



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

**Fundamentos geométricos de los sistemas de información
geográfica**

Autor: Miguel de Santiago Gilsanz

Tutores: José Ignacio Farrán Martín, Antonio Campillo López

Resumen

Resumen

Los Sistemas de Información Geográfica o SIG son bases de datos que se usan en multitud de contextos para asociar información geográfica a una gran variedad de datos (sanitarios, meteorológicos, logísticos). En este documento se hará una revisión de algunas de las técnicas y conceptos matemáticos subyacentes en dichos sistemas como son el sistema de coordenadas geográfico y las proyecciones cartográficas.

Palabras claves

Sistema de Información Geográfica, teorema *Egregium* de Gauss, primera forma fundamental, curvatura de Gauss, proyección cartográfica, superficie regular.

Agradecimientos

A mi familia, en especial a mis padres y mi hermana, por toda su ayuda y por apoyarme siempre en todas mis decisiones.

A Eva, por formar parte de mis éxitos y por animarme tras mis derrotas.

A mis amigos, por todos los buenos momentos que han hecho que estos años se pasaran volando y por su inestimable ayuda.

A mis tutores, por darme la posibilidad de realizar este proyecto y por ayudarme durante el mismo.

A todos vosotros, GRACIAS.

Índice general

Introducción	1
Objetivos	2
Organización del documento	3
Conceptos básicos de álgebra y cálculo	3
1. Las superficies regulares	7
1.1. Superficies regulares en \mathbb{R}^3	8
1.2. Superficies parametrizadas	11
1.3. Primera forma fundamental	14
1.4. Endomorfismo de Weingarten	17
1.5. Segunda forma fundamental	20
1.6. Curvatura de Gauss	23
2. El teorema <i>Egregium</i> de Gauss	29
2.1. Isometrías	29
2.2. Teorema <i>Egregium</i> de Gauss	32
2.2.1. Ecuaciones de Weingarten	32
2.2.2. Ecuaciones de Gauss y símbolos de Christoffel	33
2.2.3. Cálculo de los símbolos de Christoffel	33
2.2.4. Fórmula de Gauss	35
2.2.5. El teorema <i>Egregium</i>	37
3. Los Sistemas de Información Geográfica	39
3.1. Introducción a los SIG	40
3.1.1. Componentes de un SIG	41
3.1.2. Aplicaciones de los SIG	42
3.1.3. Capas de los SIG	43
3.2. La Geodesia	45
3.2.1. Coordenadas geográficas	46
3.2.2. Geoide	50
3.2.3. Esferoide	51

3.2.4. Datum geodésico	54
3.2.5. Red geodésica	55
4. La Cartografía	59
4.1. Usos de la primera forma fundamental	60
4.1.1. Curvas en \mathbb{R}^3	60
4.1.2. Aplicaciones conformes	61
4.1.3. Aplicaciones isoareales	66
4.2. Las proyecciones cartográficas	69
4.2.1. Indicatriz de Tissot	70
4.2.2. Clasificación según la superficie de proyección	72
4.2.3. Clasificación según la propiedad métrica conservada	75
4.2.3.1. Proyecciones conformes	75
4.2.3.2. Proyecciones isoareales	81
4.2.3.3. Proyecciones de compromiso	83
Bibliografía	88
Fuentes de algunas imágenes	91

Índice de figuras

3.1. Elementos que conforman un SIG	42
3.2. Diferentes capas a partir del mismo territorio	43
3.3. Formato ráster vs formato vectorial	44
3.4. Mismas coordenadas en diferentes proyecciones	45
3.5. Coordenadas geográficas en la Tierra	48
3.6. Parametrización geográfica de la esfera	49
3.7. Representación del geoide terrestre	51
3.8. Diagrama con elipsoides locales	53
3.9. Coordenadas del mismo punto en diferentes datum	54
3.10. Mapa de la Red Geodésica de Primer Orden de España	56
3.11. Vértices de la red REGENTE	57
3.12. Misma superficie en diferentes proyecciones	57
4.1. Indicatrices de Tissot sobre la superficie terrestre	71
4.2. Principales superficies de proyección	72
4.3. Clasificación proyecciones cilíndricas y cónicas	73
4.4. Mapamundi realizado con la proyección de Werner	74
4.5. Mapamundi realizado con la proyección de Cahill-Keyes	74
4.6. Mapamundi de 1569 realizado con la proyección de Mercator	76
4.7. Mapamundi actual realizado con la proyección de Mercator	77
4.8. Indicatrices de Tissot utilizando la proyección de Mercator	78
4.9. Distribución de las zonas del sistema de coordenadas UTM	80
4.10. Realización de la proyección isoareal cilíndrica de Lambert	81
4.11. Mapamundi realizado con la proyección de Lambert	82
4.12. Indicatrices de Tissot utilizando la proyección de Lambert	83
4.13. Mapamundi realizado con la proyección de Winkel-Tripel	84
4.14. Mapamundi de la vegetación de 1955 realizado con la proyección de Winkel-Tripel	85
4.15. Indicatrices de Tissot utilizando la proyección de Winkel-Tripel	86
4.16. Mapamundi realizado con la proyección de J.R.Gott et al.	87
4.17. Mapas astronómicos utilizando la proyección de J.R.Gott et al.	88

Índice de tablas

3.1. Principales elipsoides de referencia	53
---	----

Introducción

Desde que el ser humano tiene uso de razón, siempre ha tenido la necesidad de comprender el mundo que le rodea. Esta inquietud provocó el desarrollo de los primeros mapas, los cuales trataban de representar la superficie terrestre y los elementos que se encontraban sobre ella; dando lugar al nacimiento de una nueva disciplina: la Cartografía.

La Cartografía es la ciencia que aborda el estudio de diferentes sistemas o métodos con el objetivo de reproducir a escala en un mapa una parte de la superficie de la Tierra o su totalidad, de manera que las deformaciones que se produzcan sean conocidas y estén acotadas dentro de determinados límites o condiciones, dependiendo del uso requerido del mapa.

Antiguamente, toda la información relacionada con la superficie se procesaba de forma manual, por lo que todos los documentos cartográficos que se realizaban eran confeccionados a mano por expertos cartógrafos con fines muy específicos.

Más adelante, la Cartografía experimentó un gran avance con la llegada de la Informática y los programas de cálculo y dibujo asistido, que permitían crear documentos cartográficos de forma más sencilla y rápida. Sin embargo, la gestión de la información geográfica proveniente de distintas fuentes suponía todavía una tarea tediosa y complicada.

Años más tarde, con la incorporación de la tecnología a la Cartografía, surgieron los primeros *Sistemas de Información Geográfica (SIG)*. Los SIG son sistemas informáticos orientados a la gestión de datos espaciales, cuyo origen desencadenó una revolución en el campo de la Cartografía debido a todas las ventajas que generaba su uso. Entre ellas, facilitaban los procesos de asociación entre los datos provenientes de diferentes fuentes, brindaban apoyo para una sencilla toma de decisiones en planificación física, etc.

En la actualidad, los SIG cada día tienen más importancia, ya que la mayor parte de la información utilizada en cualquier campo incluye su posición en el espacio. Por esta razón, los SIG están en continua evolución, potenciándose de manera progresiva sus capacidades en la toma de datos de forma masiva. Esto provoca que cada vez ofrezcan mejores análisis en tiempos más

reducidos, permitiendo generar mapas personalizados y adecuados para cada problema a resolver.

No obstante, cuando se trabaja con los SIG y con los mapas, hay que tener en cuenta un par de aspectos importantes: por una parte, los métodos para representar gráficamente la Tierra sobre un mapa dependen de otras ciencias, como la Geodesia (que trata de determinar la posición de los puntos de la superficie de la Tierra a partir de un sistema de referencia dado); por lo que es necesario conocer los conceptos de estudio básicos de estas disciplinas a la hora de trabajar conjuntamente con ellas. Por otra parte, es imposible crear un mapa plano ideal que conserve áreas, ángulos y longitudes (hecho que demostró Gauss en 1828), debido a lo cual, en función del uso al que esté destinado el mapa, se deberá conservar alguna métrica en detrimento de otras.

Motivación y objetivos

El carácter multidisciplinar de los SIG y su uso en múltiples campos hacen que tan solo un pequeño porcentaje de los millones de usuarios que utilizan los SIG en el mundo sean geógrafos.

Sin embargo, el adjetivo “Geográfica” que llevan incorporado los SIG en su nombre, provoca que en multitud de países su investigación y enseñanza recaigan únicamente en los departamentos de Geografía, a pesar de que su estudio sea bastante complejo y requiera de una buena base matemática e informática.

Debido a la gran importancia de los SIG en la actualidad, en este Trabajo de Fin de Grado se tratará de revisar las principales técnicas y conceptos matemáticos subyacentes en dichos sistemas.

Por ello, se quiere alcanzar los siguientes objetivos:

- Demostrar el *teorema Egregium de Gauss* para justificar la inexistencia de un mapa plano perfecto.
- Realizar una breve introducción al campo de los *Sistemas de Información Geográfica*.
- Dar a conocer la historia de la *red geodésica española*.
- Presentar las principales *proyecciones cartográficas* existentes que pueden ser utilizadas por los SIG.

Organización del documento

Los capítulos que conforman este documento y su contenido son:

- **Introducción:** se establece el contexto histórico de los SIG, así como los objetivos que se pretenden conseguir con la realización de este Trabajo de Fin de Grado. Además, también se incluye un breve repaso de algunos conceptos básicos de álgebra y cálculo necesarios para entender algunas demostraciones realizadas en el resto de capítulos.
- **Capítulo 1. Las superficies regulares:** se introduce toda la teoría básica de la Geometría de Superficies, desde la definición de las superficies regulares en \mathbb{R}^3 hasta la curvatura de Gauss. Este último concepto es clave para el capítulo 2, ya que el teorema *Egregium* de Gauss hace referencia a este concepto.
- **Capítulo 2. El teorema *Egregium* de Gauss:** se enuncia y demuestra el teorema *Egregium* de Gauss y sus principales consecuencias directas entre la que destaca que no existe ninguna isometría entre un abierto del plano y un abierto de la esfera.
- **Capítulo 3. Los Sistemas de Información Geográfica:** se presentan el concepto de SIG y sus fundamentos. Además, se explica el papel que juega la Geodesia en el campo de los SIG, ya que para poder utilizar la información georreferenciada con rigor, se debe comprender algunos de los conceptos de los que se encarga esta ciencia. Finalmente, se da a conocer la historia de la red geodésica española.
- **Capítulo 4. La Cartografía:** se expone cómo realizar medidas sobre una superficie esférica y los principales tipos de proyecciones cartográficas que existen. Además, se muestra la última proyección que se ha publicado en la actualidad: la proyección de J. Richard Gott, David M. Goldberg y Robert J. Vanderbei.

Conceptos básicos de álgebra y cálculo

Para cerrar este capítulo, se hace un breve repaso de algunos conceptos y teoremas importantes, que aunque se extienden más allá de los límites de este Trabajo de Fin de Grado y por ello no serán demostrados, son esenciales para comprender con claridad algunos de los conceptos presentados en el resto del documento.

El contenido de esta sección se puede encontrar en cualquier libro de texto de cálculo diferencial avanzado, pero gran parte de esta sección está basado en [1], [2] y [3].

Definición 0.1. Sea V un espacio vectorial de dimensión 2 sobre el cuerpo real $K=\mathbb{R}$ dotado de un producto interior \langle, \rangle . Se dice que una aplicación lineal $f : V \rightarrow V$ es *autoadjunta* si $\langle A(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, A(\mathbf{w}) \rangle$ para todos $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

Definición 0.2. Una *isometría* es una aplicación $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi(\mathbf{v}) \cdot \varphi(\mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ para todos $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$; es decir, $\|\varphi(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Definición 0.3. Una aplicación $f : X \rightarrow Y$ es un *homeomorfismo* si es continua, biyectiva, y su inversa también es continua.

Definición 0.4. Un *difeomorfismo* $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ es una aplicación biyectiva que es diferenciable en U , y cuya inversa es diferenciable en V .

Definición 0.5. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable, y sean f_1, \dots, f_m . La *matriz jacobiana* de f en $p \in U$ es una matriz $m \times n$ definida de la siguiente forma:

$$Df|_p = \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \Big|_p = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_p \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Big|_p & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \Big|_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \Big|_p & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \Big|_p \end{pmatrix}$$

Observación 0.6. Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable y $f=(f_1, \dots, f_m)$, para cada punto $p \in U$ lleva asociada una aplicación lineal $df|_p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ denominada *diferencial de f en p* .

La aplicación diferencial es la mejor aproximación lineal en p a la función f ; y la matriz de esta aplicación en las bases canónicas de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m es la matriz jacobiana de f en p ; y en particular, la imagen por la diferencial del vector i -ésimo de la base canónica es $\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_p$.

Teorema 0.7. Regla de la cadena. Sean $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ y $g : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$. Entonces para $p \in U$ se tiene que $d(g \circ f)|_p = dg|_{f(p)} \cdot df|_p$. En particular, la matriz jacobiana de $(g \circ f)$ en p será el producto de la de g en $f(p)$ con la de f en p (en este orden).

Teorema 0.8. Teorema de la función inversa. Sea $F : U \rightarrow V$ una función diferenciable con U y V abiertos de \mathbb{R}^n . Sea $p \in U$ tal que $dF|_p$ es isomorfismo. Entonces existen abiertos $U' \subset U$ con $p \in U'$ y $V' \subset V$ con $F(p) \in V'$ tal que $F(U') \subset V'$ y $F|_{U'} : U' \rightarrow V'$ es difeomorfismo.

Observación 0.9. El teorema 0.8 equivale a decir que si en un punto $p \in U$ la diferencial de F en p ($dF|_p$) es un isomorfismo, entonces F es un difeomorfismo en un entorno de p .

Teorema 0.10. Teorema de la función implícita. Sea U un abierto en \mathbb{R}^{n+m} y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en U . Dados $p \in \mathbb{R}^n$ y $q \in \mathbb{R}^m$ tales que $(p, q) \in U$ y $f(p, q) = 0$. Si la matriz $\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})} \Big|_{(p, q)} =$
 $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{(p, q)} \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ n+1 \leq j \leq n+m}}$ es inversible, entonces existen abiertos $V \subset \mathbb{R}^n$ con $p \in V$, $W \subset \mathbb{R}^m$ con $q \in W$, y una función diferenciable $\varphi : V \rightarrow W$ tal que:

1. Para todo $x \in V$, $(x, \varphi(x)) \in U$.
2. Si $(x, y) \in (V \times W) \cap U$, entonces $f(x, y) = 0$ si y solo si $y = \varphi(x)$.

Observación 0.11. Dado un sistema

$$\left. \begin{array}{l} f_1(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = 0 \end{array} \right\}$$

que cumple las hipótesis del teorema 0.10, es decir, $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ y $\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})} \Big|_{(p, q)}$ es inversible. Entonces de forma local se pueden encontrar las todas las soluciones de forma diferenciable “despejando” $(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$ en función de (x_1, \dots, x_n) .

Los conceptos que se presentan a continuación se explican de forma precisa en [4].

Definición 0.12. Un *endomorfismo* es una aplicación lineal en la que el conjunto inicial y el conjunto final coinciden.

Observación 0.13. Si V es un \mathbb{K} -espacio vectorial, un endomorfismo es cualquier aplicación lineal de la forma $f : V \rightarrow V$.

Definición 0.14. Un endomorfismo $f : V \rightarrow V$ es *diagonalizable* si existe una base de V con respecto a la cual la matriz asociada a f es diagonal.

Definición 0.15. Sea (V, \langle, \rangle) espacio euclídeo, se dice que un endomorfismo $f : V \rightarrow V$ es *autoadjunto* o *simétrico* si verifica que para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $\langle f(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, f(\mathbf{v}) \rangle$.

Proposición 0.16. Sea (V, \langle, \rangle) espacio euclídeo y sea $f: V \rightarrow V$ un endomorfismo autoadjunto. Entonces:

1. La matriz de f en cualquier base ortonormal de V es simétrica.
2. f es diagonalizable.
3. Dos vectores correspondientes a distintos autovalores de f son ortogonales. En particular, existe una base ortonormal de V formada por autovectores de f .

Finalmente, se recuerda al lector el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt en el que a partir de una base cualquiera puede calcularse una base ortogonal:

Observación 0.17. El *método de Gram-Schmidt* consiste en ir modificando los vectores dados convenientemente de forma que cada uno sea ortogonal con los anteriores. Sea $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ la base de partida, entonces las fórmulas:

$$e_1 = u_1$$

$$e_i = u_i + \lambda_{i,1}e_1 + \dots + \lambda_{i,i-1}e_{i-1}; \lambda_{i,j} = -\frac{\langle u_i, e_j \rangle}{\|e_j\|^2}; \forall i \in \{1, n\}, j \in \{1, i-1\}$$

nos proporcionan una base ortogonal $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

Observación 0.18. Para obtener una base ortonormal a partir de la base ortogonal obtenida con el método de Gram-Schmidt basta con dividir cada vector de la base entre su norma. Es decir, si $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ es la base ortogonal encontrada, entonces $\left\{ \frac{e_1}{\|e_1\|}, \frac{e_2}{\|e_2\|}, \dots, \frac{e_n}{\|e_n\|} \right\}$ es una base ortonormal.

Capítulo 1

Las superficies regulares

Como en otras tantas ramas de las matemáticas, Karl Fiedrich Gauss (1777-1855) fue el primero en abordar sistemáticamente el estudio de las superficies del espacio euclídeo o lo que se denomina *Geometría Diferencial*. Sin embargo, Euler fue el pionero de la teoría de superficies en su *Introductio in analysin infinitorum* de 1748 (accesible en [5]), y en *Recherches sur la courbure des surfaces* publicado en 1767 (accesible en [6]). También existen otros precedentes que estudiaron la teoría de superficies, como por ejemplo, Gaspard Monge en *Applications de l'Analyse à la Géométrie* de 1795 (accesible en [7]), pero fue Gauss el primero en examinarlas de forma precisa en sus *Disquisitiones generales circa superficies curvas* publicado en 1828 (accesible en [8]). En este último texto, se pone ya de manifiesto el papel tan importante de la *curvatura* (conocida más adelante con el nombre de *curvatura de Gauss*) [11].

A lo largo de este capítulo se presentan qué son las *superficies regulares* en \mathbb{R}^3 (sección 1.1) y las *superficies parametrizadas regulares* (sección 1.2). También se exponen algunos conceptos relacionados con las superficies regulares: la *primera forma fundamental* (sección 1.3), el *endomorfismo de Weingarten* (sección 1.4) y la *segunda forma fundamental* (1.5). Además, el estudio que se hace de las superficies regulares permitirá definir con propiedad qué es la *curvatura de Gauss* (sección 1.6), concepto clave para entender el teorema *Egregium* de Gauss y todas sus implicaciones (que se tratarán en los siguientes capítulos).

Los conceptos y resultados que se muestran durante este capítulo se pueden encontrar en cualquier libro básico de Geometría de Superficies, pero los principales libros de referencia son [1] y [2]. Otros libros básicos donde también se puede ampliar la información contenida en este capítulo son [9] y [10].

1.1. Superficies regulares en \mathbb{R}^3

Intuitivamente, una *superficie regular* es “un subconjunto de \mathbb{R}^3 que resulta de tomar trozos de planos, deformarlos de forma suave y pegarlos sin que se note dicha unión” [1], es decir, un subconjunto que carece de puntos abruptos, bordes o autointersecciones.

Para dar una definición matemática precisa de *superficie regular*, se presenta en primer lugar la definición de *subvariedad diferenciable*.

Definición 1.1. Una *subvariedad diferenciable de \mathbb{R}^n de dimensión d* es un subespacio conexo S de \mathbb{R}^n tal que para cada punto $p \in S$ existe una terna (V, U, φ) donde:

1. U es un abierto de S tal que $p \in U$, es decir, $U = U' \cap S$, siendo U' un abierto de \mathbb{R}^n .
2. V es un abierto de \mathbb{R}^d .
3. $\varphi : V \rightarrow U$ es un homeomorfismo diferenciable tal que $d\varphi|_x : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ es inyectiva para todo $x \in V$.

Una *superficie regular* es un caso particular de *subvariedad diferenciable*, ya que es una subvariedad diferenciable de dimensión 2 en \mathbb{R}^3 . Por ello, se define de la siguiente forma:

Definición 1.2. Una *superficie regular en \mathbb{R}^3* es un subespacio conexo S de \mathbb{R}^3 , tal que para todo $p \in S$ existe una terna (V, U, \mathbf{x}) donde

1. U es un abierto de S tal que $p \in U$, es decir, $U = U' \cap S$, siendo U' un abierto de \mathbb{R}^3 .
2. V es un abierto de \mathbb{R}^2 .
3. $\mathbf{x} : V \rightarrow U$ es una aplicación que cumple:

S1: \mathbf{x} es C^∞ , es decir, las tres componentes de la aplicación \mathbf{x} son C^∞ .

S2: $\mathbf{x} : V \rightarrow U$ es un homeomorfismo.

S3: $d\mathbf{x}|_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva para todo $q \in V$.

Observación 1.3. De la definición 1.2 se puede deducir lo siguiente:

- Si \mathbf{x} es C^∞ , también es continua. Por lo tanto, la condición **S2** añade que \mathbf{x} sea biyectiva y que su inversa $\mathbf{x}^{-1} : U \rightarrow V$ sea continua.

- La matriz de $d\mathbf{x}|_q$ en las bases canónicas es la matriz jacobiana de \mathbf{x} en q (es decir, $D\mathbf{x}|_q = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)} \Big|_q$). Por consiguiente, $d\mathbf{x}|_q(1,0) = \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial u}(q) = \mathbf{x}_u(q)$ y $d\mathbf{x}|_q(0,1) = \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial v}(q) = \mathbf{x}_v(q)$. Esto quiere decir que la condición **S3** equivale a comprobar que los vectores $\{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)\}$ sean linealmente independientes para todo $q \in V$, es decir, que $\mathbf{x}_u(q) \wedge \mathbf{x}_v(q) \neq 0 \forall q \in V$.

Definición 1.4. La aplicación \mathbf{x} se denomina *parametrización* (o *sistema coordinado*) en p , U es un *abierto coordinado*, y la terna (V, U, \mathbf{x}) es una *carta local en p*.

Notación 1.5. Se usará el término *diferenciable* para referirse a aplicaciones infinitamente diferenciables o de clase C^∞ .

Definición 1.6. Sea S una superficie regular, un conjunto de cartas locales $\{(V_i, U_i, \mathbf{x}_i) \mid i \in I\}$ tal que $S = \bigcup_{i \in I} U_i$ se denomina *atlas* de S .

Definición 1.7. Sea S una superficie regular, y sea $F : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación. Si (V, U, \mathbf{x}) es una carta local de S , se denomina *expresión local* de F en esta carta a la aplicación $F \circ \mathbf{x} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Observación 1.8. Con la notación de la definición 1.7 se tiene:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^n \\ \uparrow_{\mathbf{x}} & \nearrow_{F \circ \mathbf{x}} & \\ V & & \end{array} \quad (1.1)$$

Definición 1.9. Sea $F : S_1 \rightarrow S_2$ una aplicación entre dos superficies regulares S_1 y S_2 . Si (V_1, U_1, \mathbf{x}_1) es una carta local de S_1 en p , y (V_2, U_2, \mathbf{x}_2) es una carta local de S_2 en $F(p)$ tales que $F(U_1) \subset U_2$, se denomina *expresión local de F en estas cartas* a la aplicación $f = \mathbf{x}_2^{-1} \circ F \circ \mathbf{x}_1 : V_1 \rightarrow V_2$.

Observación 1.10. Con la notación de la definición 1.9 se tiene:

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{F} & U_2 \\ \uparrow_{\mathbf{x}_1} & & \uparrow_{\mathbf{x}_2} \\ V_1 & \xrightarrow{f} & V_2 \end{array} \quad (1.2)$$

En general, utilizando la definición 1.2, puede resultar difícil comprobar si un determinado subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie regular o no. Por ello, se enuncia a continuación un criterio para determinar si un cierto subconjunto S es una superficie regular o no, independientemente de las posibles parametrizaciones que admita.

Proposición 1.11. Sean U un abierto de \mathbb{R}^3 , $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable, y $S = \{(x,y,z) \in U \mid f(x,y,z)=0\}$. Si $df|_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es sobreyectiva para todo $p \in S$, entonces S es una superficie regular.

Demostración. Sea $p \in S$, es decir, $f(p) = 0$. Debido a que $df|_p$ es sobreyectiva $\forall p \in S$, es decir, $(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p)) \neq (0,0,0)$, la matriz jacobiana tiene rango 1 y es inversible. Utilizando el teorema de la función implícita (teorema 0.10), existen abiertos $V \subset \mathbb{R}^2$, $W \subset \mathbb{R}$, y una función diferenciable $\varphi: V \rightarrow W$ tal que:

1. $\forall (x,y) \in V, ((x,y), \varphi(x,y)) \in U$.
2. Si $(x,y,z) \in (V \times W) \cap U \Rightarrow (x,y,z) \in S \Leftrightarrow f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow z = \varphi(x,y)$.

Entonces, la carta local $(V, (V \times W) \cap U, \psi)$ que se construye en (x,y,z) con $\psi(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\tilde{x}, \tilde{y}, \varphi(\tilde{x}, \tilde{y}))$ cumple todas las condiciones de la definición 1.2, y por lo tanto, S es una superficie regular: V es abierto de \mathbb{R}^2 ; $(V \times W) \cap U$ es abierto de U , luego es abierto de S ; ψ es continua por serlo todas sus componentes y es homeomorfismo pues su inversa en la proyección sobre las dos primeras coordenadas; y finalmente, dado que la matriz jacobiana de ψ (de tamaño (2×3)) tiene como submatriz a I_2 (rango 2), se tiene que $d\psi_q$ es inyectiva para todo $q \in V$. □

Ejemplo 1.12. La esfera $\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ es por la proposición 1.11 una superficie regular:

Demostración. Tenemos que $F(x,y,z) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$, luego su matriz jacobiana es $dF|_p = (2x_1, 2x_2, 2x_3)$. La matriz jacobiana es sobreyectiva si, y solo si, $dF|_p = (0,0,0) \iff 2x_1 = 2x_2 = 2x_3 = 0$. El único punto para el que esto ocurre es el punto $(0,0,0) \notin \mathbb{S}^2$, luego se cumple la proposición 1.11, y por lo tanto, \mathbb{S}^2 es una superficie regular. □

Ejemplo 1.13. Un plano π de es $ax + by + cz + d = 0$ es por la proposición 1.11 una superficie regular:

Demostración. Tenemos que $F(x,y,z) = ax + by + cz + d$, luego su matriz jacobiana es $dF|_p = (a,b,c)$. La matriz jacobiana es sobreyectiva si, y solo si, $dF|_p = (0,0,0) \iff a=b=c=0$. Esto quiere decir que cualquier plano de ecuación $ax + by + cz + d = 0$ con $(a,b,c) \neq 0$ es una superficie regular por la proposición 1.11. □

1.2. Superficies parametrizadas

Para realizar un estudio local de una superficie no es necesario utilizar la definición de *superficie regular* (definición 1.2), ya que se puede ser menos estricto y utilizar el concepto de *superficie parametrizada regular* que se presenta a continuación.

Definición 1.14. Una *superficie parametrizada regular* es una aplicación diferenciable, $\mathbf{x} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde V es un abierto conexo de \mathbb{R}^2 y tal que $d\mathbf{x}|_{\mathbf{q}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva para todo $\mathbf{q} \in V$.

Observación 1.15. Si (V, U, \mathbf{x}) es una carta local de una superficie regular S , entonces $\mathbf{x} : V \rightarrow U \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie parametrizada regular. En la definición anterior, no se pide que $\mathbf{x} : V \rightarrow \mathbf{x}(V)$ sea homeomorfismo.

La siguiente proposición demuestra que se pueden extender los conceptos locales de una *superficie regular* a *superficies parametrizadas regulares* como se indicaba al comienzo de esta sección:

Proposición 1.16. Sea $\mathbf{x} : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada regular y $\mathbf{q} \in V$. Entonces existe un entorno U de \mathbf{q} en \mathbb{R}^2 tal que $\mathbf{x}(U) \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie regular.

Demostración. Sea $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, se puede suponer por regularidad que $\left. \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|_{\mathbf{q}} \neq 0$. Sea entonces $F : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $F(u, v, w) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + w)$ tal que $(u, v) \in V, w \in \mathbb{R}$, se tiene que $\det(dF_{\mathbf{q}}) = \left. \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|_{\mathbf{q}} \neq 0$.

Por el teorema de la función inversa (teorema 0.8), existen entornos abiertos W_1 de \mathbf{q} , y W_2 de $F(\mathbf{q})$ tal que $F : W_1 \rightarrow W_2$ es un difeomorfismo. Por lo tanto, si $U = W_1 \cap V$, se tiene que $F|_U = \mathbf{x}|_U$, y $\mathbf{x}(U)$ es una superficie regular por ser $\mathbf{x}(U)$ difeomorfo a U . \square

Definición 1.17. Sea $\mathbf{x} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada regular, y sea $\mathbf{v} \in V$. Dado que $d\mathbf{x}|_{\mathbf{q}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva, su imagen es un plano de \mathbb{R}^3 .

- Se denomina *plano tangente* a \mathbf{x} en \mathbf{v} al plano vectorial $\text{Im } d\mathbf{x}|_{\mathbf{v}}$.
- Se denomina *plano afín tangente* a \mathbf{x} en \mathbf{v} al plano afín $\mathbf{x}(\mathbf{v}) + \text{Im } d\mathbf{x}|_{\mathbf{v}}$.
- Se denomina *vector normal* a \mathbf{x} en \mathbf{v} al vector $N_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{x}_u(\mathbf{v}) \wedge \mathbf{x}_v(\mathbf{v})}{\|\mathbf{x}_u(\mathbf{v}) \wedge \mathbf{x}_v(\mathbf{v})\|}$.

- Se denomina *recta afín normal* a \mathbf{x} en \mathbf{v} a la recta ortogonal a $\text{Im } d\mathbf{x}|_{\mathbf{v}}$ que pasa por $\mathbf{x}(\mathbf{v})$.

Notación 1.18. El plano vectorial $\text{Im } d\mathbf{x}|_{\mathbf{v}}$ se denota por $T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$.

Dada una superficie regular y un punto de dicha superficie, en general pueden existir varias parametrizaciones para cubrir dicho punto y su entorno (quizá infinitas). Es razonable preguntarse que ocurre cuando se expresan los puntos de este entorno en unas u otras coordenadas, así como la relación existente entre ambas expresiones. Para ello, se tienen las siguientes definiciones y resultados:

Definición 1.19. Se denomina *cambio de parámetros* en \mathbb{R}^2 a todo difeomorfismo $\phi: V \rightarrow W$, siendo V y W abiertos conexos de \mathbb{R}^2 .

Definición 1.20. Se dice que un cambio de parámetros $\phi: V \rightarrow W$ conserva la orientación si $\det D\phi|_{\mathbf{q}} > 0$ para todo $\mathbf{q} \in V$, y que la cambia si $\det D\phi|_{\mathbf{q}} < 0$ para todo $\mathbf{q} \in V$.

Proposición 1.21. Sean $\mathbf{x}: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada regular, $\phi: U \rightarrow V$ un cambio de parámetros tal que $\mathbf{q} \in U$, e $\mathbf{y}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{y} = \mathbf{x} \circ \phi$. Entonces \mathbf{y} es una superficie parametrizada regular, y además $\text{Im } \mathbf{x} = \text{Im } \mathbf{y}$.

Demostración. \mathbf{y} es C^∞ por serlo \mathbf{x} y ϕ ; y además $d\mathbf{y}|_{\mathbf{q}} = d\mathbf{x}|_{\phi(\mathbf{q})} \circ d\phi|_{\mathbf{q}}$ es inyectiva por ser composición de inyectivas (dado que $d\mathbf{x}|_{\phi(\mathbf{q})}$ es inyectiva y $d\phi|_{\mathbf{q}}$ es biyectiva).

Finalmente, $\forall \mathbf{q}$, dado que $\mathbf{y}(\mathbf{q}) = \mathbf{x}(\phi(\mathbf{q}))$, se tiene que $\text{Im } \mathbf{y} \subset \text{Im } \mathbf{x}$. Por otro lado, como ϕ es biyectiva por ser un cambio de parámetros, se tiene que $\mathbf{x}(\mathbf{q}) = \mathbf{y}(\phi^{-1}(\mathbf{q}))$, luego $\text{Im } \mathbf{x} \subset \text{Im } \mathbf{y}$. Por lo tanto, $\text{Im } \mathbf{x} = \text{Im } \mathbf{y}$. \square

Proposición 1.22. Sea $\mathbf{x}: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada regular, y sea $\mathbf{v} \in V$.

1. $\{\mathbf{x}_u(\mathbf{v}), \mathbf{x}_v(\mathbf{v})\}$ es base de $T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$.
2. Si $\phi: U \rightarrow V$ es un cambio de parámetros e $\mathbf{y} = \mathbf{x} \circ \phi$, entonces:
 - $T_{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) = T_{\phi(\mathbf{u})}(\mathbf{x})$.
 - Sea $\beta_{\mathbf{y}} = \{\mathbf{y}_{u_1}(\mathbf{u}), \mathbf{y}_{u_2}(\mathbf{u})\}$ y $\beta_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x}_{v_1}(\phi(\mathbf{u})), \mathbf{x}_{v_2}(\phi(\mathbf{u}))\}$. La matriz de cambio de base de $\beta_{\mathbf{y}}$ a $\beta_{\mathbf{x}}$ es la matriz jacobiana de ϕ en \mathbf{u} .
 - $N_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}) = \pm N_{\mathbf{x}}(\phi(\mathbf{u}))$, donde el signo es $+$ si ϕ conserva la orientación, y $-$ si la cambia.

Demostración.

1. Dada la aplicación $d\mathbf{x}|_{\mathbf{v}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, una base de $\text{Im } d\mathbf{x}|_{\mathbf{v}} = T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ es $\{d\mathbf{x}|_{\mathbf{v}}(1,0), d\mathbf{x}|_{\mathbf{v}}(0,1)\} = \{\mathbf{x}_u(\mathbf{v}), \mathbf{x}_v(\mathbf{v})\}$.
2. De la igualdad $\mathbf{y} = \mathbf{x} \circ \phi$, y utilizando la regla de la cadena se deduce que $d\mathbf{y}|_{\mathbf{u}} = d\mathbf{x}|_{\phi(\mathbf{u})} \circ d\phi|_{\mathbf{u}}$. Como $d\phi|_{\mathbf{u}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es isomorfismo, se tiene que $T_{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) = \text{Im } d\mathbf{y}|_{\mathbf{u}} = \text{Im } d\mathbf{x}|_{\phi(\mathbf{u})} = T_{\phi(\mathbf{u})}(\mathbf{x})$.

A partir de la igualdad de matrices $D\mathbf{y}|_{\mathbf{u}} = D\mathbf{x}|_{\phi(\mathbf{u})} \cdot D\phi|_{\mathbf{u}}$, se deduce que la matriz de cambio de base es $D\phi|_{\mathbf{u}}$ (matriz jacobiana de ϕ en \mathbf{u}).

Se deduce que $N_{\mathbf{x}}(\phi(\mathbf{u})) = \frac{\mathbf{y}_{u1}(\mathbf{u}) \wedge \mathbf{y}_{u2}(\mathbf{u})}{\|\mathbf{y}_{u1}(\mathbf{u}) \wedge \mathbf{y}_{u2}(\mathbf{u})\|}$ es un vector unitario ortogonal a $T_{\mathbf{u}}(\mathbf{y})$ y la base $\{\mathbf{y}_{u1}, \mathbf{y}_{u2}, N_{\mathbf{x}}(\phi(\mathbf{u}))\}$ está orientada positivamente.

Para concluir, y puesto que el determinante del cambio de base de $B_1 = \{\mathbf{y}_{u1}(\mathbf{u}), \mathbf{y}_{u2}(\mathbf{u}), \pm N_{\mathbf{x}}(\phi(\mathbf{u}))\}$ a $B_2 = \{\mathbf{x}_{v1}(\phi(\mathbf{u})), \mathbf{x}_{v2}(\phi(\mathbf{u})), N_{\mathbf{x}}(\phi(\mathbf{u}))\}$ es positivo, donde el signo es $+$ si ϕ conserva la orientación y $-$ si la cambia, se tiene que $N_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}) = \pm N_{\mathbf{x}}(\phi(\mathbf{u}))$

□

Corolario 1.23. *Sea S una superficie parametrizada regular y sea $p \in S$. Sean \mathbf{x} e \mathbf{y} cartas locales en p tales que $\mathbf{x}(\mathbf{u}) = p = \mathbf{y}(\mathbf{v})$. Entonces se tiene que $T_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = T_{\mathbf{v}}(\mathbf{y})$.*

Demostración. Aplicando la proposición 1.22, en un entorno de \mathbf{v} se tiene que $\mathbf{y} = \mathbf{x} \circ \phi$, donde $\phi = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y}$. Por consiguiente, $\phi(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$. □

Observación 1.24. Dado un punto $p \in S$ que está en la intersección de dos cartas, la matriz del cambio de base entre las bases de $T_p(S)$ asociadas a ambas cartas es la matriz jacobiana de ϕ . Luego ambas bases definen la misma orientación si su determinante es positivo (es decir, si el cambio de base conserva la orientación en la componente conexa que contiene a \mathbf{x}^{-1}), y cambian la orientación en caso contrario.

Gracias al corolario anterior, se puede dar la siguiente definición de *plano tangente a una superficie* ya que no depende de la carta local escogida:

Definición 1.25. Sea S una superficie parametrizada regular y sea $p \in S$. El *plano tangente* a S en p es $T_p(S) = T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$, donde $(\mathbf{V}, \mathbf{U}, \mathbf{x})$ es una carta local en p con $\mathbf{x}(\mathbf{v}) = p$.

Finalmente, para cerrar esta sección, se debe definir lo que se entiende como *función diferenciable entre superficies*.

Definición 1.26. Se dice que la aplicación $f : S_1 \rightarrow S_2$ entre las superficies S_1 y S_2 es *diferenciable* en $p \in S_1$ si lo es como aplicación de S_1 en \mathbb{R}^3 . Se dice que f es *diferenciable* si lo es en todos los puntos de S_1 .

Definición 1.27. Sean S_1 y S_2 superficies regulares, y $F : S_1 \rightarrow S_2$ una aplicación diferenciable entre ellas. La aplicación $dF_p : T_p(S_1) \rightarrow T_{F(p)}(S_2)$ es la *diferencial de F en p* .

Observación 1.28. La definición 1.27 se puede extender al caso en el que se tiene una superficie regular S y $F : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable. Además, como consecuencia de la regla de la cadena (teorema 0.7), si (V, U, \mathbf{x}) es una carta local de S , $p \in S$, y $f = F \circ \mathbf{x} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ es la expresión local en dicha carta. Si β es la base de $T_p(S)$ correspondiente a esta carta, entonces la matriz de dF_p en las bases β y la canónica es la matriz jacobiana de f en $\mathbf{x}^{-1}(p)$. Es decir:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^n \\ \uparrow \mathbf{x} & \nearrow_{F \circ \mathbf{x}} & \\ V & & \end{array} \implies \begin{array}{ccc} T_p(S) & & \mathbb{R}^n \\ \uparrow_{d\mathbf{x}_{\mathbf{x}^{-1}(p)}} & & \nearrow_{df_{\mathbf{x}^{-1}(p)}} \\ \mathbb{R}^2 & & \end{array} \quad (1.3)$$

1.3. Primera forma fundamental

Las cartas y los atlas permiten estudiar superficies del espacio tridimensional mediante geometría plana. Sin embargo, para que las medidas en el plano se correspondan con las del espacio se debe usar una nueva medida en el plano que viene dada por una forma cuadrática que puede ser diferente en cada punto: la *primera forma fundamental*.

La *primera forma fundamental* es la expresión de cómo una superficie hereda el producto escalar euclídeo de \mathbb{R}^3 , y permite hacer mediciones sobre una superficie del espacio (medir longitudes, ángulos y áreas) [2]. Utilizar la *primera forma fundamental* para realizar estas mediciones resulta muy sencillo por como está definida, aunque de momento no se hará una explicación de cómo se realizan estas mediciones, y se explicará más adelante en la sección 4.1.

En esta sección solo se presentará la *primera forma fundamental* para poder entender con rigor otros conceptos importantes como son el *endomorfismo de Weingarten* (sección 1.4) o la *segunda forma fundamental* (sección 1.5), y para demostrar en el capítulo 2 el teorema *Egregium* de Gauss.

Definición 1.29. Sea $\mathbf{x} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada regular, y sea $\mathbf{v} \in V$. La *primera forma fundamental de \mathbf{x} en \mathbf{v}* es la restricción del producto escalar euclídeo de \mathbb{R}^3 a $T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$. Esto es, la aplicación:

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{v}} : T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) \times T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ I_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) &= \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Observación 1.30. Si $\mathbf{y} = \mathbf{x} \circ \phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ donde ϕ es un cambio de parámetros, entonces para todo $\mathbf{u} \in U$ se tiene que $T_{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) = T_{\phi(\mathbf{u})}(\mathbf{x})$ (consecuencia de la proposición 1.22 y del corolario 1.23). Por lo tanto, $I_{\mathbf{u}}^{\mathbf{y}} = I_{\phi(\mathbf{u})}^{\mathbf{x}}$ ya que ambas son la restricción de la misma forma bilineal en \mathbb{R}^3 .

Definición 1.31. Sea S una superficie regular, y sea $p \in S$. La *primera forma fundamental de S en p* es la restricción del producto escalar euclídeo de \mathbb{R}^3 a $T_p(S)$. Esto es, la aplicación:

$$\begin{aligned} I_p : T_p(S) \times T_p(S) &\rightarrow \mathbb{R} \\ I_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Proposición 1.32. Sea $\mathbf{x} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada regular (podría tratarse de una carta local de una superficie regular S). Sea $\mathbf{v} \in V$, entonces la matriz de $I_{\mathbf{v}}$ en la base $\{\mathbf{x}_u(\mathbf{v}), \mathbf{x}_v(\mathbf{v})\}$ es la matriz:

$$\begin{pmatrix} E(\mathbf{v}) & F(\mathbf{v}) \\ F(\mathbf{v}) & G(\mathbf{v}) \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

donde $E(\mathbf{v}) = \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v})$, $F(\mathbf{v}) = \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v})$ y $G(\mathbf{v}) = \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v})$. En particular, $E, F, G : V \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones C^∞ .

Demostración. En general, si $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal y se tiene una base $\beta = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de V , entonces la matriz de f en la base β es $A = (f(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$.

Sabiendo esto, sea $\beta = \{\mathbf{x}_u(\mathbf{v}), \mathbf{x}_v(\mathbf{v})\}$, y $f = I_{\mathbf{v}}$. La matriz de f en β es $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, donde:

$$\begin{aligned} a_{11} &= I_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_u(\mathbf{v}), \mathbf{x}_u(\mathbf{v})) = \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) = E(\mathbf{v}) \\ a_{12} &= I_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_u(\mathbf{v}), \mathbf{x}_v(\mathbf{v})) = \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) \\ a_{21} &= I_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_v(\mathbf{v}), \mathbf{x}_u(\mathbf{v})) = \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) = \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) \\ a_{22} &= I_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_v(\mathbf{v}), \mathbf{x}_v(\mathbf{v})) = \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) = G(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

□

Definición 1.33. Las funciones E , F y G se denominan *coeficientes de la primera forma fundamental* de la parametrización \mathbf{x} .

Observación 1.34. Sea $\mathbf{x} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada regular (podría tratarse de una carta local de una superficie regular S), y sea $p = \mathbf{x}(\mathbf{v})$ con $\mathbf{v} \in V$. Dados $\mathbf{w} = (w_1, w_2)_\beta$ y $\mathbf{z} = (z_1, z_2)_\beta \in T_p(S)$ donde $\beta = \{\mathbf{x}_u(\mathbf{v}), \mathbf{x}_v(\mathbf{v})\}$, entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \cdot \mathbf{z} &= I_p(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = (w_1, w_2) \cdot \begin{pmatrix} E(\mathbf{v}) & F(\mathbf{v}) \\ F(\mathbf{v}) & G(\mathbf{v}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \\ &= w_1 \cdot z_1 \cdot E(\mathbf{v}) + (w_1 \cdot z_2 + w_2 \cdot z_1) \cdot F(\mathbf{v}) + w_2 \cdot z_2 \cdot G(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Corolario 1.35. Para todo $\mathbf{v} \in V$, se cumple que $E(\mathbf{v}) > 0$, $G(\mathbf{v}) > 0$ y $E(\mathbf{v}) \cdot G(\mathbf{v}) - F(\mathbf{v})^2 > 0$.

Demostración. Los vectores $\mathbf{x}_u(\mathbf{v})$ y $\mathbf{x}_v(\mathbf{v})$ forman una base, por lo que son vectores no nulos y sus módulos son siempre positivos. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} E(\mathbf{v}) &= \|\mathbf{x}_u(\mathbf{v})\|^2 > 0 \\ G(\mathbf{v}) &= \|\mathbf{x}_v(\mathbf{v})\|^2 > 0 \end{aligned}$$

Por otro lado, si θ es el ángulo que forman $\mathbf{x}_u(\mathbf{v})$ y $\mathbf{x}_v(\mathbf{v})$, se tiene que:

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{x}_u(\mathbf{v}) \wedge \mathbf{x}_v(\mathbf{v})\|^2 + (\mathbf{x}_u(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}))^2 = \\ &[\|\mathbf{x}_u(\mathbf{v})\| \cdot \|\mathbf{x}_v(\mathbf{v})\| \cdot \text{sen}(\theta)]^2 + [\|\mathbf{x}_u(\mathbf{v})\| \cdot \|\mathbf{x}_v(\mathbf{v})\| \cdot \text{cos}(\theta)]^2 = \\ &\|\mathbf{x}_u(\mathbf{v})\|^2 \cdot \|\mathbf{x}_v(\mathbf{v})\|^2 \end{aligned}$$

De lo que se deduce que:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{v}) \cdot G(\mathbf{v}) - F(\mathbf{v})^2 &= \|\mathbf{x}_u(\mathbf{v})\|^2 \|\mathbf{x}_v(\mathbf{v})\|^2 - (\mathbf{x}_u(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}))^2 \\ &= \|\mathbf{x}_u(\mathbf{v}) \wedge \mathbf{x}_v(\mathbf{v})\|^2 > 0 \end{aligned}$$

siendo el último término positivo por ser $\mathbf{x}_u(\mathbf{v})$ y $\mathbf{x}_v(\mathbf{v})$ linealmente independientes. \square

1.4. Endomorfismo de Weingarten

Antes de presentar el *endomorfismo de Weingarten* veamos algunos resultados y definiciones que ayudarán a comprender este concepto.

Proposición 1.36. *Sea S una superficie regular, y supongamos que existe un atlas de S , $\{(V_i, U_i, \mathbf{x}_i) \mid i \in I\}$, tal que el cambio de carta $\mathbf{x}_j^{-1} \circ \mathbf{x}_i$ conserva la orientación en todo el abierto $\mathbf{x}_i^{-1}(U_i \cap U_j)$ para todos $i, j \in I$. Entonces la aplicación $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ dada por $N(p) = N_{\mathbf{x}_i}(p)$ si $p \in U_i$ está bien definida y es diferenciable. Además, $N(p)$ es un vector unitario y ortogonal al plano $T_p(S)$, para todo $p \in S$.*

Demostración. N está bien definida ya que si $p \in (U_i \cap U_j)$, usando la proposición 1.22 se tiene que $N_{\mathbf{x}_i}(p) = N_{\mathbf{x}_j}(p)$, ya que $\mathbf{x}_j^{-1} \circ \mathbf{x}_i$ conserva la orientación por hipótesis. Además, N es diferenciable ya que su restricción a U_i ($N|_{U_i} = N_{\mathbf{x}_i}$) lo es $\forall i \in I$.

Finalmente, dado $p \in S$, $N(p)$ es ortogonal a $T_p(S)$ ya que $N(p) = N_{\mathbf{x}_i}(p)$, y es unitario pues $\|N_{\mathbf{x}_i}(p)\| = \|N(p)\| = 1$. \square

Definición 1.37. Una aplicación $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ diferenciable, y tal que $N(p)$ es un vector unitario ortogonal a $T_p(S)$ para todo $p \in S$, se denomina *campo normal unitario* a S o *aplicación de Gauss* de S .

Lema 1.38. $T_p(S) = T_{N(p)}(\mathbb{S}^2)$ para todo $p \in S$.

Demostración. Sea $\mathbf{x} : V \rightarrow U \subset \mathbb{S}^2(0, 1)$ tal que (V, U, \mathbf{x}) es carta local, y $\beta = \{\mathbf{x}_u(\mathbf{v}), \mathbf{x}_v(\mathbf{v})\}$ una base de $T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$.

$\forall \mathbf{v} = (u, v) \in V$, $p = \mathbf{x}(\mathbf{v}) \in \mathbb{S}^2 \Rightarrow \|\mathbf{x}(\mathbf{v})\|^2 = 1$. Derivando respecto de u y v se tiene que:

$$\begin{aligned} 2\mathbf{x}_u(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}(\mathbf{v}) &= 0 \\ 2\mathbf{x}_v(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}(\mathbf{v}) &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathbf{x}(\mathbf{v})$ es ortogonal a $T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$, y como $\|\mathbf{x}(\mathbf{v})\| = 1$, se deduce que $N_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) = \pm \mathbf{x}(\mathbf{v})$.

Finalmente, dado que $N_{\mathbb{S}^2}(N(p)) = \pm N(p) \implies T_{N(p)}(\mathbb{S}^2) \perp N(p)$, y a la vez se tiene que $T_p(S) \perp N(p)$, se deduce que $T_p(S) = T_{N(p)}(\mathbb{S}^2)$ como se quería demostrar. \square

Ejemplo 1.39. La aplicación $dN_p : T_p(S) \rightarrow T_{N(p)}(\mathbb{S}^2) = T_p(S)$ es un endomorfismo como consecuencia del lema 1.38.

Definición 1.40. Se dice que una superficie S es *orientable* si existe una aplicación $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ tal que para todo punto $p \in S$, $N(p)$ es un vector ortogonal y unitario a S en p .

Más que la propia aplicación N , resulta más interesante estudiar su variación según nos movemos por la superficie S , ya que nos indica cómo se “deforma” la superficie en todas las direcciones. Es decir, es interesante estudiar la diferencial, conocida con el nombre de *endomorfismo de Weingarten*.

Durante esta sección, S denota una superficie regular orientada por un campo normal unitario $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$. A pesar de ello, como los conceptos son locales, para las definiciones e interpretaciones basta pensar en que se tiene una superficie parametrizada $\mathbf{x} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ y su campo normal unitario $N_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{x}_u(\mathbf{v}) \wedge \mathbf{x}_v(\mathbf{v})}{\|\mathbf{x}_u(\mathbf{v}) \wedge \mathbf{x}_v(\mathbf{v})\|}$.

Sin embargo, antes de dar una definición rigurosa del endomorfismo de Weingarten, es preciso presentar el siguiente lema:

Definición 1.41. Se denomina *endomorfismo de Weingarten* de la superficie orientada S en p a la aplicación lineal:

$$\begin{aligned} A_p &= T_p(S) \rightarrow T_p(S) \\ A_p(\mathbf{w}) &= -dN_p(\mathbf{w}) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Notación 1.42. Sean (V, U, \mathbf{x}) carta local de S en p , $p = \mathbf{x}(\mathbf{v}) \in S$, $\mathbf{v} \in V$, entonces $\tilde{N} = N \circ \mathbf{x} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la expresión local de $N : U \subset S \rightarrow \mathbb{R}^3$ en esa carta.

Proposición 1.43. *El endomorfismo de Weingarten es simétrico o autoadjunto respecto de la primera forma fundamental, es decir, para cualesquiera $\mathbf{w}, \mathbf{z} \in T_p(S)$, $I_p(A_p(\mathbf{w}), \mathbf{z}) = I_p(\mathbf{w}, A_p(\mathbf{z}))$.*

Demostración. Sean (V, U, \mathbf{x}) carta local de S en p , $p = \mathbf{x}(\mathbf{v})$, $\mathbf{v} \in V$, y la base $\beta = \{\mathbf{x}_u(\mathbf{v}), \mathbf{x}_v(\mathbf{v})\}$ de $T_p(S)$ asociada a esa carta.

Dado que la matriz en la base β y en la base canónica de dN_p es la matriz jacobiana de \tilde{N} en \mathbf{v} , se tiene que $dN_p(\mathbf{x}_u(\mathbf{v})) = \tilde{N}_u(\mathbf{v})$ y $dN_p(\mathbf{x}_v(\mathbf{v})) = \tilde{N}_v(\mathbf{v})$.

Aunque hay que probar que para todos $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p(S)$, $A_p(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot A_p(\mathbf{w})$, es suficiente probarlo para dos vectores que formen una base de $T_p(S)$ (ya que realizando combinaciones lineal de los elementos de la base de $T_p(S)$, se podrían obtener cualesquiera $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p(S)$). En particular, como β es una base de $T_p(S)$, A_p es autoadjunto $\Leftrightarrow A_p(\mathbf{x}_u(\mathbf{v})) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) = \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) \cdot A_p(\mathbf{x}_v(\mathbf{v}))$.

Como $A_p = -dN_p$ (definición 1.41), se observa que:

$$\begin{aligned} A_p \text{ es autoadjunto} &\Leftrightarrow A_p(\mathbf{x}_u(\mathbf{v})) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) = \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) \cdot A_p(\mathbf{x}_v(\mathbf{v})) \\ &\Leftrightarrow -dN_p(\mathbf{x}_u(\mathbf{v})) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) = \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) \cdot (-dN_p(\mathbf{x}_v(\mathbf{v}))) \\ &\Leftrightarrow \tilde{N}_u(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) = \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) \cdot \tilde{N}_v(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Dado que $\tilde{N}(\mathbf{v}) = N(\mathbf{x}(\mathbf{v})) = N(p)$, se deduce que $\tilde{N}(\mathbf{v})$ es ortogonal a $T_p(S) \forall \mathbf{v} \in V$. Esto implica que para todo $\mathbf{v} \in V$, $\tilde{N}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v})=0$ y $\tilde{N}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v})=0$.

Derivando la primera igualdad respecto de v , y la segunda respecto de u se tiene que:

$$\begin{aligned}\tilde{N}_v(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) + \tilde{N}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_{uv}(\mathbf{v}) &= 0 \implies \tilde{N}_v(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) = -\tilde{N}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_{uv}(\mathbf{v}) \\ \tilde{N}_u(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) + \tilde{N}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_{vu}(\mathbf{v}) &= 0 \implies \tilde{N}_u(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) = -\tilde{N}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_{vu}(\mathbf{v})\end{aligned}$$

Finalmente, como $\tilde{N}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_{uv}(\mathbf{v}) = \tilde{N}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_{vu}(\mathbf{v})$ por ser \mathbf{x} una aplicación diferenciable, e igualando los resultados anteriores queda la igualdad buscada: $\tilde{N}_u(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) = \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) \cdot \tilde{N}_v(\mathbf{v})$. \square

Corolario 1.44. *Sea S una superficie orientada por N y $p \in S$. Si β es una base del plano tangente $T_p(S)$ formada por autovectores ortogonales con la misma norma, entonces la matriz respecto de la base β de endomorfismo de Weingarten es simétrica.*

Demostración. Si $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ es la matriz de A_p respecto de la base $\{w_1, w_2\}$ constituida por vectores ortogonales con la misma norma, entonces se deduce que:

$$\begin{aligned}A_p(w_1) &= a_{11} \cdot w_1 + a_{21} \cdot w_2 \\ A_p(w_2) &= a_{12} \cdot w_1 + a_{22} \cdot w_2\end{aligned}$$

Al multiplicar los dos miembros de la primera igualdad escalarmente por w_2 , y los de la segunda por w_1 se obtiene $\langle A_p(w_1), w_2 \rangle = a_{21} \cdot \langle w_2, w_2 \rangle$, y $\langle w_1, A_p(w_2) \rangle = a_{12} \cdot \langle w_1, w_1 \rangle$ respectivamente.

Como A_p es autoadjunto, y w_1 y w_2 tienen la misma norma $R \neq 0$, se deduce que $a_{21} \cdot R = R \cdot a_{12} \implies a_{21} = a_{12} \implies A_p$ es simétrica. \square

Corolario 1.45. *El endomorfismo de Weingarten A_p es diagonalizable.*

Demostración. Las matrices simétricas A con coeficientes en el cuerpo \mathbb{R} de los números reales son diagonalizables, simultáneamente, por congruencia y semejanza, es decir, existe una matriz cuadrada invertible P cuya traspuesta es su inversa, de forma que el producto $P \cdot A \cdot P^{-1}$ es una matriz diagonal [10]. Aplicando este resultado a la matriz A_p del endomorfismo de Weingarten en $p \in S$, que sabemos que es simétrica como consecuencia del corolario 1.44, se deduce que A_p es diagonalizable. \square

Observación 1.46. El corolario 1.45 también se podría haber demostrado aplicando el resultado de la proposición 0.16 al endomorfismo de Weingarten, esto es, tomando $V=T_p(S)$, $f=A_p$ y $\langle, \rangle = I_p$.

1.5. Segunda forma fundamental

La *segunda forma fundamental* permite estudiar la relación existente entre una superficie y el espacio que la contiene. Sin embargo, en este documento no se desea realizar un estudio tan exhaustivo de ella, por lo que el lector interesado que desee profundizar en dicha relación deberá acudir a libros de texto como [1].

El objetivo de esta sección es presentar los conceptos de *segunda forma fundamental* y de *curvatura normal* de una superficie; y mostrar algunos resultados que permitan relacionar todos los conceptos vistos hasta el momento. Además, estos dos conceptos serán importantes en la sección 1.6 ya que la *curvatura de Gauss* se puede definir en función de ellos.

A lo largo de esta sección (V, U, \mathbf{x}) es una carta local de S , y S una superficie regular orientada por un campo normal unitario $N : S \rightarrow S^2$.

Observación 1.47. Si $f: V \rightarrow V$ es autoadjunto o simétrico respecto de un producto escalar \langle, \rangle en V , entonces la aplicación $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \rightarrow \langle f(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, f(\mathbf{w}) \rangle$ es una forma bilineal simétrica. En particular, como A_p es autoadjunto respecto de la primera forma fundamental (proposición 1.43), se tiene la definición 1.48.

Definición 1.48. La *segunda forma fundamental* de S en p es la forma bilineal simétrica asociada al endomorfismo de Weingarten, es decir, es la aplicación:

$$\begin{aligned} II_p : T_p(S) \times T_p(S) &\rightarrow \mathbb{R} \\ II_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= A_p(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot A_p(\mathbf{w}) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Observación 1.49. También se denomina *segunda forma fundamental* de S en p a la forma cuadrática:

$$\begin{aligned} II_p : T_p(S) &\rightarrow \mathbb{R} \\ II_p(\mathbf{w}) &= A_p(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{w} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Ejemplo 1.50. Veamos cuál es la segunda forma fundamental de un plano y de una esfera de centro C y radio r .

1. Dado un plano afín S y \mathbf{w} un vector unitario (es decir, $\|\mathbf{w}\|=1$) ortogonal al plano, es decir, $\mathbf{w} \perp T_p(S) \forall p \in S$, se tiene que $N(p) = \pm \mathbf{w}$.

Por lo tanto, $dN_p = 0 \forall p \in S \Rightarrow A_p(\mathbf{w}) = 0 \forall p \in S \Rightarrow II_p(\mathbf{w}) = 0 \forall p \in S$.

2. Sea S una circunferencia de radio r y centro C , y \mathbf{w} un vector unitario ortogonal a S , primero utilizamos un razonamiento análogo al visto en el lema 1.38 para calcular $N(p) \forall p \in S$:

Dados $\mathbf{x}: V \rightarrow U \subset \mathbb{S}^2(C, r)$ tal que (V, U, \mathbf{x}) es carta local, y tal que $\beta = \{\mathbf{x}_u(\mathbf{v}), \mathbf{x}_v(\mathbf{v})\}$ es base de $T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$. Entonces para todo $\mathbf{v}=(u, v) \in V$, $\mathbf{x}(\mathbf{v}) \in \mathbb{S}^2(C, r) \Rightarrow \|\mathbf{x}(\mathbf{v}) - C\|^2 = r^2$. Derivando respecto de u y v se tiene que:

$$2\mathbf{x}_u(\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{x}(\mathbf{v}) - C) = 0$$

$$2\mathbf{x}_v(\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{x}(\mathbf{v}) - C) = 0$$

Por consiguiente, $\frac{\mathbf{x}(\mathbf{v}) - C}{r}$ es ortogonal a $T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ y su módulo es 1, luego $N_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) = \pm \frac{\mathbf{x}(\mathbf{v}) - C}{r}$.

Ahora bien, dado $p \in S$, se observa que $\forall p \in S$:

$$\begin{aligned} N(p) &= \pm \frac{p - C}{r} \Rightarrow dN_p = \pm \frac{Id(p)}{r} \\ &\Rightarrow A_p(\mathbf{w}) = \mp \frac{\mathbf{w}}{r} \Rightarrow II_p(\mathbf{w}) = \mp \frac{\|\mathbf{w}\|^2}{r} \end{aligned}$$

Finalmente, como \mathbf{w} es un vector unitario, $II_p(\mathbf{w}) = \mp \frac{1}{r} \forall p \in S$.

Definición 1.51. Sea $p \in S$, $\mathbf{w} \in T_p(S)$ tal que $\mathbf{w} \neq 0$. Se denomina *curvatura normal* de S en p al valor $II_p\left(\frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}\right)$ y se denota por $k_n(\mathbf{w}, p)$.

Observación 1.52. La curvatura normal en la dirección \mathbf{w} coincide con la curvatura normal en la dirección $\lambda\mathbf{w}$ si $\lambda \neq 0$.

Ejemplo 1.53. Veamos cuál es la curvatura normal de un plano y de una esfera de centro C y radio r . Con el fin de no repetir los cálculos efectuados en el ejemplo 1.50, utilizamos los resultados obtenidos en dicho ejemplo.

1. Sea S un plano afín, se probó que $II_p(\mathbf{w}) = 0 \forall p \in S$, y en particular, esto vale para todo $\mathbf{w} \in T_p(S)$. Por lo tanto, $k_n(\mathbf{w}, p) = 0 \forall p \in S$.
2. Sea S una circunferencia de radio r y centro C , se probó que $\forall p \in S$, $II_p(\mathbf{w}) = \mp \frac{\|\mathbf{w}\|^2}{r}$. Por lo tanto, si \mathbf{w} es un vector unitario tal que $\mathbf{w} \in T_p(S)$, $k_n(\mathbf{w}, p) = II_p(\mathbf{w}) = \mp \frac{1}{r} \forall p \in S$.

Proposición 1.54. Sea $p=\mathbf{x}(\mathbf{v})$ con $\mathbf{v} \in V$. La matriz de II_p en la base $\{\mathbf{x}_u(\mathbf{v}), \mathbf{x}_v(\mathbf{v})\}$ es la matriz

$$\begin{pmatrix} e(\mathbf{v}) & f(\mathbf{v}) \\ f(\mathbf{v}) & g(\mathbf{v}) \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

donde:

$$\begin{aligned} e(\mathbf{v}) &= -\tilde{N}_u(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) = \tilde{N}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_{uu}(\mathbf{v}) \\ f(\mathbf{v}) &= -\tilde{N}_u(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) = -\tilde{N}_v(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) = \tilde{N}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_{uv}(\mathbf{v}) \\ g(\mathbf{v}) &= -\tilde{N}_v(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) = \tilde{N}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_{vv}(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

En particular, $e, f, g: V \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones C^∞ .

Demostración. En la demostración de la proposición 1.43 se demostró que:

$$\begin{aligned} A_p(\mathbf{x}_u(\mathbf{v})) &= -dN_p(\mathbf{x}_u(\mathbf{v})) = -\tilde{N}_u(\mathbf{v}) \\ A_p(\mathbf{x}_v(\mathbf{v})) &= -dN_p(\mathbf{x}_v(\mathbf{v})) = -\tilde{N}_v(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

También se demostró que $\tilde{N}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V$. Si se deriva respecto de u en esta ocasión se tiene que:

$$\tilde{N}_u(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) + \tilde{N}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_{uu}(\mathbf{v}) = 0 \Rightarrow -\tilde{N}_u(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) = \tilde{N}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_{uu}(\mathbf{v})$$

Finalmente, de la construcción de una matriz de una forma bilineal se deduce que:

$$\begin{aligned} e(\mathbf{v}) &= II_p(\mathbf{x}_u(\mathbf{v}), \mathbf{x}_u(\mathbf{v})) = A_p(\mathbf{x}_u(\mathbf{v})) \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) \\ &= -\tilde{N}_u(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) = \tilde{N}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_{uu}(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Los coeficientes f y g se obtienen de manera análoga. □

Definición 1.55. Las funciones e, f, g se llaman *coeficientes de la segunda forma fundamental* en la carta (V, U, \mathbf{x}) .

Proposición 1.56. Sea S una superficie regular orientada y $p \in S$. Sea β una base cualquiera de $T_p(S)$, y sean M la matriz de A_p , N la matriz de II_p y P la matriz de I_p (todas ellas en la base β). Entonces $M=P^{-1} \cdot N$. Además, si β es una base ortonormal, $M=N$.

Demostración. Sea $\mathbf{w}=(w_1, w_2)_\beta$, se observa que:

$$\begin{aligned} A_p(\mathbf{w}) &= [M \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}]^t = (w_1, w_2) \cdot M^t \\ II_p(\mathbf{w}) &= I_p(A_p(\mathbf{w}), \mathbf{w}) = [(w_1, w_2) \cdot M^t] \cdot P \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ &= (w_1, w_2) \cdot (M^t \cdot P) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz de II_p en β es $N=M^t \cdot P \implies N^t=P^t \cdot M$.

Como N y P son simétricas por ser las matrices de formas bilineales simétricas, se tiene que $N=N^t=P^t \cdot M=P \cdot M$. Además, como P es invertible por ser I_p un producto escalar, se obtiene que $M=P^{-1} \cdot N$ como se quería probar.

Finalmente, si β es una base ortonormal, entonces $P=Id \implies M=N$. \square

Corolario 1.57. *Sea S una superficie regular orientada y $p=\mathbf{x}(\mathbf{v}) \in S$. Sea $\beta = \{\mathbf{x}_u(\mathbf{v}), \mathbf{x}_v(\mathbf{v})\}$ una base de $T_p(S)$. Entonces la matriz de A_p en la base β es:*

$$\frac{1}{E(\mathbf{v})G(\mathbf{v}) - F^2(\mathbf{v})} \begin{pmatrix} G(\mathbf{v})e(\mathbf{v}) - F(\mathbf{v})f(\mathbf{v}) & G(\mathbf{v})f(\mathbf{v}) - F(\mathbf{v})g(\mathbf{v}) \\ E(\mathbf{v})f(\mathbf{v}) - F(\mathbf{v})e(\mathbf{v}) & E(\mathbf{v})g(\mathbf{v}) - F(\mathbf{v})f(\mathbf{v}) \end{pmatrix}$$

Demostración. Es consecuencia inmediata de la proposición 1.56 ya que las matrices de I_p y II_p en $T_p(S)$ son $P=\begin{pmatrix} E(\mathbf{v}) & F(\mathbf{v}) \\ F(\mathbf{v}) & G(\mathbf{v}) \end{pmatrix}$ y $N=\begin{pmatrix} e(\mathbf{v}) & f(\mathbf{v}) \\ f(\mathbf{v}) & g(\mathbf{v}) \end{pmatrix}$ respectivamente. \square

1.6. Curvatura de Gauss

En esta última sección se presenta el concepto de *curvatura de Gauss* que trata de asociar a cada punto de la superficie un número que, en función de su signo y su valor algebraico, tendrá un significado geométrico diferente.

Además, la *curvatura de Gauss* relaciona la primera y la segunda forma fundamental, ya que se puede calcular a partir de los coeficientes de ambas formas fundamentales; y será esencial para poder demostrar el teorema *Egregium* de Gauss en el capítulo 2.

Sin embargo, antes de definir con rigor este concepto, se necesitan todavía algunos conceptos y resultados que se exponen a continuación.

Proposición 1.58. *Sean S una superficie regular orientada y $p \in S$ un punto arbitrario. Entonces A_p tiene dos autovalores (iguales o distintos), y existe una base ortonormal de $T_p(S)$ formada por autovectores de A_p .*

Demostración. Como A_p es un endomorfismo autoadjunto, entonces es diagonalizable (corolario 1.45) y tiene dos autovalores simples distintos o uno único doble. En el caso de que haya dos distintos, los espacios de autovectores tienen dimensión 1 y son ortogonales entre sí, por lo que basta con escoger un vector unitario de cada espacio de autovectores para tener una base ortonormal de autovectores. Para el caso en el que haya un autovalor doble, el espacio de autovectores tendrá dimensión 2, luego coincidirá con todo $T_p(S)$ y se podrá elegir cualquier base ortonormal. \square

Proposición 1.59. Sean S una superficie regular orientada y $p \in S$. Sean $k_1(p)$ y $k_2(p)$ los autovalores de A_p (con $k_1(p) \geq k_2(p)$) y sea $\beta = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ una base ortonormal de $T_p(S)$ formada por autovectores de A_p (es decir, para $i \in \{1, 2\}$, $A_p(\mathbf{e}_i) = k_i(p) \cdot \mathbf{e}_i$). Entonces se tiene que:

1. Si $\mathbf{w} = \lambda_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{e}_2$ es unitario (es decir, $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$), entonces $k_n(\mathbf{w}, p) = \lambda_1^2 \cdot k_1(p) + \lambda_2^2 \cdot k_2(p)$. En particular, $k_n(\mathbf{e}_i, p) = k_i(p)$ para $i \in \{1, 2\}$.
2. $k_1(p)$ y $k_2(p)$ son, respectivamente, el máximo y el mínimo de las curvaturas normales $k_n(\mathbf{w}, p)$ para $\mathbf{w} \in T_p(S)$.
3. Si $k_1(p) = k_2(p)$, entonces todas las curvaturas normales coinciden, y son iguales al único autovalor de A_p . Además, todos los vectores de $T_p(S)$ son autovectores.
4. Si $k_1(p) > k_2(p)$, las únicas direcciones de autovectores son \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 (que son ortogonales), y son las únicas direcciones en las que la curvatura normal coincide con uno de los autovalores.
5. Una dirección $\mathbf{w} \in T_p(S)$, tal que $\mathbf{w} \neq 0$, tiene curvatura normal $k_n(\mathbf{w}, p) = k_i(p)$ para $i \in \{1, 2\}$ si y solo si es autovector de A_p correspondiente al autovalor $k_i(p)$.

Demostración.

1. Como $\beta = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es base ortonormal de autovectores, para $i \in \{1, 2\}$ $A_p(\mathbf{e}_i) = k_i(p) \cdot \mathbf{e}_i$. Luego para un determinado $\mathbf{w} = \lambda_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{e}_2$ se tiene que $A_p(\mathbf{w}) = \lambda_1 \cdot k_1(p) \cdot \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \cdot k_2(p) \cdot \mathbf{e}_2$.

Como \mathbf{w} es unitario, $k_n(\mathbf{w}, p) = II_p(\mathbf{w}) = A_p(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{w} = \lambda_1^2 \cdot k_1(p) + \lambda_2^2 \cdot k_2(p)$. En particular, si $\mathbf{w} = \mathbf{e}_1$, se tiene que $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 0 \implies k_n(\mathbf{e}_1, p) = k_1(p)$; y si $\mathbf{w} = \mathbf{e}_2$, se tiene que $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1 \implies k_n(\mathbf{e}_2, p) = k_2(p)$.

2. Para $\mathbf{w} \in T_p(S)$ se tiene que $k_1(p) \geq k_n(\mathbf{w}, p) \geq k_2(p)$ puesto que:

$$\begin{aligned} k_1(p) &= (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \cdot k_1(p) = \lambda_1^2 \cdot k_1(p) + \lambda_2^2 \cdot k_1(p) \geq \\ &\geq \lambda_1^2 \cdot k_1(p) + \lambda_2^2 \cdot k_2(p) = k_n(\mathbf{w}, p) \geq \\ &\geq \lambda_1^2 \cdot k_2(p) + \lambda_2^2 \cdot k_2(p) = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \cdot k_2(p) = k_2(p) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Por lo tanto, $k_1(p)$ y $k_2(p)$ son el máximo y el mínimo de las curvaturas normales $k_n(\mathbf{w}, p)$ para $\mathbf{w} \in T_p(S)$.

3. De la ecuación 1.11, se deduce que si se tiene $k_1(p) = k_2(p)$, entonces $k_n(\mathbf{w}, p) = k_1(p) = k_2(p)$ para todo \mathbf{w} (es decir, todas las curvaturas normales coinciden). Además, como hay un único autovalor doble, el espacio de autovectores tiene dimensión 2, luego coincide con todo $T_p(S)$ y todos las direcciones son autovectores.
4. Si $k_1(p) > k_2(p)$, solo hay dos direcciones de autovectores, por lo que $k_n(\mathbf{w}, p) = k_1(p) \Leftrightarrow \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{w} = \pm \mathbf{e}_1$. De forma análoga se tiene que $k_n(\mathbf{w}, p) = k_2(p) \Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{w} = \pm \mathbf{e}_2$.
5. Consecuencia de los puntos 3 y 4, ya que o bien $k_1(p) = k_2(p)$, o bien $k_1(p) > k_2(p)$. En ambos casos se tenía que $k_n(\mathbf{w}, p) = k_i(p)$ para $i \in \{1, 2\}$ si y solo si \mathbf{w} era un autovector de autovalor asociado $k_i(p)$.

□

Definición 1.60. Dada S una superficie regular orientada y $p \in S$, las *curvaturas principales* de S en p son los valores $k_1(p)$ y $k_2(p)$, máximo y mínimo de las curvaturas normales en p .

Observación 1.61. Las curvaturas principales de S en p son los autovalores de A_p .

Definición 1.62. Dada S una superficie regular orientada y $p \in S$, las *direcciones principales* de S en p son las direcciones \mathbf{w} de $T_p(S)$ tales que $k_n(\mathbf{w}, p)$ es una curvatura principal.

Observación 1.63. Las direcciones principales de S en p son los autovectores de A_p , es decir, $\mathbf{w} \in T_p(S)$ es una dirección principal si \mathbf{w} es un autovector de A_p .

Corolario 1.64. En una base ortonormal de $T_p(S)$ formada por direcciones principales, la matriz de II_p en dicha base es $\begin{pmatrix} k_1(p) & 0 \\ 0 & k_2(p) \end{pmatrix}$.

Demostración. Utilizando la proposición 1.56, se tiene que la matriz de II_p coincide con la de A_p si se escoge una base ortonormal de $T_p(S)$. Finalmente, en una base ortonormal de autovectores $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ se tiene que la matriz de A_p es justamente $\begin{pmatrix} k_1(p) & 0 \\ 0 & k_2(p) \end{pmatrix}$. \square

Ahora que ya se han presentado las *curvaturas principales*, ya se puede definir la *curvatura de Gauss* con rigor.

Definición 1.65. Sea S una superficie regular orientada por N y sea $p \in S$, la *curvatura de Gauss* de S en p es la aplicación:

$$\begin{aligned} K : S &\rightarrow \mathbb{R} \\ K(p) &= \det(A_p) = \det(-dN_p) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Proposición 1.66. Sea S una superficie regular orientada y $p \in S$, la *curvatura de Gauss* de S en p coincide con el valor $k_1(p) \cdot k_2(p)$.

Demostración. Por el corolario 1.64 sabemos que la matriz de A_p en una base ortonormal de autovectores $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es $\begin{pmatrix} k_1(p) & 0 \\ 0 & k_2(p) \end{pmatrix}$. Su determinante es por consiguiente $k_1(p) \cdot k_2(p)$. \square

Observación 1.67. La curvatura de Gauss no depende de la orientación elegida en la superficie. Si se cambia la orientación, cambian de signo las dos curvaturas principales, sin embargo, ese cambio de signo no altera el signo del producto.

Corolario 1.68. Sea S una superficie regular orientada y $p = \mathbf{x}(\mathbf{v}) \in S$. Entonces $K(p) = \frac{e(\mathbf{v}) \cdot g(\mathbf{v}) - f^2(\mathbf{v})}{E(\mathbf{v}) \cdot G(\mathbf{v}) - F^2(\mathbf{v})}$.

Demostración. Calculando el determinante de la matriz de A_p obtenida en el corolario 1.57 se deduce que:

$$K(p) = \det(A_p) = \det(P^{-1} \cdot N) = \frac{\det(N)}{\det(P^{-1})} = \frac{e(\mathbf{v}) \cdot g(\mathbf{v}) - f^2(\mathbf{v})}{E(\mathbf{v}) \cdot G(\mathbf{v}) - F^2(\mathbf{v})}$$

\square

Corolario 1.69. *La función curvatura de Gauss es C^∞ .*

Demostración. Es suficiente demostrar que para toda carta (V, U, \mathbf{x}) , la composición $K \circ \mathbf{x}$ es C^∞ .

Sea (V, U, \mathbf{x}) una carta cualquiera, sea $\mathbf{v} \in V$ tal que $\mathbf{x}(\mathbf{v}) = p \in S$. Dado que los coeficientes de la primera y segunda forma fundamentales respecto de una carta son C^∞ , también lo es $K \circ \mathbf{x} : V \rightarrow \mathbb{R}$, pues por el corolario 1.68 se tiene que $K(\mathbf{x}(\mathbf{v})) = K(p) = \frac{e(\mathbf{v}) \cdot g(\mathbf{v}) - f^2(\mathbf{v})}{E(\mathbf{v}) \cdot G(\mathbf{v}) - F^2(\mathbf{v})}$. \square

Ejemplo 1.70. Veamos cuál es el valor de la curvatura de Gauss de un plano y de una esfera de centro C y radio r . Para evitar repetir cálculos ya realizados, utilizamos los resultados obtenidos en el ejemplo 1.50.

1. Sea S un plano afín, se probó que $A_p(\mathbf{w})=0$ para todo $p \in S$. Luego $k_1(p)=k_2(p)=0 \forall p \in S \implies K(p) = 0 \forall p \in S$.
2. Sea S una circunferencia de radio r y centro C , se probó que $A_p = \mp \frac{1}{r} Id$ para todo $p \in S$. Luego $k_1(p)=k_2(p) = \mp \frac{1}{r} \forall p \in S \implies K(p) = \frac{1}{r^2} \forall p \in S$.

Finalmente, para cerrar esta sección se enuncia la interpretación geométrica de la *curvatura de Gauss*, que, aunque fue resaltada por Gauss, fue publicada con anterioridad por Olinde Rodrigues según [10]. En primer lugar veremos la interpretación del valor absoluto, y después, en función del signo [9]:

1. *Interpretación del valor absoluto de la curvatura de Gauss:* sea S una superficie orientada por $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ y $p \in S$ de modo que la curvatura de Gauss $K(p) \neq 0$. Sea $\{G_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una base de entornos abiertos del punto p en S , y denotemos por C_n el área de G_n , y por B_n la de su imagen $N(G_n) \subset \mathbb{S}^2$. Entonces

$$|K(p)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n}{C_n}$$

La fórmula anterior nos dice que el valor absoluto de la curvatura de Gauss de la superficie S en el punto p mide “lo que barre” el vector normal a S por unidad de superficie.

2. *Interpretación del signo de la curvatura de Gauss:* sea S una superficie orientada por $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ y $p \in S$ de modo que la curvatura de Gauss $K(p) \neq 0$. Se definen los semiespacios $E^+ = \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \mathbf{t} - p, N(p) \rangle > 0\}$ y $E^- = \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \mathbf{t} - p, N(p) \rangle < 0\}$. Entonces:

- a) Si $K(p) > 0$, existe una bola abierta B de \mathbb{R}^3 centrada en p tal que $S \cap B \setminus \{p\}$ está contenido en uno de los dos semiespacios.
- b) Si $K(p) < 0$, existe una bola abierta B de \mathbb{R}^3 centrada en p tal que existen puntos de $S \cap B$ en ambos semiespacios.

Observación 1.71. Las dos interpretaciones se pueden ver demostradas en [10] en caso de que el lector interesado quisiera tener una idea más clara de porque ocurren estos hechos, sin embargo, no se demostrarán aquí dada su complejidad y por exceder los objetivos de este documento.

Capítulo 2

El teorema *Egregium* de Gauss

Este capítulo tiene como objetivo enunciar y demostrar el *teorema Egregium de Gauss*, así como alguna de sus consecuencias directas. Para ello, primero se deberá saber que es una *isometría entre superficies* (sección 2.1), ya que en el *teorema Egregium de Gauss* (que se presenta en la sección 2.2) se establece que la *curvatura de Gauss* es un elemento que se preserva por isometrías.

Al igual que en el capítulo anterior, los conceptos y resultados que se muestran a lo largo de este se pueden encontrar en cualquier libro básico de Geometría de Superficies, pero destacan principalmente [1], [2], [9] y [10].

2.1. Isometrías

Las *isometrías* son transformaciones que nos permiten reconocer como “iguales” algunas superficies que presentan un aspecto totalmente diferente. Por ello, se tienen las siguientes definiciones y resultados:

Definición 2.1. Se dice que una aplicación $F: S_1 \rightarrow S_2$ entre dos superficies regulares es un *difeomorfismo* si F es un homeomorfismo entre S_1 y S_2 , y además F y su inversa son diferenciables (vistas como aplicaciones entre superficies). También se dice que S_1 es difeomorfa a S_2 si existe un difeomorfismo $F: S_1 \rightarrow S_2$ entre ambas superficies.

Definición 2.2. Se dice que una aplicación $\varphi: V \subset S_1 \rightarrow S_2$ entre dos superficies regulares es un *difeomorfismo local* en $p \in V$ si existe un entorno $W \subset V$ de p tal que φ restringida a W es un difeomorfismo sobre un conjunto abierto $\varphi(W) \subset S_2$.

Definición 2.3. Sean S_1 y S_2 superficies regulares:

1. Una *isometría de S_1 en S_2* es un difeomorfismo $F: S_1 \rightarrow S_2$ tal que para todo $p \in S_1$, la diferencial $dF_p: T_p(S_1) \rightarrow T_{F(p)}(S_2)$ es isometría de espacios euclídeos, es decir, $I_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = I_{F(p)}(dF_p(\mathbf{v}), dF_p(\mathbf{w}))$ para todos $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p(S_1)$.
2. S_1 y S_2 son *isométricas* si existe una isometría de S_1 en S_2 .
3. S_1 es *localmente isométrica* a S_2 si para cada $p \in S_1$, existen abiertos U_1 de S_1 con $p \in U_1$, y U_2 de S_2 , y una isometría φ de U_1 en U_2 . La isometría φ se denomina *isometría local en p* .
4. S_1 y S_2 son *localmente isométricas* si S_1 es localmente isométrica a S_2 , y S_2 es localmente isométrica a S_1 .

Observación 2.4.

- dF_p es isometría si, y solo si, conserva normas, por lo que también se puede probar que $I_p(\mathbf{v}) = I_{F(p)}(dF_p(\mathbf{v}))$ para todo $\mathbf{v} \in T_p(S_1)$. También equivale a que exista una base ortonormal de $T_p(S_1)$ cuya imagen sea una base ortonormal de $T_{F(p)}(S_2)$, y a que la matriz de dF_p en bases ortonormales sea una matriz ortogonal (es decir, que su inversa coincida con su traspuesta).
- Si $F: S_1 \rightarrow S_2$ es difeomorfismo e isometría local para todo $p \in S_1$, entonces es isometría.

Ejemplo 2.5. Sea C el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ donde C es la imagen de la parametrización $\mathbf{x}: \mathbb{R}^2 \rightarrow C$ definida por $\mathbf{x}(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$.

Sea Π un plano afín de ecuación $\Pi = \mathbf{q} + \mathcal{L}(\mathbf{w}, \mathbf{z})$, con $\{\mathbf{w}, \mathbf{z}\}$ base ortonormal, y donde Π es la imagen de la parametrización $\mathbf{y}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \Pi$ dada por $\mathbf{y}(\lambda, \mu) = \mathbf{q} + \lambda \cdot \mathbf{w} + \mu \cdot \mathbf{z}$.

El cilindro C y el plano Π no son isométricos (ni homeomorfos) ya que tienen distinto grupo fundamental; no obstante, C y Π son localmente isométricos: para cada punto $p = \mathbf{x}(u, v) \in C$ existe una carta local:

$$(V = (u - \pi, u + \pi) \times \mathbb{R}, U = C \setminus L, \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}|_V)$$

donde L es la recta $\{x = \cos(u + \pi), y = \sin(u + \pi)\}$.

Entonces, la aplicación $F = \mathbf{y} \circ \tilde{\mathbf{x}}^{-1}: U \rightarrow \mathbf{y}(V)$ es un difeomorfismo cuya expresión local en las cartas $(V, U, \tilde{\mathbf{x}})$ y $(V, \mathbf{y}(U), \mathbf{y}|_V)$ es la identidad, luego la matriz de dF_p en las bases correspondientes a las cartas

($\beta_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{x}_v(u, v)\}$ y $\beta_{\mathbf{y}} = \{\mathbf{y}_\lambda(\lambda, \mu), \mathbf{y}_\mu(\lambda, \mu)\}$) es la matriz identidad. Además, dado que $\beta_{\mathbf{x}}$ y $\beta_{\mathbf{y}}$ son bases ortonormales, de la observación 2.4 se deduce que dF_p es isometría, y por lo tanto, C es localmente isométrico a Π .

De forma análoga, se deduce que Π es localmente isométrico a C , puesto que para cada punto $p = \mathbf{y}(\lambda, \mu) \in \Pi$ se puede considerar la carta local:

$$(V = (\lambda - \pi, \lambda + \pi) \times \mathbb{R}, U = C \setminus L, \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}|_V)$$

y se deduce que $\tilde{\mathbf{x}} \circ \mathbf{y}^{-1} : \mathbf{y}(V) \rightarrow U$ es una isometría.

Proposición 2.6. Sean S_1 y S_2 superficies regulares. Sea $p \in S_1$, (V, U, \mathbf{x}) una carta local de S_1 y $\varphi : U \rightarrow S_2$ una aplicación tal que $\varphi(U)$ es un abierto de S_2 , y $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ es un difeomorfismo. Entonces $(V, \varphi(U), \varphi \circ \mathbf{x})$ es una carta local de S_2 .

Además, si E, F, G son los coeficientes de la primera forma fundamental de S_1 en (V, U, \mathbf{x}) , y $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$ son los de S_2 en $(V, \varphi(U), \varphi \circ \mathbf{x})$. Entonces φ es isometría si, y solo si, $E = \tilde{E}$, $F = \tilde{F}$ y $G = \tilde{G}$.

Demostración. La expresión local de φ es la identidad ya que en las cartas (V, U, \mathbf{x}) y $(V, \varphi(U), \varphi \circ \mathbf{x})$ se tiene que:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(U) \\ \uparrow_{\mathbf{x}} & & \uparrow_{\varphi \circ \mathbf{x}} \\ V & \xrightarrow{Id} & V \end{array}$$

Por lo tanto, sean $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{y} = \varphi \circ \mathbf{x}$, $\beta_1 = \{\mathbf{x}_u(\mathbf{v}), \mathbf{x}_v(\mathbf{v})\}$ base de $T_{\mathbf{x}(\mathbf{v})}(S_1)$, y $\beta_2 = \{\mathbf{y}_u(\mathbf{v}), \mathbf{y}_v(\mathbf{v})\}$ base de $T_{\mathbf{y}(\mathbf{v})}(S_2)$; se tiene que la matriz $d\varphi|_{\mathbf{x}(\mathbf{v})}$ de cambio de base de β_1 a β_2 es la identidad, es decir, $d\varphi|_{\mathbf{x}(\mathbf{v})}(\mathbf{x}_u(\mathbf{v})) = \mathbf{y}_u(\mathbf{v})$ y $d\varphi|_{\mathbf{x}(\mathbf{v})}(\mathbf{x}_v(\mathbf{v})) = \mathbf{y}_v(\mathbf{v})$.

Ahora bien, si φ es isometría, se cumple que $\mathbf{w} \cdot \mathbf{z} = d\varphi|_{\mathbf{x}(\mathbf{v})}(\mathbf{w}) \cdot d\varphi|_{\mathbf{x}(\mathbf{v})}(\mathbf{z})$ para todos $\mathbf{w}, \mathbf{z} \in T_{\mathbf{x}(\mathbf{v})}(S_1)$. Puesto que β_1 es una base de $T_{\mathbf{x}(\mathbf{v})}(S_1)$, y además $d\varphi|_{\mathbf{x}(\mathbf{v})}(\mathbf{x}_u(\mathbf{v})) = \mathbf{y}_u(\mathbf{v})$ y $d\varphi|_{\mathbf{x}(\mathbf{v})}(\mathbf{x}_v(\mathbf{v})) = \mathbf{y}_v(\mathbf{v})$, se tiene que:

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) = d\varphi|_{\mathbf{x}(\mathbf{v})}(\mathbf{x}_u(\mathbf{v})) \cdot d\varphi|_{\mathbf{x}(\mathbf{v})}(\mathbf{x}_u(\mathbf{v})) = \mathbf{y}_u(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{y}_u(\mathbf{v}) = \tilde{E} \\ F &= \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) = d\varphi|_{\mathbf{x}(\mathbf{v})}(\mathbf{x}_u(\mathbf{v})) \cdot d\varphi|_{\mathbf{x}(\mathbf{v})}(\mathbf{x}_v(\mathbf{v})) = \mathbf{y}_u(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{y}_v(\mathbf{v}) = \tilde{F} \\ G &= \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) = d\varphi|_{\mathbf{x}(\mathbf{v})}(\mathbf{x}_v(\mathbf{v})) \cdot d\varphi|_{\mathbf{x}(\mathbf{v})}(\mathbf{x}_v(\mathbf{v})) = \mathbf{y}_v(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{y}_v(\mathbf{v}) = \tilde{G} \end{aligned}$$

Recíprocamente, si $E = \tilde{E}$, $F = \tilde{F}$ y $G = \tilde{G}$, para que φ sea una isometría se debe probar que para todos $\mathbf{w}, \mathbf{z} \in T_{\mathbf{x}(\mathbf{v})}(S_1)$, $\mathbf{w} \cdot \mathbf{z} = d\varphi|_{\mathbf{x}(\mathbf{v})}(\mathbf{w}) \cdot d\varphi|_{\mathbf{x}(\mathbf{v})}(\mathbf{z})$. Esto basta comprobarlo para los elementos de una base de $T_{\mathbf{x}(\mathbf{v})}(S_1)$. Al igual

que antes, dado que β_1 es una base de $T_{\mathbf{x}(\mathbf{v})}(S_1)$, $d\varphi|_{\mathbf{x}(\mathbf{v})}(\mathbf{x}_u(\mathbf{v})) = \mathbf{y}_u(\mathbf{v})$ y $d\varphi|_{\mathbf{x}(\mathbf{v})}(\mathbf{x}_v(\mathbf{v})) = \mathbf{y}_v(\mathbf{v})$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) &= E = \tilde{E} = \mathbf{y}_u(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{y}_u(\mathbf{v}) = d\varphi|_{\mathbf{x}(\mathbf{v})}(\mathbf{x}_u(\mathbf{v})) \cdot d\varphi|_{\mathbf{x}(\mathbf{v})}(\mathbf{x}_u(\mathbf{v})) \\ \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) &= F = \tilde{F} = \mathbf{y}_u(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{y}_v(\mathbf{v}) = d\varphi|_{\mathbf{x}(\mathbf{v})}(\mathbf{x}_u(\mathbf{v})) \cdot d\varphi|_{\mathbf{x}(\mathbf{v})}(\mathbf{x}_v(\mathbf{v})) \\ \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) &= G = \tilde{G} = \mathbf{y}_v(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{y}_v(\mathbf{v}) = d\varphi|_{\mathbf{x}(\mathbf{v})}(\mathbf{x}_v(\mathbf{v})) \cdot d\varphi|_{\mathbf{x}(\mathbf{v})}(\mathbf{x}_v(\mathbf{v}))\end{aligned}$$

□

2.2. Teorema *Egregium* de Gauss

En esta sección se presenta uno de los resultados fundamentales de la Geometría clásica de superficies en el espacio: el *teorema Egregium de Gauss*. Este teorema afirma que “la curvatura de Gauss se conserva por isometrías locales”; y tiene multitud de consecuencias, entre ellas, que si dos superficies tienen funciones de curvatura de Gauss diferentes (por ejemplo el plano y la esfera), no es posible encontrar una isometría local entre ellas [1]. Este hecho dará lugar a los siguientes capítulos, donde se abordará el problema de la representación de la superficie terrestre en un plano.

No obstante, para llegar a demostrar el *teorema Egregium de Gauss* (subsección 2.2.5) es necesario definir primero las *ecuaciones de Weingarten* (subsección 2.2.1), las *ecuaciones de Gauss* y los *símbolos de Christoffel* (subsecciones 2.2.2 y 2.2.3) y la *fórmula de Gauss* (subsección 2.2.4). Para ello, a lo largo de toda la sección se tiene que (V, U, \mathbf{x}) es una carta local de una superficie S orientada por N , y $p = \mathbf{x}(\mathbf{v}) \in S$.

2.2.1. Ecuaciones de Weingarten

Sea $\beta = \{\mathbf{x}_u(\mathbf{v}), \mathbf{x}_v(\mathbf{v})\}$ base de $T_p(S)$, en la demostración de la proposición 1.43 se demostró que:

$$\begin{aligned}A_p(\mathbf{x}_u(\mathbf{v})) &= -dN_p(\mathbf{x}_u(\mathbf{v})) = -\tilde{N}_u(\mathbf{v}) \\ A_p(\mathbf{x}_v(\mathbf{v})) &= -dN_p(\mathbf{x}_v(\mathbf{v})) = -\tilde{N}_v(\mathbf{v})\end{aligned}$$

Utilizando el cálculo de la matriz de A_p en la base β que se obtuvo en el corolario 1.57 se tiene:

$$\tilde{N}_u(\mathbf{v}) = \frac{F(\mathbf{v})f(\mathbf{v}) - G(\mathbf{v})e(\mathbf{v})}{E(\mathbf{v})G(\mathbf{v}) - F^2(\mathbf{v})}\mathbf{x}_u(\mathbf{v}) + \frac{F(\mathbf{v})e(\mathbf{v}) - E(\mathbf{v})f(\mathbf{v})}{E(\mathbf{v})G(\mathbf{v}) - F^2(\mathbf{v})}\mathbf{x}_v(\mathbf{v}) \quad (2.1)$$

$$\tilde{N}_v(\mathbf{v}) = \frac{F(\mathbf{v})g(\mathbf{v}) - G(\mathbf{v})f(\mathbf{v})}{E(\mathbf{v})G(\mathbf{v}) - F^2(\mathbf{v})}\mathbf{x}_u(\mathbf{v}) + \frac{F(\mathbf{v})f(\mathbf{v}) - E(\mathbf{v})g(\mathbf{v})}{E(\mathbf{v})G(\mathbf{v}) - F^2(\mathbf{v})}\mathbf{x}_v(\mathbf{v}) \quad (2.2)$$

Definición 2.7. Las ecuaciones 2.1 y 2.2 se conocen con el nombre de *ecuaciones de Weingarten*.

2.2.2. Ecuaciones de Gauss y símbolos de Christoffel

Sea $B = \{\mathbf{x}_u(\mathbf{v}), \mathbf{x}_v(\mathbf{v}), \tilde{N}(\mathbf{v})\}$ base de \mathbb{R}^3 . Dado que \tilde{N} es unitario y ortogonal a $\mathbf{x}_u(\mathbf{v})$ y $\mathbf{x}_v(\mathbf{v})$, para todo $\mathbf{w} = a \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) + b \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) + c \cdot \tilde{N}(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^3$ se tiene que $c = \mathbf{w} \cdot \tilde{N}(\mathbf{v})$.

Escribiendo las derivadas segundas de \mathbf{x} en la base B se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{x}_{uu}(\mathbf{v}) = \Gamma_{11}^1 \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) + \Gamma_{11}^2 \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) + \tilde{e} \cdot \tilde{N}(\mathbf{v}) \quad (2.3)$$

$$\mathbf{x}_{uv}(\mathbf{v}) = \Gamma_{12}^1 \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) + \Gamma_{12}^2 \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) + \tilde{f} \cdot \tilde{N}(\mathbf{v}) \quad (2.4)$$

$$\mathbf{x}_{vu}(\mathbf{v}) = \Gamma_{21}^1 \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) + \Gamma_{21}^2 \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) + \tilde{f} \cdot \tilde{N}(\mathbf{v}) \quad (2.5)$$

$$\mathbf{x}_{vv}(\mathbf{v}) = \Gamma_{22}^1 \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) + \Gamma_{22}^2 \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) + \tilde{g} \cdot \tilde{N}(\mathbf{v}) \quad (2.6)$$

donde $\tilde{e} = \mathbf{x}_{uu}(\mathbf{v}) \cdot \tilde{N}(\mathbf{v})$, $\tilde{f} = \mathbf{x}_{uv}(\mathbf{v}) \cdot \tilde{N}(\mathbf{v}) = \mathbf{x}_{vu}(\mathbf{v}) \cdot \tilde{N}(\mathbf{v})$, y $\tilde{g} = \mathbf{x}_{vv}(\mathbf{v}) \cdot \tilde{N}(\mathbf{v})$.

Definición 2.8. El conjunto de las ecuaciones 2.3, 2.4, 2.5 y 2.6 se conocen con el nombre de *ecuaciones de Gauss*.

Definición 2.9. Los coeficientes Γ_{ij}^k con $i, j, k \in \{1, 2\}$ se denominan *símbolos de Christoffel* de la carta \mathbf{x} .

Observación 2.10. Dado que $\mathbf{x}_{uv}(\mathbf{v}) = \mathbf{x}_{vu}(\mathbf{v})$, se tiene que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Por lo tanto, solo hay 6 símbolos de Christoffel.

2.2.3. Cálculo de los símbolos de Christoffel

Los símbolos de Christoffel se calculan de la siguiente manera.

Primero se multiplica cada una de las ecuaciones de Gauss por $\mathbf{x}_u(\mathbf{v})$ y $\mathbf{x}_v(\mathbf{v})$ obteniendo las ecuaciones:

$$\mathbf{x}_{uu}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) = \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) = \Gamma_{11}^1 E(\mathbf{v}) + \Gamma_{11}^2 F(\mathbf{v})$$

$$\mathbf{x}_{uu}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) = \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) = \Gamma_{11}^1 F(\mathbf{v}) + \Gamma_{11}^2 G(\mathbf{v})$$

$$\mathbf{x}_{uv}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) = \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) = \Gamma_{12}^1 E(\mathbf{v}) + \Gamma_{12}^2 F(\mathbf{v})$$

$$\mathbf{x}_{uv}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) = \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) = \Gamma_{12}^1 F(\mathbf{v}) + \Gamma_{12}^2 G(\mathbf{v})$$

$$\mathbf{x}_{vv}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) = \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) = \Gamma_{22}^1 E(\mathbf{v}) + \Gamma_{22}^2 F(\mathbf{v})$$

$$\mathbf{x}_{vv}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) = \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) = \Gamma_{22}^1 F(\mathbf{v}) + \Gamma_{22}^2 G(\mathbf{v})$$

Por otro lado, derivando respecto de u y v los coeficientes E y G de la primera forma fundamental se obtiene:

$$E_u(\mathbf{v}) = 2 \cdot \mathbf{x}_{uu}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) \Rightarrow \mathbf{x}_{uu}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) = \frac{E_u(\mathbf{v})}{2} \quad (2.7)$$

$$E_v(\mathbf{v}) = 2 \cdot \mathbf{x}_{uv}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) \Rightarrow \mathbf{x}_{uv}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) = \frac{E_v(\mathbf{v})}{2} \quad (2.8)$$

$$G_u(\mathbf{v}) = 2 \cdot \mathbf{x}_{uv}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) \Rightarrow \mathbf{x}_{uv}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) = \frac{G_u(\mathbf{v})}{2} \quad (2.9)$$

$$G_v(\mathbf{v}) = 2 \cdot \mathbf{x}_{vv}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) \Rightarrow \mathbf{x}_{vv}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) = \frac{G_v(\mathbf{v})}{2} \quad (2.10)$$

Y derivando respecto de u y v el coeficiente F de la primera forma fundamental se obtiene:

$$\begin{aligned} F_u(\mathbf{v}) &= \mathbf{x}_{uu}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) + \mathbf{x}_{uv}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) = \mathbf{x}_{uu}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) + \frac{E_v(\mathbf{v})}{2} \\ \Rightarrow \mathbf{x}_{uu}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) &= F_u(\mathbf{v}) - \frac{E_v(\mathbf{v})}{2} \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} F_v(\mathbf{v}) &= \mathbf{x}_{uv}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) + \mathbf{x}_{vv}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) = \frac{G_u(\mathbf{v})}{2} + \mathbf{x}_{vv}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) \\ \Rightarrow \mathbf{x}_{vv}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) &= F_v(\mathbf{v}) - \frac{G_u(\mathbf{v})}{2} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Sustituyendo los valores calculados en 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11 y 2.12 en las ecuaciones planteadas al principio de esta subsección, se obtiene un sistema de 6 ecuaciones, en el cual los símbolos de Christoffel dependen de E , F y G . Dicho sistema se puede dividir en 3 subsistemas de tamaño 2×2 :

$$\begin{pmatrix} E(\mathbf{v}) & F(\mathbf{v}) \\ F(\mathbf{v}) & G(\mathbf{v}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{uu}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) \\ \mathbf{x}_{uu}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_u(\mathbf{v})}{2} \\ F_u(\mathbf{v}) - \frac{E_v(\mathbf{v})}{2} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

$$\begin{pmatrix} E(\mathbf{v}) & F(\mathbf{v}) \\ F(\mathbf{v}) & G(\mathbf{v}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{uv}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) \\ \mathbf{x}_{uv}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_v(\mathbf{v})}{2} \\ \frac{G_u(\mathbf{v})}{2} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

$$\begin{pmatrix} E(\mathbf{v}) & F(\mathbf{v}) \\ F(\mathbf{v}) & G(\mathbf{v}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{vv}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) \\ \mathbf{x}_{vv}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_v(\mathbf{v}) - \frac{G_u(\mathbf{v})}{2} \\ \frac{G_v(\mathbf{v})}{2} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Finalmente, los tres subsistemas (2.13, 2.14 y 2.15) se pueden agrupar en la siguiente ecuación matricial, y dado que la matriz $\begin{pmatrix} E(\mathbf{v}) & F(\mathbf{v}) \\ F(\mathbf{v}) & G(\mathbf{v}) \end{pmatrix}$ es

invertible, se tiene:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{E_u(\mathbf{v})}{2} & \frac{E_v(\mathbf{v})}{2} & F_v(\mathbf{v}) - \frac{G_u(\mathbf{v})}{2} \\ F_u(\mathbf{v}) - \frac{E_v(\mathbf{v})}{2} & \frac{G_u(\mathbf{v})}{2} & \frac{G_v(\mathbf{v})}{2} \end{pmatrix}$$

Observación 2.11. Las funciones $\Gamma_{ij}^k : V \rightarrow \mathbb{R}$ con $i, j, k \in \{1, 2\}$ son funciones diferenciables.

Finalmente, cabe destacar el siguiente resultado:

Corolario 2.12. *Todos los conceptos geométricos y propiedades que se expresen en términos de los símbolos de Christoffel son invariantes frente a isometrías.*

Demostración. Los símbolos de Christoffel se pueden calcular en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental y de sus derivadas. Por lo tanto, aplicando la proposición 2.6 se concluye. \square

2.2.4. Fórmula de Gauss

El objetivo de esta subsección es obtener la *fórmula de Gauss* a partir de la igualdad $(\mathbf{x}_{uu})_v(\mathbf{v}) - (\mathbf{x}_{uv})_u(\mathbf{v}) = 0$.

La *fórmula de Gauss* permite expresar la curvatura de Gauss en función de los coeficientes de la primera forma fundamental y de sus derivadas, evitando así, tener que calcular los coeficientes de la segunda forma fundamental.

Notación 2.13. Para una lectura más clara de las siguientes cálculos, se entiende que los cálculos se hacen en \mathbf{v} , con $\mathbf{v} \in V$.

En primer lugar, se deriva respecto de v la ecuación 2.3, y en la relación resultante, se sustituye \mathbf{x}_{uu} , \mathbf{x}_{uv} , \mathbf{x}_{vv} , \tilde{N}_u y \tilde{N}_v por sus valores correspondientes en la base $B = \{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \tilde{N}\}$ que vienen dados por las ecuaciones de Weingarten (ecuaciones 2.1 y 2.2) y de Gauss (ecuaciones 2.3, 2.4, 2.5 y 2.6). Haciendo esto se obtiene:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_{uu})_v &= (\Gamma_{11}^1)_v \cdot \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^1 \cdot \mathbf{x}_{uv} + (\Gamma_{11}^2)_v \cdot \mathbf{x}_v + \Gamma_{11}^2 \cdot \mathbf{x}_{vv} + \tilde{e}_v \cdot \tilde{N} + \tilde{e} \cdot \tilde{N}_v \\ &= (\Gamma_{11}^1)_v \cdot \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^1 \cdot (\Gamma_{12}^1 \cdot \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2 \cdot \mathbf{x}_v + \tilde{f} \cdot \tilde{N}) + \\ &\quad + (\Gamma_{11}^2)_v \cdot \mathbf{x}_v + \Gamma_{11}^2 \cdot (\Gamma_{22}^1 \cdot \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \cdot \mathbf{x}_v + \tilde{g} \cdot \tilde{N}) \\ &\quad + \tilde{e}_v \cdot \tilde{N} + \tilde{e} \cdot \left(\frac{Fg - Gf}{EG - F^2} \mathbf{x}_u + \frac{Ff - Eg}{EG - F^2} \mathbf{x}_v \right) \end{aligned} \tag{2.16}$$

Después se realiza el mismo proceso pero esta vez derivando respecto de u la ecuación 2.4. En esta ocasión se obtiene:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x}_{uv})_u &= (\Gamma_{12}^1)_u \cdot \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^1 \cdot \mathbf{x}_{uu} + (\Gamma_{12}^2)_u \cdot \mathbf{x}_v + \Gamma_{12}^2 \cdot \mathbf{x}_{uv} + \tilde{f}_u \cdot \tilde{N} + \tilde{f} \cdot \tilde{N}_u \\
&= (\Gamma_{12}^1)_u \cdot \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^1 \cdot (\Gamma_{11}^1 \cdot \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \cdot \mathbf{x}_v + \tilde{e} \cdot \tilde{N}) + \\
&+ (\Gamma_{12}^2)_u \cdot \mathbf{x}_v + \Gamma_{12}^2 \cdot (\Gamma_{12}^1 \cdot \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2 \cdot \mathbf{x}_v + \tilde{f} \cdot \tilde{N}) \\
&+ \tilde{f}_u \cdot \tilde{N} + \tilde{f} \cdot \left(\frac{Ff - Ge}{EG - F^2} \mathbf{x}_u + \frac{Fe - Ef}{EG - F^2} \mathbf{x}_v \right)
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Al expresar $(\mathbf{x}_{uu})_v(\mathbf{v}) - (\mathbf{x}_{uv})_u(\mathbf{v}) = 0$ con los resultados hallados en 2.16 y 2.17, se obtiene una expresión $A \cdot \mathbf{x}_u(\mathbf{v}) + B \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{v}) + C \cdot \tilde{N}(\mathbf{v}) = 0$, de la que se deduce que $A=B=C=0$.

Si escribimos todos los coeficientes de $\mathbf{x}_v(\mathbf{v})$ que aparecen, se tiene que

$$\begin{aligned}
0 = B &= \Gamma_{11}^1 \cdot \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^2 \cdot \Gamma_{22}^2 + \tilde{e} \cdot \frac{Ff - Eg}{EG - F^2} \\
&- (\Gamma_{12}^1 \cdot \Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{12}^2 \cdot \Gamma_{12}^2 + \tilde{f} \cdot \frac{Fe - Ef}{EG - F^2})
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Utilizando el corolario 1.68 se observa que:

$$\tilde{e} \cdot \frac{Ff - Eg}{EG - F^2} - \tilde{f} \cdot \frac{Fe - Ef}{EG - F^2} = -E \cdot \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -E \cdot K \tag{2.19}$$

Finalmente, se deduce de 2.18 y 2.19 la siguiente igualdad:

$$(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \cdot \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \cdot \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 \cdot \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \cdot \Gamma_{22}^2 = -E \cdot K$$

Definición 2.14. La *fórmula de Gauss* de una superficie es:

$$(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \cdot \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \cdot \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 \cdot \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \cdot \Gamma_{22}^2 = -E \cdot K \tag{2.20}$$

Observación 2.15. La curvatura de Gauss de una superficie se puede calcular usando solo los coeficientes de la primera forma fundamental. Para ello, basta con calcular los coeficientes de Christoffel y utilizar la fórmula de Gauss.

2.2.5. El teorema *Egregium*

En estos momentos, ya podemos enunciar y demostrar el famoso *teorema Egregium de Gauss*, enunciado por Gauss en 1828 en su libro *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (accesible en [8]), y que decía textualmente: “Si una superficie curva se desarrolla sobre otra cualquiera, la medida de la curvatura en cada punto permanece sin cambios.” En aquellos tiempos, decir que una superficie se podía desarrollar sobre otra equivalía a ser localmente isométricas [11]. Expresando este teorema con la notación utilizada hasta el momento se tiene:

Teorema 2.16. Teorema *Egregium de Gauss*. *La curvatura de Gauss de una superficie regular es invariante por isometrías locales. Es decir, sean U_1 abierto de S_1 con $p \in U_1$, y U_2 abierto de S_2 tal que $F : U_1 \rightarrow U_2$ es una isometría local, entonces $K_{S_1}(p) = K_{S_2}(F(p))$ para todo $p \in S_1$, donde K_{S_1} y K_{S_2} representan, respectivamente, las curvaturas de Gauss de S_1 y S_2 .*

Demostración. Sea $p \in S_1$ y sea $F : U_1 \rightarrow U_2$ una isometría local en p . Si se eligen cartas como en la proposición 2.6 tales que $E=\tilde{E}$, $F=\tilde{F}$ y $G=\tilde{G}$.

Utilizando la fórmula de Gauss (definición 2.14) para el cálculo de las curvaturas de Gauss de S_1 ($K_{S_1}(p)$) y de S_2 ($K_{S_2}(F(p))$) se deduce que son idénticas ya que los símbolos de Christoffel solo dependen de la primera forma fundamental (y estos coinciden). \square

Observación 2.17. En general, el recíproco del teorema *Egregium* de Gauss es falso: se consideran las superficies S_1 y S_2 parametrizadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(u, v) &= (u \cdot \cos(v), u \cdot \sen(v), \log(u)) \\ \mathbf{y}(u, v) &= (u \cdot \cos(v), u \cdot \sen(v), v)\end{aligned}$$

Ambas superficies tienen curvatura de Gauss igual a $-\frac{1}{(1+u^2)^2}$. Sin embargo, la composición $\phi = \mathbf{y} \circ \mathbf{x}^{-1}$ no es una isometría local ya que el módulo de los vectores \mathbf{x}_u y $d\phi_p(\mathbf{x}_u) = \mathbf{y}_u$ no coincide ($|\mathbf{x}_u| = \frac{1}{u^2} \neq 1 = |\mathbf{y}_u|$).

El *teorema de Minding* afirma que existen situaciones particulares en el que el recíproco si que es cierto, en particular, si S_1 y S_2 son superficies regulares con igual curvatura de Gauss constante, entonces S_1 y S_2 son localmente isométricas. La demostración de este teorema se puede ver en detalle en [1] y en [10], no obstante, se ha decidido omitir en este documento ya que queda fuera del alcance de este debido a su complejidad y su poca utilidad para el resto de la memoria.

Corolario 2.18. *No existe ninguna isometría entre un abierto del plano y un abierto de la esfera.*

Demostración. Del ejemplo 1.70 se sabe que la curvatura de Gauss en cualquier punto de un plano es $K(p) = 0$, mientras que para cualquier punto de una esfera de centro C y radio r es $K(p) = \frac{1}{r^2}$. Por lo tanto, dado que el plano y la esfera son superficies regulares, utilizando el teorema *Egregium* de Gauss (teorema 2.16) se deduce que nunca puede existir una isometría (local) entre ambos. \square

Observación 2.19. Dado que el cilindro es localmente isométrico al plano (ejemplo 2.5), tampoco existe ninguna isometría entre un abierto del cilindro y un abierto de la esfera.

Capítulo 3

Los Sistemas de Información Geográfica

A lo largo de la historia, el ser humano siempre ha tenido la necesidad de representar la superficie de la Tierra y los elementos situados sobre ella, así como de establecer la posición de estos elementos sobre la superficie terrestre. Como consecuencia de esta necesidad, surgen los *Sistemas de Información Geográfica*.

Los *Sistemas de Información Geográfica*, conocidos también como *SIG* o *GIS* (de su acrónimo inglés *Geographic Information System*), se pueden definir como “sistemas de información capaces de integrar, almacenar, editar, analizar, compartir y presentar información georreferenciada”, en otras palabras, información que incorpora su posición en el espacio.

Esta información debe ser lo más precisa posible con el fin de obtener buenos resultados al utilizar los SIG, además de ser coherente con la realidad. Por este motivo, es fundamental tener un conocimiento riguroso de la forma de la superficie terrestre.

La *Geodesia* es la rama de la ciencia que se encarga de ello, puesto que es la responsable de determinar, por observación y medición, la figura, las dimensiones y el campo gravitatorio de la Tierra, y cómo varían en el tiempo. Su estudio y análisis es, por lo tanto, fundamental para poder trabajar con los SIG.

A lo largo de este capítulo se presentan qué son los *Sistemas de Información Geográfica* (sección 3.1) y algunos conceptos claves de la *Geodesia* (sección 3.2), siendo los principales libros de referencia para este capítulo [12], [13] y [14].

Además, en la subsección 3.2.5 se presentará la *red geodésica española* y cómo ha evolucionado a lo largo de los años.

3.1. Introducción a los SIG

A principios de los años cincuenta, y gracias al nacimiento de la Informática y a un creciente interés por la información geográfica y su uso óptimo, John K. Wright publica su obra *Elements of Cartography* como resultado de su trabajo en la *Sociedad Geográfica Americana*. Esta obra fue especialmente importante para el posterior desarrollo de los SIG, a pesar de que hasta el año 1966 no se creara el primer SIG: el *Canadian Geographic Information System*, desarrollado por Roger Tomlinson en Canadá, y cuyo objetivo era la digitalización y análisis semiautomático de la fotografía aérea para el inventario geográfico canadiense y su gestión del territorio rural [12].

Hoy en día, los SIG juegan un papel muy importante ya que aproximadamente un 70 % de la información que se utiliza en cualquier campo está georreferenciada [12], es decir, incorpora su posición en el espacio (de acuerdo con un sistema de coordenadas previamente establecido, y como resultado de una proyección cartográfica). Gracias a los SIG, esta información espacial puede ser aprovechada, permitiendo optimizar en gran medida multitud de análisis.

Los SIG se pueden definir de múltiples maneras, como la utilizada al inicio de este capítulo, pero aparte de dicha definición, también es habitual encontrar las siguientes dos acepciones:

Definición 3.1.

- La definición clásica de C.D. Tomlin, que en su libro *Geographic information systems and cartographic modelling* de 1990 [15] describía un *Sistemas de Información Geográfica* como “un elemento que permite analizar, presentar e interpretar hechos relativos a la superficie terrestre”. En otras palabras, definía un SIG como un conjunto de hardware y software diseñado específicamente para la adquisición, mantenimiento, y uso de datos cartográficos.
- Otra acepción, y que es más utilizada en la actualidad que la anterior, define un *Sistemas de Información Geográfica* como un caso particular de Sistema de Información en el que toda la información utilizada está georreferenciada; entendiéndose como Sistema de Información o SI a la unión de información digital y programas informáticos con el propósito de analizarlos para alcanzar un objetivo concreto. Es decir, un SIG es un sistema de bases de datos especializado en datos georreferenciados.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, un SIG debe permitir leer, editar, almacenar y gestionar datos espaciales; analizar dichos datos; y generar resultados a partir de dichos datos en forma de mapas, informes, gráficos, etc.

3.1.1. Componentes de un SIG

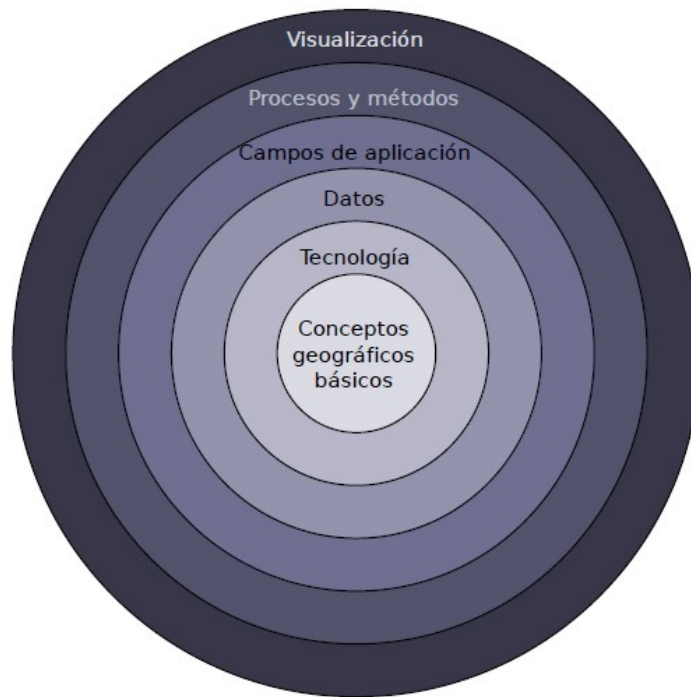
En general, los SIG están formados por una unión de varios subsistemas que se encargan de realizar todas esas tareas [12]:

- Subsistema de datos: se encarga de la gestión de los datos (entrada, salida, almacenamiento, etc.) de un SIG. También es el responsable de conceder el acceso a los datos al resto de subsistemas para su posterior uso.
- Subsistema de visualización y creación de cartografía: se encarga de crear y editar representaciones gráficas (mapas, gráficos, leyendas, etc.) a partir de los datos georreferenciados para poder interactuar con ellos.
- Subsistema de análisis: contiene procesos y métodos utilizados para el análisis de datos geográficos.

Otra forma más habitual de ver los componentes que conforman un SIG es observando los cinco elementos básicos que lo conforman, es decir, los datos, los métodos, el software, el hardware y las personas encargadas de diseñar y usar el software (ver figura 3.1a). Sin embargo, muchos autores proponen modificar este esquema clásico de cinco elementos y utilizar uno que se ajuste más a los SIG actuales. Por ejemplo, [16] plantea un esquema como el expuesto en la figura 3.1b.



(a) Enfoque clásico. Fuente: [24]



(b) Enfoque moderno. Fuente: [12]

Figura 3.1: Elementos que conforman un SIG.

3.1.2. Aplicaciones de los SIG

Aunque las principales funciones de los SIG son el almacenamiento, la visualización, la consulta y el análisis de datos espaciales (aplicado a, por ejemplo, calcular las coordenadas de un lugar, medir la distancia entre dos puntos, etc.), también son utilizados en tareas más complejas como pueden ser la toma de decisiones en planificación física, la ordenación territorial, o los estudios de impacto medioambiental (por ejemplo, para hallar el mejor lugar para la instalación de un vertedero, para encontrar la mejor ubicación de una red de torres de vigilancia forestal, etc.); o en el estudio de procesos naturales y dinámicos mediante la integración de modelos matemáticos (por ejemplo, para analizar qué zonas pueden inundarse en caso de lluvias torrenciales, cómo podría mejorarse la eficiencia del uso del agua, etc.) [13].

Por lo tanto, cualquier actividad relacionada con el uso de datos espaciales puede beneficiarse del trabajo con los SIG (ya sean actividades científicas, empresariales, de gestión, etc.), ya que los SIG permiten integrar bases de datos espaciales e implementar multitud de técnicas de análisis de datos.

Sin embargo, en la actualidad, las principales líneas de trabajo con los SIG son [13]:

- La cartografía de alta resolución.
- La modelización de procesos ambientales y técnicas de simulación de fenómenos extremos.
- Permitir la accesibilidad a los SIG a través de Internet para su uso en la publicidad, educación ambiental, aplicaciones empresariales, etc.

3.1.3. Capas de los SIG

Desde el punto de vista de los datos, un SIG está formado por un conjunto de *capas de información*. Cada capa simboliza la misma zona geográfica (ya que representan una zona georreferenciada utilizando el mismo sistema de coordenadas), pero, al mismo tiempo, cada una de ellas aporta información de distinta temática (figura 3.2).

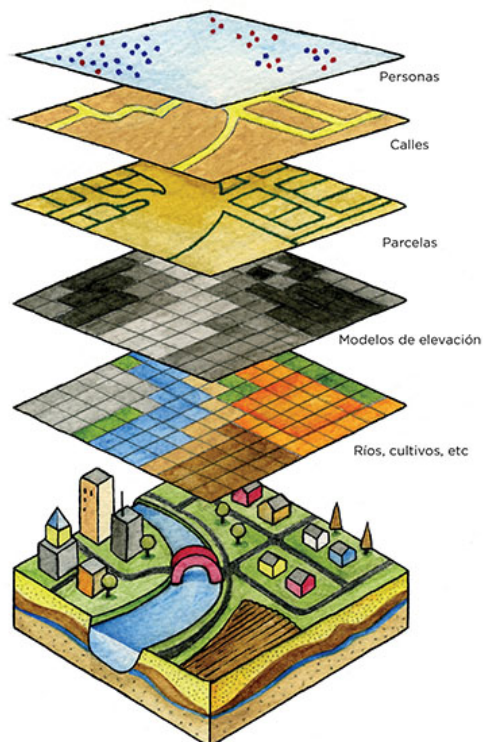


Figura 3.2: Diferentes capas a partir del mismo territorio. Fuente: [25].

Observación 3.2. Para un determinado estudio, se puede escoger qué capas mostrar en un SIG, lo que deriva en un sencillo análisis de los datos y en la obtención de mejores resultados.

La información representada en una capa se puede almacenar en formato *ráster* o *vectorial*:

- El *formato ráster* divide el territorio en una matriz cuadrada de celdas, donde cada celda representa una porción del territorio. Cada celda toma un valor único que se considera representativo para todo el territorio que abarca la misma. La información que se almacena en este formato suele provenir de imágenes de satélite y fotografías aéreas.
- El *formato vectorial* representa cada uno de los objetos de la superficie como puntos, líneas o polígonos mediante la codificación explícita de sus coordenadas. La información que se almacena en este formato suele provenir de la digitalización de mapas o de datos obtenidos por el uso de dispositivos de posicionamiento global o GPS (*global position system*).

En general, para la representación de los objetos resulta más eficiente el uso de un formato vectorial, sin embargo, para el uso de herramientas de análisis espacial resulta más conveniente el formato ráster [13].

Ejemplo 3.3. En la figura 3.3 se puede ver el mismo terreno codificado en formato ráster y en formato vectorial.

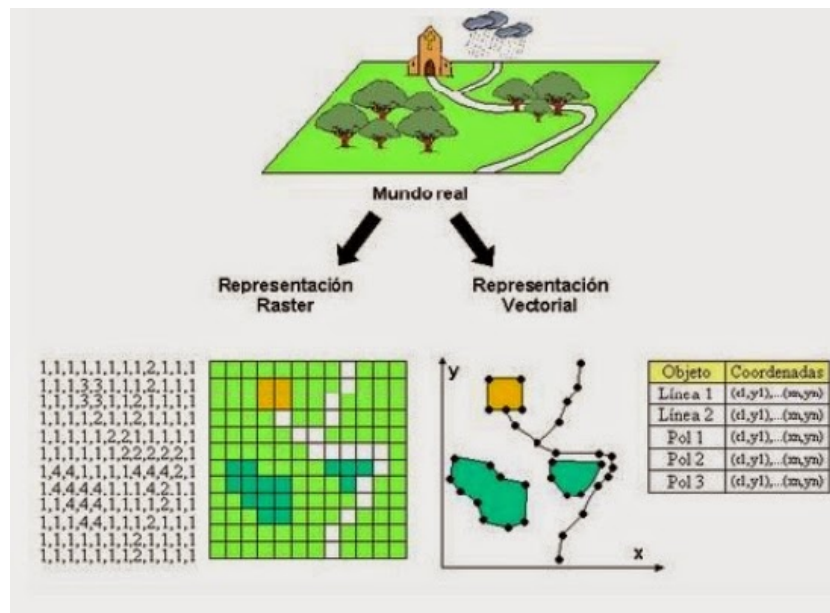


Figura 3.3: Formato ráster vs formato vectorial. Fuente: [26].

Observación 3.4. Antes de analizar los datos en un SIG, hay que asegurarse de que todas las capas utilizadas sean homogéneas, es decir, que se hayan obtenido al usar la misma proyección y sistema de referencia. Por esta razón, a veces es necesario recalcular las capas de información antes de utilizarlas en un SIG, ya que emplear diferentes proyecciones en una misma vista puede provocar discrepancias que derivan en desplazamientos espaciales de los elementos cartográficos, variaciones en superficies, perímetros y coordenadas, etc. (figura 3.4).



Figura 3.4: Mismas coordenadas en diferentes proyecciones. Fuente: [27].

3.2. La Geodesia

El uso de información georreferenciada requiere la comprensión de una serie de conceptos previos para poder realizar correctamente cualquier tipo de operaciones. Los datos georreferenciados son datos espaciales que se sitúan sobre la superficie terrestre, por lo que es necesario conocer de forma precisa la forma de la Tierra, para tratar con exactitud y rigor estos datos cuando se trabaja con los SIG.

La Geodesia es la ciencia que estudia la figura, las dimensiones y el campo gravitatorio de la Tierra, y como varía a lo largo del tiempo. Entre sus campos de estudio destacan los siguientes:

- Campo gravitatorio: cuyo objetivo es determinar el campo gravitacional de la Tierra y observar como varía a lo largo del tiempo.
- Fenómenos geodinámicos: cuyo objetivo es medir y representar las fuerzas que intervienen en los procesos dinámicos de la Tierra como las mareas, el movimiento polar y las deformaciones de la corteza terrestre.

- Posicionamiento: cuyo objetivo es determinar la localización de puntos sobre la superficie de la Tierra.

Para poder determinar la posición de cualquier punto sobre la superficie terrestre, se debe establecer un sistema de referencia, de forma que cualquier lugar de la superficie terrestre esté determinado por unas coordenadas únicas respecto de dicho sistema (subsección 3.2.1).

No obstante, algunos factores como la fuerza gravitatoria, la presión de la radiación solar o la dinámica de fluidos del magma terrestre provocan que la forma de la Tierra, que de por sí ya es irregular, varíe constantemente a lo largo del tiempo. Por este motivo, es necesario utilizar representaciones simplificadas de la Tierra, y se trabaja habitualmente con dos modelos: el *geoide* (subsección 3.2.2) y el *elipsoide* (subsección 3.2.3).

Entre ambos modelos se puede establecer un punto de tangencia que se conoce como *datum geodésico* (subsección 3.2.4), y a partir del cual se pueden constituir las *redes geodésicas* (subsección 3.2.5) que conforman la base cartográfica de los países.

3.2.1. Coordenadas geográficas

Uno de los objetivos principales de la Geodesia consiste en establecer un marco o sistema de referencia que permita definir analíticamente la posición de un objeto sobre la superficie de la Tierra, y fijar un conjunto de puntos (los *vértices geodésicos*) cuyas coordenadas en dicho sistema sean conocidas con una alta precisión, ya que servirán como referencia para calcular las coordenadas del resto de puntos.

Aunque existen multitud de sistemas de coordenadas (cartesianas, polares, cilíndricas, esféricas, etc.), la elección de uno u otro dependerá del uso al que esté destinado, dado que se escogerá aquel que muestre la información que se busca de la forma más sencilla.

En general, para definir la posición de un punto sobre la superficie terrestre se emplea el *sistema de coordenadas geográficas*, que es un subtipo de las coordenadas esféricas. Esta elección es consecuencia directa del uso del esferoide como superficie de referencia para estudiar la Tierra (subsección 3.2.3), ya que debido a su similitud con la esfera, normalmente se utilizan elementos de la Geometría esférica clásica.

El *sistema de coordenadas geográficas* utiliza dos valores angulares (*latitud* y *longitud*) para describir la posición de cualquier punto en la Tierra, pero antes de definir estos valores angulares, es necesario presentar los siguientes términos:

Definición 3.5.

- El eje imaginario en torno al cual se produce la rotación de la Tierra se denomina *eje polar*.
- Un eje imaginario que pasa por el centro de la Tierra y es perpendicular al eje polar se denomina *eje ecuatorial*.
- El *plano ecuatorial* es el plano que contiene a un eje ecuatorial y que es perpendicular al eje polar.
- Una *circunferencia máxima* en una esfera es la intersección de esa esfera con un plano que pasa por el centro de la esfera.

Observación 3.6. Una circunferencia máxima de la Tierra es aquella formada por la intersección de la Tierra con un plano que pasa por el centro de la Tierra.

Expuestos los anteriores términos, ahora ya se puede definir correctamente todos los conceptos relacionados con el uso de las coordenadas geográficas sobre la superficie terrestre.

Definición 3.7. La *latitud* (φ) de un punto (en la superficie terrestre) es el ángulo que forma el plano ecuatorial con la línea que une el centro de la Tierra y dicho punto.

Definición 3.8. Las líneas horizontales que unen puntos que tienen la misma latitud se denominan *paralelos*.

Observación 3.9. Por definición, la latitud es 0° en el plano ecuatorial o ecuador, y divide a la Tierra en los hemisferios Norte y Sur. La latitud de un punto puede expresarse indicando si un punto se encuentra al norte o al sur del ecuador, o bien usando un signo (en cuyo caso, los puntos situados al sur del ecuador tendrán un signo negativo).

Definición 3.10. La *longitud* (λ) de un punto (en la superficie terrestre) es el ángulo que forman el plano que contiene a dicho punto y al eje polar, y otro plano que contiene al eje polar y que se toma como referencia.

Definición 3.11. Un meridiano es una semicircunferencia máxima imaginaria de la superficie terrestre que pasa por los Polos Norte y Sur.

Observación 3.12. Los puntos que tienen la misma longitud se encuentran sobre el mismo meridiano.

Dada la definición de meridiano, una definición alternativa de longitud es la siguiente:

Definición 3.13. La *longitud* (λ) de un punto (en la superficie terrestre) es el ángulo entre un meridiano de referencia y el meridiano que pasa por dicho punto.

Observación 3.14. Aunque a lo largo de la historia, el meridiano de referencia ha ido cambiando, sobre todo entre diferentes países, en la actualidad se utiliza como meridiano de referencia el meridiano de Greenwich que pasa por el Observatorio de Greenwich (en Reino Unido), y divide a la Tierra en los hemisferios Este y Oeste. La longitud de un punto puede expresarse indicando si un punto se encuentra al este o al oeste del meridiano de Greenwich, o bien usando un signo (en cuyo caso, los puntos situados al oeste de Greenwich tendrán un signo negativo).

En la figura 3.5 podemos ver un resumen de todos los conceptos que han sido explicados previamente.

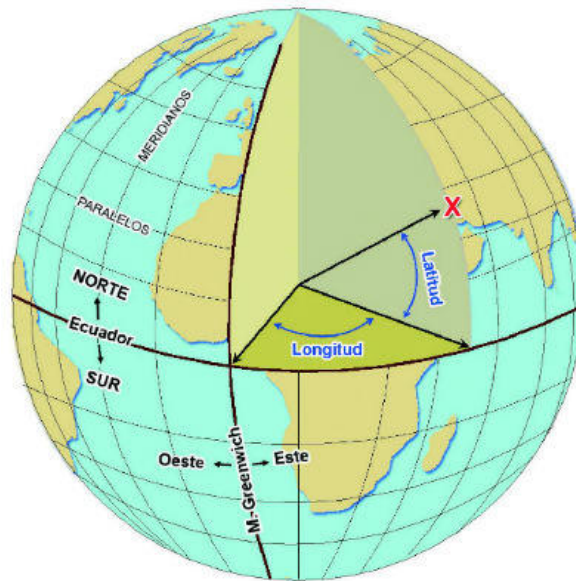


Figura 3.5: Coordenadas geográficas en la Tierra. Fuente: [28].

Observación 3.15. Una parametrización geográfica de la esfera $S^2(C, r)$ de ecuación $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ viene dada por la aplicación:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : V = (0, \pi) \times (0, 2\pi) &\rightarrow S^2(C, r) \setminus \{\text{semimeridiano } \lambda = 0\} \\ \mathbf{x}(\theta, \lambda) &= (r \operatorname{sen}(\theta) \cos(\lambda), r \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\lambda), r \cos(\theta)) \end{aligned} \quad (3.1)$$

El ángulo θ representa la colatitud (que se corresponde con el ángulo complementario a la latitud) como se puede ver en la figura 3.6.

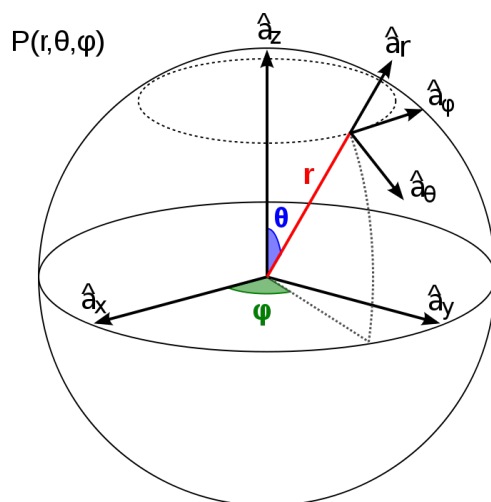


Figura 3.6: Parametrización geográfica de la esfera. Fuente: [29].

Veamos como se obtiene dicha parametrización geográfica a partir de la esfera $\mathbb{S}^2(C, r)$: de la figura 3.6 se deduce que $z = r \cos(\theta)$, y definimos $l = r \sin(\theta)$. Entonces se tiene que $x = l \cos(\lambda)$ e $y = l \sin(\lambda)$.

Sustituyendo, se deduce que $x = r \sin(\theta) \cos(\lambda)$ e $y = r \sin(\theta) \sin(\lambda)$, por lo que cualquier punto $P \in \mathbb{S}^2(C, r)$ se puede expresar de la forma:

$$P = \mathbf{x}(\theta, \lambda) = (r \sin(\theta) \cos(\lambda), r \sin(\theta) \sin(\lambda), r \cos(\theta))$$

Finalmente, comprobemos que realmente la aplicación \mathbf{x} es una parametrización viendo que se cumplen las condiciones **S1**, **S2** y **S3** de la definición 1.2. Para ello, utilizamos la observación 1.3:

S1: \mathbf{x} es C^∞ ya que cada una de sus componentes es producto de funciones trigonométricas diferenciables.

S2: A partir de las coordenadas en el plano se pueden obtener las coordenadas esféricas de la siguiente forma:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \neq 0$$

$$\theta = \arccos \frac{z}{r} = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\lambda = \arctg \frac{y}{x}$$

De modo que la inversa de \mathbf{x} , \mathbf{x}^{-1} , es continua; y \mathbf{x} es biyectiva, luego \mathbf{x} es un homeomorfismo.

S3: Para ver que $d\mathbf{x}|_{(\theta,\lambda)}$ es inyectiva para todos $(\theta, \lambda) \in V$, veamos que \mathbf{x}_θ y \mathbf{x}_λ son linealmente independientes:

$$\mathbf{x}_\theta = (r\cos(\theta)\cos(\lambda), r\cos(\theta)\sen(\lambda), -r\sen(\theta))$$

$$\mathbf{x}_\lambda = (-r\sen(\theta)\sen(\lambda), r\sen(\theta)\cos(\lambda), 0)$$

$$\mathbf{x}_\theta \wedge \mathbf{x}_\lambda = (r^2\sen^2(\theta)\cos(\lambda), r^2\sen^2(\theta)\sen(\lambda), r^2\sen(\theta)\cos(\lambda))$$

Por lo tanto, $\|\mathbf{x}_\theta \wedge \mathbf{x}_\lambda\|^2 = r^4(\sen^4(\theta) + \sen^2(\theta)\cos^2(\theta)) = r^4\sen^2(\theta) \neq 0$ ya que $\theta \in (0, \pi) \Rightarrow \mathbf{x}_\theta$ y \mathbf{x}_λ son linealmente independientes $\Rightarrow d\mathbf{x}|_{(\theta,\lambda)}$ es inyectiva $\forall (\theta, \lambda) \in V$.

Observación 3.16. Hay que tener en cuenta que el abierto $\mathbf{x}(V)$ definido en la observación 3.15 no cubre a toda la esfera, por lo que haría falta otra carta similar a \mathbf{x} para cubrirla entera.

3.2.2. Geoide

La primera simplificación de la superficie terrestre se conoce con el nombre de *geoide*, pero para definirla correctamente primero se debe definir el concepto de *superficie equipotencial*.

Definición 3.17. Una *superficie equipotencial* es aquella superficie en la que el potencial de la gravedad es constante en todos sus puntos. Es decir, es una superficie donde la dirección de la gravedad es perpendicular a todos sus puntos.

Ahora ya se puede definir con propiedad el concepto de *geoide*:

Definición 3.18. Un *geoide* es una superficie equipotencial que se corresponde con el nivel medio del mar. Entendiendo como el nivel medio del mar el nivel medio entre las mediciones máximo y mínimo.

Observación 3.19. Se utiliza el nivel medio del mar como un plano sobre el que se puede referenciar o describir las alturas del terreno sobre el plano.

Otra definición equivalente de geoide es la siguiente:

Definición 3.20. Un *geoide* es la superficie donde la dirección de la gravedad es perpendicular en todos los puntos y coincide con el valor de la gravedad que se experimenta en el nivel medio del mar.

Observación 3.21. Para entender de forma sencilla el concepto de geoide, se debe pensar en la superficie que se observaría si los océanos se extendieran de manera natural por debajo de los continentes y estuvieran totalmente en calma y sin mareas.

La misión espacial conjunta GRACE (de su acrónimo inglés Gravity Recovery and Climate Experiment, en español Experimento de Clima y Recuperación Gravitatoria) entre la NASA y la Agencia Espacial de Alemania del 2002 tuvo como objetivo cartografiar con precisión el campo gravitatorio terrestre. En la figura 3.7 se puede observar una versión simplificada del geoide asociado a la Tierra que se obtuvo como resultado de dicha misión.

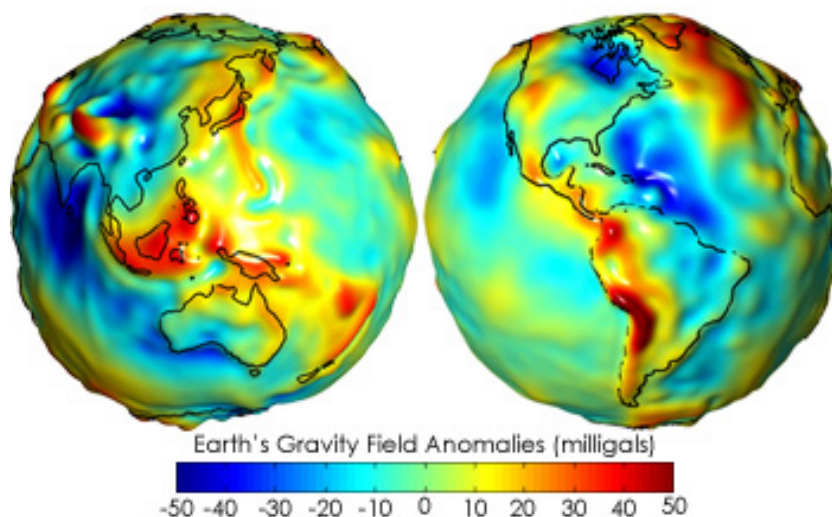


Figura 3.7: Representación del geoide terrestre obtenido en la misión espacial GRACE. Fuente: [30].

3.2.3. Esferoide

Debido a las irregularidades que presenta el modelo de superficie dado por un *geoide*, fue necesario obtener otra superficie de referencia más adecuada para un tratamiento matemático: el *esferoide*.

Los *esferoides*, también conocidos como *elipsoides de referencia* o simplemente *elipsoides*, son la superficie matemática simple que mejor se aproxima a la forma de la superficie terrestre, y además, a diferencia de los geoides, son independientes del material que conforma la Tierra.

Definición 3.22. Un *esferoide* es un elipsoide de revolución, es decir, la superficie que se obtiene al rotar una elipse alrededor de uno de sus ejes principales.

Notación 3.23. Por convenio, el eje de simetría se denomina b (y su semieje \tilde{b}) y se sitúa en el eje de coordenadas cartesianas z ; y el eje perpendicular al de simetría se denomina a (y su semieje \tilde{a}).

Definición 3.24. En función de los valores de a y b se tiene:

- Si $a > b$, el esferoide se denomina *esferoide oblato* o *simplemente esferoide*.
- Si $a < b$, el esferoide se denomina *esferoide prolato* u *oblongo*.
- Si $a = b$, el esferoide es realmente una esfera.

Ejemplo 3.25. El planeta Saturno es un ejemplo de esferoide oblato, mientras que un balón de rugby es un ejemplo de esferoide prolato.

Observación 3.26. La superficie de referencia para estudiar la Tierra es realmente un esferoide oblato. Para este caso, se dice que \tilde{b} es el semieje menor, y \tilde{a} el semieje mayor.

Observación 3.27. Las ecuaciones del esferoide son las siguientes:

- La ecuación paramétrica:

$$\begin{aligned}x &= \tilde{a} \cdot \sin(v) \cdot \cos(u) \\y &= \tilde{a} \cdot \sin(v) \cdot \sin(u) \\z &= \tilde{b} \cdot \cos(v)\end{aligned}\tag{3.2}$$

con $u \in [0, 2\pi)$, $v \in [0, \pi]$.

- La ecuación cartesiana:

$$\frac{x^2 + y^2}{\tilde{a}^2} + \frac{z^2}{\tilde{b}^2} = 1\tag{3.3}$$

Definición 3.28. El *factor de aplanamiento* f es el valor que expresa el nivel de similitud del esferoide con respecto a una esfera. Cuando más se acerque a cero, el esferoide se asemejará más a una esfera.

Observación 3.29. El factor de aplanamiento se calcula a partir de los semiejes mediante la fórmula $f = 1 - \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}$. Como los valores de f suelen ser muy pequeños, generalmente se utiliza el valor $\frac{1}{f}$.

Dado que es muy complicado ajustar un esferoide o elipsoide global a un geoide, surge la necesidad de usar elipsoides locales, que aproximan al geoide en una zona geográfica concreta (figura 3.8).

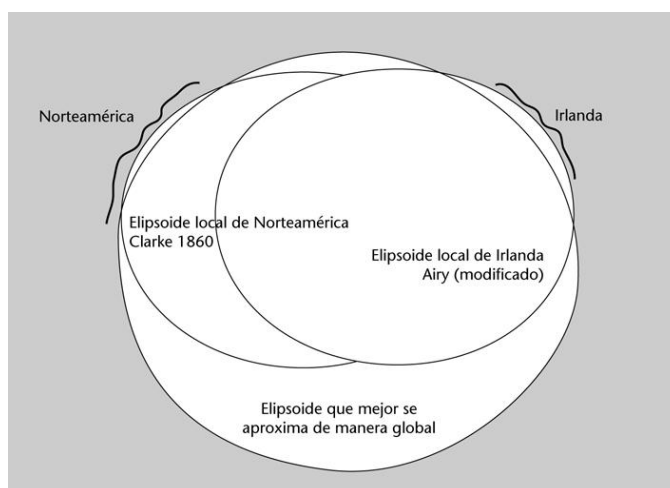


Figura 3.8: Diagrama con elipsoides locales. Fuente: [14].

Por este motivo, en la actualidad se utilizan un gran número de elipsoides, y cada uno de ellos solo se utiliza para la zona para la cual ha sido diseñado. En concreto, alguno de los elipsoides que se usan en la Península Ibérica son el *Internacional de Hayford* de 1924 y el *world geodetic datum* de 1984 (WGS84) [14]. Este último es uno de los más empleados en la actualidad ya que es utilizado por el sistema GPS [12]. En la tabla 3.1 se pueden ver algunos de los principales elipsoides de referencia con sus parámetros característicos:

Elipsoide	Semieje mayor	Semieje menor	$\frac{1}{f}$
Australian National	6378160.000	6356774.719	298.250000
Bessel 1841	6377397.155	6356078.963	299.152813
Clarke 1866	6378206.400	6356583.800	294.978698
Clarke 1880	6378249.145	6356514.870	293.465000
Everest 1956	6377301.243	6356100.228	300.801700
Fischer 1968	6378150.000	6356768.337	298.300000
GRS 1980	6378137.000	6356752.314	298.257222
International 1924 (Hayford)	6378388.000	6356911.946	297.000000
SGS 85	6378136.000	6356751.302	298.257000
South American 1969	6378160.000	6356774.719	298.250000
WGS 72	6378135.000	6356750.520	298.260000
WGS 84	6378137.000	6356752.314	298.257224

Tabla 3.1: Principales elipsoides de referencia. Fuente: [14].

3.2.4. Datum geodésico

Escogidos un geoide y un elipsoide, al determinar un punto de tangencia común entre ambos, se establece lo que se conoce como *datum geodésico* o *datum*.

Definición 3.30. Un *datum* es un conjunto de mediciones que definen la orientación de un determinado elipsoide sobre la superficie terrestre. Está formado por un geoide, por la dimensión y forma del elipsoide, y por un punto fundamental (donde el geoide es tangente al elipsoide).

Observación 3.31. La selección de un datum es crucial para determinar las coordenadas de un punto, ya que dado un datum, todo punto tendrá un par de coordenadas único. No obstante, el mismo punto tendrá diferentes coordenadas en diferentes datum (figura 3.9).

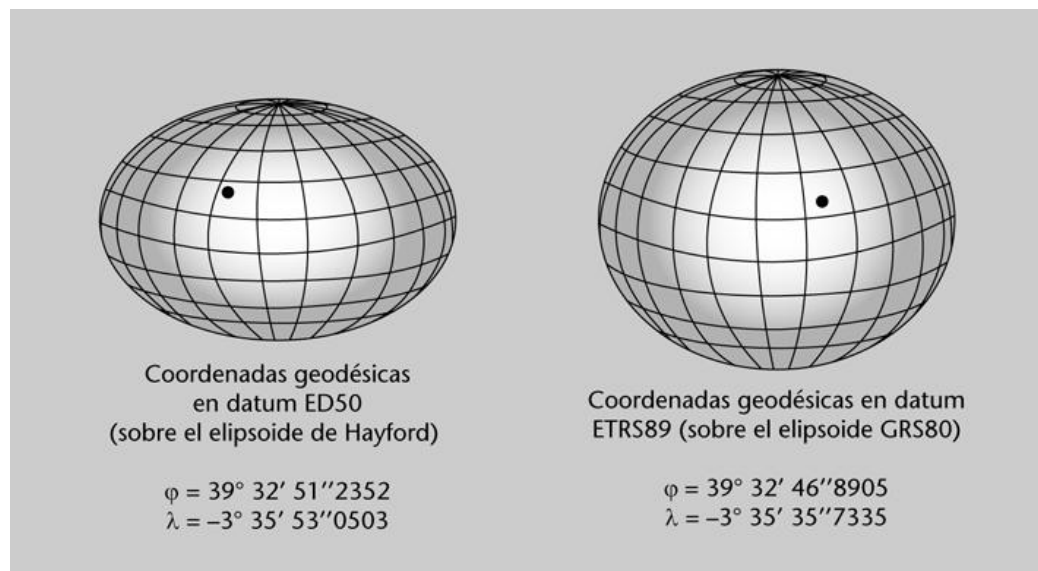


Figura 3.9: Coordenadas del mismo punto en diferentes datum. Fuente: [14].

Observación 3.32. Además, para un mismo elipsoide, se pueden considerar diferentes puntos fundamentales, que darán lugar a distintos datum (y por lo tanto, un mismo punto podrá tener diferentes coordenadas dado el mismo elipsoide).

3.2.5. Red geodésica

Una vez que se ha escogido un datum, se debe materializar el punto fundamental sobre la superficie, ya que a partir de ahí se empezará a medir y determinar la posición del resto de puntos del territorio.

Para conseguir este objetivo, además del punto fundamental, se debe calcular con gran precisión otros puntos de la superficie, denominados *vértices geodésicos*, y que conforman lo que se conoce como *redes geodésicas*.

Definición 3.33. Una *red geodésica* es una malla de puntos cuyas posiciones se conocen con gran precisión (denominados *vértices geodésicos*) distribuidos por un territorio.

Observación 3.34. Los vértices geodésicos se calculan por triangulación a partir del punto fundamental, y conforman la base sobre la que calcular y determinar la posición del resto de puntos de la superficie.

Los vértices geodésicos se clasifican en vértices de primer orden (que distan unos 40 km entre sí), vértices de segundo orden (que distan unos 20 km entre sí), y vértices de tercer orden (que distan unos 5 km entre sí); siendo los de primer orden los más importantes ya que son los que están calculados con mayor precisión.

Para poder visualizar todos los conceptos que se han presentado hasta ahora en un caso real, se explica a continuación como ha ido evolucionando la red geodésica española desde sus inicios en 1858 hasta la actualidad.

La red geodésica española

En España, los trabajos geodésicos que tenían como objetivo la formación del mapa nacional en escala 1:50.000, se iniciaron en 1858: el punto fundamental o datum lo constituyó el Observatorio de Madrid cuyas coordenadas geográficas eran $40^{\circ} 24' 30''$ N (latitud), y $3^{\circ} 41' 16''$ W respecto de Greenwich (longitud). Para obtener las coordenadas geográficas de este punto, se utilizó como superficie de referencia el Elipsoide de Struve, como origen de longitudes el Meridiano de Madrid, y como origen de latitudes el Ecuador [17].

Aunque las operaciones para obtener la red de vértices geodésicos de primer orden continuaron hasta 1915, en 1880 ya se contaba con un esqueleto básico general sobre el que se sustentaba con precisión la posición de los datos recogidos y que tenía continuidad a lo largo de todo el territorio español [18] (figura 3.10).

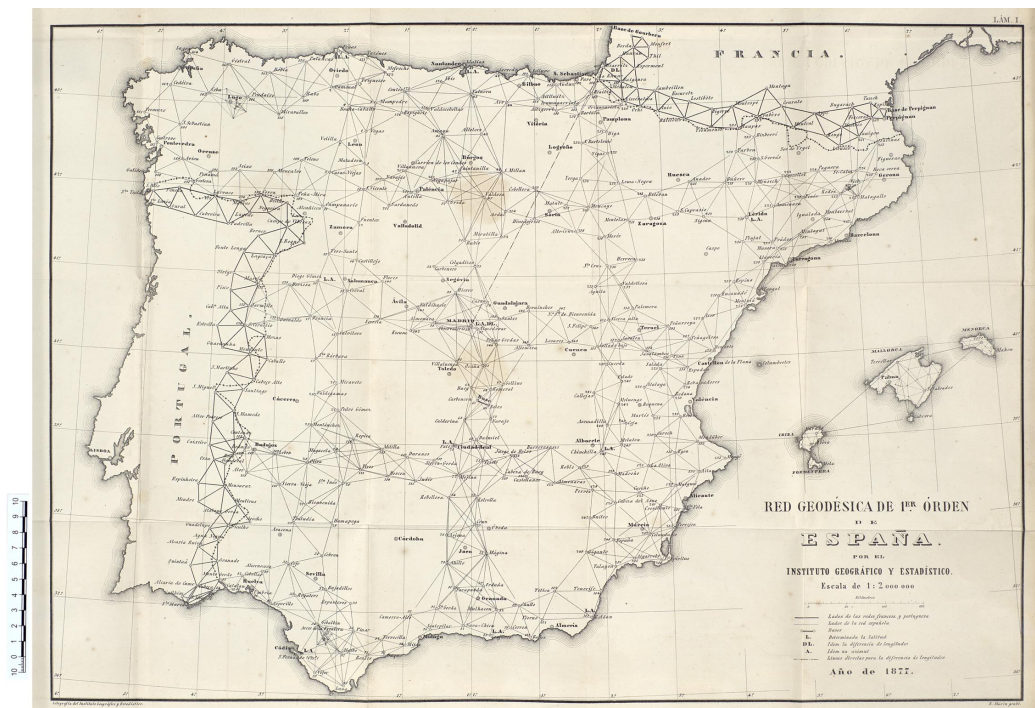


Figura 3.10: Mapa de la Red Geodésica de Primer Orden de España. Escala 1/2.000.000. Año 1877. Fuente: [31].

Tras la II Guerra Mundial, se decidió unificar las redes geodésicas europeas, y se adoptó como nuevo datum el Observatorio de Potsdam (Alemania), como elipsoide de referencia el *Internacional de Hayford* de 1924, como origen de longitudes el meridiano de Greenwich, y como origen de latitudes el Ecuador. Con este nuevo sistema, las coordenadas geográficas del Observatorio de Madrid pasaron a ser $40^{\circ} 24' 34,545''$ N (latitud), y $3^{\circ} 41' 10,629''$ W (longitud) [19].

En 1994, el Instituto Geográfico Nacional de España puso en marcha la red REGENTE (acrónimo de REd GEodésica Nacional por Técnicas Espaciales) cuyo objetivo era establecer en toda España una red de altísima precisión cuyo error fuera inferior a 5 cm para ayudar a los usuarios de las técnicas de mediciones por sistemas GPS de forma eficaz [20]. Esta nueva red constituye una malla formada por 1029 vértices en la Península y Baleares, y 72 vértices en Canarias (figura 3.11). Estos puntos se eligieron de manera que en cada hoja del Mapa Topográfico Nacional a escala 1:50.000 hubiera un solo vértice REGENTE, es decir, uno por cada 300 km^2 .



Figura 3.11: Vértices de la red REGENTE. Fuente: [20].

Observación 3.35. En el *Real Decreto 1071/2007* (accesible en [17]) se regula el Sistema de Referencia Geodésico Español sobre el que se debe reunir toda la información geográfica y la cartografía oficial española. Esto permite integrar completamente toda esta información con la del resto de países europeos y sistemas de navegación.

Además, cabe destacar que en España no se puede trabajar en Cartografía sin controlar las proyecciones, dado que están reguladas por este mismo decreto, y un mal uso de ellas puede provocar graves fallos técnicos y legales como los indicados en la observación 3.4, o los apreciables en la figura 3.12.



Figura 3.12: Misma superficie en diferentes proyecciones. Fuente: [27].

Capítulo 4

La Cartografía

Con el objetivo de entender el territorio que nos rodea, los SIG utilizan información georreferenciada para determinar la posición de los objetos en el espacio. Sin embargo, para poder analizar toda la información de forma más simple y eficaz, es necesario representar la superficie de la Tierra sobre una superficie plana como puede ser un mapa o una pantalla de un ordenador.

Por ello, uno de los principales objetivos de la Cartografía consiste en utilizar *proyecciones cartográficas* para representar los puntos de la superficie terrestre (idealizando la Tierra como una esfera) en una superficie plana.

Los primeros mapas fueron los *portulanos* y se utilizaban en la navegación ya que indicaban los rumbos (direcciones) que los barcos debían seguir para ir de un puerto a otro. Con el periodo colonial, surgieron nuevos mapas cuyo objetivo era medir distancias y superficies sobre los nuevos territorios para lograr un mejor dominio de ellos [13].

Sin embargo, a pesar de que la geometría sobre un plano resulta más práctica e intuitiva que la geometría esférica, cuando se quiere representar una superficie esférica sobre una superficie plana, es imposible hacerlo sin que se produzca algún tipo de deformación (hecho que evidenció Gauss en 1828 con la demostración del teorema *Egregium* (sección 2.2)).

Esto ha propiciado que desde hace años se hayan investigado multitud de proyecciones con el objetivo de representar la realidad de la forma más precisa: desde las que tratan de conservar alguna característica geométrica como las áreas o los ángulos, hasta las que se proyectan sobre superficies diferentes al plano.

Como se explicó en el sección 3.1, los Sistemas de Información Geográfica hacen uso de las proyecciones para formar las capas de información. No obstante, recordemos que todas las capas de un SIG deben usar la misma proyección para evitar los errores surgidos por el uso de diferentes proyecciones en la misma vista (observación 3.4).

A lo largo de este capítulo se presentan los principales usos de la primera forma fundamental, ya que con ella se pueden realizar medidas sobre las superficies esféricas (sección 4.1), y los diferentes tipos de proyecciones cartográficas que existen (sección 4.2).

4.1. Usos de la primera forma fundamental

Como se comentó en la sección 1.3, la *primera forma fundamental* permite realizar medidas sobre una superficie esférica. Por ejemplo, calcular el ángulo que forman dos curvas sobre una superficie, o el área de una determinada región de una superficie.

En esta sección se explica qué es una *curva en \mathbb{R}^3* (subsección 4.1.1) ya que nos servirá para entender qué son las *aplicaciones conformes* y lo que se entiende como el ángulo de dos curvas sobre una superficie (subsección 4.1.2). También se explicará qué son las *aplicaciones isoareales* y cómo calcular áreas de un determinado recinto de una superficie (subsección 4.1.3).

Los conceptos y resultados que se muestran en esta sección se pueden encontrar en cualquier libro básico que aborde la Geometría de Superficies como pueden ser [1], [2], [9] o [10].

4.1.1. Curvas en \mathbb{R}^3

En esta subsección solo se presentan los conceptos básicos de curvas en \mathbb{R}^3 para una comprensión adecuada de los conceptos presentados en la subsección 4.1.2. Para el lector interesado que quiera profundizar en la teoría de curvas en \mathbb{R}^3 se recomiendan los libros [1] y [2].

Definición 4.1. Una *curva diferenciable parametrizada* o *curva parametrizada* es una aplicación diferenciable $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ donde I es un intervalo abierto de \mathbb{R} .

Definición 4.2. Una curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es *regular* si para todo $t \in I$, $\alpha'(t) \neq 0$.

Definición 4.3. Sea S una superficie regular. Una *curva diferenciable* en S es una curva diferenciable parametrizada $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que la imagen de β está contenida en S .

Definición 4.4. Sea $\mathbf{x} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada regular. Una *curva en \mathbf{x}* es cualquier curva $\beta = \mathbf{x} \circ \alpha$, siendo $\alpha : I \rightarrow V$ una curva parametrizada en V .

Proposición 4.5. Sea $\mathbf{x} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada regular, y $\beta = \mathbf{x} \circ \alpha$ una curva en \mathbf{x} con $\alpha(t) = (u(t), v(t))$, $t \in I$. Entonces en la base $B = \{\mathbf{x}_u(\alpha(t)), \mathbf{x}_v(\alpha(t))\}$, $\beta'(t) = u'(t) \cdot \mathbf{x}_u(\alpha(t)) + v'(t) \cdot \mathbf{x}_v(\alpha(t))$. Es decir, $\beta'(t) \in T_{\alpha(t)}(\mathbf{x})$ y sus coordenadas en B son $(u'(t), v'(t))$.

Demostración. Por definición de β , $\beta(t) = \mathbf{x}(\alpha(t)) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$. Aplicando la regla de la cadena a $\beta(t)$ se obtiene que:

$$\begin{aligned} \beta'(t) &= \mathbf{x}_u(u(t), v(t)) \cdot u'(t) + \mathbf{x}_v(u(t), v(t)) \cdot v'(t) \\ &= \mathbf{x}_u(\alpha(t)) \cdot u'(t) + \mathbf{x}_v(\alpha(t)) \cdot v'(t) \\ &= (u'(t), v'(t))_B \in T_{\alpha(t)}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

□

4.1.2. Aplicaciones conformes

La primera cuestión métrica que puede tratarse con la *primera forma fundamental* es el cálculo del ángulo que forman dos curvas sobre una superficie regular S . Las aplicaciones que conservan los ángulos se conocen con el nombre de *aplicaciones conformes*.

Definición 4.6. Sean $\beta_1, \beta_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dos curvas parametrizadas que pasan por un mismo punto p (es decir, $\beta_1(t_1) = \beta_2(t_2) = p$). El *ángulo que forman* β_1 y β_2 en p es el ángulo (no orientado) que forman sus vectores tangentes en p .

Observación 4.7. Utilizando la notación de la definición 4.6, el ángulo que forman las curvas β_1 y β_2 en p viene dado por la fórmula

$$\cos \omega = \frac{\beta'_1(t_1) \cdot \beta'_2(t_2)}{\|\beta'_1(t_1)\| \cdot \|\beta'_2(t_2)\|} \quad (4.1)$$

Proposición 4.8. Sea $\mathbf{x} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada regular. Sean $\beta_1 = \mathbf{x} \circ \alpha_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (con $\alpha_1 : I_1 \rightarrow V$ definida por $\alpha_1 = (u_1, v_1)$) y $\beta_2 = \mathbf{x} \circ \alpha_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (con $\alpha_2 : I_2 \rightarrow V$ definida por $\alpha_2 = (u_2, v_2)$) curvas en \mathbf{x} que pasan por $p = \mathbf{x}(q)$, $\alpha_1(t_1) = \alpha_2(t_2) = q$. Si ω es el ángulo (no orientado) que forman las curvas en p , entonces $\cos \omega = \frac{A}{B \cdot C}$ donde:

$$\begin{aligned} A &= E(q)u'_1(t_1)v'_1(t_2) + F(q)[u'_1(t_1)v'_2(t_2) + u'_2(t_1)v'_1(t_2)] + G(q)u'_2(t_1)v'_2(t_2) \\ B &= \sqrt{E(q)u'_1(t_1)^2 + F(q)u'_1(t_1)u'_2(t_1) + G(q)u'_2(t_1)^2} \\ C &= \sqrt{E(q)v'_1(t_2)^2 + F(q)v'_1(t_2)v'_2(t_2) + G(q)v'_2(t_2)^2} \end{aligned}$$

Demostración. Dada la base $B = \{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)\}$ y utilizando la proposición 4.5, se tiene que $\beta'_1(t_1) = (u'_1(t_1), u'_2(t_1))_B$ y $\beta'_2(t_2) = (v'_1(t_2), v'_2(t_2))_B$. Además, dados cualesquiera $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ en B , se tiene que

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{z} = (w_1, w_2) \cdot \begin{pmatrix} E(q) & F(q) \\ F(q) & G(q) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, sea $A = \begin{pmatrix} E(q) & F(q) \\ F(q) & G(q) \end{pmatrix}$, y utilizando la fórmula 4.1, se deduce que

$$\cos \omega = \frac{(u'_1(t_1), u'_2(t_1)) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} v'_1(t_2) \\ v'_2(t_2) \end{pmatrix}}{\sqrt{(u'_1(t_1), u'_2(t_1)) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} u'_1(t_1) \\ u'_2(t_1) \end{pmatrix}} \cdot \sqrt{(v'_1(t_2), v'_2(t_2)) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} v'_1(t_2) \\ v'_2(t_2) \end{pmatrix}}}$$

Y operando se llegaría al resultado que se quería demostrar. □

Definición 4.9. Sean S_1 y S_2 superficies regulares:

1. Una *aplicación conforme* $F : S_1 \rightarrow S_2$ es un difeomorfismo local tal que para todo $p \in S_1$, existe una aplicación diferenciable $\lambda : S_1 \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con $\lambda(p) > 0$, y tal que $I_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \lambda^2(p) \cdot I_{F(p)}(dF_p(\mathbf{v}), dF_p(\mathbf{w}))$ para todos $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p(S_1)$.
2. S_1 y S_2 son *conformes* si existe una aplicación conforme de S_1 en S_2 .
3. S_1 es *localmente conforme* a S_2 si para cada $p \in S_1$, existen abiertos U_1 de S_1 con $p \in U_1$, y U_2 de S_2 , y una aplicación conforme F de U_1 en U_2 .
4. S_1 y S_2 son *localmente conformes* si S_1 es localmente conforme a S_2 , y S_2 lo es a S_1 .

Observación 4.10. En la definición de *aplicación conforme*, se establece que debe existir una aplicación diferenciable $\lambda : S_1 \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $\lambda(p) > 0$ para todo $p \in S_1$. Debido a esta definición de λ , es habitual encontrar en algunos libros la siguiente definición equivalente de *aplicación conforme*:

Definición 4.11. Una *aplicación conforme* de S_1 en S_2 es un difeomorfismo local $F : S_1 \rightarrow S_2$ tal que para todo $p \in S_1$, existe una aplicación diferenciable $\lambda : S_1 \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con $\lambda(p) > 0$, y tal que para todos $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p(S_1)$, $\lambda^2(p) \cdot I_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = I_{F(p)}(dF_p(\mathbf{v}), dF_p(\mathbf{w}))$.

Observación 4.12. Utilizando la definición de la primera forma fundamental (definición 1.31), una *aplicación conforme* de S_1 en S_2 es un difeomorfismo local $F : S_1 \rightarrow S_2$ tal que para todo $p \in S_1$, existe una aplicación diferenciable $\lambda : S_1 \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con $\lambda(p) > 0$, y tal que:

$$\lambda^2(p) \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \lambda^2(p) \cdot I_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = I_{F(p)}(dF_p(\mathbf{v}), dF_p(\mathbf{w})) = dF_p(\mathbf{v}) \cdot dF_p(\mathbf{w})$$

Corolario 4.13. Una *isometría local* es una *aplicación conforme* con función λ constante e igual a uno.

Demostración. Si F es una aplicación conforme con función $\lambda=1$, entonces se cumple la definición de isometría local vista en la definición 2.3. \square

Definición 4.14. Sea (V, U, \mathbf{x}) una carta local de una superficie regular S , la aplicación $\tilde{\lambda} : V \rightarrow (0, \infty)$ es la *expresión local* de la aplicación λ de la definición 4.9.

Proposición 4.15. Un difeomorfismo local $F : S_1 \rightarrow S_2$ es una *aplicación conforme* si, y sólo si, conserva ángulos. Es decir, si dadas dos curvas regulares $\alpha, \beta : I \rightarrow S_1$ tales que $\alpha(0) = \beta(0) = p$, entonces el ángulo que forman $\alpha'(0)$ y $\beta'(0)$ en $T_p(S_1)$ es el mismo que el forman $dF_p(\alpha'(0))$ y $dF_p(\beta'(0))$ en $T_{F(p)}(S_2)$.

Demostración. Supongamos en primer lugar que $F : S_1 \rightarrow S_2$ es una aplicación conforme, y sean $\alpha, \beta : I \rightarrow S_1$ dos curvas regulares en S_1 que se cortan en $t=0$ (es decir, $\alpha(0) = \beta(0) = p$). Entonces el ángulo $\theta \in (0, \pi)$ que forman sus vectores tangentes en el punto p viene dado por:

$$\cos \theta = \frac{\alpha'(0) \cdot \beta'(0)}{\|\alpha'(0)\| \cdot \|\beta'(0)\|}$$

Si consideramos las curvas $F \circ \alpha, F \circ \beta : I \rightarrow S_2$ (imágenes por F de α y β respectivamente), observamos que son curvas en S_2 que también se cortan en $t=0$ (ya que $F(\alpha(0)) = F(\beta(0)) = F(p)$), y forman un ángulo φ que viene dado por:

$$\cos \varphi = \frac{dF_p(\alpha'(0)) \cdot dF_p(\beta'(0))}{\|dF_p(\alpha'(0))\| \cdot \|dF_p(\beta'(0))\|} = \frac{\lambda^2(p) \cdot \alpha'(0) \cdot \beta'(0)}{|\lambda(p)| \|\alpha'(0)\| \cdot |\lambda(p)| \|\beta'(0)\|} = \cos \theta$$

Luego una aplicación conforme conserva los ángulos.

Ahora supongamos que la aplicación $F : S_1 \rightarrow S_2$ conserva ángulos y veamos que es una aplicación conforme, es decir, debemos probar que existe una aplicación $\lambda : S_1 \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con $\lambda(p) > 0$, y tal que $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p(S_1)$, $\lambda^2(p) \cdot I_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = I_{F(p)}(dF_p(\mathbf{v}), dF_p(\mathbf{w}))$.

Dado $p \in S_1$, y sea $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ una base ortonormal de $T_p(S_1)$. Basta con probar la relación anterior para los vectores de la base B ya que cualquier otro elemento de $T_p(S_1)$ se puede expresar como combinación lineal de ellos. Como F es un difeomorfismo local, los vectores $\{dF_p(\mathbf{e}_1), dF_p(\mathbf{e}_2)\}$ forman una base de $T_{F(p)}(S_2)$. Además, esta base es ortogonal ya que por hipótesis:

$$\frac{dF_p(\mathbf{e}_1) \cdot dF_p(\mathbf{e}_2)}{\|dF_p(\mathbf{e}_1)\| \cdot \|dF_p(\mathbf{e}_2)\|} = \frac{\lambda^2(p) \cdot \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2}{|\lambda(p)| \cdot \|\mathbf{e}_1\| \cdot |\lambda(p)| \cdot \|\mathbf{e}_2\|} = 0,$$

lo que implica que $dF_p(\mathbf{e}_1) \cdot dF_p(\mathbf{e}_2) = 0$.

Sea $c_1 = \|dF_p(\mathbf{e}_1)\|$ y $c_2 = \|dF_p(\mathbf{e}_2)\|$, se tiene que:

$$\frac{c_1^2}{c_1 \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{dF_p(\mathbf{e}_1) \cdot dF_p(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)}{\|dF_p(\mathbf{e}_1)\| \cdot \|dF_p(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)\|} = \frac{\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)}{\|\mathbf{e}_1\| \cdot \|\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

lo que equivale a que $\sqrt{2} \cdot c_1 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \Rightarrow c_1^2 = c_2^2 \Rightarrow c_1 = c_2$ puesto que $c_1, c_2 > 0$. Esto demuestra que la aplicación F es conforme en p , y que $\lambda(p) = c_1$ independientemente de la base ortonormal escogida.

Para finalizar la demostración, hay que definir la función $\lambda : S_1 \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y ver que es diferenciable: sea $\mathbf{x} : V \rightarrow S_1$ una parametrización de S_1 , busquemos una base ortonormal a partir de la base de las parciales $B = \{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$. Para ello, primero aplicamos el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a la base B obteniendo:

$$\begin{aligned} e_1 &= \mathbf{x}_u \\ e_2 &= \mathbf{x}_v - \frac{\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u\|^2} \mathbf{x}_u = \mathbf{x}_v - \frac{(0, 1) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{(1, 0) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \mathbf{x}_u = \mathbf{x}_v - \frac{F}{E} \mathbf{x}_u \end{aligned}$$

Entonces $B' = \{e_1, e_2\}$ es una base ortogonal. Si normalizamos dicha base se obtiene:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{x_u}{\sqrt{(1, 0) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}} = \frac{x_u}{\sqrt{E}} \\ n_2 &= \frac{e_2}{\|e_2\|} = \frac{\mathbf{x}_v - \frac{F}{E} \mathbf{x}_u}{\sqrt{\begin{pmatrix} -F \\ E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -F \\ 1 \end{pmatrix}}} = \frac{\mathbf{x}_v - \frac{F}{E} \mathbf{x}_u}{\sqrt{\frac{-F^2}{E} + G}} = \frac{\sqrt{E} (\mathbf{x}_v - \frac{F}{E} \mathbf{x}_u)}{\sqrt{EG - F^2}} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la base $B'' = \left\{ \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}}(u, v), \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{EG - F^2}} \left(\mathbf{x}_v - \frac{F}{E} \mathbf{x}_u \right) (u, v) \right\}$ es una base ortonormal.

Finalmente, la función $\lambda : S_1 \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $\lambda(p) = \|dF_p\left(\frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}}(u, v)\right)\|$ es diferenciable por serlo \mathbf{x}_u y E , y además, no se anula nunca, ya que por el corolario 1.35, $E(u, v) > 0$ para todo $(u, v) \in V$. \square

Observación 4.16. El significado geométrico de la definición 4.9 de *aplicación conforme* es que en este tipo de aplicaciones se preservan los ángulos (pero no necesariamente las longitudes ni las áreas).

Proposición 4.17. Sean S_1 y S_2 superficies regulares. Sea $p \in S_1$, (V, U, \mathbf{x}) una carta local de S_1 y $\varphi : U \rightarrow S_2$ una aplicación tal que $\varphi(U)$ es un abierto de S_2 , y $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ un difeomorfismo. Entonces $(V, \varphi(U), \varphi \circ \mathbf{x})$ es una carta local de S_2 .

Además, si E, F, G son los coeficientes de la primera forma fundamental de S_1 en (V, U, \mathbf{x}) , y $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$ son los de S_2 en $(V, \varphi(U), \varphi \circ \mathbf{x})$. Entonces φ es una aplicación conforme si y solo si existe una aplicación $\tilde{\lambda} : V \rightarrow (0, \infty)$ tal que $E = \tilde{\lambda}^2 \cdot \tilde{E}$, $F = \tilde{\lambda}^2 \cdot \tilde{F}$ y $G = \tilde{\lambda}^2 \cdot \tilde{G}$.

Demostración. La demostración es análoga a la demostración de la proposición 2.6, pero teniendo en cuenta que φ es una aplicación conforme.

Por esta razón, si $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{y} = \varphi \circ \mathbf{x}$, $\beta_1 = \{\mathbf{x}_u(\mathbf{v}), \mathbf{x}_v(\mathbf{v})\}$ es base de $T_{\mathbf{x}(\mathbf{v})}(S_1)$, $\beta_2 = \{\mathbf{y}_u(\mathbf{v}), \mathbf{y}_v(\mathbf{v})\}$ es base de $T_{\mathbf{y}(\mathbf{v})}(S_2)$, y $d\varphi|_{\mathbf{x}(\mathbf{v})}$ es la matriz de cambio de base de β_1 a β_2 , entonces se cumple que $d\varphi|_{\mathbf{x}(\mathbf{v})}(\mathbf{x}_u(\mathbf{v})) = \tilde{\lambda} \cdot \mathbf{y}_u(\mathbf{v})$ y $d\varphi|_{\mathbf{x}(\mathbf{v})}(\mathbf{x}_v(\mathbf{v})) = \tilde{\lambda} \cdot \mathbf{y}_v(\mathbf{v})$. \square

Teorema 4.18. Sean $\phi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un difeomorfismo local, $\mathbf{x}(\theta, \varphi)$ la parametrización de \mathbb{S}^2 dada por las coordenadas geográficas, y $\tilde{\mathbf{x}} = \phi \circ \mathbf{x}$. Entonces, ϕ es una aplicación conforme si, y solo si, para $p = \mathbf{x}(\theta, \varphi)$, se tiene $\tilde{E} = \lambda^2(p)$, $\tilde{F} = 0$, y $\tilde{G} = \lambda^2(p) \cdot \text{sen}^2(\theta)$ para alguna función diferenciable $\lambda : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que no se anula en ningún punto.

Demostración. A partir de la observación 3.15, consideramos la parametrización geográfica de la esfera $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Por lo tanto, si θ es la colatitud y φ la longitud, se tiene que la parametrización de esta esfera viene dada por la aplicación:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : V = (0, \pi) \times (0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{\text{semimeridiano } \varphi = 0\} \\ \mathbf{x}(\theta, \varphi) &= (\text{sen}(\theta)\cos(\varphi), \text{sen}(\theta)\text{sen}(\varphi), \cos(\theta)) \end{aligned}$$

donde los coeficientes de la primera forma fundamental en esta parametrización son $E = 1$, $F = 0$, $G = \text{sen}^2(\theta)$.

Si $\phi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un difeomorfismo local, y $\tilde{\mathbf{x}} = \phi \circ \mathbf{x}$ es una parametrización del plano. Entonces, si ϕ es una aplicación conforme, con factor de proximidad λ , para $p = \mathbf{x}(\theta, \varphi)$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\tilde{E} &= \tilde{\mathbf{x}}_\theta \cdot \tilde{\mathbf{x}}_\theta = d\phi_p(\mathbf{x}_\theta) \cdot d\phi_p(\mathbf{x}_\theta) = \lambda^2(p) \cdot \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\theta = \lambda^2(p)E = \lambda^2(p) \\ \tilde{F} &= \tilde{\mathbf{x}}_\theta \cdot \tilde{\mathbf{x}}_\varphi = d\phi_p(\mathbf{x}_\theta) \cdot d\phi_p(\mathbf{x}_\varphi) = \lambda^2(p) \cdot \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\varphi = \lambda^2(p)F = 0 \\ \tilde{G} &= \tilde{\mathbf{x}}_\varphi \cdot \tilde{\mathbf{x}}_\varphi = d\phi_p(\mathbf{x}_\varphi) \cdot d\phi_p(\mathbf{x}_\varphi) = \lambda^2(p) \cdot \mathbf{x}_\varphi \cdot \mathbf{x}_\varphi = \lambda^2(p)G = \lambda^2(p)\text{sen}^2(\theta)\end{aligned}$$

Recíprocamente, si $\tilde{E} = \lambda^2(p)$, $\tilde{F} = 0$, y $\tilde{G} = \lambda^2(p) \cdot \text{sen}^2(\theta)$ para alguna función diferenciable $\lambda : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que no se anula en ningún punto, entonces ϕ es una aplicación conforme. \square

En la navegación marítima y aérea es muy importante llevar siempre una dirección fija para no desviarse de la ruta que une dos lugares geográficos. Esto se consigue siguiendo las *loxodrómicas*.

Definición 4.19. Se denomina *loxodrómica* o *línea de rumbo fijo* a la curva sobre la superficie terrestre que corta todos los meridianos bajo un ángulo constante, es decir, que mantiene el rumbo.

Definición 4.20. Se denomina *ortodrómica* al círculo máximo que une dos puntos.

Ejemplo 4.21. En la superficie terrestre la ortodrómica es el camino más corto que une dos puntos. Sin embargo, en vuelos cortos, la loxodrómica es el camino ideal y el que se suele seguir. Solo en vuelos largos, se utiliza la ortodrómica para dividir la distancia en tramos de unos 500-1000 km, y dentro de cada tramo se siguen las loxodrómicas [19].

4.1.3. Aplicaciones isoareales

Otra cuestión métrica que puede tratarse con la *primera forma fundamental* es el cálculo del área de una región acotada de una superficie regular S . Las aplicaciones que conservan las áreas se conocen con el nombre de *aplicaciones isoareales*.

Definición 4.22. Sea S una superficie regular.

1. Un *dominio regular* $D \subset S$ es un abierto de S , conexo y acotado, tal que su frontera es una curva regular excepto a lo sumo un número finito de puntos, y homeomorfa a \mathbb{S}^1 .

2. Una *región* es la unión de un dominio con su frontera.

Definición 4.23. Sea $\mathbf{x} : V \rightarrow S$ una carta de una superficie regular, y sea R una región de S contenida en $\mathbf{x}(V)$. El *área* de R es:

$$A_S(R) = \int_{\mathbf{x}^{-1}(R)} \|\mathbf{x}_u(u, v) \wedge \mathbf{x}_v(u, v)\| dudv \quad (4.2)$$

Proposición 4.24. Sea S una superficie regular y R una región de S . Entonces el *área* de R no depende de la parametrización escogida.

Demostración. Sean (V_1, U_1, \mathbf{x}) y (V_2, U_2, \mathbf{y}) dos cartas locales de S tales que $R \subset U_1 \cap U_2$. Se considera el difeomorfismo de cambio de carta dado por $\phi = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} : \mathbf{y}^{-1}(U_1 \cap U_2) \rightarrow \mathbf{x}^{-1}(U_1 \cap U_2)$; y sea $F : \mathbf{x}^{-1}(U_1 \cap U_2) \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación dada por $F(v_1, v_2) = \|\mathbf{x}_{v_1}(v_1, v_2) \wedge \mathbf{x}_{v_2}(v_1, v_2)\|$ que es diferenciable por ser $\mathbf{x}_{v_1}(v_1, v_2) \wedge \mathbf{x}_{v_2}(v_1, v_2)$ distinto de cero.

Puesto que $\phi^{-1} \circ \mathbf{x}^{-1}(R) = \mathbf{y}^{-1}(R)$, aplicando el teorema de cambio de variables se tiene que:

$$\begin{aligned} A_S(R) &= \int_{\mathbf{x}^{-1}(R)} F(v_1, v_2) dv_1 dv_2 \\ &= \int_{\mathbf{y}^{-1}(R)} F(\phi(u_1, u_2)) |\det(D\phi(u_1, u_2))| du_1 du_2 \end{aligned}$$

Finalmente, por la regla de la cadena aplicada a $\mathbf{y} = \mathbf{x} \circ \phi$ se deduce que $\mathbf{y}_{u_1}(u_1, u_2) \wedge \mathbf{y}_{u_2}(u_1, u_2) = \det(D\phi(u_1, u_2)) (\mathbf{x}_{v_1}(\phi(v_1, v_2)) \wedge \mathbf{x}_{v_2}(\phi(v_1, v_2))) \Rightarrow \|\mathbf{y}_{u_1}(u_1, u_2) \wedge \mathbf{y}_{u_2}(u_1, u_2)\| = |\det(D\phi(u_1, u_2))| F(\phi(u_1, u_2))$. \square

El *área* de una región se puede hallar a partir de los coeficientes de la primera forma fundamental utilizando el siguiente resultado:

Corolario 4.25. Sea S una superficie regular y R una región de S . Sea (V, U, \mathbf{x}) una carta local de S . Entonces:

$$A_S(R) = \int_{\mathbf{x}^{-1}(R)} \sqrt{E(u, v) \cdot G(u, v) - F^2(u, v)} dudv$$

Demostración. En la demostración del corolario 1.35 se puso de manifiesto que $E(u, v) \cdot G(u, v) - F^2(u, v) = \|\mathbf{x}_u(u, v) \wedge \mathbf{x}_v(u, v)\|^2$. Por lo tanto, resulta evidente el resultado de este corolario. \square

Definición 4.26. Una *aplicación isoareal* es un difeomorfismo $F : S_1 \rightarrow S_2$ entre superficies regulares que preserva áreas, es decir, tal que para toda región $R \subset S_1$ se tiene que $A_{S_1}(R) = A_{S_2}(F(R))$.

Teorema 4.27. Sean $\phi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un difeomorfismo local, $\mathbf{x}(\theta, \varphi)$ la parametrización de \mathbb{S}^2 dada por las coordenadas geográficas, y $\tilde{\mathbf{x}} = \phi \circ \mathbf{x}$ la correspondiente parametrización del plano. Entonces, ϕ es una aplicación isoareal si, y solo si, $\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2 = \text{sen}^2(\theta)$.

Demostración. De la demostración del teorema 4.18 se obtiene que los coeficientes de la primera forma fundamental de la parametrización \mathbb{S}^2 dada por las coordenadas geográficas son $E = 1$, $F = 0$, $G = \text{sen}^2(\theta)$. Por consiguiente, $EG - F^2 = \text{sen}^2(\theta)$.

Supongamos primero que ϕ es isoareal y que existe un $p = \mathbf{x}(\theta_0, \varphi_0) \in \mathbb{S}^2$ tal que:

$$(\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)(\theta_0, \varphi_0) \neq \text{sen}^2(\theta_0) = (EG - F^2)(\theta_0, \varphi_0)$$

Se puede suponer que $(\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)(\theta_0, \varphi_0) > \text{sen}^2(\theta_0)$. Entonces existe un entorno $W(p)$ donde $(\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)(\theta, \varphi) > \text{sen}^2(\theta)$ para todo $\mathbf{x}(\theta, \varphi) \in W$.

Ahora bien, de $\tilde{\mathbf{x}} = \phi \circ \mathbf{x}$, se deduce que $\mathbf{x}^{-1}(W) = \tilde{\mathbf{x}}^{-1}(\phi(W))$. Además, por ser ϕ isoareal, $A(W) = A(\phi(W))$, luego

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{x}^{-1}(W)} \text{sen}^2(\theta) d\phi d\varphi &= \int_{\mathbf{x}^{-1}(W)} \sqrt{(EG - F^2)(\theta, \varphi)} d\phi d\varphi = A(W) = \\ &= A(\phi(W)) = \int_{\tilde{\mathbf{x}}^{-1}(\phi(W))} \sqrt{(\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)(\theta, \varphi)} d\phi d\varphi \\ &> \int_{\mathbf{x}^{-1}(W)} \text{sen}^2(\theta) d\phi d\varphi \end{aligned}$$

Esto es una contradicción, luego $(\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)(\theta, \varphi) = \text{sen}^2(\theta) \forall \mathbf{x}(\theta, \varphi) \in W$.

Recíprocamente, si $(\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)(\theta, \varphi) = \text{sen}^2(\theta) = (EG - F^2)(\theta, \varphi)$, entonces para cualquier región $R \subset \mathbf{x}(V = (0, \pi) \times (0, 2\pi))$, se tiene que $A(R) = A(\phi(R))$, luego ϕ es isoareal. □

Teorema 4.28. Un difeomorfismo $\phi : S_1 \rightarrow S_2$ entre dos superficies regulares es conforme e isoareal si, y solo si, es una isometría.

Demostración. Es inmediato que toda isometría conserva ángulos y áreas por lo que solo es necesario probar la implicación directa.

Sea $\phi : S_1 \rightarrow S_2$ una aplicación conforme e isoareal, $p \in S_1$ y (V, U, \mathbf{x}) una carta local de S_1 que cubre a p . Entonces la aplicación $(V, U, \mathbf{y} = \phi \circ \mathbf{x})$ es una carta local de S_2 . Sean E, F y G los coeficientes de la primera forma fundamental de \mathbf{x} ; y \tilde{E}, \tilde{F} y \tilde{G} los coeficientes de la primera forma fundamental de \mathbf{y} .

Como F es conforme, existe una aplicación diferenciable $\lambda : S_1 \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con $\lambda(p) > 0$ tal que $\lambda^2(p) \cdot I_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = I_{F(p)}(dF_p(\mathbf{v}), dF_p(\mathbf{w})) \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p(S_1)$. En particular, en p se tiene:

$$\begin{aligned}\tilde{E} &= \mathbf{y}_u \cdot \mathbf{y}_u = dF_p(\mathbf{x}_u) \cdot dF_p(\mathbf{x}_u) = \lambda^2(p) \cdot \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = \lambda^2(p) \cdot E \\ \tilde{F} &= \mathbf{y}_u \cdot \mathbf{y}_v = dF_p(\mathbf{x}_u) \cdot dF_p(\mathbf{x}_v) = \lambda^2(p) \cdot \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = \lambda^2(p) \cdot F \\ \tilde{G} &= \mathbf{y}_v \cdot \mathbf{y}_v = dF_p(\mathbf{x}_v) \cdot dF_p(\mathbf{x}_v) = \lambda^2(p) \cdot \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = \lambda^2(p) \cdot G\end{aligned}$$

Sean $f(p) = \sqrt{EG - F^2}(u, v)$ y $\tilde{f}(p) = \sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2}(u, v)$ y supongamos que $f(p) \neq \tilde{f}(p)$ (y asumamos que $f(p) > \tilde{f}(p)$). Como las funciones f y \tilde{f} son continuas, existe un entorno W de p tal que $\forall q \in W, f(q) > \tilde{f}(q)$.

Calculamos las áreas de W y $\phi(W)$. Dado que $\mathbf{y} = \phi \circ \mathbf{x}$, se tiene que $\mathbf{x}^{-1}(W) = \mathbf{y}^{-1}(\phi(W)) = \tilde{V}$. Luego:

$$\begin{aligned}A(W) &= \int_{\tilde{V}} \sqrt{EG - F^2}(u, v) dudv = \int_{\tilde{V}} f(p) dudv \\ A(\phi(W)) &= \int_{\tilde{V}} \sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2}(u, v) dudv = \int_{\tilde{V}} \tilde{f}(p) dudv\end{aligned}$$

Como $f(p) > \tilde{f}(p)$ para todo $(u, v) \in \tilde{V}$, entonces $A(W) > A(\phi(W))$, lo que contradice el hecho de que ϕ sea isoareal. Por lo tanto, $f(p) = \tilde{f}(p)$, y se deduce que:

$$\begin{aligned}\sqrt{EG - F^2} &= \sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} \\ &= \sqrt{\lambda^2(p) \cdot E \cdot \lambda^2(p) \cdot G - (\lambda^2(p) \cdot F)^2} = \lambda^2(p) \sqrt{EG - F^2}\end{aligned}$$

En consecuencia, $\lambda^2(p) = 1$. Como p era arbitrario, se cumple para todo $p \in S_1$, por lo que se tiene que ϕ es una isometría como consecuencia de la proposición 2.6. \square

4.2. Las proyecciones cartográficas

Uno de los principales objetivos de la Cartografía consiste en utilizar *proyecciones cartográficas* para representar una región \mathcal{R} de la superficie terrestre en una superficie plana.

Para ello, se debe definir primero el termino de *proyección*:

Definición 4.29. Sea \mathcal{R} una región de una superficie esférica, una *proyección* es una aplicación $\phi : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ inyectiva y diferenciable, cuya inversa es diferenciable.

En particular, se tiene la siguiente definición:

Definición 4.30. Sea \mathcal{R} una región de la superficie terrestre, una *proyección cartográfica* es una aplicación $\phi : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ inyectiva y diferenciable, cuya inversa es diferenciable. Es decir, es una aplicación ϕ que a cada par de coordenadas geográficas (θ, λ) le hace corresponder un par de coordenadas en el plano (x, y) .

Notación 4.31. A partir de ahora, se utilizarán los términos *proyección* y *proyección cartográfica* indistintamente.

Observación 4.32. La proyección perfecta sería una que conservase todas las características relevantes de la superficie en el plano, es decir, una que conservase ángulos y áreas. No obstante, esto no es posible como evidenció Gauss en 1828 con la demostración del teorema *Egregium* (sección 2.2).

Observación 4.33. Dado que trabajar con los elipsoides es en ocasiones complicado, es habitual utilizar la esfera como tercera superficie de aproximación de la Tierra para poder simplificar los cálculos.

Definición 4.34. Un *mapamundi* es una representación geográfica de la superficie terrestre completa.

El objetivo de las proyecciones es minimizar las distorsiones que se producen (también denominadas *anamorfosis*), por lo que dependiendo del uso que se quiera dar al mapa, se utilizará la técnica de proyección más adecuada para su fin: preservando alguna característica geométrica y/o proyectando sobre una superficie diferente al plano.

La *Indicatríz de Tissot* permite caracterizar la distorsión que se produce con cada proyección (subsección 4.2.1), y a pesar de que las proyecciones se pueden clasificar de múltiples formas, en este documento se hará un estudio de las clasificaciones según la superficie sobre la que se proyectan los puntos (subsección 4.2.2) y según la propiedad métrica que se conserve (subsección 4.2.3).

Los conceptos y resultados que se muestran en esta sección se pueden encontrar en libros como [1] y [18]. En otros libros como [12], [13] o [14] también se puede obtener información relacionada con ellos.

4.2.1. Indicatríz de Tissot

La *Indicatríz de Tissot* (conocida también como *elipse de distorsión*) es un concepto desarrollado por el matemático francés Nicolas Auguste Tissot en 1859 cuyo objetivo es caracterizar la distorsión producida al utilizar una proyección cartográfica [32].

Definición 4.35. Una *Indicatríz de Tissot* es una figura que se utiliza para ilustrar la distorsión angular y superficial que se produce en un mapa debido al uso de una proyección cartográfica.

Observación 4.36. Una Indicatríz de Tissot permite cuantificar matemáticamente las distorsiones producidas al plasmar la superficie terrestre sobre un plano como consecuencia de utilizar una proyección cartográfica.

Para ello, estudia cómo se deforma un círculo infinitesimal con una unidad de radio, definido en un modelo geométrico de la superficie de la Tierra (una esfera o un elipsoide), al realizar una proyección sobre una superficie.

Debido a que estas distorsiones pueden variar a lo largo y ancho de la superficie terrestre, es habitual colocar Indicatrices de Tissot en las intersecciones de meridianos y paralelos para observar mejor la deformación producida al utilizar una proyección.

En la figura 4.1 podemos observar las Indicatríz de Tissot sobre el modelo esférico de la Tierra. Dado que no hay ninguna deformación (pues no se ha realizado ninguna proyección), todas tienen la misma forma independientemente del punto donde se encuentren.

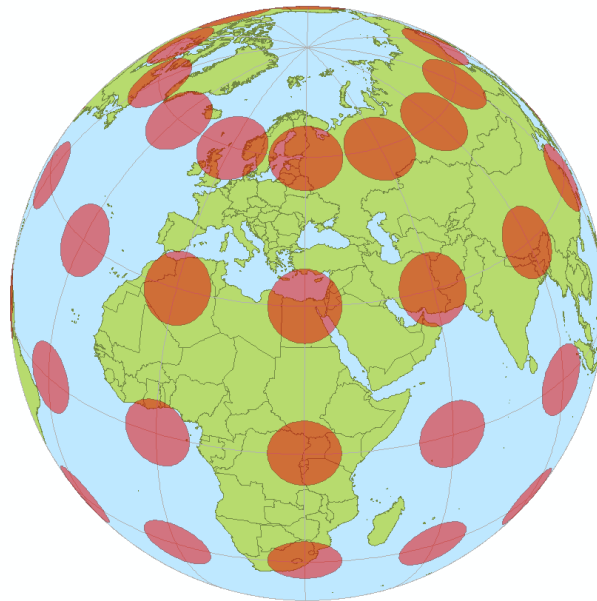


Figura 4.1: Indicatrices de Tissot sobre la superficie terrestre. Fuente: [32].

Ejemplo 4.37. En las proyecciones conformes, las Indicatrices de Tissot son círculos de tamaño variable. En cambio, en las proyecciones isoareales, varían su forma y orientación en función de la ubicación, pero todas tienen la misma unidad de área.

4.2.2. Clasificación según la superficie de proyección

Una primera clasificación de las proyecciones consiste en catalogarlas según la superficie donde se proyectan los puntos. Las superficies más frecuentes son el plano, el cilindro y el cono, las cuales, en función de como estén situadas respecto al objeto a proyectar, determinan diferentes tipos de proyecciones.

En virtud de la superficie de proyección se definen los siguientes tipos de proyección:

- Proyección plana o azimutal: utiliza el plano como superficie de proyección. Se pueden distinguir varios tipos:
 - Gnómica o central: el vértice de proyección coincide con el centro de la esfera.
 - Estereográfica: el vértice de proyección coincide con el punto diametral opuesto al punto de tangencia (antípoda).
 - Ortográfica: el vértice de proyección se encuentra en el infinito.
 - Escenográfica: el vértice de proyección es un punto cualquiera del espacio exterior a la esfera (distinto del infinito).
- Proyección cilíndrica: utiliza el cilindro como superficie de proyección.
- Proyección cónica: utiliza el cono como superficie de proyección.

En la figura 4.2 podemos ver un esquema de como se realizan estas proyecciones.



Figura 4.2: Principales superficies de proyección. Fuente: [33].

Además, según la posición de la superficie de proyección con respecto al eje de rotación de la Tierra, las proyecciones cilíndricas y las proyecciones cónicas se clasifican en:

- Normal o polar: el eje de simetría de la superficie de proyección coincide con el eje de rotación de la Tierra.
- Transversa o ecuatorial: el eje de simetría de la superficie de proyección forma un ángulo de 90 grados con el eje de rotación de la Tierra.
- Oblicua: cualquier otro caso.

Esta clasificación de las proyecciones cilíndricas y cónicas se puede ver en la figura 4.3.

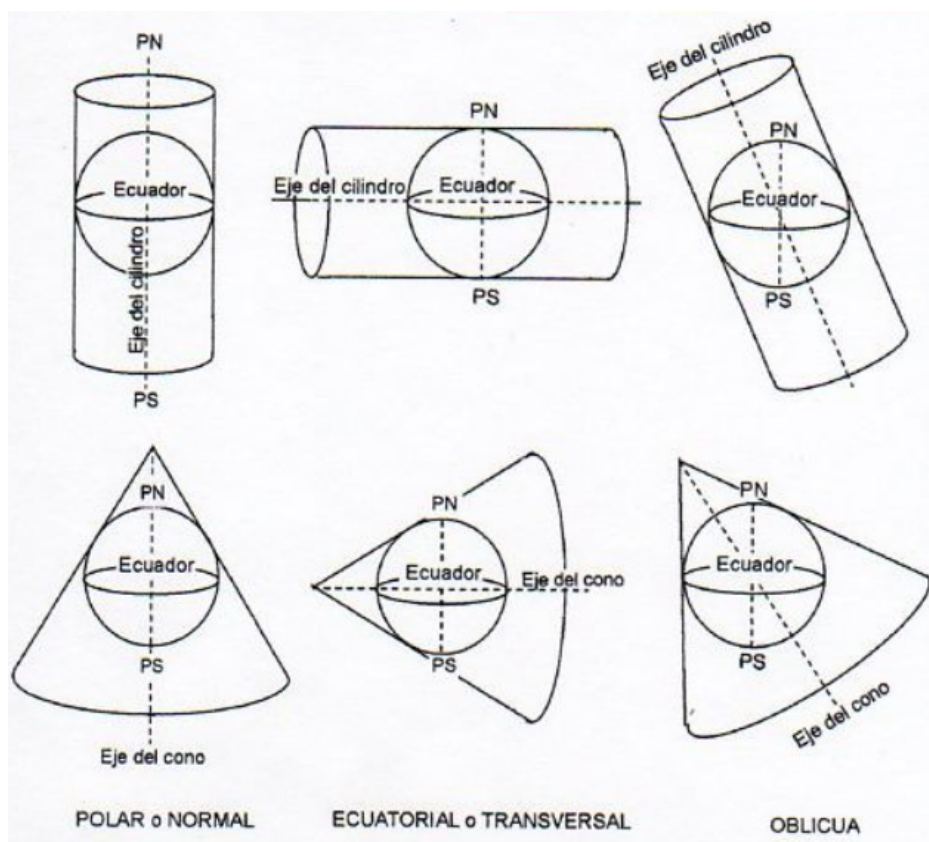


Figura 4.3: Clasificación proyecciones cilíndricas y cónicas. Fuente: [34].

Observación 4.38. Existen otras proyecciones que no encajan con el esquema que se ha planteado anteriormente debido a que son proyecciones de uso menos frecuente, y solo se utilizan en casos muy concretos. Algunos de estos casos son la *proyección de Werner* que es una proyección pseudocónica con forma de corazón (figura 4.4); o la *proyección de Cahill-Keyes* que es una proyección en la que la superficie de proyección es un poliedro (figura 4.5).

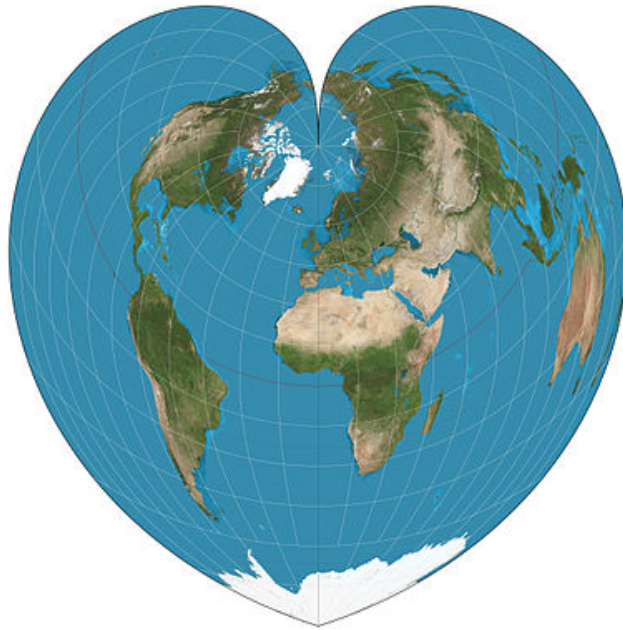


Figura 4.4: Mapamundi realizado con la proyección de Werner. Fuente: [35].



Figura 4.5: Mapamundi realizado con la proyección de Cahill-Keyes. Fuente: [35].

4.2.3. Clasificación según la propiedad métrica que se conserva

Otra forma de clasificar las proyecciones es según la propiedad métrica que conserven, ya que no pueden conservar todas al mismo tiempo.

Por ello, cuando se está diseñando un mapa, se debe estudiar el uso al que estará destinado: generalmente, la navegación necesita mapas en los que se conserven los ángulos (es decir, *mapas conformes*), mientras que para usos gubernamentales son más útiles los mapas en los que se conservan las áreas (es decir, *mapas isoareales*). En cualquier caso, nunca podrá existir un mapa que sea simultáneamente conforme e isoareal (es decir, que conserve ángulos y áreas al mismo tiempo), ya que para ello debería existir una aplicación conforme e isoareal entre la esfera y el plano. Esto es imposible, ya que como se pone de manifiesto en el teorema 4.28, una aplicación que es conforme e isoareal al mismo tiempo, es una isometría; y el corolario 2.18 ya demostró que no existen isometrías entre abiertos del plano y abiertos de la esfera.

En función de la métrica conservada, los principales tipos de proyección son:

- Conforme: se conservan las formas (es decir, no hay distorsión en los ángulos). Usadas para la navegación aérea y marítima.
- Isoareal, equivalente o equiárea: se conservan las áreas. Usadas para la realización del catastro y cuestiones gubernamentales.
- Compromiso: no se conservan ni ángulos ni áreas. Usadas para la realización de mapas temáticos.

A pesar de que la elección de un tipo de proyección u otro depende de las necesidades cartográficas y geográficas para las que se quiera utilizar, en los mapas modernos la proyección más empleada es la proyección conforme.

A continuación, se hace un estudio más profundo de cada uno de estos tipos de proyecciones: *proyecciones conformes* en la subsubsección 4.2.3.1, *proyecciones isoareales* en la subsubsección 4.2.3.2, y *proyecciones de compromiso* en la subsubsección 4.2.3.3.

4.2.3.1. Proyecciones conformes

En general, para la marina y la aviación, donde se navega siguiendo las loxodrómicas, el mapa elegido deberá conservar los ángulos para que el piloto no se desvíe del rumbo escogido. Por esta razón, se utilizan las *proyecciones conformes*.

Este tipo de proyecciones mantienen la forma de la superficie que se muestra en el mapa, sin embargo, distorsionan mucho el tamaño de las superficies cartografiadas.

La *proyección cilíndrica normal de Mercator* (también designada como *proyección de Mercator*) es la proyección conforme más conocida e importante de todas, ya que da lugar a los mapas habituales a los que estamos acostumbrados. Se ideó exclusivamente para su uso en la navegación, ya que al tratarse de una proyección conforme, se conservan los ángulos. Es decir, para ir de un punto A a un punto B, basta con situarlos en un mapa, unirlos con una recta, y el ángulo que forme esa recta en el mapa con los meridianos define el rumbo (la loxodrómica) que se debe seguir. La sencillez de este método compensa el mayor recorrido que se realiza al navegar siguiendo la loxodrómica en vez de la ortodrómica.

Veamos más en detalle esta proyección:

La proyección de Mercator

Tras el descubrimiento de América en 1492, el comercio comenzó a expandirse por todo el planeta. Por ello, se necesitaban nuevos mapas que permitieran mantener el rumbo a los barcos para viajar de un puerto a otro sin que se perdieran durante las largas travesías. En 1569, el cartógrafo, geógrafo y matemático belga Gerardus Mercator (1512-1594) publicó en su obra *Nueva y Aumentada Descripción de la Tierra con Correcciones para su Uso en Navegación* una proyección que resolvía este problema ya que se trataba de una proyección conforme: la *proyección de Mercator* (figura 4.6). La creación de esta proyección marcó el principio de una nueva era en la Cartografía [21].

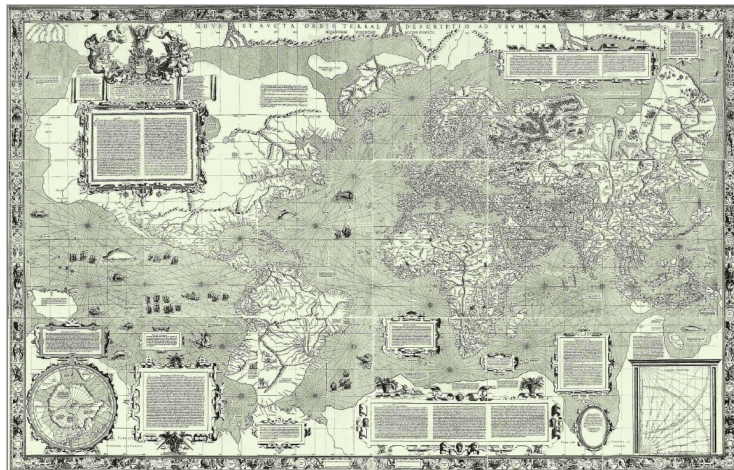


Figura 4.6: Mapamundi de 1569 realizado con la proyección de Mercator. Fuente: [36].

Definición 4.39. La *proyección de Mercator* viene definida por la aplicación:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \\ \phi(x, y, z) &= \left(\arccos \frac{x}{\sqrt{1-z^2}}, \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right), 0 \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde N y S representan los polos Norte y Sur respectivamente.

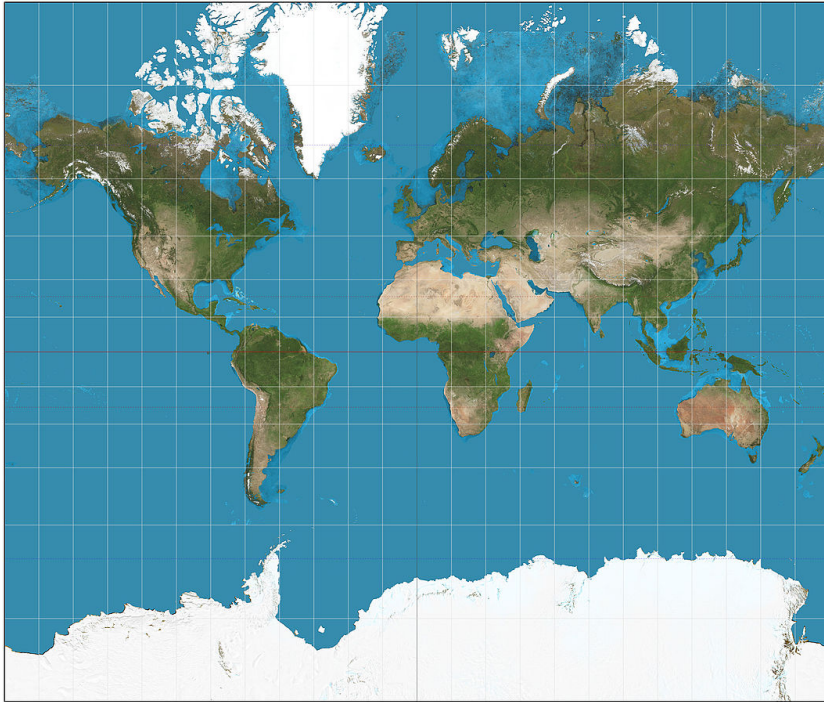


Figura 4.7: Mapamundi actual realizado con la proyección de Mercator. Fuente: [35].

Observación 4.40. Los meridianos ($\varphi = \varphi_0$, donde φ_0 es una constante) se proyectan en segmentos de rectas verticales, y los paralelos ($\theta = \theta_0$, donde θ_0 es una constante) en rectas horizontales.

Esto se debe a que al aplicar ϕ a las curvas:

$$\begin{aligned} \alpha(\theta, \varphi_0) &= (\text{sen}(\theta)\cos(\varphi_0), \text{sen}(\theta)\text{sen}(\varphi_0), \cos(\theta)) \\ \beta(\theta_0, \varphi) &= (\text{sen}(\theta_0)\cos(\varphi), \text{sen}(\theta_0)\text{sen}(\varphi), \cos(\theta_0)) \end{aligned}$$

con φ_0, θ_0 constantes, se obtienen parametrizaciones de rectas verticales y horizontales respectivamente.

Proposición 4.41. *La proyección cilíndrica de Mercator es una aplicación conforme.*

Demostración. Sea $\mathbf{x}(\theta, \varphi)$ la parametrización de \mathbb{S}^2 dada por las coordenadas geográficas, es decir, $\mathbf{x}(\theta, \varphi) = (\text{sen}(\theta)\cos(\varphi), \text{sen}(\theta)\text{sen}(\varphi), \cos(\theta))$; sea ϕ la proyección cilíndrica de Mercator de la definición 4.39; y sea $\tilde{\mathbf{x}}$ la aplicación resultante de componer $\phi \circ \mathbf{x}$, es decir, $\tilde{\mathbf{x}}(\theta, \varphi) = (\varphi, \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\cos(\theta)}{1-\cos(\theta)}\right), 0)$.

Debido a que los coeficientes de la primera forma fundamental de $\tilde{\mathbf{x}}$ son $E = \frac{1}{\text{sen}^2(\theta)}$, $F = 0$ y $G = 1$; aplicando el teorema 4.18 a la función $\lambda(p) = \frac{1}{\text{sen}^2(\theta)}$ (que es diferenciable y nunca se anula, pues $\theta \in (0, \pi)$), se tiene que la proyección cilíndrica de Mercator es una aplicación conforme. \square

Observación 4.42. Esta proyección se puede visualizar como aquella que asemeja la Tierra a un globo hinchable que se introduce en un cilindro, y que al comenzar a inflarse, imprime el mapa en la cara interior del cilindro.

Observación 4.43. Aunque es una proyección muy utilizada en navegación, no es adecuada para representar toda la Tierra en un único mapa, ya que provoca grandes distorsiones de áreas y formas al alejarse del ecuador (hecho que corroboran las Indicatrices de Tissot de la figura 4.8).

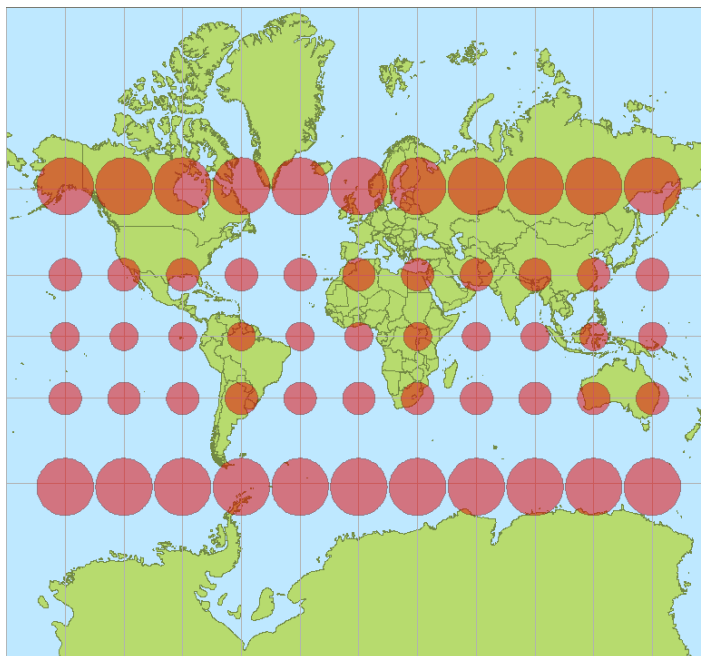


Figura 4.8: Indicatrices de Tissot utilizando la proyección de Mercator. Fuente: [36].

En efecto, las superficies de latitudes elevadas se muestran mucho más grandes de lo que son en realidad. Por poner algún ejemplo, la superficie de África es aproximadamente 14 veces la de Groenlandia, pero en esta proyección, las dos tienen un tamaño similar. Lo mismo ocurre con Alaska y Brasil, que aunque aparecen representadas con un tamaño similar, Alaska es casi cinco veces más pequeña que Brasil.

Estas deformaciones no quitan valor ni utilidad a la proyección de Mercator, que no debe utilizarse para comparar superficies ni para medir distancias, sino tan solo para el trazado de loxodrómicas.

Observación 4.44. Las aplicaciones web de Cartografía (como Google Maps o Bing Maps) utilizan actualmente una variante de la proyección de Mercator que asume que la superficie del planeta es esférica para simplificar los cálculos [36].

Los desarrolladores de Bing Maps defienden esta elección por dos razones:

- En cualquier punto del planeta, la dirección Norte-Sur siempre se muestra como vertical, y la dirección Este-Oeste siempre como horizontal.
- A pesar de que se distorsionan mucho las formas cuando se representan grandes superficies, localmente, para regiones pequeñas, la deformación es muy pequeña. Esto la hace muy conveniente para un mapa dinámico sobre el que se hace zoom a zonas pequeñas como es el caso de este tipo de aplicaciones.

Debido a la gran distorsión que se produce en el tamaño de la superficie cerca de los polos Norte y Sur, generalmente las regiones polares se cortan. De hecho, en los mapas de Google Maps, la máxima latitud representada es de ± 85.0511287798066 grados.

La *proyección normal de Mercator* da lugar a la *proyección transversal de Mercator* y al *sistema de coordenadas Universal Transversa Mercator* que se explican a continuación.

Definición 4.45. La *proyección transversal de Mercator* es una proyección normal de Mercator en la que el cilindro sobre el que se genera la proyección está girado 90° .

Observación 4.46. La proyección normal de Mercator es completamente exacta en el ecuador, y es bastante precisa dentro de una estrecha franja de unos tres grados centrado en el ecuador.

Esta cualidad es explotada por el *sistema de coordenadas Universal Transversa Mercator* (conocido como *sistema U.T.M.*) adoptado internacionalmente. Este sistema define 60 proyecciones estándar diferentes, donde cada una es una proyección transversal Mercator con un meridiano distinto como línea de tangencia.

Se utiliza principalmente para cartografiar los objetos contenidos en un único huso, es decir, para cartografiar las posiciones geográficas que ocupan todos los puntos comprendidos entre dos meridianos. Esto se debe a que la combinación de dos husos diferentes en un mismo mapa se corresponde con la combinación de dos proyecciones cartográficas diferentes, lo que puede provocar errores como los explicados en la observación 3.4 (por lo que si es necesario combinar diferentes husos UTM para un estudio, la solución más adecuada consiste en buscar otra proyección que proporcione una distorsión baja en toda el área de interés).

El sistema UTM divide la Tierra en 60 zonas (husos) UTM; y aunque se ha utilizado en casi toda la cartografía española, introduce un grave problema ya que, como se observa en la figura 4.9, España está contenida en los husos 28 (Islas Canarias), 29 (Galicia), 30 (centro de España y España occidental), y 31 (España oriental e Islas Baleares).

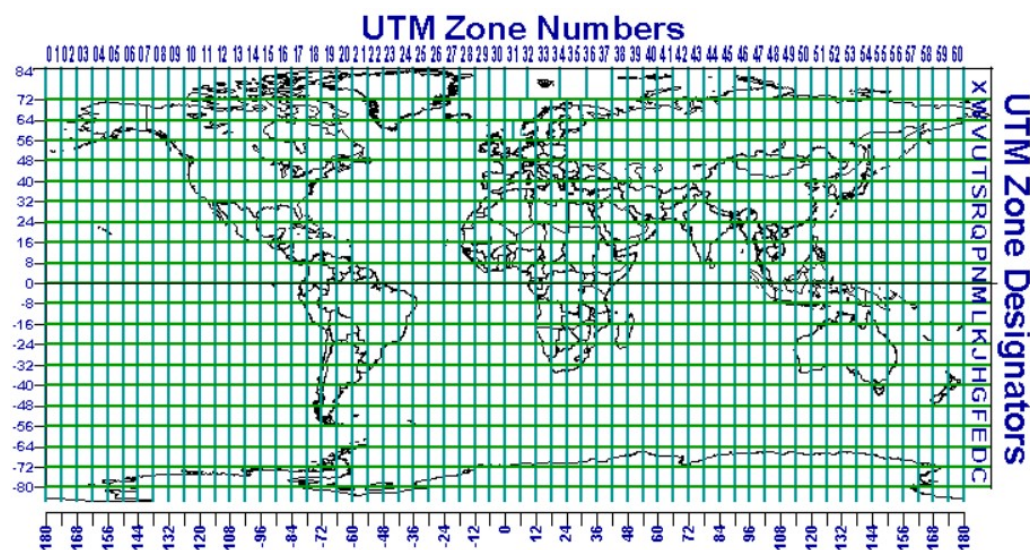


Figura 4.9: Distribución de las zonas del sistema de coordenadas UTM. Fuente: [13].

En [12], [13] y [14] se hace un estudio más completo de este sistema de coordenadas para el lector que quiera ampliar esta información.

4.2.3.2. Proyecciones isoareales

Por otro lado, para la realización del catastro y todas sus consecuencias fiscales, es necesario la conservación de superficies, por lo que se utilizan las *proyecciones isoareales* (también denominadas *equivalentes* o *equiáreas*).

Este tipo de proyecciones conservan las áreas, y a pesar de ser menos conocidas que las conformes, son de gran utilidad ya que permiten obtener una imagen real del tamaño de la zona proyectada.

La *proyección de Werner* vista en la figura 4.4 es un ejemplo de proyección isoareal. Sin embargo, no es tan conocida como la *proyección cilíndrica normal de Lambert* (o simplemente *proyección de Lambert*), que es la que normalmente se estudia como ejemplo de este tipo de proyecciones y que se escoge de referencia para realizar proyecciones isoareales.

La proyección de Lambert

La *proyección de Lambert* es una proyección isoareal que fue publicada junto con otras seis proyecciones en la obra *Beiträge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendung* de Johann Heinrich Lambert y que data del año 1772 [22].

Se considera la esfera unidad \mathbb{S}^2 centrada en el origen de coordenadas y el cilindro C de ecuación $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Sean $N = (0, 0, 1)$ y $S = (0, 0, -1)$, y se considera la aplicación $\tilde{\phi} : \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\} \rightarrow C$ tal que para cada $p \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$, su imagen es el punto de corte entre C y la semirrecta perpendicular al eje z que comienza en el eje z y que pasa por p (figura 4.10). Es decir

$$\tilde{\phi}(p) = \tilde{\phi}(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{1-z^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-z^2}}, z \right)$$

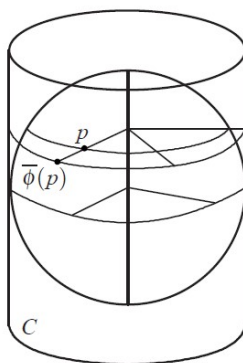


Figura 4.10: Realización de la proyección isoareal cilíndrica de Lambert. Fuente: [1].

Entonces al componer $\tilde{\phi}$ con la inversa de la parametrización del cilindro, se obtiene la *proyección de Lambert*.

Definición 4.47. La *proyección de Lambert* viene definida por la aplicación:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \\ \phi(x, y, z) &= \left(\arctg \frac{y}{x}, z, 0\right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde N y S representan los polos Norte y Sur respectivamente.

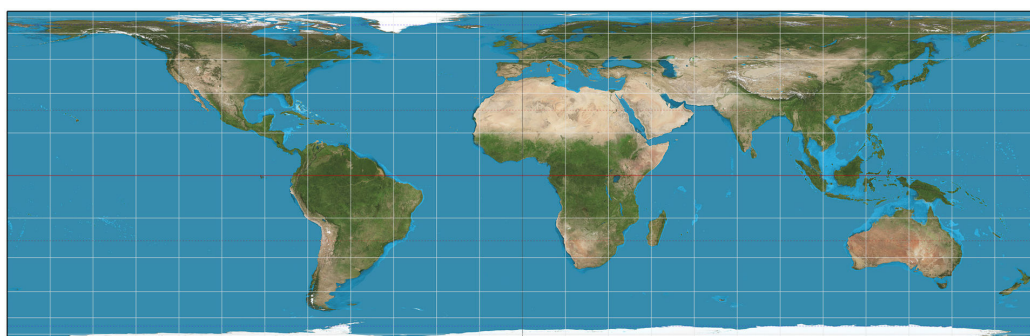


Figura 4.11: Mapamundi realizado con la proyección de Lambert. Fuente: [35].

Observación 4.48. Al igual que en la proyección cilíndrica de Mercator, los meridianos se proyectan en rectas verticales, y los paralelos en rectas horizontales.

Proposición 4.49. La *proyección cilíndrica de Lambert* es una aplicación *isoareal*.

Demostración. Sea $\mathbf{x}(\theta, \varphi)$ la parametrización de \mathbb{S}^2 dada por las coordenadas geográficas, es decir, $\mathbf{x}(\theta, \varphi) = (\text{sen}(\theta)\cos(\varphi), \text{sen}(\theta)\text{sen}(\varphi), \cos(\theta))$; sea ϕ la proyección cilíndrica de Lambert de la definición 4.47; y sea $\tilde{\mathbf{x}}$ la aplicación resultante de componer $\phi \circ \mathbf{x}$, es decir, $\tilde{\mathbf{x}}(\theta, \varphi) = (\varphi, \cos(\theta), 0)$.

Dado que $\tilde{\mathbf{x}}_\theta = (0, -\text{sen}(\theta), 0)$ y $\tilde{\mathbf{x}}_\varphi = (1, 0, 0)$, se deduce que los coeficientes de la primera forma fundamental de $\tilde{\mathbf{x}}$ son $\tilde{E} = \tilde{\mathbf{x}}_\theta \cdot \tilde{\mathbf{x}}_\theta = \text{sen}^2(\theta)$, $\tilde{F} = \tilde{\mathbf{x}}_\theta \cdot \tilde{\mathbf{x}}_\varphi = 0$, y $\tilde{G} = \tilde{\mathbf{x}}_\varphi \cdot \tilde{\mathbf{x}}_\varphi = 1$.

Finalmente, aplicando el teorema 4.27, dado que $\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2 = \text{sen}^2(\theta)$, se tiene que la proyección cilíndrica de Lambert es una aplicación isoareal. \square

Observación 4.50. En la figura 4.12 se puede ver como las Indicatrices de Tissot en la proyección de Lambert cambian de forma en función de su posición en el mapa. Sin embargo, todas ocupan el mismo área, corroborando así que se trata de una proyección isoareal.

En este mapa, a pesar de que no se mantienen las formas de los países, sí que se mantiene la superficie que abarcan. Por esta razón, se puede utilizar para comparar la superficie entre diferentes regiones.

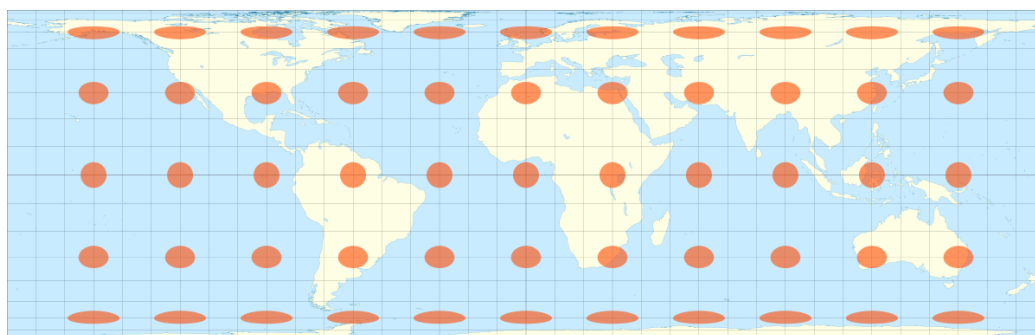


Figura 4.12: Indicatrices de Tissot utilizando la proyección de Lambert. Fuente: [37].

4.2.3.3. Proyecciones de compromiso

Durante muchos años, la proyección de Mercator fue la más utilizada para todo tipo de usos a pesar de la gran distorsión de áreas y formas que se produce cerca de los polos (lo que la hace inadecuada para su uso en mapamundis, mapas de divulgación científica, mapas escolares, etc).

Es por ello que a lo largo del siglo XX fueron surgiendo otro tipo de proyecciones cartográficas más adecuadas para representar la superficie entera: las *proyecciones de compromiso*.

Este tipo de proyecciones no conservan ni ángulos ni áreas, sino que tratan de buscar un equilibrio entre la distorsión de estas propiedades, por lo que suelen utilizarse como base para realizar mapas temáticos.

Existen multitud de formas de minimizar todas las distorsiones producidas, y por ende, multitud de proyecciones de compromiso, como la que se ha presentado anteriormente en la figura 4.5.

A continuación, se presenta la *proyección de Winkel-Tripel*, que probablemente sea la proyección de compromiso más conocida en la actualidad, y la *proyección de J. Richard Gott et al.*, que ha sido publicada recientemente (el 15 de febrero de 2021) en el artículo [23].

Proyección de Winkel-Tripel

Esta proyección, creada por el cartógrafo alemán Oswald Winkel (1874-1953) en 1921, surge como la media aritmética de dos proyecciones (la proyección equirectangular y la proyección de Aitoff), y trata de minimizar la distorsión de las tres propiedades métricas: áreas, ángulos y distancias (de ahí su nombre, ya que *Tripel* en alemán quiere decir *Triple*) [38].

Definición 4.51. La *proyección de Winkel-Tripel* viene definida por la aplicación:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 & (4.5) \\ \phi(x, y, z) &= \left(\frac{1}{2} \left(\lambda \cos(\varphi_1) + \frac{2 \cos(\varphi) \sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\text{sinc}(\alpha)} \right), \frac{1}{2} \left(\varphi + \frac{\sin(\varphi)}{\text{sinc}(\alpha)} \right), 0 \right) \end{aligned}$$

donde λ es la longitud relativa al meridiano central de la proyección; φ es la latitud; φ_1 es el paralelo estándar para el proyección equirectangular; sinc es el seno cardinal no normalizado (con la discontinuidad eliminada), es decir, $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$; y $\alpha = \arccos\left(\cos(\varphi) \cos\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right)$.

Observación 4.52. En su propuesta, Winkel estableció $\varphi_1 = \arccos\left(\frac{2}{\pi}\right)$.

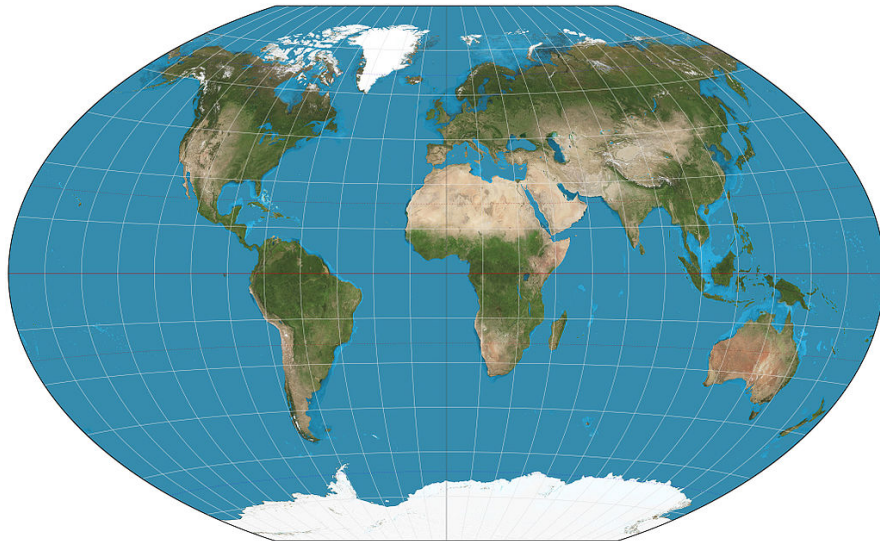


Figura 4.13: Mapamundi realizado con la proyección de Winkel-Tripel. Fuente: [39].

Observación 4.53. Aunque fue utilizada por primera vez en el año 1955 por John Bartholomew & Sons para la realización de un mapamundi de la vegetación del planeta para el *Times Atlas of the World* (figura 4.14), no fue hasta el año 1998 cuando cobró protagonismo, ya que en ese año, la *National Geographic Society*, que es un referente internacional, comenzó a utilizarla para todos sus mapamundis. A partir de entonces, muchas otras agencias y compañías comenzaron a utilizarla.

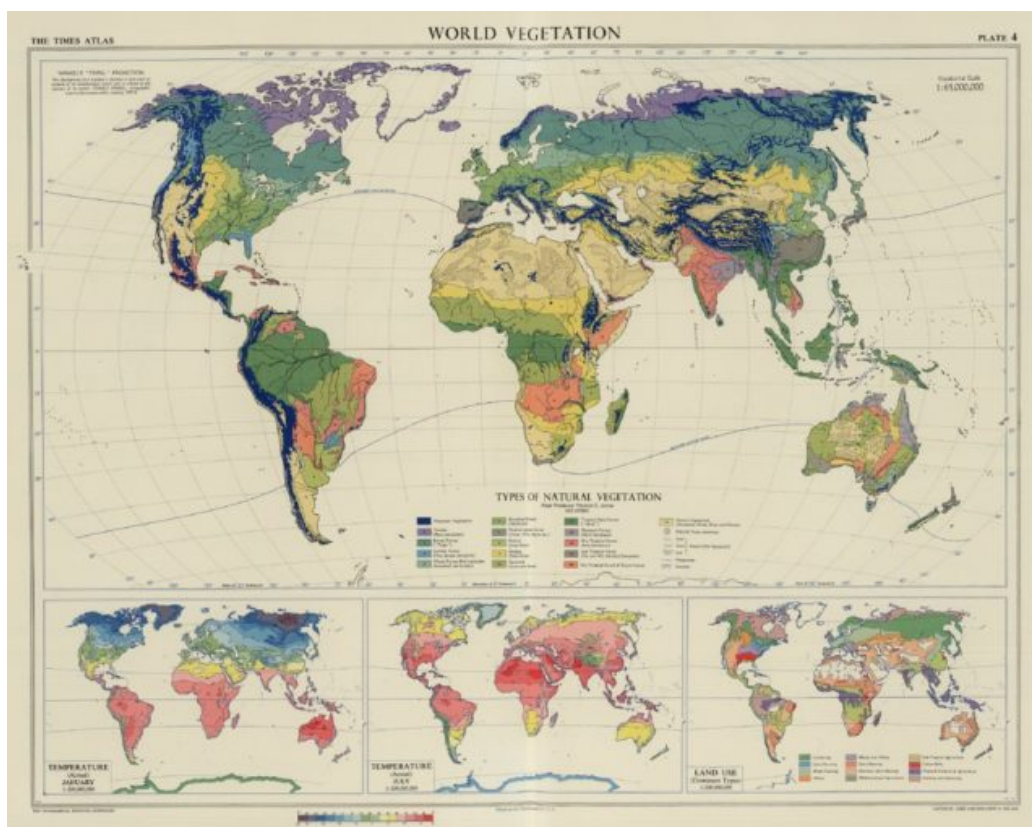


Figura 4.14: Mapamundi de la vegetación de 1955 realizado con la proyección de Winkel-Tripel. Fuente: [38].

Observación 4.54. Hoy en día es considerada una de las mejores proyecciones para representar toda la superficie de la Tierra ya que busca un equilibrio de las distorsiones producidas. En la figura 4.15 se pueden ver las Indicatrices de Tissot en la proyección de Winkel-Tripel.

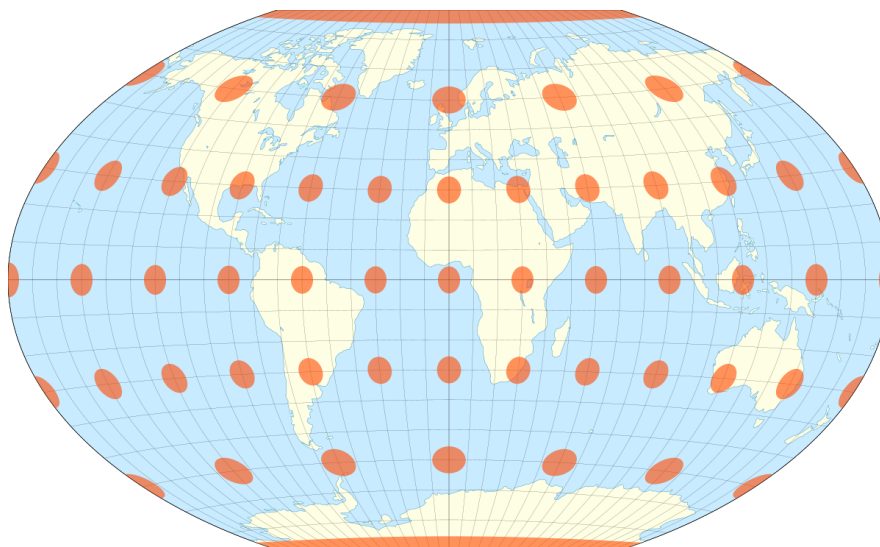


Figura 4.15: Indicatrices de Tissot utilizando la proyección de Winkel-Tripel. Fuente: [39].

Proyección de J. Richard Gott et al.

En 2007, J. Richard Gott (profesor emérito de Astrofísica de la Universidad de Princeton, Princeton, EEUU) y David M. Goldberg (profesor de Física en la Universidad de Drexel, Philadelphia, EEUU) crearon un sistema para puntuar los mapas existentes. Este sistema permite cuantificar los seis tipos de distorsiones que pueden surgir al utilizar una proyección: isotropía, áreas, distancias, flexión, asimetría (desviación) y cortes de límites [23].

Observación 4.55. Cuanto menor es la puntuación otorgada por este sistema, mejor es el mapa: un globo terráqueo tiene una puntuación de 0,0 dado que no hay deformaciones; sin embargo, la proyección de Mercator recibe una puntuación de 8,296, y la proyección de Winkel-Tripel de 4,563.

Debido a estas altas puntuaciones, en el 2021, J. Richard Gott y David M. Goldberg, ayudados por Robert J. Vanderbei (profesor de Investigación de operaciones e Ingeniería financiera de la Universidad de Princeton), presentan en el artículo *Flat Maps that improve on the Winkel Tripel* [23] una nueva proyección con un enfoque totalmente novedoso a pesar de su obviedad: realizar una proyección azimutal equidistante polar de doble cara (es decir, que conserve las direcciones desde el punto central), donde el hemisferio Norte se proyecte sobre una cara, y el hemisferio Sur sobre la otra (figura 4.16).

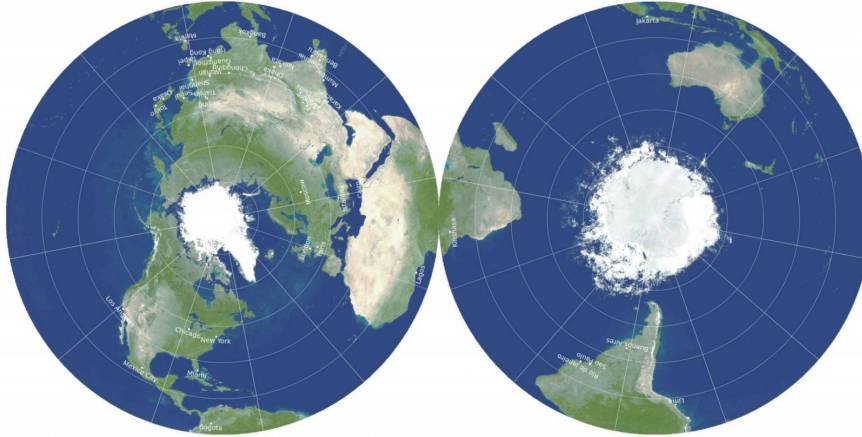


Figura 4.16: Mapamundi realizado con la proyección de J. Richard Gott, David M. Goldberg y Robert J. Vanderbei. Fuente: [23].

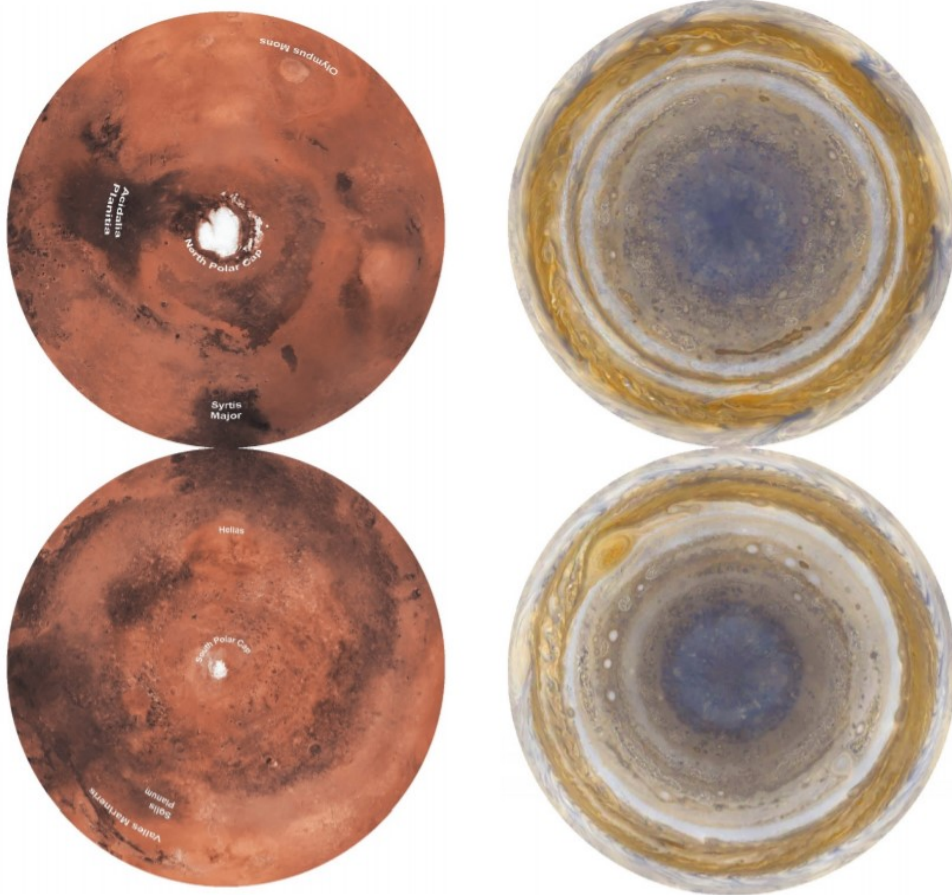
Los mapas realizados con esta proyección presentan errores de distancia más pequeños que cualquier mapa plano de una cara, ya que han logrado que las distancias estén desviadas como máximo un $\pm 22,2\%$; y además, las áreas en los bordes son solo 1,57 veces más grandes que en el centro.

Otra ventaja que presenta esta proyección es que los mapas no presentan ningún tipo de corte o discontinuidad, ya que se extienden sobre el borde, pudiendo pasar de una cara a la otra sin problemas (como si se tratase de una sábana sobre una cuerda).

Observación 4.56. La Antártida y Australia están representadas con una mayor precisión que en la mayoría de los otros mapas. Además, las distancias entre océanos o polos son precisas y fáciles de medir, a diferencia de los mapas planos tradicionales.

Observación 4.57. A pesar de que los mapas realizados con esta proyección reciben una puntuación mucho mejor que los mapas realizados con cualquier otra (la puntuación de error de Goldberg-Gott para esta nueva proyección es de 0,881), han sido objeto de gran controversia entre los principales expertos en Cartografía, ya que esta proyección destruye la premisa básica de mostrar todo la superficie de estudio en una sola cara o página.

Observación 4.58. Finalmente, estos autores también plantean la posibilidad de aplicar esta proyección para la obtención de mapas astronómicos (figuras 4.17a y 4.17b), ya que la puntuación de error de Goldbert-Gott sigue siendo de 0,881 para ellos.



(a) Mapa de Marte.

(b) Mapa de Júpiter.

Figura 4.17: Mapas astronómicos utilizando la proyección de J.R. Gott et al. Fuente: [23].

Bibliografía

- [1] María de los Ángeles Hernández Cifre y José Antonio Pastor González. (2010): *Un curso de Geometría Diferencial*. Ediciones Doce Calles, S.L. ISBN: 978-84-00-09154-5.
- [2] Manfredo P.do Carmo. (1995): *Geometría diferencial de curvas y superficies. Versión española de José Claudio Sabina de Lis*. Alianza Editorial, S.A. ISBN: 84-206-8135-0.
- [3] Manuel Gutiérrez. (2017): *Apuntes de geometría diferencial de curvas y superficies*. Uma editorial. ISBN: 84-9747-808-8.
- [4] Luis M.Merino González y Evangelina Santos Aláez. (2010): *Álgebra Lineal con métodos elementales*. Ediciones Paraninfo, S.A. ISBN: 978-84-9732-481-6.
- [5] Leonhard Euler. (1748): *Introductio in analysin infinitorum. Tomus primus*. Lausannae : apud Marcum-Michaellem Bousquet & Socios. Accesible en: <http://hdl.handle.net/10481/31374>
- [6] Leonhard Euler. (1767): *Recherches sur la courbure des surfaces*. Accesible en: <http://eulerarchive.maa.org/docs/originals/E333.pdf>
- [7] Gaspard Monge. (1795): *Applications de l'Analyse à la Géométrie*. Accesible en: <https://books.google.fr/books?id=Nf5zhlffjd0C>
- [8] Karl Fiedrich Gauss. (1828): *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Göttingen, Dieterich. Accesible en: <https://books.google.es/books?id=bXOAAAAAMAAJ>
- [9] Antonio F. Costa et al. (2018): *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Sanz y Torres, S.L. ISBN: 978-84-16466-81-8.
- [10] Antonio F. Costa et al. (2001): *Notas de geometría diferencial de curvas y superficies*. Sanz y Torres, S.L. ISBN: 84-88667-68-X.

- [11] Sebastián Montiel y Antonio Ros. (1998): *Curvas y superficies*. Proyecto Sur de Ediciones, S.L. ISBN: 84-8254-991-X.
- [12] Victor Olaya. (2014): *Sistemas de Información Geográfica*. Libro libre accesible en: <https://volaya.github.io/libro-sig/>
- [13] Francisco Alonso Sarría. (2006): *Sistemas de Información Geográfica*. Universidad de Murcia. Accesible en: <https://www.um.es/geograf/sigmur/temariohtml/>
- [14] Anna Muñoz Bolas. (2009): *Geodesia y cartografía. Fundamentos de los sistemas de información geográfica*. Universitat Oberta de Catalunya. Accesible en: <http://hdl.handle.net/10609/53642>
- [15] C.D. Tomlin. (1990): *Geographic information systems and cartographic modelling*. Prentice Hall.
- [16] GIS Lounge (última visita el 21-05-2021). *The Components of GIS Evolve*. Accesible en: <https://www.gislounge.com/the-components-of-gis-evolve/>
- [17] Agencia Estatal Boletín Oficial del Estado. (2007-08-29): *Real Decreto 1071/2007, de 27 de julio, por el que se regula el sistema geodésico de referencia oficial en España*. Accesible en: <https://www.boe.es/buscar/doc.php?id=BOE-A-2007-15822>
- [18] Fernando Martín Asín. (1983): *Geodesia y cartografía matemática*. Paraninfo S.A. ISBN: 84-398-0248-X.
- [19] Jacinto Santamaría Peña. (2000): *Apuntes de cartografía y proyecciones cartográficas*. Universidad de La Rioja. ISBN: 84-95301-31-X.
- [20] Instituto Geografico Nacional. (Fecha de publicación desconocida): *GDS Teoría Geodesia*. 59 páginas. Accesible en: <http://www.ign.es/web/resources/docs/IGNCnig/GDS-Teoria-Geodesia.pdf>
- [21] John McCleary. (2013): *Geometry from a Differentiable Viewpoint*. Cambridge University Press. ISBN: 9781139022248.
- [22] John P.Snyder. (1987): *Map projections: A working manual*. U.S. Government Printing Office, 397 páginas. Accesible en: <https://doi.org/10.3133/pp1395>
- [23] J. Richard Gott et al. (2021-02-15): *Flat Maps that improve on the Winkel Tripel*. Cornell University, 39 páginas. Accesible en: <https://arxiv.org/abs/2102.08176>

Fuentes de algunas imágenes

- [24] José Elías Bonells (última visita el 29-05-2021). *Sistemas de Información Geográfica. Localización e indentificación de espacios en parques y jardines.*. Accesible en: <https://jardinessinfronteras.com/2020/05/19/sistemas-de-gestion-localizacion-e-identificacion-de-espacios-y-plantas-en-parques-y-jardines/>
- [25] Daris J. Ramirez (última visita el 21-05-2021). *La arquitectura y los sistemas de información geográfica.* Accesible en: <http://www.lexgeo.com/arquitecturaenterreno/>
- [26] Unknown (Blogger) (última visita el 21-05-2021). *Técnicas utilizadas en los sistemas de información geográfica.* Accesible en: <http://dayanaheros19.blogspot.com/2015/03/>
- [27] Luis Quesada Muelas (última visita el 21-05-2021). *Cómo manejar y solucionar con ArcGIS, los problemas cartográficos asociados a proyecciones.* Accesible en: <https://geoinnova.org/blog-territorio/solucionar-problemas-cartograficos-proyecciones/>
- [28] Barcelona World Race (última visita el 21-05-2021). *Sistema de coordenadas geográficas* Accesible en: <http://www.barcelonaworldrace.org/es/educacion/programa-educativo/explora/navegacion/tecnologia-del-imoca-60/posicionamiento/sistema-de-coordenadas-geograficas>
- [29] Wikipedia (última visita el 21-05-2021). *Coordenadas sobre la esfera.* Accesible en: <https://es.wikipedia.org/wiki/Esfera>
- [30] NASA Earth Observatory (última visita el 21-05-2021). *Gravity Anomaly Maps and The Geoid.* Accesible en: <https://earthobservatory.nasa.gov/features/GRACE/page3.php>

- [31] Carlos Almonacid Ramiro - SCUAM (última visita el 21-05-2021). *Mapa de la red geodésica de primer orden de España. Escala 1/2000.000 año 1877*. Accesible en: http://guiadigital.uam.es:90/SCUAM/documentacion/pdfs_a_descargar/1877RedGeodesicaEspa%C3%B1a_IGE.pdf
- [32] Wikipedia (última visita el 21-05-2021). *Indicatríz de Tissot*. Accesible en: https://es.wikipedia.org/wiki/Indicatriz_de_Tissot
- [33] Sociales (Blogger) (última visita el 21-05-2021). *Proyecciones*. Accesible en: <http://sociales1cdelaeso.blogspot.com/2012/12/proyecciones.html>
- [34] Ezebog (Blogger) (última visita el 21-05-2021). *Proyecciones y representaciones*. Accesible en: <http://laensenanzadelageografiaylahistoria.blogspot.com/2011/04/proyecciones-y-representaciones.html>
- [35] Wikipedia (última visita el 04-06-2021). *List of map projections*. Accesible en: https://es.wikipedia.org/wiki/Anexo:Cronolog%C3%ADa_de_las_proyecciones_cartogr%C3%A1ficas
- [36] Wikipedia (última visita el 21-05-2021). *Proyección de Mercator*. Accesible en: https://es.wikipedia.org/wiki/Proyecci%C3%B3n_de_Mercator
- [37] Wikipedia (última visita el 21-05-2021). *Lambert cylindrical equal-area projection*. Accesible en: https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Lambert_cylindrical_equal-area_projection
- [38] Cuaderno de cultura científica (última visita el 04-06-2021). *'Imago mundi', otros 6 retratos del mundo*. Accesible en: <https://culturacientifica.com/2018/09/05/imago-mundi-2-otros-6-retratos-del-mundo/>
- [39] Wikipedia (última visita el 21-05-2021). *Winkel tripel projection*. Accesible en: https://en.wikipedia.org/wiki/Winkel_tripel_projection