando la calculadora científica o GeoGebra. Los problemas de aplicación que se proponen se circunscriben al entorno matemático.

Los Contenidos marcados por la legislación para la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de ESO o Matemáticas I de 1º de Bachillerato están todos ellos reflejados en el texto.

Los ejercicios y problemas propuestos se encuentran graduados desde ejercicios sencillos hasta problemas con un grado de dificultad más elevado que favorecen el desarrollo del pensamiento matemático del alumno, sin embargo, el número y variedad de problemas propuestos en 4º de ESO es menor y se limitan a pedir únicamente el resultado, sin pedir su justificación o que los alumnos lo expliquen. En cambio, el número de problemas propuestos en 1º de Bachillerato es muy superior al encontrarse estos recogidos en un segundo libro.

Por último, similar al caso de SM, en algunos de los problemas se muestran ejemplos de la vida cotidiana que deben resolverse aplicando trigonometría.

En ambos cursos se pide a los alumnos que realicen un esquema de la unidad, lo cual favorece la competencia de aprender a aprender y en el caso de 1º de Bachillerato se propone la elaboración de un proyecto para ampliar el aprendizaje de la trigonometría desde un punto de vista histórico.

Se manifiesta buena coordinación entre los contenidos de 4º de ESO y 1º de Bachillerato adaptándose con ello al diseño en espiral.

Como conclusión se pueden destacar como puntos fuertes de esta editorial: la claridad de las explicaciones; que se pida a los alumnos realizar un esquema de la unidad y en el caso de 1º de Bachillerato, la propuesta de un trabajo basado en la historia de la trigonometría. Como punto débil se observa la escasez de actividades o problemas más integrados en la realidad, si bien el desarrollo de los contenidos es muy similar al caso de SM.

### - Análisis apuntes Marea Verde.

Adecuación de Objetivos y Contenidos: Los Objetivos Generales de la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato, al igual que en los casos anteriores, sí se reflejan en los textos analizados de esta editorial. En concreto, en el lenguaje empleado se han cuidado el respeto e igualdad por los alumnos y alumnas; los textos están bien redactados y son de fácil comprensión, con un lenguaje más cercano al alumno y menos formal que en los textos anteriormente analizados. Incentivan el uso de las tecnologías, por ejemplo, enseñando a manipular la calculadora, si bien no proponen ejercicios con GeoGebra; también ofrecen problemas reales en los que los alumnos pueden ver la aplicación práctica directa de los conocimientos adquiridos, dentro del entorno matemático.

Respecto a los Contenidos marcados por la legislación para la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de ESO o Matemáticas I de 1º de Bachillerato están todos ellos reflejados en el texto.

Los ejercicios y problemas propuestos a los alumnos se encuentran graduados con diferentes niveles de dificultad desde ejercicios sencillos hasta problemas con grados de dificultad altos. El número y variedad de problemas propuestos es elevado y en muchos de los problemas se muestran ejemplos de la vida real que deben resolverse aplicando trigonometría, si bien, en general se limitan a pedir únicamente el resultado, sin pedir su justificación o que los alumnos lo expliquen.

En el apartado de “curiosidades revista” de ambos cursos se exponen aplicaciones de la trigonometría en el mundo real, no ligados únicamente a las matemáticas, y en algunos casos vinculados a una perspectiva histórica, por ejemplo en 1º de Bachillerato se propone a los alumnos la realización de un proyecto de aplicación directa de la trigonometría, emulando el experimento de Eratóstenes.

La conexión de conocimientos entre 4º de ESO y 1º de Bachillerato en estos libros está bien realizada, pues, como en casos anteriores, en 1º de Bachillerato se repasan los contenidos dados en 4º y los nuevos contenidos se apoyan en ellos.

En conclusión, se pueden destacar como puntos fuertes de esta editorial: la claridad de las exposiciones, haciendo hincapié en aquellos aspectos que ofrecen más dificultades a los alumnos, la organización de los puntos explicados que permite seguir fácilmente el desarrollo de las unidades; la inclusión de un esquema resumen al final de la mismas; la presencia de actividades con aplicaciones reales y algunas de ellas manipulativas; y la inclusión de ejercicios y actividades motivacionales a través de hechos y problemas históricos.

Un aspecto que destaca es la flexibilidad que tienen estos apuntes a la hora de dedicar más o menos espacio a los contenidos, pues en el caso de las editoriales SM o Edelvives los autores están constreñidos a explicar los conceptos en un número determinado de páginas (generalmente una o dos), lo que se traduce en una diferencia de densidad entre los diferentes puntos tratados.

Con ello se puede deducir que los autores tienen experiencia en impartir el tema y conocen los puntos que los alumnos no comprenden o en los que cometen errores y les dedican el espacio suficiente para mejorar su entendimiento.

## - Conclusiones:

Una vez realizado el análisis de estos libros de texto se ha podido comprobar que, si bien los conceptos que enseñan son muy similares en todos ellos, al tenerse que ceñir todos ellos a la legislación común vigente, la manera de enfocarlo es diferente entre unas editoriales y otras.

Un detalle detectado en las editoriales SM y Edelvives es que en el caso de resolución de triángulos cualesquiera, cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos se indica que habría de obtenerse el tercer lado por el teorema del coseno, pero para la obtención de otro ángulo, en la editorial SM se aplica de nuevo el teorema del coseno (daría solución única), pero no dice qué hacer si se emplease el teorema del seno (que es posible), mientras que en Edelvives se recomienda obtener el ángulo por el teorema del seno, pudiendo dar lugar a dos soluciones que requerirían comprobación para encontrar la válida, cuestión que no aborda en ningún momento.

Esto lo considero un punto débil en el caso de SM y especialmente de Edelvives:

En el caso de SM se indica el camino recomendado, que conduce a una solución única, sin embargo, si un alumno optara por aplicar el teorema del seno, se encontraría ante una situación no explicada y podría dar lugar a un error en la resolución.

En el caso de Edelvives al recomendar aplicar el teorema del seno, sin indicar los problemas que puede conllevar, obvia una posible solución, (la de que el ángulo fuese mayor de  $90^\circ$ ), lo que puede conducir a los alumnos a descartarla por completo, siendo en algunos casos la solución correcta.

En cambio, en los apuntes de Marea Verde, en este caso de 1º de Bachillerato, se explica de una manera muy clara como utilizar el teorema del seno y los problemas que se derivan de él, y recomienda aplicarlo al lado menor para quedarse con la solución del ángulo agudo, pues, de existir una solución de ángulo obtuso correspondería al ángulo opuesto al lado mayor. Es el único de los tres textos en indicarlo, lo cual puede facilitar mucho al estudiante la resolución de triángulos, y viene a reforzar lo anteriormente dicho de que estos apuntes se detienen en los aspectos más difíciles del aprendizaje, a fin de facilitar su comprensión por el alumno, evidenciando la flexibilidad de estos apuntes.

En todo caso, la elección de un libro de texto debería estar ligado a cuatro aspectos interrelacionados:

- Lo que aporta el libro de texto.
- Los objetivos del Departamento.
- El conocimiento y la manera de explicar del profesor.
- El tipo de alumnos a los que se va a explicar el contenido.

Por esta razón, el docente, antes de proponer un libro concreto, debe realizar un análisis de las opciones posibles a fin de conocer lo que aporta cada una, y en función de los objetivos planteados por el Departamento y la tipología de los alumnos, se podrá optar por una u otra o incluso elaborar sus propios apuntes.

En todo caso, se considera que el profesor no debe ceñirse a un único libro de texto, pues siempre se pueden sacar ideas, conocimientos, tareas, etc. de los libros que no haya seleccionado u otras fuentes y que pueden complementar y enriquecer la enseñanza y el aprendizaje.

Se deberá tener en cuenta que el libro de texto no es sino un guion o material de apoyo para el profesor y el alumno a la hora de enseñar/aprender una materia y que dicho libro está diseñado para una media más o menos

amplia de estudiantes, por lo que el profesor deberá adecuar siempre su enseñanza al tipo de concreto de alumnos a los que está impartiendo clase y los cuales podrán requerir más o menos ejercicios o problemas, o que estos sean de un nivel u otro, siempre con el objetivo de que al final de la impartición de la Unidad Didáctica estos hayan comprendido los conceptos impartidos.

### 3.3.2 Planificación de actividades

Tal como se ha indicado, se va a desarrollar una Unidad Didáctica (UD) correspondiente al tema de trigonometría para el caso de 4º de ESO. Es en este curso donde los alumnos encuentran por primera vez los conceptos de la trigonometría, los cuales, tal como se ha visto en el apartado 3.2.1, presentan una importante serie de dificultades para su comprensión.

En la planificación de las actividades que se propondrán a los alumnos, su comprensión y aprendizaje, se tendrán en cuenta cuatro factores principales:

- Contenido matemático.
- Relación con el contexto y aproximación a situaciones de la vida cotidiana.
- Realización de actividades prácticas manipulativas con el objetivo de fijar y comprender los conceptos.
- Implicación del razonamiento personal.

#### 3.3.2.1 *Contenido matemático*

A la hora de planificar una actividad se tendrán en cuenta los conocimientos matemáticos necesarios para la resolución de la misma. Por ello, los alumnos deberán tener una serie de conocimientos previos que sirvan de base sobre la que se asienten otros nuevos, los cuales a su vez ayuden en la resolución de esa tarea concreta.

Previamente a la proposición de ejercicios y problemas, será necesario que el profesor explique los nuevos conceptos, bien directamente mediante su exposición magistral, bien mediante el visionado de videos o la lectura de artículos, textos, etc., de tal manera que el docente se asegure de que todos los conceptos matemáticos involucrados en el ejercicio hayan sido ya tratados y comprendidos.

Las actividades propuestas deben estar íntimamente relacionadas con el tema tratado en la Unidad Didáctica, a fin de conseguir la fijación y comprensión de los conceptos por parte del alumno.

#### 3.3.2.2 *Relación con el contexto y aproximación a situaciones de la vida cotidiana*

Para paliar el problema de la abstracción de los conceptos de la trigonometría se va a intentar enfocar las actividades propuestas a situaciones de la vida real, si es posible desde una perspectiva histórica, a fin de que los alumnos constaten la aplicación práctica de la trigonometría, haciendo la materia más motivadora y próxima al estudiante.

En el desarrollo de esta Unidad se intentará, por tanto, que los alumnos puedan ver la aplicación directa de la trigonometría y la resolución de triángulos en su vida cotidiana, así como su significado. En infinidad de diseños y formas geométricas presentes a nuestro alrededor aparecen triángulos, medidas de áreas, de distancias, etc. en las que se aplica trigonometría, que nos servirán de base para demostrar al alumno la importancia del aprendizaje y comprensión de esta Unidad.

Además, se propondrá al alumnado la realización de actividades en las que podrá aplicar de una manera directa y manipulativa los conceptos estudiados, haciendo al alumno protagonista de su propio aprendizaje.

### 3.3.2.3 *Realización de actividades prácticas manipulativas*

El empleo de actividades manipulativas tiene por objetivo la fijación de los conceptos explicados de manera teórica en clase, aplicando los principios de Dienes, quien considera necesarios cuatro principios básicos para la comprensión de los conceptos matemáticos, y en los que juega un importante papel la manipulación de materiales para la adquisición de dichos conceptos.

Estos principios están inicialmente orientados a los niños, sin embargo, se pueden generalizar a las edades de la Enseñanza Secundaria.

Dichos principios, adaptados a estas edades podrían ser:

- Principio dinámico: para la construcción de conceptos matemáticos el alumno debe tener experiencias concretas con un material adecuado.
- Principio de constructividad: es más fácil entender a través de la experiencia y es el alumno el que debe construir y elaborar los conceptos matemáticos involucrados.
- Principio de variabilidad perceptiva: el aprendizaje de un concepto debe incorporar las distintas situaciones en que se puede encontrar, por lo que es conveniente el uso de diferentes materiales.
- Principio de variabilidad matemática: un concepto matemático abarca tanto variables como elementos constantes. Se deberán modificar lo máximo posible las variables para que resalten de una manera clara los elementos constantes. A mayor diversidad de las actividades, mejor será la comprensión de éste por parte del alumno.

Por ello, se han previsto algunas actividades manipulativas en clase, como por ejemplo, la demostración del teorema de Pitágoras por medio de Papiroflexia o cómo construir un triángulo rectángulo con una cuerda de 12 nudos.

Sin embargo, la mayor parte de las actividades manipulativas se van a realizar en el exterior del aula, organizando prácticas de trigonometría para resolver problemas reales y calcular medidas y distancias de objetos tangibles. Mediante estas actividades se pretende plantear a los alumnos problemas que deban resolver empleando la teoría y formulación expuestas en clase, pero aplicadas directamente al mundo real.

Estas actividades tendrán un trasfondo histórico por el cual los alumnos podrán comprender cómo muchos conceptos fueron planteados siglos atrás y cómo se ha obtenido su solución a lo largo del tiempo.

Ejemplo de este tipo de actividades es la medida de la dirección del túnel de Eupalinos, la medida de la latitud a que nos encontramos, la medida de la altura de elementos a los que se puede acceder, o no, al pie de los mismos, la medida de distancias inalcanzables o inaccesibles, etc.

Todas estas actividades se desarrollarán en el capítulo 4.8 de la Unidad Didáctica, en la que se tratarán las Actividades de enseñanza y aprendizaje.

### 3.3.2.4 *Implicación del razonamiento personal*

La resolución de las actividades podrá tener mayor o menor dificultad en función de su complejidad. Por esta razón, se propondrán tareas con un nivel creciente de dificultad en las que los alumnos deberán aplicar los conocimientos adquiridos.

Se comenzará con de ejercicios sencillos, y a medida que vayan asimilando dichos conocimientos y adquiriendo soltura en su manejo, se irá aumentando la complejidad de las actividades y problemas.

Con este objetivo se empleará la clasificación de Smith – Stein, en la cual se dividen las tareas y problemas matemáticos en 4 grados de dificultad de acuerdo a la figura siguiente:

Figura 11

Nivel de dificultad de ejercicios y problemas según Smith y Stein.

Nivel de D. C.	Tipo de cuestión	Categoría	Características
BAJO Memorización	<i>Reciente directo</i>	Procedimiento de resolución	(1.2) No se resuelven usando algoritmos, sino recurriendo a datos recordados o tomados directamente del enunciado.
		Finalidad	(1.1) Reproducción de elementos (datos, reglas, fórmulas, etc.) previamente aprendidos, recordados o tomados directamente del enunciado.
		Esfuerzo requerido	(1.3) Su resolución con éxito apenas requiere esfuerzo. No son ambiguas. Indican claramente qué hacer.
		Contenidos implícitos	(1.4) No tienen conexión con los conceptos o significado subyacente a los datos, reglas, fórmulas o definiciones que se están aprendiendo o reproduciendo.
		Explicaciones Representación de la solución	(1.5) No requieren explicaciones. (1.6) El enunciado utiliza la representación geométrica y su resolución, en caso de representarse, utilizará la aritmética.
BAJO-MEDIO Algoritmos Sin Conexiones	<i>Término inmediato Término próximo</i>	Procedimiento de resolución	(2.1) Son algorítmicas. Indican expresamente qué algoritmo usar o es evidente por el contexto.
		Finalidad	(2.4) Enfocadas a obtener respuestas correctas pero no a desarrollar la comprensión matemática.
		Esfuerzo requerido	(2.2) Su resolución con éxito requiere un esfuerzo limitado. Existe poca ambigüedad sobre qué hacer y cómo hacerlo.
		Contenidos implícitos	(2.3) Existe conexión implícita entre los conceptos o significados subyacentes y los algoritmos usados. A pesar de existir dicha conexión, el estudiante no tiene por qué percatarse de ella para resolver correctamente el problema.
		Explicaciones Representación de la solución	(2.5) Explicaciones que se enfocan únicamente a describir el algoritmo usado. (2.6) En su resolución se pueden utilizar múltiples representaciones (aritmética, diagramas visuales, materiales manipulativos, etc.), pero sólo se usan aquellas que resultan de más ayuda para resolver el problema.



Nivel de D. C.	Tipo de cuestión	Categoría	Características
MEDIO-ALTO Algoritmos Con Conexiones	<i>Término próximo</i> <i>Término lejano</i>	Procedimiento de resolución	(3.2) Las cuestiones anteriores de la actividad sirven como sugerencia explícita o implícita de la vía a seguir, que es un algoritmo general con conexiones estrechas con las ideas conceptuales subyacentes.
		Finalidad	(3.1) Orientan al estudiante a usar algoritmos con el objetivo de que tenga una comprensión más profunda de los conceptos e ideas matemáticos.
		Esfuerzo requerido	(3.4) Su resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo. Se pueden utilizar algoritmos generales, pero al aplicarlos, hay prestar atención a la estructura del patrón.
		Contenidos implícitos	(3.5) Los estudiantes necesitan considerar conscientemente ideas conceptuales que subyacen a los algoritmos para resolver con éxito la cuestión.
		Explicaciones	(3.6) Explicaciones que hacen referencia a las relaciones subyacentes utilizando casos concretos (posiciones particulares de la serie).
		Representación de la solución	(3.3) La resolución conecta diversas representaciones. Se representan de varias formas y los estudiantes utilizan aquellas que les llevan a un razonamiento más abstracto.
ALTO Hacer Matemáticas	<i>Término general</i>	Procedimiento de resolución	(4.1) Requieren pensamiento complejo y no algorítmico. El enunciado no sugiere ninguna forma de resolución. (4.5) Requieren que los estudiantes analicen la actividad y examinen restricciones que puedan limitar posibles estrategias de resolución y soluciones.
		Finalidad	(4.2) Los estudiantes necesitan explorar y comprender los conceptos, procesos o relaciones matemáticos.
		Esfuerzo requerido	(4.6) Requieren un considerable esfuerzo cognitivo. (4.3) Requieren de los estudiantes auto-control y auto-regulación de los propios procesos cognitivos.
		Contenidos implícitos	(4.4) Requieren que los estudiantes accedan a conocimiento y experiencias relevantes y los usen adecuadamente durante la resolución de la actividad.
		Explicaciones	(4.7) Explicaciones y demostraciones sobre el término general de la serie.
		Representación de la solución	(4.8) En la resolución se utiliza una representación algebraica, que algunas veces puede estar conectada con otras formas de representación.

Nota: Tomado de “Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos”, de Benedicto Baldonado, Clara; Jaime Pastor, Adela; Gutiérrez Rodríguez, Ángel; (2015).

Sin embargo, se ha de tener en cuenta el nivel de los alumnos en cada etapa, pues si bien en un primer momento algunos problemas o tareas puedan ser de dificultad 3, pueden pasar a ser de dificultad menor (niveles 1 o 2) si están habituados a hacerlas o las han hecho en cursos anteriores.

Teniendo en cuenta lo anterior, se intentará programar actividades, ejercicios y problemas, con niveles de dificultad progresiva, para el caso concreto de 4º de ESO, intentando que los alumnos vayan fijando los conceptos y los apliquen a niveles de dificultad creciente.



## 4 Propuesta de Unidad Didáctica

En este capítulo se va a desarrollar la propuesta de la Unidad Didáctica “Resolución de triángulos y aplicaciones de la trigonometría”.

Para este propósito se empleará todo lo indicado anteriormente en este trabajo, comprendiendo el marco curricular, los conceptos matemáticos involucrados, la evolución histórica de los mismos, su aplicación a la enseñanza, las dificultades esperadas para el aprendizaje por parte de los alumnos, etc.

Con esta Unidad Didáctica se persigue un aprendizaje significativo de los conceptos impartidos, y para ello se intentará motivar a los alumnos tomando como base, por un lado, la historia de la trigonometría y por otro, la realización de actividades manipulativas, por medio de las cuales los alumnos podrán comprobar las aplicaciones prácticas de la trigonometría.

Por medio de la resolución de problemas y realización de actividades prácticas, se pretende incrementar la autonomía de los alumnos, facilitar la toma de decisiones propias por su parte, así como el ejercicio de la reflexión y la autocrítica constructiva acerca del proceso seguido y de los resultados alcanzados.

La Unidad Didáctica desarrollada se compone de los doce apartados siguientes:

- Introducción contextual.
- Competencias clave.
- Objetivos didácticos.
- Contenidos.
- Metodología.
- Recursos.
- División de tiempos y espacios.
- Actividades de enseñanza y aprendizaje.
- Planes complementarios.
- Evaluación.
- Atención a la diversidad.
- Evaluación y conclusión de la Unidad Didáctica.

### 4.1 Introducción contextual

Los alumnos, al llegar a 4º de ESO, se encuentran con la posibilidad de optar entre dos modalidades dentro del mismo curso: académica y aplicada, cada una de las cuales incorpora una asignatura de matemáticas (ligeramente diferentes entre sí), existiendo, por tanto, en 4º de ESO una asignatura de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Aplicadas y otra de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas, estando, esta última dirigida, en principio, a la preparación para los estudios de Bachillerato.

La Unidad Didáctica que se desarrolla a continuación se incluye dentro de la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de ESO y corresponde a la UD Resolución de triángulos y aplicaciones de la trigonometría, incluida en el bloque 3, Geometría, uno de los cinco bloques en que el BOCyL (ORDEN EDU/362/2015, de 4 de mayo) divide los contenidos de esta asignatura.

En función de los contenidos marcados en la legislación, los cuales se incluyen en Anexo 2, se ha dividido la asignatura en un total de 14 unidades didácticas, del siguiente modo:

- Bloque 1: Contenidos comunes, el cual se desarrolla a lo largo de toda la asignatura.
- Bloque 2: Números y álgebra: UD 1, 2, 3, 4.
- Bloque 3 Geometría: UD 5, 6, 7.
- Bloque 4: Funciones: UD 8, 9, 10,11.
- Bloque 5: Estadística y probabilidad UD 12, 13, 14.

En función de los contenidos marcados, el bloque de geometría se puede dividir en tres unidades didácticas diferentes:

UD 5: Semejanza y trigonometría.

UD 6: Resolución de triángulos y aplicaciones de la trigonometría.

UD 7: Geometría analítica.

En concreto, se va a desarrollar la Unidad Didáctica correspondiente a Resolución de triángulos y aplicaciones de la trigonometría.

El bloque de Geometría está bastante ligado con el anterior: Números y álgebra, puesto que los alumnos deberán tener conocimientos de operaciones con números enteros y racionales, expresiones algebraicas, etc.

El desarrollo de esta Unidad Didáctica debe basarse en los conocimientos previos que posee el alumno, de acuerdo al modelo de aprendizaje significativo: según esta teoría un contenido es significativo cuando tiene una lógica propia o puede establecerse por el alumno; para ello, los nuevos conocimientos han de basarse en los previos, al tiempo que el alumno debe poseer organizadores avanzados que le permitan establecer una conexión entre lo que ya conoce y lo que necesita conocer.

El trabajo del profesor debe ser, por tanto, favorecer el desarrollo de esos organizadores avanzados, al tiempo que se introducen nuevos conocimientos que se basen en los anteriores.

Dado el diseño en espiral de nuestro sistema educativo, a medida que se promociona un curso se recuerdan en general los contenidos dados en el curso o cursos anteriores, ampliándose dichos contenidos en base a lo ya conocido y añadiendo un grado mayor de dificultad.

Los conocimientos previos que debe poseer el alumno a la hora de comenzar a trabajar el campo de la trigonometría en 4º de ESO serían, como mínimo los siguientes:

**De cursos anteriores:**

- En cuanto a la Geometría:
  - El concepto de ángulo y tipos de ángulo.
  - Polígonos, en particular triángulos.
  - Semejanza y teorema de Tales, repasado en la UD 5.
  - Teorema de Pitágoras, que se repasará en esta UD.
  - Fórmulas para la determinación de perímetros y áreas de polígonos, que se repasarán en esta UD.
  - Fórmulas para la determinación de perímetros y áreas de figuras circulares, que se repasarán en esta UD.
  - Lugares geométricos: altura, mediana, mediatriz, bisectriz.

- En cuanto a números:

- Operaciones con números enteros y racionales.
- Jerarquía de operaciones.
- Operaciones combinadas: sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, cuadrados, raíces cuadradas.

**De este mismo curso:**

Esta Unidad Didáctica, tal como se ha indicado, correspondería a la 2ª prevista dentro del bloque 3 Geometría y se encuentra íntimamente ligada a los contenidos desarrollados en la unidad anterior (Semejanza y trigonometría), que aportará los conocimientos fundamentales para el desarrollo de la UD propuesta.

Por tanto, para la comprensión y asimilación de los contenidos previstos en esta Unidad Didáctica, los alumnos deberán poseer los siguientes conocimientos básicos de unidades didácticas anteriores:

- Conocimiento y manejo de las razones trigonométricas de un ángulo agudo.
- Conocimiento y manejo de las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.

En todo caso, antes del comienzo del bloque de Geometría, se realizará una prueba, a fin de comprobar los conocimientos de partida de los alumnos en estos campos.

**Temporalización y Agrupamientos**

La asignatura de Matemáticas para este 4º curso de ESO, según la legislación vigente, se imparte a razón de cuatro sesiones por semana durante los siete meses del curso lectivo.

Así pues, si se tienen en cuenta las vacaciones, festivos etc., y tomando como base el calendario escolar del curso 2020-2021 en Castilla y León, que comenzó el 14/09/2020 y finalizará el 23/06/2021, con clases de Matemáticas de lunes a jueves, se tendría un total de 140 sesiones, sin contar el día de inicio y los tres de la última semana del curso.

Considerando que hay tres evaluaciones, con un examen de recuperación por evaluación y el examen final del curso, quedarían un total de 136 sesiones a repartir entre las diferentes unidades didácticas, lo que indica una media de 9 sesiones por unidad didáctica, con un total de 10 sesiones para fiestas locales, descuadres y ajustes en función de las necesidades de los alumnos.

De acuerdo a este calendario, la primera evaluación incluiría las unidades didácticas 1 a 5, en la segunda evaluación las unidades didácticas 6 a 10 ambas inclusive y en la tercera evaluación las unidades 11 a 14 incluidas, de acuerdo al siguiente esquema:

	1ª evaluación	2ª evaluación	3ª evaluación
Números y álgebra	UD 1, 2, 3, 4		
Geometría	UD 5	UD 6, 7	
Funciones		UD 8, 9, 10	UD 11
Estadística y probabilidad			UD 12, 13, 14

A la Unidad Didáctica “Resolución de triángulos y aplicaciones de la trigonometría”, primera unidad impartida en la segunda evaluación, se le asigna un total de nueve sesiones, de las cuales, la última, corresponderá a un examen de la misma.

## 4.2 Competencias clave

La contribución concreta de esta Unidad Didáctica al desarrollo de las diferentes competencias es expresa a continuación:

### C1. Competencia en comunicación lingüística (CCL).

Los alumnos en esta Unidad Didáctica desarrollan esta competencia de diferentes maneras, por ejemplo, a la hora de escuchar las explicaciones impartidas, leer los apuntes o el libro de texto, realizar búsquedas para los trabajos y a la hora de comprender los enunciados de los problemas, así como en el momento de preguntar dudas o explicar los resultados obtenidos. También se desarrolla cuando se pide a un alumno que explique el resultado obtenido y cómo ha llegado a él, así como las dificultades que ha encontrado.

Por otro lado, se trabajarán expresiones nuevas que deberán asimilar y comprender para su uso posterior, como por ejemplo: resolución de triángulos, hipotenusa, cateto, seno, coseno, etc.

### C2. Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT).

Es la competencia que más se trabajará a lo largo de esta UD, pues, no en vano, constituye el fundamento de la asignatura de Matemáticas.

Al encontrarse con expresiones matemáticas, tener que realizar operaciones, y enfrentarse a problemas matemáticos se está trabajando de manera clara en la adquisición de esta competencia. La resolución de los problemas que se planteen a los alumnos se hará por medio de las herramientas matemáticas que conocen, así como las nuevas que se desarrollan en esta unidad, como los teoremas del seno y del coseno.

Por ello, es esencial que los alumnos aprendan por sí mismos a seleccionar y manejar adecuadamente las herramientas conducentes a la resolución del problema planteado.

A lo largo de esta Unidad Didáctica se ha intentado que la mayor parte de los problemas hagan referencia a situaciones reales del mundo cotidiano, facilitando, de esa manera que el alumno pueda constatar las aplicaciones prácticas e inmediatas de las Matemáticas.

### C3. Competencia digital (CD).

Se trabajará por medio del uso de las tecnologías de la información y la comunicación. En particular, a la hora de trabajar con la calculadora o con el programa Geogebra. Se promoverá el empleo de internet para la búsqueda y contraste de diferentes contenidos, mediante su uso responsable.

### C4. Competencia para aprender a aprender (CAA).

A lo largo de esta unidad se promoverá esta competencia mediante el empleo de la reflexión autocrítica por parte de los alumnos. Cuando estos cometan un error deberán encontrar donde lo han cometido, por qué se ha producido y cómo se podría haber evitado.

A la hora de plantear y resolver un problema, los alumnos deberán optar por usar una de las herramientas matemáticas que conocen, y ver si les llevan a la solución. Se observará que en varios problemas puede haber más de una vía de solución, por lo que, en lugar de un aprendizaje memorístico, se intentará que ellos mismos razonen las posibles soluciones.

Por otro lado, en el análisis de situaciones y problemas históricos, se explicará la solución encontrada en su día, enseñando los procesos de razonamiento que se siguieron y las soluciones encontradas. Estos procesos seguidos les podrán servir como guía a la hora de resolver sus propios problemas en el futuro.

#### C5. Competencias sociales y cívicas (CSC).

Estas competencias se trabajarán de forma continuada en el aula y en las actividades propuestas, velando en todo momento por la convivencia pacífica en el aula y el respeto a los demás y a sus opiniones. En los trabajos en grupo aprenderán a convivir con sus compañeros y a gestionar la posibilidad de encontrarse con opiniones diferentes entre los participantes.

#### C6. Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor (CSIEP).

En esta unidad se desarrollará esta competencia a la hora de plantear a los alumnos situaciones problemáticas similares a las que se pueden encontrar en la vida ordinaria, ante las cuales tengan que tomar una decisión. Ello será frecuente en esta Unidad a la hora de realizar problemas y actividades prácticas, donde deberán reflexionar y optar por la solución que les parezca más prometedora, a priori.

En algunos casos, estas iniciativas se verán coronadas de éxito y en otros no, pero deberán aprender de los errores que cometan y no desanimarse. Se tratará de que los alumnos comprueben que, si no se toma la iniciativa de una manera fundamentada y se quedan bloqueados, o la toman sin pensar y reflexionar, a buen seguro no se alcance la resolución del problema planteado.

#### C7. Conciencia y expresiones culturales (CEC).

En esta Unidad Didáctica va a tener un peso importante la historia de la trigonometría, donde se explicará, mediante ejemplos prácticos, la evolución de este campo a lo largo de los siglos y las diferentes culturas. Se mostrará cómo el conocimiento actual se basa en aportaciones y descubrimientos de personas de muy diferentes épocas, lugares y culturas.

Con ello se enseñará a los alumnos las diferentes expresiones culturales y la aportación de las mismas, así como la interrelación existente entre las diferentes culturas, las cuales no son aisladas, sino que interaccionan entre ellas.

Por otra parte, la trigonometría se ha empleado en innumerables creaciones artísticas y tecnológicas, con manifestaciones diversas en una gran variedad de situaciones comunes, como monumentos, estructuras metálicas, edificaciones, etc. que en muchos casos constituyen parte de nuestro Patrimonio.

### 4.3 Objetivos

Los objetivos a alcanzar en cada una de las asignaturas y bloques de la Educación Secundaria Obligatoria, vienen marcados en la orden EDU/362/2015. Los criterios de evaluación correspondientes a la trigonometría para el caso de 4º de ESO se incluyen en el Anexo 2 de este trabajo, habiéndose tenido en cuenta para la elaboración de esta Unidad Didáctica.

En cuanto a los objetivos específicos marcados por el autor de esta UD, entendidos como los conocimientos y aptitudes que deben alcanzar los alumnos al finalizar la misma, se han expuesto en el capítulo 3.2.2: Expectativas de aprendizaje para el conjunto de la trigonometría de 4º de ESO; sin embargo, se extraen a continuación, únicamente, los específicos de esta Unidad Didáctica.

#### **IV- Resolución de triángulos.**

- 15) Comprensión y manejo del teorema de Pitágoras y su demostración.
- 16) Capacidad para la resolución de triángulos rectángulos en función de diferentes elementos.
- 17) Comprensión y manejo de los teoremas del seno y del coseno.

- 18) Capacidad para la resolución de un triángulo cualquiera, en función de diferentes elementos.
- 19) Analizar y comprender los ejemplos de resolución de triángulos a lo largo de la historia.

#### V- Aplicaciones de la trigonometría.

- 20) Capacidad para el cálculo de longitudes y su aplicación al caso de distancias inalcanzables y a alturas.
- 21) Capacidad para la aplicación de la trigonometría para el cálculo de áreas de polígonos.
- 22) Capacidad para calcular áreas de polígonos por triangulación, y sus aplicaciones.
- 23) Capacidad para calcular volúmenes empleando trigonometría.
- 24) Analizar y comprender los ejemplos de aplicación de la trigonometría a lo largo de la historia.

A continuación, se presenta la tabla que correlaciona cada uno de los objetivos con las competencias básicas que se trabajan para alcanzarlos, teniendo siempre como objetivo final el desarrollo competencial del alumno:

Objetivos	CCL	CMCT	CD	CPAA	CSC	SIE	CEC
15		X	X				
16		X	X	X			
17		X					
18		X	X	X			
19	X	X		X	X		X
20		X	X	X	X	X	X
21		X	X				
22		X	X	X	X	X	X
23		X	X				
24	X	X		X	X	X	X

Como se puede observar, la competencia que más protagonismo tiene en esta Unidad Didáctica es la matemática. Sin embargo, otras dos competencias se trabajarán, en un segundo plano, de una manera continua a lo largo de esta unidad, como son la lingüística y la competencia social y cívica, tal como se ha indicado anteriormente, si bien, se ha explicitado en la tabla anterior únicamente aquellos puntos donde estas aparecen de una forma más clara y explícita.

#### 4.4 Contenidos

La materia que se va a impartir en esta Unidad Didáctica se basa en los contenidos mínimos indicados en la orden EDU/362/2015, los cuales se han incluido en el Anexo 2, considerados estos como un mínimo a impartir en la elaboración de esta Unidad Didáctica. Los directamente aplicables en esta Unidad Didáctica son:

*Relaciones métricas en los triángulos.*

*Resolución de triángulos rectángulos y oblicuángulos aplicando trigonometría elemental.*

*Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes.*

Se indican a continuación los contenidos que se van a impartir en esta Unidad, clasificándolos según sus diferentes funciones.

### **- Contenidos conceptuales:**

Se refieren a los nuevos conocimientos correspondientes a diferentes conceptos matemáticos, en concreto, serán los siguientes:

- Teorema de Pitágoras y su demostración.
- Resolución de triángulos rectángulos.
- Teoremas del seno y del coseno.
- Resolución de un triángulo cualquiera.
- Ejemplos de resolución de triángulos a lo largo de la historia.
- Cálculo de longitudes. Aplicaciones a distancias inalcanzables y cálculo de alturas.
- Cálculo de áreas de polígonos.
- Cálculo de áreas de polígonos por triangulación, aplicaciones.
- Cálculo de volúmenes.
- Ejemplos de aplicaciones de la trigonometría a lo largo de la historia.
- Empleo de herramientas informáticas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.

### **- Contenidos procedimentales:**

Corresponde a los contenidos mediante los cuales se enseña a los alumnos cómo operar y ejecutar acciones. Abarcan las destrezas, estrategias y procesos a emplear para alcanzar un fin.

Para ello, se explicarán a los alumnos los procesos a seguir para qué, a partir de elementos conocidos, obtener la solución buscada.

En este caso se pueden dividir entre generales y particulares. Dentro de los generales se incluyen los cuatro pasos de Polya para la resolución de problemas:

- Entender el problema.
- Configurar un plan.
- Ejecutar el plan.
- Mirar hacia atrás.

Dentro de los particulares se incluyen:

- Reconocimiento de los diferentes elementos de un triángulo.
- Los distintos procedimientos a emplear para la resolución de triángulos en función de si es rectángulo o no y cómo se resolvería a partir de los datos conocidos.
- Los procedimientos a emplear para el cálculo de áreas y volúmenes.
- La resolución de problemas trigonométricos.
- Empleo de esquemas y dibujos para visualizar los problemas.
- La identificación de las diferentes aplicaciones de la trigonometría a lo largo de la historia y en la vida cotidiana.

### **- Contenidos actitudinales:**

A lo largo de la Unidad se inculcarán a los alumnos normas, valores, y actitudes, así como formas de conducta, orientadas a favorecer, entre otros elementos, la convivencia y confianza en uno mismo y en los demás.

Entre ellas se incluirán:

- Presentación ordenada y limpia del cuaderno de clase.
- Valorar y favorecer la participación de los alumnos.
- Respeto por las opiniones de los demás.
- Aceptación de la diversidad.
- Cooperación con los compañeros para la realización de los ejercicios prácticos.

## 4.5 Metodología

En este apartado de metodología se incluye todo aquello que incide en la organización del proceso de enseñanza – aprendizaje de esta UD, entre lo que se puede incluir la estrategia a emplear por el profesor para la transmisión de conocimientos, el papel a desempeñar por alumnado y el profesor, la tipología de las actividades propuestas, su secuenciación, etc.

La metodología empleada se procurará sea flexible con el objetivo de adaptarse a las necesidades individuales y grupales, de tal manera que sea posible la introducción de modificaciones en la medida que sean necesarias. Se intentará que esta sea activa y participativa, promoviendo el trabajo individual y colectivo, tanto dentro como fuera del aula, e incorporará abundantes menciones al entorno del alumno y a su vida cotidiana.

Se deben tener en cuenta las especiales condiciones originadas por la pandemia, la cual imposibilita p.e. que los alumnos salgan a la pizarra. Como alternativas, se plantearán diferentes situaciones de trabajo, a fin de diversificar en lo posible los medios empleados y se intentará que los alumnos realicen aprendizajes significativos y funcionales.

A la hora de exponer los nuevos contenidos se alternará una **metodología expositiva** (explicación teórica de los nuevos conceptos) y **constructivista** (en la cual los alumnos podrán, a partir de diferentes situaciones de la vida real, comprender y asimilar los conceptos explicados), de tal manera que el alumnado pueda descubrir y relacionar los conceptos de la trigonometría, ayudando a que los nuevos contenidos se asienten en los que ya poseen de temas anteriores.

La exposición no será en modo alguno rígida, sino que los alumnos podrán, en cualquier momento, expresar sus dudas y dificultades en clase, y el profesor podrá preguntar a los alumnos cuestiones para ver su seguimiento o simplemente para saber si le siguen o le han comprendido, de tal manera que pueda haber un diálogo continuo entre profesor y alumno, en otras palabras, que la exposición no se haga en un único sentido sino que los alumnos devuelvan al profesor un feed-back acerca del seguimiento y aprovechamiento que hacen de esa exposición.

El profesor utilizará los medios disponibles en el aula y los previstos para cada caso particular, los cuales se indicarán más adelante.

En el desarrollo de la clase, a medida que se introduzcan nuevos contenidos, se alternarán estos con la propuesta de actividades, ejercicios y problemas, de diferentes grados de dificultad a realizar por los alumnos, de tal modo que estos les sirvan para comprender y fijar los conceptos explicados, concediendo importancia a la resolución de los mismos. Estas tareas estarán basadas, en la medida de lo posible, en situaciones que el alumno pueda encontrar en su vida cotidiana, y serán realizadas por medio de un **trabajo individual** reflexivo o un **trabajo cooperativo**, en función del planteamiento y características de las mismas.



El trabajo individual consistirá en la realización de ejercicios y problemas, en el aula o en casa, con diferente grado de dificultad según la escala de Smith y Stein, intentando con ellos que el alumno fije los conceptos y observe sus aplicaciones prácticas.

Para la corrección de las tareas en clase, se preguntará a los alumnos los resultados que han obtenido en cada caso. Con ello se fomenta una correcta expresión oral por parte de los alumnos.

Si los resultados que exponen los alumnos no son correctos, la revisión y corrección de dichas tareas la efectuará el profesor en la pizarra, permitiendo que los alumnos puedan exponer sus dudas y que vean donde y por qué han cometido el error para poder evitarlo en el futuro.

Dado el nivel de abstracción de los conceptos de trigonometría, a fin de facilitar su comprensión, se optará por la realización de varias actividades prácticas cooperativas fuera del aula que permitan aplicar de forma inmediata a la vida real el concepto de la trigonometría y la resolución de los triángulos y su significado.

Las actividades prácticas que se van a proponer corresponden, en general, a trabajos grupales a desarrollar conjuntamente por varios alumnos. Según estudios realizados, los grupos deberán ser heterogéneos, por ser más eficaces para el aprendizaje que aquellos en los que se les agrupan en función de sus capacidades, habilidades o cualquier otro criterio.

En estos grupos se aplicará la metodología de los grupos cooperativos, en los cuales, cada uno de los integrantes del mismo tendrá un rol:

- Supervisor: controla que en el grupo cada uno de los miembros haya realizado su tarea.
- Coordinador: regula el turno de palabra dentro del grupo y coordina la actividad.
- Moderador: mantiene el orden en el grupo si hay conflictos, y media en ellos.
- Secretario: agrupa y resume lo realizado por cada integrante, anotando las medidas realizadas.
- Portavoz: habla por todo el grupo.

Si bien el grupo permanecerá estable a lo largo del trimestre, los roles de los diferentes alumnos irán rotando en cada actividad grupal, a fin de que todos ellos puedan actuar en los diferentes roles, con el objetivo de que el alumno más inhibido actúe como portavoz, el más inquieto como moderador, etc.

Habrán otras actividades colectivas en las que no será necesario aplicar roles, por ejemplo, caso de llevarse a cabo, las visitas por la ciudad buscando aplicaciones prácticas de la trigonometría.

A través de los problemas que se planteen a los alumnos en clase, otra metodología que se empleará es la **enseñanza sobre la resolución de problemas**, aplicando para ello la propuesta por Polya, válida no solo para problemas matemáticos, sino también para otras materias y en general para la vida cotidiana.

El objetivo es que los alumnos aprendan a buscar y usar estrategias, de manera que lleguen a adquirir ciertas habilidades, técnicas y actitudes que les permitan resolver problemas y que favorecen la reflexión y discusión sobre el propio proceso. De esta manera la resolución de problemas se convierte en un contenido de la asignatura y una actividad que los alumnos deben aprender a desarrollar.

Como guion para las clases se tendrá el libro de texto recomendado por el Departamento, sin embargo, los alumnos deberán proceder a la toma de apuntes propios durante la explicación por parte del profesor intentando, de esta manera, fomentar en ellos la costumbre de escribir de manera limpia y clara, contribuyendo de esta manera al desarrollo de la competencia lingüística.

Estos apuntes, junto con las actividades que se propongan a los alumnos deberán ser recogidos en un cuaderno de clase. Éste será, por tanto, un elemento fundamental de consulta, el cual será revisado y valorado por el profesor, por ello, las hojas deben estar numeradas y su contenido limpio y ordenado. El alumno, por otra parte, deberá ir aprendiendo a subrayar lo importante y a hacer esquemas, favoreciendo de esa manera su capacidad de comprensión y síntesis.

A la hora de realizar una actividad o en la resolución de problemas, se insistirá especialmente en la lectura comprensiva de los enunciados, de acuerdo a la estrategia de solución de problemas de Polya.

Se utilizarán en lo posible los recursos TIC como calculadoras y aplicaciones o programas informáticos que ayuden a la hora de realizar cálculos largos o repetitivos, facilitando además la comprensión de los conceptos y contribuyendo a la adquisición de la competencia digital.

En cuanto al clima del aula en el que se desarrollará esta Unidad Didáctica se intentará favorecer la interacción entre profesor y alumno, dentro de las dificultades inherentes al contexto del curso. Se promoverá la participación en clase permitiendo siempre a los alumnos que expongan sus dudas a fin de que estas puedan ser aclaradas por el profesor o por sus compañeros.

Se fomentará el aprendizaje a partir de los errores, ya que, en gran parte, aprender implica modificar el cómo se piensa y actúa, adaptándose a las nuevas circunstancias y conocimientos de una manera activa. Esta adaptación no se produce si no se es consciente de cuál es el error y dónde y porqué se ha cometido.

De esta manera no se considerará el error como un fracaso, sino como un paso más en el aprendizaje del que se debe aprender para evitar cometerlo en el futuro.

Mediante este proceso se intentará fomentar el respeto y la valoración de las distintas opiniones y puntos de vista, no permitiéndose las descalificaciones o comentarios ofensivos, contribuyendo de esta forma a la adquisición de la competencia aprender a aprender, la competencia social y cívica y la iniciativa personal.

Por otra parte, para la organización de los espacios en esta UD, se empleará el aula habitual y otros espacios adyacentes, e incluso exteriores.

## 4.6 Recursos

Los recursos empleados para proceso de enseñanza y aprendizaje, además de motivadores y estimulantes, deben cumplir dos funciones primordiales: proporcionar una ayuda efectiva y crear situaciones activas para el mismo.

En el desarrollo de las clases se utilizarán los siguientes materiales:

(a) Libro de texto: como guion para el profesor, y como consulta para el alumno, además de estudio de conceptos, ejecución de ejercicios y problemas, etc.

(b) Fotocopias de diferentes actividades para el desarrollo de la UD, como apoyo o complemento del libro de texto.

(c) Cuaderno de clase en el que los alumnos realizarán sus trabajos y podrán ser revisados y corregidos por el profesor.

(d) Ordenador y proyector del aula. Se utilizará el ordenador para exponer los apuntes en la pizarra, así como para el visionado de videos seleccionados en relación con esta Unidad Didáctica.

- (e) Pizarra. Se utilizará para la clarificación y visualización de los contenidos explicados y la realización y corrección de actividades.
- (f) Bolígrafos, lápiz, goma, para escribir tanto en el cuaderno como en las fichas que se les propongan.
- (g) Regla, escuadra, cartabón, transportador y compás.
- (h) Calculadora. Se diseñarán actividades donde el uso de la calculadora sea obligatorio, incidiendo en gran medida en su uso adecuado y correcto, enseñando a los alumnos el manejo de la misma.
- (i) Elementos auxiliares a utilizar en las explicaciones, ejemplos o actividades prácticas: espejo, cinta métrica, brújula, spray de pintura, bastones, teodolito casero, líneas poligonales cerradas construidas por tiras de cartón unidas por chinchetas, groma casera (antiguo instrumento de medición romano), etc.
- (j) Ordenadores, teléfonos móviles e internet. Los alumnos podrán utilizar estos recursos para ampliar información de los conceptos explicados en clase.

#### 4.7 División de tiempos y espacios

Tal como se ha indicado en el apartado 4.1 en función de los contenidos de este curso y de las sesiones disponibles, se ha asignado a esta Unidad Didáctica un total de nueve sesiones, de las cuales la última se destinará para el examen final, quedando, por tanto, un total de ocho sesiones para su desarrollo.

En cuanto a los espacios en que se va a impartir esta Unidad Didáctica, las sesiones 1 a 4, 8 y 9 se impartirán en el aula habitual y las sesiones 5 a 7, diseñadas para actividades prácticas, se desarrollarán en el patio del IES y/o calles cercanas.

La división de sesiones propuestas será la siguiente:

##### - Sesión 1

Después de una introducción se explicarían, por medio del método expositivo, los siguientes conceptos:

- Qué se entiende por resolución de triángulos.
- Datos necesarios para resolver un triángulo.
- Teorema de Pitágoras:
  - Repaso por la historia del mismo (Babilonia, Egipto y Grecia).
  - Aplicación de la cuerda de los 12 nudos para la obtención de ángulos rectos.
  - Demostración del teorema de Pitágoras con Papiroflexia.
- Resolución de triángulos rectángulos conocidos dos lados.
- Resolución de triángulos rectángulos conocidos uno de los ángulos agudos y un lado.
- Aplicaciones de la resolución de triángulos rectángulos a lo largo de la historia: ejemplo del túnel de Eupalinos (arquitecto griego al que se le encomendó, en el siglo VI a.C., la construcción de un túnel para el abastecimiento de agua en Samos atravesando una montaña y que tuvo que empezar desde los dos extremos) y del diseño de acueductos. Se llevará a cabo una actividad práctica en las sesiones 5, 6 y 7 de cómo obtener la dirección entre dos puntos no visibles entre sí (preparación de la actividad práctica 1).

Se proponen ejercicios y problemas relacionados con el contenido para resolver los alumnos en casa de modo individual.

##### - Sesión 2

Se corrigen en clase los ejercicios propuestos en la sesión anterior (aprox. 10').

- Teorema del seno y demostración.
- Teorema del coseno y demostración.

Realización de ejercicios y problemas en clase relacionados con el contenido impartido (aprox. 10'). El alumno deberá resolver en casa los ejercicios y problemas propuestos.

### - Sesión 3

Corrección en clase los ejercicios propuestos en la sesión anterior (aprox. 10').

- Resolución de triángulos conocidos dos ángulos y un lado.
- Resolución de triángulos conocidos dos lados y el ángulo comprendido.
- Resolución de triángulos conocidos dos lados y un ángulo no comprendido.
- Resolución de triángulos conocidos tres lados.

Realización de ejercicios y problemas en clase relacionados con el contenido impartido (aprox. 10'). Ejercicios y problemas relacionados con el contenido para resolver en casa.

Se llevarán a cabo varias actividades prácticas relacionadas con esta sesión, las cuales se desarrollarán en las sesiones 5, 6 y 7. Se prepararán dichas actividades prácticas.

### - Sesión 4

En esta sesión se van a exponer algunas aplicaciones de la trigonometría:

- Repaso de fórmulas de áreas y perímetros de polígonos.
- Fórmulas para determinar la longitud de un arco de circunferencia.
- Fórmulas para determinar el área de un triángulo en función de dos lados y el ángulo comprendido, y en función de sus tres lados (fórmula de Heron).
- Obtención de áreas de polígonos regulares por triangulación. Aplicación a la medida de una parcela agrícola usando ordenador.
- Cálculo de la apotema, radio y área de un polígono regular de  $n$  lados en función de la longitud de uno de ellos.
- Cálculo de volúmenes aplicando trigonometría para la obtención de los elementos necesarios.
- Aplicaciones al cálculo de distancias no accesibles.
- Otras aplicaciones de los triángulos en cálculo y construcción de estructuras industriales y de edificación.

Realización de ejercicios y problemas en clase relacionados con el contenido impartido (aprox. 10') y diversas actividades para resolver en casa.

### - Sesiones 5, 6 y 7

Estas sesiones se dedicarán a la realización de actividades prácticas cooperativas de aplicación de la trigonometría en el patio y calles adyacentes.

Para ello, se organizarán grupos de cinco alumnos, cada uno con un rol determinado para cada actividad, los cuales, alternativamente, irán realizando las siguientes actividades prácticas a lo largo de estas sesiones.

- Determinación de la distancia y dirección entre dos puntos no visibles entre sí: método de Eupalinos, empleando cinta métrica, groma y brújula.
- Medida de la altura de una farola empleando cinta métrica y teodolito.
- Medida de la altura de una farola empleando cinta métrica y un espejo.

- Medida del área del patio, por triangulación, por medio de un teodolito casero, una cinta métrica y una brújula.
- Medida de una distancia horizontal inaccesible por medio de cinta métrica y brújula.
- Medidas de distancias verticales y horizontales inaccesibles, por medio de cinta métrica y teodolito.
- Medida de la latitud terrestre en la que estamos, para el caso del hemisferio norte, empleando el teodolito (esta actividad será individual y voluntaria).

#### - Sesión 8

Se corrigen en clase los ejercicios propuestos en sesiones anteriores (aprox. 10').

Se dedica esta sesión al cálculo de los resultados de las actividades prácticas realizadas en las sesiones anteriores, y resolución de dudas.

#### - Sesión 9

Examen final de la Unidad Didáctica.

### 4.8 Actividades de enseñanza y aprendizaje

Tomando como base los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables se han diseñado una serie de actividades y problemas para 4º de ESO de diferente grado de dificultad cognitiva.

Para el diseño de las actividades y ejercicios se ha empleado la clasificación de Smith – Stein, antes citada, la cual divide las tareas y problemas matemáticos en cuatro grados de dificultad según lo indicado en la figura 11, punto 3.3.2.4.

- Ejercicios básicos, de nivel 1, meramente repetitivos, solo recordando memorísticamente conceptos explicados en clase.
- Ejercicios de nivel 2: resultado de que los alumnos apliquen directamente las fórmulas explicadas en clase y en los que el enunciado indica explícitamente cual es la fórmula a aplicar.
- Problemas más difíciles, de nivel 3, en los cuales el alumno deberá ser capaz de interpretar el problema, entender el concepto y poder seleccionar la fórmula o algoritmo correspondiente en cada caso.
- Ejercicios de nivel 4 en los que alumnos piensen matemáticamente o en los que relacionen las Matemáticas con otros tipos de saberes. Esta Unidad Didáctica es favorable a establecer relaciones con otras ciencias, como la Física o la Topografía, o las aplicaciones en el entorno cotidiano.

En primer lugar, se propondrá a los estudiantes una serie de ejercicios y problemas de los niveles 1 y 2, que no presentan apenas dificultades cognitivas, para ir progresivamente aumentando la dificultad de los mismos hasta llegar a los niveles 3-4 de dificultad.

Las actividades o problemas de niveles 1 o 2 se intercalarán entre las explicaciones dadas en clase, es decir no se esperará al final de la unidad para hacerlos todos juntos. Con ellos se pretende comprobar la correcta evolución de los alumnos, pudiendo corregir los errores que vayan cometiendo y resolviendo las dudas que les vayan surgiendo a la hora de realizar la aplicación directa de las explicaciones dadas en clase, y ello en cada uno de los subtemas.

Una vez realizadas las actividades anteriores, se les propondrán los problemas de grados 3 y 4 en los que se intentará que, a partir de los conocimientos adquiridos, los alumnos sean capaces de aplicar y manejar con soltura los conceptos trigonométricos.

Además, los alumnos deberán aplicar a la hora de resolverlos la estrategia de resolución de problemas de Polya antes citada, la cual se practicará en clase en un primer momento guiada por el profesor, para a continuación dejar que sean los mismos alumnos los que la lleven a cabo.

Los problemas propuestos en clase se explicarán y corregirán por parte del profesor, si las soluciones alcanzadas por los alumnos no son correctas, y servirán para profundizar en cada uno de los aspectos señalados en la materia.

Se diferenciarán varios tipos de actividades dependiendo de su finalidad.

#### **- Tareas individuales a realizar en clase.**

Al finalizar la exposición de los contenidos teóricos previstos en cada sesión, se propondrá una serie de ejercicios y actividades a realizar los alumnos en su cuaderno individualmente en clase por medio de las cuales apliquen dichos contenidos. Estas actividades servirán para fijar los contenidos, ver si los han comprendido y ejercitar la aplicación práctica de los mismos.

#### **- Tareas individuales a realizar en casa.**

Una vez realizados y corregidos los ejercicios en clase se seleccionarán nuevamente ejercicios y problemas variados para ser resueltos individualmente en casa, a fin de practicar los nuevos conocimientos, siendo corregidos, generalmente, en la sesión siguiente.

#### **- Actividades prácticas grupales.**

Estas actividades, centradas en las sesiones 5, 6 y 7 corresponderán a ejercitar de una manera práctica las aplicaciones de la trigonometría. Se les plantearán problemas históricos y se emplearán las soluciones propuestas por los antiguos matemáticos, adaptadas al tiempo moderno.

Los ejercicios y problemas anteriores se trabajarán individualmente, mientras que las actividades prácticas se realizarán por medio de grupos de cinco alumnos empleando el trabajo cooperativo tanto para la realización de la misma como para su resolución a partir de las medidas realizadas.

En cuanto a la resolución de los problemas planteados en las actividades prácticas, se intentará que contribuya a aclarar y aplicar los contenidos enseñados de forma teórica a un contexto real, es decir, se intentará que los contenidos conecten con los intereses y necesidades de alumnos y puedan ser utilizados para entender situaciones reales y ayudar a resolver problemas de la vida cotidiana.

Las actividades propuestas en cada sesión son las siguientes (la clasificación según Smith y Stein se indica entre paréntesis al final de cada enunciado):

Nota: tanto las fotografías como los esquemas y dibujos incluidos en las actividades son de elaboración propia.

### **ACTIVIDADES SESIÓN 1**

1) ¿Qué significa resolver un triángulo? (nivel 1).

2) ¿Qué elementos son necesarios para resolver un triángulo rectángulo? (nivel 1).

3) **Actividad práctica en clase 1:** demostración del teorema de Pitágoras con Papiroflexia (nivel 2).

Para hacerlo, recortaremos un cuadrado grande, dentro del cual dibujaremos cuatro triángulos rectángulos congruentes, de catetos A y B, de la manera indicada en la primera fotografía. Se doblan los triángulos hacia

adentro originando un cuadrado de lado C ocupado parcialmente por los cuatro triángulos rectángulos, que delimitan un pequeño cuadrado central de lado A-B.



El área,  $C^2$ , del cuadrado del lado C equivale a  $4(1/2 A*B) + (A-B)^2$ ; operando se obtiene que  $C^2=A^2+B^2$ .

Con ello se demuestra, de una forma parcialmente manipulativa, el teorema de Pitágoras.

4) Un triángulo tiene los lados de medidas 10, 24 y 26 cm ¿es rectángulo? (nivel 2).

5) Un cateto de un triángulo rectángulo mide 9 cm y la hipotenusa 15 cm. Calcula la longitud del otro cateto. (nivel 2).

6) Halla la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden: (nivel 2).

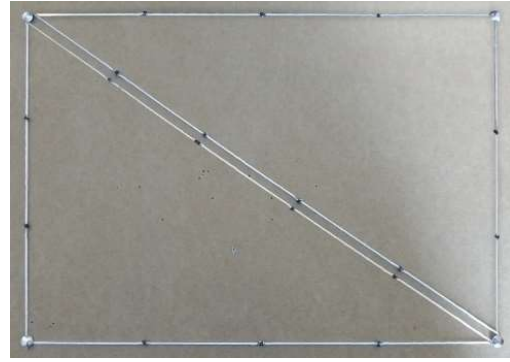
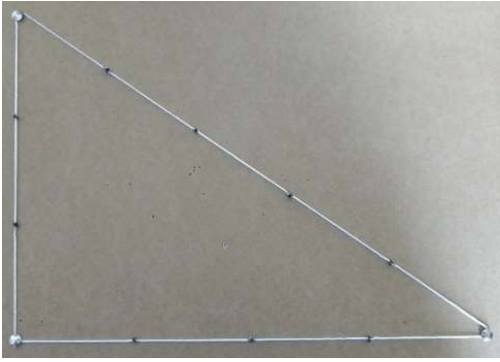
a) 15 cm y 8 cm

b) 12 y 35 cm

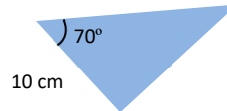
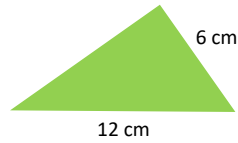
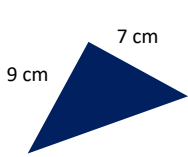
7) **Actividad práctica en clase 2:** Construcción de un triángulo rectángulo y un rectángulo con una cuerda de 12 nudos (nivel 2).

Después de las inundaciones del Nilo, los egipcios encontraban los límites de las parcelas borrados. Para poder determinar las lindes de las parcelas, las cuales eran rectangulares, los egipcios empleaban una cuerda de 12 nudos. Con ella podían lograr ángulos rectos. Con una cuerda se van a realizar nudos cada 10 cm de distancia. La cuerda va a tener 120 cm y los extremos de la cuerda se unen formando otro nudo.

Se comprobará en clase que con esos valores de lado correspondientes a la terna pitagórica 3, 4, 5, únicamente es posible, tensando la cuerda en los nudos 1, 4 y 8, construir un triángulo rectángulo; y que es posible construir un rectángulo simplemente colocando otro triángulo adyacente invertido, con lo que el agricultor tendría ya delimitada una parcela rectangular.



8) Resuelve los siguientes triángulos rectángulos (nivel 2).



9) Una escalera que mide 5 m está apoyada a 3 m de distancia de la pared. ¿A qué altura de la pared llega la escalera? (nivel 2).

10) Calcula la longitud en planta de una rampa que se necesita para subir un escalón de 40 cm si el ángulo máximo para que pueda subir una silla de ruedas es de  $6^\circ$ . (nivel 3).

11) José tiene su cometa con el carrete totalmente extendido. Calcula la altura a la que está la cometa si la cuerda mide 25 m y la vertical de la cometa se ha alejado 7 m de José (nivel 3).

12) La pendiente de un acueducto romano para que circule el agua ha de ser del 1 por 1000. Si la fuente está a una altura de 25 m por encima de la ciudad, ¿a qué distancia horizontal máxima desde la fuente puede el acueducto suministrar agua? ¿cuál será la longitud del recorrido del agua? y ¿cuál es el ángulo que forma la base sobre la que circula el agua con la horizontal? (nivel 3).

13) Hay que sujetar un poste vertical de 9 m de altura con dos cables separados del poste 4 m cada uno. Calcular la longitud de cable necesario. (nivel 3).

14) Si tenemos un teléfono móvil de lados 15 y 7 cm ¿de cuántas pulgadas es la pantalla? Nota: una pulgada equivale a 2,54 cm (nivel 3).

15) Un tablón de medidas 2,40 x 3,50 m. ha de pasar por una puerta que mide 0,7 m de ancho y 2,20 m. de alto. ¿Cabrán por la puerta? (nivel 3).

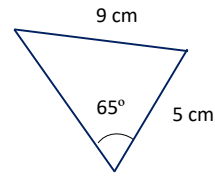
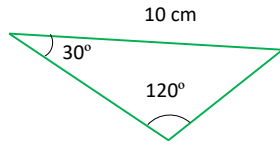
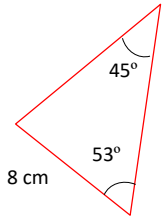
## ACTIVIDADES SESIÓN 2

16) Enuncia el teorema del seno (nivel 1).

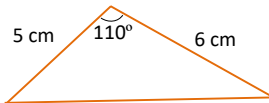
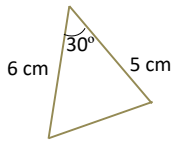


17) Enuncia el teorema del coseno (nivel 1).

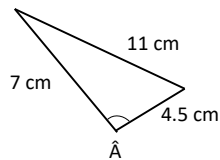
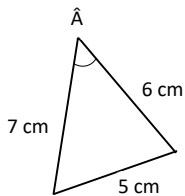
18) Calcula los lados que faltan en los siguientes triángulos (nivel 2).



19) Calcula los lados que faltan en los siguientes triángulos (nivel 2).



20) Halla el valor de los ángulos marcados en los siguientes triángulos (nivel 2).

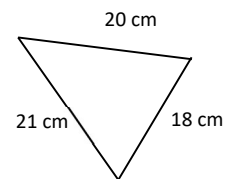
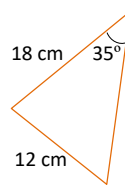
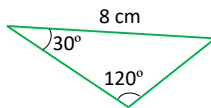
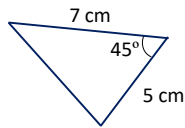
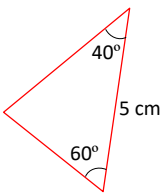


### ACTIVIDADES SESIÓN 3

21) ¿Qué elementos son necesarios para resolver un cualquier triángulo? (nivel 1).

22) ¿Qué formulación se emplea para resolver un triángulo? (nivel 1).

23) Resuelve los siguientes triángulos (nivel 2).

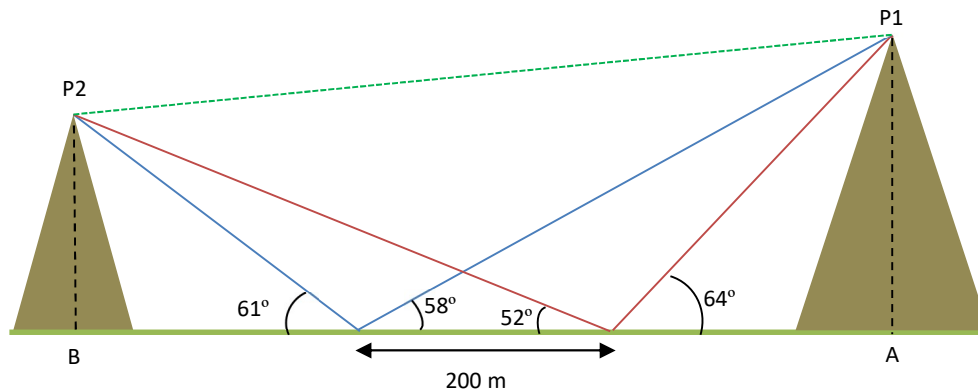


24) Resuelve los siguientes triángulos (nivel 2).

- |           |          |                      |
|-----------|----------|----------------------|
| a: 15 cm, | b: 20 cm | $\hat{A} = 40^\circ$ |
| a: 20 cm  | b: 27 cm | $\hat{C} = 52^\circ$ |
| a: 35 cm  | b: 30 cm | $\hat{B} = 30^\circ$ |
| a: 25 cm  | b: 10 cm | c: 7 cm              |

25) Calcula el perímetro de los triángulos anteriores (nivel 2).

26) Estamos en un punto entre dos montañas desde el que podemos ver la cumbre de ambas, puntos P1 y P2. Medimos los ángulos hasta esos puntos; nos desplazamos 200 m en el sentido de la línea que separa ambas montañas y volvemos a medir los ángulos con los que vemos las cumbres de nuevo, según el esquema adjunto. Determina la altura de ambas montañas, la distancia AB que las separa y, si quisiésemos instalar un teleférico entre las cimas de ambas montañas, cuál sería la longitud del cable (nivel 4).



### 27) Ejemplo de aplicación histórica de la trigonometría. Medida de distancias con telémetros

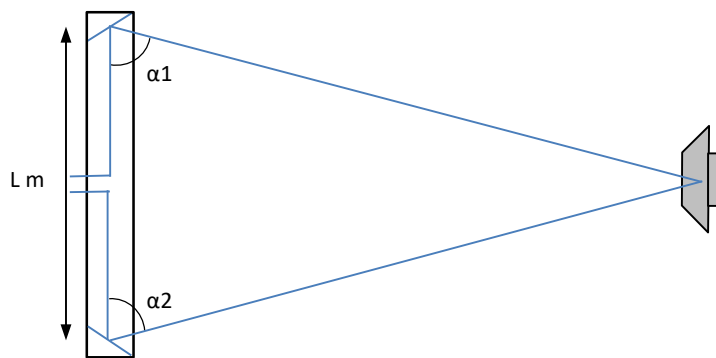
En este caso podremos a los alumnos un ejemplo de aplicación práctica de triángulos: medida de distancias a un barco por medio de telémetro.



El funcionamiento del telémetro es sencillo, pero ha de ser altamente preciso. Se mira desde el centro del telémetro, y a cada ojo le llega un rayo de luz proveniente de cada extremo de un tubo, orientándose los espejos o prismas situados en los dos extremos del tubo hasta que ambos enfoquen al objetivo simultáneamente. Al conocer la longitud del tubo y el ángulo de ajuste del espejo o prisma de cada extremo del tubo, y por tanto el ángulo que forma la luz en cada caso, se puede resolver el triángulo y calcular con ello la distancia al blanco, lo que permitirá apuntar los cañones al barco.

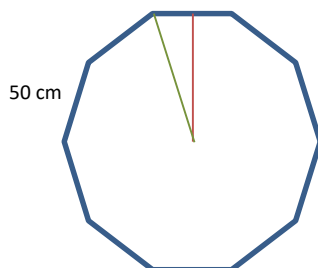
A mayor longitud del tubo, y, por tanto, del lado conocido del triángulo, mayor es la precisión. Los telémetros llegaron a tener más de 13 m de longitud.

Las fotografías, de elaboración propia, y corresponden a una batería de cañones conservada en La Coruña, sin embargo, sistemas similares se emplearon en la segunda guerra mundial y en particular en el Desembarco de Normandía.



#### ACTIVIDADES SESIÓN 4

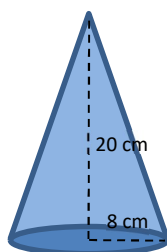
28) Calcula el radio y la apotema de un decágono regular de 50 cm de lado (nivel 3).



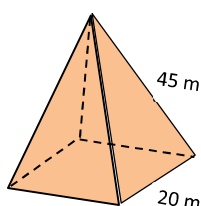
29) Calcular el área sombreada para los casos de un cuadrado y un octógono inscritos en una circunferencia de radio, 10 cm. ¿Qué observas? (nivel 3).



30) Calcula el área y el volumen de un cono, sabiendo que su altura es 20 cm y el radio de la base 8 cm (nivel 2).

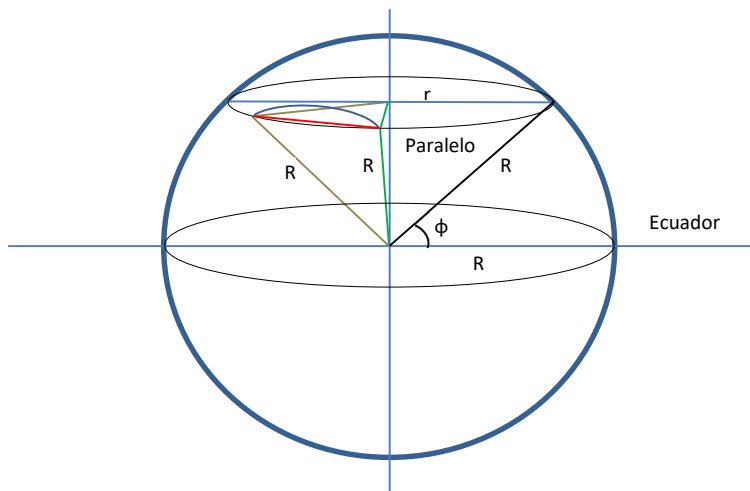


31) Calcula el área y el volumen de una pirámide de base cuadrada, sabiendo que la arista que une las caras triangulares mide 45 m, y el lado de la base 20 m (nivel 3).



32) Si queremos volar entre dos ciudades, Madrid y Nueva York, las cuales se encuentran casi en la misma latitud  $\phi=40^\circ$  Norte, comprobar cuál sería la distancia más corta sobre la esfera terrestre, siguiendo el mismo paralelo, o bien según el círculo máximo que pasa por ambas ciudades y que tiene el mismo centro que la Tierra (nivel 4).

Notas: Madrid se encuentra a una longitud aproximada  $-4^\circ$ , Nueva York se encuentra a una longitud  $-74^\circ$  y el radio de la Tierra  $R$  mide 6371 km.



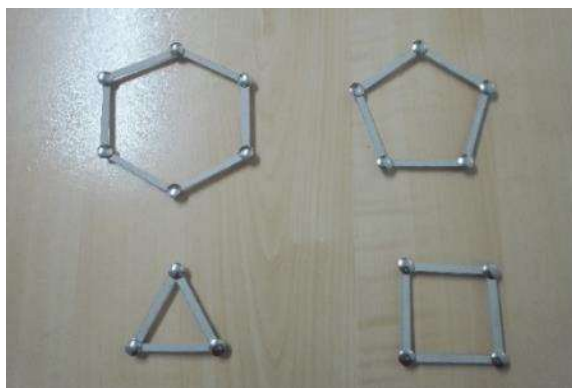
### 33) Actividad práctica en clase 3. Indeformabilidad de los triángulos

Esta actividad se explicará a los alumnos, como complemento de lo ya practicado y aprendido, se trata de otra de las propiedades relevantes de los triángulos:

- El triángulo es el único polígono que no se deforma cuando actúa sobre él una fuerza.

Asimismo, podremos ver el uso estructural de los triángulos y su aplicación en diferentes construcciones, debido a la propiedad mencionada.

El hecho de que los triángulos no se deformen cuando son sometidos a una fuerza, lo vamos a poder comprobar construyendo polígonos de diferentes lados con tiras de cartón recortado, las cuales unimos dos a dos en sus extremos por medio de chinchetas.



Si aplicamos una fuerza a los vértices podemos ver que el único polígono que no se deforma es el triángulo. Sin embargo, si unimos los vértices del resto de polígonos dos a dos, dividiéndolos en triángulos, estos se rigidizan. Esto es ampliamente usado en cálculo estructural.

A fin de que los alumnos lo puedan comprobar, se les puede proponer un paseo geométrico por la ciudad (o presentación de fotografías) en el que puedan observar en diferentes estructuras las formas geométricas que aparecen, y en nuestro caso especialmente los triángulos:



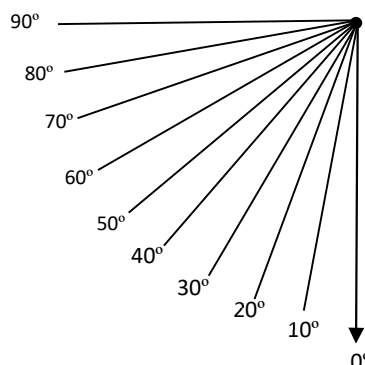
### ACTIVIDADES PRÁCTICAS EN EL EXTERIOR, SESIONES 5, 6 Y 7

En estas sesiones se va a trasladar la clase al patio y a las calles circundantes para realizar de manera práctica algunas de las actividades que se han expuesto teóricamente en las sesiones anteriores.

Se han previsto un total de 7 actividades prácticas. Para ello se van a emplear algunos instrumentos realizados manualmente y otras herramientas aportadas por el profesor.

En concreto, se va a emplear un teodolito casero realizado por el profesor. Para ello, cortamos una caja de cartón dejando dos caras perpendiculares, una conformará una superficie horizontal y la otra una vertical. A la superficie vertical pegamos un transportador, en este caso en el origen del transportador existe un pequeño agujero que aprovechamos para pasar una chincheta. Este punto lo llamamos el eje del teodolito.

Ajustamos el valor del ángulo 0 a una recta vertical que pase por el eje del teodolito y fijamos el transportador en este punto. En el caso de no tener un transportador con agujero para pasar la chincheta, podemos dibujar en la pared vertical del teodolito los ángulos, contando siempre a partir del 0 en el eje vertical inferior, de la siguiente manera:

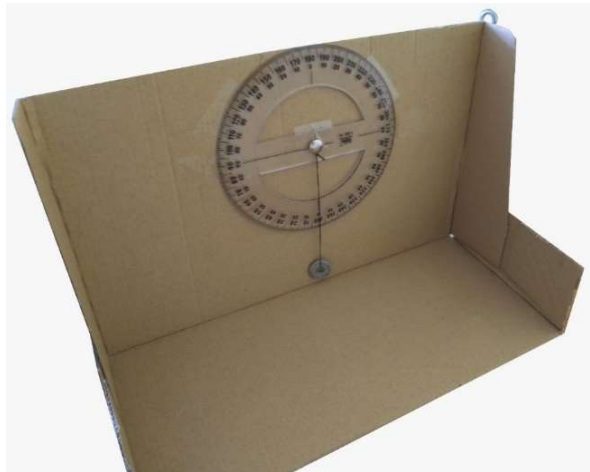


Por el eje del teodolito pasamos una chincheta a la cual atamos una plomada que pueda girar en el eje, en este caso alrededor de la chincheta.

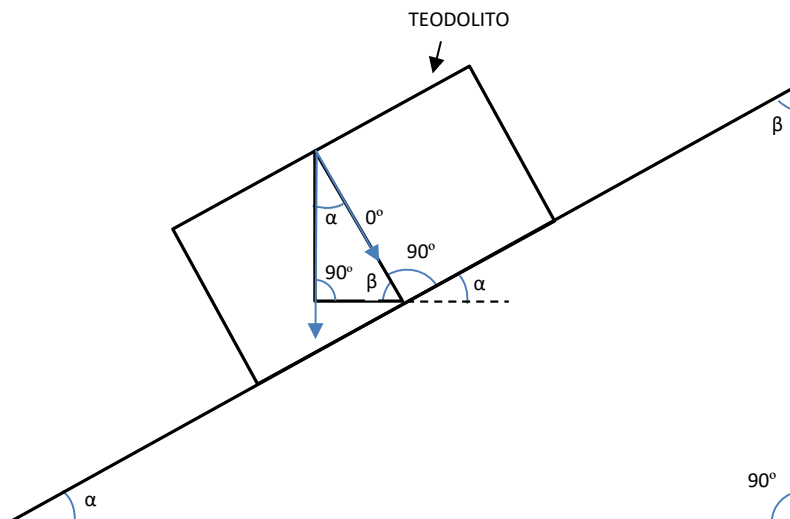
Podemos fabricar fácilmente la plomada con un hilo y una tuerca o arandela atada a su extremo inferior, de tal manera que, cuando el teodolito esté en posición horizontal, la plomada pasará por el ángulo 0 del teodolito, es decir estamos en un ángulo de  $0^\circ$  con respecto a la horizontal.

Por último, en un extremo del teodolito ponemos una mira a través de la cual podemos apuntar a la parte superior del objeto del cual queremos medir la altura, en este caso hemos aprovechado una alcayata curva o hembrilla.

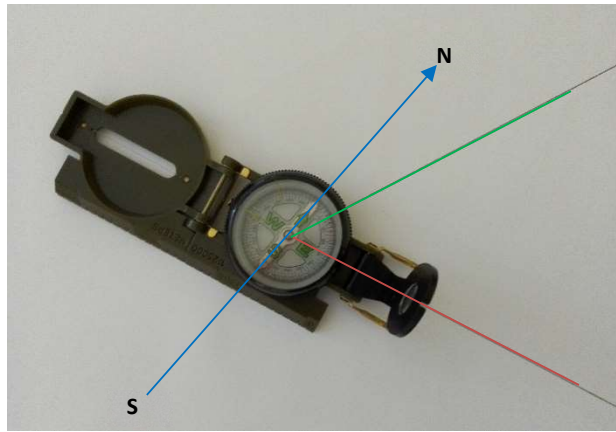
El teodolito que hemos construido para medir ángulos en vertical aparece en la fotografía siguiente:



El ángulo que forma la plomada con la vertical es el mismo que debemos determinar, ello se puede ver en el esquema siguiente:



Para la medida de ángulos horizontales se va a emplear una brújula, también propiedad del profesor o del centro:

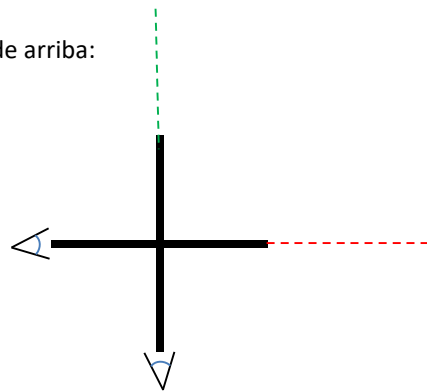


Si tomamos como ejemplo la foto anterior y queremos medir el ángulo que forman las líneas verde y roja, mediremos en primer lugar el ángulo que forma la línea verde con respecto al Norte, en este caso  $25^\circ$ , y luego medimos el ángulo que forma la línea roja con respecto al Norte, de la forma mostrada en la foto, el cual es de  $75^\circ$ , luego el ángulo que forman las dos líneas es de  $50^\circ$ .

Para el trazado en la calle de ángulos rectos se va a emplear el instrumento romano Groma, el cual se construye por medio de un palo vertical en cuya cabeza se clavan dos travesaños perpendiculares formando ángulos rectos, de la forma siguiente:



Vista desde arriba:



Si bien con la brújula también se pueden medir ángulos rectos, con este instrumento el error es menor y además empleamos un instrumento de medición romano, en consonancia con la historia.

Por último, también se empleará una cinta métrica:



Con ayuda de estos instrumentos se van a realizar las siguientes medidas:

- Determinación de la distancia y dirección entre dos puntos no visibles entre sí: método de Eupalinos.
- Medida de la altura de una farola con teodolito.

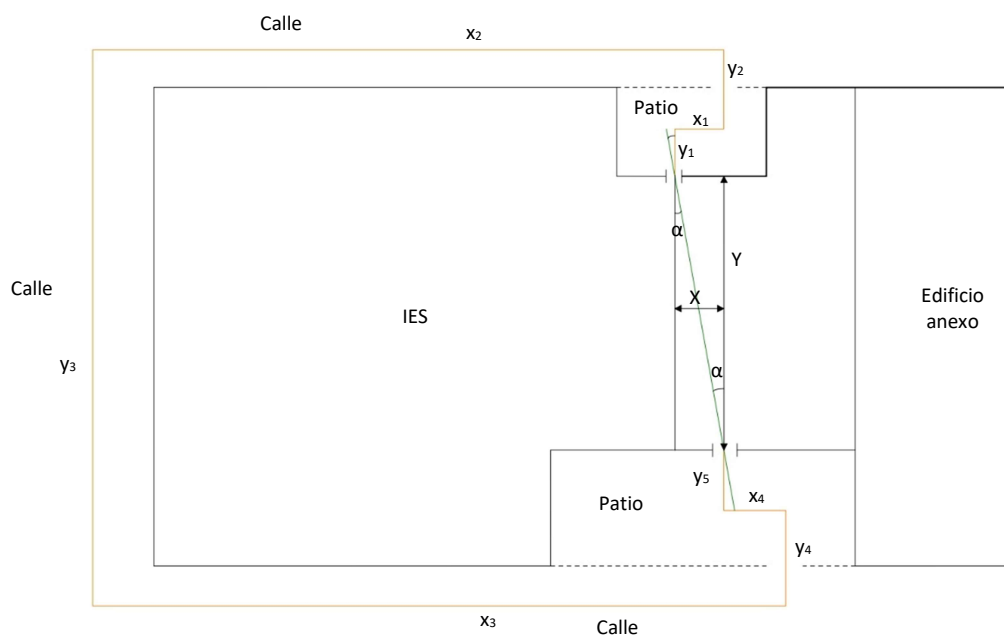


- Medida de la altura de una farola con un espejo.
- Medida del área del patio, por triangulación.
- Medida de una distancia horizontal inaccesible.
- Medidas de distancias verticales y horizontales inaccesibles.
- Medida de la latitud terrestre en la que estamos, para el caso del hemisferio norte (voluntario).

**34) Ejercicio práctico en el exterior 1: determinación de la distancia y dirección entre dos puntos no visibles entre sí: método de Eupalinos (nivel 3).**

En nuestro Centro hay dos entradas al edificio, y se quiere hacer una reforma uniendo las puertas por un pasillo directo. Queremos saber la dirección del pasillo.

El esquema de la planta del Centro es el siguiente:



Nos posicionamos en una de las puertas y haciendo una línea poligonal con ángulos rectos por medio de la groma (línea naranja) y midiendo las distancias entre cada vértice, marcados en el suelo con pintura, podremos determinar las diferencias entre las abscisas de las dos puertas y entre sus ordenadas, y por medio del teorema de Pitágoras la distancia entre ellas.

Conocer las medidas  $X$  e  $Y$  nos permite obtener los ángulos de la línea que une las dos puertas con relación al último tramo de la poligonal en cada extremo, y, por tanto, la dirección en la que tendríamos que excavar para encontrarnos.

**35) Ejercicio práctico en el exterior 2: medida de la altura de una farola con teodolito (nivel 3).**

Este ejemplo es muy similar en planteamiento y resolución a una pregunta que se hizo el matemático e ingeniero italiano Niccolò Tartaglia, en su libro *Nova Scientia*.

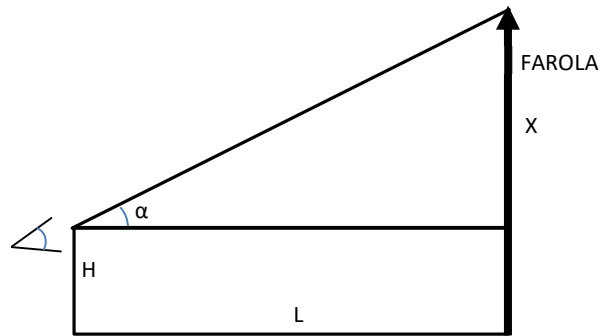
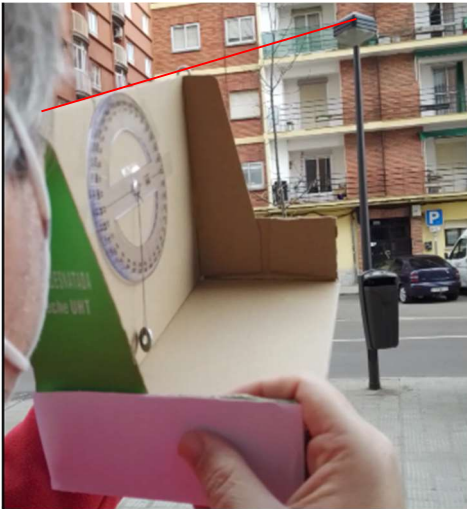
La pregunta es: “*Me gustaría encontrar la altura de un objeto perceptible cuya parte es accesible y, usando la misma operación, me gustaría saber también la hipotenusa o distancia diametral*” (recogida en el artículo Trigonometría en el Renacimiento europeo. Un recurso de aula, de Carlos Dorce Polo, 2020, Revista Suma nº 96, 21-31).

En este caso vamos a calcular la altura de una farola y la distancia hasta ella.



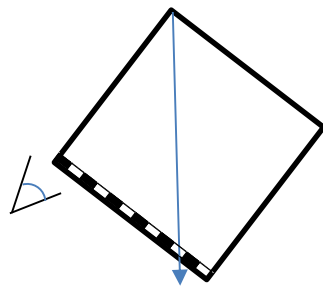
Para ello nos situamos a una distancia determinada de la farola y medimos el ángulo con el que vemos su punto más alto.

El esquema, con las medidas realizadas, teniendo en cuenta la altura desde la que se mira, sería el siguiente:



Este mismo proceso lo podemos emplear para determinar la inclinación de una pendiente o una rampa, con solo poner el teodolito en el suelo en el sentido de la pendiente y medir el ángulo que forma la plomada con la vertical.

En el Renacimiento no se tenía aún el concepto de tangente, por lo que sabiendo la distancia que les separaba del objeto, únicamente podrían obtener la medida X empleando semejanza de triángulos por medio de un teodolito en el cual, en vez de marcar grados en una circunferencia dividían el lado del cuadrado en 12 partes iguales:



Si la plomada corta al cuadrado por el lado del observador, es decir si el ángulo con el que se mira es mayor de  $45^\circ$ , la medida de la altura X sería en este caso  $L \cdot 12/10$ .

### 36) Ejercicio práctico en el exterior 3: medida de la altura de una farola con un espejo (nivel 3).

De esta misma farola vamos a medir su altura por medio de un espejo. Para ello colocamos el espejo en el suelo a una distancia de la farola,  $L_1$ , la cual medimos, y en la misma línea formada por la farola y el espejo nos vamos alejando de este, hasta que veamos la punta de la farola.

Como los ángulos de incidencia y de reflexión de la luz en el espejo son iguales, si medimos la distancia desde el observador al espejo  $L_2$  y la altura del observador  $H$ , podemos determinar la altura de la farola, por medio de la tangente del ángulo  $\alpha$ .



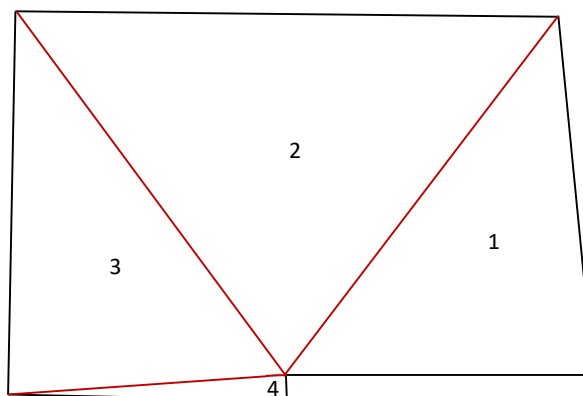
**37) Ejercicio práctico en el exterior 4: medida de la superficie del patio (nivel 4).**

En esta actividad proponemos medir la superficie del patio dividiendo este en triángulos, y sumando el área de todos ellos, lo que proporcionará el área del polígono que conforma el patio.

Para ello tenemos la siguiente superficie (fotografía adjunta):



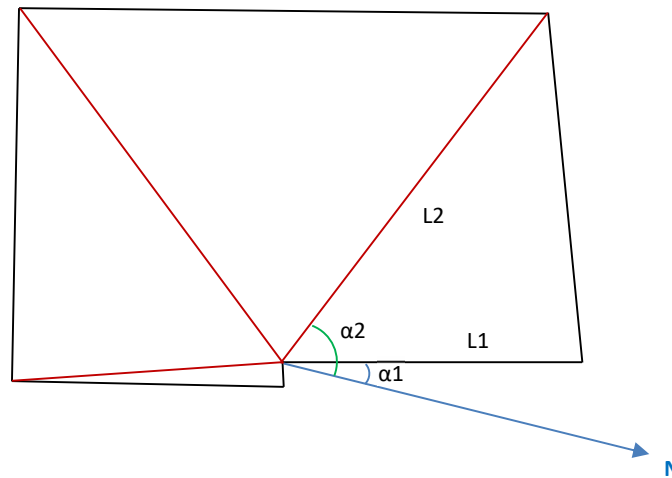
De este patio hacemos un pequeño croquis en el que podemos dibujar los triángulos en que se ha dividido:



A continuación, se indica la como se obtendría la medida del área de uno de los triángulos, el resto se harían de manera similar:

Del triángulo 1 medimos dos lados, L1 y L2 con la cinta métrica y el ángulo  $\alpha$  como diferencia de  $\alpha_2 - \alpha_1$ .

Con ello se puede resolver el triángulo y a partir de la fórmula expuesta en la sesión 4 se puede obtener el área del triángulo conocidos dos lados y el ángulo comprendido. Operando de manera similar con el resto de triángulos y sumando el área de todos ellos se obtendrá el área del patio.

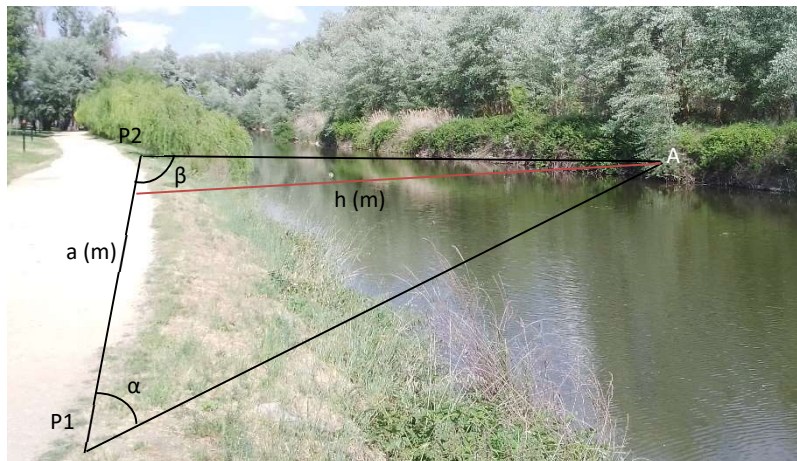


**38) Ejercicio práctico en el exterior 5: medida de una distancia horizontal inaccesible (nivel 3).**

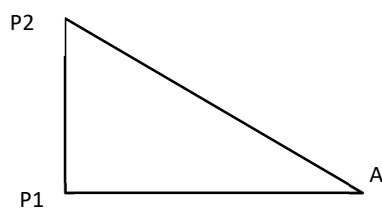
Queremos hacer un puente entre la orilla del río y la isla marcada. Para ello, seleccionamos dos puntos P1 y P2 de la orilla y medimos la distancia entre ellos, y un punto en la isla A (en este caso un árbol).

Desde P1 se mide el ángulo que forman las líneas P1P2 con P1A (ángulo  $\alpha$ ) y desde P2 el ángulo que forma la línea P1P2 con la línea P2A (ángulo  $\beta$ ).

Al conocer dos ángulos y el lado comprendido se puede resolver el triángulo y conocidos  $\alpha$  y el lado P1A se puede determinar la altura h del triángulo, la cual será la longitud de la pasarela:



Esta es otra de las preguntas que hace Tartaglia en su libro, sin embargo, en esa época solo lo podían resolver considerando un triángulo rectángulo ( $\alpha=90^\circ$ ), de la siguiente manera:



En el vértice P2, en vez de medir el ángulo, se medía con el teodolito antiguo, antes indicado, la relación entre los lados de modo similar a como se medía en altura.

### 39) Ejercicio práctico en el exterior 6: medida de distancias verticales y horizontales inaccesibles (nivel 4).

Este ejercicio corresponde a otra de las preguntas de Tartaglia, que formulaba así:

*“Me gustaría medir artificialmente la altura de un objeto perceptible cuya base no puede ser vista o no es accesible. Por la misma operación, me gustaría investigar la hipotenusa o distancia diametral de dicha altura y también la distancia horizontal  $L$ ”* (recogida en el artículo Trigonometría en el Renacimiento europeo. Un recurso de aula, de Carlos Dorce Polo, 2020, Revista Suma nº96, 21-31).

Para este caso vamos a medir la altura de un edificio, cuya base es inaccesible.

Para ello desde dos puntos separados una determinada distancia  $D$ , la cual medimos, obtenemos con el teodolito los ángulos,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  con los que se ve el punto cuya altura queremos medir.

Con ello se tienen dos triángulos rectángulos que comparten un cateto y la diferencia entre el otro cateto de cada uno de los triángulos es la distancia  $D$ .

El esquema sería el siguiente:



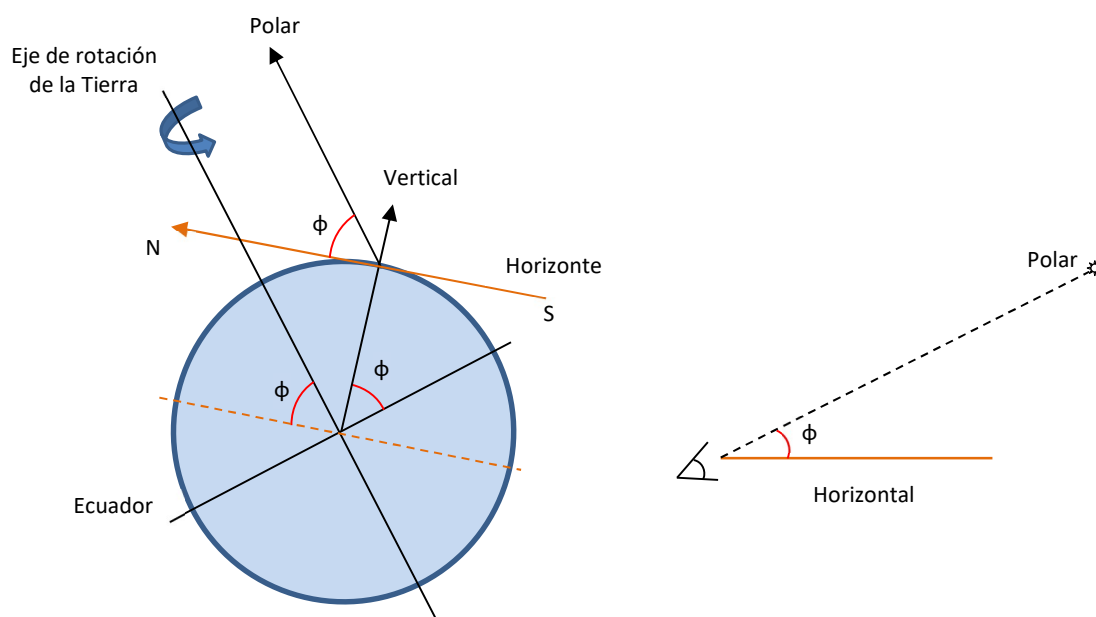
### 40) Ejercicio práctico en el exterior 7: medida de la latitud terrestre (nivel 2).

Este ejercicio práctico se plantea como voluntario a los alumnos para realizar en su casa. Se trata de medir la latitud terrestre en la que estamos ubicados por medio de la medida de la altura de la estrella polar sobre el horizonte.

Esta actividad enlaza con los orígenes de la trigonometría, pues la utilidad principal de la trigonometría en tiempos antiguos era la Astronomía y la determinación de la posición en los viajes, sobre todo en los largos viajes marítimos en los que no habría costa a la vista.

Para ello se va a tomar la estrella polar, la cual se encuentra casi fija sobre el polo norte terrestre.

La latitud de un punto se define como el ángulo que forma el ecuador con la vertical en dicho punto del lugar. Al ser el radio de la Tierra despreciable frente a la esfera celeste, se puede considerar al espectador como si estuviese en el centro de la Tierra y, con ello, el ángulo en que vemos la estrella polar sobre la horizontal corresponde aproximadamente a la latitud de ese punto (para ser exactos habría que hacer algunas correcciones debidas a que la estrella polar no se encuentra exactamente sobre el polo).



## 4.9 Planes complementarios

A fin de que sigan entendiendo la importancia de la trigonometría en la vida cotidiana y su uso, se propondrá a los alumnos una visita al Museo de la Ciencia de Valladolid, en el que podrán, entre otras cosas, comprobar el teorema de Pitágoras.

También se plantea, en combinación con profesores de otras asignaturas, la realización de una visita guiada por la ciudad, en la que además de los diferentes edificios, estructuras y monumentos históricos se pueda comprobar en ellos las aplicaciones de la Geometría y en particular de la trigonometría.

Se estará al tanto de las actividades culturales organizadas por el Ayuntamiento, Junta de Castilla y León, Administración central, organismos privados, etc., para, en el caso que alguna de ellas tenga relación con la materia de esta unidad o con el interés de los alumnos desde el punto de vista matemático, se pueda organizar su asistencia.

Para cada una de estas visitas se preparará una hoja de trabajo o cuadernillo en la que se incluirán ejercicios y problemas que se resolverán en función de lo visitado en la actividad. Servirá también para que el alumno pueda reflexionar, además de plasmar sus valoraciones en el mismo.

Por último, se propondrá como actividad de lectura el libro de Julio Verne “Aventuras de tres rusos y tres ingleses en el África austral” en el que, a modo de novela de aventuras, explica las peripecias de dos grupos de científicos que intentan medir la longitud de un meridiano terrestre a través de mediciones trigonométricas, para determinar internacionalmente cuál debería ser la longitud de un metro.

## 4.10 Evaluación

El objetivo de la evaluación es comprobar el grado de adquisición de los diferentes objetivos marcados para esta Unidad Didáctica.

La evaluación permite obtener datos implícitos sobre la calidad del proceso de enseñanza, orientando la práctica docente hacia una mejora de la misma que permita una mayor adquisición de los contenidos y competencias por parte de los alumnos.

Los criterios de evaluación marcados en el BOCyL para esta Unidad Didáctica son:

Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje	Competencias clave
1. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales.	1.1. Utiliza conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos.	CCL, CMCT, CD, CPAA
2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas en situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida.	2.1. Utiliza las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas.	CMCT, CD, CPAA, SIE
	2.2. Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones.	CCL, CMCT, CD, CPAA, SIE
	2.3. Utiliza las fórmulas para calcular áreas y volúmenes de triángulos, cuadriláteros, círculos, paralelepípedos, pirámides, cilindros, conos y esferas y las aplica para resolver problemas geométricos, asignando las unidades apropiadas.	CMCT, CD, CPAA, SIE

Teniendo en cuenta estos criterios de evaluación y estándares de aprendizaje marcados en la legislación, se establecen los siguientes criterios de evaluación, en referencia a los objetivos didácticos indicados y a las competencias básicas, valorando que el alumno sea capaz de:

- Manejar el teorema de Pitágoras para la obtención de lados de un triángulo rectángulo.
- Resolver triángulos rectángulos conocidos dos lados.
- Comprender los teoremas del seno y del coseno, y cómo aplicarlos en diferentes casos.
- Resolver un triángulo cualquiera, conocidos dos ángulos y un lado, conocidos dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, conocidos dos lados y uno de los ángulos no comprendido y conocidos los tres lados.
- Identificar los elementos conocidos en un problema de trigonometría y representarlos gráficamente, así como la incógnita a calcular.
- Utilizar conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos.
- Aplicar los conceptos trigonométricos para resolver problemas de distancias inalcanzables, alturas, o superficies, empleando las fórmulas trigonométricas adecuadas.
- Utilizar las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos geométricos.
- Aplicar la trigonometría para el cálculo de áreas de polígonos regulares.
- Aplicar la trigonometría para calcular áreas de polígonos irregulares por triangulación, y sus aplicaciones.
- Aplicar la trigonometría para calcular volúmenes.
- Analizar críticamente y comprender los ejemplos de aplicación de la trigonometría a lo largo de la historia.

En esta Unidad Didáctica se establecen además otra serie de criterios de evaluación, en los que se valorará que el alumno sea capaz de:

- Expresar y redactar adecuadamente los problemas y ejercicios encargados, así como sus resoluciones, de tal manera que las expresiones y palabras empleadas sean correctas desde los puntos de vista

ortográfico y léxico, que las frases estén adecuadamente estructuradas y sean comprensibles, que la escritura sea legible con buena caligrafía, así como que la presentación sea ordenada y limpia.

- Emplear los recursos tecnológicos, calculadoras y programas informáticos adecuados, de una manera responsable y adecuada al trabajo matemático.

- Reconocer la presencia de elementos matemáticos, y en particular trigonométricos, en ámbitos como el Arte y la Sociedad. Valorar su importancia y ser capaz de obtener conclusiones acerca de su uso y aplicaciones.

- Desarrollar hábitos de participación activa, positiva y respetuosa en el aula, con el profesor y con otros compañeros, así como ser tolerante y solidario, colaborando con los demás y respetando la opinión ajena.

- Ser capaz de hacer reflexiones críticas acerca del mundo que le rodea y de sí mismo, así como acerca de los errores cometidos y la forma de evitarlos en el futuro; adquiriendo responsabilidad y madurez, tanto individual como socialmente.

A continuación, se exponen los procedimientos que se utilizarán para comprobar los conocimientos que los alumnos han adquirido.

Para la **evaluación formativa** continua se utilizará:

- Registro de la actitud y comportamiento en clase. Se realizará mediante la observación directa del alumno en clase y para ello se tendrá en cuenta lo siguiente: asistencia, puntualidad, interés por lo impartido, participación en clase, actitud con el profesor y los compañeros, expresión oral en sus intervenciones, si llevan a clase el material necesario para la tarea diaria, y su comportamiento general. Estos aspectos se anotarán en una ficha de registro diario.

- Revisión del cuaderno de clase. Se analizará tanto la estructura como la teoría y los ejercicios y problemas recogidos en él.

En cuanto a la estructura del cuaderno se analizarán los siguientes aspectos: si el cuaderno está bien organizado, paginado; señaladas las fechas; la presentación es ordenada, limpia, letra legible, sin tachones, etc; si tiene faltas de ortografía o de sintaxis.

Respecto a la teoría, se analizará si han recogido las explicaciones correctamente y lo escrito tiene sentido, así como si está transcrita al pie de la letra o el alumno ha añadido frases y comentarios propios para su mejor comprensión.

En cuanto a los ejercicios y problemas, se analizarán los siguientes aspectos:

- Respecto a los hechos en clase: recoge o no la totalidad de los mismos; la resolución en el cuaderno es adecuada y ordenada y si la resolución de los ejercicios va acompañada de explicaciones para su comprensión.

- Respecto a los propuestos para casa: si están hechos todos o solo parte; la estrategia de resolución es adecuada; llegan a la solución correcta; acompaña con esquemas a los problemas; están todos los pasos adecuados y los justifica; al resultado numérico lo añaden frases explicativas; la notación, las expresiones y las propiedades matemáticas empleadas son correctas, independientemente del



resultado; están corregidos todos o solo parte y si en la corrección incluyen frases explicativas acerca del error cometido.

- A la hora de explicar las resoluciones de los ejercicios por parte de los alumnos, cuando sean preguntados por el profesor, se observarán los procedimientos empleados por el alumno y su capacidad de expresarse y transmitir sus ideas a los demás, haciéndose comprender por ellos.

- Asimismo se tendrá en cuenta, en este apartado, la resolución de los trabajos cooperativos correspondientes a las actividades prácticas indicadas y la entrega de las mismas.

En la evaluación continua se recogerán todas las actividades relacionadas con la lectura del libro recomendado, como por ejemplo un resumen del mismo, los principales cálculos matemáticos empleados por los protagonistas, etc.

Para la **evaluación sumativa** se prevé la realización, al final de cada Unidad Didáctica, de una prueba objetiva donde aparecerán preguntas, ejercicios o problemas con distinta dificultad que permitan conocer el nivel de adquisición y comprensión de los conceptos por parte del alumnado. Dichas pruebas se calificarán según el grado de alcance de los criterios y estándares citados anteriormente.

Los **criterios de calificación** que se emplearán para calificar la Unidad Didáctica serán los siguientes:

Para la valoración cuantitativa del proceso de evaluación se procederá de la siguiente manera:

- Un 70% de la valoración corresponderá al examen final de la Unidad Didáctica.
- Un 10 % corresponderá al cuaderno de clase.
- Un 10% a la presentación de los trabajos cooperativos.
- Un 10% a la actitud y participación en clase.

Para que se compute el 30% correspondiente al cuaderno de clase, trabajos cooperativos y actitud, el alumno deberá tener, al menos un 4 en el examen final de la UD.

En la calificación trimestral, se hará la media de los exámenes correspondientes a cada UD, para ello, se deberá obtener al menos un 4 en cada uno de ellos, lo cual computará un 70% de la nota de dicha evaluación y el resto de los porcentajes se obtendrá igualmente con la media de las puntuaciones correspondientes al cuaderno, trabajos cooperativos y actitud en todas las UD de esa evaluación.

Si el alumno no ha aprobado la evaluación deberá presentarse al examen de recuperación, guardándose las notas de las UD aprobadas, siendo el cómputo, en cuanto a porcentajes y mínimos, idéntico al caso anterior.

Para aprobar la asignatura el alumno deberá haber superado las tres evaluaciones. Si no superase una o varias deberá presentarse al examen final con esa o esas evaluaciones. En dicho examen final únicamente contará la nota, la cual deberá ser superior a 5.

En el caso que, tras el examen final el alumno no apruebe, deberá realizar un nuevo examen en la convocatoria extraordinaria con la totalidad de la materia del curso, contando únicamente la nota, la cual deberá ser superior a 5.

En cuanto a la recuperación de los alumnos se procederá de la siguiente manera: se les facilitaran actividades de recuperación, mediante ejercicios básicos que deberán realizar, prestándoles el profesor ayudas puntuales durante la clase que se determine o a través de email.



## 4.11 Atención a la diversidad

En la ESO, al ser obligatoria, hay una gran diversidad de alumnos, de diferentes procedencias, niveles socioculturales o económicos, etc. Por ello, en absoluto son todos los alumnos iguales ni tienen las mismas capacidades para adquirir conocimientos y asimilar conceptos o pueden hacerlo con el mismo ritmo de aprendizaje. Tampoco tienen todos ellos el mismo interés o motivación para estudiar Matemáticas.

Sin embargo, la educación debe estar al alcance de todos y por ello, además de que el profesor lleve a cabo una enseñanza y atención personalizada a los alumnos, dentro de lo posible, el currículo es susceptible de cambios a fin de adaptarse a las diferencias que presenten los alumnos.

Por ello, la atención a esta diversidad está recogida en la legislación. En ella aparece la posibilidad de establecer diversos grados de adecuación curricular con objeto de compatibilizar los principios de educación básica obligatoria común y la atención a la diversidad del alumnado, a fin de que la enseñanza se pueda amoldar a las características particulares del mismo. Siempre que sea necesario modificar algún elemento curricular, se hará intentando que sea con el menor número de cambios posible, y en el siguiente orden: metodología de impartición, evaluación del alumnado, contenidos y finalmente los objetivos didácticos; en todo caso, estos últimos deben corresponder a los objetivos generales marcados para la UD.

- **Valoración inicial del alumnado.** A fin de conocer mejor al alumno y poder, de esta manera, mejorar el proceso de enseñanza – aprendizaje y detectar la necesidad, en su caso, de las necesidades específicas, se realizará una valoración inicial en la que se tendrán en cuenta su rendimiento en cursos y UD anteriores, personalidad, interés, limitaciones médicas, la situación socioeconómica y cultural del alumno, así como su procedencia extranjera, etc. Estos datos se obtendrán mediante el estudio del expediente escolar de los cursos previos, consulta con profesores anteriores del alumno y con el Departamento de Orientación, de la prueba de nivel inicial realizada, de la observación directa de los alumnos, del seguimiento de su trabajo diario, de la consulta y comunicación con las familias, etc.

- **Medidas de atención a la diversidad.** Estas medidas deberán responder a las necesidades educativas concretas del alumnado, detectadas en la valoración realizada y deberán facilitar la adquisición de las competencias básicas y alcanzar los objetivos previstos, por parte del alumno.

En lo posible, las medidas que se hayan de tomar al respecto estarán asesoradas y supervisadas por el Departamento de Orientación. Algunas de ellas podrán ser generales, es decir, aplicadas a un grupo de alumnos de características similares, pero otras, necesariamente deberán ser aplicadas específicamente a alumnos individuales en función de sus necesidades específicas. A continuación, se indican algunas de las posibles medidas a adoptar:

- En cada bloque temático de contenidos, se tendrán en cuenta los contenidos mínimos, que ofrecen al alumno, de forma resumida, los conceptos esenciales de la Unidad Didáctica correspondiente.
- Se proporcionará en la explicación, información complementaria relacionada con los contenidos.
- Se confeccionará, al final de cada unidad didáctica, un esquema resumen, (contenidos mínimos) después de realizado el subrayado como aplicación de una técnica de estudio.
- Se propondrán actividades de refuerzo adicionales o alternativas para aquellos alumnos que lo precisen. Se procurará una atención individual y personalizada, dentro de lo posible.

En el caso de que el alumno necesite una Adaptación curricular significativa, se pondrá a su disposición material didáctico, tal como Libros de texto, Cuadernillos de refuerzo, Fichas de actividades, etc., ya existentes, o a desarrollar por el Departamento en colaboración con el Departamento de Orientación, que se adecúen a su nivel de competencia curricular. El alumno realizará en casa esas actividades y serán entregadas al profesor para que las corrija y comente por vía email o presencial. El alumno podrá acudir al aula de refuerzo, fuera del horario lectivo ordinario del curso.

En el caso de que el alumno necesite una adaptación curricular poco significativa se intentará adaptar el modo de enseñanza de la materia a sus necesidades, pero sin cambios sustanciales en el contenido, por lo que se intentará captar la atención del alumno y motivarlo, para lo cual se han previsto en esta Unidad varias actividades manipulativas con las que se pretende involucrar al alumno en su propio aprendizaje. Al ser estas actividades cooperativas, el resto de los alumnos del grupo podrán apoyarle mediante la explicación de los conceptos o medidas para entenderlos.

El Departamento pondrá a disposición de los alumnos que hayan alcanzado fácil y rápidamente los objetivos didácticos de la UD o que posean altas capacidades intelectuales, fichas y cuadernillos de ampliación para que los realicen en casa, y se les propondrán trabajos de investigación de una mayor dificultad, los cuales serán corregidos posteriormente por el profesor.

Por último, se ha previsto que, si algún alumno se encuentra con especiales dificultades a la hora de comprender algún concepto concreto, pueda pedir al profesor ejercicios sobre ese tema, además de los que se manden en general a la clase, adaptados al nivel y dificultades que tenga, los cuales serán corregidos por el profesor y comentados en particular con dicho alumno.

También, como medida de atención a la diversidad, se tiene en cuenta a los alumnos que tengan pendiente esta asignatura y hayan promocionado a Bachillerato. Para estos alumnos se realizarán una serie de actividades, ejercicios y problemas, que se pasarán a los alumnos al finalizar cada UD, para que las resuelvan en casa antes de la fecha límite fijada y que luego devuelvan al profesor para que este las corrija. De este modo, el profesor podrá realizar un seguimiento continuo de la evolución del alumno, aun cuando este no pueda asistir a clase. Igualmente, el alumno podrá pedir tutorías para preguntar dudas, solicitar aclaraciones, etc., dentro de las horas dispuestas para ello.

Las medidas indicadas corresponden a los casos más generales de atención a la diversidad, si bien puede haber alumnos con necesidades específicas particulares para los cuales se deberán adaptar las medidas adecuadas en cada caso, de acuerdo al Departamento de Orientación.

#### 4.12 Evaluación y conclusiones de la Unidad Didáctica.

Una vez finalizada la Unidad Didáctica se pasará a los alumnos una encuesta a fin de que puedan evaluar la actuación del profesor.

Durante la impartición de la UD el profesor llevará un diario de clase en el cual irá recogiendo las incidencias, desviaciones, dificultades, etc., que han surgido a lo largo de la misma. Al finalizar, el profesor rellenará una ficha resumen a modo de Rúbrica, la cual recogerá los diferentes aspectos a evaluar de la actuación y desarrollo de la unidad.

Un modelo de ficha podría ser:

UD RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS Y APLICACIONES DE LA TRIGONOMETRÍA	Puntuación	Aspectos a mejorar
La temporalización ha sido adecuada.		
La metodología empleada ha sido adecuada.		
Los alumnos han atendido las explicaciones.		
Los alumnos han entendido los conceptos.		
Se han alcanzado los objetivos didácticos.		
Los alumnos han mejorado sus competencias.		
Los alumnos han realizado las tareas.		
Los alumnos han realizado correctamente las tareas.		
Los recursos empleados han sido adecuados.		
Las herramientas de evaluación han sido adecuadas.		
Los resultados finales han sido adecuados.		
La atención a la diversidad ha sido adecuada.		
...		

Para valorar el ajuste entre la programación y los resultados obtenidos, al final de cada evaluación se pasará una encuesta a los alumnos a fin de que puedan valorar, sobre la enseñanza recibida, diferentes aspectos agrupados en las siguientes categorías:

- a) Adecuación de los materiales y recursos didácticos, así como la distribución de espacios y tiempos a los métodos didácticos y pedagógicos utilizados.
- b) Resultados de la evaluación del curso en cada una de las materias.
- c) Contribución de los métodos didácticos y pedagógicos a la mejora del clima del aula y del Centro.

Para ello, los alumnos deberán puntuar cada pregunta, señalando con una x, del 1 al 4, siendo 1 la calificación más baja y 4 la más alta. Además, en ella se realizará una valoración general de los indicadores, así como una propuesta de mejora de cada indicador y en general.

Contrastando los resultados percibidos por el profesor con los obtenidos a través de la encuesta pasada a los alumnos, el profesor podrá observar los aspectos a mejorar en la enseñanza de unidades didácticas actuales y de cursos posteriores, siendo fundamental en todo momento, la capacidad para aceptar las críticas y su espíritu de mejora. Un ejemplo de encuesta podría ser la indicada en la figura 12.

Como conclusión de esta Unidad Didáctica, se espera que, mediante su impartición, los alumnos mejoren su percepción de la trigonometría, a la vez que, por medio de las diferentes actividades propuestas, logren la comprensión y manejo de los diferentes conceptos involucrados, de una manera más rápida y duradera que por medio de una clase expositiva tradicional.

**Figura 12**

*Encuesta a rellenar por los alumnos para la valoración del profesor*

INDICADORES					
<b>Adecuación de los materiales y recursos didácticos, y la distribución de espacios y tiempos a las decisiones metodológicas.</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>PROPUESTAS DE MEJORA</b>
1. Has respetado la distribución temporal de los contenidos.					
2. La secuencia y organización de los contenidos ha resultado adecuada a la práctica.					
3. Has aplicado la metodología didáctica programada.					
4. La metodología ha sido variado y adaptada a las necesidades de los alumnos.					
5. Las estrategias metodológicas han facilitado que los alumnos participen.					
6. Se ha partido de los intereses del alumnado y se han realizado actividades encaminadas a su motivación.					
7. Se han explorado los conocimientos previos del alumnado y desde ellos se ha enlazado con lo nuevo					
8. Las actividades propuestas han sido variadas en su tipología y tipo de agrupamiento, y han favorecido la adquisición de las competencias clave.					
9. Se ha sabido motivar y despertar la curiosidad del alumno.					
10. Has aplicado medidas de atención a la diversidad a los alumnos que la han requerido.					
11. Has llevado a efecto medidas de refuerzo educativo dirigidas a los alumnos que presentan dificultades de aprendizaje.					
12. Has utilizado materiales y recursos didácticos variados.					
13. Has puesto en práctica medidas para estimular el interés y el hábito de la lectura y la capacidad de expresarse correctamente.					
14. Has realizado las actividades complementarias y extraescolares.					
15. Valoración de las actividades complementarias y extraescolares.					
<b>Resultados de la evaluación</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>PROPUESTAS DE MEJORA</b>
1. La evaluación se ha realizado a través de diferentes técnicas.					
2. Los procedimientos de evaluación han permitido tener un conocimiento suficiente del aprendizaje del alumno.					
3. Los criterios, procedimientos y estándares de aprendizaje han sido válidos.					
4. Las estrategias e instrumentos de evaluación han sido los adecuados.					
5. Se ha realizado una evaluación inicial para ajustar la programación a la situación real del aprendizaje.					
6. La evaluación se ha realizado durante todo el proceso de aprendizaje.					
7. Se han proporcionado actividades alternativas cuando el objetivo no se ha alcanzado en primera instancia.					
8. Las calificaciones finales han sido satisfactorias.					
<b>Contribución de los métodos didácticos a mejorar el clima del aula y del centro</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>PROPUESTAS DE MEJORA</b>
1. Se ha favorecido la elaboración conjunta de normas de comportamiento en el aula.					
2. El ambiente de clase ha sido adecuado y productivo.					
<b>VALORACIÓN GENERAL DE LOS INDICADORES</b>					
<b>PROPUESTAS DE MEJORA</b>					

Nota: Tomado de la Programación Didáctica del Departamento Científico-Tecnológico del CEPA Viriato de Zamora

## 5 Conclusiones del TFM

A lo largo de este trabajo se han aplicado las enseñanzas recibidas en el presente Máster en todas y cada una de las diferentes asignaturas que lo componen.

Las asignaturas del módulo común han servido de base para planificar, de una manera general, el proceso de enseñanza – aprendizaje, teniendo en cuenta tanto los aspectos psicológicos y sociales del posible alumnado como el contexto legal y organizativo de los centros en que se inscribe este proceso.

Las asignaturas del módulo específico han servido para orientar la enseñanza de las matemáticas, y en particular la de Trigonometría, objeto de este TFM. En dichas asignaturas se han expuesto otros métodos diferentes de la clase magistral clásica y la resolución de problemas por parte de los alumnos, enriqueciendo las posibilidades metodológicas a emplear en el aula.

Esta metodología se complementará con otras estrategias facilitando de este modo la comprensión de los conceptos por parte de los estudiantes; en este caso se ha enmarcado la Unidad desde una perspectiva histórica y se ha hecho uso de muy variadas actividades manipulativas.

Para el desarrollo de la Unidad Didáctica que se expone en este TFM, las asignaturas de Diseño Curricular en Matemáticas y Metodología y Evaluación en Matemáticas, han sido fundamentales. Sin ellas no habría sido posible el desarrollo de esta Unidad Didáctica, pues han servido de base en la que se engarcan, en uno u otro capítulo de esta UD, los conocimientos del resto de las asignaturas.

Para el diseño de las diferentes actividades se han tenido en cuenta las enseñanzas recibidas en las asignaturas de Didáctica de las Matemáticas, Innovación Docente en Matemáticas e Ideas y Conceptos Matemáticos a través de la Historia.

Las asignaturas de Complementos Matemáticos y Modelos Matemáticos en Educación Secundaria han servido para refrescar y ampliar los conocimientos matemáticos adquiridos durante la carrera que me ha dado acceso a este Máster, a la vez que han servido de fuente de ideas para alguna de las actividades. Estos conocimientos matemáticos, de mayor nivel que los marcados en el currículo de 2º de Bachillerato, pueden servir en el futuro para la resolución de dudas que puedan plantear los alumnos y para la enseñanza a alumnos de altas capacidades, Bachillerato de excelencia o internacional, de tal manera que el profesor siempre tenga un nivel superior de la materia a enseñar que el que lleguen a alcanzar los alumnos.

La asignatura de Iniciación a la Investigación Educativa en Matemáticas me ha permitido conocer el abanico de artículos de investigación, de muy distintas temáticas, existentes en los diferentes bancos de datos y la validez y aplicabilidad de los mismos, de tal manera que puedan servir como punto de partida a la hora de conocer los errores y dificultades de los alumnos, planificar la enseñanza, diseñar las actividades, o incluso llevar a cabo en algún momento nuestra propia investigación.

Por último, en el Prácticum, al haberlo desarrollado en los módulos I y II de Educación Secundaria Para Adultos, no me ha sido posible aplicar directamente las ideas sobre la Unidad Didáctica expuestas en este TFM, si bien me ha permitido llevar a la práctica los conocimientos adquiridos en las diferentes asignaturas, participar en la enseñanza y en la adquisición de competencias por parte de los alumnos y tener una visión de primera mano de la realidad de los centros educativos.

Por ello, espero haber podido demostrar, por medio de este TFM, que he alcanzado los objetivos y competencias marcadas por la Universidad de Valladolid para la obtención del título de Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas en la Especialidad de Matemáticas, y, como consecuencia, estar capacitado para la impartición de clases a alumnos de ESO, Bachillerato y Formación Profesional.



## 6 Bibliografía - Webgrafía

### - LIBROS:

- Alcaide, Fernando; Hernández, Joaquín; Serrano, Esteban; Moreno, María; Pérez, Antonio; Donaire, Juan Jesús (2016). *Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas 4º ESO*, proyecto Savia. Editorial SM.
- Alcaide, Fernando; Hernández, Joaquín; Moreno, María; Serrano, Esteban; Sanz, Luis. (2015) *Matemáticas I 1º Bachillerato, proyecto Savia*. Editorial SM.
- Boyer, Carl B. 1999 *Historia de la Matemática*, Alianza Editorial.
- Cardona García, Susana; Rey Navarro, José Antonio (2015); *Matemáticas 1º Bachillerato, #somoslink*. Editorial Edelvives.
- Esteban Piñeiro, Mariano; Ibañes Jalón, Marcelino; Ortega del Rincón, Tomás (1998). *Trigonometría*. Editorial Síntesis.
- Mejía Sánchez-Bermejo, Damaris; Ocaña Fernández, José Manuel; Romero Torralba, Rosana (2016). *Matemáticas Académicas 4º ESO, #somoslink*. Editorial Edelvives.
- Montesinos Sirera, Jose Luis, (2000). *Historia de las matemáticas en la enseñanza secundaria*. Editorial Síntesis.
- Polya, G. (1989) *Como plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas.
- Steiner, Erich (2005). *Matemáticas para las ciencias aplicadas*. Editorial Reverté.
- Veguín Casas, María Victoria (2011). *Historia de las matemáticas en la Península Ibérica*. Editorial Reverté.

### - ARTÍCULOS Y TRABAJOS ACADÉMICOS:

- Abonia Velasco, Luisa Fernanda; Miranda Rosero, William Samir (2017). *Un acercamiento histórico a las razones trigonométricas seno y coseno para la implementación de una actividad en el aula* (Trabajo de grado para optar el título de licenciados en matemáticas y física). Universidad del Valle (Colombia). Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/11099/1/Abonia2017Un.pdf> Última consulta 01/06/2021.
- Aminudin, M; Nusantara, T; Parta, I N; Rahardjo, S; As'ari, A R; Subanji (2019). Engaging problems on trigonometry: Why were student hard to think critically? *Journal of Physics: Conference Series, Volume 1188, conference 1* 012038. Recuperado de <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1188/1/012038> Última consulta 01/06/2021.
- Benedicto Baldonado, Clara; Jaime Pastor, Adela; Gutiérrez Rodríguez, Ángel; (2015). Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos. Fernández, Ceneida; Molina, Marta; Planas, Nuria, (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX Alicante: SEIEM*. 153-162. Recuperado de <http://hdl.handle.net/10045/51384> Última consulta 01/06/2021.

- Cruz-Márquez, Gerardo., Montiel, Gisela. (2017). Emergencia de las Nociones Trigonométricas en el Almagesto. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, capítulo 3 981-989. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/12309/1/Cruz2017Emergencia.pdf> Última consulta 01/06/2021.
- Delors, Jacques. *La Educación encierra un tesoro, informe a la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la Educación para el Siglo XXI*. Recuperado de [https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000109590\\_spa](https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000109590_spa) Última consulta 01/06/2021.
- Díaz, M. V. V. (1979). La obra de Ibn Muad en la matemática árabe. *Memorias de la Real Academia de Buenas Letras de Barcelona*, 9-36. Recuperado de <https://www.raco.cat/index.php/MemoriasRABL/article/download/204460/298617> Última consulta 01/06/2021.
- Dorce Polo, Carlos (2020) Trigonometría en el Renacimiento Europeo. Un recurso de aula. *Revista Suma n° 96*. 21-31
- Escudero Domínguez, Ana María; Domínguez Viñas, Josefa (2014). De los errores identificados en la investigación a los errores encontrados en un aula de primero de bachillerato. *Números: Revista de didáctica de las matemáticas*, N° 86, 111-130 Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4759022> Última consulta 01/06/2021.
- Fernández Medina, Fco. Javier (2011). *Unidad Didáctica: Trigonometría* (Trabajo Fin de Máster en Formación al profesorado de enseñanza secundaria. Especialidad Matemáticas) Universidad de Granada, España. Recuperado de [https://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/TFM\\_\(Fco\\_Javier\\_Fernandez\\_Medina\).pdf](https://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/TFM_(Fco_Javier_Fernandez_Medina).pdf) Última consulta 01/06/2021.
- Fernández Rodríguez, Guillermo. (2018). *Análisis de los aprendizajes de los alumnos en prácticas de campo de trigonometría*. (Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Especialidad de Matemáticas). Universidad de Valladolid, España. Recuperado de <http://uvadoc.uva.es/handle/10324/35996> Última consulta 01/06/2021.
- Gómez, Pedro (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, 7(3), 251-292. Recuperado de [http://funes.uniandes.edu.co/1537/1/89\\_G%C3%B3mez2002An%C3%A1lisis\\_RevEMA.pdf](http://funes.uniandes.edu.co/1537/1/89_G%C3%B3mez2002An%C3%A1lisis_RevEMA.pdf) Última consulta 01/06/2021.
- González Urbaneja, P. M. (2008). Euler y la geometría analítica. *Quaderns d'història de l'enginyeria*, 9, 83-116. Recuperado de <https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2099/8055/article5.pdf> Última consulta 01/06/2021.



- Grupo de Trabajo de Competencias Básicas. Consejería de Educación de Cantabria. Las competencias básicas y el currículo: orientaciones generales. *Cuadernos de educación de Cantabria 2*. Recuperado de [https://www.educantabria.es/docs/info\\_institucional/publicaciones/2007/Cuadernos\\_Educacion\\_2.PDF](https://www.educantabria.es/docs/info_institucional/publicaciones/2007/Cuadernos_Educacion_2.PDF) Última consulta 01/06/2021.
- Gür, H. (2009). Trigonometry learning. *New Horizons in Education Volume 57*, nº 1, 67-80 Recuperado de <https://eric.ed.gov/?id=EJ860819> Última consulta 01/06/2021.
- Herranz Trillo, Francisco Javier. (2019). *Unidad Didáctica Trigonometría*. (Trabajo Fin de Máster en Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas) Universidad de Jaén, España. Recuperado de <http://tauja.ujaen.es/jspui/handle/10953.1/11523> Última consulta 01/06/2021.
- Jesus Brito, Arlete de; Barbosa Morey, Bernadete (2004). Trigonometria: dificuldades dos professores de Matemática do ensino fundamental *Horizontes, Bragança Paulista v22, nº1*, 65-70. Recuperado de [http://lyceumonline.usf.edu.br/webp/portalUSF/edusf/publicacoes/RevistaHorizontes/Volume\\_05/uploadAddress/horizontes-8\[6288\].pdf](http://lyceumonline.usf.edu.br/webp/portalUSF/edusf/publicacoes/RevistaHorizontes/Volume_05/uploadAddress/horizontes-8[6288].pdf) Última consulta 01/06/2021.
- Lupiañez, José Luis; Rico, Luis; Gómez, Pedro; Marín, Antonio (2005). Análisis cognitivo en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Conferencia presentada en *V Congresso Iberoamericano de Educação Matemática (CIBEM) (18-22 Jul 2005). Oporto, Portugal*. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/595/1/LupianezJ05-2757.PDF> Última consulta 01/06/2021.
- Martínez, E. A. (1983). Sobre los conocimientos trigonométricos en los Libros del Saber de Astronomía de Alfonso X el Sabio. *Llull: Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, 6(10), 5-38. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/62009.pdf> Última consulta 01/06/2021.
- Ortega Fernández, Rubén. (2018) *Aprendizaje de la trigonometría en 4º de ESO. Propuesta para el aumento de la motivación del alumnado*. (Trabajo Final del Máster Universitario en Profesor/a de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad: Matemáticas). Universitat Jaume I. Recuperado de <http://hdl.handle.net/10234/179749> Última consulta 01/06/2021.
- Puyo Abadía, Cristina. (2015) *Trigonometría: una propuesta didáctica para 4º de ESO Opción B* (Trabajo Fin de Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de idiomas, artísticas y deportivas. Especialidad de Matemáticas) Universidad de Zaragoza, España. Recuperado de <https://zaguan.unizar.es/record/47184?ln=es> Última consulta 01/06/2021.

- Quiroga Barranco, Raúl. (2007) La geometría de dos fórmulas de Euler. *Miscelánea Matemática de la Sociedad Matemática Mexicana*, n° 45, 105-130. Recuperado de <https://miscelaneamatematica.org/ContenidoNumero/45> Última consulta 01/06/2021.
- Santos Rubio, Covadonga (2018) *Propuesta didáctica para la enseñanza de los movimientos del plano. Perspectiva histórica*. (Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Especialidad de Matemáticas). Universidad de Valladolid, España. Recuperado de <http://uvadoc.uva.es/handle/10324/32192> Última consulta 01/06/2021.
- Salcedo Garzón, G. (2012). *Elementos básicos de la trigonometría desde el paso de la razón trigonométrica a la función trigonométrica*. (Trabajo de tesis para optar el título de magíster en enseñanza de las ciencias exactas y naturales). Universidad Nacional de Colombia (Colombia). Recuperado de <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/11157> Última consulta 01/06/2021.
- Sampaio, Helenara Regina; Batista, Irinea de Lourdes (2018). Mathematics history and cognitive values on a didactic sequence: Teaching trigonometry. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education*, 7(3), 311-332. Recuperado de <https://www.hipatiapress.com/hpjournals/index.php/redimat/article/view/2727> Última consulta 01/06/2021.
- Sessah Mensah, Farouq. (2017). Ghanaian Senior High School students' error in learning of trigonometry. *International journal of environmental & science education*, vol. 12, n°.8, 1709-1717. Recuperado de [http://www.ijese.net/makale\\_indir/IJESE\\_1934\\_article\\_59ba3d4a95bd2.pdf](http://www.ijese.net/makale_indir/IJESE_1934_article_59ba3d4a95bd2.pdf) Última consulta 01/06/2021.
- Sociedad Canaria “Isaac Newton” de Profesores de Matemáticas. (2007). Editorial. Competencias básicas en la normativa actual: a por ellas. *Revista digital Números n°66*. Recuperado de [http://www.sinewton.org/numeros/numeros/66/editorial\\_01.php](http://www.sinewton.org/numeros/numeros/66/editorial_01.php) Última consulta 01/06/2021.
- Vargas Vargas, G. S. (2019). *Propuesta de un modelo praxeológico de referencia para la enseñanza del seno y coseno en quinto de secundaria*. (Tesis para optar al grado de magíster en enseñanza de las matemáticas). Universidad Católica del Perú (Perú). Recuperado de <http://hdl.handle.net/20.500.12404/15169> Última consulta 01/06/2021.
- Zaratiegui Urdín, Javier (2017). *Análisis de la enseñanza de la trigonometría en 4º de ESO*. (Trabajo Final del Máster Universitario en Formación del Profesorado de Educación Secundaria. Ámbito Matemáticas). Universidad Pública de Navarra, España. Recuperado de <https://hdl.handle.net/2454/25168> Última consulta 01/06/2021.

## - LEGISLACION

Recomendación del Parlamento Europeo y del Consejo de 18 de diciembre de 2006 sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente (2006/962/CE)

España. Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Boletín Oficial del Estado, 3 de enero de 2015, núm. 3. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Castilla y León, España. Orden EDU 362/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León. Boletín Oficial de Castilla y León, 8 de mayo de 2015, núm. 86. Consejería de Educación.

Castilla y León, España. Orden EDU/363/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo del Bachillerato en la Comunidad de Castilla y León Boletín Oficial de Castilla y León, 8 de mayo de 2015, núm. 86. Consejería de Educación.

**- APUNTES ACADÉMICOS DEL MÁSTER UNIVERSITARIO DE PROFESOR EN EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA Y BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZA DE IDIOMAS, ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICAS. UNIVERSIDAD DE VALLADOLID, CURSO 2020-2021**

Alonso Mallo, Isaías; Dorado Díaz, Ana; Giménez, Philippe Thierry. (2020-2021). Apuntes de la asignatura Complementos de Matemáticas. Universidad de Valladolid

Arce Sánchez, Matías; Marbán Prieto, José María. (2021). Apuntes de la asignatura Iniciación a la Investigación Educativa en Matemáticas. Universidad de Valladolid

Callejo González, José Javier; Guerra Rodríguez, José Carlos. (2020). Apuntes de la asignatura Sociedad, Familia y Educación. Universidad de Valladolid

Encinas Carrión, Santiago; Reyes Iglesias, María Encarnación. (2021). Apuntes de la asignatura Modelos Matemáticos en Educación Secundaria. Universidad de Valladolid

Esteban Frades, Santiago; Romero Ureña, Carmen. (2020)., Apuntes de la asignatura Procesos y Contextos Educativos. Universidad de Valladolid

Fernández Barcenilla, Rosa María. (2020-2021). Apuntes de la asignatura Innovación Docente en Matemáticas. Universidad de Valladolid

García Alonso, Juan Carlos; Martín Antón, Luis Jorge; Salgado Pascual, Carlos F. (2020). Apuntes de la asignatura Aprendizaje y Desarrollo de la Personalidad. Universidad de Valladolid

González Arteaga, María Teresa; Población Sáez, Alfonso Jesús; Reyes Iglesias, María Encarnación. (2021). Apuntes de la asignatura Ideas y Conceptos Matemáticos a través de la Historia. Universidad de Valladolid

González Fernández, Cesáreo. (2020). Apuntes de la asignatura Diseño Curricular en Matemáticas. Universidad de Valladolid

González Fernández, Cesáreo. (2020-2021). Apuntes de la asignatura Metodología y Evaluación en Matemáticas. Universidad de Valladolid

Martínez Moro, Edgar. (2020). Apuntes de la asignatura Didáctica de la Matemática. Universidad de Valladolid

## **DOCUMENTOS DE CENTRO EDUCATIVO**

Programación General Anual del CEPA Viriato de Zamora Curso 2020-2021.

Programación Didáctica del Departamento del Ámbito Científico-Tecnológico del CEPA Viriato de Zamora.

Documento “Selección de los contenidos de la programación”, elaborado por el Departamento de Ciencia y Tecnología del CEPA Viriato de Zamora.

Apuntes Matemáticas 2º ESPA Tema 4 Geometría, del Departamento de Ciencia y Tecnología del CEPA Viriato de Zamora.

## **WEBGRAFÍA**

Moya, Paco. *Apuntes Marea Verde: Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4ºB de ESO.*

Recuperado de <https://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/4B/CuartoB.pdf> Última consulta 01/06/2021.

Muñoz, Jorge; Moya, Paco. *Apuntes Marea Verde: Matemáticas I 1º de Bachillerato.* Recuperado de

[http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/Bachillerato/Matematicas\\_I.pdf](http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/Bachillerato/Matematicas_I.pdf) Última consulta 01/06/2021.

*Wikipedia.* Recuperado de <https://es.wikipedia.org> Última consulta 01/06/2021.

School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland. *Mac Tutor* Recuperado de <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/> Última consulta 01/06/2021.

Camino Beck, Tomas de. *La fascinante trigonometría de Babilonia y una experiencia de aprendizaje.*

Recuperado de <https://medium.com/@TomasDeCamino/la-fascinante-trigonometr%C3%ADa-de-babilonia-b7f9c230e782> Última consulta 01/06/2021.

*Las Matemáticas en el Antiguo Egipto.* Recuperado de

[http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro\\_rhind.htm](http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_rhind.htm) Última consulta 01/06/2021.

Pérez, Victoria, *Historia de la trigonometría.* Recuperado de

<https://matematica.laguia2000.com/general/historia-de-la-trigonometria> Última consulta 01/06/2021.

*Historia de la trigonometría.* Recuperado de

<https://departamentmathcoestehaw.wordpress.com/trigonometria-10o/historia-de-la-trigonometria/> Última consulta 01/06/2021.

- Ramos Ayala, Irving Enrique; Ponce Espejel, Ximena; Gómez Sáenz, Stephanie Yamilet *Aportaciones a la trigonometría*. Recuperado de [https://padlet.com/stephy\\_1911/4yju5lg91g2b](https://padlet.com/stephy_1911/4yju5lg91g2b) Última consulta 01/06/2021.
- Ruiz Zúñiga, Ángel. *Matemáticas en la India El período clásico*. Recuperado de [http://www.centroedumatematica.com/aruiz/libros/Historia%20y%20Filosofia/Parte2/Cap08/Parte03\\_08.htm](http://www.centroedumatematica.com/aruiz/libros/Historia%20y%20Filosofia/Parte2/Cap08/Parte03_08.htm) Última consulta 01/06/2021.
- Ruiz Zúñiga, Ángel. *Matemáticas en el Renacimiento. Trigonometría*. Recuperado de [http://www.centroedumatematica.com/aruiz/libros/Historia%20y%20Filosofia/Parte3/Cap11/Parte06\\_11.htm](http://www.centroedumatematica.com/aruiz/libros/Historia%20y%20Filosofia/Parte3/Cap11/Parte06_11.htm) Última consulta 01/06/2021.
- Moreno, Ricardo. *Al Biruni*. Recuperado de <https://virtual.uptc.edu.co/ova/estadistica/docs/autores/pag/mat/AlBiruni-1.asp.htm> Última consulta 01/06/2021.
- Maranzana, Ignacio *Regiomontanp*. Recuperado de <https://historiadelacienciarenacentista.wordpress.com/2011/11/09/regiomontano/> Última consulta 01/06/2021.
- Eliatron, Tito. *Una breve historia impresionista de la trigonometría II: de Arabia a Europa*. Recuperado de <https://naukas.com/2010/10/15/una-breve-historia-impresionista-de-la-trigonometria-ii-de-arabia-a-europa/> Última consulta 01/06/2021.
- Aportes de la trigonometría de François Viète*. Recuperado de <http://matrigonometria.blogspot.com/2008/11/aportes-de-la-trigonometria-de-francois.html> Última consulta 01/06/2021.
- Artacho, Amadeo. *La pirámide de Keops y el Teorema de Tales*. Recuperado de <https://matematicascercanas.com/2014/04/06/la-piramide-de-keops/> Última consulta 01/06/2021.
- Teresa Lucca, Ana María. *Roger Cotes – Un gran matemático olvidado?* Recuperado de <https://matematics.wordpress.com/2014/04/09/roger-cotes-un-gran-matematico-olvidado/> Última consulta 01/06/2021.
- Arenzana Hernández, Víctor. *Aristarco de Samos: Las medidas del sistema solar*. Recuperado de <https://vicmat.com/aristarco-samos-las-medidas-del-sistema-solar/> Última consulta 01/06/2021.
- Gómez Aroca, José María. *Eratóstenes mide el radio de la Tierra*. Recuperado de <http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/practica/eratostenes.htm> Última consulta 01/06/2021.
- Los textos. Sulvasutras. Siddhantas*. Recuperado de <https://studylib.es/doc/5809724/los-textos.-sulvasutras.-siddhantas> Última consulta 01/06/2021.
- Trigonometría Plana*. Recuperado de <http://sistemas.fciencias.unam.mx/~mglgm/Trigonometria> Última consulta 01/06/2021.

- La historia de la trigonometría. Trigonometría árabe.* Recuperado de <http://supermaticos123.blogspot.com/2016/05/trigonometria-arabe.html> Última consulta 01/06/2021.
- Apuntes de Historia de las Matemáticas. Volumen I.* Universidad de Sonora, México. Recuperado de [https://issuu.com/abelgalois/docs/apuntes\\_de\\_historia\\_de\\_las\\_matematicas\\_volumen\\_1](https://issuu.com/abelgalois/docs/apuntes_de_historia_de_las_matematicas_volumen_1) Última consulta 01/06/2021.
- Jeniffer. *La importancia de los triángulos y sus propiedades métricas.* Recuperado de <http://revistadigitaltriangulos.blogspot.com/2017/01/la-importancia-de-los-triangulos.html> Última consulta 01/06/2021.
- Cómo funciona el sistema de posicionamiento GPS.* Recuperado de <https://www.aristasur.com/contenido/como-funciona-el-sistema-de-posicionamiento-gps> Última consulta 01/06/2021.
- La importancia de tocar las matemáticas.* Recuperado de <https://matemavida.wordpress.com/tag/z-p-dienes/> Última consulta 01/06/2021.
- Principio de Dienes.* Recuperado de <https://mathbasic1.wordpress.com/principio-de-dienes/> Última consulta 01/06/2021.
- Mulero, Julio. *Las matemáticas a través de un túnel.* Recuperado de <https://elultimoversodefermat.wordpress.com/2019/10/10/las-matematicas-a-traves-de-un-tunel/> Última consulta 01/06/2021.
- Viñuales, Ederlinda. *¿Cómo hallar la latitud de un lugar?* Recuperado de <http://sac.csic.es/astrosecundaria/complementario/es/actividades/observacion/COMO%20HALLAR%20LA%20LATITUD%20DE%20UN%20LUGAR.pdf> Última consulta 01/06/2021.
- Taller de Internet: La estrella polar desde distintas latitudes.* Recuperado de <http://olimpiadasquindio.ddns.net/principal/astrologia/pag/b1mt7/ste62tll.htm> Última consulta 01/06/2021.
- IES Cánovas del Castillo. *Programación Matemáticas 1º ESO. Curso 2010-2011.* Recuperado de <http://www.iescanovas.es/documentos/programaciones10-11/MATEMATICAS/Programacion%201-ESO.pdf> Última consulta 01/06/2021.
- IES Cánovas del Castillo. *Programación Matemáticas 2º ESO. Curso 2010-2011.* Recuperado de <http://www.iescanovas.es/documentos/programaciones10-11/MATEMATICAS/Programacion%202-ESO.pdf> Última consulta 01/06/2021.
- IES Cánovas del Castillo. *Programación Matemáticas 3º ESO. Curso 2010-2011.* Recuperado de <http://www.iescanovas.es/documentos/programaciones10-11/MATEMATICAS/Programacion%203-ESO.pdf> Última consulta 01/06/2021.

IES Cánovas del Castillo. *Programación Matemáticas 4º ESO. Curso 2010-2011*. Recuperado de <http://www.iescanovas.es/documentos/programaciones10-11/MATEMATICAS/Programacion%204-ESO.pdf> Última consulta 01/06/2021.

IES Cánovas del Castillo. *Programación Didáctica Departamento de Matemáticas*. Recuperado de <http://www.iescanovas.es/documentos/programaciones14-15/MATEMATICAS/programamates.pdf> Última consulta 01/06/2021.

Román Muela, María José. *Unidad Didáctica Organización de tiempos, espacios y agrupamientos para el juego. Documentación del proceso de aprendizaje*. Recuperado de [https://www.campuseducacion.com/blog/wp-content/uploads/2019/01/Resumen\\_LudicasUD5.pdf](https://www.campuseducacion.com/blog/wp-content/uploads/2019/01/Resumen_LudicasUD5.pdf) Última consulta 01/06/2021.

*Los acueductos romanos, maravillas de la ingeniería*. Recuperado de <https://www.jw.org/es/biblioteca/revistas/g201411/acueductos-romanos-ingenier%C3%ADa/> Última consulta 01/06/2021.

Mediavilla. *Telémetro: teoría y fundamento*. Recuperado de <http://www.de1939a1945.com/tecnicos/024telemetro.htm> Última consulta 01/06/2021.

## **ANEXO 1**

### **OBJETIVOS GENERALES MARCADOS EN EL RD 1105/2014 PARA LA ENSEÑANZA SECUNDARIA OBLIGATORIA Y EL BACHILLERATO**



## OBJETIVOS GENERALES DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA Y DEL BACHILLERATO

El RD 1105/2014, en su artículo 11, Objetivos de la Educación Secundaria Obligatoria dice:

*“La Educación Secundaria Obligatoria contribuirá a desarrollar en los alumnos y las alumnas las capacidades que les permitan:*

- a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.*
- b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.*
- c) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.*
- d) Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.*
- e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.*
- f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.*
- g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.*
- h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.*
- i) Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.*
- j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.*
- k) Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.*

*l) Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.”*

Asimismo, el RD 1105/2014, en su artículo 25, indica que en el caso del **Bachillerato** los objetivos generales a alcanzar por parte del alumnado serían:

*“El Bachillerato contribuirá a desarrollar en los alumnos y las alumnas las capacidades que les permitan:*

*a) Ejercer la ciudadanía democrática, desde una perspectiva global, y adquirir una conciencia cívica responsable, inspirada por los valores de la Constitución española, así como por los derechos humanos, que fomente la corresponsabilidad en la construcción de una sociedad justa y equitativa.*

*b) Consolidar una madurez personal y social que les permita actuar de forma responsable y autónoma y desarrollar su espíritu crítico. Prever y resolver pacíficamente los conflictos personales, familiares y sociales.*

*c) Fomentar la igualdad efectiva de derechos y oportunidades entre hombres y mujeres, analizar y valorar críticamente las desigualdades y discriminaciones existentes, y en particular la violencia contra la mujer e impulsar la igualdad real y la no discriminación de las personas por cualquier condición o circunstancia personal o social, con atención especial a las personas con discapacidad.*

*d) Afianzar los hábitos de lectura, estudio y disciplina, como condiciones necesarias para el eficaz aprovechamiento del aprendizaje, y como medio de desarrollo personal.*

*e) Dominar, tanto en su expresión oral como escrita, la lengua castellana y, en su caso, la lengua cooficial de su Comunidad Autónoma.*

*f) Expresarse con fluidez y corrección en una o más lenguas extranjeras.*

*g) Utilizar con solvencia y responsabilidad las tecnologías de la información y la comunicación.*

*h) Conocer y valorar críticamente las realidades del mundo contemporáneo, sus antecedentes históricos y los principales factores de su evolución. Participar de forma solidaria en el desarrollo y mejora de su entorno social.*

*i) Acceder a los conocimientos científicos y tecnológicos fundamentales y dominar las habilidades básicas propias de la modalidad elegida.*

*j) Comprender los elementos y procedimientos fundamentales de la investigación y de los métodos científicos. Conocer y valorar de forma crítica la contribución de la ciencia y la tecnología en el cambio de las condiciones de vida, así como afianzar la sensibilidad y el respeto hacia el medio ambiente.*

*k) Afianzar el espíritu emprendedor con actitudes de creatividad, flexibilidad, iniciativa, trabajo en equipo, confianza en uno mismo y sentido crítico.*

*l) Desarrollar la sensibilidad artística y literaria, así como el criterio estético, como fuentes de formación y enriquecimiento cultural.*

*m) Utilizar la educación física y el deporte para favorecer el desarrollo personal y social.*

*n) Afianzar actitudes de respeto y prevención en el ámbito de la seguridad vial.”*

## **ANEXO 2**

**CONTENIDOS, CRITERIOS DE EVALUACIÓN Y ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE  
EVALUABLES APLICABLES A LA TRIGONOMETRÍA EN LAS ASIGNATURAS DE  
MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS DE 4º DE ESO  
(BOCYL, ORDEN EDU/362/2015) Y MATEMÁTICAS I DE 1º DE BACHILLERATO  
(BOCYL ORDEN EDU/363/2015)**

#### 4º DE ESO, MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS

Los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje marcados en la Orden EDU/362/2015 para el caso de la asignatura de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 4º de ESO, directamente aplicables a la trigonometría (bloques 1 y 3 del currículo) serían:

##### **Bloque 1**

###### - Contenidos:

*Planificación del proceso de resolución de problemas: análisis de la situación, selección y relación entre los datos, selección y aplicación de las estrategias de resolución adecuadas, análisis de las soluciones y, en su caso, ampliación del problema inicial.*

*Elección de las estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico básico, etc.) y de una buena notación; construcción de una figura, un esquema o un diagrama; experimentación mediante el método ensayo-error; búsqueda de analogías y de problemas semejantes o isomorfos, reformulación del problema, resolución de subproblemas dividiendo el problema en partes; recuento exhaustivo, comienzo por casos particulares sencillos, casos límite, búsqueda de regularidades y leyes, introducción de elementos auxiliares y complementarios; trabajo hacia atrás, suponiendo el problema resuelto; etc.*

*Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.*

*Expresión verbal y escrita en Matemáticas.*

*Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.*

*Práctica de los procesos de matematización y modelización en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.*

*Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.*

*Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a) la recogida ordenada y la organización de datos. b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos (gráficas de funciones, diagramas de distintos tipos, ...). c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico; d) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas; e) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos; f) comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.*

###### - Criterios de evaluación:

1. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.

2. *Describir y analizar situaciones de cambio para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones.*
3. *Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.*
4. *Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema.*
5. *Elaborar y presentar informes, de manera clara y ordenada, sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación*
6. *Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.*
7. *Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos.*
8. *Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.*
9. *Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.*
10. *Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.*
11. *Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, inicialmente de manera guiada, realizando cálculos básicos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.*
12. *Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.*

- Estándares de aprendizaje evaluables:

- 1.1. *Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema).*
- 1.2. *Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema.*
- 1.3. *Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia.*
- 1.4. *Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas.*
  - 2.1. *Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.*
  - 2.2. *Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad.*
- 3.1. *Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución.*

3.2. Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad.

4.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada.

5.1. Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas, utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico y estadístico-probabilístico.

6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés.

6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático: identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios.

6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas.

6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad.

6.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia.

7.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados.

8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada.

8.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación.

8.3. Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso.

8.4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantearse preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas.

9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad.

10.1. Reflexiona sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras similares.

11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente.

11.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas.

11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos.

11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas.

12.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, hojas de cálculo, imagen, video, sonido, ...), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada y los comparte para su discusión o difusión.

12.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula.

12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.

### **Bloque 3**

#### - Contenidos:

*Radian. Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes. Relaciones métricas en los triángulos. Razones trigonométricas de ángulos agudos y de ángulos cualesquiera. Relaciones entre ellas. Relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos complementarios, suplementarios, opuestos y que se diferencian en uno y dos rectos. Resolución de triángulos rectángulos y oblicuángulos aplicando trigonometría elemental. Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes.*

#### - Criterios de evaluación:

1. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales.

2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas en situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida.

#### - Estándares de aprendizaje evaluables:

1.1. Utiliza conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos.

2.1. Utiliza las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas.

2.2. Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones.

2.3. Utiliza las fórmulas para calcular áreas y volúmenes de triángulos, cuadriláteros, círculos, paralelepípedos, pirámides, cilindros, conos y esferas y las aplica para resolver problemas geométricos, asignando las unidades apropiadas.

### **1º DE BACHILLERATO, MATEMÁTICAS I**

Los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje marcados en la Orden EDU/363/2015 para el caso de la asignatura de matemáticas I de 1º de Bachillerato, directamente aplicables a la trigonometría (bloques 1 y 4 del currículo) serían:

#### **Bloque 1**

##### - Contenidos:

*Planificación del proceso de resolución de problemas.*

*Estrategias y procedimientos puestos en práctica: relación con otros problemas conocidos, modificación de variables, suponer el problema resuelto.*

*Soluciones y/o resultados obtenidos: coherencia de las soluciones con la situación, revisión sistemática del proceso, otras formas de resolución, problemas parecidos, generalizaciones y particularizaciones interesantes.*

*Iniciación a la demostración en matemáticas: métodos, razonamientos, lenguajes, etc.*

*Métodos de demostración: reducción al absurdo, método de inducción, contraejemplos, razonamientos encadenados, etc.*

*Razonamiento deductivo e inductivo. Lenguaje gráfico, algebraico, otras formas de representación de argumentos.*

*Elaboración y presentación oral y/o escrita de informes científicos sobre el proceso seguido en la resolución de un problema o en la demostración de un resultado matemático.*

*Realización de investigaciones matemáticas a partir de contextos de la realidad o contextos del mundo de las matemáticas.*

*Elaboración y presentación de un informe científico sobre el proceso, resultados y conclusiones del proceso de investigación desarrollado.*

*Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.*

*Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.*

*Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a) la recogida ordenada y la organización de datos; b) la elaboración e interpretación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos; c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico; d) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas; e) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos; f) comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.*

**- Criterios de evaluación:**

- 1. Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema.*
- 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.*
- 3. Realizar demostraciones sencillas de propiedades o teoremas relativos a contenidos algebraicos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.*
- 4. Elaborar un informe científico escrito que sirva para comunicar las ideas matemáticas surgidas en la resolución de un problema o en una demostración, con el rigor y la precisión adecuados.*
- 5. Planificar adecuadamente el proceso de investigación, teniendo en cuenta el contexto en que se desarrolla y el problema de investigación planteado.*
- 6. Practicar estrategias para la generación de investigaciones matemáticas, a partir de: a) la resolución de un problema y la profundización posterior; b) la generalización de propiedades y leyes matemáticas; c) la profundización en algún momento de la historia de las matemáticas; concretando todo ello en contextos numéricos, algebraicos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos.*
- 7. Elaborar un informe científico escrito que recoja el proceso de investigación realizado, con el rigor y la precisión adecuados.*



8. *Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones de la realidad.*
9. *Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos.*
10. *Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.*
11. *Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.*
12. *Reflexionar sobre las decisiones tomadas, valorando su eficacia y aprendiendo de ellas para situaciones similares futuras.*
13. *Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.*
14. *Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.*

Estándares de aprendizaje evaluables:

- 1.1. *Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuados.*
- 2.1. *Analiza y comprende el enunciado a resolver o demostrar (datos, relaciones entre los datos, condiciones, hipótesis, conocimientos matemáticos necesarios, etc.).*
- 2.2. *Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema.*
- 2.3. *Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia.*
- 2.4. *Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas.*
- 2.5. *Reflexiona sobre el proceso de resolución de problemas.*
- 3.1. *Utiliza diferentes métodos de demostración en función del contexto matemático.*
- 3.2. *Reflexiona sobre el proceso de demostración (estructura, método, lenguaje y símbolos, pasos clave, etc.).*
- 4.1. *Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación.*
- 4.2. *Utiliza argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes.*
- 4.3. *Emplea las herramientas tecnológicas adecuadas al tipo de problema, situación a resolver o propiedad o teorema a demostrar, tanto en la búsqueda de resultados como para la mejora de la eficacia en la comunicación de las ideas matemáticas.*
- 5.1. *Conoce la estructura del proceso de elaboración de una investigación matemática: problema de investigación, estado de la cuestión, objetivos, hipótesis, metodología, resultados, conclusiones, etc.*
- 5.2. *Planifica adecuadamente el proceso de investigación, teniendo en cuenta el contexto en que se desarrolla y el problema de investigación planteado.*

5.3. *Profundiza en la resolución de algunos problemas, planteando nuevas preguntas, generalizando la situación o los resultados, etc.*

6.1. *Generaliza y demuestra propiedades de contextos matemáticos numéricos, algebraicos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos.*

6.2. *Busca conexiones entre contextos de la realidad y del mundo de las matemáticas (la historia de la humanidad y la historia de las matemáticas; arte y matemáticas; tecnologías y matemáticas, ciencias experimentales y matemáticas, economía y matemáticas, etc.) y entre contextos matemáticos (numéricos y geométricos, geométricos y funcionales, geométricos y probabilísticos, discretos y continuos, finitos e infinitos, etc.).*

7.1. *Consulta las fuentes de información adecuadas al problema de investigación.*

7.2. *Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto del problema de investigación.*

7.3. *Utiliza argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes.*

7.4. *Emplea las herramientas tecnológicas adecuadas al tipo de problema de investigación.*

7.5. *Transmite certeza y seguridad en la comunicación de las ideas, así como dominio del tema de investigación.*

7.6. *Reflexiona sobre el proceso de investigación y elabora conclusiones sobre el nivel de: a) resolución del problema de investigación; b) consecución de objetivos. Así mismo, plantea posibles continuaciones de la investigación; analiza los puntos fuertes y débiles del proceso y hace explícitas sus impresiones personales sobre la experiencia.*

8.1. *Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés.*

8.2. *Establece conexiones entre el problema del mundo real y el mundo matemático: identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él, así como los conocimientos matemáticos necesarios.*

8.3. *Usa, elabora o construye modelos matemáticos adecuados que permitan la resolución del problema o problemas dentro del campo de las matemáticas.*

8.4. *Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad.*

8.5. *Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia.*

9.1. *Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre los logros conseguidos, resultados mejorables, impresiones personales del proceso, etc.*

10.1. *Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad para la aceptación de la crítica razonada, convivencia con la incertidumbre, tolerancia de la frustración, autoanálisis continuo, autocrítica constante, etc.*

10.2. *Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación.*

10.3. *Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas; revisar de forma crítica los resultados encontrados; etc.*

11.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización valorando las consecuencias de las mismas y la conveniencia por su sencillez y utilidad.

12.1. Reflexiona sobre los procesos desarrollados, tomando conciencia de sus estructuras; valorando la potencia, sencillez y belleza de los métodos e ideas utilizados; aprendiendo de ello para situaciones futuras; etc.

13.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente.

13.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas.

13.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos.

13.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas.

14.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido,...), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada y los comparte para su discusión o difusión.

14.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula.

14.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.

#### **Bloque 4**

##### **- Contenidos:**

*Medida de un ángulo en radianes.*

*Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera. Razones trigonométricas de los ángulos suma, diferencia de otros dos, doble y mitad. Fórmulas de transformaciones trigonométricas. Razones trigonométricas de ángulos complementarios, suplementarios y opuestos, y reducción al primer cuadrante.*

*Resolución de ecuaciones trigonométricas.*

*Teoremas del seno y del coseno. Resolución de triángulos. Resolución de problemas geométricos diversos.*

##### **- Criterios de evaluación:**

1. Reconocer y trabajar con los ángulos en radianes manejando con soltura las razones trigonométricas de un ángulo, de su doble y mitad, así como las transformaciones trigonométricas usuales.

2. Utilizar los teoremas del seno, coseno y tangente y las fórmulas trigonométricas usuales para resolver ecuaciones trigonométricas, así como aplicarlas en la resolución de triángulos directamente o como consecuencia de la resolución de problemas geométricos del mundo natural, geométrico o tecnológico.

##### **- Estándares de aprendizaje evaluables:**

1.1. Conoce las razones trigonométricas de un ángulo, su doble y mitad, así como las del ángulo suma y diferencia de otros dos.

*2.1. Resuelve problemas geométricos del mundo natural, geométrico o tecnológico, utilizando los teoremas del seno, coseno y tangente y las fórmulas trigonométricas usuales.*

### **ANEXO 3**

**DESCRIPCIÓN DEL DESARROLLO DEL CONTENIDO DE LA TRIGONOMETRÍA EN  
LOS LIBROS DE MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS  
DE 4º DE ESO Y MATEMÁTICAS I DE 1º DE BACHILLERATO DE LAS EDITORIALES  
SM PROYECTO SAVIA, EDELVIVES PROYECTO SOMOSLINK# Y APUNTES MAREA  
VERDE**

## LIBROS DE TEXTO EDITORIAL SM SAVIA

### MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS 4º ESO.

Este libro divide el tema de la trigonometría en dos capítulos, cada uno de los cuales tiene una estructura similar.

#### Capítulo 5 Semejanza y trigonometría.

Este capítulo se inicia con dos páginas a modo de introducción en las cuales se exponen curiosidades en general relacionadas con el tema objeto de estudio. En este caso se propone la lectura de una parte extraída del libro “The Teaching of Elementary Science and Mathematics” de Alexander Calanda, que, sin embargo, no está relacionado con el contenido de este capítulo.

A continuación, pasa al contenido de la unidad, el cual está dividido en los siguientes apartados:

1 Figuras semejantes. Teorema de Thales (2 páginas). Describe lo que son polígonos semejantes, razones de longitud, áreas y volúmenes, y el teorema de Thales (esta parte estaría fuera del contenido de este TFM).

2 Criterios de semejanza de triángulos y consecuencias (2 páginas). Describe los criterios para determinar si dos triángulos son semejantes o no y sus consecuencias, en este caso, los teoremas de la altura y del cateto (esta parte, al igual que la anterior, estaría fuera del contenido de este TFM).

3 Medida de ángulos: aplicación de la semejanza (1 página). Hace un recordatorio de la medición de ángulos en grados sexagesimales y radianes y cómo pasar de una unidad a otra.

4 Razones trigonométricas de un ángulo agudo (1 página). Define directamente, a partir de un triángulo rectángulo, las razones trigonométricas.

5 Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera (2 páginas). Define directamente la circunferencia goniométrica y las razones a partir de la misma, e indica sus signos en los diferentes cuadrantes. Determina las razones trigonométricas de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $60^\circ$ . Establece las relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos suplementarios, ángulos que se diferencian  $180^\circ$  y ángulos que suman  $360^\circ$ ; todo ello por reducción al primer cuadrante, y las relaciones existentes entre ángulos complementarios.

6 Identidades trigonométricas (2 páginas). Establece las identidades trigonométricas para un mismo ángulo.

7 Ecuaciones trigonométricas (1 página). Define las razones trigonométricas inversas y lo que es una ecuación trigonométrica, con algún ejemplo sencillo.

Al final de cada uno de estos 7 apartados se proponen algunas actividades relacionadas con el tema tratado para que el alumno trabaje en ellas y las resuelva.

Organiza tus ideas: (1 página). Corresponde a un esquema resumen de los contenidos de la unidad.

Actividades Clave: (2 páginas). Son ejercicios resueltos a modo de ejemplo de los temas tratados.

Actividades: (4 páginas). Se proponen diversos ejercicios y problemas para poner en práctica los conocimientos aprendidos, agrupados según los capítulos anteriores, y, al final, propone algunos problemas para resolver y actividades para pensar más.

Ponte a prueba y autoevaluación: (2 páginas). Son actividades y problemas que debe realizar el alumno, en general sacados de la realidad, en los cuales deberá practicar lo aprendido en ese capítulo y

corresponderían a actividades de nivel 4 según la escala de Stein y Smith. Al final de este capítulo se propone una autoevaluación del tema que el alumno puede realizar para comprobar su nivel de conocimiento de lo tratado en el capítulo, cuyas soluciones se exponen al final del libro.

Actividades con Geogebra: En los puntos 3 y 7 se propone acceder a la aplicación de la editorial para practicar actividades con el programa Geogebra.

## **Capítulo 6 Aplicaciones de la trigonometría.**

Este capítulo se inicia, al igual que el anterior, con dos páginas a modo de introducción. En este caso se propone una lectura del libro “La medida de todas las cosas” de Ken Alder, el cual sí que tiene una relación directa con lo que se va a tratar en esta unidad y que, por tanto, se considera muy adecuado como introducción a la misma, indicando la gran importancia de la triangulación para la medida de longitudes.

A continuación, pasa al contenido de la unidad, el cual está dividido en los siguientes apartados:

1 Resolución de triángulos. Triángulos rectángulos (2 páginas). Describe que significa resolver un triángulo e indica como proceder para la resolución de triángulos rectángulos aplicando el teorema de Pitágoras y la suma de ángulos de un triángulo.

2 Teoremas del seno y del coseno (2 páginas). Expone y define los teoremas del seno y del coseno y realiza algunos cálculos de lados y ángulos aplicando dichos teoremas.

3 Resolución de triángulos cualesquiera (2 páginas). Procede a resolver triángulos aplicando los teoremas del seno y del coseno y la suma de ángulos. Lo aplica a los siguientes casos: conocer dos ángulos y el lado comprendido; conocer dos lados y el ángulo comprendido; conocer dos lados y un ángulo no comprendido; y conocer los tres lados.

4 Aplicaciones de la trigonometría. Longitudes, áreas y volúmenes (2 páginas). Repasa lo que es un polígono regular y define el radio y apotema de un polígono en función del número de lados. Repasa el área de un triángulo y hace algunos ejemplos de determinación de áreas y volúmenes aplicando trigonometría.

Al final de cada uno de estos 4 apartados se proponen algunas actividades relacionadas con el tema tratado para que el alumno trabaje sobre ellas y las resuelva.

Organiza tus ideas: (1 página). Corresponde a un esquema resumen de los contenidos de la unidad.

Actividades Clave: (1 página). Son ejercicios resueltos a modo de ejemplo de los temas tratados.

Actividades: (2 páginas). Se proponen diversos ejercicios y problemas para poner en práctica los conocimientos aprendidos, agrupados según los capítulos anteriores, y, al final, propone algunos problemas para resolver y actividades para pensar más.

Ponte a prueba y autoevaluación (2 páginas). Son actividades y problemas, sacados de la realidad, que debe realizar el alumno, en los cuales deberá practicar lo aprendido en ese capítulo y corresponderían a actividades de nivel 4 según la escala de Stein y Smith. Al final de este capítulo se propone una autoevaluación del tema, cuyas soluciones se exponen al final del libro.

Actividades con Geogebra. En el punto 1 se propone acceder a la aplicación digital de la editorial para practicar actividades con el programa Geogebra.

## MATEMÁTICAS I 1º BACHILLERATO.

En este libro el tema de la trigonometría se incluye en un único capítulo, en este caso el 3, siendo el primero de los dedicados al campo de la Geometría.

La estructura seguida es similar a la expuesta para el caso de 4º de ESO.

El capítulo se inicia con dos páginas, a modo de introducción, en las cuales se exponen las utilidades generales de la trigonometría, exponiéndose entre otras la generación de imágenes virtuales por ordenador, la cartografía del espacio, el GPS, etc. En general se considera una buena introducción al campo de la trigonometría haciendo que este no se presente de una forma abstracta y alejada de la vida cotidiana.

A continuación, pasa al contenido de la unidad, el cual está dividido en los siguientes apartados:

1 Medidas de ángulos. Razones trigonométricas de un ángulo agudo (2 páginas). Hace un recordatorio de la medición de ángulos en grados sexagesimales y radianes y cómo pasar de una unidad a otra y, a continuación, define las razones trigonométricas a partir de triángulos rectángulos semejantes para ya en concreto definir el seno, coseno, tangente y las razones inversas.

2 Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera (2 páginas). Define directamente la circunferencia goniométrica y como se representan los ángulos en ella, así como la obtención de un ángulo reducido para aquellos que son mayores de  $360^\circ$ . A continuación, se exponen las razones trigonométricas para un ángulo del primer cuadrante y para el resto de los cuadrantes en la circunferencia goniométrica, indicando sus signos para los diferentes cuadrantes. Asimismo, indica, para cada razón, el rango de valores que puede alcanzar y muestra los valores para algunos ángulos.

3 Reducción al primer cuadrante de las razones trigonométricas (2 páginas). Establece las relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos suplementarios, ángulos que se diferencian  $180^\circ$ , ángulos que suman  $360^\circ$ ; ángulos negativos, ángulos mayores de  $360^\circ$ , todo ello por reducción al primer cuadrante y entre ángulos complementarios.

4 Relaciones entre las razones trigonométricas (1 página). Establece las identidades trigonométricas para un mismo ángulo.

5 Razones trigonométricas de la suma y la diferencia de ángulos (1 página). Expone y demuestra las fórmulas para determinar las razones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos.

6 Razones trigonométricas del ángulo doble y del ángulo mitad (1 página). Expone y demuestra las fórmulas para determinar las razones trigonométricas del doble y la mitad de un ángulo dado, en función de las razones de dicho ángulo.

7 Transformaciones de sumas en productos (1 página). Expone y demuestra las fórmulas para determinar la suma o diferencia de senos y cosenos como producto de senos o cosenos.

8 Ecuaciones y sistemas de ecuaciones trigonométricas (2 páginas). Define lo que es una ecuación trigonométrica, acompañado de varios ejemplos, y lo amplía a sistemas de ecuaciones trigonométricas.

9 Teoremas del seno, coseno y tangente. Resolución de triángulos (2 páginas). Define y demuestra los teoremas del seno, del coseno y define el teorema de la tangente. A continuación, indica qué es la resolución de un triángulo, y expone, a modo de tabla, cuáles son los posibles casos que se pueden



encontrar, su método de resolución y las posibles soluciones. Por último, define el área de un triángulo en función del seno de uno de sus ángulos.

Al final de cada uno de estos nueve apartados figuran algunos ejercicios resueltos acerca de los conceptos tratados y se proponen algunos otros para que el alumno trabaje sobre ellos y los resuelva. Las soluciones de estos últimos se encuentran al final del libro.

Resumen (1 página). Corresponde a un esquema resumen de los contenidos de la unidad.

Ejercicios resueltos (3 páginas). Son ejercicios resueltos, a modo de ejemplos, de los temas tratados a lo largo de la unidad.

Actividades (6 páginas). Son actividades y problemas que debe realizar el alumno para practicar los conceptos tratados en la unidad, los cuales están divididos entre ejercicios, cuestiones, problemas y “para profundizar”, por este orden. Los ejercicios se agrupan por materias: medida de ángulos, razones trigonométricas, identidades trigonométricas, ecuaciones trigonométricas, resolución de triángulos y síntesis. A continuación, se plantean al alumno algunas cuestiones y por último los problemas, en general sacados de la realidad, en los cuales deberá practicar lo aprendido en ese capítulo y corresponderían a actividades de nivel 4 según la escala de Stein y Smith. Por último aparecen algunos problemas “para profundizar más” de mayor dificultad.

Entorno matemático (1 página). En esta página se proponen a los alumnos dos situaciones presumiblemente reales en las cuales deberán ser capaces de resolver los problemas que se les plantean.

Autoevaluación (1 página). Al final de este capítulo se propone una autoevaluación del tema que el alumno puede realizar para comprobar su nivel de conocimiento de este capítulo.

Actividades TIC. En los apartados 1, 2, 3, 5 y 9 se propone al alumno entrar en la aplicación digital de la editorial para trabajar algunos conceptos trigonométricos con Geogebra, y en el apartado 8, explica brevemente la obtención del seno coseno, tangente y sus inversas con la calculadora.

## **LIBROS DE TEXTO EDITORIAL EDELVIVES #somoslink**

### **MATEMÁTICAS ACADÉMICAS 4.º ESO.**

Este libro divide el tema de la trigonometría en dos capítulos, cada uno de los cuales tiene una estructura similar.

#### **Capítulo 7 Trigonometría.**

Este capítulo se inicia con dos páginas, a modo de introducción, con una imagen de fondo que ocupa ambas y en ella se plantea al alumno una cuestión acerca de las dificultades que puede entrañar su aprendizaje y una actividad acerca de la imagen, sobre el tipo de triángulos que aparecen. A mi entender ninguna de las dos actividades tiene mucha relevancia, pues la primera se propone antes de empezar la unidad, la cual va a tratar un tema nuevo para los estudiantes y por tanto lo desconocen, mientras que la segunda repasa la Geometría dada en cursos anteriores, sin demasiada relación con el tema a tratar.

A continuación, pasa al contenido de la unidad, el cual está dividido en los siguientes apartados:

1 Medida de ángulos: el radián (1 página). Hace un recordatorio de la medición de ángulos en el sistema sexagesimal y en el circular y cómo pasar de una unidad a otra, así como cuánto valen la longitud de la circunferencia, un ángulo llano y un ángulo recto.

2 Razones trigonométricas de un triángulo rectángulo (1 página). Define directamente, a partir de un triángulo rectángulo las razones trigonométricas y sus inversas. Asimismo, indica el rango de variación del seno y del coseno para un ángulo agudo.

3 Razones trigonométricas de algunos ángulos (2 páginas). Expone los valores de las razones trigonométricas para algunos ángulos habituales, en el caso de  $30^\circ$  y  $60^\circ$ , a partir de un triángulo equilátero y establece las relaciones entre las razones de ambos ángulos, y en el caso de un ángulo de  $45^\circ$ , a partir de un triángulo isósceles rectángulo.

4 Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera (2 páginas). Define directamente la circunferencia goniométrica y las razones a partir de la misma e indica sus signos en los diferentes cuadrantes. Determina las razones trigonométricas para “ángulos que coinciden con los ejes”:  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  y  $360^\circ$ .

5 Relaciones entre las razones trigonométricas (2 páginas). Establece las relaciones entre las razones trigonométricas del mismo ángulo.

6.Reducción de las razones trigonométricas al primer cuadrante (2 páginas). Establece las relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos suplementarios, ángulos que se diferencian en  $180^\circ$ , ángulos opuestos y ángulos que suman  $360^\circ$ , todo ello por reducción al primer cuadrante, y las relaciones existentes entre ángulos complementarios y los ángulos mayores de  $360^\circ$ .

7 Aplicaciones de la trigonometría (2 páginas). Expone, mediante los ejercicios resueltos algunas de las aplicaciones de la trigonometría.

Herramientas tecnológicas (1 página). En este apartado explica el uso de la calculadora científica para seleccionar la unidad de medida de los ángulos y para la determinación de las razones trigonométricas y sus inversas.

Aprendo a aprender (1 página). Se propone al alumno un esquema parcialmente relleno para que este lo pueda completar, el cual, una vez finalizado, le puede servir de esquema resumen de la unidad.

Al final de estos apartados aparecen, en la mayoría de ellos, algunas actividades resueltas acerca de los conceptos tratados y, en todos ellos, se proponen actividades para que el alumno trabaje sobre ellas y las resuelva.

Repaso final: (3,5 páginas). Se proponen diversos ejercicios y problemas para poner en práctica los conocimientos aprendidos, agrupados según los capítulos anteriores, y al final, propone algunos problemas para resolver y actividades para pensar más.

Autoevaluación: (0,5 páginas). Al final de este capítulo se propone una autoevaluación del tema, que el alumno puede realizar para comprobar su nivel de conocimiento de este capítulo y, por último, se le plantea una pregunta a modo de diario acerca de qué parte de esta unidad le gustaría profundizar.

## Capítulo 8 Resolución de triángulos.

Este capítulo se inicia, al igual que el anterior, con dos páginas, a modo de introducción, con imágenes de fondo relacionadas con la trigonometría y en ella se vuelve a plantear la cuestión al alumno acerca de las dificultades que puede entrañar su aprendizaje y una breve introducción acerca de las aplicaciones de la trigonometría, proponiendo algunas preguntas acerca de cómo resolverían algunos problemas aplicándolas. En este caso, la segunda actividad sí que está más relacionada con el tema objeto de estudio e introduce a los alumnos en los problemas que la trigonometría puede resolver.

A continuación, pasa al contenido de la unidad, el cual está dividido en los siguientes apartados:

1 Resolución de triángulos rectángulos (2 páginas). Describe lo qué es resolver un triángulo e indica cómo proceder para la resolución de triángulos rectángulos aplicando el teorema de Pitágoras y la suma de ángulos de un triángulo.

2 Teorema del seno (2 páginas). Se expone y demuestra el teorema del seno. Se determina el diámetro de la circunferencia circunscrita a un triángulo y el área de un triángulo en función de sus lados y del radio de la circunferencia circunscrita.

3 Teorema del coseno (2 páginas). Se expone y demuestra el teorema del coseno. Se expone el teorema de Pitágoras generalizado.

4 Resolución de triángulos no rectángulos (2 páginas). Procede a resolver triángulos aplicando los teoremas del seno y del coseno y la suma de ángulos. Lo aplica a los siguientes casos: conocer tres lados, conocer un lado y dos ángulos cualesquiera, dos lados y el ángulo opuesto a un lado, dos lados y el ángulo comprendido.

4 Aplicaciones (2 páginas). Expone algunas aplicaciones de la resolución de triángulos mediante actividades resueltas.

Herramientas tecnológicas (1 página). En este apartado explica una aplicación de GeoGebra para la resolución de triángulos.

Aprendo a aprender (1 página). Se propone al alumno un esquema, parcialmente relleno, para que este lo pueda completar, el cual una vez finalizado le puede servir de esquema resumen de la unidad.

Al final de estos apartados figuran, en la mayoría de ellos, algunas actividades resueltas acerca de los conceptos tratados y en todos ellos se proponen actividades para que el alumno trabaje en ellas y las resuelva.

Repaso final: (1,5 páginas). Se proponen diversos ejercicios y problemas para poner en práctica los conocimientos aprendidos, agrupados según los capítulos anteriores y al final propone algunos problemas para resolver y actividades para pensar más.

Autoevaluación: (0,5 páginas). Al final de este capítulo se propone una autoevaluación del tema que el alumno puede realizar para comprobar su nivel de conocimiento de este capítulo y, por último, se le plantea una pregunta a modo de diario acerca de qué dificultades, de las que preveía al inicio, se ha encontrado el alumno realmente.

## MATEMÁTICAS 1º BACHILLERATO.

En este libro el tema de la trigonometría se incluye en un único capítulo, en este caso el 5, siendo el primero dedicado al campo de la Geometría.

Los problemas y ejercicios propuestos en esta editorial se encuentran en un libro aparte del de teoría, denominado “práctica”.

El capítulo de trigonometría, en el libro de teoría, está dividido en los siguientes apartados:

1 Razones trigonométricas (1 página). Hace un recordatorio de las medidas de los ángulos, las razones trigonométricas para un triángulo rectángulo y las razones trigonométricas en la circunferencia goniométrica.

2 Relaciones entre razones trigonométricas (1 página). Expone las relaciones entre las razones trigonométricas de un mismo ángulo.

3 Ángulos notables y equivalentes (1 página). Expone el valor del seno, coseno y tangente para ángulos notables del primer cuadrante y para ángulos notables del resto de cuadrantes.

4 Reducción de las razones trigonométricas al primer cuadrante (1 página). Establece las relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos del segundo cuadrante (suplementarios), del tercer cuadrante (que se diferencian  $180^\circ$ ) y del cuarto cuadrante (que suman  $360^\circ$ ), todo ello por reducción al primer cuadrante.

5 Ángulos complementarios y suplementarios (1 página). Establece las relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos complementarios, que difieren en  $90^\circ$ , y suplementarios.

6 Ángulos negativos y ángulos mayores de  $360^\circ$  (1 página). Establece las relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos negativos y ángulos mayores de  $360^\circ$ , respecto a ángulos del primer cuadrante.

7 Razones trigonométricas de la suma de ángulos (2 páginas). Expone y demuestra las fórmulas para determinar las razones trigonométricas de la suma de ángulos.

8 Razones trigonométricas de la diferencia de ángulos (1 página). Expone y demuestra las fórmulas para determinar las razones trigonométricas de la diferencia de ángulos.

9 Razones trigonométricas del ángulo doble y del ángulo mitad (1 página). Expone y demuestra las fórmulas para determinar las razones trigonométricas del doble y de la mitad de un ángulo dado, en función de las razones de dicho ángulo.

10 Fórmulas de transformaciones trigonométricas (1 página). Expone y demuestra las fórmulas para determinar la suma o diferencia de senos y cosenos como producto de senos o cosenos y las de productos de razones trigonométricas en sumas y restas de razones trigonométricas.

11 Identidades trigonométricas (1 página). Define qué son identidades trigonométricas y la forma de demostrarlas.

12 Ecuaciones trigonométricas (2 páginas). Define qué es una ecuación trigonométrica y establece los pasos necesarios para resolverlas.

13 Sistemas de ecuaciones trigonométricas (1 página). Indica que para su resolución se emplean los métodos habituales y desarrolla algunos ejemplos.

14 Triángulos rectángulos (2 páginas). Define qué es un triángulo rectángulo e indica las relaciones que se pueden utilizar para su resolución: vuelve a definir las razones trigonométricas en función de las relaciones entre sus lados, el teorema de Pitágoras, los teoremas del cateto y de la altura y que los ángulos en un triángulo suman  $180^\circ$ .

15 Teorema del seno (1 página). Define y demuestra el teorema del seno y sus consecuencias.

16 Teorema del coseno (1 página). Define y demuestra el teorema del coseno.

17 Teorema de la tangente (1 página). Define y demuestra el teorema de la tangente.

18 Aplicaciones (2 páginas). Expone las aplicaciones de los teoremas anteriores al caso de un triángulo isósceles, para el cálculo de una altura con el pie inaccesible y para el cálculo del área de un triángulo enunciando las fórmulas para su determinación en varios casos: triángulo rectángulo, conocidos dos lados y el ángulo que forman, conocido un lado y dos ángulos y conocidos los tres lados.

Al final de todos los apartados se muestran actividades resueltas acerca de los conceptos tratados.

- Elabora tu proyecto: y elabora tu organizador visual (1 página). En esta página propone un trabajo para el aprendizaje de la trigonometría basado en la metodología de aprendizaje basado en proyectos, en este caso, sobre la trigonometría hindú y la realización de un esquema o mapa conceptual de esta unidad.

- Actividades (1 página). Esta página corresponde a unos ejercicios y problemas que se proponen al alumno como evaluación de lo que ha aprendido de esta unidad.

En el libro de práctica se exponen los problemas y ejercicios propuestos para esta unidad.

Como introducción a la misma presenta un esquema de la unidad de dos páginas con las diferentes fórmulas y pasos para las razones trigonométricas, los ángulos, fórmulas para la suma y resta de ángulos y para ángulos doble y mitad, y los pasos a seguir en las aplicaciones de la trigonometría (identidades trigonométricas, ecuaciones trigonométricas y resolución de triángulos).

A continuación, aparecen dos páginas de herramientas digitales, una de ellas explica la construcción de la circunferencia goniométrica y la obtención de las razones trigonométricas con GeoGebra y en la otra la conversión de unidades y las funciones trigonométricas con Wiris.

Después de estas, aparecen cuatro páginas de actividades resueltas y siete de actividades propuestas y, por último, una página de evaluación final, con la pregunta para el alumno en el diario de aprendizaje de qué dificultades, de las que preveía al inicio, se ha encontrado el alumno realmente.

## **APUNTES MAREA VERDE**

### **MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS 4ºB DE ESO.**

Estos apuntes digitales proponen el tema de la trigonometría en un capítulo.

#### **Capítulo 8 Trigonometría**

Como presentación del capítulo de trigonometría aparece una portada con los créditos de los autores e ilustradores y a continuación un índice del tema y una breve reseña del objetivo, historia y aplicaciones de la trigonometría.

Este capítulo se divide en cuatro apartados:

1 Sistemas de medida de ángulos (1 página). Hace un recordatorio de la medición de ángulos en el sistema sexagesimal y en el sistema internacional (radián) y cómo pasar de una unidad a otra, así como cuánto valen la longitud de la circunferencia, un ángulo llano y un ángulo recto.

2 Razones trigonométricas de un ángulo agudo (7 páginas). Consta de 6 subapartados:

2.1. Razones trigonométricas de un ángulo agudo (1 página), define directamente, a partir de un triángulo rectángulo las razones trigonométricas y su independencia del triángulo elegido, a partir de la semejanza de triángulos.

2.2 Relaciones fundamentales (1 página). Expone las relaciones trigonométricas fundamentales para un mismo ángulo y el concepto de tangente.

2.3 Otras razones trigonométricas y otras relaciones (1 página). Define las razones trigonométricas inversas y las nuevas identidades trigonométricas que aparecen.

2.4 Razones trigonométricas de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $60^\circ$  (1 página). Determina, a partir de un triángulo equilátero, los valores del seno y coseno de los ángulos de  $60^\circ$  y  $30^\circ$ , y, a partir de un triángulo rectángulo equilátero, las de  $45^\circ$ .

2.5 Resolución de triángulos rectángulos (1,5 páginas). Define que es resolver un triángulo e indica cómo se procede en el caso de triángulos rectángulos en los que se conoce un ángulo y la hipotenusa, un ángulo y un cateto, o dos lados y, en este último caso, cómo se operaría con la calculadora.

2.6 Aplicaciones de la resolución de triángulos rectángulos al cálculo de distancias (1,5 páginas). Expone algunos ejemplos de aplicaciones de la resolución de triángulos rectángulos basados en la técnica de la doble observación.

3. Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera (4 páginas). Consta de tres subapartados:

3.1 Circunferencia trigonométrica. Cuadrantes (0,5 páginas). Define la circunferencia goniométrica y los cuadrantes.

3.2. Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera (1 página). Define las razones trigonométricas en la circunferencia goniométrica y expone gráficamente lo que sería el seno, coseno y tangente para los cuatro cuadrantes.

3.3 Reducción al primer cuadrante (2,5 páginas). Indica las relaciones entre las razones de ángulos de los cuadrantes 2, 3 y 4 con los del  $1^\circ$  y también la de aquellos mayores de  $360^\circ$ , y los valores de seno, coseno y tangente de los ángulos determinados por los semiejes.

4. Resolución de triángulos cualesquiera (3 páginas). Consta de 3 subapartados:

4.1 Teorema de los senos (1,5 páginas). Define y demuestra el teorema del seno e indica que con él se pueden resolver triángulos conociendo dos ángulos y un lado o dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

4.2 Teorema de los cosenos (1 página). Define, pero no demuestra, el teorema del coseno e indica que es una generalización del teorema de Pitágoras y que con él se pueden resolver triángulos conociendo los tres lados, dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos o dos lados y el ángulo que forman.

4.3 Resolución de triángulos cualesquiera. Indica en un párrafo que las herramientas para ello son los teoremas del seno y del coseno, pero no lo desarrolla en este curso.

Dentro de estos apartados se proponen algunas actividades acerca de los conceptos tratados.

Curiosidades. Revista (1 página). En esta página expone curiosidades y anécdotas acerca de la trigonometría.

Resumen (1 página). Corresponde a un resumen de los contenidos de esta unidad.

Ejercicios y problemas (7 páginas).

Autoevaluación (1 página).

## **MATEMÁTICAS I 1º BACHILLERATO.**

Estos apuntes digitales proponen el tema de la trigonometría en un capítulo.

### **Capítulo 4 Trigonometría.**

Como presentación del capítulo de trigonometría aparece una portada con los créditos de los autores e ilustradores y a continuación un índice del tema y una breve reseña del objetivo, historia y aplicaciones de la trigonometría.

Este capítulo se divide en 4 apartados:

1 Razones trigonométricas (9 páginas). Consta de 3 subapartados:

1.1 Media de ángulos (1,5 páginas). Hace un recordatorio de las medidas de los ángulos.

1.2 Razones trigonométricas de ángulos agudos (3,5 páginas). Hace un repaso de las razones trigonométricas para un triángulo rectángulo y las relaciones fundamentales que las ligan. Asimismo, repasa las razones trigonométricas de los ángulos de  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  y  $45^\circ$  y las razones trigonométricas de ángulos complementarios.

1.3. Razones trigonométricas de ángulos arbitrarios (4 páginas). Trabaja la circunferencia goniométrica y los cuadrantes, definiendo, a partir de ella, las razones trigonométricas para un ángulo cualquiera. Expone gráficamente lo que sería el seno, coseno y tangente para los cuatro cuadrantes. Indica las relaciones entre las razones de ángulos de los cuadrantes 2, 3 y 4 con los del 1º y también la de aquellos mayores de  $360^\circ$ , y los valores de seno, coseno y tangente de los ángulos determinados por los semiejes.

2 Cálculos de razones de unos ángulos a partir de otros (6 páginas). Consta de 5 subapartados:

2.1. Razones trigonométricas de la suma de ángulos (1,5 páginas). Determina y demuestra las fórmulas de las razones trigonométricas de la suma de dos ángulos aplicando triángulos.

2.2. Razones trigonométricas de la resta de ángulos (1 página). Determina y demuestra las fórmulas de las razones trigonométricas de la suma de dos ángulos, aplicando ángulos negativos.

2.3. Razones trigonométricas del ángulo doble (0,5 páginas). Determina y demuestra las fórmulas de las razones trigonométricas del ángulo doble de uno dado.

2.4. Razones trigonométricas del ángulo mitad (1 página). Determina y demuestra las fórmulas de las razones trigonométricas del ángulo mitad de uno dado.

2.5. Transformaciones de sumas de razones trigonométricas en productos (2 páginas). Determina las fórmulas para transformar la suma o diferencia de dos razones trigonométricas en un producto de razones trigonométricas.

3. Ecuaciones y sistemas trigonométricos (6 páginas). Consta de dos subapartados:

3.1. Ecuaciones (3 páginas). Expone la diferencia entre identidades y ecuaciones. Indica las pautas a seguir para resolver ecuaciones trigonométricas y muestra varios ejemplos a modo de actividades resueltas.

3.2. Sistemas (3 páginas). Explica los sistemas resolubles por cambios de variable o reducción, sistemas donde se puede despejar una variable y en los cuales se pueden eliminar las razones trigonométricas. Presenta varios ejemplos a modo de actividades resueltas.

4. Resolución general de triángulos (10 páginas). Consta de tres subapartados:

Hace una introducción de una página a la resolución de triángulos y a la notación en triángulos.

4.1. Teorema del coseno (2 páginas). Define y demuestra el teorema del coseno e indica que es una generalización del teorema de Pitágoras, y que con él se pueden resolver triángulos conociendo los tres lados, dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos o dos lados y el ángulo que forman.

4.2 Teorema del seno (2,5 páginas). Define y demuestra el teorema del seno e indica que a partir de él se pueden resolver triángulos conociendo dos ángulos y un lado, o dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos. Asimismo, explica el problema de las soluciones obtusa y aguda del seno.

4.3. Resolución general de triángulos (4,5 páginas). Describe la resolución para los siguientes casos: conocidos tres lados, dos lados y el ángulo entre ellos, dos lados y un ángulo que no esté entre ellos y un lado y dos ángulos.

4.4. Problemas de trigonometría con medidas simples y dobles (2 páginas). Pone algunos ejemplos de problemas en los que se aplica la resolución de triángulos.

Curiosidades. Revista (2 páginas). En esta página expone curiosidades y anécdotas acerca de la trigonometría, concretamente, propone el problema del radio de la Tierra y cómo fue calculado por Eratóstenes.

Replica el experimento (4 páginas). Propone un proyecto para replicar el experimento de Eratóstenes y así aprender una aplicación de la trigonometría. (método de aprendizaje basado en proyectos).

Resumen (2 páginas). Corresponde a un resumen de los contenidos de esta unidad.

Ejercicios y problemas (5 páginas).

Autoevaluación (1 página).