Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

Trabajo Fin de Grado

Grado en Matemáticas

Ecuaciones diferenciales con retardo

Autor: Andrea Aceituno Muriel

Tutor/es: Begoña Cano Urdiales

Índice general

Introducción del trabajo

Los modelos utilizados para desarrollar la dinámica de poblaciones suponen, de forma general, que los organismos reaccionan inmediatamente a la presencia de estímulos. Algunos ejemplos conocidos son los modelos de Verhulst, Schafer o Gordon. Pero basarse en esta respuesta inmediata de los organismos no es del todo correcto. Por ejemplo, los alimentos consumidos por los animales en la naturaleza no se recuperan de forma inmediata, sino que requerirán de un cierto tiempo para hacerlo. Por esta razón, muchos de los sucesos que ocurren en la naturaleza son modelados mediante ecuaciones diferenciales con retardo.

El objetivo de este Trabajo de Fin de Grado es el estudio de las ecuaciones diferenciales con retardo, que son aquellas en las que la variación de la variable x con el tiempo dependen en cada instante t no solo de x(t) sino también de los valores de esta variable en tiempos anteriores. Las ecuaciones diferenciales con retardo han sido utilizadas para modelar problemas no solo en las matemáticas, sino en otras disciplinas como la biología, ingeniería o economía, o incluso en procesos sencillos de la naturaleza, como hemos visto anteriormente.

Los conocimientos adquiridos durante el Grado en Matemáticas y necesarios para abordar la realización de este trabajo son principalmente los referentes a las ecuaciones diferenciales y a la transformada de Laplace estudiadas en las asignaturas "Ecuaciones diferenciales" y "Ampliación de Ecuaciones Diferenciales", tomando como referencia [1] y [6]. Por otra parte, también son esenciales nociones procedentes del "Análisis Matemático" y "Variable Compleja", tomando como referencia de esta última, [2].

El trabajo se estructura del siguiente modo:

En el primer capítulo se abordan ejemplos tanto académicos como reales regidos por ecuaciones diferenciales con retardo. En cuanto a los segundos, se estudia el problema de la mezcla de líquidos, que es un problema lineal, y el de modelo de poblaciones, que es un problema no lineal, y ambos se resuelven a través del "método de los pasos". Para ello, el libro tomado como referencia es [4].

Nos vamos a centrar en la resolución de las ecuaciones diferenciales con retardo, pero previamente, en el segundo capítulo, se lleva a cabo un análisis detallado de la transformada de Laplace y sus propiedades. Se estudia la fórmula de inversión y el teorema de convolución, claves para el posterior desarrollo de dichas ecuaciones.

En el tercer capítulo se demuestra el teorema de existencia y unicidad de las soluciones de las ecuaciones con retardo. Se analiza la solución de dichas ecuaciones como suma de exponenciales sencillas, método de superposición sobre el que se basa la física matemática. Por otra parte, se resuelven las ecuaciones a través de la transformada de Laplace, introducida en el capítulo anterior, y por último, se estudia la expresión de las soluciones en forma integral. El libro que se ha tomado como referencia es [3].

Agradecer a Begoña Cano, mi tutora, el tiempo y la dedicación empleados para hacer posible la realización de este trabajo.

Capítulo 1

Ejemplos introductorios

1.1. Introducción

Los propósitos fundamentales de la ciencia son la descripción y la predicción. Observando ciertos fenómenos, pretendemos describir lo que ocurre en un cierto momento y determinar el comportamiento posterior. En muchos casos, en un tiempo t, un vector $x(t)$ de dimensión finita nos proporciona una representación del estado del sistema. Si suponemos que la variación de $x(t)$ solo depende de t, tenemos la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = g(x,t), \quad x(0) = c.$$

A partir del análisis de ecuaciones de este tipo, se puede extraer información sobre muchos procesos físicos, pero estamos interesados en el estudio de ecuaciones diferenciales más complejas. En general, los procesos físicos no solo dependen del estado presente sino también dependen del tiempo pasado. Por ello, vamos a estudiar las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = g(x(t), x(s), t), \quad x(0) = c,$$

donde s toma valores menores que t.

De todas las ecuaciones de este tipo, la más sencilla es una ecuación diferencial en diferencias

$$\frac{dx}{dt} = g(x(t-t_1), ..., x(t-t_k), t),$$

donde $0 < t_1 < t_2 < ... < t_k$.

Este tipo de ecuaciones nos las encontramos no solo en las matemáticas, sino en otras disciplinas como la física, ingeniería, incluso en economía.

Entendemos por ecuación diferencial en diferencias una ecuación en una función desconocida y algunas de sus derivadas, evaluadas en argumentos que difieren en un número fijo de valores. Ejemplos de este tipo de ecuaciones son:

$$u''(t) - u'(t-1) + u(t) = 0, \tag{1.1}$$

$$u'(t) - u(t-1) - u(t-\sqrt{2}) = 0, \tag{1.2}$$

$$u'(t) - 2u(t) + u'(t-1) - 2u(t-1) = e^{2t}. \tag{1.3}$$

Nos centraremos en problemas en los que u puede considerarse como función de una única variable independiente que solemos denotar por t y, por tanto, todas las derivadas que aparecen serán derivadas ordinarias y no derivadas parciales. Consideraremos ecuaciones en las que aparecen derivadas y diferencias de varios órdenes, entendiendo el orden diferencial de una ecuación como el mayor de los órdenes de las derivadas que aparecen y por orden de diferencia, uno menos que el número de argumentos distintos que aparecen.

La forma general de una ecuación diferencial en diferencias de orden diferencial n y orden de diferencia m es

$$F[t, u(t), u(t-w_1), ..., u(t-w_m), u'(t), u'(t-w_1), ..., u^{(n)}(t), ..., u^{(n)}(t-w_m)] = 0, \tag{1.4}$$

donde F es una función dada de 1+(m+1)(n+1) variables y los números $w_1, ..., w_m$, denominados tramos de retrasos, también son conocidos. Ocasionalmente trabajaremos con funciones complejas, pero en general estudiaremos funciones reales. Siempre que se trate de ecuaciones lineales con coeficientes reales, podemos usar soluciones complejas y luego tomar la parte real e imaginaria para obtener la familia completa de soluciones reales. Cuando se trate de ecuaciones no lineales no se puede proceder de esta forma.

Vamos a estudiar las ecuaciones lineales de la forma (1.4), es decir, ecuaciones de la forma

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{ij}(t)u^{(j)}(t-w_i) = f(t), \tag{1.5}$$

donde m y n son números enteros positivos, $0 = w_0 < w_1 < ... < w_m$, y f(t) y las (m+1)(n+1) funciones $a_{ij}(t)$ están definidas en algún intervalo del eje real.

Nos centraremos en las ecuaciones lineales con coeficientes constantes

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{ij}u^{(j)}(t-w_i) = f(t),$$

ya que la teoría para estas ecuaciones es más simple y completa que la teoría para el caso lineal general (1.5). Esto es análogo a lo que ocurre con las ecuaciones diferenciales. Además, nos restringiremos a las ecuaciones de primer orden en derivadas y diferencias

$$a_0u'(t) + a_1u'(t-w) + b_0u(t) + b_1u(t-w) = f(t). \tag{1.6}$$

La teoría de estas ecuaciones muestra casi en toda su totalidad las características de la teoría más general, aunque evita detalles gravosos necesarios en esta última.

Cualquiera de las ecuaciones diferenciales en diferencias (1.1)-(1.3) nos enfrenta al problema de resolver la ecuación, es decir, de encontrar funciones u(t) que cumplan dicha ecuación. Por ejemplo, la función

$$u(t) = \frac{(t+1)e^{2(t+1)}}{1+e^2}$$

es solución de la ecuación (1.3). Sin embargo, no siempre es sencillo obtener soluciones de forma explícita. Incluso si lo fuera, esa forma explícita podría ser no muy clarificadora con respecto al comportamiento de la solución.

Sabemos que toda solución de una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes se puede escribir como combinación lineal de un número finito de soluciones particulares, que podemos hallar mediante métodos algebraicos. Vamos a ver que todas las soluciones de ecuaciones diferenciales en diferencias homogéneas con coeficientes constantes también se pueden escribir como combinación lineal de soluciones particulares pero ahora la base es infinita y se debe encontrar por métodos trascendentes. Por este motivo, el proceso es más complejo que en el caso de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas.

Sin embargo, muchos problemas de interés se podrán resolver mediante procedimientos que expondremos más adelante. Algunos de ellos son:

- La formulación correcta del problema del valor inicial.
- El cálculo de una solución en puntos particulares.
- La representación de una solución como suma de soluciones particulares.
- La representación de una solución mediante integrales definidas.

1.2. Ejemplos académicos

Antes de establecer una teoría general para la resolución de la ecuación (1.6), vamos a ver algunos ejemplos de estas ecuaciones.

El primero de ellos es la ecuación

$$u'(t) = u(t-1). \tag{1.7}$$

Queremos encontrar una función u(t) que sea continua para $t > 0$ y que sea solución de dicha ecuación para todo $t > 1$. En particular, u(t) tiene que ser continua en t=1.

Supongamos que u(t)=1 para $0 < t \leq 1$. Si (1.7) se cumple para $t > 1$, los valores de u'(t) para $1 < t \leq 2$ están determinados. Como u(t)=1 para $0 < t \leq 1$, entonces u(t-1)=1 para $0 < t-1 \leq 1$; luego u(t-1)=1 para $1 < t \leq 2$ y, como u'(t)=u(t-1), deducimos que u'(t)=1 en ese intervalo y

$$u(t) = t = 1 + (t-1), \quad 1 \leq t \leq 2.$$

Una vez que u(t) es conocida para $1 < t \leq 2$, la ecuación (1.7) determina u(t) para $2 \leq t \leq 3$. Razonando de forma análoga:

$$u(t) = 1 + (t-1) + \frac{(t-2)^2}{2}, \quad 2 \leq t \leq 3.$$

Veamos ahora por inducción que

$$u(t) = \sum_{j=0}^{N} \frac{(t-j)^j}{j!}, \quad N \leq t \leq N+1. \tag{1.8}$$

Lo tenemos probado para N=1. Vamos a suponerlo cierto para N y lo vamos a demostrar para N+1. Tenemos que, para $N+1 \leq t \leq N+2$,

$$u(t-1) = \sum_{j=0}^{N} \frac{(t-1-j)^j}{j!},$$

luego

$$u'(t) = u(t-1) = \sum_{j=0}^{N} \frac{(t-1-j)^j}{j!}, \quad N+1 \leq t \leq N+2.$$

Integrando esta ecuación obtenemos

$$u(t) = \sum_{j=0}^{N} \frac{(t-1-j)^{j+1}}{(j+1)!} + c, \quad N+1 \leq t \leq N+2. \tag{1.9}$$

Por la hipótesis de inducción, tenemos

$$u(N+1) = \sum_{j=0}^{N} \frac{(N+1-j)^j}{j!}.$$

Por tanto, imponiendo continuidad en $t = N+1$, se tiene que

$$\sum_{j=0}^{N} \frac{(N+1-j)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{N} \frac{(N-j)^{j+1}}{(j+1)!} + c = \sum_{j'=1}^{N+1} \frac{(N+1-j')^{j'}}{j'!} + c,$$

de donde teniendo en cuenta que el término en $j' = N+1$ se anula se deduce que c=1. Sustituyendo en (1.9) llegamos por tanto a que

$$u(t) = \sum_{j=0}^{N+1} \frac{(t-j)^j}{j!}, \qquad N+1 \leq t \leq N+2,$$

como queríamos probar.

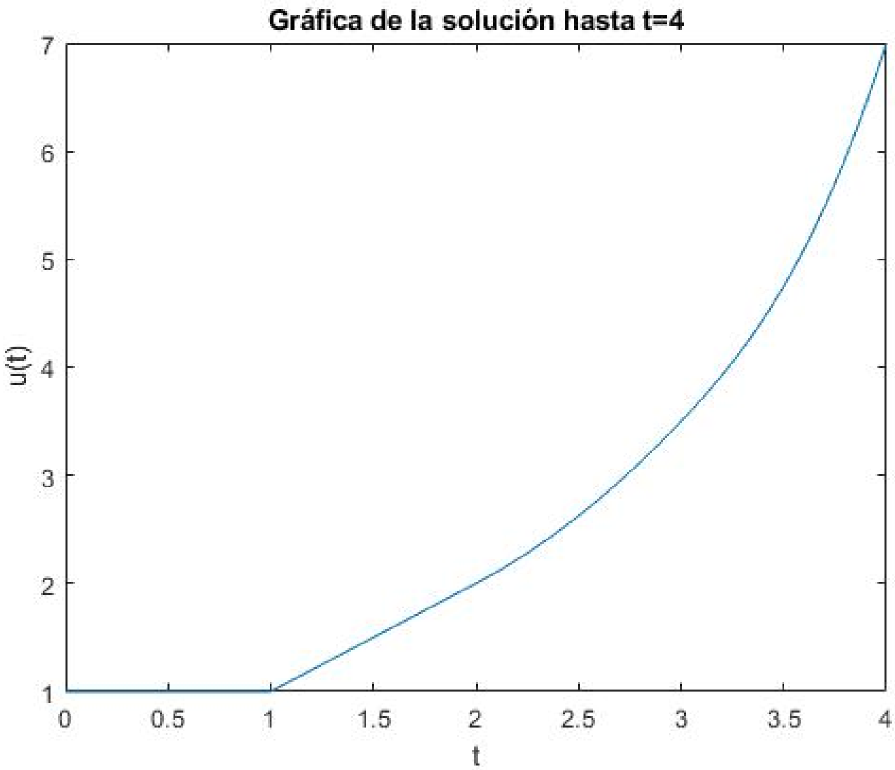

Figura 1.1: Gráfica de la solución hasta t=4

Este ejemplo expone uno de los métodos fundamentales para hallar la solución de las ecuaciones diferenciales en diferencias que consiste en hallarla por intervalos, es decir, hallamos la solución en un cierto intervalo a partir de la solución en el intervalo anterior. Es importante resaltar que la discontinuidad en u' solo aparece en $x = 1$ porque la propia ecuación ya hace que sí sea continua para $t > 1$.

Notemos entonces que la ecuación diferencial en diferencias tiene multitud de soluciones. Sabemos que una solución de una ecuación diferencial de primer orden viene determinada por el valor que toma en un determinado punto. Esta condición se suele llamar condición inicial si la variable independiente es el tiempo y si es espacial, se denomina condición frontera. Una condición inicial sensata para la ecuación (1.7) es, sin embargo,

$$u(t) = g(t), \quad 0 < t \leq 1, \tag{1.10}$$

donde g(t) sea una función real y continua. Esta condición nos permite hallar una única solución de dicha ecuación.

Consideramos ahora el ejemplo

$$u'(t) = u(t-1) + 2u'(t-1). \tag{1.11}$$

Supongamos que u(t)=1 para $0 \leq t \leq 1$, y u(t) exigimos que sea continua para $t > 0$. Si la ecuación se satisface para $1 \leq t \leq 2$, debemos tener $u'(t) = 1$ en ese intervalo, y por tanto, teniendo en cuenta que $u(1) = 1$,

$$u(t) = t, \quad 1 \leq t \leq 2.$$

Razonando de forma análoga, si la ecuación (1.11) tiene solución para $2 < t < 3$, tendremos $u'(t) = t + 1$ en ese intervalo y, usando que $u(2) = 2$,

$$u(t) = \frac{1}{2}t^2 + t - 2, \quad 2 \leq t \leq 3.$$

Continuando con este proceso, no es sencillo encontrar una fórmula general como en (1.8). Además, la solución u(t) obtenida tiene una derivada discontinua en todos los valores positivos enteros de t ya que ahora (1.11) no regulariza para $t > 1$.

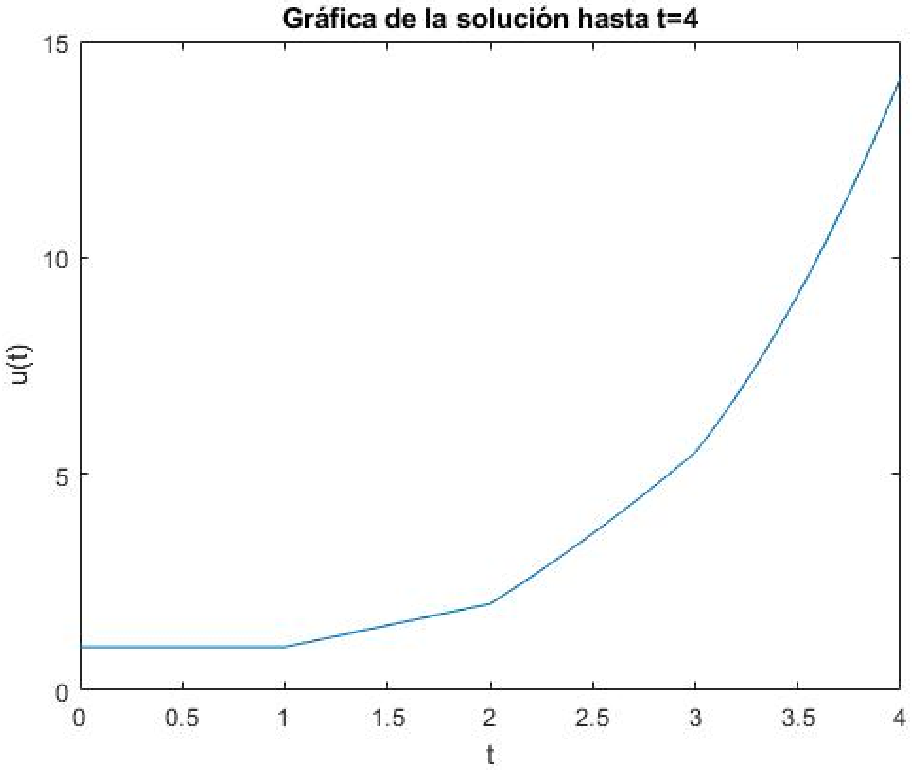

Figura 1.2: Gráfica de la solución hasta t=4

Como último ejemplo, consideramos la ecuación

$$u'(t-1) = u(t), \tag{1.12}$$

suponiendo una condición inicial (1.10). Partiendo de esta condición inicial, (1.12) nos dice que

$$u(t) = g'(t-1), \quad 1 < t < 2,$$

si g es derivable. Si g fuera dos veces derivable para $0 < t < 1$, u(t) es derivable para $1 < t < 2$, y la ecuación (1.12) define u(t) para $2 < t < 3$. Más concretamente,

$$u(t) = g''(t-2), \quad 2 < t < 3.$$

Mediante este proceso, se halla la solución para $t > 0$ si g(t) posee derivadas de todos los órdenes en $0 < t < 1$. De forma precisa,

$$u(t) = g^{(N)}(t-N), \quad N < t < N+1,$$

para cada N natural.

Notemos que la continuidad de $u(t)$ ahora solo puede depender de las propiedades de g(t). Más concretamente, de que

$$g^{(j)}(1) = g^{(j+1)}(0), \quad j \in \mathbb{N}.$$

1.3. Ecuaciones con retardo, neutrales y avanzadas

Las ecuaciones (1.7), (1.11), (1.12) son ejemplos de la ecuación general (1.6). Vamos a clasificar distintos casos de esta ecuación, dependiendo de los coeficientes que se anulen o no.

Definición 1.1 *Las ecuaciones con retardo son las ecuaciones de la forma*

$$a_0u'(t) + b_0u(t) + b_1u(t-w) = f(t),$$

es decir, aquellas en las que $a_0 \neq 0$ *y* $a_1 = 0$ *en la ecuación (1.6).*

Definición 1.2 *Se denominan ecuaciones neutrales aquellas en las que* $a_0 \neq 0$ *y* $a_1 \neq 0$ *en la ecuación (1.6).*

Definición 1.3 *Las ecuaciones avanzadas son aquellas en las que* $a_0 = 0$ *y* $a_1 \neq 0$ *en la ecuación (1.6), es decir, de la forma*

$$a_1u'(t-w) + b_0u(t) + b_1u(t-w) = f(t).$$

Si $a_0 = a_1 = 0$ ó $b_0 = b_1 = 0$, estamos ante una ecuación pura en diferencias o bien en u o bien en u'. Si $a_0 = b_0 = 0$ ó $a_1 = b_1 = 0$ la ecuación se convierte en una ecuación diferencial ordinaria.

En los casos en los que t representa el tiempo, las ecuaciones con retardo representan el comportamiento de un sistema en el que la variación de las variables que estudiamos depende tanto de los valores que toman en el presente como los que tomaron en un tiempo anterior. Las ecuaciones neutrales representan el comportamiento de un sistema en el que la variación de las variables en el presente depende además de la variación de las mismas en un tiempo pasado. Las ecuaciones avanzadas representan el comportamiento de un sistema en el que la variación de las variables estudiadas en el presente depende de los valores que toman dichas variables en el presente y los valores que tomarán en un tiempo posterior.

Nos centraremos en este trabajo en el estudio de las ecuaciones con retardo de primer orden.

1.4. Ejemplos prácticos

A continuación vamos a estudiar algunos ejemplos de sistemas físicos y biológicos basados en ecuaciones diferenciales con retardo.

1.4.1. Mezcla de líquidos

Consideramos un tanque que con capacidad de B litros, lleno de salmuera. Desde la parte superior, se añade agua dulce a razón de a litros por minuto. Se agita de forma continua la salmuera en el interior y la disolución mezclada sale a través de un orificio en el fondo, también a razón de a litros por minuto.

Sea x(t) la cantidad de sal (en kilogramos) en el instante t. Si suponemos una mezcla perfecta en el tanque, es decir, que la salmuera se mezcla con el agua dulce de forma instantánea, entonces la mezcla que sale del tanque contiene x(t)/B kg de sal por litro, y entonces la variación con respecto al tiempo de la cantidad de sal por litro que sale del tanque es

$$x'(t) = -a\frac{x(t)}{B}. \tag{1.13}$$

Ahora suponemos que la mezcla no ocurre instantáneamente en todo el tanque. Por tanto, la concentración que sale del tanque en el tiempo t será igual a la concentración media en algún instante anterior, sea este t-r, suponiendo que r es una constante positiva. La variación de x en este caso viene dada por una ecuación diferencial con retardo

$$x'(t) = -a\frac{x(t-r)}{B},$$

y llamando c=a/B, se tiene que

$$x'(t) = -cx(t-r), \tag{1.14}$$

siendo r el retardo.

La primera pregunta que nos planteamos es qué condiciones iniciales debemos imponer para obtener una solución única de (1.14). Para ello podemos tomar una función inicial en un intervalo de longitud r, $[t_0 - r, t_0]$, e imponer que se satisfaga la ecuación (1.14) para $t \geq t_0$.

Sea

$$x(t) = \theta(t) \quad t_0 - r \leq t \leq t_0, \tag{1.15}$$

donde θ es una función dada. El objetivo es extender esta función de forma continua a una función x que satisfaga (1.14) para $t \geq t_0$, es decir, que $\theta(t_0) =$

$x(t_0)$. En otras palabras, θ representa la cantidad de sal que había en el tanque en los instantes anteriores al tiempo t_0, pero no sabemos si cumple la ecuación diferencial con retardo.

Por ejemplo, supongamos que $\theta(t) = \theta_0$, es decir, que el tanque contenía θ_0 kilogramos de sal mezcladas con los B litros de salmuera anterior al tiempo t_0. A continuación, en t_0 se abrieron las válvulas, permitiendo que el agua dulce fluyera por la parte superior y la salmuera se mezclase en la parte inferior, cada una a razón de a litros por minuto. A partir de esta función inicial constante, vamos a resolver (1.14) y (1.15) en $[t_0, t_0+r]$. Para resolver este problema vamos a utilizar el "método de los pasos".

Realizamos el cambio de variable b=t-r, considerando $t_0 \le t \le t_0 + r$, se obtiene que $t_0 - r \le t - r \le t_0$, es decir, $t_0 - r \le b \le t_0$ y x(t-r)=x(b)=θ_0. Sustituyendo esta última expresión en (1.14),

$$x'(t) = -c\theta_0.$$

Integrando la expresión anterior, teniendo en cuenta que $x(t_0) = \theta_0$, la solución es

$$x(t) = -\int_{t_0}^{t} c\theta_0 dt + \theta_0 = \theta_0 - c\theta_0(t - t_0), \tag{1.16}$$

para $\quad t_0 \le t \le t_0 + r$.

Consideramos el intervalo $[t_0+r, t_0+2r]$. Razonando de forma análoga al caso anterior, tenemos que $t_0+r \le t \le t_0+2r$ que es equivalente a $t_0 \le t-r \le t_0+r$, por lo que se tiene que $x(t-r) = \theta_0 - c\theta_0(t - r - t_0)$. Sustituyendo esta última expresión en (1.14)

$$x'(t) = -cx(t-r) = -c(\theta_0 - c\theta_0(t-r-t_0)) = -c\theta_0 + c^2\theta_0(t-r-t_0), \tag{1.17}$$

con condición inicial, obtenida por (1.16),

$$x(t_0 + r) = \theta_0 - c\theta_0(t_0 + r - t_0) = \theta_0 - cr\theta_0. \tag{1.18}$$

Integrando la ecuación (1.17), teniendo en cuenta la condición inicial (1.18),

$$\begin{aligned}
x(t) &= x(t_0+r) + \int_{t_0+r}^{t} [-c\theta_0 + c^2\theta_0(s - t_0 - r)]ds \\
&= x(t_0+r) - c\theta_0(t - t_0 - r) + c^2\theta_0 \left.\frac{(t-t_0-r)^2}{2}\right|_{t_0+r}^{t} \\
&= x(t_0+r) - c\theta_0 t + c\theta_0(t_0+r) + c^2\theta_0\frac{(t-r-t_0)^2}{2} \\
&= \theta_0 - cr\theta_0 - c\theta_0 t + c\theta_0(t_0+r) + c^2\theta_0\frac{(t-r-t_0)^2}{2} \\
&= \theta_0 - c\theta_0(t-t_0) + c^2\theta_0\frac{(t-r-t_0)^2}{2}, \text{ para } t_0 + r \le t \le t_0 + 2r. \qquad (1.19)
\end{aligned}$$

Consideramos el intervalo $[t_0 + 2r, t_0 + 3r]$. Razonando de forma análoga al caso anterior, tenemos que $t_0 + 2r \leq t \leq t_0 + 3r$, que es equivalente a $t_0 + r \leq t - r \leq t_0 + 2r$, por lo que se tiene que

$$x(t-r) = \theta_0 - c\theta_0(t - r - t_0) + \frac{c^2\theta_0(t - t_0 - 2r)^2}{2}.$$

Sustituyendo esta última expresión en (1.14),

$$\begin{aligned} x'(t) &= -cx(t-r) \\ &= -c\left[\theta_0 - c\theta_0(t - r - t_0) + \frac{c^2\theta_0(t - t_0 - 2r)^2}{2}\right], t_0 + 2r \leq t \leq t_0 + 3r, \end{aligned} \tag{1.20}$$

con condición inicial en $t = t_0 + 2r$ dada a través de (1.19) como

$$x(t_0+2r) = \theta_0 - c\theta_0(t_0+2r-t_0) + c^2\theta_0\frac{(t_0 + 2r - r - t_0)^2}{2} = \theta_0\left(1 - 2cr + \frac{c^2r^2}{2}\right). \tag{1.21}$$

Integrando la ecuación (1.20), teniendo en cuenta la condición inicial (1.21),

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0 + 2r) - c\int_{t_0+2r}^{t}\left[\theta_0 - c\theta_0(s - t_0 - r) + c^2\theta_0\frac{(s - 2r - t_0)^2}{2}\right] ds \\ &= \theta_0 - 2cr\theta_0 + \frac{c^2\theta_0 r^2}{2} - c\theta_0(t - t_0 - 2r) \\ &\quad + c^2\theta_0\frac{(s - t_0 - r)^2}{2}\Big|_{s=t_0+2r}^{s=t} - \frac{c^3\theta_0(s - t_0 - 2r)^3}{6}\Big|_{s=t_0+2r}^{s=t} \\ &= \theta_0 - 2cr\theta_0 + \frac{c^2\theta_0 r^2}{2} - c\theta_0(t - t_0 - 2r) \\ &\quad + c^2\theta_0\frac{[(t - t_0 - r)^2 - r^2]}{2} - \frac{c^3\theta_0(t - t_0 - 2r)^3}{6} \\ &= \theta_0 - c\theta_0(t - t_0) + \frac{c^2\theta_0(t - t_0 - r)^2}{2} - \frac{c^3\theta_0(t - t_0 - 2r)^3}{3!}, \end{aligned}$$

para $t_0 + 2r \leq t \leq t_0 + 3r$.

Inductivamente, de forma similar a la solución de (1.7), se puede probar que

$$x(t) = \theta_0\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k c^k(t - t_0 - (k-1)r)^k}{k!}, \qquad \text{para} \qquad t_0 + (n-1)r \leq t \leq t_0 + nr, \tag{1.22}$$

donde $n \in \mathbb{N}$.

A pesar de tener la expresión (1.22) para la solución, es difícil determinar hasta las propiedades más esenciales de la misma. Por ejemplo, en el modelo solo tiene sentido que $x(t) \geq 0$ para todo t. Por tanto, de (1.16) se deduce que el modelo solo tiene sentido para nuestro problema si $cr < 1$. Aún así, esto no es aún una condición suficiente para garantizar que la solución es siempre positiva. Notemos que, de (1.19), tomando $t = t_0 + 2r$ y resolviendo la ecuación x(t)=0, las raíces son r=2$\pm\sqrt{2}$, hace falta imponer $cr < 2-\sqrt{2}$ para garantizar que dicha expresión es positiva. Y aún así, esto no sería suficiente para garantizarlo para todo t.

1.4.2. Modelo de poblaciones

A continuación, vamos a estudiar el modelo de poblaciones que, aunque es un problema no lineal, se puede resolver mediante el "método de los pasos" como uno lineal.

Sea N(t) la población en tiempo t de una colonia aislada de animales, el modelo de crecimiento de dicha población viene dado por

$$N'(t) = kN(t), \tag{1.23}$$

donde k es el coeficiente de la tasa de crecimiento y es una constante positiva. Reescribiendo (1.23) como dN/N=k dt e integrando esta última ecuación tenemos $N(t) = N_0 e^{kt}$, donde $N_0 = N(0)$.

Se obtiene un modelo más realista si suponemos que k no es constante sino que disminuye a medida que aumenta N(t), debido a la escasez de alimentos. El modelo de crecimiento, entonces, viene dado por la ecuación diferencial

$$N'(t) = k\left[1 - \frac{N(t)}{P}\right] N(t), \tag{1.24}$$

donde k y P son constantes positivas, denominados tasa intrínseca de crecimiento y capacidad de carga, respectivamente. Resolvemos (1.24) con condición inicial $N(0) = N_0$. Reescribiendo dicha ecuación, tenemos

$$\frac{dN}{dt} = kN - \frac{k}{P}N^2,$$

que es equivalente a

$$\frac{dN}{kN - \frac{k}{P}N^2} = dt.$$

Integrando ambos lados de la igualdad,

$$\frac{1}{k}\int \frac{1}{N - \frac{1}{P}N^2} dN = \int dt. \tag{1.25}$$

Calculando la integral de la derecha por descomposición en fracciones simples

$$\frac{1}{N - \frac{1}{P}N^2} = \frac{A}{N} + \frac{B}{1 - \frac{1}{P}N} = \frac{A + (B - \frac{A}{P})N}{N - \frac{1}{P}N^2},$$

e igualando ambos miembros llegamos a A=1 y B=1/P. Reescribiendo (1.25) se tiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{k}\left[\int \frac{1}{N}dN + \int \frac{\frac{1}{P}}{1 - \frac{1}{P}N}dN\right] &= \frac{1}{k}\left[\ln\frac{N(t)}{N_0} - \ln\frac{1 - \frac{1}{P}N(t)}{1 - \frac{1}{P}N_0}\right] \\ &= \frac{1}{k}\ln\frac{N(t)\left(1 - \frac{1}{P}N_0\right)}{N_0\left(1 - \frac{1}{P}N(t)\right)}.\end{aligned}$$

La solución de (1.25) es

$$\ln\frac{N(t)\left(1 - \frac{1}{P}N_0\right)}{N_0\left(1 - \frac{1}{P}N(t)\right)} = kt, \tag{1.26}$$

y aplicando la exponencial a ambos lados de la igualdad, se tiene que

$$\frac{N(t)\left(1 - \frac{1}{P}N_0\right)}{N_0\left(1 - \frac{1}{P}N(t)\right)} = e^{kt}.$$

Operando y reagrupando términos,

$$N(t)\left[1 - \frac{1}{P}N_0 + e^{kt}\frac{N_0}{P}\right] = N_0e^{kt}.$$

Finalmente, la solución de (1.24) con condición inicial $N(0) = N_0$ es

$$N(t) = \frac{N_0e^{kt}}{1 + (e^{kt} - 1)\frac{N_0}{P}}. \tag{1.27}$$

Si N_0/P es pequeño comparado con 1, la solución es de la forma N_0e^{kt} cuando t tiende a 0, como se deduce de la ecuación (1.24). Pero como $t \to \infty$, independientemente del valor $N_0 > 0$, N(t) se aproxima al valor de equilibrio P.

Ahora supongamos que la reacción de autorregulación biológica representada por el factor [1-N(t)/P] en (1.24) no es instantánea, sino que responde después de transcurrido un tiempo $r > 0$. Entonces este modelo está regido por la ecuación con retardo

$$N'(t) = k\left[1 - \frac{1 - N(t-r)}{P}\right]N(t). \tag{1.28}$$

Esta ecuación ha sido estudiada por Wright (1945), Kakutani y Markus (1958), Jones (1962), Kaplan y Yorke (1975) y otros. Vamos a reescribir dicha ecuación, con el cambio

$$x(s) = \frac{N(rs)}{P} - 1,$$

y tomando c=kr.

Derivando x(s) y teniendo en cuenta (1.28), obtenemos

$$x'(s) = \frac{N'(rs)r}{P} = \frac{r}{P}\left[k\left(1 - \frac{N(rs-r)}{P}\right)\right]N(rs)$$
$$= \frac{rkN(rs)}{P}\left[1 - \frac{N(r(s-1))}{P}\right] = c(x(s)+1)(-x(s-1)).$$

Cambiando la variable s por t

$$x'(t) = -cx(t-1)[1+x(t)]. \tag{1.29}$$

Sea θ una función inicial en [-1,0] tal que

$$x(t) = \theta(t) \quad -1 \leq t \leq 0, \tag{1.30}$$

e imponemos que se satisfaga la ecuación (1.29) para $t \geq 0$.

Si suponemos que θ es una función continua, es sencillo demostrar la existencia y unicidad de la solución de (1.29) sujeta a la condición inicial (1.30) por el "método de los pasos".

Consideramos el intervalo [0,1], (1.29) se convierte en una ecuación diferencial ordinaria de primer orden. Tenemos que $0 \leq t \leq 1$, que es equivalente a $-1 \leq t-1 \leq 0$ por lo que se tiene que $x(t-1) = \theta(t-1)$. Sustituyendo en (1.29), se tiene la ecuación diferencial con retardo

$$x'(t) + c\theta(t-1)x(t) = -c\theta(t-1) \tag{1.31}$$

sujeto la condición inicial $x(0) = \theta(0)$. Para resolver esta ecuación, la multiplicamos por el factor integrante $\exp\left(\int_0^t c\theta(s-1)ds\right)$

$$x'(t)\exp\left(\int_0^t c\theta(s-1)ds\right) + c\theta(t-1)x(t)\exp\left(\int_0^t c\theta(s-1)ds\right)$$
$$= -c\theta(t-1)\exp\left(\int_0^t c\theta(s-1)ds\right),$$

que es equivalente a

$$\frac{d}{dt}\left[x(t)\exp\left(\int_0^t c\theta(s-1)ds\right)\right] = -c\theta(t-1)\exp\left(\int_0^t c\theta(s-1)ds\right)$$

que nos lleva a la unicidad de la solución en [0,1],

$$x(t) = [\theta(0)+1]\exp\left(-\int_0^t c\theta(s-1)ds\right) - 1.$$

De forma análoga, se puede hallar la solución en el intervalo [1,2] y en el resto de intervalos.

Aunque mediante este procedimiento, en principio, se puede hallar la solución exacta de (1.29) y (1.30) en cualquier intervalo, las integrales resultantes se vuelven muy engorrosas. Por tanto, de forma similar a lo que ocurría en el ejemplo anterior, es difícil sacar conclusiones generales sobre la solución de dicho problema. Paralelamente, sería interesante determinar si las soluciones de este problema están acotadas, oscilan o, como si en las soluciones (1.27) tienden hacia un valor límite cuando t tiende hacia infinito.

Capítulo 2

Transformada de Laplace

2.1. Introducción

La transformada de Laplace reemplaza una función $f(t)$ definida para $t \geq 0$ por una función $F(s)$, definida para Re(s) suficientemente grande, mediante

$$\mathcal{L}(f)(s) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt. \tag{2.1}$$

Utilizaremos dicha transformada para convertir las ecuaciones lineales en derivadas y diferencias de f(t) en ecuaciones lineales de F(s).

Proposición 2.1 *Si es $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ derivable con derivada continua. Entonces,*

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) = s\mathcal{L}(f(t))(s) - f(0). \tag{2.2}$$

Demostración.

Por definición, tenemos que

$$\mathcal{L}(f')(s) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt.$$

Aplicando integración por partes

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f')(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt \\ &= e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty s e^{-st} f(t)dt = -f(0) + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \\ &= s\mathcal{L}(f)(s) - f(0).\blacksquare\end{aligned}$$

2.2. Existencia y convergencia

La integral infinita que aparece en la ecuación (2.1) se define como el límite de una integral finita

$$F(s) = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-st} f(t)dt,$$

donde se supone que f(t) es integrable en cualquier intervalo finito de la forma $[0, R]$. Para nuestro objetivo, no es necesario utilizar la integral de Lebesgue sino que es suficiente con la integral de Riemann. En la mayoría de los casos en los que tengamos que aplicar la transformada de Laplace a una función continua a trozos, esta tendrá al menos una derivada continua.

Por otra parte, usualmente las funciones f(t) con las que trabajaremos estarán acotadas de la siguiente forma

$$|f(t)| \leq ce^{at}. \tag{2.3}$$

De este modo, la integral (2.1) converge absolutamente para $\mathrm{Re(s)} = \sigma > a$ siendo $s = \sigma + ir$ ya que

$$|e^{-st} f(t)| = |e^{-\sigma t - irt}||f(t)| \leq ce^{-\sigma t} e^{at} = ce^{(-\sigma+a)t} \tag{2.4}$$

y se cumple que

$$\int_0^\infty e^{(-\sigma+a)t} dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{(-\sigma+a)t} dt = \frac{1}{a-\sigma} \lim_{R\to\infty} \left[e^{(-\sigma+a)R} - 1\right] = \frac{1}{\sigma - a}$$

La convergencia de la integral para algún valor $s_0 = \sigma_0 + ir_0$ implica la convergencia para $s = \sigma + ir$ para todo $\sigma > \sigma_0$.

Por último, señalar que la transformada de Laplace establece una aplicación entre funciones reales definidas en $t \geq 0$ y funciones definidas sobre semiplanos $\mathrm{Re}\ (s) > \sigma_0$.

2.3. Fórmula de inversión

Vamos a determinar $f(t)$ a partir de $F(s)$. El algoritmo más sencillo para hallarla se construye de forma análoga a la teoría de series de potencias y las series de Fourier, y se trata de una transformación integral. Suponemos que la integral

$$F(s) = \int_0^\infty f(t_1) e^{-st_1} dt_1$$

converge absolutamente para $\text{Re }(s) > \sigma_0$. Entonces, para $a > \sigma_0$,

$$F(a+it) = \int_0^\infty f(t_1)\exp[-(a+it)t_1]dt_1$$

es absolutamente convergente. Multiplicando ambos lados de la igualdad por $e^{u(a+it)}$ e integrando con respecto a t entre -T y T

$$\begin{aligned}&\int_{-T}^{T}\exp[(a+it)u]F(a+it)dt\\&= e^{au}\int_0^\infty f(t_1)e^{-at_1}\left[\int_{-T}^{T}\exp(iut-it_1t)dt\right]dt_1.\end{aligned} \tag{2.5}$$

El intercambio en el orden de integración se justifica por la convergencia absoluta de la integral doble. Puesto que para la integral en el corchete se tiene

$$\begin{aligned}\int_{-T}^{T}\exp(iut-it_1t)dt =& \frac{1}{i(u-t_1)}\int_{-T}^{T}\exp[(iu-it_1)t](iu-it_1)dt\\ =& \frac{1}{i(u-t_1)}\left[\exp((iu-it_1)T)-\exp(-(iu-it_1)T)\right]\\ =& \frac{2}{u-t_1}\ \text{sin }(T(u-t_1)).\end{aligned}$$

Sustituyendo en (2.5),

$$\int_{-T}^{T}\exp[(a+it)u]F(a+it)dt = 2e^{au}\int_0^\infty f(t_1)e^{-at_1}\frac{\text{sin }(T(u-t_1))}{(u-t_1)}dt_1. \tag{2.6}$$

La función

$$k(x,T) = \frac{\text{sin }(Tx)}{x}$$

la denominamos núcleo de Dirichlet.

2.4. Comportamiento del núcleo de Dirichlet

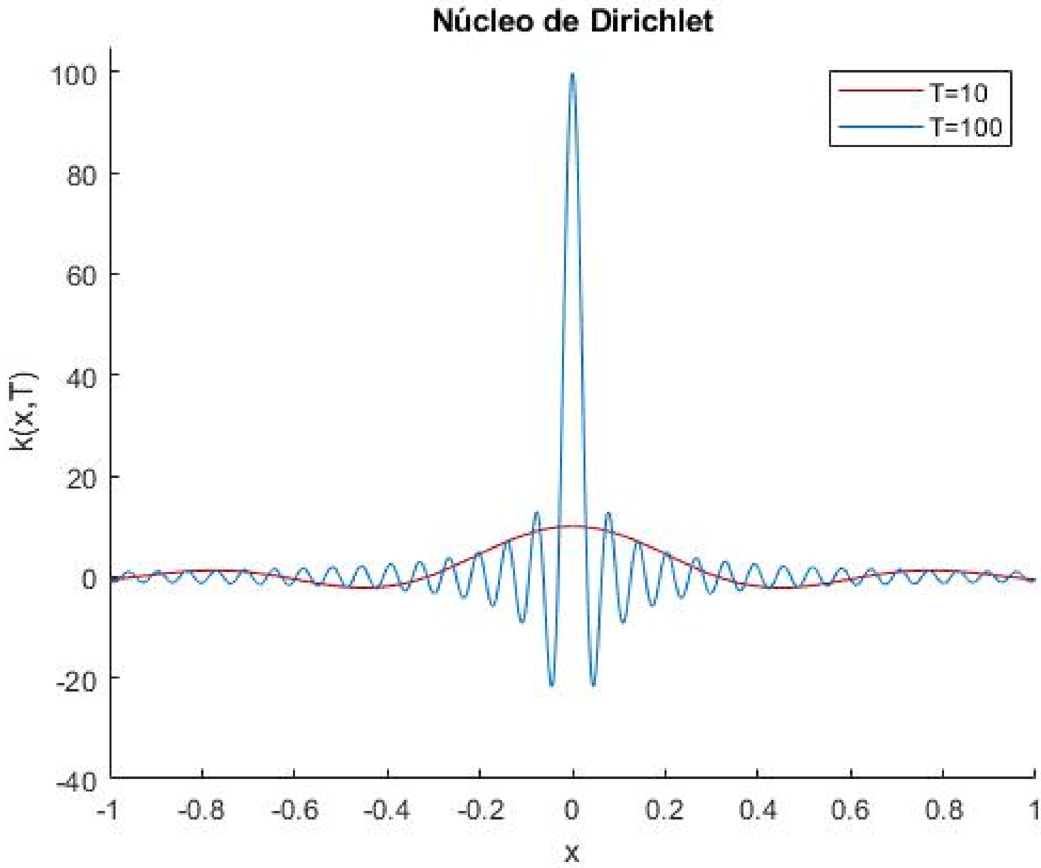

Figura 2.1: Núcleo de Dirichlet para k(x,T) para T=10 y T=100

Si se toma $k(x, T)$ de forma que tome el valor T en $x = 0$ dicha función es continua en $x \in \mathbb{R}$. Además, la gráfica tendría la forma representada anteriormente en la figura 2.1. A medida que T aumenta, el pico será más pronunciado y parece aproximarse a una delta de Dirac. Por tanto, si $T \to \infty$, podemos pensar que el lado derecho de (2.6) dependerá solo de $f(t_1)e^{-at_1}$ en $u = t_1$. Si esto es así, podríamos despejar $f(u)$ para $u \geq 0$ de la ecuación.

2.5. Aspectos analíticos

En este apartado vamos a estudiar con más rigor cómo hallar $f(u)$ a partir de (2.6). Escribimos el intervalo $(0, \infty)$ de la forma

$$(0, \infty) = (0, u - d] \cup (u - d, u + d] \cup (u + d, \infty),$$

donde $u > 0$ y d es una pequeña cantidad positiva. Sustituyendo en (2.6),

$$\begin{aligned}\int_{-T}^{T} \exp[(a+it)u]F(a+it)dt = 2e^{au} \int_{0}^{u-d} f(t_1)e^{-at_1} \frac{\sin\ (T(u-t_1))}{(u-t_1)} dt_1 \\ + 2e^{au} \int_{u-d}^{u+d} f(t_1)e^{-at_1} \frac{\sin\ (T(u-t_1))}{(u-t_1)} dt_1 \\ + 2e^{au} \int_{u+d}^{\infty} f(t_1)e^{-at_1} \frac{\sin\ (T(u-t_1))}{(u-t_1)} dt_1. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Veamos que el primer y el tercer término del lado derecho de la igualdad anterior tienden a 0 cuando $T \to \infty$. Para ello vamos a emplear el lema de Riemann-Lebesgue.

Lema 2.2 *Si* $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|dt < \infty$, *entonces*

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\ sin\ (Tt)dt = 0,$$
$$\lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\ cos\ (Tt)dt = 0. \tag{2.8}$$

Demostración.

Lo probaremos solo en el caso en el que exista g'(t) y sea absolutamente integrable. Integrando por partes,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \sin\ (Tt)dt = -\ g(t)\frac{cos(tT)}{t}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} g'(t)\frac{cos(tT)}{t}dt. \tag{2.9}$$

Por ser g absolutamente integrable $g(\infty) = g(-\infty) = 0$, con lo que el primer término se anula y la segunda integral tiende a 0 cuando $t \to \infty$ por ser gábsolutamente integrable.

Razonando de forma análoga, se demuestra (2.8).■

Supongamos que $\int_{0}^{\infty} |f(t)|e^{-at}dt < \infty$. Entonces, la función

$$\left|\frac{f(t_1)e^{-at_1}}{u-t_1}\right|$$

es integrable sobre cualquier intervalo cerrado sin incluir $t_1 = u$. Aplicando entonces el lema de Riemann-Lebesgue al primer y tercer término de (2.7) se tiene que

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \exp[(a+it)u]F(a+it)dt = \lim_{T\to\infty} 2e^{au} \int_{u-d}^{u+d} f(t_1)e^{-at_1} \frac{\sin\ (T(u-t_1))}{(u-t_1)} dt_1. \tag{2.10}$$

Vamos a analizar este último límite, suponiendo que podemos hallar, al menos, dos términos del desarrollo de Taylor de $f(t_1)$ en torno a u, es decir, que

$$f(t_1)e^{-at_1} = f(u)e^{-au} + h(u,t_1)(u-t_1),$$

donde

$$|h(u,t_1)| \leq k_1, \quad u-d \leq t_1 \leq u+d.$$

Una condición suficiente para que se puede hacer este desarrollo es que $f(t)$ sea continua y posea primera derivada en $t_1 = u$.

Sustituyendo en la segunda expresión integral de (2.10), se tiene que debe calcularse

$$\lim_{T\to\infty}\left[2f(u)\int_{u-d}^{u+d}\frac{\sin\,(T(u-t_1))}{(u-t_1)}dt_1 + 2e^{au}\int_{u-d}^{u+d}h(u,t_1)\,\sin\,(T(u-t_1)dt_1\right]. \tag{2.11}$$

Como $|\sin\,(T(u-t_1))| \leq 1$, la segunda integral es O(d) para todo T. Con respecto al primer término, haciendo el cambio de variable $T(u-t_1) = v$, se obtiene

$$2f(u)\int_{-Td}^{Td}\frac{\sin\,v}{v}dv.$$

Como d es arbitrario, se puede tomar suficientemente pequeño. En particular, $d = 1/\sqrt{T}$ con lo que (2.11) en ese caso es

$$2f(u)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\,v}{v}dv.$$

Veamos ahora que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\,v}{v}dv = \pi. \tag{2.12}$$

Para probar (2.12), consideramos el siguiente resultado de Variable Compleja.[5]

Lema 2.3 *Supongamos que F es una función holomorfa en un abierto que contiene al semiplano $H = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) \geq 0\}$, excepto para un número finito de singularidades aisladas, a, de las cuales, aquellas que están en el eje real, son polos simples y las denominamos $x_1, ..., x_m$. Supongamos que $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0, z \in H$. Entonces, para cada $w < 0$, se tiene que*

$$v.p\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iwx}F(x)dx = 2\pi i\sum_{Im(a)>0}Res(e^{-iwz}F(z),a) + i\pi\sum_{j=1}^{m}Res(e^{-iwz}F(z),x_j).$$

En el caso de polos simples y si la función es de la forma $F(z) = g(z)/h(z)$, el residuo se calcula:

$$Res(F(z),a) = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{g(z)}{h(z)} = g(a)\lim_{z\to a}\frac{z-a}{h(z)} = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

Como tenemos que calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = Im \left(v.p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right),$$

sea $F(z) = 1/z$ en el lema anterior que tiene un polo simple en z=0 y $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. Estamos en condiciones de aplicar dicho lema con $w = -1$ y ocurre que

$$v.p \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} F(x) dx = \pi i Res \left(\frac{e^{iz}}{z}, 0 \right) = \pi i \lim_{z\to 0} z \frac{e^{iz}}{z} = \pi i.$$

Por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi,$$

con lo que de (2.10) se obtiene que

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} e^{(a+it)u} F(a+it) dt = 2\pi f(u).$$

La deducción de los resultados anteriores corresponde a la demostración del siguiente teorema:

Teorema 2.4 *Sea $f(t)$ una función con las siguientes propiedades:*
(a)$\int_0^{\infty} f(t) e^{-at} dt$ es absolutamente convergente para algún $a > 0$
(b) $f(t)$ posee derivada en un punto $u > 0$.
Entonces,

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

existe para $Re\ (s) \geq a$, y para $b > a$, tenemos

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} e^{(b+it)u} F(b+it) dt = f(u). \tag{2.13}$$

2.6. Discontinuidad de salto

En esta sección veamos qué ocurre en el caso en que f(t) no tenga derivada acotada en el punto, e incluso sin ser continua en dicho punto. Definimos la función

$$f(t) = 0, \quad 0 \leq t < c,$$
$$f(t) = 1, \quad t \geq c.$$

como esta función no es continua en $t = c$, no es derivable en dicho punto. Para ver cómo podemos estudiar las funciones de este tipo, es decir, funciones con una discontinuidad en un punto c, volvamos a la integral (2.6). La descomponemos en las integrales correspondientes a:

$$\int_0^\infty = \int_0^{c-d} + \int_{c-d}^{c} + \int_c^{c+d} + \int_{c+d}^{\infty}.$$

Supongamos que $f(t)$ es continua a la izquierda y a la derecha del punto c, y en el intervalo $(c-d, c)$, $f(t)e^{-at}$ se puede escribir

$$f(t)e^{-at} = f_-(c)e^{-ac} + (t-c)g_1(t,c),$$

donde

$$f_-(c) = \lim_{d\to 0} f(c-d), \quad d > 0.$$

y $|g_1(t,c)| \leq k_1$. Por otro lado, suponemos que $f(t)e^{-at}$ posee un desarrollo similar en el intervalo $(c, c+d)$, es decir,

$$f(t)e^{-at} = f_+(c)e^{-ac} + (t-c)g_2(t,c),$$

donde

$$f_+(c) = \lim_{d\to 0} f(c+d), \quad d > 0.$$

y $|g_1(t,c)| \leq k_2$.

Desarrollos de este tipo existen si f(t) posee derivadas laterales acotadas en torno al punto t=c. Análogamente a como se encontró (2.13), se tiene que

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} e^{(b+it)c}F(b+it)dt = \frac{f_-(c)+f_+(c)}{2}.$$

Lo anterior prueba el siguiente resultado

Teorema 2.5 *Sea f(t) una función con las siguientes propiedades:*

(a)$\int_0^\infty f(t)e^{-at}dt$ *es absolutamente convergente para algún* $a > 0$

(b) f(t) posee derivadas laterales acotadas en $u > 0$. *Entonces, para b>a,*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} e^{(b+it_1)u}F(b+it_1)dt_1 = \frac{f_-(u)+f_+(u)}{2}, \quad u > 0,$$

Todos los resultados estudiados hasta ahora, nos llevan a las integrales de contorno.

2.7. Integrales de contorno

Partimos de la integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} e^{(b+it_1)u}F(b+it_1)dt_1,$$

y realizando el cambio de variable $s = b + it_1$, se tiene

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} e^{(b+it_1)u}F(b+it_1)dt_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} F(s)e^{su}ds,$$

donde la expresión de la derecha corresponde a una integral de contorno a lo largo de la línea vertical que une los puntos $b - iT$ a $b + iT$ en el plano complejo.

Para simplificar la notación, escribiremos

$$\int_{(b)} F(s)e^{su}ds = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} F(s)e^{su}ds,$$

con lo cual (2.13) nos dice que

$$f(u) = \int_{(b)} F(s)e^{su}ds,$$

bajo las hipótesis del teorema 2.4.

2.8. El teorema de convolución

Siempre que a f y g se les pueda aplicar la transformada de Laplace, veamos que

$$\mathcal{L}(h) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g),$$

siendo

$$h(t) = \int_0^t f(t_1)g(t-t_1)dt_1,$$

que denominaremos la convolución de f y g. Para probarlo, notemos que

$$\int_0^R h(t)e^{-st}dt = \int_0^R e^{-st}\left[\int_0^t f(t_1)g(t-t_1)dt_1\right]dt.$$

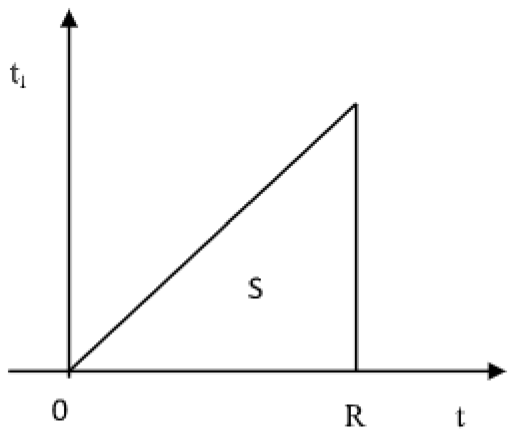

Figura 2.2: Región S

Considerando entonces la región S de la figura 2.2, tenemos que

$$\int\int_S e^{-st} f(t_1) g(t-t_1) dt dt_1 = \int_0^R f(t_1) \left[\int_{t_1}^R e^{-st} g(t-t_1) dt \right] dt_1 \tag{2.14}$$

$$= \int_0^R e^{-st_1} f(t_1) \left[\int_0^{R-t_1} e^{-su} g(u) du \right] dt_1, \tag{2.15}$$

donde en la última igualdad se ha realizado el cambio de variable $u = t - t_1$. Notemos que, efectivamente, cuando $R \to \infty$, formalmente se obtiene $\mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$. Veámoslo ahora de manera rigurosa:

Teorema 2.6 *Suponemos que*

(a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-at_1} |f(t_1)| dt_1 < \infty,$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \exp[-(a+it)t_1] g(t_1) dt_1$ *converge para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Entonces,

$$\int_0^\infty h(t) e^{-st} dt = \left[\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \right] \left[\int_0^\infty e^{-st} g(t) dt \right],$$

para s=a+ib, y generalmente para $Re(s) > a$.

Demostración.

A partir de (2.14),

$$\begin{aligned}\int_0^R h(t)e^{-s}dt &= \int_0^R e^{-st_1}f(t_1)\left[\int_0^{R-t_1} e^{-su}g(u)du\right]dt_1\\ &= \int_0^R e^{-st_1}f(t_1)\left[\int_0^{\infty} e^{-su}g(u)du\right]dt_1\\ &\quad - \int_0^R e^{-st_1}f(t_1)\left[\int_{R-t_1}^{\infty} e^{-su}g(u)du\right]dt_1. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Para calcular hacia qué tiende la segunda integral, dividimos la integral en t_1 en los dos intervalos, $\left[0, \frac{R}{2}\right]$ y $\left[\frac{R}{2}, R\right]$. Como, por hipótesis, las integrales $\int_0^\infty e^{-su}g(u)du$ y $\int_0^\infty e^{-at}|f(t)|dt$ convergen, tenemos que

$$\begin{aligned} &(i)\left|\int_N^\infty e^{-su}g(u)du\right| \leq \varepsilon, \quad N \geq N_0(\varepsilon),\\ &(ii)\left|\int_N^\infty e^{-su}g(u)du\right| \leq c_1, \quad N \geq 0.\\ &(iii)\int_N^\infty |e^{-su}f(u)|du \leq \varepsilon, \quad N \geq N_0(\varepsilon). \end{aligned}$$

Entonces, notemos que si $t_1 \in [0, R/2]$, $R - t_1 \geq R/2$, con lo que por (i), para $R/2 \geq N_0(\varepsilon)$

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\frac{R}{2}} e^{-st_1}f(t_1)\left[\int_{R-t_1}^\infty e^{-su}g(u)du\right]dt_1\right| &\leq \left[\int_0^{\frac{R}{2}} e^{-at_1}|f(t_1)|dt_1\right]\varepsilon\\ &\leq \varepsilon\int_0^\infty e^{-at_1}|f(t_1)|dt_1 = c_2\varepsilon,\end{aligned}$$

para cierta constante c_2.

Por otro lado, si $t_1 \in [R/2, R]$, como $R - t_1 \leq R/2$, se puede aplicar (ii), y se tiene, por (iii), que para $R/2 \geq N_0(\varepsilon)$,

$$\left|\int_{\frac{R}{2}}^R e^{-st_1}f(t_1)\left[\int_{R-t_1}^\infty e^{-su}g(u)du\right]dt_1\right| \leq c_1\int_{\frac{R}{2}}^R e^{-at_1}|f(t_1)|dt_1 \leq c_1\varepsilon.$$

Con los dos resultados anteriores, podemos concluir que el término de la derecha en (2.16) tiende a 0 cuando $R \to \infty$, con lo que

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R h(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g).\blacksquare$$

Capítulo 3

Ecuaciones diferenciales en diferencias con retardo de primer orden lineales y de coeficientes constantes

Este capítulo es el central del trabajo. En él estudiamos con cierto detalle las ecuaciones diferenciales en diferencias con retardo de primer orden lineales y de coeficientes constantes. En particular, teoremas de existencia y unicidad de soluciones, el orden de crecimiento de las mismas y distintas maneras de expresar dichas soluciones.

3.1. Teorema de existencia y unicidad

Vamos a estudiar el teorema de existencia y unicidad de soluciones de las ecuaciones con retardo

$$a_0u'(t) + b_0u(t) + b_1u(t-w) = f(t) \quad t > t_0 + w, \tag{3.1}$$

con condiciones iniciales $u(t) = g(t)$, para $t_0 \leq t \leq t_0 + w$.

Haciendo el cambio de variable $t - t_0 = t'$, se obtiene la ecuación

$$a_0u'(t'+t_0) + b_0u(t'+t_0) + b_1u(t'+t_0-w) = f(t'+t_0), \quad t' > w \tag{3.2}$$

con condiciones iniciales $u(t_0+t') = g(t_0+t'), \quad 0 \leq t' \leq w$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $t_0 = 0$ y la ecuación a resolver es (3.1) con condición inicial

$$u(t) = g(t), \quad 0 \leq t \leq w. \tag{3.3}$$

Teorema 3.1 *Supongamos que f es de clase $\mathscr{C}^0$ en $[w, \infty)$ y que g es de clase $\mathscr{C}^0$ en $[0, w]$. Entonces, existe una única función continua $u(t)$ para $t \geq 0$ que satisface la ecuación (3.1) para $t > w$ sujeta a la condición inicial (3.3) y u(es de clase $\mathscr{C}^1$ en (w, ∞). Además, si f es de clase $\mathscr{C}^1$ en $[2w, \infty)$, u es de clase $\mathscr{C}^2$ en $(2w, \infty)$. Por otra parte, si g es de clase $\mathscr{C}^1$ en $[0, w]$, u' es continua en w si y solo si*

$$a_0 g'(w) + b_0 g(w) + b_1 g(0) = f(w). \tag{3.4}$$

Si además f es de clase $\mathscr{C}^1$ en (w, ∞), u'' es continua en $2w$ si y solo si se cumple o bien (3.4) o bien $b_1 = 0$.

Demostración.

Sea $v(t) = f(t) - b_1 u(t - w)$. Reescribiendo la ecuación (3.1), tenemos

$$a_0 u'(t) + b_0 u(t) = v(t),$$

equivalente a

$$\frac{d}{dt}\left[a_0 u(t) e^{\left(\frac{b_0 t}{a_0}\right)}\right] = v(t) e^{\left(\frac{b_0 t}{a_0}\right)}. \tag{3.5}$$

Por hipótesis, v(t) es de clase $\mathscr{C}^0$ en $[w, 2w]$. Por integración de (3.5),

$$a_0 u(t) e^{\frac{b_0 t}{a_0}} = \int_w^t v(s) e^{\frac{b_0 s}{a_0}} ds + c,$$

con $c = a_0 u(w) e^{\frac{b_0 w}{a_0}} = a_0 g(w) e^{\frac{b_0 w}{a_0}}$.

Por tanto, para $w < t \leq 2w$,

$$a_0 u(t) e^{\frac{b_0 t}{a_0}} = \int_w^t (f(s) - b_1 g(s - w)) e^{\frac{b_0 s}{a_0}} ds + c.$$

Como de aquí u es de clase $\mathscr{C}^0$ en $[w, 2w]$, v(t) es de clase $\mathscr{C}^0$ en $[w, 3w]$. Por (3.5), se sigue que existe una única función continua u(t) que satisface (3.1) para $w < t < 3w$ con $u(w) = g(w)$. Repitiendo este proceso, probamos la existencia y unicidad de la función u(t) para $t \geq w$.

Veamos que u es de clase $\mathscr{C}^1$ en (w, ∞). Por (3.1), tenemos

$$a_0 u'(t) = f(t) - b_0 u(t) - b_1 u(t - w), \quad t > w. \tag{3.6}$$

Como u es de clase $\mathscr{C}^0$ para $t \geq 0$, $u(t - w)$ es de clase $\mathscr{C}^0$ en (w, ∞) y por hipótesis, f es de clase $\mathscr{C}^0$ en (w, ∞), por la ecuación (3.6) podemos deducir que $u'(t)$ es de clase $\mathscr{C}^0$ en (w, ∞), o lo que es equivalente que u(t) es de clase $\mathscr{C}^1$ en

(w,∞). Suponiendo que f es de clase $\mathscr{C}^1$ en $(2w,\infty)$, veamos que u(t) de clase $\mathscr{C}^2$ en $(2w,\infty)$. Derivando la ecuación (3.6),

$$a_0u''(t) = f'(t) - b_0u'(t) - b_1u'(t-w), \quad t > 2w. \tag{3.7}$$

La parte derecha de la ecuación anterior es de clase $\mathscr{C}^0$ en $(2w,\infty)$, de lo que se deduce que u(t) es de clase $\mathscr{C}^2$ en $(2w,\infty)$.

Veamos ahora que si g es de clase $\mathscr{C}^1$ en $[0,w]$, u' es continua en w si y solo si se cumple (3.4). Para ello, notemos que si g es de clase $\mathscr{C}^1$ en $[0,w]$, $u'_-(w) = g'(w)$. Por otro lado, de (3.6),

$$a_0u'_+(w) = f(w) - b_0g(w) - b_1g(0).$$

Por tanto, u' es continua en w si y solo si $u'_-(w) = u'_+(w)$, es decir, se cumple (3.4).

Por otra parte, si f es de clase $\mathscr{C}^1$ en (w,∞), vemos que (3.7) también sería cierta para $w < t < 2w$ ya que todos los términos en (3.6) serían derivables en ese intervalo. De aquí, como $u''(t)$ es continua en $2w$ si y solo si $u''_-(2w) = u''_+(2w)$, esto es equivalente a que

$$b_1[u'_+(w) - u'_-(w)] = 0.$$

Este será el caso si y y solo si u' es continua en w o $b_1 = 0$, de donde se sigue el teorema. Notemos que el caso $b_1 = 0$ implica que (3.1) sea una ecuación diferencial pura.■

Definición 3.2 *La solución u(t) a la que llegamos en el teorema anterior se denomina la solución continua de (3.1) sujeta a la condición (3.3).*

Si cambiamos las hipótesis del teorema anterior, tenemos el siguiente resultado, que se obtiene con idéntica demostración.

Nota 3.3 *Si f es de clase $\mathcal{C}^0$ a trozos en $[w,\infty)$ y g es de clase $\mathcal{C}^0$ a trozos en $[0,w]$, entonces existe una única función u de clase $\mathcal{C}^0$ en $[w,\infty)$, con u(w)=g(w) y que satisface (3.1) para $t > w$ en el sentido en el que en un punto de discontinuidad de $u(t-w)$ o $f(t)$ se cumple la ecuación (3.1) por la derecha y por la izquierda de estas discontinuidades. Para $t > 2w$, las únicas discontinuidades de u' ocurren en las discontinuidades de f.*

Nota 3.4 *Supongamos que f es de clase $\mathscr{C}^1$ en $[0,\infty)$ y que g es de clase $\mathscr{C}^0$ en $[0,w]$. Para $t_1 > 2w$, consideramos las ecuaciones*

$$a_0 w'(t) + b_0 w(t) + b_1 w(t-w) = f(t+t_1), \quad t > 0. \tag{3.8}$$

$$w(t) = u(t+t_1), \quad 0 \leqslant t \leqslant w. \tag{3.9}$$

Estas ecuaciones tienen la misma forma de (3.1) con condición inicial como en (3.3). Aplicando el teorema 3.1, tiene una única solución continua que sabemos que es $w(t) = u(t+t_1), t \geqslant 0$. Como u(t) es de clase $\mathscr{C}^2$ en $(2w,\infty)$ y $t_1 > 2w$, w(t) es de clase $\mathscr{C}^2$ en $[0,\infty)$.

Si solo estamos interesados en valores de u(t) para $t \geqslant t_1$ podemos reemplazar el problema inicial por el dado por (3.8) y (3.9) suponiendo conocido u en $[t_1, t_1 + w]$.

Nota 3.5 *De la demostración del teorema anterior, se deduce también que si f es de clase $\mathscr{C}^1$ en $[w,\infty]$ y g es de clase $\mathscr{C}^2$ en $[0,w]$, se cumple (3.4) y*

$$a_0 g''(w) + b_0 g'(w) + b_1 g'(0) = f'(w),$$

entonces $u \in \mathscr{C}^2[0,\infty)$.

3.2. Soluciones con forma exponencial

En las secciones anteriores, hemos descrito un proceso de continuidad. Este proceso permite extender la solución de una ecuación diferencial en diferencias con coeficientes constantes de intervalo en intervalo, y en muchos casos permite establecer una fórmula que da el valor de la solución en cualquier intervalo $kw < t < (k+1)w, \quad k = 0, 1, 2, ...$ En ocasiones, no es sencillo hallar una fórmula de este tipo, pero este método se puede usar para hallar numéricamente la solución en un intervalo deseado.

En esta sección vamos a estudiar un segundo método fundamental, que consiste en construir la solución como suma de soluciones exponenciales sencillas. Este método es conocido en la teoría de ecuaciones diferenciales. Es el método fundamental de superposición sobre el que se basa la física matemática.

Vamos a definir el operador

$$L(u) = a_0 u'(t) + b_0 u(t) + b_1 u(t-w). \tag{3.10}$$

El siguiente teorema es una consecuencia inmediata de la linealidad de dicho operador L(u):

Teorema 3.6 *Si $u_1(t)$ y $u_2(t)$ son dos soluciones de la ecuación $L(u) = 0$, y si c_1 y c_2 son dos constantes, entonces $c_1u_1(t) + c_2u_2(t)$ es también una solución de $L(u) = 0$.*

Demostración.

La demostración del teorema se basa en

$$L(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1L(u_1) + c_2L(u_2)$$

y como hemos supuesto $L(u_1) = 0$ y $L(u_2) = 0$, concluimos que $L(c_1u_1+c_2u_2) = 0$, es decir, $c_1u_1(t) + c_2u_2(t)$ es también una solución de $L(u) = 0$, como queríamos probar.$\blacksquare$

Teorema 3.7 *Si $v(t)$ es solución de la ecuación $L(u) = f$, y $w(t)$ lo es de la ecuación $L(u) = 0$, entonces $v + w$ es también una solución de $L(u) = f$.*

Demostración.

La demostración se basa en que L es lineal. Por tanto,

$$L(v + w) = L(v) + L(w) = f + 0 = f,$$

con lo que $v + w$ es también una solución de $L(u) = f$.$\blacksquare$

Definición 3.8 *Una ecuación de la forma $L(u) = 0$ se denomina ecuación homogénea y una ecuación de la forma $L(u) = f$ se denomina ecuación no homogénea.*

El teorema 3.7 nos dice que la solución de la ecuación no homogénea $L(u) = f$, sujeta a la condición inicial $u = g$ para $t_0 \leq t \leq t_0+w$, se puede obtener sumando las soluciones v y w de dos problemas sencillos:

(1) La solución v de $L(v) = 0$, $v = g$ para $t_0 \leq t \leq t_0 + w$.

(2) La solución w de $L(w) = f$, $w = 0$ para $t_0 \leq t \leq t_0 + w$.

Comencemos por encontrar una solución de (1). El teorema 3.6 sugiere la posibilidad de hallar una solución de la ecuación homogénea como combinación lineal de soluciones simples, de manera similar a la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias. Puesto que

$$L(e^{st}) = (a_0s + b_0 + b_1e^{-ws})e^{st},$$

$u(t) = e^{st}$ es una solución de $L(u) = 0$ para todo t si y solo si s es un cero de la función trascendental

$$h(s) = a_0s + b_0 + b_1e^{-ws}. \tag{3.11}$$

Definición 3.9 *La función $h(s)$ asociada a la ecuación $L(u) = 0$ se denomina función característica de L, la ecuación $h(s) = 0$ se denomina ecuación característica de L, y las raíces de $h(s) = 0$ se denominan raíces características de L.*

Hay una solución de $L(u) = 0$ correspondiente a cada raíz característica y para las distintas raíces corresponden soluciones linealmente independientes. En general, hay infinitas raíces. Además, una raíz múltiple da varias soluciones independientes. En primer lugar, observemos que

$$h'(s) = a_0 - b_1 w e^{-ws},$$

$$h^{(k)}(s) = (-1)^k b_1 w^k e^{-ws}, \qquad k = 2, 3, ... \tag{3.12}$$

Para todo $n \geq 1$, tenemos

$$L(t^n e^{st}) = a_0(t^n s e^{st} + n t^{n-1} e^{st}) + b_0 t^n e^{st} + b_1 (t - w)^n e^{s(t-w)}. \tag{3.13}$$

Si expandimos $(t - w)^n$ por el binomio de Newton

$$(t - w)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} t^{n-k} w^k,$$

y sustituyendo en (3.13),

$$L(t^n e^{st}) = a_0(t^n s e^{st} + n t^{n-1} e^{st}) + b_0 t^n e^{st} + \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} b_1 w^k e^{-ws} \right] t^{n-k} e^{st}.$$

Por (3.12),

$$\begin{aligned} L(t^n e^{st}) = {} & a_0(t^n s e^{st} + n t^{n-1} e^{st}) + b_0 t^n e^{st} + b_1 e^{-ws} t^n e^{st} \\ & - n b_1 w e^{-ws} t^{n-1} e^{st} + \left[\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{(k)}(s) \right] t^{n-k} e^{st}. \end{aligned}$$

Con lo que el coeficiente de $t^n e^{st}$ es

$$a_0 s + b_0 + b_1 e^{-ws} = h(s),$$

y el de $t^{n-1} e^{st}$ es

$$n(a_0 - b_1 w e^{-ws}) = n h'(s).$$

Por tanto, el coeficiente de $t^{n-k} e^{st}$ $(0 \leq k \leq n)$ es

$$\binom{n}{k} h^{(k)}(s),$$

y escribiendo (3.13) de forma más compacta,

$$L(t^n e^{st}) = e^{st} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^{n-k} h^{(k)}(s).$$

Si s es una raíz característica de multiplicidad m, como $h(s) = h'(s) = ... = h^{(m-1)}(s) = 0$ para este valor de s, $L(t^n e^{st}) = 0$ para cualquier entero n si $0 \leq n \leq m-1$. Una raíz s de multiplicidad m da lugar a m funciones, $e^{st}, te^{st}, ..., t^{m-1}e^{st}$ que son soluciones de $L(u) = 0$ para todo número real t. Estas m funciones son linealmente independientes sobre cualquier intervalo. Como la ecuación $L(u) = 0$ es lineal y homogénea, $p(t)e^{st}$ es solución si $p(t)$ es un polinomio de grado menor que $m-1$. De hecho, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.10 *La ecuación*

$$L(u) = a_0 u'(t) + b_0 u(t) + b_1 u(t-w) = 0 \tag{3.14}$$

es satisfecha por

$$\sum p_r(t) e^{s_r t} \tag{3.15}$$

donde s_r es una secuencia de raíces características de L, $p_r(t)$ es un polinomio de grado menor que la multiplicidad de s_r, y la suma es finita ó infinita con condiciones adecuadas para asegurar la convergencia.

Aunque los resultados de esta sección son similares a los de la teoría de ecuaciones diferenciales, hay una diferencia que debemos destacar. Hay, en general, infinitas raíces características de la ecuación diferencial en diferencias, mientras que solo hay un número finito de raíces de una ecuación diferencial pura.

Esto se traduce en un gran aumento de la complejidad de los procesos de solución. Por ejemplo, normalmente se encuentra la solución de una ecuación diferencial que satisface las condiciones iniciales dadas escribiendo la solución general como una combinación lineal de todas las soluciones de forma exponencial y luego evaluando los coeficientes con la ayuda de las condiciones iniciales.

Una vez enunciado este último teorema, nos planteamos las siguientes cuestiones:

- ¿Cómo podemos calcular todas las raíces s_r?
- ¿Toda solución de (3.14) puede ser escrita en la forma (3.15)?
- ¿Cómo podemos calcular todos los coeficientes $p_r(t)$ de forma que se cumplan las condiciones iniciales?

La respuesta a todas estas preguntas es complicada. Por ello nos planteamos encontrar propiedades de las soluciones y expresiones de las mismas de otra manera. Más concretamente, a través de expresiones integrales y de la transformada de Laplace.

3.3. Orden de crecimiento de las soluciones

Para dar respuesta a las cuestiones anteriores, vamos a utilizar la transformada de Laplace. Para ello, es conveniente tener anteriormente una estimación de las soluciones. En esta sección, queremos estudiar dicha estimación a partir del siguiente lema.

Lema 3.11 *Si $w(t)$ es continua positiva y monótona creciente, $u(t) \geq 0$ continua, $v(t) \geq 0$ continua, tales que*

$$u(t) \leq w(t) + \int_a^t u(t_1)v(t_1)dt_1, \quad a \leq t \leq b, \tag{3.16}$$

entonces

$$u(t) \leq w(t) \exp \left[\int_a^t v(t_1)dt_1 \right], \quad a \leq t \leq b. \tag{3.17}$$

Para demostrar este lema vamos a utilizar el resultado siguiente:

Lema 3.12 *Si $c_1 \geq 0$, $u(t) \geq 0$, $v(t) \geq 0$, la desigualdad*

$$u(t) \leq c_1 + \int_0^t u(s)v(s)ds \tag{3.18}$$

implica que

$$u(t) \leq c_1 \exp \left[\int_0^t v(s)ds \right]. \tag{3.19}$$

Demostración del lema 3.12.

Multiplicando (3.18) por $v(t)$, tenemos

$$\frac{u(t)v(t)}{c_1 + \int_0^t u(s)v(s)ds} \leq v(t).$$

Integrando ambos lados entre $[0, t]$, se tiene

$$\log \left[c_1 + \int_0^t u(s)v(s)ds \right] \Big|_0^t = \log \left[c_1 + \int_0^t u(s)v(s)ds \right] - \log c_1 \leq \int_0^t v(s)ds,$$

y tomado exponenciales a ambos lados de la desigualdad

$$c_1 + \int_0^t u(t)v(t)dt \leq c_1 \exp \left[\int_0^t v(s)ds \right].$$

Tomando esta última desigualdad junto a (3.18), obtenemos (3.19).■

Demostración del lema 3.11.

Como w es monótona creciente,

$$\frac{u(t)}{w(t)} \leq 1 + \int_a^t \frac{u(t_1)v(t_1)}{w(t)} dt_1 \leq 1 + \int_a^t \frac{u(t_1)v(t_1)}{w(t_1)} dt_1.$$

Como $u(t) \geq 0$ y $w(t) \geq 0$, entonces $\frac{u(t)}{w(t)} \geq 0$ y por hipótesis v(t)$\geq$ 0 por lo que estamos en condiciones de aplicar el lema 3.12 a estas dos funciones y tenemos

$$\frac{u(t)}{w(t)} \leq \exp\left[\int_a^t v(t_1)dt_1\right],$$

que es equivalente a

$$u(t) \leq w(t) \exp\left[\int_a^t v(t_1)dt_1\right],$$

que es lo que queríamos probar.■

Teorema 3.13 *Sea u(t) una solución de la ecuación*

$$L(u) = a_0 u'(t) + b_0 u(t) + b_1 u(t-w) = f(t), \tag{3.20}$$

de clase $\mathscr{C}^1$ *en* $[0, \infty)$. *Supongamos que* f *es de clase* $\mathscr{C}^0$ *en* $[0, \infty)$ *y que*

$$|f(t)| \leq c_1 e^{c_2 t}, \quad t \geq 0, \tag{3.21}$$

donde c_1 *y* c_2 *son constantes positivas. Sea*

$$m = max_{0 \leq t \leq w} |u(t)|. \tag{3.22}$$

Entonces existen constantes positivas c_3 *y* c_4, *solo dependientes de* c_2 *y de los coeficientes de (3.20), tales que*

$$|u(t)| \leq c_3(c_1 + m)e^{c_4 t}, \quad t \geq 0. \tag{3.23}$$

Demostración.

Integrando en la ecuación (3.20), tenemos

$$a_0(u(t) - u(w)) = \int_w^t f(t_1)dt_1 - b_0 \int_w^t u(t_1)dt_1 - b_1 \int_w^t u(t_1 - w)dt_1, \quad t \geq w.$$

Por (3.21) y (3.22) se tiene que

$$|a_0 u(t)| \leq |a_0| m + c_1 \int_w^t e^{c_2 t_1} dt_1 + |b_0| \int_0^t |u(t_1)|dt_1 + |b_1| \int_0^{t-w} |u(t_1)|dt_1, \quad t \geq w,$$

que a su vez implica que

$$|a_0 u(t)| \leq |a_0| m + \frac{c_1}{c_2} e^{c_2 t} + (|b_0| + |b_1|) \int_0^t |u(t_1)| dt_1, \quad t \geq w,$$

donde se ha utilizado para la última desigualdad que

$$\int_w^t e^{c_2 t_1} dt_1 = \frac{1}{c_2} e^{c_2(t-w)} \leq \frac{1}{c_2} e^{c_2 t},$$

por ser $w > 0$ y que

$$\int_0^{t-w} |u(t_1)| dt_1 \leq \int_0^t |u(t_1)| dt_1.$$

Como $a_0 \neq 0$, dividiendo entre $|a_0|$,

$$|u(t)| \leq m + \frac{c_1}{c_2 |a_0|} e^{c_2 t} + \frac{|b_0| + |b_1|}{|a_0|} \int_0^t |u(t_1)| dt_1, \quad t \geq w.$$

Definiendo las constantes

$$c_3' = max\left(1, \frac{1}{c_2 |a_0|}\right), c_4 = \frac{|b_0| + |b_1|}{|a_0|},$$

se tiene que

$$|u(t)| \leq c_3'(m + c_1) e^{c_2 t} + c_4 \int_0^t |u(t_1)| dt_1, \quad t \geq w. \tag{3.24}$$

Como $|u(t)| \leq m \leq c_3' m e^{c_2 t}, 0 \leq t \leq w$, (3.24) se cumple de hecho para $t \geq 0$. Del lema 3.11 se sigue entonces que

$$|u(t)| \leq c_3'(c_1 + m) e^{(c_2 + c_4 t)}, \quad t \geq 0,$$

con lo que se cumple (3.23) para $c_3 = c_3' e^{c_2}$. ■

3.4. Resolución a través de la transformada de Laplace

Se aplica frecuentemente para obtener soluciones de las ecuaciones diferenciales en diferencias con coeficientes constantes. Veámoslo mediante un ejemplo. Consideramos la ecuación

$$u'(t) = u(t-1). \tag{3.25}$$

Multiplicamos esta ecuación por e^{-st} e integramos entre 1 y ∞

$$\int_1^\infty u'(t) e^{-st} dt = \int_1^\infty u(t-1) e^{-st} dt. \tag{3.26}$$

Suponiendo que $u(t)e^{-st} \to 0$ cuando $t \to \infty$, se tiene que integrando por partes el primer término de la igualdad,

$$\int_1^\infty u'(t)e^{-st}dt = -u(1)e^{-s} + s\int_1^\infty u(t)e^{-st}dt.$$

En cuanto al segundo término de la igualdad, realizando el cambio de variable $t' = t - 1$,

$$\int_1^\infty u(t-1)e^{-st}dt = \int_0^\infty u(t')e^{-s(t'+1)}dt' = e^{-s}\left[\int_0^1 u(t)e^{-st}dt + \int_1^\infty u(t)e^{-st}dt\right].$$

La ecuación (3.26) se convierte entonces en

$$(s - e^{-s})\int_1^\infty u(t)e^{-st}dt = u(1)e^{-s} + e^{-s}\int_0^1 u(t)e^{-st}dt.$$

Suponiendo que $(s - e^{-s}) \neq 0$, se sigue que

$$\int_1^\infty u(t)e^{-st}dt = \frac{u(1)e^{-s} + e^{-s}\int_0^1 u(t)e^{-st}dt}{s - e^{-s}},$$

ecuación que expresa la transformada de la función que vale u en $(1, \infty)$ y 0 en el resto en términos de los valores que toma u en el intervalo $0 \leq t \leq 1$. Suponiendo que podemos aplicar la fórmula de inversión de la transformada de Laplace, tenemos para un c adecuado

$$u(t) = \int_{(c)} \frac{u(1)e^{-s} + e^{-s}\int_0^1 u(t)e^{-st}dt}{s - e^{-s}} e^{st}ds, \quad t > 1. \tag{3.27}$$

Para ser más explícitos en las hipótesis y tratar a su vez el caso general, consideramos el siguiente lema, probado en el capítulo 12 de [3].

Lema 3.14 *Las raíces de*

$$h(s) = a_0 s + b_0 + b_1 e^{-ws} = 0$$

son tales que existe una constante real c tal que $Re\ (s) < c$.

Usando este lema, probemos el siguiente teorema

Teorema 3.15 *Sea u(t) una función continua solución de*

$$L(u) = a_0 u'(t) + b_0 u(t) + b_1 u(t - w) = f(t), \quad t > w, \quad a_0 \neq 0, \tag{3.28}$$

que satisface la condición inicial

$$u(t) = g(t), \quad 0 \leq t \leq w. \tag{3.29}$$

Supongamos que g es de clase $\mathscr{C}^0[0,w]$, *que* f *es de clase* $\mathscr{C}^0[0,\infty)$, *y que*

$$|f(t)| \le c_1 e^{c_2 t}, \quad t \ge 0, \quad c_1 > 0, \quad c_2 > 0. \tag{3.30}$$

Entonces, para c suficientemente grande,

$$u(t) = \int_{(c)} e^{ts} h^{-1}(s)[p_0(s) + q(s)]ds, \quad t > w, \tag{3.31}$$

donde $p_0(s)$ *y* $q(s)$ *son las funciones*

$$p_0(s) = a_0 g(w) e^{-ws} - b_1 e^{-ws} \int_0^w g(t_1) e^{-st_1} dt_1, \tag{3.32}$$

$$q(s) = \int_w^\infty f(t_1) e^{-st_1} dt_1. \tag{3.33}$$

Además, si g es de clase $\mathscr{C}^1[0,w]$.

$$u(t) = \int_{(c)} e^{ts} h^{-1}(s)[p(s) + q(s)]ds, \quad t > 0, \tag{3.34}$$

donde

$$p(s) = a_0 g(w) e^{-ws} + (a_0 s + b_0) \int_0^w g(t_1) e^{-st_1} dt_1. \tag{3.35}$$

Demostración.

Por la hipótesis (3.30), el hecho de que g esté acotada en $(0,w]$ y aplicando el teorema 3.13, existen unas constantes positivas c_3 y c_4 tales que

$$|u(t)| \le c_3 e^{c_4 t}, \quad t \ge 0, \tag{3.36}$$

de donde se deduce que las integrales

$$\int_0^\infty u(t) e^{-st} dt, \quad \int_w^\infty u(t-w) e^{-st} dt, \quad \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

convergen para cualquier número complejo s cuya parte real cumple $\text{Re}\,(s) > max\,\{c_2, c_4\}$. Por el teorema 3.1, u es de clase $\mathscr{C}^1(w,\infty)$. Integrando entonces por partes entre w y t' y teniendo en cuenta (3.29),

$$\int_w^{t'} u'(t) e^{-st} dt = u(t) e^{-st}\Big|_w^{t'} + s \int_w^{t'} u(t) e^{-st} dt = u(t') e^{-st'} - g(w) e^{-ws} + s \int_w^{t'} u(t) e^{-st} dt.$$

Si $\text{Re}\,(s) > c_4, u(t') e^{-st'}$ tiende a cero cuando $t' \to \infty$ por (3.36). Además, la parte derecha de la igualdad anterior converge si $t' \to \infty$. Por tanto, la parte izquierda también converge y podemos escribir

$$\int_w^\infty u'(t) e^{-st} dt = -g(w) e^{-ws} + s \int_w^\infty u(t) e^{-st} dt. \tag{3.37}$$

Por otro lado, realizando el cambio de variable $t' = t - w$ en la siguiente integral y utilizando (3.29),

$$\int_w^\infty u(t-w)e^{-st}dt = e^{-ws}\left[\int_0^w g(t)e^{-st}dt + \int_w^\infty u(t)e^{-st}dt\right]. \tag{3.38}$$

Además, multiplicando (3.28) por e^{-st} e integrando entre w y ∞, se tiene

$$a_0\int_w^\infty u'(t)e^{-st}dt + b_0\int_w^\infty u(t)e^{-st}dt + b_1\int_w^\infty u(t-w)e^{-st}dt = \int_w^\infty f(t)e^{-st}dt. \tag{3.39}$$

Sustituyendo (3.37) y (3.38) en la expresión anterior

$$\begin{aligned}a_0&\left[-g(w)e^{-ws} + s\int_w^\infty u(t)e^{-st}dt\right] + b_0\int_w^\infty u(t)e^{-st}dt\\ &+ b_1e^{-ws}\left[\int_0^w g(t)e^{-st}dt + \int_w^\infty u(t)e^{-st}dt\right] = \int_w^\infty f(t)e^{-st}dt.\end{aligned}$$

De aquí, agrupando términos con la misma expresión integral,

$$\begin{aligned}&(a_0s + b_0 + b_1e^{-ws})\int_w^\infty u(t)e^{-st}dt\\ &= a_0g(w)e^{-ws} - b_1e^{-ws}\int_0^w g(t)e^{-st}dt + \int_w^\infty f(t)e^{-st}dt.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (3.11), (3.32) y (3.33), podemos reescribir la ecuación anterior como

$$h(s)\int_w^\infty u(t)e^{-st}dt = p_0(s) + q(s), \text{ para } \mathrm{Re(s)} > c_4.$$

Por el lema 3.14, $h(s) \neq 0$ si $\mathrm{Re}\,(s) > c'$ con c'suficientemente grande, con lo cual para la constante c mayor que c' y c_4,

$$\int_w^\infty u(t)e^{-st}dt = h^{-1}(s)[p_0(s) + q(s)], \text{ para } \mathrm{Re(s)} > c.$$

Notemos que se satisfacen las hipótesis del teorema 2.4 para la función que vale 0 en $(0, w)$ y u en (w, ∞), y como por el teorema 3.1, u es de clase $\mathscr{C}^1$ en (w, ∞) podemos emplear la fórmula de inversión de la transformada de Laplace y obtenemos (3.31).

Por otro lado, reescribimos (3.37) y (3.38) como

$$\int_w^\infty u'(t)e^{-st}dt = -g(w)e^{-ws} + s\left[\int_0^\infty u(t)e^{-st}dt - \int_0^w g(t)e^{-st}dt\right], \tag{3.40}$$

$$\int_w^\infty u(t-w)e^{-st}dt = e^{-ws}\int_0^\infty u(t)e^{-st}dt, \tag{3.41}$$

y (3.39) como

$$a_0 \int_w^\infty u'(t)e^{-st}dt + b_0\left[\int_0^\infty u(t)e^{-st}dt - \int_0^w u(t)e^{-st}dt\right] \\ + b_1 \int_w^\infty u(t-w)e^{-st}dt = \int_w^\infty f(t)e^{-st}dt.$$

Sustituyendo (3.40) y (2.51) en la ecuación anterior,

$$a_0\left(-g(w)e^{-ws} + s\left[\int_0^\infty u(t)e^{-st}dt - \int_0^w g(t)e^{-st}dt\right]\right) \\ + b_0\left[\int_0^\infty u(t)e^{-st}dt - \int_0^w u(t)e^{-st}dt\right] + b_1\left[e^{-ws}\int_0^\infty u(t)e^{-st}dt\right] = \int_w^\infty f(t)e^{-st}dt.$$

Reagrupando entonces términos correspondientes a la misma expresión integral

$$(a_0 s + b_0 + b_1 e^{-ws})\int_0^\infty u(t)e^{-st}dt = \int_w^\infty f(t)e^{-st}dt \\ + a_0 g(w)e^{-ws} + a_0 s\int_0^w g(t)e^{-st}dt + b_0\int_0^w u(t)e^{-st}dt.$$

Teniendo en cuenta (3.11), (3.33) y (3.35), llegamos a

$$\int_0^\infty u(t)e^{-st}dt = h^{-1}(s)[p(s)+q(s)], \text{ para } \text{ Re } (s) > c.$$

Si g(t) es de clase $\mathscr{C}^1$ en $[0,w]$, u(t) es de clase $\mathscr{C}^1$ tanto en $[0,w]$ como en $[w,\infty)$. Por tanto, por la fórmula de la inversión (2.12) obtenemos (3.34) para todo t> 0. En $t=w$, en la fórmula (3.34), el miembro de la izquierda sería $[u_+(w)+u_-(w)]/2$ por el teorema 2.5. Por la continuidad de u en w dada por el teorema 3.1, se tendría el resultado.■

3.5. Resolución de una ecuación diferencial a través de la transformada de Laplace y equivalencia con la expresión clásica en términos de una integral definida

El método de la transformada de Laplace que en la sección anterior se aplicó para resolver una ecuación diferencial en diferencias puede aplicarse también para resolver la siguiente ecuación diferencial ligada a una cierta condición inicial

$$a_0 u'(t) + b_0 u(t) = f(t), \quad t > 0, \quad u(0) = u_0. \tag{3.42}$$

Tomando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación (3.42) y aplicando la proposición 2.1, tenemos

$$a_0(s\mathcal{L}((u(t))(s) - u(0)) + b_0\mathcal{L}(u(t))(s) = \mathcal{L}(f(t))(s).$$

Si $U(s) = \mathcal{L}(u(t))(s), F(s) = \mathcal{L}(f(t))(s)$, se tiene la ecuación algebraica

$$(a_0s + b_0)U(s) = F(s) + a_0u_0,$$

luego, siempre que $a_0s + b_0 \neq 0$,

$$U(s) = \frac{F(s) + a_0u_0}{a_0s + b_0},$$

que es equivalente a

$$\int_0^\infty u(t)e^{-st}dt = \frac{a_0u_0 + \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt}{a_0s + b_0},$$

y empleando la fórmula de inversión de la transformada de Laplace tenemos que siempre que u satisfaga las hipótesis del teorema 2.4

$$u(t) = \int_{(c)} \left[\frac{a_0u_0 + \int_0^\infty f(t_1)e^{-st_1}dt_1}{a_0s + b_0}\right] e^{st}ds, \quad t > 0, \tag{3.43}$$

para c suficientemente grande.

Por otro lado, de forma general, la solución del problema de valores iniciales (3.42) en la forma de una integral definida es

$$u(t) = u_0 \exp\left(\frac{-b_0t}{a_0}\right) + \frac{1}{a_0}\int_0^t f(s) \exp\left(\frac{-b_0(t-s)}{a_0}\right) ds, \quad t \geq 0. \tag{3.44}$$

Ambas soluciones, (3.43) y (3.44), son equivalentes. Dependiendo del objetivo de estudio, en unos casos convendrá trabajar con una solución u otra. Por ejemplo, a partir de (3.44) se observa de forma sencilla que $u(t)$ depende de los valores de $f(t_1)$ solo en $0 \leq t_1 \leq t$, propiedad que no se identifica tan fácilmente en (3.43).

Escribimos (3.43) en la forma

$$u(t) = u_0 \int_{(c)} \frac{a_0e^{ts}}{a_0s + b_0} + \int_{(c)} \left[\frac{e^{st}\int_0^\infty f(t_1)e^{-st_1}dt_1}{a_0s + b_0}\right] ds. \tag{3.45}$$

Para ver que el primer término de (3.45) coincide con el primer término de (3.44), notemos que el aplicar la transformada de Laplace a

$$\begin{aligned} a_0x'(t) + b_0x(t) =& 0, \quad t > 0, \\ u(0) =& u_0, \end{aligned}$$

nos lleva a la ecuación algebraica

$$(a_0 s + b_0)X(s) = a_0 u_0,$$

donde $X(s) = \mathcal{L}(x(t))(s)$ De aquí, para $s \neq -b_0/a_0$

$$X(s) = \frac{a_0 u_0}{a_0 s + b_0},$$

que es equivalente a

$$\int_0^\infty x(t)e^{-st}dt = \frac{a_0 u_0}{a_0 s + b_0},$$

y empleando la fórmula de inversión de la transformada de Laplace (2.13), que se puede aplicar porque sabemos que $u(t) = u_0 \exp\left(\frac{-b_0 t}{a_0}\right)$ (para $t > 0$) cumple las hipótesis del teorema 2.4 para $a > -\frac{b_0}{a_0}$, tenemos

$$x(t) = \int_{(c)} \frac{a_0 u_0}{a_0 s + b_0} e^{st} ds, \quad t > 0, \quad c > -\frac{b_0}{a_0}.$$

Igualando las dos expresiones válidas para x(t), se sigue que

$$\int_{(c)} \frac{a_0}{a_0 s + b_0} e^{st} ds = \exp\left(\frac{-b_0 t}{a_0}\right), \quad t > 0, \quad c > -\frac{b_0}{a_0}.$$

Veamos ahora qué ocurre con el segundo término de (3.45). Como la transformada de Laplace de $\exp(-b_0 t/a_0)$ es $a_0/(a_0 s + b_0)$ y $\int_0^\infty f(t_1)\exp(-st_1)dt_1$ es la transformada de $f(t)$, se sigue del teorema 2.6 que

$$\frac{a_0 \int_0^\infty f(t_1)e^{-st_1}dt_1}{a_0 s + b_0}$$

es la transformada de Laplace de la función

$$\int_0^t f(t_1)\exp\left[\frac{-b_0(t-t_1)}{a_0}\right] dt_1.$$

De este modo,

$$\int_{(c)} \frac{e^{st}\int_0^\infty f(t_1)e^{-st_1}dt_1}{a_0 s + b_0} ds = a_0^{-1} \int_0^t f(t_1)\exp\left[\frac{-b_0(t-t_1)}{a_0}\right] dt_1,$$

y se deduce (3.44) a partir de (3.43).

3.6. Solución de una ecuación diferencial en diferencias en la forma de una integral definida

Veamos ahora que, de manera análoga, la solución obtenida en la sección 2.7 a través de la transformada de Laplace, puede expresarse en función de una integral definida. Comenzamos definiendo una función cuya transformada es $h^{-1}(s)$, con h(s) la función del lema 3.14.

Definición 3.16 *Sea k(t) la única función que cumple las siguientes propiedades:*

- *k(t)=0,* $\quad$ *t<0.*
- *k(0)=*a_0^{-1}*;*
- *k(t) es de clase* $\mathscr{C}^0$ *en* $[0,\infty)$*;*
- *k(t) satisface la ecuación*

$$a_0k'(t) + b_0k(t) + b_1k(t-w) = 0, \quad t > 0. \tag{3.46}$$

La existencia y unicidad de $k(t)$ no se deduce directamente del teorema 3.1 ya que los valores iniciales no definen una función continua en $[-w,0]$, pero se sigue de la nota 3.3. Además, k(t) no tiene derivada en $t = w$ pero k es de clase $\mathscr{C}^1$ en $(0,w)$ y en (w,∞) porque ni el término fuente f(t)=0 ni f' tiene discontinuidades para $t > 0$ ni k las tiene para $t > 0$.

Por el teorema 3.13, deducimos que $k(t)$ está acotada por una exponencial de la forma Me^{ct} y, como consecuencia, la integral de Laplace de los términos de (3.46) convergen para s tal que $\operatorname{Re}(s) > c$. Si multiplicamos la ecuación (3.46) por e^{-st} e integramos con respecto a t entre 0 e ∞, obtenemos

$$\int_0^\infty a_0k'(t)e^{-st}dt + \int_0^\infty b_0k(t)e^{-st}dt + \int_0^\infty b_1k(t-w)e^{-st}dt = 0. \tag{3.47}$$

Integrando por partes la primera integral y utilizando $k(0) = a_0^{-1}$,

$$\int_0^\infty a_0k'(t)e^{-st}dt = a_0\left[e^{-st}k(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty k(t)e^{-st}dt\right] \tag{3.48}$$

$$= a_0\left[-k(0) + s\int_0^\infty k(t)e^{-st}dt\right] = -1 + a_0s\int_0^\infty k(t)e^{-st}dt. \tag{3.49}$$

En cuanto a la última integral de (3.47) realizando el cambio de variable $t' = t - w$ y utilizando que $k(t) = 0$, para $t < 0$, se tiene

$$\int_0^\infty k(t-w)e^{-st}dt = \int_{-w}^\infty k(t')e^{-s(t'+w)}dt' = e^{-ws}\int_0^\infty k(t)e^{-st}dt. \tag{3.50}$$

Sustituyendo entonces (3.48) y (3.50) en (3.47), tenemos

$$(a_0 s + b_0 + b_1 e^{-ws})\int_0^\infty k(t)e^{-st}dt = 1,$$

con lo que teniendo en cuenta la definición de h(s) en (3.11)

$$\int_0^\infty k(t)e^{-st}dt = h^{-1}(s), \text{ si } \mathrm{Re}(s) > c. \tag{3.51}$$

Como la función $k(t)$ satisface las hipótesis del teorema 2.5 para $t > 0$, podemos aplicar la fórmula de inversión de Laplace, con lo que

$$k(t) = \int_{(c)} h^{-1}(s)e^{st}ds, \quad t > 0.$$

Vamos a utilizar el teorema de convolución para reescribir las ecuaciones (3.31) y (3.34) en términos de integrales reales definidas. Para ello, denotamos por e(t) a la función definida por

$$e(t) = 0, \quad t < 0.$$
$$e(t) = 1, \quad t > 0.$$

Para cualquier constante c, y cualquier función f(t), se tiene entonces que

$$f(t)e(t-c) = 0, \quad t < c.$$
$$f(t)e(t-c) = f(t), \quad t > c.$$

Por (3.33),

$$q(s) = \int_0^\infty f(t_1)e(t_1 - w)e^{-st_1}dt_1.$$

Por tanto, $q(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)e(t-w)$. Como $h^{-1}(s)$ es la transformada de $k(t)$, por el teorema 2.6, la función $q(s)h^{-1}(s)$ es la transformada de la función

$$\int_0^t f(t_1)e(t_1 - w)k(t - t_1)dt_1.$$

Como esta función está acotada por una función de tipo exponencial, y además es derivable para $t > w$ por ser e continua para $t_1 > w$ y k derivable salvo en un punto, se puede aplicar el teorema de inversión 2.5, de donde se tiene que

$$\int_{(c)} e^{st}h^{-1}(s)q(s)ds = \int_w^t f(t_1)k(t - t_1)dt_1, \quad \text{para } t > w. \tag{3.52}$$

Por (3.51) y teniendo en cuenta que $k(t) = 0$, para $t < 0$

$$h^{-1}(s)e^{-ws} = \int_0^\infty k(t)e^{-s(t+w)}dt = \int_0^\infty k(t-w)e^{-st}dt, \text{ Res } (s) > c, \qquad (3.53)$$

de donde deducimos que la transformada de $k(t-w)$ es $h^{-1}(s)e^{-ws}$. Como $k(t-w)$ satisface las hipótesis del teorema 2.6 para $t > 0$, se puede aplicar la fórmula de inversión y

$$\int_{(c)} e^{ts}h^{-1}e^{-ws}ds = k(t-w), \quad t > 0. \qquad (3.54)$$

Finalmente, la transformada de $g(t)e(w-t)$ es

$$\int_0^\infty g(t_1)e(w-t_1)e^{-st_1}dt_1 = \int_0^w g(t_1)e^{-st_1}dt_1. \qquad (3.55)$$

Como la transformada de $k(t-w)$ es $h^{-1}(s)e^{-ws}$ por (3.53) por el teorema de convolución, la función

$$h^{-1}(s)e^{-ws}\int_0^w g(t_1)e^{-st_1}dt_1$$

es la transformada de

$$\int_0^t g(t_1)e(w-t_1)k(t-t_1-w)dt_1 = \int_0^w g(t_1)k(t-t_1-w)dt_1, \quad t > 0.$$

Como dicha función satisface las hipótesis del teorema (2.4), se puede aplicar la fórmula de inversión y

$$\int_0^w g(t_1)k(t-t_1-w)dt_1 = \int_{(c)} e^{ts}\left[h^{-1}(s)e^{-ws}\int_0^w g(t_1)e^{-st_1}dt_1\right]ds, \quad t > w. \qquad (3.56)$$

Combinando (3.51) y (3.56), y teniendo en cuenta (3.32),

$$\begin{aligned}\int_{(c)} e^{ts}h^{-1}(s)p_0(s)ds =& \int_{(c)} e^{ts}h^{-1}(s)\left[a_0g(w)e^{-ws} - b_1e^{-ws}\int_0^w g(t_1)e^{-st_1}dt_1\right]ds \\ =& a_0g(w)k(t-w) - b_1\int_0^w g(t_1)k(t-t_1-w)dt_1, \quad t > w. \end{aligned} \qquad (3.57)$$

Por otro lado, integrando por partes dos veces la expresión (3.35),

$$\begin{aligned} p(s) &= a_0g(w)e^{-ws} + (a_0s+b_0)\left[-g(w)e^{-ws}\frac{1}{s} + g(0)\frac{1}{s} + \int_0^w \frac{1}{s}e^{-st_1}g'(t_1)dt_1\right] \\ &= a_0g(0) + \int_0^w a_0g'(t_1)e^{-st_1}dt_1 + b_0g(0)\frac{1}{s} - b_0g(w)e^{-ws}\frac{1}{s} + \frac{b_0}{s}\int_0^w e^{-st_1}g'(t_1)dt_1 \\ &= a_0g(0) + \int_0^w a_0g'(t_1)e^{-st_1}dt_1 + b_0g(0)\frac{1}{s} - b_0g(w)e^{-ws}\frac{1}{s} \\ &\quad + \frac{b_0}{s}\left[e^{-sw}g(w) - g(0) + s\int_0^w e^{-st_1}g(t_1dt_1\right] \\ &= a_0g(0) + \int_0^w [a_0g'(t_1) + b_0g(t_1)]e^{-st_1}dt_1. \end{aligned}$$

De aquí, utilizando (3.51) y (3.54) en la segunda igualdad,

$$\begin{aligned}\int_{(c)} e^{ts}h^{-1}(s)p(s)ds =& \int_{(c)} e^{ts}h^{-1}(s)\left[a_0g(0) + \int_0^w [a_0g'(t_1) + b_0g(t_1)]e^{-st_1}dt_1\right] ds\\ =& a_0g(0)k(t) + \int_0^w [a_0g'(t_1) + b_0g(t_1)]k(t-t_1)dt_1, \quad t > 0.\end{aligned} \tag{3.58}$$

Por el teorema 3.15 tenemos que si g es de clase $\mathcal{C}^0[0,w]$ y f es de clase $\mathcal{C}^0[0,\infty)$ y c es suficientemente grande, sustituyendo (3.52) y (3.57) en la expresión (3.31),

$$u(t) = a_0g(w)k(t-w) - b_1\int_0^w g(t_1)k(t-t_1-w)dt_1 + \int_w^t f(t_1)k(t-t_1)dt_1, \text{ para } t > w.$$

Si g es de clase $\mathcal{C}^1[0,w]$, entonces para $t > 0$, sustituyendo (3.52) y (3.58) en (3.34),

$$u(t) = a_0g(0)k(t) + \int_0^w [a_0g'(t_1) + b_0g(t_1)]k(t-t_1)dt_1 + \int_w^t f(t_1)k(t-t_1)dt_1, \quad t > 0.$$

Por tanto, se ha demostrado el siguiente teorema.

Teorema 3.17 *Sea u(t) una función continua solución de*

$$L(u) = a_0u'(t) + b_0u(t) + b_1u(t-w) = f(t), \quad t > w, \quad a_0 \neq 0, \tag{3.59}$$

que satisface la condición inicial

$$u(t) = g(t), \quad 0 \leq t \leq w.$$

Si g es de clase $\mathcal{C}^0[0,w]$ y f es de clase $\mathcal{C}^0[0,\infty)$, entonces para $t > w$,

$$u(t) = a_0g(w)k(t-w) - b_1\int_0^w g(t_1)k(t-t_1-w)dt_1 + \int_w^t f(t_1)k(t-t_1)dt_1. \tag{3.60}$$

Si además g es de clase $\mathcal{C}^1[0,w]$, ocurre que, para $t > 0$,

$$u(t) = a_0g(0)k(t) + \int_0^w [a_0g'(t_1) + b_0g(t_1)]k(t-t_1)dt_1 + \int_w^t f(t_1)k(t-t_1)dt_1, \quad t > 0. \tag{3.61}$$

Nota 3.18 *En este teorema, hemos omitido la hipótesis (3.30) del teorema 3.15 ya que puede comprobarse, sustituyendo directamente, que la función u dada por las expresiones anteriores satisface la ecuación requerida.*

Si g es de clase $\mathcal{C}^0[0,w]$ y f es de clase $\mathcal{C}^0[0,\infty)$, entonces para $t > w$, la expresión correspondiente a u es la dada por (3.60).

Aplicando la derivación bajo el signo integral, tenemos

$$u'(t) = a_0 g(w)k'(t-w) - b_1 \int_0^w g(t_1)k'(t-t_1-w)dt_1 + \left[f(t)k(0) + \int_w^t f(t_1)k'(t-t_1)dt_1 \right].$$

Por otra parte,

$$u(t-w) = a_0 g(w)k(t-2w) - b_1 \int_0^w g(t_1)k(t-t_1-2w)dt_1 + \int_w^{t-w} f(t_1)k(t-t_1)dt_1.$$

Veamos si se satisface la ecuación (3.59) sustituyendo las expresiones anteriores

$$\begin{aligned}
& a_0 u'(t) + b_0 u(t) + b_1 u(t-w) \\
&= a_0 \left[a_0 g(w)k'(t-w) - b_1 \int_0^w g(t_1)k'(t-t_1-w)dt_1 \right] \\
&\quad + a_0 \left[f(t)k(0) + \int_w^t f(t_1)k'(t-t_1)dt_1 \right] \\
&\quad + b_0 \left[a_0 g(w)k(t-w) - b_1 \int_0^w g(t_1)k(t-t_1-w)dt_1 + \int_w^t f(t_1)k(t-t_1)dt_1 \right] \\
&\quad + b_1 \left[a_0 g(w)k'(t-2w) - b_1 \int_0^w g(t_1)k(t-t_1-2w)dt_1 + \int_w^{t-w} f(t_1)k(t-t_1)dt_1 \right] \\
&= a_0 g(w) \left[a_0 k'(t-w) + b_0 k(t-w) + b_1 k(t-2w) \right] \\
&\quad - b_1 \left[\int_0^w g(t_1) \left[a_0 k'(t-t_1-w) + b_0 k(t-t_1-w) + b_1 k(t-t_1-2w) \right] dt_1 \right] \\
&\quad + a_0 f(t) \frac{1}{a_0} + \int_w^t f(t_1) \left[a_0 k'(t-t_1) + b_0 k(t-t_1) + b_1 k(t-t_1-w) \right] dt_1 \\
&= f(t),
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos aplicado (3.46).

Si además g es de clase $\mathcal{C}^1[0,w]$ ocurre que, para $t > 0$, la expresión dada para u es (3.61).

Aplicando la derivación bajo el signo integral,

$$u'(t) = a_0 g(0)k'(t) + \int_0^w [a_0 g'(t_1) + b_0 g(t_1)]k'(t-t_1)dt_1 + \int_w^t f(t_1)k'(t-t_1)dt_1.$$

Por otra parte

$$u(t-w) = a_0 g(0)k'(t-w) + \int_0^w [a_0 g'(t_1) + b_0 g(t_1)]k'(t-t_1-w)dt_1 + \int_w^t f(t_1)k'(t-t_1-w)dt_1.$$

Veamos si se satisface la ecuación (3.59) sustituyendo las expresiones anteriores

$$
\begin{aligned}
&a_0u'(t) + b_0u(t) + b_1u(t-w) \\
&= a_0\left[a_0g(0)k'(t) + \int_0^w [a_0g'(t_1) + b_0g(t_1)]k'(t-t_1)dt_1 + \int_w^t f(t_1)k'(t-t_1)dt_1\right] \\
&\quad + b_0\left[a_0g(0)k(t) + \int_0^w [a_0g'(t_1) + b_0g(t_1)]k(t-t_1)dt_1 + \int_w^t f(t_1)k(t-t_1)dt_1\right] \\
&\quad + b_1\left[a_0g(0)k'(t-w) + \int_0^w [a_0g'(t_1) + b_0g(t_1)]k'(t-t_1-w)dt_1\right] \\
&\quad + b_1\left[\int_w^t f(t_1)k'(t-t_1-w)dt_1\right] \\
&= a_0g(0)\left[a_0k'(t) + b_0k(t) + b_1k(t-w)\right] \\
&\quad + \int_0^w [a_0g'(t_1) + b_0g(t_1)]\left[a_0k'(t-t_1) + b_0k(t-t_1) + b_1k(t-t_1-w)dt_1\right] \\
&\quad + f(t) + \int_w^t \left[a_0k'(t-t_1) + b_0k(t-t_1) + b_1k(t-t_1-w)\right]dt_1 \\
&= f(t),
\end{aligned}
$$

donde en la última igualdad hemos aplicado (3.46) de nuevo.

Bibliografía

[1] Alonso Mallo, I. *Apuntes de la asignatura de Ecuaciones Diferenciales*, Universidad de Valladolid, 2016.

[2] Ash, R.B. & Novinger, W.P. *Complex Variables*, Lancet.

[3] Bellman, R. & Cooke.,K. *Differential-Difference Equations*, 1963.

[4] Driver, R.D. *Ordinary and Delay Differential Equations*, Texts in Applied Mathematical Sciences, Springer, 1st edition, 1977.

[5] Galindo, F., Gómez, J., Sanz, J., Tristán, L.A. *Guía Práctica de Variable Compleja y Aplicaciones.* Universidad de León, Universidad de Valladolid, 2019.

[6] Logan, J.D. *Applied Partial Differential Equations*, Springer, 3rd edition, 2015.