



---

**Universidad de Valladolid**

Facultad de Ciencias

## **TRABAJO FIN DE GRADO**

Grado en Matemáticas

**Iniciación a la Geometría Algebraica Tropical**

*Autor: Mario González Sánchez*

*Tutora: Dra. Carolina Ana Núñez Jiménez*



# Agradecimientos

A Ana, por su implicación en este trabajo y su inestimable ayuda.

A mi familia y amigos, por apoyarme durante estos años.



# Resumen

La Geometría Tropical toma como base el semianillo tropical  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , donde la suma se reemplaza por el mínimo y el producto, por la suma. De este modo, los polinomios se convierten en funciones lineales a trozos y sus “conjuntos de ceros” en complejos poliedrales.

En este trabajo se estudian las variedades tropicales, y se enuncian y demuestran el Teorema Fundamental y el Teorema de Estructura de la Geometría Algebraica Tropical. El primero establece una relación con la Geometría Algebraica Clásica, mientras que el segundo ofrece una descripción de las variedades tropicales en términos de la Geometría Poliedral.



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>v</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Conceptos y resultados fundamentales</b>	<b>3</b>
1.1. Valoraciones . . . . .	3
1.2. Geometría Poliedral . . . . .	10
1.2.1. Subdivisiones regulares . . . . .	18
1.3. Geometría Algebraica Clásica . . . . .	25
<b>2. Bases de Gröbner y Complejos de Gröbner</b>	<b>31</b>
2.1. Formas iniciales e ideales iniciales . . . . .	31
2.2. Bases de Gröbner . . . . .	34
2.3. Complejos de Gröbner . . . . .	40
2.4. Bases tropicales . . . . .	45
<b>3. Hipersuperficies tropicales</b>	<b>53</b>
3.1. El semianillo tropical . . . . .	53
3.2. Definiciones y primeros ejemplos . . . . .	56
3.3. Teorema fundamental . . . . .	58
3.4. Versión débil del Teorema de estructura . . . . .	64
<b>4. Teorema Fundamental de la Geometría Tropical</b>	<b>71</b>
4.1. Variedades tropicales . . . . .	71
4.2. Enunciado del Teorema . . . . .	74
4.3. Demostración del teorema . . . . .	76
4.4. Consecuencias del Teorema Fundamental . . . . .	84
<b>5. Teorema de Estructura</b>	<b>87</b>
5.1. Enunciado del teorema . . . . .	87
5.1.1. Condición de equilibrio . . . . .	87
5.1.2. Conexión a través de codimensión uno . . . . .	89
5.1.3. Comentarios sobre la demostración . . . . .	90
5.2. Demostración de la primera parte . . . . .	91
5.3. Demostración de la condición de equilibrio . . . . .	94
5.3.1. Caso de hipersuperficies . . . . .	95

5.3.2. Indicaciones para el caso general . . . . .	98
5.4. Problema inverso . . . . .	101
<b>Conclusiones</b>	<b>103</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>105</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>107</b>



# Introducción

La Geometría Tropical apareció como una nueva rama de las Matemáticas en 2002. No obstante, los primeros trabajos que se pueden enmarcar dentro de la Geometría Tropical se publicaron en los años 90 del siglo pasado. Uno de los precursores de la Geometría Tropical es Bergman, que estudió los límites de conjuntos logarítmicos ([Ber71]). El término “tropical” fue acuñado por matemáticos franceses, en honor al informático brasileño I. Simon, que escribió artículos en el tema.

Posteriormente, la Geometría Tropical fue tomando forma y se fueron abriendo cada vez más líneas de investigación. En cierto modo, el libro “Introduction to Tropical Geometry” que publicaron D. Maclagan y B. Sturmfels en 2015 ([MS15]) es una culminación de gran parte del trabajo anterior en este tema.

Desde el punto de vista actual, la Geometría Tropical es un área de las Matemáticas que se enmarca entre la Geometría Algebraica y la Combinatoria y tiene conexiones con muchas otras áreas como, por ejemplo, la Geometría Simpléctica y la Física Estadística. Su estudio se centra en el semianillo tropical,  $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \odot)$ . La suma tropical,  $\oplus$ , se define como el mínimo de números reales y el producto tropical,  $\odot$ , se define como la suma de números reales. Las operaciones tropicales heredan las propiedades del mínimo y la suma de números reales, la única diferencia es que no existe la “resta tropical”, por lo que  $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus)$  es un semigrupo y la terna  $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \odot)$  constituye un semianillo (conmutativo y unitario), que se denomina semianillo tropical.

Al reemplazar la suma por el mínimo y el producto por la suma, los polinomios se convierten en funciones lineales a trozos, y se reemplazan las variedades algebraicas por objetos de la Geometría Poliedral, que se pueden considerar como una “sombra combinatoria” de las variedades clásicas. En esta Geometría, tienen un papel clave las valoraciones. Nosotros nos restringiremos a valoraciones reales, pero existe una teoría más general de anillos valorados.

Aunque a priori no se observe ninguna ventaja de la Geometría Tropical sobre la Geometría Algebraica clásica, en realidad son dos disciplinas que se benefician mutuamente. Por ejemplo, la Geometría Tropical permite calcular los invariantes de Gromov-Witten y los de Welschinger. Otra aplicación de la Geometría Tropical en la Geometría Algebraica aparece en la implicación de variedades.

La Geometría Tropical también tiene sorprendentes aplicaciones en otras áreas, como en aprendizaje automático (“machine learning”). Por ejemplo, en [ZNL18] se muestra la equivalencia de una cierta clase de redes neuronales con la familia de aplicaciones tropicales racionales.

El objetivo de este trabajo de fin de grado es establecer las bases de la Geometría Algebraica Tropical, comenzando por las definiciones más sencillas hasta llegar al Teorema Fundamental y Teorema de Estructura. El presente trabajo se estructura como sigue:

- En los dos primeros capítulos se presentan una serie de resultados que son necesarios para entender los capítulos posteriores. El capítulo 1 comienza con las valoraciones, después se introducen resultados de Geometría Poliedral y se termina con una breve introducción a la Geometría Algebraica clásica. En el capítulo 2 se desarrolla una teoría de bases de Gröbner para ideales homogéneos del anillo de polinomios sobre un cuerpo valorado. Después, se construye el complejo de Gröbner de un ideal homogéneo, y se cierra el capítulo con las bases tropicales, un concepto análogo al de bases de Gröbner para ideales en el anillo de polinomios de Laurent.
- En el capítulo 3 comienza el estudio de la Geometría Tropical propiamente dicha, con la definición del semianillo tropical y las hipersuperficies tropicales. En este capítulo se abordan versiones del Teorema Fundamental y el Teorema de Estructura para hipersuperficies.
- El objetivo del capítulo 4 es enunciar y demostrar el Teorema Fundamental. Para ello, se definirá el concepto de variedad tropical y serán necesarios varios resultados previos antes de poder demostrar el teorema.
- Por último, en el capítulo 5 se enuncia el Teorema de Estructura y se demuestran las partes que son asequibles a este nivel.

La referencia principal seguida en todo el trabajo es [MS15]. Para la sección de Geometría Poliedral, se ha seguido en parte [Zie95]. También se han utilizado otras referencias para algunos resultados particulares, en los que se indica explícitamente de dónde se han extraído.

Todas las figuras que aparecen en este trabajo son de elaboración propia, y se han realizado utilizando el paquete “TikZ” de L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X. Para los cálculos y el dibujo de curvas tropicales, se ha utilizado la librería “tropical\_lib” de SINGULAR, en particular, se han utilizado las funciones “tropicalCurve” y “drawTropicalCurve”.

# Capítulo 1

## Conceptos y resultados fundamentales

La Geometría Tropical conecta la Geometría Algebraica con la Geometría Poliedral. Para poder estudiar esta conexión, en este capítulo introducimos los conceptos y resultados necesarios correspondientes al Álgebra (valoraciones, sección 1.1), Geometría Poliedral (sección 1.2), y a la Geometría Algebraica (sección 1.3).

Lo que hace la Geometría Tropical es “tropicalizar” las variedades clásicas. Esto hace que sea necesario introducir algunos conceptos básicos de Geometría Algebraica. Además, independientemente del cuerpo en el que estemos trabajando, mediante la valoración pasaremos a trabajar en  $\mathbb{R}^n$ , donde será importante manejar con soltura algunos conceptos clave de Geometría Poliedral.

En este capítulo haremos algunas demostraciones, pero en otras nos limitaremos a indicar una referencia, pues su inclusión alargaría en exceso el trabajo.

La referencia principal que se ha seguido en este capítulo es [MS15, Cap. 2, §2.1–§2.3].

### 1.1. Valoraciones

Sean  $K$  un cuerpo y  $K^* = K \setminus \{0\}$  su grupo de unidades. La definición de valoración sobre  $K$  que usaremos en este trabajo no es del todo general, pues nos limitaremos a grupos de valores contenidos en  $\mathbb{R}$ .

**Definición 1.1.1.** Una *valoración* sobre  $K$  es una aplicación  $\text{val} : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  que satisface las siguientes propiedades:

- (1)  $\text{val}(a) = \infty$  si, y solo si,  $a = 0$ .
- (2)  $\text{val}(ab) = \text{val}(a) + \text{val}(b)$  para cada  $a, b \in K$ .
- (3)  $\text{val}(a + b) \geq \min(\text{val}(a), \text{val}(b))$ , para cada  $a, b \in K$ .

**Observación 1.1.2.** Si  $K$  es un cuerpo y  $\text{val}$  es una valoración sobre  $K$ , denotaremos al cuerpo junto con la valoración mediante el par  $(K, \text{val})$ , y diremos que  $K$  es un *cuerpo valorado*.

Según la primera propiedad que debe cumplir una valoración,  $\text{val}(a) = \infty \Leftrightarrow a = 0$ . Por lo tanto, normalmente identificaremos una valoración con su restricción  $K^* \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Proposición 1.1.3.** La imagen de la aplicación  $\text{val}$  es un subgrupo aditivo  $\Gamma_{\text{val}}$  de  $\mathbb{R}$  denominado *grupo de valores* de  $(K, \text{val})$ .

*Demostración.* Sean  $w, z \in \Gamma_{\text{val}}$ . Por la definición de  $\Gamma_{\text{val}}$ , existen  $a, b \in K$  tales que  $w = \text{val}(a)$  y  $z = \text{val}(b)$ . Usando la propiedad (2) de la definición,  $w + z = \text{val}(a) + \text{val}(b) = \text{val}(ab) \in \Gamma_{\text{val}}$ . Además, como  $1^2 = 1$ , entonces  $\text{val}(1) = \text{val}(1^2) = \text{val}(1) + \text{val}(1)$ , de donde se concluye que  $\text{val}(1) = 0$ , es decir,  $0 \in \Gamma_{\text{val}}$ . Por último, para cada  $a \in K^*$  se tiene que  $0 = \text{val}(1) = \text{val}(a \cdot a^{-1}) = \text{val}(a) + \text{val}(a^{-1})$ , es decir,  $\text{val}(a^{-1}) = -\text{val}(a)$ , así que para cada  $a \in K^*$ ,  $-\text{val}(a) = \text{val}(a^{-1}) \in \Gamma_{\text{val}}$ .

Como  $\Gamma_{\text{val}}$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}$  que es estable para la suma, contiene al elemento neutro y al opuesto de cada elemento  $\text{val}(a) \in \Gamma_{\text{val}}$ , entonces  $\Gamma_{\text{val}}$  es un subgrupo aditivo de  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**Observación 1.1.4.** Todo cuerpo admite una valoración trivial, definiendo  $\text{val}(a) = 0$  para cada  $a \in K^*$ . Siempre que tengamos una valoración no trivial  $\text{val}$  sobre  $K$ , podemos asumir que  $1 \in \Gamma_{\text{val}}$ . Esto no supone ninguna restricción, ya que  $(\lambda \cdot \text{val}) : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  es también una valoración para cada  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ .

**Proposición 1.1.5.** Sean  $a, b \in K$  tales que  $\text{val}(a) \neq \text{val}(b)$ . Entonces se da la igualdad en la condición (3) de la definición 1.1.1, es decir,  $\text{val}(a + b) = \min(\text{val}(a), \text{val}(b))$ .

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad, podemos suponer  $\text{val}(b) > \text{val}(a)$ .

Ya sabemos que  $\text{val}(1) = 0$  y como  $(-1)^2 = 1$ , se cumple  $\text{val}(1) = 2 \cdot \text{val}(-1) = 0$ , luego  $\text{val}(-1) = 0$ . En conclusión,  $\text{val}(-c) = \text{val}(-1) + \text{val}(c) = \text{val}(c)$  para cada  $c \in K$ .

La propiedad (3) de la definición implica que

$$\text{val}(a) \geq \min(\text{val}(a + b), \text{val}(-b)) = \min(\text{val}(a + b), \text{val}(b)).$$

Pero, por otra parte,  $\text{val}(a + b) \geq \min(\text{val}(a), \text{val}(b)) = \text{val}(a)$  y, en consecuencia, se obtiene el resultado esperado:  $\text{val}(a + b) = \text{val}(a)$ .  $\square$

Consideramos ahora el conjunto de todos los elementos de  $K$  cuya valoración sea no negativa:  $R = \{c \in K : \text{val}(c) \geq 0\}$ . Entonces el conjunto  $R$  verifica lo siguiente:

**Proposición 1.1.6.**  $R = \{c \in K : \text{val}(c) \geq 0\}$  es un anillo (conmutativo y unitario) local. De hecho, el único ideal maximal del anillo  $R$  es  $\mathfrak{m}_K = \{c \in K : \text{val}(c) > 0\}$ .

*Demostración.* Primero tenemos que probar que  $(R, +, \cdot)$  es un anillo, lo que se verifica de forma casi trivial.

$R$  es un anillo local si, y solo si,  $R \setminus \mathcal{U}(R)$  es un ideal de  $R$ , donde  $\mathcal{U}(R)$  denota el grupo de unidades de  $R$ . Veamos primero que  $\mathfrak{m}_K = \{c \in K : \text{val}(c) > 0\}$  es un ideal de  $R$ :

- $0 \in R \setminus \mathcal{U}(R)$  porque  $\text{val}(0) = \infty$ .
- Sean  $a, b \in \mathfrak{m}_K$ , entonces  $\text{val}(a + b) \geq \min(\text{val}(a), \text{val}(b)) > 0$ , así que  $a + b \in \mathfrak{m}_K$ .
- Sean  $a \in \mathfrak{m}_K$  y  $\lambda \in R$ , entonces  $\text{val}(\lambda a) = \text{val}(\lambda) + \text{val}(a) > 0$ , así que  $\lambda a \in \mathfrak{m}_K$ .

Veamos ahora que  $c \in R$  es unidad si, y solo si,  $c \notin \mathfrak{m}_K$ . Supongamos que  $c \in R$  es una unidad, entonces  $c^{-1} \in R$ , así que  $0 = \text{val}(c \cdot c^{-1}) = \underbrace{\text{val}(c)}_{\geq 0} + \underbrace{\text{val}(c^{-1})}_{\geq 0}$ . Por lo tanto,

$\text{val}(c) = 0$ , así que  $c \notin \mathfrak{m}_K$ . Recíprocamente, sea  $c \notin \mathfrak{m}_K$ , entonces  $\text{val}(c) = 0$ . En particular,  $c \neq 0$ , así que tiene inverso en  $K$  y  $\text{val}(c^{-1}) = -\text{val}(c) = 0$ , es decir,  $c^{-1} \in R$ . Esto prueba que  $R \setminus \mathcal{U}(R)$  es un ideal de  $R$ , así que  $R$  es un anillo local cuyo único ideal maximal es  $\mathfrak{m}_K = \{c \in K : \text{val}(c) > 0\}$ .  $\square$

**Definición 1.1.7.** El anillo  $R$  se llama *anillo de valoración* de la valoración  $\text{val}$ , y el cuerpo  $\mathbb{k} = R/\mathfrak{m}_K$  se llama *cuerpo residual* de  $(K, \text{val})$ .

Para cada  $a \in R$ , denotaremos por  $\bar{a}$  a su clase módulo el ideal maximal  $\mathfrak{m}_K$ .

**Lema 1.1.8.** Sea  $(K, \text{val})$  un cuerpo valorado. Entonces el anillo de valoración  $R$  es íntegramente cerrado.

*Demostración.* Veamos que la clausura integral de  $R$  en su cuerpo de fracciones  $(K)$  es el propio anillo  $R$ . Consideramos elementos  $a_0, \dots, a_n \in R$ , y sea  $x \in K$  una raíz de la ecuación  $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$ . Supongamos que  $x \notin R$ , entonces  $\text{val}(x) < 0$ , luego  $\text{val}(x^{-1}) > 0$ , es decir,  $x^{-1} \in \mathfrak{m}_K \subset R$ . Multiplicando la ecuación por  $x^{-n}$  obtenemos

$$\underbrace{a_{n-1}x^{-1} + \dots + a_1x^{-n+1} + a_0x^{-n}}_{\in \mathfrak{m}_K} = -1.$$

De aquí deducimos que  $-1 \in \mathfrak{m}_K$ , lo que es absurdo. Por lo tanto,  $x \in R$ . Esto demuestra que  $R$  es íntegramente cerrado.  $\square$

**Proposición 1.1.9.** Sea  $(K, \text{val})$  un cuerpo valorado. Si  $K$  es algebraicamente cerrado, entonces el cuerpo residual  $\mathbb{k} = R/\mathfrak{m}_K$  es algebraicamente cerrado.

*Demostración.* Sea  $f(x) = \sum_{i=0}^r \bar{a}_i x^i \in \mathbb{k}[x]$  para unos ciertos  $\bar{a}_i \in \mathbb{k}$ . Para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , existe  $a_i \in R$  tal que  $\bar{a}_i$  es la clase de  $a_i$  en  $R/\mathfrak{m}_K$ . Además, podemos suponer que  $f$  es mónico, es decir,  $a_n = 1$ . Como  $K$  es algebraicamente cerrado, existe una raíz  $c \in K$  del polinomio mónico  $g(x) = \sum_{i=0}^r a_i x^i \in K[x]$ . Por el lema 1.1.8,  $c \in R$  y se verifica

$$f(\bar{c}) = \sum_{i=0}^r \overline{a_i c^i} = \overline{\sum_{i=0}^r a_i c^i} = 0.$$

Es decir,  $\mathbb{k}$  es algebraicamente cerrado.  $\square$

Veamos ahora un par de ejemplos de valoraciones (no triviales):

**Ejemplo 1.1.10** (Valoración  $p$ -ádica). Una de las motivaciones iniciales para el estudio de las valoraciones es la *valoración  $p$ -ádica* en el cuerpo  $K = \mathbb{Q}$  de los números racionales. Aquí  $p$  es un número primo y la valoración  $\text{val} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  viene dada por  $\text{val}_p(q) = k$ , si  $q$  se escribe de la forma  $q = p^k a/b$ , donde  $a, b \in \mathbb{Z}$  y  $p \nmid a$ ,  $p \nmid b$  (donde el símbolo  $\nmid$  significa “no divide a”).

Por ejemplo,  $\text{val}_2(4/7) = \text{val}_2(2^2 \cdot \frac{1}{7}) = 2$  y  $\text{val}_3(5/81) = \text{val}_3(3^{-4} \cdot \frac{5}{1}) = -4$ .

En este caso, el anillo local  $R$  es la localización del anillo de los enteros  $\mathbb{Z}$  por el ideal primo  $\langle p \rangle$ :

$$R = \mathbb{Z}_{\langle p \rangle} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : \text{mcd}(a, b) = 1 \text{ y } p \nmid b \right\}.$$

El ideal maximal  $\mathfrak{m}_K$  es

$$\mathfrak{m}_K = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : \text{mcd}(a, b) = 1, p \mid a \text{ y } p \nmid b \right\} = \langle p \rangle \cdot \mathbb{Z}_{\langle p \rangle},$$

y el cuerpo residual  $\mathbb{k}$  es isomorfo al cuerpo finito con  $p$  elementos,  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/\langle p \rangle$ .

**Ejemplo 1.1.11** (Series de Puiseux). Sea  $K$  el cuerpo de las series de Puiseux con coeficientes en el cuerpo de los números complejos  $\mathbb{C}$ , que denotaremos por  $\mathbb{C}\{\{t\}\}$ . Los elementos de este cuerpo son series de potencias formales  $c(t) = c_1 t^{a_1} + c_2 t^{a_2} + c_3 t^{a_3} + \dots$ , donde  $c_i \in \mathbb{C}^*$  para cada  $i$  y  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$  son números racionales con denominador común. Podemos escribir este cuerpo como

$$\mathbb{C}\{\{t\}\} = \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{C}((t^{1/n})),$$

donde  $\mathbb{C}((t^{1/n}))$  es el cuerpo de series de Laurent en la variable  $t^{1/n}$ .

Este cuerpo tiene una valoración no trivial  $\text{val} : \mathbb{C}\{\{t\}\}^* \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\text{val}(c(t)) = \text{val}(c_1 t^{a_1} + c_2 t^{a_2} + \dots) = a_1 \text{ si } c_1 \neq 0 \quad (\text{y } a_1 < a_2 < \dots).$$

La restricción de esta valoración al cuerpo de funciones racionales  $\mathbb{C}(t)$  tiene una interpretación geométrica interesante, ya que cada función racional en la variable  $t$ ,  $c(t)$ , tiene una única expresión como serie de Laurent en  $t$ . La valoración de una función racional  $c(t)$  es un entero positivo si  $c(t)$  tiene un cero en  $t = 0$  y es un entero negativo si  $c(t)$  tiene un polo en  $t = 0$ . De hecho,  $\text{val}(c(t))$  indica el orden del cero o del polo.

$$c(t) = \frac{4t^2 - 7t^3 + 9t^5}{6 + 11t^4} = \frac{2}{3}t^2 - \frac{7}{6}t^3 + \frac{3}{2}t^5 + \dots \Rightarrow \text{val}(c(t)) = 2.$$

$$\tilde{c}(t) = \frac{14t + 3t^2}{7t^4 + 3t^7 + 8t^8} = 2t^{-3} + \frac{3}{7}t^{-2} + \dots \Rightarrow \text{val}(\tilde{c}(t)) = -3.$$

**Observación 1.1.12.** En el ejemplo anterior, podemos sustituir el cuerpo de los números complejos  $\mathbb{C}$  por otro cuerpo cualquiera  $\mathbb{k}$  y construir el cuerpo de series de Puiseux sobre  $\mathbb{k}$ ,  $\mathbb{k}\{\{t\}\}$ . Si  $\mathbb{k}$  es algebraicamente cerrado de característica cero, también lo es  $\mathbb{k}\{\{t\}\}$ . Sin embargo, si  $\mathbb{k}$  es algebraicamente cerrado de característica  $p > 0$ , entonces  $\mathbb{k}\{\{t\}\}$  no es algebraicamente cerrado. De hecho, si la característica del cuerpo es  $\text{char}(\mathbb{k}) = p > 0$ , entonces se puede probar que el polinomio de Artin-Schreier  $x^p - x - t^{-1}$  no tiene ninguna raíz en  $\mathbb{k}\{\{t\}\}$  ([Che79, Cap. 4, §6]).

**Teorema 1.1.13.** Si  $\mathbb{k}$  es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero, entonces el cuerpo  $K = \mathbb{k}\{\{t\}\}$  de series de Puiseux es algebraicamente cerrado.

*Demostración.* La prueba se realiza utilizando el algoritmo de Newton-Puiseux, y se puede encontrar en [CA00, Cap. 1].  $\square$

El hecho de que el cuerpo de series de Puiseux no es algebraicamente cerrado cuando la característica del cuerpo es positiva motiva la construcción del cuerpo de series de potencias generalizadas, que haremos a continuación. Para ello, primero recordamos un concepto utilizado en teoría de grupos:

**Definición 1.1.14.** Sea  $(G, \cdot)$  un grupo, se dice que  $G$  es *divisible* si para cada  $g \in G$  y para cada entero  $n \geq 1$  existe un elemento  $g' \in G$  tal que  $ng' = g$ .

**Definición 1.1.15.** Sean  $\mathbb{k}$  un cuerpo algebraicamente cerrado y  $G \subset \mathbb{R}$  un grupo divisible. El *anillo de Mal'cev-Neumann de series de potencias generalizadas*, denotado por  $K = \mathbb{k}((G))$ , es el conjunto de las sumas formales  $\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g t^g$ , en la variable  $t$ , con la propiedad de que  $\text{supp}(\alpha) := \{g \in G : \alpha_g \neq 0\}$  está bien ordenado. Si  $\beta = \sum_{g \in G} \beta_g t^g$ , entonces definimos la suma y el producto de series como  $\alpha + \beta := \sum_{g \in G} (\alpha_g + \beta_g) t^g$  y  $\alpha\beta := \sum_{h \in G} \left( \sum_{g+g'=h} \alpha_g \beta_{g'} \right) t^h$ .

**Observación 1.1.16.** Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{k}((G))$ , entonces el conjunto  $\text{supp}(\alpha + \beta) \subseteq \text{supp}(\alpha) \cup \text{supp}(\beta)$  está bien ordenado, luego la suma está bien definida. Por otra parte,  $\text{supp}(\alpha) + \text{supp}(\beta) = \{g + g' : g \in \text{supp}(\alpha), g' \in \text{supp}(\beta)\}$  está bien ordenado y, por tanto,  $\{(g, g') : g + g' = h, g \in \text{supp}(\alpha), g' \in \text{supp}(\beta)\}$  es finito para todo  $h \in G$ , así que el producto de series está bien definido. Lo mismo sucede con la división, luego  $K$  es un cuerpo. Los detalles se pueden encontrar en [Pas77, Cap. 13, Th. 2.11].

**Proposición 1.1.17.** El anillo de series generalizadas de potencias de Mal'cev-Neumann  $\mathbb{k}((G))$  es un cuerpo algebraicamente cerrado.

*Demostración.* Una prueba (no constructiva) de que el cuerpo  $\mathbb{k}((G))$  es algebraicamente cerrado se puede encontrar en [Poo93, Cor. 4].  $\square$

**Observación 1.1.18.** La restricción que hemos hecho sobre el soporte de las series de  $\mathbb{k}((t))$  es necesaria. Sin esta restricción, el conjunto  $\{g + g' : g \in \text{supp}(\alpha), g' \in \text{supp}(\beta)\}$  que aparece en la definición del producto de dos series podría ser infinito y esta operación no estaría bien definida.

En  $\mathbb{k}((G))$  consideramos la siguiente valoración: dada una serie de potencias generalizadas  $\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g t^g$ , el soporte de  $\alpha$  es un conjunto bien ordenado, luego tiene un mínimo  $g_0 \in G$ . Definimos la valoración de  $\alpha$  como

$$\text{val}(\alpha) = \text{val} \left( \sum_{g \in G} \alpha_g t^g \right) = g_0.$$

De las propiedades del producto y la suma de series se deduce fácilmente que la aplicación así definida es realmente una valoración.

El cuerpo de series generalizadas de potencias es uno de los cuerpos valorados más generales que necesitamos considerar en el siguiente sentido:

**Teorema 1.1.19.** Sean  $G$  un grupo divisible y  $K$  un cuerpo valorado cuyo cuerpo residual  $\mathbb{k}$  es algebraicamente cerrado, y de modo que su grupo de valores  $\Gamma_{\text{val}} = G$ . Si la valoración es trivial en el cuerpo primo ( $\mathbb{F}_p$  o  $\mathbb{Q}$ ) de  $K$ , entonces  $(K, \text{val})$  es isomorfo a un subcuerpo de  $\mathbb{k}((G))$  con la valoración inducida.

*Demostración.* La prueba de este resultado se puede encontrar en [Poo93, Cor. 5].  $\square$

Con esto terminamos el estudio de los cuerpos valorados que vamos a utilizar en los siguientes capítulos y retomamos los resultados generales sobre las valoraciones.

**Proposición 1.1.20.** Sea  $K$  un cuerpo algebraicamente cerrado con una valoración no trivial. Entonces el grupo  $\Gamma_{\text{val}}$  es un subgrupo divisible de  $\mathbb{R}$ , que es denso en  $\mathbb{R}$ .

*Demostración.* Dados  $\text{val}(a) \in \Gamma_{\text{val}}$  y  $n \geq 1$ , puesto que existe un elemento  $a^{1/n} \in K$ , se tiene  $n \cdot \text{val}(a^{1/n}) = \text{val}(a)$ , luego  $\Gamma_{\text{val}} = \text{val}(K^*)$  es divisible.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $1 \in \Gamma_{\text{val}}$  (observación 1.1.4). Como  $\Gamma_{\text{val}}$  es divisible, entonces para cada  $n \geq 1$  se tiene  $\frac{1}{n} \in \Gamma_{\text{val}}$  y, por tanto,  $\frac{m}{n} \in \Gamma_{\text{val}}$  para cada  $m \in \mathbb{Z}$  (todo grupo aditivo es un  $\mathbb{Z}$ -módulo).

Por último, como  $\mathbb{Q}$  es denso en  $\mathbb{R}$ , entonces  $\Gamma_{\text{val}}$  es denso en  $\mathbb{R}$ .  $\square$

Nos encontraremos frecuentemente en el caso de que la aplicación sobreyectiva  $K^* \twoheadrightarrow \Gamma_{\text{val}}$  escinde. Esto quiere decir que existe un homomorfismo de grupos  $\psi : \Gamma_{\text{val}} \rightarrow K^*$  tal que  $\text{val}(\psi(w)) = w$  para cada  $w \in \Gamma_{\text{val}}$ . Veamos una situación en la que existe esta escisión:

**Ejemplo 1.1.21.** Si consideramos  $K = \mathbb{C}\{\{t\}\}$  el cuerpo de series de Puiseux en la variable  $t$  con la valoración descrita en el ejemplo 1.1.11, entonces una posible escisión es la *escisión canónica*  $\psi : \Gamma_{\text{val}} \rightarrow K^*$  dada por  $\psi(w) = t^w$  para cada  $w \in \Gamma_{\text{val}} = \mathbb{Q}$ .

En este ejemplo es sencillo probar la existencia de la escisión. No obstante, en muchos otros casos existe una escisión de la valoración. En particular, si el cuerpo  $K$  es un cuerpo valorado y algebraicamente cerrado, entonces la valoración en  $K$  siempre escinde:

**Proposición 1.1.22.** Sea  $(K, \text{val})$  un cuerpo algebraicamente cerrado, entonces la sobreyección  $K^* \twoheadrightarrow \Gamma_{\text{val}}$  escinde, es decir, existe un homomorfismo de grupos  $\psi : (\Gamma_{\text{val}}, +) \rightarrow (K^*, \cdot)$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_{\text{val}} & \xrightarrow{\psi} & K^* \\ & \searrow \text{id} & \downarrow \text{val} \\ & & \Gamma_{\text{val}} \end{array}$$



*Demostración.* Como  $\Gamma_{\text{val}}$  es divisible y libre de torsión (por ser un subgrupo aditivo de  $\mathbb{R}$ ), entonces para cada  $m \geq 1$  y para cada  $g \in \Gamma_{\text{val}}$  existe un único  $g' \in \Gamma_{\text{val}}$  tal que  $mg' = g$  (si existieran dos distintos  $g'$  y  $g''$ , entonces  $mg' = mg'' \Rightarrow m(g' - g'') = 0$ , en contradicción con  $\Gamma_{\text{val}}$  libre de torsión). Por lo tanto, para cada  $n, m \in \mathbb{Z}$ , el elemento  $\frac{n}{m}g$  está bien definido y esta operación dota a  $\Gamma_{\text{val}}$  de una estructura de  $\mathbb{Q}$ -espacio vectorial. Sea  $\mathcal{B} = \{w_i : i \in I\}$  una base de dicho espacio vectorial y consideramos para cada  $i \in I$  un elemento  $a_i \in K^*$  tal que  $\text{val}(a_i) = w_i$ . Además, para cada  $i \in I$  y para cada  $n \geq 1$ , fijamos una raíz  $n$ -ésima de  $a_i$ ,  $a_i^{1/n}$ .

Si  $w \in \Gamma_{\text{val}}$ , entonces existe un subconjunto finito  $I_0 \subset I$  y enteros  $n_i \geq 1$  y  $m_i$ , para cada  $i \in I_0$  tales que  $w = \sum_{i \in I_0} \frac{m_i}{n_i} \cdot w_i$ , siendo esta expresión única. Definimos  $\psi : \Gamma_{\text{val}} \rightarrow K^*$  por

$$\psi \left( \sum_{i \in I_0} \frac{m_i}{n_i} \cdot w_i \right) = \prod_{i \in I_0} a_i^{m_i/n_i}.$$

Como la expresión de  $w$  como combinación lineal de los  $w_i$  es única, entonces  $\psi$  está bien definida. Veamos que  $\text{val} \circ \psi$  es la identidad en  $\Gamma_{\text{val}}$ . Para ello, consideramos  $w = \sum_{i \in I_0} \frac{m_i}{n_i} \cdot w_i \in \Gamma_{\text{val}}$ . Entonces

$$\text{val}(\psi(w)) = \text{val} \left( \prod_{i \in I_0} a_i^{m_i/n_i} \right) = \sum_{i \in I_0} \frac{m_i}{n_i} \cdot \text{val}(a_i) = \sum_{i \in I_0} \frac{m_i}{n_i} \cdot w_i = w.$$

Además es un homomorfismo de grupos, puesto que

$$\begin{aligned} \psi \left( \sum_{i \in I_0} \frac{m_i}{n_i} \cdot w_i + \sum_{j \in J_0} \frac{m'_j}{n'_j} \cdot w_j \right) &= \prod_{i \in I_0 \setminus J_0} a_i^{m_i/n_i} \cdot \prod_{j \in J_0 \setminus I_0} a_j^{m'_j/n'_j} \cdot \prod_{k \in I_0 \cap J_0} a_k^{m_k/n_k + m'_k/n'_k} \\ &= \prod_{i \in I_0} a_i^{m_i/n_i} \cdot \prod_{j \in J_0} a_j^{m'_j/n'_j} = \psi \left( \sum_{i \in I_0} \frac{m_i}{n_i} \cdot w_i \right) \cdot \psi \left( \sum_{j \in J_0} \frac{m'_j}{n'_j} \cdot w_j \right) \end{aligned}$$

para cada  $I_0, J_0 \subset I$  finitos,  $m_i, m'_j \in \mathbb{Z}$  y  $n_i, n'_j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ . Es decir,  $\psi(u + v) = \psi(u) \cdot \psi(v)$  para cada  $u, v \in \Gamma_{\text{val}}$ .  $\square$

**Observación 1.1.23.** Debido al ejemplo 1.1.21, habitualmente denotaremos por  $t^w$  al elemento  $\psi(w)$  para cada  $w \in \Gamma_{\text{val}}$ .

Hasta ahora hemos establecido resultados para cuerpos algebraicamente cerrados, ya que este es el caso en el que se enuncia el Teorema Fundamental de la Geometría Algebraica Tropical (capítulo 4). Sin embargo, en Geometría Tropical, también es posible trabajar con cuerpos que no sean algebraicamente cerrados, pasando a su clausura algebraica u otra extensión de cuerpos adecuada en cada caso, como veremos en dicho capítulo (teorema 4.2.3).

Comencemos por definir sobre qué entendemos por una extensión de cuerpos valorada:

**Definición 1.1.24.** Sea  $K$  un cuerpo provisto de una valoración  $\text{val}_K : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , y sea  $L/K$  una extensión de cuerpos. Diremos que la extensión  $L/K$  es una *extensión valorada* si el cuerpo  $L$  está provisto de una valoración  $\text{val}_L : L \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  tal que su restricción a  $K$  es  $\text{val}_L|_K = \text{val}_K$ .

**Ejemplo 1.1.25.** Un ejemplo interesante es la extensión  $\mathbb{C}\{\{t\}\}/\mathbb{C}$ , considerando en  $\mathbb{C}$  la valoración trivial y en  $\mathbb{C}\{\{t\}\}$  la valoración usual en el cuerpo de series de Puiseux del ejemplo 1.1.11.

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar el resultado anunciado previamente, que garantiza que cualquier extensión de cuerpos algebraica es valorada.

**Teorema 1.1.26.** Sea  $K$  un cuerpo provisto de una valoración  $\text{val}$ , y sea  $L/K$  una extensión algebraica de  $K$ . Entonces  $\text{val}$  admite una extensión  $\overline{\text{val}}$  a  $L$ , es decir, la extensión  $L/K$  es valorada.

*Demostración.* La prueba de este resultado se puede encontrar en [Rib99, Cap. 4, Th. 1]. □

**Observación 1.1.27.** (1) El resultado anterior se aplica para cualquier extensión algebraica de  $K$ , en particular para la clausura algebraica  $\overline{K}$  de  $K$ .

(2) En [Rib99, Cap. 4] aparecen dos demostraciones. La primera es la que hemos puesto como referencia y se trata de una demostración existencial, que no da ninguna pista sobre cómo construir la extensión. Si queremos construir de forma explícita la extensión, tenemos que acudir a la prueba del teorema dada por Ostrowski en [Ost35]. Ambas demostraciones necesitan más preliminares de los que es razonable incluir en este capítulo.

## 1.2. Geometría Poliedral

En esta sección presentamos los conceptos y resultados básicos de Geometría Poliedral necesarios para comprender la Geometría Tropical. Por su extensión, hemos incluido la mayoría de resultados sin demostraciones, que se pueden encontrar en los libros de Geometría Poliedral (por ejemplo, en [Zie95]). Sin embargo, las demostraciones sobre las subdivisiones regulares son de especial importancia en el desarrollo de los siguientes capítulos, y por eso hemos optado por incluirlas en este trabajo.

Recordemos que un conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  es *convexo* si para cada  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$  y para todo  $\lambda$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ , se tiene  $\lambda \mathbf{u} + (1 - \lambda) \mathbf{v} \in X$ . La *envolvente convexa* de un conjunto  $U \subset \mathbb{R}^n$  es el conjunto convexo más pequeño que contiene a  $U$ , es decir, la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a  $U$ . Si  $U = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$  es finito, entonces su envolvente convexa es  $\text{conv}(U) := \{\sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{u}_i : 0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1\}$ .

**Definición 1.2.1** (Poliedro). (1) Un *poliedro*  $P \subset \mathbb{R}^n$  es la intersección de un número finito de semi-espacios cerrados:

$$P = P(A, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\},$$

donde  $A \in \mathcal{M}_{d \times n}(\mathbb{R})$  es una matriz de tamaño  $d \times n$  con coeficientes reales y  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$  es un vector  $d$ -dimensional.

(2) Las *caras* de un poliedro  $P$  son subconjuntos de  $P$  determinados por formas lineales  $\mathbf{w} \in (\mathbb{R}^n)^\vee$  a través de la expresión

$$face_{\mathbf{w}}(P) = \{\mathbf{x} \in P : \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{w} \cdot \mathbf{y}, \forall \mathbf{y} \in P\}.$$

(3) Una cara de un poliedro que no está contenida en ninguna otra cara más grande se denomina *cara maximal* (en inglés se utiliza el término “*facet*”).

(4) Un *politopo* es un poliedro que es acotado (para la métrica euclídea en  $\mathbb{R}^n$ ).

En la definición anterior, la expresión  $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$  es la notación habitual para denotar el sistema de inecuaciones dado por  $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x} \leq b_1, \dots, \mathbf{a}_d \cdot \mathbf{x} \leq b_d$ , donde  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d$  son las filas de la matriz  $A$ .

**Observación 1.2.2.** (1) En la definición anterior, estamos identificando (implícitamente) el espacio vectorial dual  $(\mathbb{R}^n)^\vee$  con  $\mathbb{R}^n$  vía el producto escalar usual, y esta será la forma habitual de trabajar. Es decir, identificaremos  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  con la forma lineal  $\mathbf{w} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}$ .

(2) Sean  $A \in \mathcal{M}_{d \times n}(\mathbb{R})$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$  y  $P = P(A, \mathbf{b})$ . Entonces se puede demostrar que un subconjunto  $F \subset P$  es cara de  $P$  si, y solo si, existen filas  $i_1, \dots, i_t \subset \{1, \dots, d\}$  de la matriz  $A$  tales que

$$F = \left\{ \mathbf{x} : \begin{array}{ll} \mathbf{a}_{i_j} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_{i_j}, & j = 1, \dots, t \\ \mathbf{a}_h \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_h, & h \neq i_1, \dots, i_t \end{array} \right\}.$$

De hecho, la definición de cara de un poliedro en [Zie95] es esta.

**Teorema 1.2.3** (Teorema fundamental para politopos). Un subconjunto  $P \subset \mathbb{R}^n$  es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos  $P = conv(V)$  para un cierto conjunto  $V = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$  si, y solo si,  $P$  es un politopo.

*Demostración.* [Zie95, Cap. 1, Th. 1.1] □

**Ejemplo 1.2.4.** Consideramos el siguiente subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ :

$$X = \{(1, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 0), (0, 2), (2, 1), (2, 2)\}.$$

Entonces su envolvente convexa es el polígono de 5 lados (figura 1.2.1a)

$$P = conv(X) = conv(\{(1, 0), (0, 1), (2, 0), (0, 2), (2, 2)\}).$$

Alternativamente, si consideramos la matriz  $A \in \mathcal{M}_{5 \times 2}(\mathbb{R})$  y el vector  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^5$  dados por

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

entonces los polítopos  $P(A, \mathbf{b})$  (figura 1.2.1b) y  $P$  coinciden, y esto es general según el teorema 1.2.3.

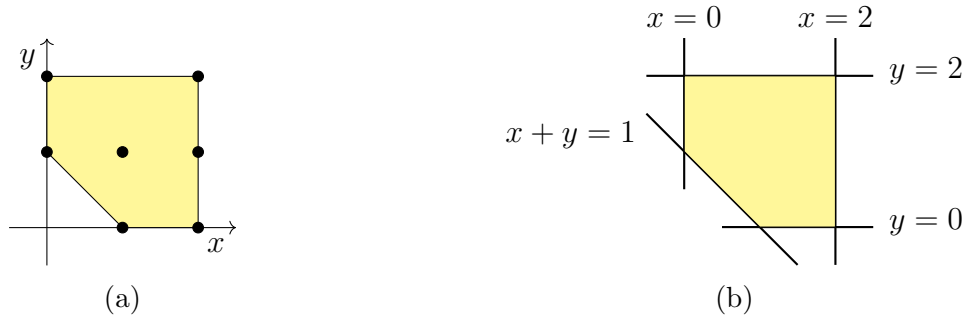


Figura 1.2.1: Dos formas alternativas de describir un polítopo.

La importancia de este teorema radica en que proporciona dos caracterizaciones distintas para los polítopos, y cada una será más o menos conveniente que la otra en función del problema que estemos analizando. Por ejemplo, para demostrar que la intersección de un polítopo con una subvariedad afín de  $\mathbb{R}^n$  es un polítopo o que la intersección de un polítopo con un poliedro es un polítopo, será más cómoda la representación  $P = P(A, \mathbf{b})$ . Sin embargo, para probar que la proyección de un polítopo sobre un determinado subespacio es un polítopo es mucho más fácil utilizar la caracterización de un polítopo como envolvente convexa de un conjunto finito de puntos.

Además, el teorema 1.2.3 nos proporciona otra forma de describir las caras de un polítopo, como la envolvente convexa de un subconjunto finito de puntos  $\{\mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_l}\}$  de  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ .

**Proposición 1.2.5.** Sean  $V = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\} \subset \mathbb{R}^n$  un subconjunto finito,  $P = \text{conv}(V)$  el polítopo engendrado por el conjunto  $V$ , y  $F = \text{face}_{\mathbf{w}}(P)$  una cara de  $P$ , para un cierto  $\mathbf{w} \in (\mathbb{R}^n)^\vee$ . Denotamos  $\lambda = \min\{\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_i : 1 \leq i \leq r\}$ , y sea  $J = \{i \in \{1, \dots, r\} : \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_i = \lambda\}$ . Entonces  $F = F_J$ , donde  $F_J = \text{conv}(\{\mathbf{v}_i : i \in J\})$ .

*Demostración.* Sea  $\mathbf{x} \in P = \text{conv}(V)$ . Existen  $\mu_i \geq 0$ ,  $1 \leq i \leq r$ , tales que  $\sum_{i=1}^r \mu_i = 1$  y  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^r \mu_i \mathbf{v}_i$ . Entonces

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} = \sum_{j \in J} \mu_j \cdot \lambda + \sum_{j \notin J} \mu_j (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_j) \geq \left( \sum_{j=1}^r \mu_j \right) \cdot \lambda = \lambda. \quad (1.2.1)$$

Y la desigualdad es estricta si  $\mu_j \neq 0$  para algún  $j \notin J$ . De aquí se deduce que dado  $\mathbf{x} \in P$ ,  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} = \lambda$  si, y solo si,  $\mathbf{x} \in F_J$ . Por otra parte, como  $F$  es el conjunto de los puntos tales que  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}$  es mínimo, entonces  $\mathbf{x} \in F$  si, y solo si,  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} = \lambda$ . En conclusión, hemos probado que  $F = F_J$ .  $\square$

**Observación 1.2.6.** En la proposición anterior hemos visto que para cada cara  $F$  de un politopo  $P \subset \mathbb{R}^n$  existe un subconjunto  $J \subseteq \{1, \dots, r\}$  tal que  $F = F_J$ . Sin embargo, el recíproco no es necesariamente cierto. Por ejemplo, consideremos los puntos  $Q_1 = (0, 0)$ ,  $Q_2 = (2, 0)$ ,  $Q_3 = (0, 2)$  y  $Q_4 = (2, 2)$  en  $\mathbb{R}^2$ , y sea  $P = \text{conv}(\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\})$ . Entonces  $F_{\{1,2,3\}}$  no es una cara del politopo  $P$  (figura 1.2.2). Si lo fuera, existiría un vector  $\mathbf{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $F_{\{1,2,3\}} = \text{face}_{\mathbf{w}}(P)$ . Pero por la proposición 1.2.5, el mínimo se debe alcanzar en los vértices, luego  $\mathbf{w} \cdot (0, 0) = \mathbf{w} \cdot (2, 0) = \mathbf{w} \cdot (0, 2) = 0$ , es decir, debe ser  $\mathbf{w} = (0, 0)$ , y en este caso  $\text{face}_{\mathbf{w}}(P) = P \not\supseteq F_{\{1,2,3\}}$ .

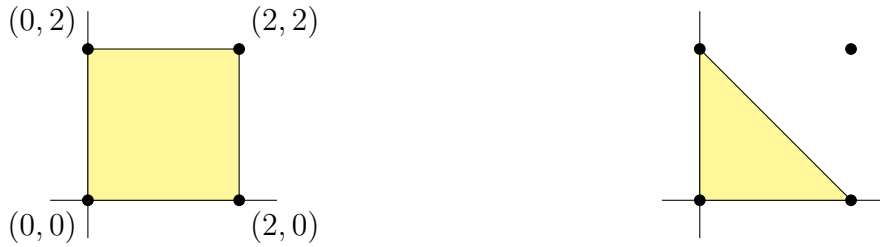


Figura 1.2.2: Un subconjunto convexo de un politopo que no es una cara.

**Proposición 1.2.7.** Sean  $A \in \mathcal{M}_{d \times n}(\mathbb{R})$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ , y consideramos el poliedro  $P = P(A, \mathbf{b})$ . Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una aplicación lineal, entonces  $f(P)$  es un poliedro.

*Demostración.* Sea  $B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  la matriz de  $f$  en la base canónica, entonces

$$f(P) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \text{existe } \mathbf{x} \in P \text{ con } B\mathbf{x} = \mathbf{y}\}.$$

Es decir,  $f(P)$  es el conjunto de los puntos  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  para los que existe  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $B\mathbf{x} - \mathbf{y} \leq 0$ ,  $\mathbf{y} - B\mathbf{x} \leq 0$ ,  $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ , que forman un poliedro en  $\mathbb{R}^{n+m}$ ,  $Q$ . Entonces  $f(P) = \pi(Q)$ , donde  $\pi : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$  es la proyección sobre las últimas  $m$  coordenadas. Y está claro que la proyección de un poliedro es un poliedro.  $\square$

**Definición 1.2.8** (Complejo poliedral). (1) Un *complejo poliedral* es una colección finita de poliedros  $\Sigma$  que cumplen las dos condiciones siguientes:

- Si  $P$  es un poliedro que pertenece a  $\Sigma$ , es decir,  $P \in \Sigma$ , entonces cada cara de  $P$  pertenece a  $\Sigma$ .
- Si  $P, Q \in \Sigma$  entonces  $P \cap Q$  es o bien vacío, o bien una cara común de los poliedros  $P$  y  $Q$ .

(2) Los poliedros que forman un complejo poliedral  $\Sigma$  se denominan *celdas*.

- (3) Las celdas de  $\Sigma$  que no son caras de ninguna celda más grande se denominan *celdas maximales* del complejo.
- (4) El *soporte* de un complejo poliedral  $\Sigma$  es  $|\Sigma| = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \in P \text{ para algún } P \in \Sigma\}$ .

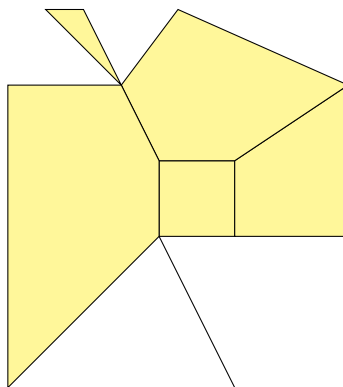


Figura 1.2.3: Un complejo poliedral.

Una clase particular de poliedros son los conos poliedrales, que definimos a continuación:

**Definición 1.2.9** (Cono poliedral). (1) Un *cono poliedral* (o simplemente *cono*)  $C$  es la envolvente positiva de un subconjunto finito de  $\mathbb{R}^n$ :

$$C = \text{pos}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r) := \left\{ \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{v}_i : \lambda_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, r \right\}.$$

- (2) Una *cara* de un cono  $C$  es un subconjunto de  $C$  determinado por una forma lineal  $\mathbf{w} \in (\mathbb{R}^n)^\vee$  a través de la expresión

$$\text{face}_{\mathbf{w}}(C) = \{\mathbf{x} \in C : \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{w} \cdot \mathbf{y}, \forall \mathbf{y} \in C\}.$$

Al igual que en el caso de los polítopos, existe una descripción alternativa para los conos:

**Teorema 1.2.10** (Teorema fundamental para conos). Un subconjunto  $C \subset \mathbb{R}^n$  es un cono poliedral si, y solo si,  $C$  se puede escribir como intersección finita de semi-espacios cerrados

$$C = P(A, \mathbf{0}), \quad \text{para una cierta matriz } A \in \mathcal{M}_{r \times n}(\mathbb{R}).$$

*Demostración.* [Zie95, Cap. 1, Th. 1.3] □

La unión de varios poliedros que cumplen unas ciertas condiciones (definición 1.2.8) se denomina complejo poliedral. Con los conos sucede algo parecido, la unión de conos con unas ciertas propiedades da lugar a los abanicos (poliedrales).

**Definición 1.2.11** (Abanico poliedral). Un *abanico poliedral* (también llamado *abanico*) es una colección finita de conos poliedrales que cumplen las dos condiciones siguientes:

- Si  $C$  es un cono de los que constituyen el abanico, entonces cada cara de  $C$  pertenece al abanico.
- La intersección de dos conos en el abanico es una cara común a cada uno de ellos.

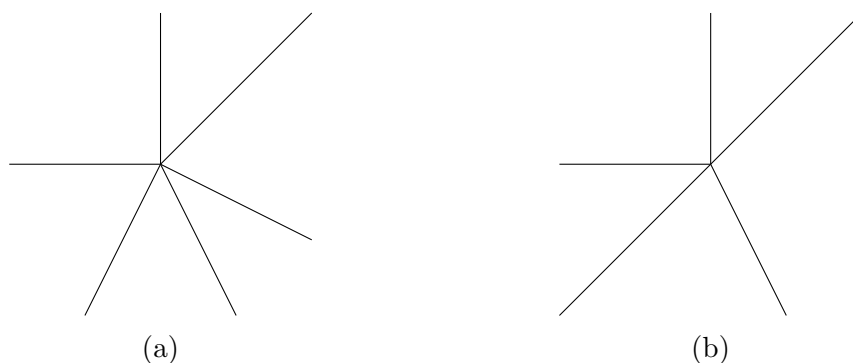


Figura 1.2.4: Abanicos poliedrales.



Figura 1.2.5: Colección de conos que no forman un abanico poliedral.

**Ejemplo 1.2.12.** En la figura 1.2.4 se pueden observar dos ejemplos de abanicos poliedrales, mientras que los conos de la figura 1.2.5 no constituyen un abanico poliedral.

(1) Consideramos los siguientes vectores de  $\mathbb{R}^2$ :  $\mathbf{v}_1 = (-1, 0)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (0, 1)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (1, 1)$ ,  $\mathbf{v}_4 = (2, -1)$ ,  $\mathbf{v}_5 = (1, -2)$ ,  $\mathbf{v}_6 = (-1, -2)$ . Sea  $\mathcal{F}_1$  el conjunto formado por los 13 conos:

- $pos(\{\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}\})$  para  $1 \leq i \leq 5$  y  $pos(\{\mathbf{v}_6, \mathbf{v}_1\})$ .
- $pos(\{\mathbf{v}_i\})$ ,  $1 \leq i \leq 6$ .
- $pos(\{\mathbf{0}\})$ .

Entonces  $\mathcal{F}_1$  es un abanico poliedral formado por seis conos de dimensión 2, seis conos de dimensión 1 y un cono de dimensión 0. Este abanico es el de la figura 1.2.4a.

- (2) Consideramos los siguientes vectores de  $\mathbb{R}^2$ :  $\mathbf{v}_1 = (-1, 0)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (0, 1)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (1, 1)$ ,  $\mathbf{v}_4 = (1, -2)$ ,  $\mathbf{v}_5 = (-1, -1)$ . Sea  $\mathcal{F}_2$  el conjunto formado por los 11 conos:
- $pos(\{\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}\})$  para  $1 \leq i \leq 4$  y  $pos(\{\mathbf{v}_5, \mathbf{v}_1\})$ .
  - $pos(\{\mathbf{v}_i\})$ ,  $1 \leq i \leq 5$ .
  - $pos(\{\mathbf{0}\})$ .

Entonces  $\mathcal{F}_2$  es un abanico poliedral formado por cinco conos de dimensión 2, cinco conos de dimensión 1 y un cono de dimensión 0. Este abanico es el de la figura 1.2.4b

- (3) Consideramos los siguientes vectores de  $\mathbb{R}^2$ :  $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (0, 1)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (-1, 0)$ . Sea  $\mathcal{F}_3$  el conjunto formado por los 4 conos:
- $C_1 = pos(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\})$ ,  $C_2 = pos(\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\})$ ,  $C_3 = pos(\{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1\})$ .
  - $C_4 = pos(\{\mathbf{v}_2\})$ .

En este caso,  $\mathcal{F}_3$  no es un abanico poliedral, pues los conos  $C_1 \cap C_3 = pos(\{\mathbf{v}_1\})$  y  $C_2 \cap C_3 = pos(\{\mathbf{v}_3\})$  no pertenecen a  $\mathcal{F}_3$ . Si los añadimos a  $\mathcal{F}_3$ , entonces sí que sería un abanico poliedral. En la figura 1.2.5 se ha representado  $\mathcal{F}_3$ .

Ahora introducimos unos conceptos relacionados con los poliedros y complejos poliedrales y la estructura de espacio vectorial y espacio afín de  $\mathbb{R}^n$ :

- Definición 1.2.13.** (1) El *espacio de linealidad de un poliedro*  $P$  es el mayor subespacio lineal  $V \subset \mathbb{R}^n$  con la siguiente propiedad: si  $\mathbf{x} \in P$  y  $\mathbf{v} \in V$ , entonces  $\mathbf{x} + \mathbf{v} \in P$ .
- (2) El *espacio de linealidad de un complejo poliedral*  $\Sigma$  es la intersección de todos los espacios de linealidad de los poliedros en el complejo.
- (3) El *espacio afín de un poliedro*  $P$ ,  $aff(P)$ , es el subespacio afín más pequeño de  $\mathbb{R}^n$  que contiene a  $P$ . Este subespacio es la traslación de un subespacio lineal de  $\mathbb{R}^n$ , que llamaremos el *espacio lineal paralelo a  $P$* , y denotaremos por  $lin(P)$ .
- (4) La *dimensión* de un poliedro  $P$  es la dimensión del espacio lineal paralelo a  $P$ , es decir,  $\dim(P) = \dim(lin(P))$ .

**Observación 1.2.14.** (1) Si  $P = P(A, \mathbf{b})$  es un poliedro (para ciertos  $A \in \mathcal{M}_{d \times n}(\mathbb{R})$  y  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ ), entonces es sencillo comprobar que el espacio de linealidad de  $P$  es el subespacio lineal de  $\mathbb{R}^n$  dado por el núcleo de la matriz  $A$ .

- (2) Dado un poliedro  $P \subset \mathbb{R}^n$ , no se debe confundir su espacio de linealidad  $L \subset \mathbb{R}^n$  con el espacio lineal paralelo a  $P$ ,  $lin(P) \subset \mathbb{R}^n$ . Por ejemplo, si consideramos el politopo de la figura 1.2.1, entonces  $lin(P) = \mathbb{R}^2$ , mientras que  $L = \{\mathbf{0}\}$ .

**Definición 1.2.15.** Sea  $P$  un poliedro en  $\mathbb{R}^n$ , y sea  $\mathbf{x} \in P$ :

- (1) Diremos que  $\mathbf{x}$  es un punto *interior* a  $P$  si  $\mathbf{x}$  no está contenido en ninguna cara de  $P$  de dimensión menor que  $n$ , y denotaremos por  $int(P)$  al conjunto de los puntos interiores a  $P$ , que llamaremos *interior* de  $P$ .



(2) El *interior relativo* de  $P$ , que denotaremos por  $relint(P)$ , es el interior de  $P$  respecto a su espacio afín,  $aff(P)$ , en el que  $P$  es de dimensión máxima.

**Observación 1.2.16.** (1) El interior de un poliedro, que acabamos de definir, coincide con su interior topológico.

(2) Si  $P$  se escribe de la forma  $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{b}, A'\mathbf{x} \leq \mathbf{b}'\}$ , donde cada una de las desigualdades  $A'\mathbf{x} \leq \mathbf{b}'$  es estricta para algún  $\mathbf{x} \in P$ , entonces se puede comprobar ([Zie95, Cap. 2, Lema 2.8]) que

$$relint(P) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{b}, A'\mathbf{x} < \mathbf{b}'\}.$$

**Definición 1.2.17** (Abanico normal). Sea  $P \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro. El *abanico normal* a  $P$  es el abanico poliedral  $\mathcal{N}_P$  formado por los conos

$$\mathcal{N}_P(F) = cl(\{\mathbf{w} \in (\mathbb{R}^n)^\vee : face_{\mathbf{w}}(P) = F\}),$$

cuando  $F$  varía en el conjunto de las caras del poliedro  $P$ .

**Observación 1.2.18.** (1) Si  $F$  y  $F'$  son caras de un poliedro  $P$ , entonces  $F'$  es una cara de  $F$  si, y solo si,  $\mathcal{N}_P(F)$  es una cara de  $\mathcal{N}_P(F')$ . Por lo tanto, la colección de los conos normales  $\mathcal{N}_P(F)$ , cuando  $F$  varía en el conjunto de las caras de  $P$  es un abanico poliedral, lo que justifica la definición anterior.

(2) En la definición anterior,  $cl(\cdot)$  denota la clausura para la topología euclídea (usual) en  $(\mathbb{R}^n)^\vee$ , el espacio dual de  $\mathbb{R}^n$ .

**Ejemplo 1.2.19.** En la figura 1.2.6 se muestra el abanico normal de un cuadrilátero  $P$ . Este abanico está formado por nueve conos: cuatro de dimensión 2, cuatro de dimensión 1 y uno de dimensión 0. Además, en este sencillo ejemplo se observa cómo, para cada cara  $F$  de  $P$ , el espacio de linealidad de  $F$  y el espacio de linealidad de  $\mathcal{N}_P(F)$  son ortogonales.

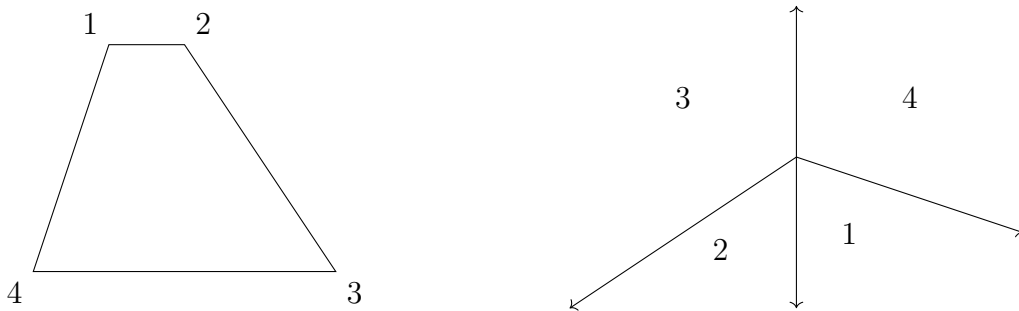


Figura 1.2.6: El abanico normal (interior) de un poliedro.

**Observación 1.2.20.** Dado un poliedro  $P$ , para cada cara  $F \subset P$ , el espacio lineal paralelo a  $F$  es ortogonal al espacio lineal paralelo a  $\mathcal{N}_P(F)$ . Además, sus dimensiones son complementarias, es decir,  $\dim(F) + \dim(\mathcal{N}_P(F)) = n$ . La prueba de este resultado se puede encontrar en [LR08].

**Definición 1.2.21.** Sea  $\Sigma$  un complejo poliedral en  $\mathbb{R}^n$ , y sea  $\sigma$  una celda de  $\Sigma$ . La *estrella* de  $\sigma$  en  $\Sigma$  es un abanico en  $\mathbb{R}^n$ , que denotaremos por  $star_{\Sigma}(\sigma)$ . Los conos que componen dicho abanico están indexados por las celdas  $\tau$  de  $\Sigma$  que tienen a  $\sigma$  como una de sus caras. El cono de  $star_{\Sigma}(\sigma)$  indexado por  $\tau$  es el siguiente subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ :

$$\bar{\tau} = \{\lambda(\mathbf{x} - \mathbf{y}) : \lambda \geq 0, \mathbf{x} \in \tau, \mathbf{y} \in \sigma\}.$$

La siguiente proposición proporciona una forma efectiva de calcular la estrella de una celda  $\sigma \in \Sigma$ . Utilizaremos este resultado en el capítulo 5:

**Proposición 1.2.22.** Sea  $\Sigma$  un complejo poliedral. Para cada celda  $\sigma \in \Sigma$  y cada  $\mathbf{w} \in relint(\sigma)$ , el cono  $\bar{\tau}$  de  $star_{\Sigma}(\sigma)$  es igual a

$$\bar{\tau} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \text{existe } \epsilon > 0 \text{ con } \mathbf{w} + \epsilon\mathbf{v} \in \tau\} + aff(\sigma).$$

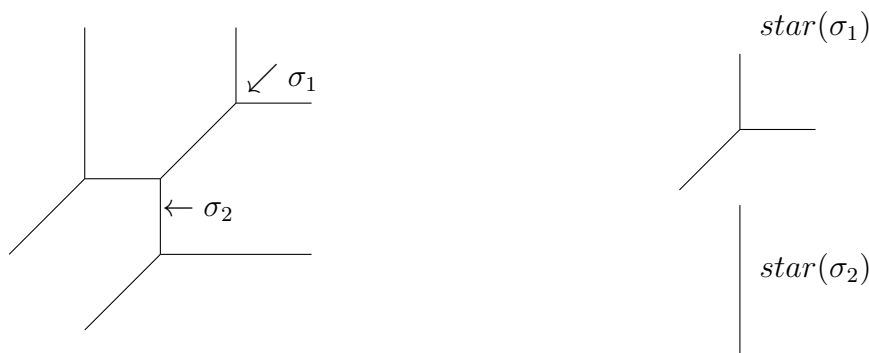


Figura 1.2.7: Estrella de un poliedro en un complejo poliedral.

**Ejemplo 1.2.23.** El complejo poliedral  $\Sigma$  a la izquierda de la figura 1.2.7 es, como veremos en el capítulo 3, una curva cuadrática (tropical) en el plano. El subespacio afín que genera el vértice  $\sigma_1$  en  $\Sigma$  es el propio vértice, cuya estrella se muestra en la figura de la derecha. Para  $\sigma_2$ , el espacio afín es el eje  $y$ , y este es también su estrella.

### 1.2.1. Subdivisiones regulares

Una clase interesante de complejos poliedrales son las *subdivisiones regulares* de un politopo, que definiremos a continuación.

Sea  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  una lista ordenada de vectores de  $\mathbb{R}^{n+1}$  y fijamos un vector peso  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_r) \in \mathbb{R}^r$ . Denotamos  $I = \{1, \dots, r\}$  y para cada  $J \subset I$  consideramos el conjunto

$$S_J = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : \begin{array}{ll} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{x} = w_i & \text{si } i \in J \\ \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{x} < w_i & \text{si } i \notin J \end{array} \right\}$$

( $S_J$  es o bien vacío, o bien el interior relativo de una cara del poliedro  $V \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{w}$ , donde  $V \in \mathcal{M}_{r \times (n+1)}(\mathbb{R})$  denota la matriz cuyas filas son los vectores  $\mathbf{v}_i$ ).

Sea  $I_{\mathbf{w}} = \{J \subset I : S_J \neq \emptyset\}$ . Para cada  $J \in I_{\mathbf{w}}$ ,  $J \neq \emptyset$ , denotamos  $C_J = \text{pos}(\{\mathbf{v}_i : i \in J\})$  y definimos  $C_\emptyset = \{\mathbf{0}\}$  si  $S_\emptyset \neq \emptyset$ . Entonces el conjunto  $\Sigma_{C, \mathbf{w}} = \{C_J : J \in I_{\mathbf{w}}\}$  es un abanico poliedral con soporte  $C$ . Este resultado no lo vamos a demostrar, ya que nuestro interés se centrará en las subdivisiones regulares de politopos.

**Definición 1.2.24.** Consideramos una lista ordenada de vectores  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  y un vector peso  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_r) \in \mathbb{R}^r$ . Sea  $C = \text{pos}(\{\mathbf{v}_i : i = 1, \dots, r\})$ , entonces la *subdivisión regular de  $C$*  relativa a  $w_1, \dots, w_r$  es el abanico poliedral  $\Sigma_{C, \mathbf{w}}$  descrito en el párrafo previo.

Esta construcción se aplica usualmente a vectores  $\mathbf{v}_i = (\mathbf{u}_i, 1)$ , representando una configuración de puntos  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$  en  $\mathbb{R}^n$ . En este caso, el abanico corresponde a una subdivisión del politopo  $P = \text{conv}(\{\mathbf{u}_i : 1 \leq i \leq r\})$  en  $\mathbb{R}^n$ , como probaremos después. Para ello, veamos primero cómo se define la subdivisión regular de un politopo.

Sea  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$  una lista ordenada de vectores de  $\mathbb{R}^n$ , y fijamos un vector peso  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_r) \in \mathbb{R}^r$ . Al igual que antes, denotamos  $I = \{1, \dots, r\}$ . Consideramos el politopo  $P = \text{conv}(\{\mathbf{u}_i : i \in I\})$ . La *subdivisión regular de  $P$*  relativa a  $w_1, \dots, w_r$  tiene la siguiente descripción geométrica:

1. Formamos el politopo “levantado”  $P_{\mathbf{w}} = \text{conv}(\{(\mathbf{u}_i, w_i) : 1 \leq i \leq r\}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , de modo que la altura del punto  $\mathbf{u}_i$  sobre el hiperplano  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$  es  $w_i$ , para  $1 \leq i \leq r$ .
2. Llamamos *caras inferiores* de  $P_{\mathbf{w}}$  a las de la forma  $\text{face}_{\mathbf{c}}(P_{\mathbf{w}})$  para algún vector  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n+1}$  con su última componente positiva ( $c_{n+1} > 0$ ).
3. Para cada cara inferior  $F$  de  $P_{\mathbf{w}}$ , su proyección  $\pi(F)$  está contenida en  $P$ , donde  $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es la proyección  $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$ .
4. Por último, consideramos el conjunto  $\Sigma_{P, \mathbf{w}}$  dado por

$$\Sigma_{P, \mathbf{w}} = \{\pi(F) : F \text{ es cara inferior de } P_{\mathbf{w}}\}.$$

**Proposición 1.2.25.** En las condiciones anteriores, el conjunto  $\Sigma_{P, \mathbf{w}}$  constituye un complejo poliedral con soporte  $P$ , que se llama *subdivisión regular de  $P$*  relativa a  $w_1, \dots, w_r$ .

Antes de demostrar este resultado, probaremos un lema que será útil:

**Lema 1.2.26.** Sea  $P = P(A, \mathbf{b})$  un poliedro, con  $A \in \mathcal{M}_{d \times n}(\mathbb{R})$  y  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ . Consideramos una cara  $F \subset P$ . Entonces son equivalentes:

- (a) Existe un vector  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $w_n > 0$  y  $F = \text{face}_{\mathbf{w}}(P)$  (es decir,  $F$  es cara inferior de  $P$ ).
- (b) Para cada  $\mathbf{x} \in F$  y cada  $\lambda > 0$ ,  $\mathbf{x} - \lambda \mathbf{e}_n \notin P$ , donde  $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$ .
- (c) Existe  $\mathbf{x} \in \text{relint}(F)$  tal que para cada  $\lambda > 0$ ,  $\mathbf{x} - \lambda \mathbf{e}_n \notin P$ .

*Demostración.* Las partes (a) y (b) son equivalentes como consecuencia del Lema de Farkas ([Zie95, Cap. 1, §1.4]). Además, como  $\text{relint}(F) \subset F$ , la implicación (b)  $\Rightarrow$  (c) es trivial. Por lo tanto, solo falta probar (c)  $\Rightarrow$  (b).

Sea  $\mathbf{x} \in \text{relint}(F)$  tal que para todo  $\lambda > 0$ ,  $\mathbf{x} - \lambda \mathbf{e}_n \notin P$ , y consideramos  $\mathbf{y} \in F$ . Como  $F$  es una cara de  $P$ , existen índices  $i_1, \dots, i_t$  tales que

$$F = \left\{ \mathbf{x} : \begin{array}{l} \mathbf{a}_{i_j} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_{i_j}, \quad j = 1, \dots, t \\ \mathbf{a}_h \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_h, \quad h \neq i_1, \dots, i_t \end{array} \right\},$$

y el interior relativo  $\text{relint}(F)$  tiene la misma descripción que  $F$  pero sustituyendo los “ $\leq$ ” por “ $<$ ” para cada  $h \neq i_1, \dots, i_t$ .

Entonces,  $\mathbf{a}_{i_j} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a}_{i_j} \cdot \mathbf{y}$  para cada  $j = 1, \dots, t$ . Por lo tanto,

$$\mathbf{a}_{i_j} \cdot (\mathbf{x} - \lambda \mathbf{e}_n) = \mathbf{a}_{i_j} \cdot (\mathbf{y} - \lambda \mathbf{e}_n) \text{ para cada } j = 1, \dots, t.$$

Como  $\mathbf{x} \in \text{relint}(F)$ , entonces  $\mathbf{a}_h \cdot \mathbf{x} < \mathbf{b}_h$  para cada  $h \neq i_1, \dots, i_t$ . Por lo tanto, para  $\lambda > 0$  suficientemente pequeño tenemos  $\mathbf{a}_h(\mathbf{x} - \lambda \mathbf{e}_n) \leq \mathbf{b}_h$  (eligiendo  $\lambda > 0$  tal que  $\mathbf{a}_h \cdot \mathbf{x} - \lambda(\mathbf{a}_h)_h \leq \mathbf{b}_h$ ). Y como  $\mathbf{x} - \lambda \mathbf{e}_n \notin P$ , entonces existe un índice  $s \in \{1, \dots, t\}$  tal que  $\mathbf{a}_{i_s} \cdot (\mathbf{x} - \lambda \mathbf{e}_n) > \mathbf{b}_{i_s}$ . Pero  $\mathbf{a}_{i_s} \cdot (\mathbf{x} - \lambda \mathbf{e}_n) = \mathbf{a}_{i_s} \cdot (\mathbf{y} - \lambda \mathbf{e}_n)$ , luego  $\mathbf{y} - \lambda \mathbf{e}_n \notin P$ .  $\square$

*Demostración de la proposición 1.2.25.* Como la intersección de dos caras inferiores de  $P_{\mathbf{w}}$  es, a su vez, una cara inferior, entonces  $\Sigma_{P, \mathbf{w}}$  es un complejo poliedral.

Por lo tanto, solo falta probar que el soporte de  $\Sigma_{P, \mathbf{w}}$  es el poliedro  $P$ , y en esta igualdad la inclusión  $|\Sigma_{P, \mathbf{w}}| \subset P$  es trivial. Sea  $\mathbf{x} \in P$ , entonces existen números  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i \in I$ , con  $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$  tales que  $\mathbf{x} = \sum_{i \in I} \lambda_i \mathbf{u}_i$ . Por tanto,

$$\left( \mathbf{x}, \sum_{i \in I} \lambda_i w_i \right) = \sum_{i \in I} \lambda_i (\mathbf{u}_i, w_i) \in P_{\mathbf{w}} \text{ y } \pi \left( \mathbf{x}, \sum_{i \in I} \lambda_i w_i \right) = \mathbf{x}.$$

Esto demuestra que  $\pi^{-1}(\mathbf{x})$  es la intersección de  $P_{\mathbf{w}}$  con la recta de ecuaciones  $\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\}$ , luego es compacto. Por lo tanto, existe  $x_{n+1}$  mínimo tal que  $(\mathbf{x}, x_{n+1}) \in P_{\mathbf{w}}$ .

Entonces, si  $F$  es cara de  $P_{\mathbf{w}}$ ,  $(\mathbf{x}, x_{n+1}) \in \text{relint}(F)$ , puesto que  $(\mathbf{x}, x_{n+1}) - \lambda \mathbf{e}_{n+1} \notin P$ . En consecuencia,  $F$  es cara inferior de  $P_{\mathbf{w}}$  y  $\mathbf{x} \in \pi(F)$ .  $\square$

**Definición 1.2.27.** Consideramos una lista ordenada de vectores  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$  de  $\mathbb{R}^n$  y un vector peso  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_r) \in \mathbb{R}^r$ . Sea  $P = \text{conv}(\{\mathbf{u}_i : i = 1, \dots, r\})$ , entonces la *subdivisión regular de  $P$*  relativa a  $w_1, \dots, w_r$  es el complejo poliedral  $\Sigma_{P, \mathbf{w}}$ .

Veamos ahora una relación importante entre el abanico  $\Sigma_{C, \mathbf{w}}$  de la definición 1.2.24 y el complejo poliedral  $\Sigma_{P, \mathbf{w}}$  de la definición 1.2.27. Sea  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$  una lista ordenada de vectores de  $\mathbb{R}^n$ , y consideramos un vector peso  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^r$ . Denotamos  $I = \{1, \dots, r\}$  y consideramos el politopo  $P = \text{conv}(\{\mathbf{u}_i : i \in I\}) \subset \mathbb{R}^n$  y el cono  $C = \text{pos}(\{\mathbf{u}_i, 1\} : i \in I) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Para el cono  $C$  construimos el abanico poliedral  $\Sigma_{C, \mathbf{w}}$  y para el politopo  $P$  construimos el complejo poliedral  $\Sigma_{P, \mathbf{w}}$ .

**Proposición 1.2.28.** La subdivisión regular del politopo  $P = \text{conv}(\{\mathbf{u}_i : i \in I\})$  relativa a  $w_1, \dots, w_r$  es igual al complejo poliedral obtenido intersecando la subdivisión regular del cono  $C = \text{pos}(\{\mathbf{u}_i, 1\} : i \in I\})$  con el hiperplano  $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = 1\}$ .

La prueba de este resultado es trivial si demostramos antes el siguiente lema:

**Lema 1.2.29.** Sea  $J \subset I = \{1, \dots, r\}$ ,  $J \neq \emptyset$ .

- (1) Sea  $F_J = \text{conv}(\{\mathbf{u}_i, w_i\} : i \in J\})$ . Entonces  $F_J$  es cara de  $P_{\mathbf{w}}$  si, y solo si,  $J \in I_{\mathbf{w}}$ . Concretamente,  $F_J = \text{face}_{(\mathbf{c}, 1)}(P_{\mathbf{w}})$  si, y solo si, existe  $c_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $(-\mathbf{c}, c_0) \in S_J$ .
- (2)  $\pi(F_J) = \text{conv}(\{\mathbf{u}_i : i \in J\})$ .
- (3)  $\pi(F_J) = \pi(C_J \cap H)$ .

*Demostración.* (1) Sea  $F = F_J$  cara inferior de  $P_{\mathbf{w}}$ . Entonces existen un vector  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  y un número  $c_0 \in \mathbb{R}$  tales que  $(\mathbf{c}, 1) \cdot (\mathbf{u}_i, w_i) = c_0$  para cada  $i \in J$ , y  $(\mathbf{c}, 1) \cdot (\mathbf{u}_i, w_i) > c_0$  para todo  $i \notin J$ . Esto equivale a la existencia de un vector  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  y un número  $c_0 \in \mathbb{R}$  tales que  $(-\mathbf{c}, c_0) \cdot (\mathbf{u}_i, 1) = w_i$  para cada  $i \in J$ , y  $(-\mathbf{c}, c_0) \cdot (\mathbf{u}_i, 1) < w_i$  para todo  $i \notin J$ . Es decir,  $J \in I_{\mathbf{w}}$  si, y solo si,  $S_J \neq \emptyset$ , lo que equivale a que  $J \in I_{\mathbf{w}}$ .

(2) Para cada  $i \in J$ , el vector  $\mathbf{u}_i = \pi(\mathbf{u}_i, w_i) \in \pi(F_J)$ . Como  $F_J$  es convexo, entonces su proyección  $\pi(F_J)$  también lo es. Por lo tanto,  $\text{conv}(\{\mathbf{u}_i : i \in J\}) \subseteq \pi(F_J)$ .

Recíprocamente, sea  $(\mathbf{x}, x_{n+1}) \in F_J$ . Entonces existen números reales  $\lambda_i \geq 0$  con  $\sum_{i \in J} \lambda_i = 1$  tales que  $(\mathbf{x}, x_{n+1}) = \sum_{i \in J} \lambda_i (\mathbf{u}_i, w_i)$ . Por lo tanto,  $\mathbf{x} = \sum_{i \in J} \lambda_i \mathbf{u}_i \in \text{conv}(\{\mathbf{u}_i : i \in J\})$ .

(3) Sea  $(\mathbf{x}, x_{n+1}) \in F_J$ . Entonces existen  $\lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  con  $\sum_{i \in J} \lambda_i = 1$  tales que  $(\mathbf{x}, x_{n+1}) = \sum_{i \in J} \lambda_i (\mathbf{u}_i, w_i)$ . Por lo tanto,  $\mathbf{x} = \sum_{i \in J} \lambda_i \mathbf{u}_i$ , luego  $(\mathbf{x}, 1) = \sum_{i \in J} \lambda_i (\mathbf{u}_i, 1) \in C_J$ . Recíprocamente, sea  $(\mathbf{x}, 1) \in C_J$ . Entonces existen  $\lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  tales que  $(\mathbf{x}, 1) = \sum_{i \in J} \lambda_i (\mathbf{u}_i, 1)$ . Por lo tanto,  $\sum_{i \in J} \lambda_i = 1$  y  $\mathbf{x} = \sum_{i \in J} \lambda_i \mathbf{u}_i$ , luego

$$\mathbf{x} \in \text{conv}(\{\mathbf{u}_i : i \in J\}) = \pi(F_J).$$

□

*Demostración de la proposición 1.2.28.* El resultado se deduce de forma inmediata a partir del lema 1.2.29, ya que los poliedros de la subdivisión regular de  $P$  son  $\{\pi(F_J) : J \in I_{\mathbf{w}}\}$  y los conos de la subdivisión regular de  $C$  son  $\{C_J : J \in I_{\mathbf{w}}\}$ . □

Para terminar esta sección, veamos unos ejemplos que muestran el concepto de subdivisión regular de un cono, de un poliedro y la relación entre ambas que nos da la proposición 1.2.28:

**Ejemplo 1.2.30.** (1) Consideramos los siguientes vectores de  $\mathbb{R}^2$ :  $\mathbf{u}_1 = (0, 1)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (1, 1)$ ,  $\mathbf{u}_3 = (2, 1)$  y  $\mathbf{u}_4 = (3, 1)$ , que engendran el cono

$$C = \text{pos}(\{\mathbf{u}_i : 1 \leq i \leq 4\}) = \text{pos}(\{(0, 1), (3, 1)\}).$$

Para el vector peso  $\mathbf{w} = (3, 2, 1, 2) \in \mathbb{R}^4$ , la subdivisión regular del cono  $C$  está constituida por seis conos:  $\text{pos}(\{\mathbf{u}_i\})$  para  $i = 1, 3, 4$ ,  $\text{pos}(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\})$ ,  $\text{pos}(\{\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\})$  y  $\{\mathbf{0}\}$ . Veamos cómo se obtiene esta subdivisión.

Denotamos por  $U$  a la matriz cuyas filas son los vectores  $\mathbf{u}_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , y sea  $P$  el poliedro dado por  $P = P(U, \mathbf{w})$ . Tenemos que encontrar los conjuntos de índices  $J \subset I = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $J \neq \emptyset$ , tales que  $S_J \subset P$  es no vacío. Para ello, en la figura 1.2.8a hemos representado el poliedro  $P$ . En esta figura, los conjuntos  $S_J$  son los interiores relativos de las caras para las que se da la igualdad exactamente en los índices de  $J$ . En la tabla 1.2.8b hemos descrito los conjuntos  $S_J$  no vacíos. Para los otros 10 subconjuntos  $J \subset I$ , se verifica  $S_J = \emptyset$ .

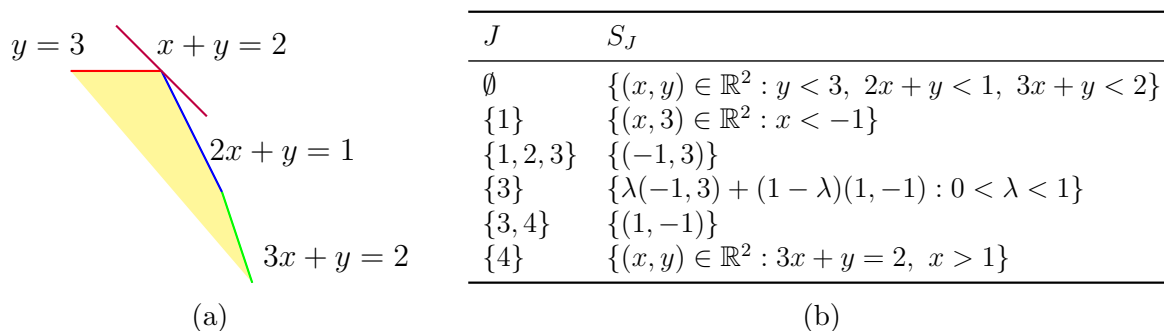


Figura 1.2.8: Explicación del ejemplo 1.2.30 (1).

Por lo anterior, la subdivisión regular del cono  $C \subset \mathbb{R}^2$  para el peso  $\mathbf{w} = (3, 2, 1, 2)$  es la de la figura 1.2.9.



Figura 1.2.9: Subdivisión regular del cono del ejemplo 1.2.30 (1).

- (2) Consideramos los puntos 0, 1, 2, 3 en la recta real  $\mathbb{R}$ . Su envolvente convexa es el segmento  $P = [0, 3]$ . Si  $\mathbf{w} = (3, 2, 1, 2)$ , la subdivisión regular consiste en dos segmentos:  $[0, 2]$  y  $[2, 3]$  y tres puntos:  $\{1\}$ ,  $\{3\}$  y  $\{4\}$ .

Veamos cómo se obtiene esta subdivisión regular. Construimos el politopo levantado  $P_{\mathbf{w}} = \text{conv}(\{(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\})$ . Por el lema 1.2.29, las caras inferiores de  $P_{\mathbf{w}}$  son exactamente las caras  $F \subset P_{\mathbf{w}}$  que cumplen que para cada  $\mathbf{x} \in F$  y cada  $\lambda > 0$ ,  $\mathbf{x} - \lambda(0, 1) \notin P$ . Las caras de  $P_{\mathbf{w}}$  son  $F_1 = \{(0, 3)\}$ ,  $F_2 = \text{conv}(\{(0, 3), (2, 1)\})$ ,  $F_3 = \{(2, 1)\}$ ,  $F_4 = \text{conv}(\{(2, 1), (3, 2)\})$ ,  $F_5 = \{(3, 2)\}$ ,  $F_6 = \text{conv}(\{(3, 2), (0, 3)\})$  y  $F_7 = P_{\mathbf{w}}$ . De estas, las caras inferiores son  $F_1, F_2, F_3, F_4$  y  $F_5$ , que se proyectan sobre:  $\pi(F_1) = \{0\}$ ,  $\pi(F_2) = [0, 2]$ ,  $\pi(F_3) = \{2\}$ ,  $\pi(F_4) = [2, 3]$  y  $\pi(F_5) = \{3\}$ , respectivamente. En la figura 1.2.10 hemos representado el politopo  $P_{\mathbf{w}}$  y hemos marcado en rojo las caras inferiores del politopo levantado. Además, hemos representado la proyección de las caras inferiores sobre el segmento  $P$ .

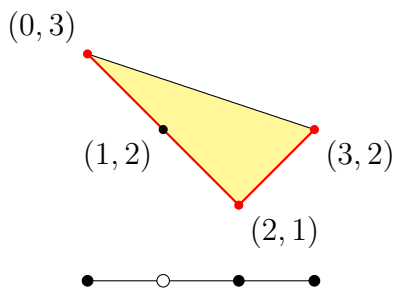


Figura 1.2.10: Explicación del ejemplo 1.2.30 (2).

- (3) Las dos subdivisiones regulares de este ejemplo se han representando en la figura 1.2.11. Notemos que, por la proposición 1.2.28, estas dos subdivisiones regulares están relacionadas. Si intersecamos los conos de la subdivisión regular de  $C$  con la recta  $y = 1$ , entonces obtenemos la subdivisión regular del segmento  $P$ .

$$\mathbf{w} = (3, 2, 1, 2)$$

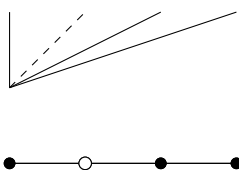


Figura 1.2.11: Subdivisiones regulares del ejemplo 1.2.30 y su relación según la proposición 1.2.28.

**Ejemplo 1.2.31.** Considerando el mismo cono,  $C$ , del ejemplo anterior y el mismo segmento,  $P$ , veamos cómo cambian las subdivisiones regulares descritas en dicho ejemplo si varía el vector peso  $\mathbf{w}$ .

- (1) Si  $\mathbf{w} = (4, 2, 1, 2)$ , la subdivisión regular de  $C$  está formada por ocho conos:  $pos(\{\mathbf{u}_i\})$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ ,  $pos(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\})$ ,  $pos(\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\})$ ,  $pos(\{\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\})$  y  $\{\mathbf{0}\}$ . La subdivisión regular de  $P$  consiste en los tres segmentos  $[0, 1]$ ,  $[1, 2]$  y  $[2, 3]$ , y los puntos  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{3\}$  y  $\{4\}$ . Sucede lo mismo para el vector  $\mathbf{w} = (1, 0, 0, 1)$ . Figura 1.2.12.
- (2) Si  $\mathbf{w} = (0, 0, 0, 0)$ , la subdivisión regular de  $C$  está formada por los cuatro conos  $pos(\{\mathbf{u}_1\})$ ,  $pos(\{\mathbf{u}_4\})$ ,  $pos(\{\mathbf{u}_i : i = 1, 2, 3, 4\})$  y  $\{\mathbf{0}\}$ . La subdivisión regular de  $P$  consiste en el segmento  $P = [0, 3]$  y dos puntos:  $\{1\}$  y  $\{4\}$ . Sucede lo mismo para  $\mathbf{w} = (4, 3, 2, 1)$ . Figura 1.2.12.



Figura 1.2.12: Subdivisiones regulares del ejemplo 1.2.31.

Terminamos esta sección con unos ejemplos de subdivisiones regulares de un triángulo en  $\mathbb{R}^2$ :

**Ejemplo 1.2.32.** Consideramos los puntos  $(2, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(0, 0)$  de  $\mathbb{R}^2$ , cuya envolvente convexa es el triángulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(0, 2)$  y  $(2, 0)$ . Consideramos tres vectores peso distintos  $\mathbf{w} = (1, 0, 1, 0, 0, 2)$ ,  $\mathbf{w} = (3, 0, 3, 1, 1, 0)$  y  $\mathbf{w} = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ . Las correspondientes subdivisiones se muestran en la figura 1.2.14.

Analizamos con detalle el primer caso. Para ver cuáles son las caras inferiores, hemos representado el politopo levantado  $P_{\mathbf{w}}$  en la figura 1.2.13. En esta figura, hemos sombreado las caras inferiores del politopo, que son las que tienen vector normal interior con tercera componente positiva. Equivalentemente, son las caras  $F \subset P_{\mathbf{w}}$  tales que para cada  $\lambda > 0$  y cada  $\mathbf{x} \in F$ ,  $\mathbf{x} - \lambda(0, 0, 1) \notin P_{\mathbf{w}}$ . Al proyectar las caras inferiores sobre el plano  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$  se obtiene la subdivisión regular de la izquierda en la figura 1.2.14.

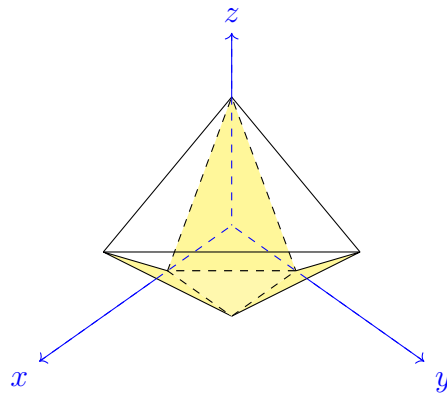


Figura 1.2.13: Politopo levantado y caras inferiores del ejemplo 1.2.32 para el vector peso  $\mathbf{w} = (1, 0, 1, 0, 0, 2)$ .

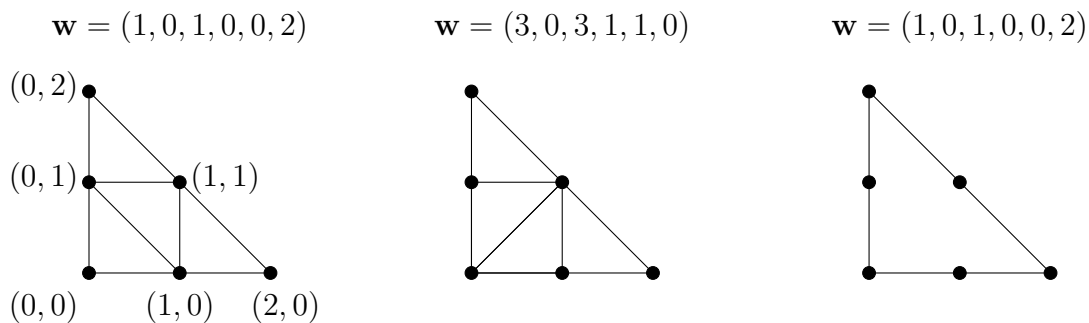


Figura 1.2.14: Subdivisiones regulares del ejemplo 1.2.32.



## 1.3. Geometría Algebraica Clásica

Vamos a introducir aquí los conceptos básicos de la Geometría Algebraica Clásica, necesarios para poder entender la Geometría Tropical. Los resultados enunciados en esta sección son elementales, por lo que no incluimos su demostración.

**Definición 1.3.1.** (1) El *espacio afín*  $n$ -dimensional sobre un cuerpo  $K$  es

$$\mathbb{A}_K^n = \mathbb{A}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in K\} = K^n.$$

(2) El *espacio proyectivo*  $n$ -dimensional sobre un cuerpo  $K$  es

$$\mathbb{P}_K^n = \mathbb{P}^n = (K^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim,$$

donde  $\mathbf{v} \sim \lambda \mathbf{v}$  para cada  $\lambda \neq 0$ . Los puntos de  $\mathbb{P}^n$  son las clases de equivalencia de las rectas que pasan por el origen (rectas vectoriales). Denotamos por  $[v_0 : v_1 : \dots : v_n]$  a la clase de equivalencia del vector  $\mathbf{v} = (v_0, v_1, \dots, v_n) \in K^{n+1}$ .

(3) El *toro algebraico*  $n$ -dimensional es

$$T_K^n = T^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in K^*\}.$$

En estos espacios ambiente vamos a definir qué se entiende por una variedad, que es el conjunto de ceros comunes de varios polinomios. Para ello veamos primero qué polinomios son los adecuados para definir las variedades en cada espacio:

**Definición 1.3.2** (Anillo coordenado). (1) El *anillo coordenado* del espacio afín  $\mathbb{A}^n$  es el anillo de polinomios en  $n$  variables,  $K[x_1, \dots, x_n]$ .

(2) El *anillo coordenado homogéneo* del espacio proyectivo  $\mathbb{P}^n$  es el anillo de polinomios en  $n+1$  variables,  $K[x_0, x_1, \dots, x_n]$ .

(3) El *anillo coordenado* del toro algebraico  $T^n$  es el anillo de polinomios de Laurent en  $n$  variables,  $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ .

Trabajando en estos anillos de polinomios, podemos definir ya qué son las variedades:

**Definición 1.3.3.** (1) La *variedad afín* definida por un ideal  $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$  es

$$V(I) = \{\mathbf{a} \in \mathbb{A}^n : f(\mathbf{a}) = 0 \text{ para todo } f \in I\}.$$

(2) Se dice que un ideal  $I \subset K[x_0, x_1, \dots, x_n]$  es homogéneo si tiene un conjunto de generadores formado por polinomios homogéneos. La *variedad proyectiva* definida por un ideal homogéneo  $I \subset K[x_0, x_1, \dots, x_n]$  es

$$V(I) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{P}^n : f(\mathbf{v}) = 0 \text{ para todo } f \in I\}.$$

(3) Cada ideal  $I \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  define una *variedad* en el toro:

$$V(I) = \{\mathbf{a} \in T^n : f(\mathbf{a}) = 0 \text{ para todo } f \in I\}.$$

Recíprocamente, para cada variedad  $X$  podemos considerar el ideal  $I_X$  formado por todos los polinomios (o polinomios homogéneos, o polinomios de Laurent) que se anulan en  $X$ .

**Definición 1.3.4.** El *anillo coordinado*  $K[X]$  de una variedad  $X$  es el cociente del anillo coordinado del espacio ambiente ( $K[x_1, \dots, x_n]$ ,  $K[x_0, x_1, \dots, x_n]$  o  $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ ) por el ideal  $I_X$ .

En este trabajo nos fijaremos en los polinomios de Laurent y las variedades que definen. Normalmente consideraremos cuerpos algebraicamente cerrados, por ejemplo  $K = \mathbb{C}$  o  $K = \mathbb{C}\{\{t\}\}$ .

**Observación 1.3.5.** La aplicación  $I \mapsto V(I)$  que envía a cada ideal en la variedad que genera no es una biyección. Por ejemplo,  $V(\langle x \rangle) = V(\langle x^2 \rangle)$  en  $\mathbb{A}^1$ . Lo que sí se cumple es que si  $\sqrt{I} = \sqrt{J}$ , entonces  $V(I) = V(J)$ ; y el recíproco se verifica si  $K$  es algebraicamente cerrado (Teorema de los ceros de Hilbert, [Ful89, Cap. 1, §7]).

**Definición 1.3.6.** Se dice que una variedad es *irreducible* si no puede ponerse como unión de dos subvariedades propias.

**Observación 1.3.7.** En algunos libros, como [Ful89], el término variedad se reserva para las variedades irreducibles, mientras que a una variedad algebraica cualquiera se le denomina conjunto algebraico. Nosotros no asumiremos que las variedades son irreducibles.

Utilizando la descomposición primaria de ideales ([AM69, Cap. 5]), toda variedad se puede descomponer como unión finita de variedades irreducibles. Y si  $X$  es una variedad irreducible, entonces el ideal  $I_X$  es un ideal primo.

Los ideales primos más sencillos son los generados por polinomios lineales. Las variedades correspondientes se denominan *espacios lineales*. La variedad definida por un ideal principal es una *hipersuperficie*, y su dimensión es 1. La *dimensión* de una variedad ([CLO97, Cap. 9]) es su invariante más elemental, y se define su *codimensión* como  $n$  menos la dimensión.

Los cálculos sobre ideales o variedades se enmarcan en el ámbito del Álgebra Computacional y se pueden realizar utilizando software especializado. En nuestro caso, usaremos SINGULAR ([DGPS20]).

Vamos a dotar al espacio afín  $\mathbb{A}^n$  de estructura de espacio topológico, considerando como conjuntos cerrados a los conjuntos de la forma  $V(I)$  tales que  $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$  es un ideal. Esta topología se conoce como *topología de Zariski*.

**Proposición 1.3.8.** La topología de Zariski es una topología sobre el conjunto  $\mathbb{A}^n$ .

**Definición 1.3.9.** Consideramos el espacio afín  $\mathbb{A}^n$ , la *topología de Zariski* sobre  $\mathbb{A}^n$  es  $\tau = \{\mathbb{A}^n \setminus V(I) : I \subset K[x_1, \dots, x_n] \text{ ideal}\}$ .

Para cada conjunto  $U \subset \mathbb{A}^n$ , denotamos por  $\bar{U}$  a la clausura de  $U$  para la topología de Zariski, que es el conjunto más pequeño de la forma  $V(I)$  que contiene a  $U$ .

De forma análoga se define la topología de Zariski sobre el espacio proyectivo  $\mathbb{P}^n$  y sobre el toro algebraico  $T^n$ . Y existen inclusiones  $T^n \xrightarrow{i} \mathbb{A}^n \xrightarrow{j} \mathbb{P}^n$ , donde  $j$  envía a cada punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{A}^n$  en  $[1 : \mathbf{x}] \in \mathbb{P}^n$ . La *clausura afín* de una variedad  $X \subset T^n$  es la clausura de Zariski  $\overline{i(X)}$  de  $i(X) \subset \mathbb{A}^n$ , y la *clausura proyectiva* de  $X \subset \mathbb{A}^n$  es la clausura de Zariski  $\overline{j(X)}$  de  $j(X) \subset \mathbb{P}^n$ .

Veamos ahora cuáles son sus descripciones algebraicas. Para ello, tenemos que dar antes unas definiciones:

**Definición 1.3.10.** Sean  $f = \sum c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in K[x_1, \dots, x_n]$  un polinomio e  $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$  un ideal.

(1) El grado de  $f$  es  $W = \deg(f) = \max\{|\mathbf{u}| : c_{\mathbf{u}} \neq 0\}$ , donde  $|\mathbf{u}| = \sum_{i=1}^n u_i$ .

(2) La *homogeneización*  $\tilde{f}$  de  $f$  es el polinomio homogéneo

$$\tilde{f} = \sum c_{\mathbf{u}} x_0^{W-|\mathbf{u}|} \mathbf{x}^{\mathbf{u}} = x_0^W \cdot f\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \in K[x_0, x_1, \dots, x_n].$$

(3) La *homogeneización* de  $I$  es el ideal  $I_{proj} = \langle \tilde{f} : f \in I \rangle$ . De forma similar, definimos  $I_{proj}$  para un ideal  $I \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ .

**Proposición 1.3.11.** Sea  $X = V(I)$  una subvariedad del toro  $T^n$  definida por un ideal  $I \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ . Entonces  $\overline{i(X)} = V(I_{aff})$ , donde  $I_{aff} = I \cap K[x_1, \dots, x_n]$ . Para cualquier ideal  $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ , la clausura proyectiva  $\overline{j(X)}$  de  $V(I)$  es la subvariedad proyectiva definida por el ideal homogéneo  $I_{proj}$ .

En los siguientes capítulos utilizaremos el concepto de morfismo de variedades que definimos a continuación. La definición que vamos a usar tiene una restricción adicional sobre la que se suele dar habitualmente, pues la vamos a aplicar sobre variedades en el toro algebraico.

**Definición 1.3.12.** Sean  $A \subset T_K^n$  y  $B \subset T_K^m$  variedades definidas en los toros  $T^n$  y  $T^m$ , respectivamente. Un *morfismo de variedades*  $\phi : A \rightarrow B$  es una aplicación para la cual existen monomios  $M_i \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ ,  $1 \leq i \leq m$ , tales que  $\phi(\mathbf{a}) = (M_1(\mathbf{a}), \dots, M_m(\mathbf{a}))$  para cada  $\mathbf{a} \in T^n$ . Es decir,  $\phi$  es la aplicación inducida por el homomorfismo de  $K$ -álgebras

$$\phi^* : K[y_1^{\pm 1}, \dots, y_m^{\pm 1}] \rightarrow K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}], \quad y_i \mapsto \phi^*(y_i) = M_i,$$

que es una aplicación monomial.

**Observación 1.3.13.** (1) La restricción adicional que hacemos por tratarse de variedades en el toro es que la aplicación sea monomial. En el caso de variedades afines, se puede dar una definición análoga, cambiando los monomios  $M_i$  por polinomios  $P_i \in K[x_1, \dots, x_n]$ .

- (2) El homomorfismo de anillos  $\phi^*$  equivale al homomorfismo de grupos  $\phi^{**} : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n$ , dado por  $\phi^{**}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{u}$  si  $M_i = \mathbf{x}^{\mathbf{u}}$ , siendo  $\mathbf{e}_i \in \mathbb{Z}^m$  el vector cuyas coordenadas son  $(\mathbf{e}_i)_j = \delta_{ij}$ .
- (3) Si  $X = V(I) \subset T^n$  es una variedad en el toro  $T^n$ , entonces la clausura de Zariski de su imagen  $\phi(X)$  en el toro  $T^m$  es la variedad  $V(\phi^{*-1}(I))$ .

Un *automorfismo del toro*  $T^n$  es un morfismo de variedades  $\phi : T^n \rightarrow T^n$  biyectivo tal que  $\phi^{-1}$  es también un morfismo. Se puede probar que el grupo de automorfismos de  $T^n$  es isomorfo a  $GL(n, \mathbb{Z})$ , con las entradas de las matrices iguales a los exponentes de los monomios. Los automorfismos del toro nos permiten definir cambios de coordenadas:

**Definición 1.3.14.** Un *cambio de coordenadas* en  $T^n$  es un automorfismo del toro  $T^n$ .

**Observación 1.3.15.** Los cambios de coordenadas en el toro  $T^n$  se comportan de manera muy distinta a los cambios de coordenadas lineales o afines en el espacio afín  $\mathbf{A}^n$ , o en el proyectivo  $\mathbb{P}^n$ . Los automorfismos de  $T^n$  son esenciales en la Geometría Tropical.

**Ejemplo 1.3.16.** Sea  $K$  un cuerpo algebraicamente cerrado. Consideramos el isomorfismo de  $K$ -álgebras  $\phi^* : K[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}] \rightarrow K[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$  dado por  $\phi^*(x) = xy$ ,  $\phi^*(y) = x^{-1}y^{-2}$ , que induce un automorfismo  $\phi : T^2 \rightarrow T^2$ ,  $\phi(x, y) = (xy, x^{-1}y^{-2})$ .

El homomorfismo  $\phi^*$  viene dado por la matriz  $U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ , cuya inversa es  $U^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $(\phi^*)^{-1}(x) = x^2y$ ,  $(\phi^*)^{-1}(y) = x^{-1}y^{-1}$ .

Como  $\phi^*$  es un automorfismo de  $K[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ , entonces  $\phi$  es un cambio de coordenadas de  $T^2$ . Este cambio de coordenadas transforma la recta punteada  $L = \{(1, y) : y \in \mathbb{R}^*\}$  en la hipérbola  $H = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2 : xy = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ . En este ejemplo queda claro que los cambios de coordenadas en  $T^2$  no se comportan como los cambios de coordenadas lineales o afines.

Introducimos ahora una variedad importante que usaremos en el capítulo 2, el Grassmanniano. El *Grassmanniano*  $G(r, m)$  es un espacio cuyos puntos se corresponden con los subespacios vectoriales  $r$ -dimensionales de un espacio vectorial  $m$ -dimensional  $V$ . Se define como una subvariedad de  $\mathbb{P}^{N-1}$ , para  $N = \binom{m}{r}$  como sigue:

Sea  $V = K^m$  (en general, primero establecemos un isomorfismo  $V \cong K^m$ ). Todo subespacio vectorial de  $V$  de dimensión  $r$  es el subespacio generado por las filas de una matriz de tamaño  $r \times m$  y rango  $r$ . Un problema con esta representación es que matrices distintas pueden definir el mismo subespacio. Si dos matrices  $A, B \in \mathcal{M}_{r \times m}(K)$  definen el mismo subespacio, entonces una se puede obtener a partir de la otra realizando operaciones elementales sobre sus filas, luego existe una matriz  $G \in GL(r, K)$  tal que  $A = G \cdot B$ . Esta ambigüedad se soluciona asociando a cada matriz el vector de  $K^{\binom{m}{r}}$  formado por los menores  $r \times r$  de la matriz.

**Definición 1.3.17.** Sea  $A \in \mathcal{M}_{r \times m}(K)$  una matriz de rango  $r$ . El *vector de Plücker* de  $A$  es el vector de  $K^{\binom{m}{r}}$  formado por los menores  $r \times r$  de la matriz  $A$ .

Las coordenadas del vector de Plücker están indexadas por todos los subconjuntos  $I \subset \{1, \dots, m\}$  de cardinal  $\#I = r$ . La coordenada indexada por  $I$  es el menor de la submatriz  $r \times r$  cuyas columnas están indexadas por  $I$ . De este modo, si  $A = GB$  para alguna matriz  $G \in GL(n, K)$ , entonces el  $I$ -ésimo menor de  $A$  es  $\det(G)$  veces el  $I$ -ésimo menor de  $B$ , así que representan el mismo punto en el espacio proyectivo  $\mathbb{P}^{\binom{m}{r}-1}$ . El subespacio se relaciona de forma biunívoca con su vector de Plücker. Y el conjunto formado por todos estos puntos es  $G(r, m)$ .

**Ejemplo 1.3.18.** Sea  $U \subset \mathbb{C}^4$  el subespacio formado por las filas de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Notemos que  $U$  es también el subespacio formado por las filas de la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Los menores  $2 \times 2$  de una matriz  $2 \times 4$  están indexados por los conjuntos  $\{1, 2\}$ ,  $\{1, 3\}$ ,  $\{1, 4\}$ ,  $\{2, 3\}$ ,  $\{2, 4\}$  y  $\{3, 4\}$ . El vector de los menores  $2 \times 2$  de  $A$ , siguiendo el orden anterior, es  $(1, 2, 3, 1, 2, 1)$ , mientras que el de  $B$  es  $(3, 6, 9, 3, 6, 3)$ . Y, aunque son distintos, se cumple

$$[1 : 2 : 3 : 1 : 2 : 1] = [3 : 6 : 9 : 3 : 6 : 3] \in \mathbb{P}^5.$$

**Ejemplo 1.3.19.** (1) Para  $r = 1$ , el Grassmaniano  $G(1, m)$  es el espacio formado por las rectas de  $K^m$  que pasan por el origen, luego es exactamente el espacio proyectivo de dimensión  $m - 1$ ,  $\mathbb{P}^{m-1}$ .

(2) Si  $r = 2$ , el Grassmaniano  $G(2, m)$  es el espacio formado por los planos vectoriales de  $K^m$ . En el espacio euclídeo tridimensional, un plano vectorial está unívocamente determinado por su recta normal. Por lo tanto, los espacios  $G(1, 3) \cong G(2, 3) \cong \mathbb{P}^2$ .

(3) El Grassmaniano más simple que no es un espacio proyectivo es  $G(2, 4)$ , y está formado por los planos vectoriales de  $K^4$ . Aunque no es un espacio proyectivo, se embebe dentro de  $\mathbb{P}^5$  de la forma descrita anteriormente.

A partir de la descripción que hemos hecho del Grassmaniano, se puede dotar a  $G(r, m)$  de una estructura de subvariedad algebraica de  $\mathbb{P}^{N-1}$ .



# Capítulo 2

## Bases de Gröbner y Complejos de Gröbner

En este segundo capítulo, desarrollamos una teoría de base de Gröbner para ideales homogéneos en el anillo de polinomios en  $n + 1$  variables sobre un cuerpo valorado  $(K, \text{val})$ :  $K[x_0, x_1, \dots, x_n]$ . Esta teoría de bases de Gröbner es una generalización de la que se estudia en el grado, pues utilizaremos la valoración en  $K$  para definir las formas iniciales.

En la sección 2.1 definimos los conceptos básicos, y en la sección 2.2 estudiamos propiedades sobre las formas iniciales y anillos cociente, de forma análoga a como se hace con las bases de Gröbner “tradicionales”.

En la sección 2.3 construimos el complejo de Gröbner de un ideal homogéneo. De nuevo, esta teoría es una generalización de la que aparece en las referencias clásicas. En esta sección hemos optado por no incluir las demostraciones de los resultados que se enuncian, pues son muy extensas.

Por último, en la sección 2.4 definimos el concepto de “base tropical” de un ideal del anillo de polinomios de Laurent, que utilizaremos en el capítulo 4 cuando hablemos de variedades tropicales.

La referencia principal que se ha seguido en este capítulo es [MS15, Cap. 2, §2.4–§2.6].

### 2.1. Formas iniciales e ideales iniciales

En esta sección, no se precisa que el cuerpo  $K$  sea algebraicamente cerrado, pero sí necesitamos que la valoración tenga una escisión dada por  $\phi : \Gamma_{\text{val}} \rightarrow K^*$ ,  $w \mapsto t^w$ . Esta hipótesis se verifica si la valoración es trivial o también si el cuerpo es algebraicamente cerrado (proposición 1.1.22), entre otros casos.

Si  $a \in K$  verifica  $\text{val}(a) \geq 0$ , entonces pertenece al anillo local  $R = \{c \in K : \text{val}(c) \geq 0\}$ , y denotamos por  $\bar{a}$  a la clase del elemento  $a$  en el cuerpo residual  $\mathbb{k}$ . La existencia de

la escisión  $\phi$  garantiza el siguiente resultado:

**Proposición 2.1.1.** Para cada  $a \in K^*$ , el elemento  $\overline{t^{-\text{val}(a)} \cdot a} \in \mathbb{k}^*$ . Además, la aplicación resultante  $K^* \rightarrow \mathbb{k}^*$ , dada por  $a \mapsto \overline{t^{-\text{val}(a)} \cdot a}$ , es un homomorfismo de grupos multiplicativos.

*Demostración.* Por la definición de valoración y la proposición 1.1.22, se tiene

$$\text{val}(t^{-\text{val}(a)} \cdot a) = \text{val}(t^{-\text{val}(a)}) + \text{val}(a) = -\text{val}(a) + \text{val}(a) = 0.$$

Por lo tanto,  $t^{-\text{val}(a)} \cdot a \in R$ , y podemos considerar su clase  $\overline{t^{-\text{val}(a)} \cdot a}$  en  $\mathbb{k}$ . De hecho, como su valoración es cero,  $t^{-\text{val}(a)} \cdot a \notin \mathfrak{m}_K$ , luego  $\overline{t^{-\text{val}(a)} \cdot a} \neq 0$ , es decir,  $\overline{t^{-\text{val}(a)} \cdot a} \in \mathbb{k}^*$ . Usando ahora que  $\phi : \Gamma_{\text{val}} \rightarrow K^*$  es un homomorfismo de grupos, se tiene lo siguiente:

$$\overline{t^{-\text{val}(ab)} \cdot ab} = \overline{t^{-\text{val}(a)-\text{val}(b)} \cdot ab} = \overline{(t^{-\text{val}(a)} \cdot a) \cdot (t^{-\text{val}(b)} \cdot b)},$$

lo que concluye la prueba.  $\square$

**Observación 2.1.2.** Notemos que si consideramos cualquier  $\gamma < \text{val}(a)$ , entonces siempre tendremos  $\overline{t^{-\gamma} \cdot a} = 0$ . Esto es porque  $\text{val}(t^{-\gamma} \cdot a) = -\gamma + \text{val}(a) > 0$ .

**Ejemplo 2.1.3.** Sea  $K = \mathbb{C}\{\{t\}\}$  el cuerpo de series de Puiseux, provisto de la valoración usual, y consideramos la serie  $a = t^{-1} + 2t^2 + t^3 \in \mathbb{C}\{\{t\}\}$ . Entonces  $\text{val}(a) = -1$  y

$$\overline{t^{-\text{val}(a)} \cdot a} = \overline{t \cdot (t^{-1} + 2t^2 + t^3)} = \overline{1 + 2t^3 + t^4} = \bar{1},$$

donde hemos usado que  $\overline{2t^3 + t^4} = 0$ , pues  $\text{val}(2t^3 + t^4) = 3 > 0$ .

Si consideramos el caso de la observación previa, por ejemplo para  $\gamma = -2$ , entonces

$$\overline{t^{-\gamma} \cdot a} = \overline{t^2 \cdot (t^{-1} + 2t^2 + t^3)} = \overline{t + 2t^4 + t^5} = 0,$$

pues  $\text{val}(t + 2t^4 + t^5) = 1 > 0$ .

Dado un polinomio  $f$  con coeficientes en  $R$ , denotaremos por  $\bar{f}$  al polinomio obtenido reemplazando cada coeficiente  $a$  de  $f$  por su clase en el cuerpo residual  $\bar{a} \in \mathbb{k}$ .

Nuestro primer objetivo es definir qué entendemos por base de Gröbner de un ideal homogéneo  $I$  en el anillo de polinomios  $S = K[x_0, x_1, \dots, x_n]$ . Al igual que en la teoría estándar de bases de Gröbner, tenemos que definir primero la noción de ideal inicial. La diferencia con la teoría estándar es que ahora las valoraciones de los coeficientes tienen un papel clave en la determinación del ideal inicial.

**Definición 2.1.4.** (1) Sea  $f = \sum_{\mathbf{u} \in \mathbb{N}^{n+1}} c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in S$  un polinomio. La *tropicalización* de  $f$  es la función lineal a trozos  $\text{trop}(f) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\text{trop}(f)(\mathbf{w}) = \min\{\text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} : \mathbf{u} \in \mathbb{N}^{n+1} \text{ y } c_{\mathbf{u}} \neq 0\}. \quad (2.1.1)$$



(2) Sea  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$  un vector peso, y denotamos  $W = \text{trop}(f)(\mathbf{w}) = \min\{\text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} : c_{\mathbf{u}} \neq 0\}$ . La *forma inicial* de  $f$  respecto de  $\mathbf{w}$  es

$$in_{\mathbf{w}}(f) = \sum_{\mathbf{u} \in \mathbb{N}^{n+1} : \text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = W} \overline{c_{\mathbf{u}} t^{-\text{val}(c_{\mathbf{u}})}} \cdot \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in \mathbb{k}[x_0, \dots, x_n]. \quad (2.1.2)$$

**Observación 2.1.5.** (1) Diremos que  $\text{trop}(f)$  es el polinomio tropical inducido por el polinomio clásico  $f$ .

(2) Si  $\mathbf{w} \in \Gamma_{\text{val}}^{n+1}$ , la forma inicial se puede expresar también como

$$in_{\mathbf{w}}(f) = \overline{t^{-W} \sum_{\mathbf{u} \in \mathbb{N}^{n+1}} c_{\mathbf{u}} t^{\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}}} = \overline{t^{-\text{trop}(f)(\mathbf{w})} f(t^{w_0} x_0, \dots, t^{w_n} x_n)}.$$

**Ejemplo 2.1.6.** Sea  $f = (t + t^2)x_0 + 2t^2x_1 + 3t^4x_2 \in \mathbb{C}\{\{t\}\}[x_0, x_1, x_2]$ . Entonces

$$\text{trop}(f)(w_0, w_1, w_2) = \min\{1 + w_0, 2 + w_1, 4 + w_2\}.$$

Veamos cuál es la forma inicial de  $f$  para distintos vectores peso.

- Si  $\mathbf{w} = (0, 0, 0)$ , entonces  $W = \text{trop}(f)(\mathbf{w}) = 1$ , y el mínimo se alcanza únicamente en el primer término. Entonces

$$in_{\mathbf{0}}(f) = \overline{t^{-1} \cdot (t + t^2)} \cdot x_0 = \overline{(1 + t)} \cdot x_0 = x_0,$$

pues  $\text{val}[(1 + t) - 1] = 1 > 0$ , así que  $\overline{1 + t} = \bar{1}$ .

- Si  $\mathbf{w} = (4, 2, 0)$ , entonces  $W = \text{trop}(f)(\mathbf{w}) = 4$ , y el mínimo se alcanza en los dos últimos términos. Por lo tanto,

$$in_{(4,2,0)}(f) = \overline{t^{-2} \cdot 2t^2} \cdot x_1 + \overline{t^{-4} \cdot 3t^4} \cdot x_2 = 2x_1 + 3x_2.$$

Del mismo modo,  $in_{(2,1,0)}(f) = 2x_1 + 3x_2$ .

**Definición 2.1.7.** Si  $I$  es un ideal homogéneo en el anillo de polinomios  $K[x_0, \dots, x_n]$  (es decir, si admite un sistema de generadores formado por polinomios homogéneos), entonces el *ideal inicial* de  $I$  es

$$in_{\mathbf{w}}(I) = \langle in_{\mathbf{w}}(f) : f \in I \rangle \subset \mathbb{k}[x_0, \dots, x_n]. \quad (2.1.3)$$

**Observación 2.1.8.** Si la valoración en  $K$  es trivial, entonces el ideal definido en (2.1.3) es el ideal inicial de  $I$  en la teoría estándar de bases de Gröbner con respecto al vector peso  $-\mathbf{w}$ .

## 2.2. Bases de Gröbner

En esta sección, vamos a introducir el concepto de base de Gröbner de un ideal homogéneo en  $K[x_0, \dots, x_n]$ , siendo  $K$  un cuerpo valorado. Esto es una generalización de la teoría de bases de Gröbner para ideales en el anillo de polinomios con un orden monomial global.

Si  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$  es un vector peso e  $I \subset K[x_0, x_1, \dots, x_n]$  es un ideal homogéneo, entonces su ideal inicial  $in_{\mathbf{w}}(I)$ , definido como en (2.1.3), es un ideal de  $\mathbb{k}[x_0, \dots, x_n]$ .

**Definición 2.2.1.** Un conjunto  $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_s\} \subset I$  es una *base de Gröbner* de  $I$  con respecto a  $\mathbf{w}$  si  $in_{\mathbf{w}}(I) = \langle in_{\mathbf{w}}(g_1), \dots, in_{\mathbf{w}}(g_s) \rangle$ .

**Teorema 2.2.2.** Sea  $I \subset K[x_0, \dots, x_n]$  un ideal homogéneo, y sea  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$  un vector peso. Entonces  $in_{\mathbf{w}}(I)$  es homogéneo, y existe una base de Gröbner homogénea para  $I$ . Además, si  $g \in in_{\mathbf{w}}(I)$ , entonces  $g = in_{\mathbf{w}}(f)$  para algún  $f \in I$ .

*Demostración.* Veamos primero que  $in_{\mathbf{w}}(I)$  es homogéneo. Sea  $f \in I$  y lo expresamos como suma de sus componentes homogéneas  $f = \sum_{i=0}^r f_i$  (donde  $r = \deg(f)$ ). Entonces  $f_i \in I$  para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq r$ . La forma inicial de  $f$  se puede poner como

$$in_{\mathbf{w}}(f) = \sum_{i: trop(f)(\mathbf{w}) = trop(f_i)(\mathbf{w})} in_{\mathbf{w}}(f_i)$$

y para cada  $i$ , el polinomio  $in_{\mathbf{w}}(f_i)$  es homogéneo. Por lo tanto,

$$in_{\mathbf{w}}(I) = \langle in_{\mathbf{w}}(g) : g \in I \text{ es homogéneo} \rangle.$$

Esto demuestra que el ideal  $in_{\mathbf{w}}(I)$  es homogéneo. Por el Teorema de la Base de Hilbert, el ideal  $in_{\mathbf{w}}(I)$  está finitamente generado. Por lo tanto, podemos extraer un sistema de generadores finito del conjunto  $\{in_{\mathbf{w}}(g) : g \in I \text{ es homogéneo}\}$ , es decir, existen  $g_1, \dots, g_s \in I$  homogéneos tales que  $in_{\mathbf{w}}(I) = \langle in_{\mathbf{w}}(g_i) : 1 \leq i \leq s \rangle$ . Entonces  $\{g_1, \dots, g_s\}$  es una base de Gröbner homogénea para  $I$ .

Para demostrar la última parte del teorema, consideramos  $g \in in_{\mathbf{w}}(I)$ . Entonces podemos escribir  $g$  como

$$g = \sum_{\mathbf{u}} a_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}} in_{\mathbf{w}}(g_{\mathbf{u}}) = \sum_{\mathbf{u}} a_{\mathbf{u}} in_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}^{\mathbf{u}} g_{\mathbf{u}}),$$

para unos ciertos  $a_{\mathbf{u}} \in \mathbb{k}^*$  y  $g_{\mathbf{u}} = \sum_{\mathbf{v}} d_{\mathbf{u}\mathbf{v}} \mathbf{x}^{\mathbf{v}} \in I$ . Para cada  $a_{\mathbf{u}} \neq 0$ , sea  $c_{\mathbf{u}} \in R$  tal que  $\overline{c_{\mathbf{u}}} = a_{\mathbf{u}}$  (en particular,  $\text{val}(c_{\mathbf{u}}) = 0$ , ya que  $a_{\mathbf{u}} \neq 0$ ), y sea  $W_{\mathbf{u}} = trop(g_{\mathbf{u}})(\mathbf{w}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}$ . Definimos

$$f = \sum_{\mathbf{u}} c_{\mathbf{u}} t^{-W_{\mathbf{u}}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}} g_{\mathbf{u}} = \sum_{\mathbf{u}, \mathbf{v}} c_{\mathbf{u}} d_{\mathbf{u}\mathbf{v}} t^{-W_{\mathbf{u}}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}+\mathbf{v}}.$$

Entonces  $\text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \text{val}(d_{\mathbf{u}\mathbf{v}}) - W_{\mathbf{u}} + \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \text{val}(c_{\mathbf{u}}) - W_{\mathbf{u}} + trop(g_{\mathbf{u}})(\mathbf{w}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = 0$ . Por lo tanto,  $trop(f)(\mathbf{w}) = 0$  y el mínimo se alcanza en cada término de  $f$ , luego

$$\begin{aligned} in_{\mathbf{w}}(f) &= \sum_{\mathbf{u}, \mathbf{v}} \overline{t^{-\text{val}(c_{\mathbf{u}} d_{\mathbf{u}\mathbf{v}} t^{-W_{\mathbf{u}}})} c_{\mathbf{u}} d_{\mathbf{u}\mathbf{v}} t^{-W_{\mathbf{u}}}} \cdot \mathbf{x}^{\mathbf{u}+\mathbf{v}} = \sum_{\mathbf{u}, \mathbf{v}} \overline{t^{-\text{val}(d_{\mathbf{u}\mathbf{v}})} d_{\mathbf{u}\mathbf{v}}} \cdot \overline{c_{\mathbf{u}}} \cdot \mathbf{x}^{\mathbf{u}+\mathbf{v}} \\ &= \sum_{\mathbf{u}} a_{\mathbf{u}} \left( \sum_{\mathbf{v}} \overline{t^{-\text{val}(d_{\mathbf{u}\mathbf{v}})} d_{\mathbf{u}\mathbf{v}}} \cdot \mathbf{x}^{\mathbf{u}+\mathbf{v}} \right) = \sum_{\mathbf{u}} a_{\mathbf{u}} in_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}^{\mathbf{u}} g_{\mathbf{u}}) = g. \end{aligned}$$

En conclusión, dado  $g \in in_{\mathbf{w}}(I)$  hemos demostrado que existe  $f \in I$  tal que  $g = in_{\mathbf{w}}(f)$ , lo que finaliza la prueba.  $\square$

**Observación 2.2.3.** Nuestra definición de base de Gröbner está restringida a ideales homogéneos. Con esta restricción, toda base de Gröbner  $\mathcal{G}$ , constituida por polinomios homogéneos, genera el ideal  $I$ . Para una prueba, ver [CM13].

La misma definición de base de Gröbner tiene sentido también para ideales no homogéneos, pero estos ideales en general no están generados por su base de Gröbner.

**Ejemplo 2.2.4.** Consideramos el ideal  $I = \langle x \rangle \subset K[x]$ , con la valoración trivial en  $K$ , y el peso  $w = 1$ . Es sencillo comprobar que  $in_w(I) = \langle x \rangle$  (notemos que  $I$  es monomial). Si consideramos  $\mathcal{G} = \{x - x^2\}$ , entonces  $in_w(I) = \langle in_w(\mathcal{G}) \rangle$ , pero  $\langle \mathcal{G} \rangle \neq I$ . En este ejemplo, el ideal  $I$  es homogéneo, pero el polinomio  $x - x^2$  no lo es.

Ahora vamos a iterar la construcción anterior, considerando la forma inicial de una forma inicial. La segunda vez que tomamos la forma inicial, el operador  $in_{\mathbf{v}}$  se aplica a polinomios con coeficientes en  $\mathbb{k}$ , considerando en  $\mathbb{k}$  la valoración trivial.

**Proposición 2.2.5.** Sean  $f \in K[x_0, \dots, x_n]$  y  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Entonces existe un número real  $\epsilon > 0$  tal que para todo  $\epsilon'$  tal que  $0 < \epsilon' < \epsilon$  se tiene

$$in_{\mathbf{v}}(in_{\mathbf{w}}(f)) = in_{\mathbf{w} + \epsilon' \mathbf{v}}(f). \quad (2.2.1)$$

*Demostración.* Sea  $f = \sum_{\mathbf{u}} c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}}$ . Entonces

$$in_{\mathbf{w}}(f) = \sum_{\mathbf{u} \in \mathbb{N}^{n+1}: \text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = W} \overline{c_{\mathbf{u}} t^{\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} - W}} \cdot \mathbf{x}^{\mathbf{u}},$$

donde  $W = trop(f)(\mathbf{w})$ . Ahora, para calcular la forma inicial de  $in_{\mathbf{w}}(f)$  dada por el vector  $\mathbf{v}$ , consideramos en  $\mathbb{k}$  la valoración trivial. Entonces

$$in_{\mathbf{v}}(in_{\mathbf{w}}(f)) = \sum_{\mathbf{u}: \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = W'} \overline{c_{\mathbf{u}} t^{\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} - W}} \cdot \mathbf{x}^{\mathbf{u}},$$

donde  $W' = \min\{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} : \mathbf{u} \in \text{supp}(in_{\mathbf{w}}(f))\} = \min\{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} : \text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = W\}$ .

Sean  $A = \{\mathbf{u} : \text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = W\}$  y  $B = \{\mathbf{u} \in A : \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = W'\}$  los conjuntos donde se alcanza el mínimo de  $W$  y  $W'$ , respectivamente. Entonces está claro que  $\text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} > W$  para cada  $\mathbf{u} \notin A$ . Además,

$$\begin{aligned} \text{val}(c_{\mathbf{u}}) + (\mathbf{w} + \epsilon \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} &= W + \epsilon W' \text{ para cada } \epsilon > 0, \mathbf{u} \in B, \text{ y} \\ \text{val}(c_{\mathbf{u}}) + (\mathbf{w} + \epsilon \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} &> W + \epsilon W' \text{ para cada } \epsilon > 0, \mathbf{u} \in A \setminus B. \end{aligned}$$

Por lo tanto, lo que necesitamos para que se verifique la igualdad de las formas iniciales del enunciado es  $\text{val}(c_{\mathbf{u}}) + (\mathbf{w} + \epsilon \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} > W + \epsilon W'$  para cada  $\mathbf{u} \notin A$ . Esto es obviamente cierto para cada  $\epsilon > 0$  si  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \geq W'$ . En otro caso,  $W' > \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ , y la desigualdad equivale a

$$\text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} - W \geq \epsilon (W' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}).$$

Pero como  $\text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} - W > 0$  si  $\mathbf{u} \notin A$ , para cada  $\mathbf{u}$  existe  $\epsilon_{\mathbf{u}} > 0$  con esta propiedad, y podemos poner  $\epsilon = \min\{\epsilon_{\mathbf{u}} : \mathbf{u} \in \text{Supp}(f), \mathbf{u} \notin A\}$  (si es cierto para  $\epsilon$ , lo es para  $\epsilon' < \epsilon$ , pues  $W' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} > 0$ ). Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \text{val}(c_{\mathbf{u}}) + (\mathbf{w} + \epsilon\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} &= W + \epsilon W' \text{ para cada } \mathbf{u} \in B, \text{ y} \\ \text{val}(c_{\mathbf{u}}) + (\mathbf{w} + \epsilon\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} &> W + \epsilon W' \text{ para cada } \mathbf{u} \notin B. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(f)) = \sum_{\mathbf{u} \in B} \overline{c_{\mathbf{u}} t^{\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} - W}} \cdot \mathbf{x}^{\mathbf{u}} = \text{in}_{\mathbf{w} + \epsilon\mathbf{v}}(f)$ , y esto es cierto también para cada  $\epsilon'$  con  $0 < \epsilon' < \epsilon$ .  $\square$

En el Corolario 2.2.10 probaremos que la igualdad (2.2.1) se cumple también si sustituimos  $f$  por cualquier ideal homogéneo  $I$ . En la siguiente proposición vamos a demostrar una de las dos contenciones.

**Proposición 2.2.6.** Sean  $I \subset K[x_0, \dots, x_n]$  un ideal homogéneo y  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$  un vector peso. Entonces existen  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$  y  $\epsilon > 0$  tales que los ideales  $\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(I))$  e  $\text{in}_{\mathbf{w} + \epsilon\mathbf{v}}(I)$  son monomiales, y además se verifica la inclusión  $\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(I)) \subset \text{in}_{\mathbf{w} + \epsilon\mathbf{v}}(I)$ .

**Observación 2.2.7.** En la demostración de la proposición usaremos el politopo de Newton de un polinomio. Dado  $f = \sum_{\mathbf{u} \in \mathbb{N}^{n+1}} c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in K[x_0, \dots, x_n]$ , el *politopo de Newton* de  $f$  es

$$\text{Newt}(f) = \text{conv}(\{\mathbf{u} : c_{\mathbf{u}} \neq 0\}) \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Esta definición también la daremos en el capítulo siguiente para polinomios de Laurent (definición 3.4.3).

*Demostración de la proposición 2.2.6.* Dado  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$ , denotamos por  $M_{\mathbf{v}}$  al ideal generado por todos los monomios de  $\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(I))$  y por  $M_{\mathbf{v}}^{\epsilon}$  al ideal generado por todos los monomios de  $\text{in}_{\mathbf{w} + \epsilon\mathbf{v}}(I)$  para  $\epsilon > 0$ , respectivamente.

Fijamos  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$  tal que  $M_{\mathbf{v}}$  es “maximal”, en el sentido de que no exista  $\mathbf{v}' \in \mathbb{R}^{n+1}$  con  $M_{\mathbf{v}} \subsetneq M_{\mathbf{v}'}$ . Esto es posible por la noetherianidad del anillo de polinomios  $K[x_0, \dots, x_n]$ . Razonamos por reducción al absurdo: si  $\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(I))$  no es un ideal monomial, entonces existe un polinomio  $f \in I$  tal que ninguno de los términos de  $\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(f))$  pertenece a  $M_{\mathbf{v}}$ . Elegimos  $\mathbf{v}' \in \mathbb{R}^{n+1}$  tal que  $\text{in}_{\mathbf{v}'}(\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(f)))$  sea un monomio  $a_{\mathbf{u}_0} \mathbf{x}^{\mathbf{u}_0}$ , para ello basta con tomar un vector  $\mathbf{v}'$  para el que la cara del politopo de Newton  $\text{face}_{\mathbf{v}'}[\text{Newt}(\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(f)))]$  es un vértice. Por la proposición 2.2.5, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\text{in}_{\mathbf{v} + \epsilon'\mathbf{v}'}(\text{in}_{\mathbf{w}}(f)) = \text{in}_{\mathbf{v}'}(\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(f))) = a_{\mathbf{u}_0} \mathbf{x}^{\mathbf{u}_0}$  para cada  $\epsilon'$  tal que  $0 < \epsilon' < \epsilon$ . Sea  $\mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in M_{\mathbf{v}}$ , entonces existe un polinomio  $g \in I$  tal que  $\mathbf{x}^{\mathbf{u}} = \text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(g))$  y, por la proposición 2.2.5, existe un número  $0 < \epsilon_{\mathbf{u}} < \epsilon$ , tal que

$$\mathbf{x}^{\mathbf{u}} = \text{in}_{\mathbf{v}'}(\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(g))) = \text{in}_{\mathbf{v} + \epsilon'\mathbf{v}'}(\text{in}_{\mathbf{w}}(g)) \in \text{in}_{\mathbf{v} + \epsilon'\mathbf{v}'}(\text{in}_{\mathbf{w}}(I)) \text{ para cada } 0 < \epsilon' < \epsilon_{\mathbf{u}}.$$

Como hay un número finito de generadores de  $M_{\mathbf{v}}$ , entonces existe  $\epsilon' > 0$  tal que el ideal  $\text{in}_{\mathbf{v} + \epsilon''\mathbf{v}'}(\text{in}_{\mathbf{w}}(I))$  contiene a cada generador  $\mathbf{x}^{\mathbf{u}}$  de  $M_{\mathbf{v}}$  para todo  $0 < \epsilon'' < \epsilon'$ . Por elección,  $\mathbf{x}^{\mathbf{u}_0} \notin M_{\mathbf{v}}$ , pero  $\mathbf{x}^{\mathbf{u}_0} \in M_{\mathbf{v} + \epsilon'\mathbf{v}'}$ . Por lo tanto,  $M_{\mathbf{v}} \subsetneq M_{\mathbf{v} + \epsilon'\mathbf{v}'}$ , que es absurdo. Esto implica que el ideal  $\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(I))$  es monomial.

Veamos ahora que para esta elección de  $\mathbf{v}$  se verifica la inclusión del enunciado. Ponemos

$M_{\mathbf{v}} = \langle \mathbf{x}^{\mathbf{u}_1}, \dots, \mathbf{x}^{\mathbf{u}_s} \rangle$  y elegimos  $f_1, \dots, f_s \in I$  con  $in_{\mathbf{v}}(in_{\mathbf{w}}(f_i)) = \mathbf{x}^{\mathbf{u}_i}$  para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq s$ . Por la proposición 2.2.5, para cada  $i$  existe un número  $\epsilon_i > 0$  tal que  $in_{\mathbf{w}+\epsilon\mathbf{v}}(f_i) = in_{\mathbf{v}}(in_{\mathbf{w}}(f_i)) = \mathbf{x}^{\mathbf{u}_i}$  para cada  $\epsilon \leq \epsilon_i$ . Sea  $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_s, \epsilon'\}$ , entonces para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , tenemos que  $\mathbf{x}^{\mathbf{u}_i} = in_{\mathbf{w}+\epsilon\mathbf{v}}(f_i) \in in_{\mathbf{v}}(in_{\mathbf{w}}(I))$ . Como  $M_{\mathbf{v}} = \langle \mathbf{x}^{\mathbf{u}_1}, \dots, \mathbf{x}^{\mathbf{u}_s} \rangle$ , entonces  $in_{\mathbf{v}}(in_{\mathbf{w}}(I)) \subset in_{\mathbf{w}+\epsilon\mathbf{v}}(I)$  para este  $\epsilon > 0$  (y para todo  $\epsilon'$ ,  $0 < \epsilon' < \epsilon$ ) y el vector  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$  elegido anteriormente.

Por último, tenemos que probar que el ideal  $in_{\mathbf{w}+\epsilon\mathbf{v}}(I)$  es monomial. Podemos suponer que el vector  $\mathbf{v}$  elegido es tal que no existe  $\mathbf{v}'$  con  $M_{\mathbf{v}} = M_{\mathbf{v}'}$  y  $M_{\mathbf{v}}^{\epsilon} \subsetneq M_{\mathbf{v}'}^{\epsilon}$  (si  $\mathbf{v}$  no cumple esto, lo cambiamos). Razonando de nuevo por reducción al absurdo, supongamos que el ideal  $in_{\mathbf{w}+\epsilon\mathbf{v}}(I)$  no es monomial. Entonces existe un polinomio  $f \in I$  tal que ningún término de  $in_{\mathbf{w}+\epsilon\mathbf{v}}(f)$  pertenece a  $M_{\mathbf{v}}^{\epsilon}$ . Al igual que hicimos antes, podemos encontrar un vector  $\mathbf{v}' \in \mathbb{R}^{n+1}$  tal que  $M_{\mathbf{v}}^{\epsilon} \subsetneq M_{\mathbf{v}'+\epsilon'\mathbf{v}'}^{\epsilon}$  para  $\epsilon' > 0$  suficientemente pequeño. Además, si  $\epsilon'$  es lo suficientemente pequeño, también se cumplirá  $M_{\mathbf{v}'+\epsilon'\mathbf{v}'}^{\epsilon} = M_{\mathbf{v}}^{\epsilon}$ , lo que es absurdo. Por lo tanto, el ideal  $in_{\mathbf{w}+\epsilon\mathbf{v}}(I)$  es monomial.

En conclusión, hemos probado que existen un número  $\epsilon > 0$  y un vector  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$  tales que los ideales  $in_{\mathbf{v}}(in_{\mathbf{w}}(I))$  e  $in_{\mathbf{w}+\epsilon\mathbf{v}}(I)$  son monomiales y además se verifica la inclusión  $in_{\mathbf{v}}(in_{\mathbf{w}}(I)) \subset in_{\mathbf{w}+\epsilon\mathbf{v}}(I)$ .  $\square$

En lo que sigue, denotaremos por  $S_K = K[x_0, \dots, x_n]$  al anillo de polinomios en  $n+1$  variables con coeficientes en  $K$  y por  $S_{\mathbb{k}} = \mathbb{k}[x_0, \dots, x_n]$  al anillo de polinomios en  $n+1$  variables con coeficientes en  $\mathbb{k}$ , que contienen a un ideal homogéneo  $I$  y a su ideal inicial  $in_{\mathbf{w}}(I)$ , respectivamente. Los anillos  $S_K$  y  $S_{\mathbb{k}}$  tienen una estructura natural de espacio vectorial sobre los cuerpos  $K$  y  $\mathbb{k}$ , respectivamente.  $(S_K)_d$  denotará al subespacio vectorial de  $S_K$  formado por los polinomios homogéneos de grado exactamente  $d$  en  $S_K$  y, del mismo modo, si  $I \subset S$  es un ideal homogéneo (subespacio vectorial de  $S_K$ ), denotaremos por  $I_d$  al subespacio de  $(S_K)_d$  formado por los polinomios homogéneos de grado  $d$  en  $I$ .  $(S_K/I)_d$  será el cociente de  $K$ -espacios vectoriales  $(S_K)_d/I_d$ .

Para medir el “tamaño” de estos ideales, utilizaremos sus *funciones de Hilbert*. La función de Hilbert de un ideal es una aplicación  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , dada por  $d \mapsto \dim(S_{\mathbb{k}}/I)_d$ , donde  $\dim(S_K/I)_d$  denota la dimensión del  $K$ -espacio vectorial cociente  $(S_K/I)_d$ . Para valores  $d \gg 0$ , la función de Hilbert coincide con el polinomio de Hilbert, cuyo grado es una unidad menor que la dimensión de Krull del cociente del anillo de polinomios módulo el ideal (ver [CLO97, Cap. 9]).

En el Álgebra Conmutativa estándar, las bases de Gröbner se utilizan para calcular de forma efectiva invariantes de los ideales  $I$  que se pueden obtener a partir de la función de Hilbert, como la dimensión, ya que la función de Hilbert de un ideal y de su inicial coinciden. Ahora vamos a extender este resultado a nuestra teoría de bases de Gröbner:

**Teorema 2.2.8.** Sea  $I \subset S_K$  un ideal homogéneo, y sea  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$  un vector peso tal que  $in_{\mathbf{w}}(I)_d$  está generado como  $\mathbb{k}$ -espacio vectorial por sus monomios. Entonces las clases de los monomios  $\mathbf{x}^{\mathbf{u}}$  de grado exactamente  $d$  que no pertenecen a  $in_{\mathbf{w}}(I)$  forman una  $K$ -base para  $(S_K/I)_d$ .

El análogo a este resultado en el libro de Cox, Litle y O'Shea es [CLO97, Cap. 5, Prop. 4].

*Demostración.* Sea  $\mathcal{B}_d$  el conjunto de los monomios  $\mathbf{x}^{\mathbf{u}}$  de grado exactamente  $d$  que no pertenecen a  $in_{\mathbf{w}}(I)$ . Tenemos que demostrar que la imagen de  $\mathcal{B}_d$  en  $(S_K/I)_d$  es una base. Para ello, probaremos primero que esa imagen es  $K$ -linealmente independiente. Supongamos que tenemos una combinación lineal finita nula  $\sum c_{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{x}}^{\mathbf{u}} = \bar{0}$ , donde  $\bar{\mathbf{x}}^{\mathbf{u}}$  denota la clase del monomio  $\mathbf{x}^{\mathbf{u}}$  en  $(S_K/I)_d$ . Sea  $f = \sum_{\mathbf{u}} c_{\mathbf{u}}\mathbf{x}^{\mathbf{u}}$ , donde  $c_{\mathbf{u}} \neq 0$  implica  $\mathbf{x}^{\mathbf{u}} \notin in_{\mathbf{w}}(I)$ . Por construcción,  $f \in I_d$ , luego  $in_{\mathbf{w}}(f) \in in_{\mathbf{w}}(I_d) = in_{\mathbf{w}}(I)_d$ . Por hipótesis, para cada  $\mathbf{u}$  tal que  $c_{\mathbf{u}} \neq 0$ ,  $c_{\mathbf{u}}\mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in in_{\mathbf{w}}(I)$ . Por lo tanto,  $\mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in in_{\mathbf{w}}(I)$  si  $c_{\mathbf{u}} \neq 0$ . Y esto demuestra que  $c_{\mathbf{u}} = 0$  para todo  $\mathbf{u}$ .

Además, esto implica que  $\dim_{\mathbb{k}}(in_{\mathbf{w}}(I)_d) \geq \dim_K(I_d)$ , ya que  $\#\mathcal{B}_d$  es igual al número de monomios de grado exactamente  $d$  en  $S_K$  menos el número de monomios en  $in_{\mathbf{w}}(I)_d$ , que coincide con la dimensión de  $in_{\mathbf{w}}(I)_d$  como  $\mathbb{k}$ -espacio vectorial. Y se tiene

$$\dim_K(S_K)_d - \dim_{\mathbb{k}}(in_{\mathbf{w}}(I)_d) = \#\mathcal{B}_d \leq \dim_K(S_K/I)_d = \dim_K(S_K)_d - \dim_K(I_d).$$

Veamos ahora que se da la otra desigualdad. Para probar esto, para cada monomio  $\mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in in_{\mathbf{w}}(I)_d$  fijamos un polinomio  $f_{\mathbf{u}} \in I_d$  con  $in_{\mathbf{w}}(f_{\mathbf{u}}) = \mathbf{x}^{\mathbf{u}}$ . Entonces el conjunto  $\{f_{\mathbf{u}} : in_{\mathbf{w}}(f_{\mathbf{u}}) = \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in in_{\mathbf{w}}(I)_d\}$  es linealmente independiente en  $S_K$ : si no lo fuera, existirían escalares  $a_{\mathbf{u}} \in K$ , no todos nulos, tales que  $\sum_{\mathbf{u}} a_{\mathbf{u}}f_{\mathbf{u}} = 0$ . Pongamos  $f_{\mathbf{u}} = \mathbf{x}^{\mathbf{u}} + \sum_{\mathbf{v} \neq \mathbf{u}} c_{\mathbf{u}\mathbf{v}}\mathbf{x}^{\mathbf{v}}$ . Sea  $\mathbf{u}'$  tal que  $\text{val}(a_{\mathbf{u}'}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}' \leq \text{val}(a_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}$  para cada  $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^{n+1}$  con  $\mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in in_{\mathbf{w}}(I)_d$ . Es decir,  $\mathbf{u}'$  es tal que el mínimo de  $\text{trop}(\sum_{\mathbf{u}} a_{\mathbf{u}}f_{\mathbf{u}})(\mathbf{w})$  se alcanza en  $\mathbf{u}'$ . Pero como la combinación lineal  $\sum_{\mathbf{u}} a_{\mathbf{u}}f_{\mathbf{u}}$  es nula, entonces el coeficiente que acompaña a  $\mathbf{x}^{\mathbf{u}}$  en la combinación lineal debe ser nulo:

$$a_{\mathbf{u}'} + \sum_{\mathbf{u} \neq \mathbf{u}'} a_{\mathbf{u}}c_{\mathbf{u}\mathbf{u}'} = 0.$$

Como  $\text{val}(0) = \infty$  y  $\text{val}(a+b) \geq \min\{\text{val}(a), \text{val}(b)\}$  ( $>$  si  $\text{val}(a) \neq \text{val}(b)$ ), entonces debe existir  $\mathbf{u}'' \neq \mathbf{u}'$  tal que  $\text{val}(a_{\mathbf{u}''}) + \text{val}(c_{\mathbf{u}''\mathbf{u}'}) \leq \text{val}(a_{\mathbf{u}'})$ . Pero en este caso

$$\text{val}(a_{\mathbf{u}''}) + \text{val}(c_{\mathbf{u}''\mathbf{u}'}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}' \leq \text{val}(a_{\mathbf{u}'}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}' \leq \text{val}(a_{\mathbf{u}''}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}'',$$

que no puede ser, pues  $in_{\mathbf{w}}(f_{\mathbf{u}''}) = \mathbf{x}^{\mathbf{u}''}$ .

Como el conjunto  $\{f_{\mathbf{u}} \in I_d : in_{\mathbf{w}}(f_{\mathbf{u}}) = \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in in_{\mathbf{w}}(I)_d\}$  es linealmente independiente en  $S_K$ , entonces  $\dim_K(I_d) \geq \dim_{\mathbb{k}}(in_{\mathbf{w}}(I)_d)$ , porque  $\{\mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in in_{\mathbf{w}}(I)_d\}$  es base del  $\mathbb{k}$ -espacio vectorial  $in_{\mathbf{w}}(I)_d$  por hipótesis.

Por lo tanto, queda probado  $\dim_K(I)_d = \dim_{\mathbb{k}}(in_{\mathbf{w}}(I)_d)$ , luego

$$\dim_K(S_K/I)_d = \dim_{\mathbb{k}}(S_{\mathbb{k}}/in_{\mathbf{w}}(I))_d = \dim_{\mathbb{k}}(S_{\mathbb{k}})_d - \dim_{\mathbb{k}}(in_{\mathbf{w}}(I)_d) = \#\mathcal{B}_d.$$

Como la imagen de  $\mathcal{B}_d$  en  $(S_K/I)_d$  es  $K$ -linealmente independiente y su cardinal es igual a la dimensión de este espacio vectorial, entonces es una base de dicho espacio vectorial.  $\square$

**Corolario 2.2.9.** Para cada  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$  y cada ideal homogéneo  $I$  en el anillo de polinomios  $S_K$ , la función de Hilbert de  $I$  coincide con la de su ideal inicial  $in_{\mathbf{w}}(I)$  en  $S_{\mathbb{k}}$ , es decir,

$$\dim_K(S_K/I)_d = \dim_{\mathbb{k}}(S_{\mathbb{k}}/in_{\mathbf{w}}(I))_d \text{ para todo } d \geq 0.$$

Por lo tanto, la dimensión de Krull de los anillos  $S_K/I$  y  $S_{\mathbb{k}}/in_{\mathbf{w}}(I)$  coincide.

*Demostración.* Por la proposición 2.2.6, existen  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$  y  $\epsilon > 0$  tales que  $in_{\mathbf{v}}(in_{\mathbf{w}}(I)) \subset in_{\mathbf{w}+\epsilon\mathbf{v}}(I)$ , y ambos son ideales monomiales, luego se les puede aplicar el teorema 2.2.8. Sea  $\mathbf{x}^{\mathbf{u}_0} \in in_{\mathbf{w}+\epsilon\mathbf{v}}(I)_d \setminus in_{\mathbf{v}}(in_{\mathbf{w}}(I))_d$ . Por el teorema 2.2.8, los monomios de grado  $d$  que no están en  $in_{\mathbf{w}+\epsilon\mathbf{v}}(I)$  generan  $(S_K/I)_d$ . Consideramos la clase del monomio  $\mathbf{x}^{\mathbf{u}_0}$  en el cociente  $(S_K/I)_d$ . Se deduce que existe un polinomio  $f_{\mathbf{u}_0} \in I_d$  tal que  $f_{\mathbf{u}_0} = \mathbf{x}^{\mathbf{u}_0} - f'_{\mathbf{u}_0}$ , donde  $f'_{\mathbf{u}_0}$  es un polinomio tal que ninguno de sus monomios pertenece a  $in_{\mathbf{w}+\epsilon\mathbf{v}}(I)_d$ . Pero entonces  $in_{\mathbf{w}}(f_{\mathbf{u}_0})$  contiene únicamente monomios que no están en  $in_{\mathbf{v}}(in_{\mathbf{w}}(I))$  (porque  $in_{\mathbf{v}}(in_{\mathbf{w}}(I)) \subset in_{\mathbf{w}+\epsilon\mathbf{v}}(I)$  y  $\mathbf{x}^{\mathbf{u}_0} \notin in_{\mathbf{w}+\epsilon\mathbf{v}}(I)$ ). Por lo tanto,  $in_{\mathbf{v}}(in_{\mathbf{w}}(f_{\mathbf{u}_0})) \notin in_{\mathbf{v}}(in_{\mathbf{w}}(I))$ , lo que es absurdo. En conclusión,  $in_{\mathbf{w}+\epsilon\mathbf{v}}(I)_d = in_{\mathbf{v}}(in_{\mathbf{w}}(I))_d$ .

Aplicando el teorema 2.2.8 al ideal  $in_{\mathbf{w}}(I)$  y al ideal  $I$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{k}}(S_{\mathbb{k}}/in_{\mathbf{w}}(I))_d &= \dim_{\mathbb{k}}(S_{\mathbb{k}}/in_{\mathbf{v}}(in_{\mathbf{w}}(I)))_d \\ &\quad \parallel \\ \dim_K(S_K/I)_d &= \dim_{\mathbb{k}}(S_{\mathbb{k}}/in_{\mathbf{w}+\epsilon\mathbf{v}}(I))_d \end{aligned}$$

donde hemos usado que los ideales  $in_{\mathbf{w}+\epsilon\mathbf{v}}(I)_d$  e  $in_{\mathbf{v}}(in_{\mathbf{w}}(I))_d$  coinciden para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño (esto es siempre así). Por lo tanto, para cada  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$  tenemos  $\dim_K(S_K/I)_d = \dim_{\mathbb{k}}(S_{\mathbb{k}}/in_{\mathbf{w}}(I))_d$  para cada grado  $d$ .  $\square$

**Corolario 2.2.10.** Sea  $I$  un ideal homogéneo en  $K[x_0, \dots, x_n]$ . Para cualquier par de vectores  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$  existe  $\epsilon > 0$  tal que

$$in_{\mathbf{v}}(in_{\mathbf{w}}(I)) = in_{\mathbf{w}+\epsilon'\mathbf{v}}(I) \text{ para cada } \epsilon' \text{ con } 0 < \epsilon' < \epsilon.$$

*Demostración.* Sea  $\{g_1, \dots, g_s\} \subset \mathbb{k}[x_0, \dots, x_n]$  un sistema de generadores de  $in_{\mathbf{v}}(in_{\mathbf{w}}(I))$  y para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq s$ , consideramos un elemento  $f_i \in I$  tal que  $in_{\mathbf{v}}(in_{\mathbf{w}}(f_i)) = g_i$ . Por la proposición 2.2.5, para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq s$ , existe un número  $\epsilon_i > 0$  tal que  $g_i = in_{\mathbf{v}}(in_{\mathbf{w}}(f_i)) = in_{\mathbf{w}+\epsilon'\mathbf{v}}(f_i)$  para todo  $\epsilon'$  que cumpla  $0 \leq \epsilon' \leq \epsilon_i$ . Sea  $\epsilon = \min\{\epsilon_i : 1 \leq i \leq s\}$ , entonces para cada  $\epsilon'$  con  $0 < \epsilon' \leq \epsilon$  se tiene  $in_{\mathbf{v}}(in_{\mathbf{w}}(f_i)) = in_{\mathbf{w}+\epsilon'\mathbf{v}}(f_i)$ ,  $\forall i = 1, \dots, s$ . Esto implica que  $in_{\mathbf{v}}(in_{\mathbf{w}}(I)) \subset in_{\mathbf{w}+\epsilon'\mathbf{v}}(I)$ .

Por el corolario 2.2.9, estos ideales tienen la misma función de Hilbert, así que sus dimensiones de Krull coinciden. Por lo tanto, la contención no puede ser estricta, es decir,  $in_{\mathbf{v}}(in_{\mathbf{w}}(I)) = in_{\mathbf{w}+\epsilon'\mathbf{v}}(I)$  para cada  $\epsilon'$  con  $0 < \epsilon' < \epsilon$ .  $\square$

A continuación presentamos un resultado que será útil en los capítulos siguientes cuando hablemos de dimensión. El corolario 2.2.9 implica que las variedades proyectivas  $V(I) \subset \mathbb{P}_K^n$  y  $V(in_{\mathbf{w}}(I)) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^n$  tienen siempre la misma dimensión. En las aplicaciones típicas, la variedad  $V(I)$  será irreducible, mientras que  $V(in_{\mathbf{w}}(I))$  puede tener varias componentes irreducibles. En el siguiente lema veremos que, aunque  $V(in_{\mathbf{w}}(I))$  tenga más de una componente irreducible, cada una tiene la misma dimensión que  $V(I)$ . Antes de enunciar este resultado, recordemos una definición de Álgebra Conmutativa.

**Definición 2.2.11.** Sea  $(A, +, \cdot)$  un anillo (conmutativo y unitario), y sea  $I \subset A$  un ideal. Diremos que un ideal  $\mathfrak{p} \subset A$  es un *primo minimal* del ideal  $I$  si  $I \subset \mathfrak{p}$  y no existe ningún otro ideal primo  $\mathfrak{p}'$  tal que  $I \subset \mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{p}$ .

Nosotros vamos a trabajar en el anillo  $A = S_K$  o en  $A = S_{\mathbb{k}}$ , y supondremos que  $\mathbf{w} \in \Gamma_{\text{val}}^{n+1}$ :

**Teorema 2.2.12.** Si  $I \subset S_K$  es un ideal primo y homogéneo de dimensión  $d$  y  $\mathbf{w} \in \Gamma_{\text{val}}^{n+1}$ , entonces cada primo minimal de  $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$  tiene dimensión  $d$ .

*Demostración.* [MS15, Cap. 2, Lema 2.4.12].  $\square$

No se incluye la demostración de este resultado, pues su comprensión requiere de un nivel avanzado de conocimientos en Álgebra Conmutativa y Geometría Algebraica.

**Observación 2.2.13.** (1) Si  $I \subset K[x_0, \dots, x_n]$  es homogéneo, por el teorema 2.2.2,  $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$  es homogéneo. Entonces, los primos minimales de  $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$  son homogéneos ([Eis95, Cap. 3, § 3.5]).

(2) La hipótesis  $\mathbf{w} \in \Gamma_{\text{val}}^{n+1}$  del teorema anterior no se puede suprimir. Por ejemplo, si la valoración en  $K$  es trivial, entonces  $\Gamma_{\text{val}} = \{0\}$  y se puede probar que  $K[x_0, \dots, x_n]/I = \mathbb{k}[x_0, \dots, x_n]/\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$ , luego  $\text{in}_{\mathbf{w}}(I) = I$ . Pero esto sucede para todo  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  solo si  $I$  es un ideal monomial.

Terminamos esta sección con unos comentarios sobre la relación entre ideales iniciales definidos a través de distintas escisiones de la valoración. En las secciones 2.1 y 2.2 hemos utilizado una escisión dada para definir las formas iniciales. Por lo tanto, las formas iniciales dependen de la escisión escogida para la valoración en  $K$ . Veamos que esto no cambia sustancialmente los ideales iniciales.

Sean  $\phi_1, \phi_2 : \Gamma_{\text{val}} \rightarrow K^*$  dos escisiones distintas de  $\text{val}$  e  $I \subset K[x_0, \dots, x_n]$  un ideal, entonces

$$\text{val} \circ \phi_1 = \text{val} \circ \phi_2 = \text{id} : \Gamma_{\text{val}} \rightarrow \Gamma_{\text{val}}.$$

Fijamos  $\mathbf{w} \in \Gamma_{\text{val}}^{n+1}$  y consideramos los isomorfismos  $\tilde{\phi}_i : K[x_0, \dots, x_n] \rightarrow K[x_0, \dots, x_n]$  dados por  $x_j \mapsto \phi_i(w_j)x_j$  para  $i = 1, 2$ . La composición  $\psi = \tilde{\phi}_1 \circ \tilde{\phi}_2^{-1} : K[x_0, \dots, x_n] \rightarrow K[x_0, \dots, x_n]$  se restringe a un automorfismo  $\psi : R[x_0, \dots, x_n] \rightarrow R[x_0, \dots, x_n]$  dado por  $\psi(x_j) = \frac{\phi_1(w_j)}{\phi_2(w_j)} \cdot x_j$ . Este automorfismo transforma el ideal  $I_R$  usando  $\phi_2$  en el ideal  $I_R$  usando  $\phi_1$ , donde

$$I_R = \langle t^{-\text{trop}(f)(\mathbf{w})} f(t^{w_0}x_0, \dots, t^{w_n}x_n) : f \in I \rangle.$$

El homomorfismo inducido  $\bar{\psi} : \mathbb{k}[x_0, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{k}[x_0, \dots, x_n]$  transforma el ideal inicial definido usando  $\phi_2$  en el ideal inicial definido usando  $\phi_1$ . Por lo tanto, dos ideales iniciales definidos usando dos escisiones distintas están relacionados por medio de un automorfismo de  $\mathbb{k}[x_0, \dots, x_n]$ , así que todos los invariantes de esos ideales coinciden. Es decir, en esencia son el mismo ideal.

## 2.3. Complejos de Gröbner

El objetivo de esta sección es construir un complejo poliedral asociado a cada ideal homogéneo  $I \subset S = K[x_0, \dots, x_n]$ . Este será el espacio ambiente para la variedad tropical de  $I$  que definiremos en el capítulo 4. En esta sección (y siempre que hablemos de formas iniciales), seguimos con la hipótesis de que la valoración en  $K$  escinde,  $w \mapsto t^w$ .



En esta sección hemos optado por no incluir algunas demostraciones, pues son bastante tediosas y alargaría demasiado este trabajo. No obstante, en cada resultado se incluye la referencia correspondiente al libro de Maclagan y Sturmfels para que el lector pueda consultar las demostraciones, si así lo desea.

Empezamos definiendo cuáles son los poliedros que constituyen el complejo poliedral. Para  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$ , definimos

$$C_I[\mathbf{w}] = \{\mathbf{w}' \in \mathbb{R}^{n+1} : in_{\mathbf{w}'}(I) = in_{\mathbf{w}}(I)\},$$

y denotamos por  $\overline{C_I[\mathbf{w}]}$  a clausura de  $C_I[\mathbf{w}]$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  para la topología usual.

**Ejemplo 2.3.1.** Sean  $n = 2$ ,  $K = \mathbb{Q}$  y consideramos en  $K$  la valoración 2-ádica. Sea  $I$  el ideal principal generado por  $f = 2x_0^3 + 4x_1^3 + 2x_2^3 + x_0x_1x_2$ . Entonces

$$trop(f)(w_0, w_1, w_2) = \min\{1 + 3w_0, 2 + 3w_1, 1 + 3w_2, w_0 + w_1 + w_2\}.$$

Si consideramos el peso  $\mathbf{w} = \mathbf{0} = (0, 0, 0)$ , entonces  $trop(f)(\mathbf{0}) = 0$  y el mínimo se alcanza en el último término de  $f$ . Por lo tanto,  $in_{\mathbf{w}}(I) = \langle x_0x_1x_2 \rangle$  para el peso elegido. Entonces

$$C_I[\mathbf{w}] = \{(v_0, v_1, v_2) \in \mathbb{R}^3 : v_0 + v_1 + v_2 < \min(3v_0 + 1, 3v_1 + 2, 3v_2 + 1)\},$$

y el poliedro asociado a  $I$  es:

$$\overline{C_I[\mathbf{w}]} = \{(v_0, v_1, v_2) \in \mathbb{R}^3 : v_0 + v_1 + v_2 \leq \min(3v_0 + 1, 3v_1 + 2, 3v_2 + 1)\}.$$

Además, en este sencillo ejemplo podemos observar que la recta (vectorial) generada por el vector  $(1, 1, 1)$  está contenida en el espacio de linealidad de  $\overline{C_I[\mathbf{w}]}$ : si  $(v_0, v_1, v_2) \in \overline{C_I[\mathbf{w}]}$ , entonces para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$  se cumple  $(v_0, v_1, v_2) + \lambda(1, 1, 1) \in \overline{C_I[\mathbf{w}]}$ . En lo que sigue, trabajaremos módulo esa recta.

De aquí en adelante, denotaremos  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$  y  $\mathbb{R}\mathbf{1}$  será la recta vectorial generada por el vector  $\mathbf{1}$ . Para describir adecuadamente el complejo poliedral que estamos construyendo, necesitamos la siguiente definición de Geometría Poliedral:

**Definición 2.3.2.** Sea  $\Gamma$  un subgrupo aditivo de  $\mathbb{R}$ . Un *poliedro  $\Gamma$ -racional* es un poliedro de la forma  $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ , donde  $A \in \mathcal{M}_{d \times n}(\mathbb{Q})$  y  $\mathbf{b} \in \Gamma^d$ .

Nuestro interés se va a centrar en el caso en que  $\Gamma = \Gamma_{\text{val}}$  es el grupo de valores de un cuerpo valorado  $(K, \text{val})$ . Si  $\Gamma = \mathbb{Q}$ , diremos simplemente que  $P$  es racional, en vez de  $\mathbb{Q}$ -racional.

**Proposición 2.3.3.** El conjunto  $\overline{C_I[\mathbf{w}]}$  es un poliedro  $\Gamma_{\text{val}}$ -racional cuyo espacio de linealidad contiene a la recta  $\mathbb{R}\mathbf{1}$ . Si  $in_{\mathbf{w}}(I)$  no es un ideal monomial, entonces existe  $\mathbf{w}' \in \mathbb{R}^{n+1}$  tal que  $in_{\mathbf{w}'}(I)$  es un ideal monomial y  $\overline{C_I[\mathbf{w}]}$  es una cara propia del poliedro  $\overline{C_I[\mathbf{w}]}$ .

*Demostración.* [MS15, Cap. 2, Prop. 2.5.2] □

**Observación 2.3.4.** Por la proposición 2.3.3, la recta  $\mathbb{R}\mathbf{1}$  está contenida en el espacio de linealidad de  $\overline{C_I[\mathbf{w}]}$ . Esto nos permite considerar  $\overline{C_I[\mathbf{w}]}$  como un poliedro en el espacio cociente  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{R}\mathbf{1}$ . De aquí en adelante, lo consideraremos así. Una forma operativa de hacer esto es identificar  $\mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{R}\mathbf{1}$  con  $\mathbb{R}^n$  mediante el isomorfismo

$$(x_0, \dots, x_n) + \mathbb{R}\mathbf{1} \leftrightarrow (x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0).$$

El siguiente teorema es el resultado clave de esta sección:

**Teorema 2.3.5.** El conjunto de los poliedros  $\overline{C_I[\mathbf{w}]}$  cuando  $\mathbf{w}$  varía en  $\mathbb{R}^{n+1}$  constituye un complejo poliedral  $\Gamma_{\text{val}}$ -racional con soporte en el espacio  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{R}\mathbf{1}$ .

La demostración de este teorema se basa en los siguientes resultados:

**Proposición 2.3.6.** Sea  $I$  un ideal homogéneo en  $K[x_0, \dots, x_n]$ . Entonces el conjunto  $\{in_{\mathbf{w}}(I) : \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}\}$  es finito.

*Demostración.* [MS15, Cap. 2, Lema 2.5.4] □

**Observación 2.3.7.** La importancia de este resultado radica en que dado un ideal homogéneo  $I$ , existe un número finito de conjuntos del tipo  $C_I[\mathbf{w}]$  para  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ .

**Definición 2.3.8.** Dada una función polinomial tropical  $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ , denotamos por  $\Sigma_F$  al complejo poliedral menos fino tal que  $F$  es lineal en cada celda de  $\Sigma_F$ .

**Observación 2.3.9.** Sea  $f = \sum_{i=1}^r c_i \mathbf{x}^{\mathbf{u}_i} \in K[x_0, \dots, x_n]$  un polinomio, y sea  $F$  su tropicalización. Si denotamos por  $L_i : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  a la forma afín dada por  $L_i(\mathbf{w}) = \text{val}(c_i) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_i$  para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , entonces  $F = \min\{L_i : 1 \leq i \leq r\}$ . Para cada subconjunto  $J \subset \{1, \dots, r\}$ , sea

$$D_J = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1} : L_i(\mathbf{w}) = L_j(\mathbf{w}) < L_k(\mathbf{w}), \forall i, j \in J, \forall k \notin J\}.$$

Entonces el complejo poliedral  $\Sigma_F$  está formado por los poliedros  $\overline{D_J}$  tales que  $D_J \neq \emptyset$ , y las celdas maximales de  $\Sigma_F$  tienen la forma

$$\overline{\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1} : F(\mathbf{w}) = L_i(\mathbf{w}) \text{ para un único } i, 1 \leq i \leq r\}} = \overline{D_{\{i\}}}.$$

Además, su soporte es  $|\Sigma_F| = \mathbb{R}^{n+1}$ , y es  $\Gamma_{\text{val}}$ -racional, pues cada celda

$$\overline{D_J} = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1} : L_i(\mathbf{w}) = L_j(\mathbf{w}) \leq L_k(\mathbf{w}), \forall i, j \in J, \forall k \notin J\}$$

está definida por un conjunto de ecuaciones con coeficientes en  $\mathbb{Z}$  (los exponentes de los monomios de  $f$ ) y términos independientes del tipo  $\text{val}(c_i) \in \Gamma_{\text{val}}$ .

Sea  $I$  un ideal homogéneo de  $S = K[x_1, \dots, x_n]$ . Vamos a asociar a  $I$  un polinomio a partir del cual recuperaremos el complejo  $\{\overline{C_I[\mathbf{w}]} : \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ . Para ello, consideramos  $I_d$  como subespacio vectorial del  $K$ -espacio vectorial  $S_d$ , cuya dimensión es  $\binom{n+d}{n}$ . En la definición 1.3.17 vimos que  $I_d$  se puede identificar con un punto del Grassmaniano  $G(r, S_d)$ , siendo  $r = \dim_K(I_d)$ . Para ello, se elige una base cualquiera  $\{f_1, \dots, f_r\}$  de  $I_d$ ,

se considera la matriz  $A_d$  cuyas entradas son los coeficientes de los polinomios  $f_i$  en la base  $M_d$  de  $S_d$  formada por todos los monomios de grado  $d$ , y las coordenadas del punto asociado a  $I_d$  son los menores  $\det(A_d^J)$ , donde  $J$  recorre todos los subconjuntos de cardinal  $r$  del conjunto  $M_d$  ( $A_d^J$  denota la submatriz de  $A_d$  de orden  $r \times r$  cuyas filas y columnas están indexadas por el conjunto  $J$ ).

Por la proposición 2.3.6, existe un número  $D \in \mathbb{N}$  tal que cualquier ideal monomial inicial  $in_{\mathbf{w}}(I)$  tiene generadores de grado menor o igual que  $D$ . Definimos el polinomio

$$g := \prod_{d=1}^D g_d, \quad \text{donde} \quad g_d := \sum_{J \subset M_d, \#J=r} \det(A_d^J) \cdot \prod_{\mathbf{x}^u \in J} \mathbf{x}^u \quad (2.3.1)$$

Este polinomio  $g$  es el que vamos a asociar al ideal  $I$ . Como ya comentamos, no depende de la base  $\{f_1, \dots, f_r\}$  elegida. Consideramos ahora la función lineal a trozos  $trop(g) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  definida en (2.1.1), y sea  $\Sigma_{trop(g)}$  el complejo poliedral de la definición 2.3.8.

**Teorema 2.3.10.** Con las definiciones anteriores, si  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$  pertenece al interior de una celda maximal  $\sigma$  de  $\Sigma_{trop(g)}$ , entonces  $\sigma = \overline{C_I[\mathbf{w}]}$ .

*Demostración.* [MS15, Cap. 2, Th. 2.5.7]. □

Ahora podemos demostrar fácilmente el teorema 2.3.5 a partir del teorema 2.3.10.

*Demostración del teorema 2.3.5.* Por la proposición 2.3.6, existe un número finito de conjuntos  $\overline{C_I[\mathbf{w}]}$  cuando  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$ , que son poliedros (por la proposición 2.3.3). Denotamos  $\Sigma(I) = \{\overline{C_I[\mathbf{w}]} : \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ , que es finito. Vamos a probar que este conjunto coincide con el complejo poliedral  $\Sigma_{trop(g)}$ . Para ello, demostraremos que los poliedros de  $\Sigma(I)$  son exactamente los mismos que los de  $\Sigma_{trop(g)}$ , viendo que los dos complejos tienen las mismas celdas maximales y que las caras de dichas celdas son exactamente el resto de poliedros de  $\Sigma(I)$  (pues las celdas de  $\Sigma_{trop(g)}$  son exactamente las celdas maximales y las caras de estas).

En primer lugar, veamos cuáles son las celdas maximales de  $\Sigma(I)$ . Por la proposición 2.3.3, dado  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$ , si  $in_{\mathbf{w}}(I)$  no es monomial, entonces existe  $\mathbf{w}' \in \mathbb{R}^{n+1}$  tal que  $in_{\mathbf{w}'}(I)$  es monomial, y  $\overline{C_I[\mathbf{w}]}$  es cara propia de  $\overline{C_I[\mathbf{w}]}$ . Como  $in_{\mathbf{w}'}(I)$  es monomial, para cada  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$  existe  $\epsilon > 0$  tal que  $in_{\mathbf{w}'+\epsilon\mathbf{v}}(I) = in_{\mathbf{w}'}(I)$ , luego  $\overline{C_I[\mathbf{w}]}$  tiene dimensión  $n+1$ . Por lo tanto, las celdas maximales de  $\Sigma(I)$  son exactamente las de la forma  $\overline{C_I[\mathbf{w}]}$  tales que  $in_{\mathbf{w}'}(I)$  es monomial.

Por el teorema 2.3.10, las celdas maximales de  $\Sigma_{trop(g)}$  son de la forma  $\overline{C_I[\mathbf{w}]}$ . Además, todas las celdas maximales de  $\Sigma(I)$  deben serlo también de  $\Sigma_{trop(g)}$ . Esto es porque en dimensión  $n+1$ , el interior relativo de un poliedro coincide con su interior topológico. Por lo tanto, dada una celda maximal  $\overline{C_I[\mathbf{w}]} \in \Sigma(I)$ ,  $\mathbf{w}$  está en su interior. Como  $|\Sigma_{trop(g)}| = \mathbb{R}^{n+1}$ , existe una celda maximal de  $\Sigma_{trop(g)}$  que contiene a  $\mathbf{w}$  y, por lo anterior, esta celda es de la forma  $\overline{C_I[\mathbf{w}]}$ . Pero entonces  $C_I[\mathbf{w}] \cap C_I[\mathbf{w}'] \neq \emptyset$ , y esto solo puede ser si  $C_I[\mathbf{w}] = C_I[\mathbf{w}]$ .

Veamos ahora que el resto de celdas deben coincidir también. Para ello, probaremos que

todas las caras propias de alguna celda maximal de  $\Sigma(I)$  (o de  $\Sigma_{trop(g)}$ , pues son las mismas) son de la forma  $\overline{C_I[\mathbf{w}']}$  para algún  $\mathbf{w}' \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Sea  $\sigma \in \Sigma_{trop(g)}$  una celda no maximal, y fijamos  $\mathbf{w} \in \text{relint}(\sigma)$ . Por la proposición 2.3.3,  $\overline{C_I[\mathbf{w}]}$  es cara propia de alguna celda maximal (pues tiene dimensión menor que  $n+1$ ). Entonces  $\sigma$  y  $\overline{C_I[\mathbf{w}]}$  son celdas de  $\Sigma_{trop(g)}$  con interior relativo no disjunto, luego coinciden.  $\square$

**Definición 2.3.11.** El *complejo de Gröbner*  $\Sigma(I)$  de un ideal homogéneo  $I$  en  $K[x_0, \dots, x_n]$  es el complejo poliedral que hemos construido en los teoremas 2.3.5 y 2.3.10. Este complejo poliedral está constituido por los poliedros  $\overline{C_I[\mathbf{w}]}/\mathbb{R}\mathbf{1}$  cuando  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$  (está contenido en  $\mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{R}\mathbf{1}$ ).

**Observación 2.3.12.** Como se ve en el teorema, el complejo poliedral  $\Sigma(I)$  coincide con  $\Sigma_{trop(g)}$ , donde  $g$  es el polinomio auxiliar (2.3.1) que representa el ideal  $I$ . Concretamente,  $\Sigma(I)$  consiste en las regiones en las que el polinomio tropical  $trop(g)$  es lineal. Estas regiones se consideran como poliedros en  $\mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{R}\mathbf{1}$ . En el caso especial en que  $I = \langle f \rangle$  es un ideal principal, generado por un polinomio homogéneo  $f$  de grado  $d$ , podemos tomar  $D = d$ . Bajo estas hipótesis,  $g_1 = \dots = g_{d-1} = 1$  y  $g = g_d = f$  en (2.3.1).

**Ejemplo 2.3.13.** Sean  $n = 2$ ,  $K = \mathbb{C}\{\{t\}\}$ , y consideramos el ideal homogéneo  $I$  generado por el polinomio (homogéneo)

$$f = tx_1^2 + 2x_1x_2 + 3tx_2^2 + 4x_0x_1 + 5x_0x_2 + 6tx_0^2 \in K[x_0, x_1, x_2].$$

La tropicalización del polinomio  $f$  es

$$trop(f)(w_0, w_1, w_2) = \min\{\underbrace{1 + 2w_1}_{L_1(\mathbf{w})}, \underbrace{w_1 + w_2}_{L_2(\mathbf{w})}, \underbrace{1 + 2w_2}_{L_3(\mathbf{w})}, \underbrace{w_0 + w_1}_{L_4(\mathbf{w})}, \underbrace{w_0 + w_2}_{L_5(\mathbf{w})}, \underbrace{1 + 2w_0}_{L_6(\mathbf{w})}\}.$$

El complejo de Gröbner de  $I$ ,  $\Sigma(I)$ , es el complejo de Gröbner en  $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}\mathbf{1}$  representado en la figura 2.3.1a. Las celdas de dimensión 0 se han representado en rojo y las de dimensión 1 en azul. Veamos cómo se obtienen algunas de estas celdas.

Por ejemplo, si consideramos el subconjunto  $J = \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , entonces

$$D_J = \{\mathbf{w} = (w_0, w_1, w_2) \in \mathbb{R}^3 : L_1(\mathbf{w}) = L_2(\mathbf{w}) < L_k(\mathbf{w}), \forall k \geq 3\}.$$

Por tanto, el conjunto  $D_{\{1,2\}}$  se puede escribir como

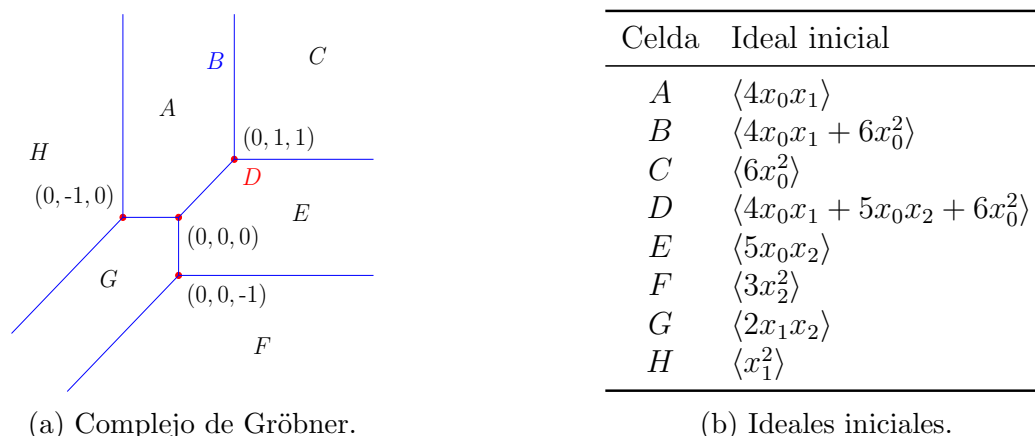
$$D_{\{1,2\}} = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 : w_1 = w_2 - 1, w_2 < w_0\} = \{(w_0, w_2 - 1, w_2) \in \mathbb{R}^3 : w_0 > w_2\}.$$

Como el espacio de linealidad de  $D_J$  contiene a la recta  $\mathbb{R}\mathbf{1}$ , considerando  $D_J \subset \mathbb{R}^3/\mathbb{R}\mathbf{1}$ , podemos identificar

$$D_J = \{(0, w - w' - 1, w - w') \in \mathbb{R}^3 : w' < w\} = \{(0, w - 1, w) \in \mathbb{R}^3 : w < 0\} = H \cap G.$$

Y para cada  $\mathbf{w} \in D_{\{1,2\}}$ , es claro que  $in_{\mathbf{w}}(f) = \overline{t^{-1}t} \cdot x_1^2 + \overline{t^{-0} \cdot 2} \cdot x_1x_2 = x_1^2 + 2x_1x_2$ , luego  $in_{\mathbf{w}}(I) = \langle x_1^2 + 2x_1x_2 \rangle$ . La celda correspondiente de  $\Sigma(I)$  es el rayo que representamos como  $\{(0, w - 1, w) \in \mathbb{R}^3 : w \leq 0\}$ .

El ideal  $I$  tiene 19 ideales iniciales distintos, correspondientes a las distintas celdas de  $\Sigma(I)$ . Hay seis celdas de dimensión 2, nueve celdas de dimensión 1 y cuatro celdas de dimensión 0. En la tabla 2.3.1b se presentan ocho de los 19 ideales iniciales, correspondientes a las etiquetas de la figura 2.3.1a.



(a) Complejo de Gröbner.

(b) Ideales iniciales.

Figura 2.3.1: Complejo de Gröbner e ideales iniciales del ejemplo 2.3.13.

## 2.4. Bases tropicales

En las secciones previas hemos introducido las bases de Gröbner y los complejos de Gröbner para ideales homogéneos en el anillo de polinomios  $K[x_0, x_1, \dots, x_n]$ . Ahora vamos a cambiar de espacio ambiente y consideraremos ideales en el anillo de polinomios de Laurent  $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ . En este caso no hay una noción intrínseca de base de Gröbner; no obstante, es posible definir un concepto análogo, las bases tropicales.

Como en el resto de este capítulo, asumiremos que la valoración en el cuerpo  $K$  admite una escisión  $w \mapsto t^w$ , con  $\text{val}(t^w) = w$  para cada  $w \in \Gamma_{\text{val}}$ . Las nociones de tropicalización, forma inicial e ideal inicial las mismas que en la sección 2.1, pero adaptadas al caso del anillo de polinomios de Laurent.

**Definición 2.4.1.** Sean  $f = \sum_{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n} c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  un polinomio de Laurent,  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  un vector peso e  $I$  un ideal en el anillo de polinomios de Laurent.

(1) La *tropicalización* de  $f$  es la función lineal a trozos  $\text{trop}(f) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\text{trop}(f)(\mathbf{w}) = \min\{\text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} : \mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n \text{ y } c_{\mathbf{u}} \neq 0\} \quad (2.4.1)$$

(2) La *forma inicial* de  $f$  respecto de  $\mathbf{w}$  es

$$\text{in}_{\mathbf{w}}(f) = \sum_{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n : \text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = W} \overline{t^{-\text{val}(c_{\mathbf{u}})} c_{\mathbf{u}}} \cdot \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in \mathbb{k}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}], \quad (2.4.2)$$

donde  $W = \text{trop}(f)(\mathbf{w}) = \min\{\text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} : \mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n\}$ .

(3) El *ideal inicial* de  $I$  respecto de  $\mathbf{w}$  es

$$\text{in}_{\mathbf{w}}(I) = \langle \text{in}_{\mathbf{w}}(f) : f \in I \rangle \subset \mathbb{k}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}] \quad (2.4.3)$$

La diferencia principal con el caso del anillo de polinomios ordinarios es la siguiente: para elecciones genéricas de  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ , la forma inicial  $in_{\mathbf{w}}(f)$  es una unidad en  $\mathbb{k}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ , y el ideal inicial  $in_{\mathbf{w}}(\langle f \rangle)$  es, por tanto, el anillo  $\mathbb{k}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ . La Geometría Tropical se centrará en estudiar los vectores peso  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  “especiales” para los que el ideal inicial  $in_{\mathbf{w}}(I)$  es un ideal propio del anillo  $\mathbb{k}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ .

Para poder estudiar estos ideales iniciales, vamos a trabajar con polinomios homogéneos como en la sección 2.2. Al igual que en la definición 1.3.10, dado un ideal  $I \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ , definimos la homogeneización de  $I$ ,  $I_{proj}$ , como el ideal de  $K[x_0, x_1, \dots, x_n]$  generado por los polinomios

$$\tilde{f} = x_0^m \cdot f\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right),$$

donde  $f \in I \cap K[x_1, \dots, x_n]$  y  $m = \deg(f)$  es el entero más pequeño que hace que los denominadores desaparezcan.

Los ideales iniciales  $in_{\mathbf{w}}(I)$  de un ideal de Laurent  $I \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  se pueden calcular mediante los ideales iniciales de su homogeneización  $I_{proj}$  de la siguiente forma. Los vectores peso para el ideal  $I_{proj}$  se pueden considerar en el espacio cociente  $\mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{R}\mathbf{1}$ , que identificamos con  $\mathbb{R}^n$  vía el isomorfismo  $\mathbf{w} \leftrightarrow (0, \mathbf{w}) + \mathbb{R}\mathbf{1}$ .

**Proposición 2.4.2.** Sea  $I$  un ideal en el anillo de polinomios de Laurent  $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ , y fijamos  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ . Entonces  $in_{\mathbf{w}}(I)$  es la imagen de  $in_{(0, \mathbf{w})}(I_{proj})$  en  $\mathbb{k}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  obtenida fijando  $x_0 = 1$ . De hecho, si  $f \in I \cap K[x_1, \dots, x_n]$ , entonces

$$in_{(0, \mathbf{w})}(\tilde{f})|_{x_0=1} = in_{\mathbf{w}}(f).$$

Cada elemento de  $in_{\mathbf{w}}(I)$  es de la forma  $\mathbf{x}^{\mathbf{u}}g$ , donde  $\mathbf{x}^{\mathbf{u}}$  es un monomio de Laurent y  $g = f(1, x_1, \dots, x_n)$  para algún polinomio  $f \in in_{(0, \mathbf{w})}(I_{proj})$ .

*Demostración.* Sea  $f = \sum c_{\mathbf{u}}\mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in I \cap K[x_1, \dots, x_n]$ , y sea  $\tilde{f} = \sum c_{\mathbf{u}}\mathbf{x}^{\mathbf{u}}x_0^{j_{\mathbf{u}}}$  su homogeneización, donde  $j_{\mathbf{u}} = (\max_{c_{\mathbf{v}} \neq 0} |\mathbf{v}|) - |\mathbf{u}|$  para cada  $\mathbf{u} \in \text{supp}(f)$ . Denotamos

$$\begin{aligned} W &:= trop(f)(\mathbf{w}) = \min\{\text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}\} \\ &= \min\{\text{val}(c_{\mathbf{u}}) + (0, \mathbf{w}) \cdot (j_{\mathbf{u}}, \mathbf{u})\} = trop(\tilde{f})((0, \mathbf{w})). \end{aligned}$$

Entonces  $in_{(0, \mathbf{w})}(\tilde{f}) = \sum_{\text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = W} \overline{c_{\mathbf{u}}t^{-\text{val}(c_{\mathbf{u}})}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}}x_0^{j_{\mathbf{u}}}$  en  $\mathbb{k}[x_0, \dots, x_n]$  y se cumple

$$in_{(0, \mathbf{w})}(\tilde{f})|_{x_0=1} = \sum_{\text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = W} \overline{c_{\mathbf{u}}t^{-\text{val}(c_{\mathbf{u}})}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}} = in_{\mathbf{w}}(f). \quad (2.4.4)$$

Multiplicando por monomios si es necesario, podemos encontrar un conjunto finito de polinomios  $\{f_1, \dots, f_s\}$  en  $K[x_1, \dots, x_n] \cap I$  tal que  $in_{\mathbf{w}}(I) = \langle in_{\mathbf{w}}(f_1), \dots, in_{\mathbf{w}}(f_s) \rangle$ . Como  $in_{\mathbf{w}}(\tilde{f}_i)|_{x_0=1} = in_{\mathbf{w}}(f_i)$  para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq s$ , entonces  $in_{\mathbf{w}}(I) \subset in_{(0, \mathbf{w})}(I_{proj})|_{x_0=1}$ .

Para probar la otra inclusión, notemos que si  $g$  es un polinomio homogéneo de  $I_{proj}$ , entonces  $g = x_0^j \cdot \tilde{f}$  para algún  $j$ , donde  $f(x) = g(1, x)$ . Por el teorema 2.2.2 podemos escoger

una base de Gröbner homogénea para  $I_{proj}$ . Por lo tanto, de (2.4.4) se deduce también la otra inclusión.

La última afirmación de la proposición es cierta ya que cada elemento de un ideal  $J$  en  $\mathbb{k}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  es producto de un monomio de Laurent por un elemento de  $J \cap \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ .  $\square$

**Proposición 2.4.3.** Sean  $I$  un ideal de  $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  y  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ .

- (1) Si  $g \in in_{\mathbf{w}}(I)$ , entonces  $g = in_{\mathbf{w}}(h)$  para algún  $h \in I$ .
- (2) Si  $in_{\mathbf{v}}(in_{\mathbf{w}}(I)) = in_{\mathbf{w}}(I)$  para algún  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ , entonces  $in_{\mathbf{w}}(I)$  es homogéneo con respecto a la graduación dada por  $\deg(x_i) = v_i$ .
- (3) Si  $f, g \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ , entonces  $in_{\mathbf{w}}(fg) = in_{\mathbf{w}}(f) \cdot in_{\mathbf{w}}(g)$ .

*Demostración.* (1) Sea  $g \in in_{\mathbf{w}}(I)$ . Por la proposición 2.4.2,  $g = \mathbf{x}^{\mathbf{u}} f(1, x_1, \dots, x_n)$  para algún  $f \in in_{(0, \mathbf{w})}(I_{proj})$ . Y por el teorema 2.2.2, existe un polinomio  $h \in I_{proj}$  tal que  $in_{(0, \mathbf{w})}(\mathbf{x}^{\mathbf{u}} h) = g$ , como queríamos probar.

- (2) Supongamos que  $in_{\mathbf{v}}(in_{\mathbf{w}}(I)) = in_{\mathbf{w}}(I)$ . Entonces  $in_{\mathbf{w}}(I)$  está generado por los polinomios  $in_{\mathbf{v}}(g)$  tales que  $g \in in_{\mathbf{w}}(I)$ . Para cada  $g = \sum a_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in \mathbb{k}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ , la forma inicial  $in_{\mathbf{v}}(g)$  es un polinomio  $\mathbf{v}$ -homogéneo de grado  $W = \min_{a_{\mathbf{u}} \neq 0} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})$ . Por lo tanto,  $in_{\mathbf{w}}(I)$  tiene un conjunto de generadores homogéneos para la graduación dada por el vector  $\mathbf{v}$ .
- (3) Sean  $f = \sum_{\mathbf{u}} c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}}$ ,  $g = \sum_{\mathbf{u}} d_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}}$ . Entonces  $fg = \sum_{\mathbf{v}} e_{\mathbf{v}} \mathbf{x}^{\mathbf{v}}$ , donde  $e_{\mathbf{v}} = \sum_{\mathbf{u} + \mathbf{u}' = \mathbf{v}} c_{\mathbf{u}} d_{\mathbf{u}'}$ . Sean  $W_1 = trop(f)(\mathbf{w})$  y  $W_2 = trop(g)(\mathbf{w})$ , entonces es fácil comprobar  $trop(fg)(\mathbf{w}) = W_1 + W_2$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 in_{\mathbf{w}}(fg) &= \sum_{\mathbf{v}: \text{val}(e_{\mathbf{v}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = W_1 + W_2} \overline{e_{\mathbf{v}} t^{-\text{val}(e_{\mathbf{v}})}} \cdot \mathbf{x}^{\mathbf{v}} \\
 &= \sum_{\mathbf{v}: \text{val}(e_{\mathbf{v}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = W_1 + W_2} \left( \sum_{\mathbf{u} + \mathbf{u}' = \mathbf{v}} \overline{c_{\mathbf{u}} d_{\mathbf{u}'} t^{-\text{val}(c_{\mathbf{u}})} t^{-\text{val}(d_{\mathbf{u}'})}} \cdot \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{x}^{\mathbf{u}'} \right) \\
 &= \left( \sum_{\mathbf{u}: \text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = W_1} \overline{c_{\mathbf{u}} t^{-\text{val}(c_{\mathbf{u}})}} \cdot \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \right) \cdot \left( \sum_{\mathbf{u}': \text{val}(d_{\mathbf{u}'}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}' = W_2} \overline{d_{\mathbf{u}'} t^{-\text{val}(d_{\mathbf{u}'})}} \cdot \mathbf{x}^{\mathbf{u}'} \right) \\
 &= in_{\mathbf{w}}(f) \cdot in_{\mathbf{w}}(g)
 \end{aligned}$$

$\square$

Con la definición de las formas iniciales en  $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ , podemos definir ahora la noción de base tropical. Para dar esta definición, podemos suprimir la hipótesis sobre la valoración  $\text{val}$ . Aquí  $K$  puede ser cualquier cuerpo valorado.

**Definición 2.4.4.** Sea  $I$  un ideal en  $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ , donde  $K$  es un cuerpo valorado arbitrario. Un conjunto de generadores finito  $\mathcal{T}$  de  $I$  es una *base tropical* de  $I$  si, para cada vector  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ , existe un polinomio  $f \in I$  para el que el mínimo en  $trop(f)(\mathbf{w})$  se alcanza una única vez si, y solo si, existe  $g \in \mathcal{T}$  para el que el mínimo en  $trop(g)(\mathbf{w})$  se alcanza una única vez.

**Observación 2.4.5.** Si la valoración en  $K$  escinde, entonces la definición anterior admite una reformulación en términos de formas iniciales. Un sistema de generadores  $\mathcal{T}$  de  $I$  es una base tropical si, y solo si, para cada  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ , el ideal inicial  $in_{\mathbf{w}}(I)$  contiene una unidad si, y solo si, el conjunto finito  $in_{\mathbf{w}}(\mathcal{T}) = \{in_{\mathbf{w}}(f) : f \in \mathcal{T}\}$  contiene una unidad.

**Ejemplo 2.4.6.** Si  $f \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ , entonces  $\{f\}$  es una base tropical del ideal  $I = \langle f \rangle$  que genera. Supongamos que  $in_{\mathbf{w}}(I)$  contiene una unidad, entonces existe  $g \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  tal que  $in_{\mathbf{w}}(fg) = in_{\mathbf{w}}(f) \cdot in_{\mathbf{w}}(g)$  es una unidad, luego  $in_{\mathbf{w}}(f)$  es una unidad.

Nuestro objetivo en esta sección es demostrar que para cada ideal  $I \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  existe una base tropical de  $I$  finita. La prueba de este resultado requiere pasar a una extensión del cuerpo  $K$  en la que la valoración escinda. Veamos primero que esto no crea ningún problema. Primero, enunciaremos un lema técnico de Álgebra Lineal que utilizaremos después.

Para cada matriz  $A \in \mathcal{M}_{r \times s}(K)$  de rango  $r$  y cada subconjunto de índices  $J \subset \{1, \dots, s\}$ , denotamos por  $A^J$  a la submatriz de orden  $r \times r$  de  $A$  cuyas columnas están indexadas por  $J$ . En el lema 2.4.7, la única hipótesis necesaria sobre el cuerpo  $K$  es que sea un cuerpo valorado.

**Lema 2.4.7.** Sea  $A \in \mathcal{M}_{r \times s}(K)$  una matriz de orden  $r \times s$  con coeficientes en  $K$  y de rango  $r$ , y sea  $\tilde{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^s$  fijo. Entonces existen una matriz  $U \in GL(r, K)$  y un conjunto de índices  $J = \{l_1, \dots, l_r\}$  tales que  $(UA)^J$  es la matriz identidad y  $\text{val}((UA)_{ij}) + \tilde{w}_j \geq \tilde{w}_{l_i}$  para cada  $j \notin J$ .

*Demostración.* [MS15, Cap. 2, Lema 2.5.6]. □

**Proposición 2.4.8.** Sea  $L/K$  una extensión de cuerpos valorada, con ninguna hipótesis adicional sobre los cuerpos  $K$  y  $L$ . Sea  $I \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  un ideal, y denotamos por  $I_L = IL[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  a su extensión en  $L[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ . Si existe una base tropical de  $I_L$ , entonces  $I_L$  admite una base tropical tal que los coeficientes de los polinomios de dicha base pertenecen a  $K$ .

*Demostración.* Sea  $\mathcal{T}_L$  una base tropical de  $I_L$ . Tenemos que transformar  $\mathcal{T}_L$  en una base tropical de  $I_L$  formada por polinomios con coeficientes en  $K$ . Fijamos un polinomio  $g \in \mathcal{T}_L$ , y sea

$$C_g := \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \text{el mínimo en } \text{trop}(g)(\mathbf{w}) \text{ se alcanza una única vez}\}.$$

Vamos a construir un conjunto finito de polinomios  $f \in I$  tales que para cada  $\mathbf{w} \in C_g$  existe un polinomio  $h \in I$  de modo que el mínimo en  $\text{trop}(h)(\mathbf{w})$  se alcanza una única vez si, y solo si, se alcanza una única vez para algún  $f$  de este conjunto.

Para este  $g \in \mathcal{T}_L$ , existen  $f_1, \dots, f_r \in I$  tales que  $g$  pertenece al  $L$ -subespacio vectorial de  $I_L$  generado por  $f_1, \dots, f_r$ , y podemos suponer que  $f_1, \dots, f_r$  son linealmente independientes sobre  $L$  (luego también sobre  $K$ ). Sea  $\mathcal{U} = \{\mathbf{x}^{\mathbf{u}_1}, \dots, \mathbf{x}^{\mathbf{u}_r}\}$  el conjunto formado por los monomios que aparecen en los polinomios  $f_1, \dots, f_r$ , y sea  $A \in \mathcal{M}_{r \times s}(K)$  la matriz



cuyas filas son los coeficientes de  $f_1, \dots, f_r$  en  $\mathcal{U}$ .

Como  $f_1, \dots, f_r$  son linealmente independientes,  $rg(A) = r$ . Por lo tanto, para cada subconjunto de  $r$  columnas,  $J = \{l_1, \dots, l_r\} \subset \{1, \dots, s\}$ , tal que  $\det(A^J) \neq 0$ , existe una única matriz invertible  $U \in \mathcal{M}_{r \times r}(K)$  de modo que  $B = UA$  verifica  $B^J = I_r$  (identidad de orden  $r$ ). Obviamente, hay un número finito de tales matrices  $B$ . Además, dado  $\mathbf{w} \in C_g$ , denotamos  $\mathbf{w}' = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_s)$ . Por el lema 2.4.7, existe una matriz  $B$  con la propiedad anterior, y  $B$  es tal que, si reordenamos  $\mathcal{U}$  para que  $J = \{1, \dots, r\}$ , entonces  $\text{val}(B_{ij}) + w'_j \geq w'_i$  para  $j > r$ .

Las filas de  $B$  son los vectores de coeficientes en  $\mathcal{U}$  de otra base  $\{\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_r\}$  de  $\mathcal{L}(f_1, \dots, f_r)$ , donde

$$\tilde{f}_i = \mathbf{x}^{\mathbf{u}_i} + \sum_{j=r+1}^s B_{ij} \mathbf{x}^{\mathbf{u}_j} \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}].$$

Por lo tanto, puesto que  $g \in \mathcal{L}(f_1, \dots, f_r)$ , se tiene  $g = \sum_{j=1}^s a_j \mathbf{x}^{\mathbf{u}_j}$ , donde  $a_j = \sum_{i=1}^r a_i B_{ij}$  para  $j > r$ .

Si  $j > r$ , puesto que  $\text{val}(B_{ij}) + w'_j \geq w'_i$ , y  $\text{val}(a_j) \geq \min_{1 \leq i \leq r} \{\text{val}(a_i) + \text{val}(B_{ij})\}$ , se tiene

$$\begin{aligned} \text{val}(a_j) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_j &\geq \min_{1 \leq i \leq r} \{\text{val}(a_i) + \text{val}(B_{ij})\} + w'_j \\ &\geq \min_{1 \leq i \leq r} \{\text{val}(a_i) + w'_i\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, como el mínimo en  $\text{trop}(g)(\mathbf{w})$  se alcanza en un único término, dicho término es del tipo  $\lambda_{i_0} \mathbf{x}^{\mathbf{u}_{i_0}}$  con  $1 \leq i_0 \leq r$ , es decir,

$$\text{val}(a_j) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_j > \text{val}(a_{i_0}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_{i_0} \text{ para cada } j \neq i_0.$$

Consideramos el polinomio

$$\tilde{f}_{i_0} = \mathbf{x}^{\mathbf{u}_{i_0}} + \sum_{j=r+1}^s B_{i_0,j} \mathbf{x}^{\mathbf{u}_j}.$$

Por hipótesis,  $\text{val}(B_{i_0,j}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_j \geq \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_{i_0}$ . Veamos que, de hecho,

$$\text{val}(B_{i_0,j}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_j > \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_{i_0} \text{ para todo } j > r,$$

con lo que tendremos que el mínimo en  $\text{trop}(\tilde{f}_{i_0})(\mathbf{w})$  se alcanza únicamente en este término. Si se tuviese  $\text{val}(B_{i_0,j}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_j = \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_{i_0}$  para algún  $j > r$ , entonces para cada  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $i \neq i_0$ ,

$$\begin{aligned} \text{val}(a_i) + \text{val}(B_{ij}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_j &\geq \text{val}(a_i) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_i \\ &> \text{val}(a_{i_0}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_i \\ &= \text{val}(a_{i_0}) + \text{val}(B_{i_0,j}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_j. \end{aligned}$$

La desigualdad estricta se tiene porque el mínimo en  $\text{trop}(g)(\mathbf{w})$  se alcanza únicamente en  $\mathbf{u}_{i_0}$ , luego el mínimo de  $\min_{1 \leq i \leq r} \{\text{val}(a_i) + \text{val}(B_{ij})\}$  se alcanza únicamente en  $i_0$ . Entonces,

para  $j > r$ ,

$$\begin{aligned} \text{val}(a_j) &= \text{val}\left(\sum_{i=1}^r a_i B_{ij}\right) = \text{val}(a_{i_0}) + \text{val}(B_{i_0,j}), \text{ luego} \\ \text{val}(a_j) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_j &= \text{val}(a_{i_0}) + \text{val}(B_{i_0,j}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_j = \text{val}(a_{i_0}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_{i_0}, \end{aligned}$$

y esto está en contradicción con el hecho de que el mínimo en  $\text{trop}(g)(\mathbf{w})$  es único.

En resumen, para cada  $\mathbf{w} \in C_g$  hemos construido un polinomio  $\tilde{f}_{i_0} \in I$  tal que el mínimo en  $\text{trop}(\tilde{f}_{i_0})(\mathbf{w})$  es único. Como cada uno de estos polinomios  $\tilde{f}_{i_0}$  depende únicamente de la matriz  $B$ , y hay un número finito de tales matrices  $B$ , hemos construido una base tropical finita de  $I_L$  cuyos elementos pertenecen a  $I$ .  $\square$

**Teorema 2.4.9.** Sea  $K$  un cuerpo valorado arbitrario. Cada ideal  $I$  en  $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  admite una base tropical finita.

*Demostración.* Consideramos primero el caso en que la valoración en  $K$  admite una escisión  $w \mapsto t^w$ , de modo que podemos aplicar la teoría de Gröbner de las secciones 2.2 y 2.3. Sea  $I_{proj}$  la homogeneización del ideal  $I$ . Su complejo de Gröbner  $\Sigma(I_{proj})$  está constituido por un conjunto finito de poliedros  $\sigma$  en  $\mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{R}\mathbf{1}$ . Para cada  $\sigma \in \Sigma(I_{proj})$ , consideramos un punto  $(0, \mathbf{w}_\sigma) \in \text{relint}(\sigma)$ . Por la definición de  $\Sigma(I_{proj})$ , el ideal inicial  $\text{in}_{(0, \mathbf{w}_\sigma)}(I_{proj})$  depende únicamente de  $\sigma$ , no de la elección de  $\mathbf{w}_\sigma$ . Como  $\text{in}_{\mathbf{w}_\sigma}(I) = \text{in}_{(0, \mathbf{w}_\sigma)}(I_{proj})|_{x_0=1}$ , entonces  $\text{in}_{\mathbf{w}_\sigma}(I)$  depende únicamente de la celda  $\sigma$ .

Por la proposición 2.2.6, para cada  $\mathbf{w}_\sigma$  existe  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$  tal que el ideal  $\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{(0, \mathbf{w}_\sigma)}(I_{proj}))$  es monomial y, por el corolario 2.2.10, existe  $\epsilon > 0$  tal que si  $\mathbf{w}'_\sigma = (0, \mathbf{w}_\sigma) + \epsilon \mathbf{v}$ , entonces

$$\text{in}_{\mathbf{w}'_\sigma}(I_{proj}) = \text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{(0, \mathbf{w}_\sigma)}(I_{proj})).$$

Sea  $\mathbf{w}_\sigma$  tal que  $(0, \mathbf{w}_\sigma)$  pertenece al interior relativo de una celda maximal de  $\Sigma(I_{proj})$ , es decir,  $\text{in}_{\mathbf{w}_\sigma}(I) = \langle 1 \rangle$ . Entonces existe un monomio  $\mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in \text{in}_{(0, \mathbf{w}_\sigma)}(I_{proj})$ . Por lo tanto,  $\mathbf{x}^{\mathbf{u}} = \text{in}_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}^{\mathbf{u}}) \in \text{in}_{\mathbf{w}'_\sigma}(I_{proj})$ . Por el teorema 2.2.8, aplicado a  $\overline{\mathbf{x}}^{\mathbf{u}}$  (clase módulo  $(I_{proj})_d$ ,  $d = \deg(\mathbf{x}^{\mathbf{u}})$ ), existe  $f_\sigma \in I_{proj}$  tal que si  $g_\sigma = \mathbf{x}^{\mathbf{u}} - f_\sigma$ , entonces para todo  $\mathbf{u}' \in \text{supp}(g_\sigma)$ ,  $\mathbf{x}^{\mathbf{u}'} \notin \text{in}_{\mathbf{w}'_\sigma}(I_{proj})$ . Veamos que para cualquier  $(0, \mathbf{w}) \in \text{relint}(\sigma)$  tenemos  $\text{in}_{(0, \mathbf{w})}(f_\sigma) = \mathbf{x}^{\mathbf{u}}$ . Si no fuera así, entonces hay dos opciones:

- $\mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in \text{supp}(\text{in}_{(0, \mathbf{w})}(f_\sigma))$ . Entonces  $\text{in}_{(0, \mathbf{w})}(f_\sigma) = \mathbf{x}^{\mathbf{u}} + \sum_{\mathbf{u}'} c_{\mathbf{u}'} \mathbf{x}^{\mathbf{u}'}$ , donde en la suma anterior aparecen algunos de los  $\mathbf{u}' \in \text{supp}(f_\sigma)$ , y para cada uno de los sumandos se verifica  $\mathbf{x}^{\mathbf{u}'} \notin \text{in}_{\mathbf{w}'_\sigma}(I_{proj})$ . Por lo tanto,  $\text{in}_{(0, \mathbf{w})}(f_\sigma) - \mathbf{x}^{\mathbf{u}} = \sum_{\mathbf{u}'} c_{\mathbf{u}'} \mathbf{x}^{\mathbf{u}'}$ , luego

$$\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{(0, \mathbf{w})}(f_\sigma) - \mathbf{x}^{\mathbf{u}}) = \sum_{\mathbf{u}'} a_{\mathbf{u}'} \mathbf{x}^{\mathbf{u}'} \notin \text{in}_{\mathbf{w}'_\sigma}(I_{proj}), \text{ por ser } \text{in}_{\mathbf{w}'_\sigma}(I_{proj}) \text{ monomial.}$$

Y esto es absurdo, pues  $\text{in}_{(0, \mathbf{w})}(f_\sigma) \in \text{in}_{(0, \mathbf{w}_\sigma)}(I_{proj})$ , luego  $\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{(0, \mathbf{w})}(f_\sigma) - \mathbf{x}^{\mathbf{u}}) \in \text{in}_{(0, \mathbf{w}_\sigma)}(I_{proj})$ .

- $\mathbf{x}^{\mathbf{u}} \notin \text{supp}(\text{in}_{(0, \mathbf{w})}(f_\sigma))$ . Entonces  $\text{in}_{(0, \mathbf{w})}(f_\sigma) = \sum_{\mathbf{u}'} c_{\mathbf{u}'} \mathbf{x}^{\mathbf{u}'}$ , donde los  $\mathbf{u}'$  tienen las mismas propiedades que en el primer caso. Por lo tanto,

$$\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{(0, \mathbf{w})}(f_\sigma)) = \sum_{\mathbf{u}'} a_{\mathbf{u}'} \mathbf{x}^{\mathbf{u}'} \notin \text{in}_{\mathbf{w}'_\sigma}(I_{proj}), \text{ por ser } \text{in}_{\mathbf{w}'_\sigma}(I_{proj}) \text{ monomial.}$$

Y esto es absurdo, pues  $\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{(0, \mathbf{w})}(f_\sigma)) \in \text{in}_{\mathbf{w}}(\text{in}_{(0, \mathbf{w}_\sigma)}(I_{proj})) = \text{in}_{\mathbf{w}'_\sigma}(I_{proj})$ .

Ponemos  $f'_\sigma = f_\sigma|_{x_0=1} \in I$ , entonces  $in_{\mathbf{w}}(f'_\sigma)$  es una unidad. Sea  $\mathcal{G}$  un sistema de generadores de  $I$ , y definimos

$$\mathcal{T} = \mathcal{G} \cup \{f'_\sigma : \sigma \in \Sigma(I_{proj}) \text{ es celda maximal}\}.$$

Consideramos  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ . Existe  $\sigma \in \Sigma(I_{proj})$  tal que  $(0, \mathbf{w}) \in relint(\sigma)$ . Si  $in_{\mathbf{w}}(I) = \langle 1 \rangle$ , entonces  $in_{\mathbf{w}}(f'_\sigma)$  es una unidad para el correspondiente  $f'_\sigma \in \mathcal{T}$ . Por tanto,  $in_{\mathbf{w}}(I) = \langle 1 \rangle$  si, y solo si,  $in_{\mathbf{w}}(\mathcal{T})$  contiene una unidad. Es decir,  $\mathcal{T}$  es una base tropical finita de  $I$ .

Si  $K$  es un cuerpo arbitrario, podemos considerar una extensión de cuerpos valorada  $L/K$  tal que la valoración en  $L$  escinde,  $w \mapsto t^w$ . Según la proposición 1.1.22, es suficiente considerar  $L = \overline{K}$  (la clausura algebraica de  $K$ ). Aplicando el caso anterior a  $I_L = IL[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ , existe una base tropical finita  $\mathcal{T}_L$  de  $I_L$ . Por la proposición 2.4.8, existe otra base tropical finita  $\mathcal{T}'_L$  de  $I_L$  con coeficientes en  $K$ , y veamos que esta base tropical de  $I_L$  lo es también de  $I$ . Supongamos que  $f \in I$  y el mínimo en  $trop(f)(\mathbf{w})$  se alcanza una única vez. Como  $f \in I_L$ , existe  $g \in \mathcal{T}'_L$  tal que el mínimo en  $trop(g)(\mathbf{w})$  se alcanza una única vez. En conclusión, el conjunto  $\mathcal{T}'_L$  es una base tropical finita de  $I$ .  $\square$

Nuestro siguiente objetivo es probar que la noción de base tropical es invariante bajo cambios de coordenadas multiplicativos en  $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ . Probaremos también un resultado que será de utilidad en el capítulo 4.

Sea  $\phi : T^n \rightarrow T^m$  un morfismo de variedades con homomorfismo de anillos asociado  $\phi^* : K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_m^{\pm 1}] \rightarrow K[z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}]$ , dado por  $\phi^*(x_i) = \mathbf{z}^{\mathbf{a}_i}$  para unos ciertos  $\mathbf{a}_i \in \mathbb{Z}^n$ ,  $1 \leq i \leq m$ . De este modo, para cada  $\mathbf{x} \in T^n$ ,  $\phi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^{\mathbf{a}_1}, \dots, \mathbf{x}^{\mathbf{a}_m})$ . Para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , consideramos la tropicalización del polinomio  $\mathbf{x}^{\mathbf{a}_i} \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ , dada por la aplicación  $trop(\mathbf{x}^{\mathbf{a}_i}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $trop(\mathbf{x}^{\mathbf{a}_i})(\mathbf{w}) = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{w}$ , que es lineal. Además, si  $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^n$ , es claro que  $trop(\mathbf{x}^{\mathbf{a}_i})(\mathbf{w}) \in \mathbb{Z}^m$ . Por lo tanto, la aplicación  $trop(\phi)$  de componentes  $(trop(\mathbf{x}^{\mathbf{a}_1}), \dots, trop(\mathbf{x}^{\mathbf{a}_m})) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es lineal, y se restringe a una aplicación lineal  $\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^m$ . De hecho, si  $\mathbf{w} \in \Gamma_{val}^n$ , entonces  $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{w} \in \Gamma_{val}$  para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , luego se tiene también la restricción  $\Gamma_{val}^n \rightarrow \Gamma_{val}^m$ .

**Definición 2.4.10.** Dado un morfismo de variedades  $\phi : T^n \rightarrow T^m$ , se llama *tropicalización* de  $\phi$  a la aplicación lineal  $trop(\phi) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  descrita en el párrafo anterior.

**Observación 2.4.11.** (1) La aplicación lineal  $trop(\phi) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tiene matriz  $A^T$ , donde  $A$  es la matriz cuyas columnas son los vectores  $\mathbf{a}_i$ .

(2) Para cada  $\mathbf{y} \in T^n$  se tiene

$$\begin{aligned} \text{val}(\phi(\mathbf{y})) &= (\text{val}(\mathbf{y}^{\mathbf{a}_1}), \dots, \text{val}(\mathbf{y}^{\mathbf{a}_m})) \\ &= (\mathbf{a}_1 \cdot \text{val}(\mathbf{y}), \dots, \mathbf{a}_m \cdot \text{val}(\mathbf{y})) \\ &= A^T \text{val}(\mathbf{y}) = trop(\phi)(\text{val}(\mathbf{y})) \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.4.12.** Sean  $K = \mathbb{C}\{\{t\}\}$  y  $\phi : T^3 \rightarrow T^2$  la aplicación dada por  $(t_1, t_2, t_3) \mapsto (t_1 t_2, t_2 t_3)$ , cuyo homomorfismo de anillos asociado es  $\phi^* : K[x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}] \rightarrow K[z_1^{\pm 1}, z_2^{\pm 1}, z_3^{\pm 1}]$ ,

dado por  $x_1 \mapsto z_1 z_2$  y  $x_2 \mapsto z_2 z_3$ . La matriz  $A$  que hemos definido antes es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Consideramos el punto  $\mathbf{y} = (1 + 3t, t + t^5, 7) \in T^3$ , cuya valoración es  $\text{val}(\mathbf{y}) = (0, 1, 0)$ . Entonces  $\phi(\mathbf{y}) = (t + 3t^2 + t^5 + 3t^6, 7t + 7t^5)$ , así que  $\text{val}(\phi(\mathbf{y})) = (1, 1) = A^T \text{val}(\mathbf{y})$ .

Suponemos ahora que la valoración en  $K$  escinde para poder determinar qué efecto tienen las proyecciones sobre los ideales iniciales.

**Proposición 2.4.13.** Sea  $\phi^* : K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_m^{\pm 1}] \rightarrow K[z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}]$  una aplicación monomial. Sea  $I \subset K[z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}]$  un ideal, y denotamos  $I' = \phi^{*-1}(I)$  a la contracción de  $I$  por  $\phi^*$ . Entonces

$$\phi^*(\text{in}_{\text{trop}(\phi)(\mathbf{w})}(I')) \subset \text{in}_{\mathbf{w}}(I) \text{ para todo } \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n.$$

En particular, si  $\text{in}_{\mathbf{w}}(I) \neq \langle 1 \rangle$ , también se cumple  $\text{in}_{\text{trop}(\phi)(\mathbf{w})}(I') \neq \langle 1 \rangle$ .

*Demostración.* Para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , ponemos  $\phi^*(x_i) = \mathbf{z}^{\mathbf{a}_i}$ , donde  $\mathbf{a}_i \in \mathbb{Z}^n$ . Entonces  $\phi^*(\mathbf{x}^{\mathbf{u}}) = \mathbf{z}^{A\mathbf{u}}$ , donde  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{Z})$  es la matriz cuyas columnas son los vectores  $\mathbf{a}_i$ . Sea  $f = \sum c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in I'$ , entonces  $\phi^*(f) = \sum c_{\mathbf{u}} \mathbf{z}^{A\mathbf{u}} \in I$ . Por lo tanto,  $W = \text{trop}(f)(A^T \mathbf{w}) = \min_{c_{\mathbf{u}} \neq 0} \{\text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot A\mathbf{u}\} = \text{trop}(\phi^*(f))(\mathbf{w})$ , y

$$\begin{aligned} \phi^*(\text{in}_{\text{trop}(\phi)(\mathbf{w})}(f)) &= \phi^* \left( \sum_{\text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot A\mathbf{u} = W} \overline{t^{-\text{val}(c_{\mathbf{u}})} c_{\mathbf{u}}} \cdot \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \right) \\ &= \sum_{\text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot A\mathbf{u} = W} \overline{t^{-\text{val}(c_{\mathbf{u}})} c_{\mathbf{u}}} \cdot \mathbf{z}^{A\mathbf{u}} = \text{in}_{\mathbf{w}}(\phi^*(f)). \end{aligned}$$

Esto implica que  $\phi^*(\text{in}_{\text{trop}(\phi)(\mathbf{w})}(I')) \subset \text{in}_{\mathbf{w}}(I)$ . Por último, este ideal contiene el elemento  $1 = \phi^*(1)$  si  $\text{in}_{\text{trop}(\phi)(\mathbf{w})}(I') = \langle 1 \rangle$ , que es el contrarrecíproco de la última afirmación de la proposición.  $\square$

**Ejemplo 2.4.14.** Sea  $\phi$  la aplicación del ejemplo 2.4.12. Consideramos el ideal principal  $I = \langle z_1 + z_3 \rangle$  en  $K[z_1^{\pm 1}, z_2^{\pm 1}, z_3^{\pm 1}]$ . Entonces  $I' = \phi^{*-1}(I) = \langle x_1 + x_2 \rangle$ . Para  $\mathbf{w} = (1, 0, 0)$  tenemos  $\text{in}_{\mathbf{w}}(I) = \langle z_3 \rangle$  e  $\text{in}_{\text{trop}(f)(\mathbf{w})}(I') = \text{in}_{(1,0)}(I') = \langle x_2 \rangle$ . Y se cumple la proposición, puesto que  $\phi^*(\text{in}_{\text{trop}(f)(\mathbf{w})}(I')) = \langle z_2 z_3 \rangle = \text{in}_{\mathbf{w}}(I)$ .

**Corolario 2.4.15.** Sean  $\phi^*$  un automorfismo de  $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ ,  $I \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  un ideal y denotamos  $I' = \phi^{*-1}(I)$ . Entonces

$$\text{in}_{\mathbf{w}}(I) = \langle 1 \rangle \text{ si, y solo si, } \text{in}_{\text{trop}(\phi)(\mathbf{w})}(I') = \langle 1 \rangle.$$

En esta sección hemos visto que todo ideal  $I$  del anillo de polinomios de Laurent sobre un cuerpo valorado  $K$  admite una base tropical finita. En el capítulo 4 definiremos la variedad tropical de  $I$ , y veremos que  $\text{in}_{\mathbf{w}}(I) \neq \langle 1 \rangle$  es una de las caracterizaciones para los puntos  $\mathbf{w}$  que pertenecen a este objeto. Si se tiene una base tropical finita de  $I$ , entonces esta variedad se puede escribir como intersección (finita) de variedades más sencillas. En este sentido, el teorema 2.4.9 puede entenderse como una versión del Teorema de la Base de Hilbert para la Geometría Tropical.

# Capítulo 3

## Hipersuperficies tropicales

En este capítulo comenzamos propiamente el estudio de la Geometría Algebraica Tropical. Para ello, primero definimos el semianillo tropical (sección 3.1). En el semianillo tropical, destacaremos algunas propiedades curiosas de la aritmética tropical.

Después definimos las variedades tropicales más sencillas, las hipersuperficies (sección 3.2). Para esta clase de variedades, enunciamos y demostramos una versión particular del Teorema Fundamental (sección 3.3) y del Teorema de Estructura (sección 3.4), cuyas versiones generales corresponden a los capítulos 4 y 5, respectivamente.

La referencia principal que se ha seguido en este capítulo es [MS15, Cap. 2, §1.1, §3.1].

### 3.1. El semianillo tropical

Nuestro ámbito de estudio es el *semianillo tropical*  $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \odot)$ . Como conjunto, el semianillo tropical es el cuerpo de los números reales  $\mathbb{R}$  junto con un elemento extra,  $\infty$ , que representa el infinito. En este semianillo, las operaciones aritméticas básicas son la suma y multiplicación tropicales, que se definen como sigue para cada  $x, y \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ :

$$x \oplus y := \min\{x, y\},$$

$$x \odot y := x + y,$$

usando la extensión que cabe esperar para  $\infty$ :  $x \oplus \infty = x$ , y  $x \odot \infty = \infty$  para cada  $x \in \mathbb{R}$ . En palabras, la *suma tropical* de dos números es su mínimo y el *producto tropical* de dos números es su suma usual.

**Proposición 3.1.1.** La terna  $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \odot)$  constituye un semianillo (conmutativo y unitario), que denominaremos *semianillo tropical*.

*Demostración.* El neutro para la suma es el elemento  $\infty$ , ya que para cada  $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  se cumple  $x \oplus \infty = x$ . Además, la suma tropical es asociativa y conmutativa debido a las propiedades del mínimo. Esto prueba que  $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus)$  es un semigrupo abeliano con elemento neutro.

El producto tropical hereda las propiedades de la suma usual de números reales. Por lo tanto, es asociativo y conmutativo. Además, el producto tiene elemento neutro, que es el 0, pues  $x \odot 0 = x$  para cada  $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

Por último, se verifica la ley distributiva  $x \odot (y \oplus z) = x \odot y \oplus x \odot z$  para cada  $x, y, z \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

En conclusión,  $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \odot)$  es un semianillo conmutativo y unitario.  $\square$

**Observación 3.1.2.** El semianillo tropical no es un anillo, pues la “resta tropical” no está bien definida. Por ejemplo, no podemos encontrar ningún elemento  $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  tal que  $x \oplus 1 = 2$ .

La aritmética tropical es más sencilla que la usual, como se puede observar en las tablas para la suma y el producto tropicales:

$\oplus$	1	2	3	4	5	6	7		$\odot$	1	2	3	4	5	6	7
<b>1</b>	1	1	1	1	1	1	1		<b>1</b>	2	3	4	5	6	7	8
<b>2</b>	1	2	2	2	2	2	2		<b>2</b>	3	4	5	6	7	8	9
<b>3</b>	1	2	3	3	3	3	3		<b>3</b>	4	5	6	7	8	9	10
<b>4</b>	1	2	3	4	4	4	4		<b>4</b>	5	6	7	8	9	10	11
<b>5</b>	1	2	3	4	5	5	5		<b>5</b>	6	7	8	9	10	11	12
<b>6</b>	1	2	3	4	5	6	6		<b>6</b>	7	8	9	10	11	12	13
<b>7</b>	1	2	3	4	5	6	7		<b>7</b>	8	9	10	11	12	13	14

Es importante recordar que el elemento neutro para el producto es el “0”. Esto hace que en el triángulo de Pascal aparezcan únicamente ceros, así que todos los coeficientes binomiales en el binomio de Newton son iguales a 0. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
 (x \oplus y)^3 &= (x \oplus y) \odot (x \oplus y) \odot (x \oplus y) \\
 &= 0 \odot x^3 \oplus 0 \odot x^2y \oplus 0 \odot xy^2 \oplus 0 \odot y^3 \\
 &= x^3 \oplus x^2y \oplus xy^2 \oplus y^3 \\
 &= x^3 \oplus y^3
 \end{aligned}$$

ya que para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ :

$$3 \cdot \min\{x, y\} = \min\{3x, 2x + y, x + 2y, 3y\} = \min\{3x, 3y\}.$$

Y esto es general para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ :

**Proposición 3.1.3.** Dados  $x, y \in \mathbb{R}$  y  $n \geq 1$ , entonces  $(x \oplus y)^n = x^n \oplus y^n$ .

*Demostración.* Por una parte, es obvio que  $(x \oplus y)^n = n \cdot \min\{x, y\}$ . Y, por otra parte,  $x^n \oplus y^n = \min\{nx, ny\} = n \cdot \min\{x, y\}$ . Por lo tanto, ambas cantidades son iguales para cada  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ .  $\square$

Veamos ahora cómo se pueden definir polinomios en el semianillo tropical. Sean  $x_1, x_2, \dots, x_n$  variables que representan elementos en el semianillo tropical  $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \odot)$ .

**Definición 3.1.4.** Un *monomio tropical de Laurent* es cualquier producto (tropical) de variables, donde la repetición está permitida y también se permiten exponentes negativos.

**Observación 3.1.5.** (1) Como vamos a trabajar en el anillo de polinomios de Laurent, permitiremos la posibilidad de exponentes negativos. Además, por conmutatividad del producto, podemos agrupar y escribir los monomios con la notación habitual.

(2) Cada monomio representa una función lineal  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $M = x_1^{r_1} \odot x_2^{r_2} \odot \dots \odot x_n^{r_n}$  es un monomio de Laurent, entonces este monomio representa la función lineal  $M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto r_1x_1 + r_2x_2 + \dots + r_nx_n$ .

**Ejemplo 3.1.6.** Consideramos el siguiente monomio:

$$x_1 \odot x_1 \odot x_3 \odot x_1 \odot x_4^{-1} \odot x_2 \odot x_3 \odot x_2 = x_1^3 x_2^2 x_3^2 x_4^{-1}.$$

Si evaluamos este monomio en la aritmética habitual, obtenemos una función lineal  $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4$ .

**Definición 3.1.7.** Un *polinomio tropical* es una suma tropical finita de monomios tropicales multiplicados tropicalmente por números reales:

$$p(x_1, \dots, x_n) = a \odot x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} \oplus b \odot x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n} \oplus \dots$$

donde los coeficientes  $a, b, \dots$  son números reales y los exponentes  $i_1, j_1, \dots$  son enteros.

**Observación 3.1.8.** Todo polinomio tropical representa una función  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Cuando evaluamos esta función en aritmética clásica, obtenemos el mínimo de una cantidad finita de funciones lineales (siendo más precisos, afines), concretamente:

$$p(x_1, \dots, x_n) = \text{mín}\{a + i_1x_1 + \dots + i_nx_n, b + j_1x_1 + \dots + j_nx_n, \dots\}.$$

**Proposición 3.1.9.** La función  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida por un polinomio tropical verifica las siguientes propiedades:

- (1)  $p$  es continua.
- (2)  $p$  es lineal a trozos, con un número finito de trozos.
- (3)  $p$  es cóncava, es decir,  $p(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) \geq \lambda \cdot p(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) \cdot p(\mathbf{y})$  para cada  $0 \leq \lambda \leq 1$  y cada  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* El mínimo de funciones continuas es continuo, esto es un resultado de Topología General, y es trivial comprobar que  $p$  es lineal a trozos, pues es el mínimo de funciones lineales.

Denotamos por  $L_i(x_1, \dots, x_n)$ ,  $1 \leq i \leq m$ , a los términos que aparecen en  $p$ , entonces  $p(x_1, \dots, x_n) = \text{mín}\{L_i(x_1, \dots, x_n) : 1 \leq i \leq m\}$ , y sean  $I_k$  los intervalos más grandes en los que  $p|_{I_k} = L_k$ . Entonces para cada  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  existe un índice  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , tal que

$p(\mathbf{x}) = L_i(\mathbf{x}) \leq L_j(\mathbf{x})$  para cada  $j \neq i$ .

Sean  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , y sea  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Existe un índice  $k$ ,  $1 \leq k \leq m$ , tal que

$$p(\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) = L_k(\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} p(\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) &= L_k(\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) = \lambda L_k(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)L_k(\mathbf{y}) \\ &\geq \lambda \cdot p(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) \cdot p(\mathbf{y}), \end{aligned}$$

es decir,  $p$  es una función cóncava □

**Observación 3.1.10.** Recíprocamente, toda función  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface las tres propiedades anteriores se puede representar como el mínimo de un conjunto finito de funciones lineales. Esto se prueba fácilmente encontrando los conjuntos  $I_k$  de la proposición anterior y definiendo correctamente las funciones  $L_k$ .

Juntando la proposición 3.1.9 y la observación 3.1.10, se obtiene el siguiente resultado:

**Corolario 3.1.11.** Los polinomios tropicales en las variables  $x_1, \dots, x_n$  están en correspondencia biyectiva con las funciones lineales a trozos y cóncavas en  $\mathbb{R}^n$  con coeficientes enteros.

## 3.2. Definiciones y primeros ejemplos

Sea  $K$  un cuerpo arbitrario con una valoración (posiblemente trivial). Trabajamos en el anillo de polinomios de Laurent  $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  sobre  $K$ . Dado un polinomio de Laurent  $f = \sum_{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n} c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}}$ , en el capítulo 2 hemos definido la *tropicalización de  $f$*  como la función lineal a trozos  $trop(f) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$trop(f)(\mathbf{w}) = \min\{\text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} : \mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n, c_{\mathbf{u}} \neq 0\} \quad (3.2.1)$$

Definido de esta forma,  $trop(f)$  es el polinomio tropical inducido por el polinomio (de Laurent) clásico  $f$ .

**Observación 3.2.1.** Dado un polinomio  $f \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ , primero tomamos las valoraciones de los coeficientes, que pertenecen al semianillo tropical  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  y después consideramos  $f$  como un polinomio tropical, sustituyendo las operaciones clásicas (suma y producto) por las tropicales. De este modo se obtiene la función de la ecuación (3.2.1).

El polinomio tropical  $trop(f)$  es una función lineal a trozos y cóncava  $trop(f) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , según la proposición 3.1.9.

La variedad algebraica clásica definida por el polinomio de Laurent  $f \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  es una hipersuperficie en el toro algebraico  $T^n$  sobre la clausura algebraica  $\bar{K}$  de  $K$ :

$$V(f) = \{\mathbf{y} \in T^n : f(\mathbf{y}) = 0\}.$$



**Definición 3.2.2.** La *hipersuperficie tropical*  $\text{trop}(V(f))$  es el conjunto

$$\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \text{el m\u00ednimo en } \text{trop}(f)(\mathbf{w}) \text{ se alcanza al menos dos veces}\}.$$

Esto es, el conjunto de puntos de  $\mathbb{R}^n$  donde la funci\u00f3n lineal a trozos  $\text{trop}(f)$  no es lineal.

**Observaci\u00f3n 3.2.3.** Para  $n = 2$ , a las hipersuperficies tropicales tambi\u00e9n se les denomina *curvas tropicales*.

Usando la terminolog\u00eda de las formas iniciales descrita en el cap\u00edtulo 2, cuando la valoraci\u00f3n  $\text{val} : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  admite una escisi\u00f3n  $w \mapsto t^w$ , esto puede escribirse en t\u00e9rminos de las formas iniciales:

$$in_{\mathbf{w}}(f) = \sum_{\mathbf{u}:\text{val}(c_{\mathbf{u}})+\mathbf{w}\cdot\mathbf{u}=\text{trop}(f)(\mathbf{w})} \overline{t^{-\text{val}(c_{\mathbf{u}})}c_{\mathbf{u}}}\mathbf{x}^{\mathbf{u}}. \quad (3.2.2)$$

En este caso, es sencillo probar que la hipersuperficie tropical  $\text{trop}(V(f))$  es el conjunto de los pesos  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  para los que la forma inicial  $in_{\mathbf{w}}(f)$  no es una unidad en  $\mathbb{k}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ , es decir, los vectores peso para los que la forma inicial  $in_{\mathbf{w}}(f)$  no es un monomio (lo demostraremos en el teorema 3.3.1).

Cuando  $F$  sea un polinomio tropical, denotaremos por  $V(F)$  al conjunto

$$\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \text{el m\u00ednimo en } F(\mathbf{w}) \text{ se alcanza al menos dos veces}\}.$$

Con esta notaci\u00f3n, se cumple trivialmente lo siguiente:

$$\text{trop}(V(f)) = V(\text{trop}(f)).$$

**Ejemplo 3.2.4.** Sea  $K = \mathbb{C}\{\{t\}\}$  el cuerpo de series de Puiseux con coeficientes complejos. Examinamos ahora polinomios de Laurent en dos variables  $f \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ .

(1) Sea  $f = x - y + 1$ . Entonces  $\text{trop}(f)(\mathbf{w}) = \min(w_1, w_2, 0)$ , luego  $\text{trop}(V(f)) = \{w_1 = w_2 \leq 0\} \cup \{w_1 = 0 \leq w_2\} \cup \{w_2 = 0 \leq w_1\}$ . Esta curva tropical se muestra en la figura 3.2.1a.

(2) Sea  $f = t^2x^2 + xy + (t^2 + t^3)y^2 + (1 + t^3)x + t^{-1}y + t^3$ . Entonces

$$\text{trop}(f)(\mathbf{w}) = \min(2 + 2w_1, w_1 + w_2, 2 + 2w_2, w_1, -1 + w_2, 3),$$

as\u00ed que  $\text{trop}(V(f))$  consiste en los tres segmentos que unen los pares de puntos  $\{(-1, 0), (-2, 0)\}$ ,  $\{(-1, 0), (-1, 3)\}$  y  $\{(-1, 0), (3, 4)\}$  y los seis rayos  $\{(-2, 0) + \lambda(0, 1)\}$ ,  $\{(-2, 0) - \lambda(1, 1)\}$ ,  $\{(-1, -3) - \lambda(1, 1)\}$ ,  $\{(-1, -3) + \lambda(1, 0)\}$ ,  $\{(3, 4) + \lambda(0, 1)\}$ ,  $\{(3, 4) + \lambda(1, 0)\}$ , donde  $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Esta curva se muestra en la figura 3.2.1b. El c\u00e1lculo se puede comprobar, por ejemplo, con la ayuda de SINGULAR, utilizando la funci\u00f3n “tropicalCurve”.

Hemos presentado aqu\u00ed dos ejemplos de curvas tropicales en el plano. En las siguientes secciones analizaremos otras formas de describir las hipersuperficies tropicales y estudiaremos tambi\u00e9n sus propiedades combinatorias y la relaci\u00f3n con la Geometr\u00eda Poliedral.

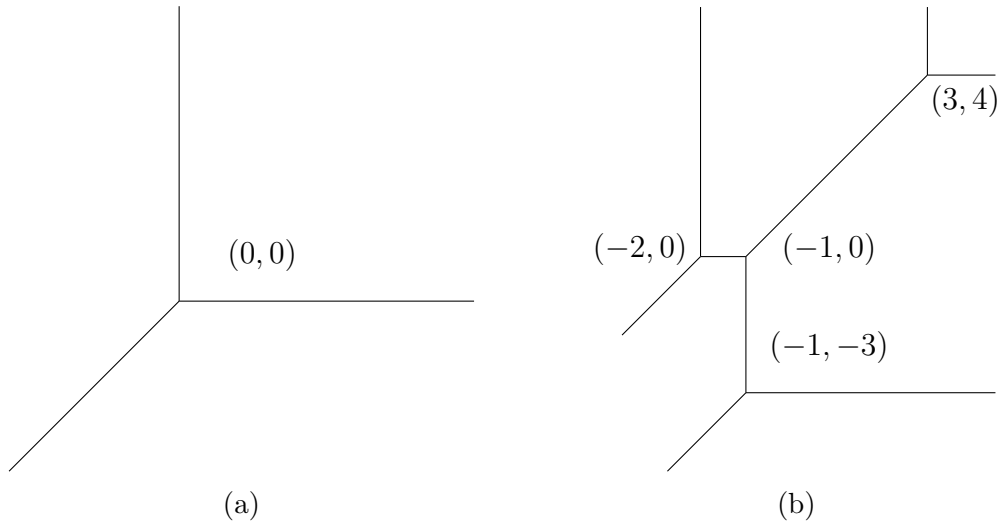


Figura 3.2.1: Una recta tropical y una cuádrica tropical. Figuras del ejemplo 3.2.4.

### 3.3. Teorema fundamental

En esta sección vamos a demostrar el Teorema de Kapranov, enunciado a principios de los años 90 en un manuscrito no publicado por Mikhail Kapranov. Una prueba de este resultado se puede encontrar en [EKL06].

El Teorema de Kapranov establece la relación entre las hipersuperficies clásicas sobre un cuerpo  $K$  y las hipersuperficies tropicales en  $\mathbb{R}^n$ . En el siguiente capítulo, generalizaremos este resultado a variedades tropicales de cualquier dimensión.

**Teorema 3.3.1** (Teorema de Kapranov). Sea  $K$  un cuerpo algebraicamente cerrado provisto de una valoración no trivial ( $\text{val}$ ), y sea  $f = \sum_{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n} c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  un polinomio de Laurent. Entonces los siguientes tres conjuntos coinciden:

- (1) la hipersuperficie tropical  $\text{trop}(V(f)) \subset \mathbb{R}^n$ .
- (2) el conjunto  $\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \text{in}_{\mathbf{w}}(f) \text{ no es un monomio}\}$ .
- (3) la clausura en  $\mathbb{R}^n$  (para la topología usual) del conjunto  $\{(\text{val}(y_1), \dots, \text{val}(y_n)) : (y_1, \dots, y_n) \in V(f)\}$ , donde  $V(f)$  es la variedad algebraica clásica definida por  $f$ .

Además, si  $f$  es irreducible y  $\mathbf{w} \in \Gamma_{\text{val}}^n \cap \text{trop}(V(f))$ , entonces el conjunto  $\{\mathbf{y} \in V(f) : \text{val}(\mathbf{y}) = \mathbf{w}\}$  es denso en la hipersuperficie  $V(f)$  para la topología de Zariski.

**Observación 3.3.2.** Hemos supuesto que el cuerpo  $K$  es algebraicamente cerrado y la valoración en  $K$  es no trivial. Esto no supone una restricción realmente, ya que si el cuerpo no es algebraicamente cerrado o la valoración en  $K$  es trivial, entonces podemos pasar a una extensión de cuerpos, que no modifica la hipersuperficie tropical  $\text{trop}(V(f))$ . Esto se discutirá en más detalle en la forma general del Teorema (observación 4.2.4).

Antes de presentar la prueba del teorema, veamos en un ejemplo su validez:

**Ejemplo 3.3.3.** Sea  $f = x - y + 1 \in K[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ , donde  $K$  es un cuerpo que verifica las condiciones del teorema, por ejemplo  $K = \mathbb{C}\{\{t\}\}$ . Entonces la variedad clásica que define el polinomio  $f$  en el toro  $T^2$  es

$$V(f) = \{(z, z + 1) : z \in K, z \neq 0, z \neq -1\},$$

y  $\text{trop}(V(f))$  es la recta tropical de la figura 3.2.1a.

Utilizando la expresión (3.2.2), como en nuestro caso los únicos coeficientes que aparecen en  $f$  son  $\pm 1$ , entonces, sus valores son  $\text{val}(c_{\mathbf{u}}) = 0$  para cada  $\mathbf{u} \in \text{Supp}(f)$ . Por lo tanto,

$$in_{\mathbf{w}}(f) = \sum_{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \text{trop}(f)(\mathbf{w})} \bar{c}_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}}.$$

Dado  $\mathbf{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\text{trop}(f)(\mathbf{w}) = \min(w_1, w_2, 0)$ . Veamos cuál es el conjunto (2) del teorema:

- Para  $\mathbf{w} = (0, 0)$ , se tiene  $\text{trop}(f)(\mathbf{w}) = 0$  y  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = 0$ , para cada  $\mathbf{u} \in \text{Supp}(f)$ . Por lo tanto,  $in_{(0,0)}(f) = x - y + 1$ , que no es un monomio.
- Si  $\mathbf{w} = \lambda(1, 0)$ ,  $\lambda > 0$ , entonces  $\text{trop}(f)(\mathbf{w}) = \min(\lambda, 0, 0) = 0$ . Además, se tiene  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = 0$  para los vectores  $\mathbf{u} = (0, 0)$  y  $\mathbf{u} = (0, 1)$ . Por lo tanto, tenemos que  $in_{(\lambda,0)}(f) = -y + 1$  para cada  $\lambda > 0$ .
- Si  $\mathbf{w} = \mu(0, 1)$ ,  $\mu > 0$ , entonces  $\text{trop}(f)(\mathbf{w}) = \min(0, \mu, 0) = 0$ . Además, se tiene  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = 0$  para los vectores  $\mathbf{u} = (0, 0)$  y  $\mathbf{u} = (1, 0)$ . Por lo tanto, tenemos que  $in_{(0,\mu)}(f) = x + 1$  para cada  $\mu > 0$ .
- Por último, para  $\mathbf{w} = \gamma(-1, -1)$ ,  $\gamma > 0$ , se tiene  $\text{trop}(f)(\mathbf{w}) = \min(-\gamma, -\gamma, 0) = -\gamma$ . En este caso, para los vectores  $\mathbf{u} = (1, 0)$  y  $\mathbf{u} = (0, 1)$  se cumple  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = -\gamma$ . Por lo tanto,  $in_{(-\gamma,-\gamma)}(f) = x - y$  tampoco es un monomio para cada  $\gamma > 0$ .

En cualquier otro caso,  $in_{\mathbf{w}}(f)$  es un monomio. Por lo tanto, el conjunto  $\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2 : in_{\mathbf{w}}(f) \text{ no es un monomio}\}$  es igual a

$$\{(0, 0)\} \cup \{(\lambda, 0) : \lambda > 0\} \cup \{(0, \mu) : \mu > 0\} \cup \{(-\gamma, -\gamma) : \gamma > 0\},$$

que coincide con la hipersuperficie tropical  $\text{trop}(V)(f)$ .

Para ver cuál es el conjunto (3) del teorema, recordemos que  $V(f) = \{(z, z + 1) : z \in K, z \neq 0, z \neq -1\}$ . Por lo tanto, calculando los valores de los puntos de la variedad clásica  $V(f)$

$$(\text{val}(z), \text{val}(z + 1)) = \begin{cases} (\text{val}(z), 0) & \text{si } \text{val}(z) > 0 \\ (\text{val}(z), \text{val}(z)) & \text{si } \text{val}(z) < 0 \\ (0, \text{val}(z + 1)) & \text{si } \text{val}(z) = 0 \text{ y } \text{val}(z + 1) > 0 \\ (0, 0) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Al tomar la clausura del conjunto formado por los puntos descritos en la ecuación anterior, se obtiene la hipersuperficie tropical (1), ya que el grupo de valores  $\Gamma_{\text{val}}$  es denso en  $\mathbb{R}$  (por ser  $K = \mathbb{C}\{\{t\}\}$  un cuerpo algebraicamente cerrado con una valoración no trivial, proposición 1.1.20).

*Demostración del teorema 3.3.1.* Para probar la igualdad de los 3 conjuntos que aparecen en el enunciado del teorema, vamos a demostrar las siguientes inclusiones: (1)  $\subset$  (2), (2)  $\subset$  (1) y (3)  $\subset$  (1). La inclusión (2)  $\subset$  (3) es consecuencia de la proposición 3.3.5 y la demostraremos en el corolario 3.3.7.

- (1)  $\subset$  (2) : Sea  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \text{trop}(V(f))$ . Por definición, el mínimo en  $W = \min_{\mathbf{u}: c_{\mathbf{u}} \neq 0} (\text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}) = \text{trop}(f)(\mathbf{w})$  se alcanza al menos dos veces. Por tanto,  $\text{in}_{\mathbf{w}}(f)$  no es un monomio.
- (2)  $\subset$  (1) : Recíprocamente, supongamos que  $\text{in}_{\mathbf{w}}(f)$  no es un monomio. Entonces el mínimo en  $W$  se alcanza al menos dos veces, es decir,  $\mathbf{w} \in \text{trop}(V(f))$ .
- (3)  $\subset$  (1) : Como el conjunto (1) es cerrado (es unión finita de conjuntos de la forma  $\{f_i = f_j \leq f_k, \text{ para todo } i, j \in J, k \notin J\}$ , para unas ciertas funciones continuas  $f_i$  y conjuntos de índices  $J$ , que son cerrados), entonces es suficiente probarlo para cada punto de la forma  $\text{val}(\mathbf{y}) := (\text{val}(y_1), \dots, \text{val}(y_n))$ , donde  $\mathbf{y} \in (K^*)^n$  verifica  $f(\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n} c_{\mathbf{u}} \mathbf{y}^{\mathbf{u}} = 0$ . Esto significa que  $\text{val}(\sum_{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n} c_{\mathbf{u}} \mathbf{y}^{\mathbf{u}}) = \text{val}(0) = \infty > \text{val}(c_{\mathbf{u}'} \mathbf{y}^{\mathbf{u}'})$  para todo  $\mathbf{u}'$  tal que  $c_{\mathbf{u}'} \neq 0$ .  
Si existiera  $\mathbf{u}_0$  tal que  $\text{val}(c_{\mathbf{u}_0} \mathbf{y}^{\mathbf{u}_0}) < \text{val}(c_{\mathbf{u}} \mathbf{y}^{\mathbf{u}})$  para cada  $\mathbf{u} \neq \mathbf{u}_0$ , entonces  $\infty = \text{val}(\sum_{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n} c_{\mathbf{u}} \mathbf{y}^{\mathbf{u}}) = \text{val}(c_{\mathbf{u}_0} \mathbf{y}^{\mathbf{u}_0})$ , lo que es absurdo. Por lo tanto, existen al menos dos vectores  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \text{Supp}(f)$  tales que

$$\text{val}(c_{\mathbf{u}_1} \mathbf{y}^{\mathbf{u}_1}) = \text{val}(c_{\mathbf{u}_2} \mathbf{y}^{\mathbf{u}_2}) \leq \text{val}(c_{\mathbf{u}} \mathbf{y}^{\mathbf{u}}), \quad \forall \mathbf{u} \in \text{Supp}(f).$$

Ahora bien, como

$$\text{trop}(f)(\text{val}(\mathbf{y})) = \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n} (\text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{u} \cdot \text{val}(\mathbf{y})) = \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n} (\text{val}(c_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{y}^{\mathbf{u}})),$$

teniendo en cuenta lo anterior, el mínimo se alcanza como mínimo dos veces. Por lo tanto,  $\text{val}(\mathbf{y}) \in \text{trop}(V(f))$  para todo  $\mathbf{y} \in V(f)$ , de modo que queda probado (3)  $\subset$  (1). □

La contención que falta y la última parte del teorema es una consecuencia de la proposición 3.3.5, que afirma que cada cero de una forma inicial  $\text{in}_{\mathbf{w}}(f)$  da lugar a un cero del polinomio de Laurent  $f$ . Pero antes vamos a demostrar otro resultado que necesitamos:

**Proposición 3.3.4.** Sea  $K$  un cuerpo con una valoración que escinde  $\Gamma_{\text{val}} \rightarrow K^*$ , con  $w \mapsto t^w$ . Sean  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{k}^*$  y  $w_1, \dots, w_n \in \Gamma_{\text{val}}$ , y consideramos el conjunto  $\mathcal{Y}$  formado por todos los puntos  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in T^n$  tales que  $\text{val}(y_i) = w_i$  y  $\overline{t^{-w_i} y_i} = \alpha_i$  para cada  $i = 1, \dots, n$ . Entonces el conjunto  $\mathcal{Y}$  es denso en  $T^n$  para la topología de Zariski.

*Demostración.* Lo que tenemos que demostrar es que  $T^n$  es el conjunto cerrado (para la topología de Zariski) más pequeño que contiene a  $\mathcal{Y}$ . Es decir, tenemos que probar que si  $\mathcal{Y} \subset V(I)$  para un cierto ideal  $I$ , entonces  $I = 0$ , y para esto es suficiente probar que para cada polinomio no nulo  $h \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  existe un punto  $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$  tal que  $h(\mathbf{y}) \neq 0$ . Para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , fijamos un elemento  $z_i$  en el anillo  $R = \{c : \text{val}(c) \geq 0\}$  tal que

$\bar{z}_i = \alpha_i$ . Entonces  $y_i = t^{w_i} z_i$  satisface  $\text{val}(y_i) = w_i + \text{val}(z_i) = w_i$ , ya que  $\text{val}(z_i) = 0$  por ser  $\alpha_i \neq 0$ , y además  $\overline{t^{-w_i} y_i} = \overline{t^{-w_i} t^{w_i} z_i} = \bar{z}_i = \alpha_i$ .

Cada coordenada  $y_i$  se puede reemplazar por un número infinito de elementos de  $K^*$  con las mismas propiedades. Por ejemplo,  $y_i \rightarrow y_i + t^{w_i+j}$  para cada  $j > 0$ , puesto que

$$\text{val}(y_i + t^{w_i+j}) \geq \min(\text{val}(y_i), \text{val}(t^{w_i+j})) = \min(w_i, w_i + j) = w_i,$$

y además  $\overline{t^{-w_i}(y_i + t^{w_i+j})} = \overline{t^{-w_i} y_i} + \bar{t}^j = \alpha_i$  ( $\bar{t}^j = \bar{0}$  ya que  $\text{val}(t^j) = j > 0$ ).

Veamos ahora, por inducción, que podemos elegir  $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$  con  $h(\mathbf{y}) \neq 0$  gracias a la libertad de elección que tenemos para cada coordenada  $y_i$ :

Para  $n = 1$ , podemos escoger  $y_1$  entre las infinitas posibilidades que cumplen  $\text{val}(y_1) = w_1$  y  $\alpha_1 = \overline{t^{-w_1} y_1}$ , evitando las raíces de  $h$ , que son un conjunto finito.

Para  $n > 1$ , escribimos  $h = \sum h_j x_n^j$ , donde  $h_j \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{n-1}^{\pm 1}]$ . Aplicando la hipótesis de inducción, existe un punto  $\mathbf{y}' = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in T^{n-1}$  con  $\text{val}(y_i) = w_i$ ,  $\overline{t^{-w_i} y_i}$  para cada  $1 \leq i \leq n-1$  y  $h_j(\mathbf{y}') \neq 0$  para todo  $j$ . Entonces basta elegir  $y_n$  de modo que  $\text{val}(y_n) = w_n$  y  $\overline{t^{-w_n} y_n} = \alpha_n$ , y tal que  $(y_1, \dots, y_{n-1}, y_n)$  no es raíz del polinomio  $h(y_1, \dots, y_{n-1}, x_n) \in K[x_n^{\pm 1}]$  (hay un número finito de ellas), lo que finaliza la prueba.  $\square$

**Proposición 3.3.5.** Sean  $f \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  y  $\mathbf{w} \in \Gamma_{\text{val}}^n$ . Supongamos que  $\text{in}_{\mathbf{w}}(f)$  no es un monomio y  $\alpha \in (\mathbb{k}^*)^n$  satisface  $\text{in}_{\mathbf{w}}(f)(\alpha) = 0$ . Entonces existe  $\mathbf{y} \in (K^*)^n$  tal que  $f(\mathbf{y}) = 0$ ,  $\text{val}(\mathbf{y}) = \mathbf{w}$  y  $\overline{t^{-w_i} y_i} = \alpha_i$  para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Si  $f$  es irreducible, entonces el conjunto  $\mathcal{Y}$  de tales puntos  $\mathbf{y}$  es denso en la hipersuperficie  $V(f)$  para la topología de Zariski.

*Demostración.* Lo demostramos por inducción sobre el número de variables  $n$ .

Para  $n = 1$ : Multiplicando por una unidad si es necesario, podemos suponer que el polinomio  $f$  tiene la forma siguiente:

$$f = \sum_{i=0}^s c_i x^i = \prod_{j=1}^s (a_j x - b_j), \text{ donde } c_0, c_s \neq 0.$$

Entonces por la proposición 2.4.3,  $\text{in}_{\mathbf{w}}(f) = \prod_{j=1}^s \text{in}_{\mathbf{w}}(a_j x - b_j)$ . Como  $\text{in}_{\mathbf{w}}(f)(\alpha) = 0$ , entonces  $\text{in}_{\mathbf{w}}(a_j x - b_j)(\alpha) = 0$  para algún  $j$  y, puesto que  $\alpha \neq 0$ , esto implica que  $\text{in}_{\mathbf{w}}(a_j x - b_j)$  no es un monomio. Por tanto,

$$\text{in}_{\mathbf{w}}(a_j x - b_j) = \overline{t^{-\text{val}(a_j)} a_j} \cdot x - \overline{t^{-\text{val}(-b_j)} b_j}.$$

En consecuencia,

$$\text{in}_{\mathbf{w}}(a_j x - b_j)(\alpha) = \overline{t^{-\text{val}(a_j)} a_j} \cdot \alpha + \overline{t^{-\text{val}(-b_j)} (-b_j)} = \overline{t^{-\text{val}(a_j)} \cdot (\bar{a}_j \cdot \alpha - \bar{t}^{-w} b_j)} = 0,$$

luego  $\alpha = \overline{t^{-w} b_j / a_j}$ . En conclusión, poniendo  $y = b_j / a_j \in K^*$ , tenemos que  $f(y) = 0$ ,  $\text{val}(y) = w$  y  $\overline{t^{-w} y} = \alpha$ .

Sea ahora  $n > 1$  y supongamos que el resultado es cierto para  $1, 2, \dots, n-1$ . Primero vamos a reducir el problema al caso particular en que la potencia de  $x_n$  que aparece en cada monomio de  $f$  es distinta.

Consideramos el automorfismo  $\phi_l^* : K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}] \rightarrow K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  dado por  $\phi_l^*(x_j) = x_j x_n^{lj}$  para  $1 \leq j \leq n-1$ , y  $\phi_l^*(x_n) = x_n$ , donde  $l \in \mathbb{N}$  es un número natural.

Para cada  $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^{n-1}$  tenemos

$$\phi_l^*(\mathbf{x}^{\mathbf{u}} x_n^i) = \mathbf{x}^{\mathbf{u}} x_n^{i + \sum_{j=1}^{n-1} u_j l^j}.$$

Y escogiendo un valor de  $l$  suficientemente grande, conseguimos que cada monomio de  $\phi_l^*(f)$  sea divisible por una potencia de  $x_n$  distinta (notemos que  $(u_{n-1} \dots u_1 i)_l$  es la expresión en base  $l$  del número  $i + \sum_{j=1}^{n-1} u_j l^j$  si  $i < l$  y  $v_j < l$  para cada  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ ).

Sea  $\tilde{\mathbf{w}} = (w_1, -l^1 w_n, \dots, w_{n-1} - l^{n-1} w_n, w_n)$ . Entonces  $\text{trop}(f)(\mathbf{w}) = \text{trop}(\phi^*(f))(\tilde{\mathbf{w}})$ , e  $\text{in}_{\tilde{\mathbf{w}}}(\phi^*(f)) = \phi^*(\text{in}_{\mathbf{w}}(f))$ , luego  $\text{in}_{\tilde{\mathbf{w}}}(\phi^*(f))$  no es un monomio. Además, para  $\tilde{\alpha} = (\alpha_1 \alpha_n^{-l^1}, \dots, \alpha_{n-1} \alpha_n^{-l^{n-1}}, \alpha_n)$  se tiene  $\text{in}_{\tilde{\mathbf{w}}}(\phi^*(f))(\tilde{\alpha}) = \text{in}_{\mathbf{w}}(f)(\alpha)$ , luego  $\phi^*(f)$  está en las mismas condiciones respecto a  $\tilde{\mathbf{w}}$  y  $\tilde{\alpha}$  que  $f$  respecto a  $\mathbf{w}$  y  $\alpha$ .

Finalmente, si  $\tilde{\mathbf{y}} \in (K^*)^n$  cumple  $\phi^*(f)(\tilde{\mathbf{y}}) = 0$ ,  $\text{val}(\tilde{\mathbf{y}}) = \tilde{\mathbf{w}}$  y  $\overline{t^{-\tilde{w}_i} \tilde{y}_i} = \tilde{\alpha}_i$  para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , poniendo  $\mathbf{y} = (\tilde{y}_1 \tilde{y}_n^{l^1}, \dots, \tilde{y}_{n-1} \tilde{y}_n^{l^{n-1}}, \tilde{y}_n)$ , entonces  $f(\mathbf{y}) = 0$ ,  $\text{val}(\mathbf{y}) = \mathbf{w}$  y  $\overline{t^{-w_i} y_i} = \alpha_i$  para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Por lo tanto, es suficiente resolver el problema para  $\phi^*(f)$ .

Suponemos que  $f$  es tal que los exponentes de los términos de  $f$ , visto como polinomio en la variable  $x_n$  con coeficientes en  $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{n-1}^{\pm 1}]$ , son todos distintos. Entonces podemos escribir  $f = \sum_{\mathbf{u}} c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}} x_n^{u_n}$ , donde  $\mathbf{u}' = (u_1, \dots, u_{n-1})$  para cada  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{n-1}, u_n) \in \text{Supp}(f)$ . Aplicando la hipótesis de inducción, podemos considerar ahora el conjunto de todos los puntos  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in T^{n-1}$  que cumplen  $\text{val}(y_i) = w_i$  y  $\overline{t^{-w_i} y_i} = \alpha_i$  para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ . Por la proposición 3.3.4, este conjunto es denso en  $T^{n-1}$  para la Topología de Zariski. Además, para cada una de estas elecciones, se tiene que  $g(x_n) := f(y_1, \dots, y_{n-1}, x_n)$  es un polinomio no nulo (por la forma de  $f$ ).

Para cada  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{Z}^n$  en el soporte de  $f$  sea  $\mathbf{u}' = (u_1, \dots, u_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n-1}$  la proyección sobre sus primeras  $n-1$  coordenadas. Si ponemos  $g = \sum d_i x_n^i$ , entonces tenemos que  $d_i = c_{\mathbf{u}} \mathbf{y}^{\mathbf{u}'}$  para un único  $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n$  que tiene  $u_n = i$ . En este caso, se cumple

$$\begin{aligned} \text{val}(d_i) + w_n i &= \text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{u}' \cdot \text{val}(\mathbf{y}') + w_n u_n \\ &= \text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w}' \cdot \mathbf{u}' + w_n u_n = \text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\text{trop}(g)(w_n) = \text{trop}(f)(\mathbf{w})$ , y además:

$$\begin{aligned} \text{in}_{w_n}(g)(x_n) &= \sum_{i: \text{val}(d_i) + w_n i = \text{trop}(g)(w_n)} \overline{t^{-\text{val}(d_i)} d_i} \cdot x_n^i \\ &= \sum_{\mathbf{u}: \text{val}(c_{\mathbf{u}} \mathbf{y}^{\mathbf{u}'}) + w_n u_n = \text{trop}(g)(w_n)} \overline{t^{-\text{val}(c_{\mathbf{u}})} c_{\mathbf{u}} t^{-\mathbf{w}' \cdot \mathbf{u}'}} \mathbf{y}^{\mathbf{u}'} \cdot x_n^{u_n} \\ &= \sum_{\mathbf{u}: \text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = \text{trop}(f)(\mathbf{w})} \overline{t^{-\text{val}(c_{\mathbf{u}})} c_{\mathbf{u}}} \cdot \alpha^{\mathbf{u}'} x_n^{u_n} \\ &= \text{in}_{\mathbf{w}}(f)(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, x_n). \end{aligned}$$

De aquí deducimos  $\text{in}_{w_n}(g)(\alpha_n) = 0$  y, aplicando el caso  $n = 1$ , se deduce la existencia de  $y_n \in K^*$  con  $\text{val}(y_n) = w_n$ ,  $\overline{t^{-w_n} y_n} = \alpha_n$  y tal que  $g(y_n) = 0$ . En consecuencia,

$f(y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) = 0$ , luego  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  es el punto de  $V(f)$  que estábamos buscando.

Por último, veamos que si  $f$  es un polinomio irreducible, entonces el conjunto  $\mathcal{Y}$  de puntos  $\mathbf{y}$  tales que  $\text{val}(\mathbf{y}) = \mathbf{w}$  y  $t^{-w_i}y_i = \alpha_i$  para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , es denso en  $V(f)$  para la topología de Zariski.

Para cada  $(n-1)$ -upla  $(y_1, \dots, y_{n-1}) \in T^{n-1}$ , con  $\text{val}(y_i) = w_i$  y  $t^{-w_i}y_i = \alpha_i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ , hemos construido un punto  $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ . Aplicando la proposición 3.3.4, se obtiene que el conjunto de tales puntos  $(y_1, \dots, y_{n-1}) \in T^{n-1}$  es denso en  $T^{n-1}$  para la topología de Zariski. Por lo tanto, la proyección de  $\mathcal{Y}$  sobre las primeras  $n-1$  coordenadas no está contenida en ninguna hipersuperficie de  $T^{n-1}$ . Sea  $g \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  cualquier polinomio con  $g(\mathbf{y}) = 0$  para todo  $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ . Entonces el ideal generado por los polinomios  $f$  y  $g$  en el anillo de polinomios de Laurent de  $n-1$  variables es  $\langle f, g \rangle \cap K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{n-1}^{\pm 1}] = \{0\}$  (pues la proyección de  $\mathcal{Y}$  sobre  $T^{n-1}$  es densa y está contenida en  $V(\langle f, g \rangle \cap K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{n-1}^{\pm 1}])$ ). Como  $f$  es irreducible, del lema 3.3.6 (aplicado a  $A = K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{n-1}^{\pm 1}]$ ) se deduce que  $g$  es múltiplo de  $f$  y, en consecuencia, se obtiene el resultado esperado:  $\mathcal{Y}$  es denso en  $V(f)$  para la topología de Zariski. □

**Lema 3.3.6.** Sean  $A$  un dominio de factorización única y  $f, g \in A[x]$  polinomios tales que  $f$  es irreducible en  $A[x]$  y  $\langle f, g \rangle \cap A = \{0\}$ . Entonces  $f$  divide a  $g$  en  $A[x]$ .

*Demostración.* Podemos suponer  $g \notin A$  (si  $g \in A$ , entonces  $g \in \langle f, g \rangle \cap A$ , así que  $g = 0$ ). Razonamos por reducción al absurdo, supongamos que  $f$  no divide a  $g$  en  $A[x]$ .

Sea  $F = \text{Frac}(A)$  el cuerpo de fracciones de  $A$ . Por el Lema de Gauss,  $f$  es irreducible en  $F[x]$ , luego es primo ( $F[x]$  es un dominio de factorización única), y  $f$  no divide a  $g$  en  $F[x]$ . Como  $f$  es primo en  $F[x]$  y no divide a  $g$ , entonces su máximo común divisor es  $\text{gcd}(f, g) = 1$ . Por lo tanto, como  $F[x]$  es un dominio de ideales principales, existen  $a, b \in F[x]$  tales que  $af + bg = 1$  y, quitando denominadores,  $\lambda(af + bg) = \lambda \in A$ . Es decir, el elemento  $\lambda(af + bg) \in \langle f, g \rangle \cap A$ , lo que es absurdo. □

**Corolario 3.3.7.** En las condiciones del teorema 3.3.1 se verifica la siguiente inclusión:

$$\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : in_{\mathbf{w}}(f) \text{ no es un monomio}\} \subset \overline{\{(val(y_1), \dots, val(y_n)) : (y_1, \dots, y_n) \in V(f)\}}$$

(clausura para la topología usual).

*Demostración.* Sea  $\mathbf{w} \in \Gamma_{\text{val}}^n$ . Por la proposición 1.1.9, el cuerpo  $\mathbb{k}$  es algebraicamente cerrado. Por lo tanto, si  $in_{\mathbf{w}}(f)$  no es un monomio, entonces tiene raíces  $\alpha \in \mathbb{k}^*$ . De la proposición 3.3.5 se deduce

$$\{\mathbf{w} \in \Gamma_{\text{val}}^n : in_{\mathbf{w}}(f) \text{ no es un monomio}\} \subset \{val(\mathbf{y}) : \mathbf{y} \in V(f)\}. \quad (3.3.1)$$

Denotamos

$$A = \{\mathbf{w} \in \Gamma_{\text{val}}^n : in_{\mathbf{w}}(f) \text{ no es un monomio}\}, \text{ y}$$

$$B = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : in_{\mathbf{w}}(f) \text{ no es un monomio}\}.$$

Si demostramos  $\overline{A} = B$ , entonces tomando adherencias en (3.3.1) obtenemos el resultado. Notemos que  $A = B \cap \Gamma_{\text{val}}^n$ , luego  $\overline{A} = \overline{B \cap \Gamma_{\text{val}}^n} = \overline{B}$  (por ser  $\Gamma_{\text{val}}$  denso). Por otra parte, utilizando la notación de la observación 2.3.9,  $B = \cup_{\#\sigma \geq 2} \overline{D}_\sigma$  es una unión finita de conjuntos cerrados, luego es cerrado. Por lo tanto, queda demostrado  $\overline{A} = B$ .  $\square$

### 3.4. Versión débil del Teorema de estructura

En este apartado vamos a estudiar las propiedades combinatorias de las hipersuperficies tropicales. Para ello, será esencial la noción de *subdivisiones regulares* introducida en la sección 1.2.

**Definición 3.4.1.** Dado un complejo poliedral  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ , llamaremos *k-esqueleto* de  $\Sigma$  al complejo poliedral constituido por todas las celdas  $\sigma \in \Sigma$  tales que  $\dim(\sigma) \leq k$ .

De nuevo, consideramos un cuerpo  $K$  arbitrario (no necesariamente algebraicamente cerrado). Recordemos que dado un subgrupo aditivo  $\Gamma$  de  $\mathbb{R}$ , un *poliedro  $\Gamma$ -racional* es  $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ , donde  $A \in \mathcal{M}_{d \times n}(\mathbb{Q})$  y  $\mathbf{b} \in \Gamma^d$  (definición 2.3.2). Introducimos ahora un par de definiciones sobre Geometría Poliedral que vamos a necesitar en el teorema de estructura:

**Definición 3.4.2.** Un complejo poliedral  $\Sigma$  es *puro de dimensión  $d$*  si cada celda maximal de  $\Sigma$  tiene dimensión  $d$ .

**Definición 3.4.3.** Sea  $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  el anillo de polinomios de Laurent en  $n$  variables. Dado un polinomio  $f = \sum_{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n} c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ , el *politopo de Newton* de  $f$  es

$$\text{Newt}(f) = \text{conv}(\{\mathbf{u} : c_{\mathbf{u}} \neq 0\}) \subset \mathbb{R}^n,$$

también llamado *polígono de Newton* en el caso  $n = 2$ .

**Ejemplo 3.4.4.** Sea  $S = \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ . Consideramos el polinomio  $f = 7x + 8y - 3xy + 4x^2y - 17xy^2 + x^2y^2 \in S$ . El polígono de Newton de  $f$  se representa en la figura 3.4.1.

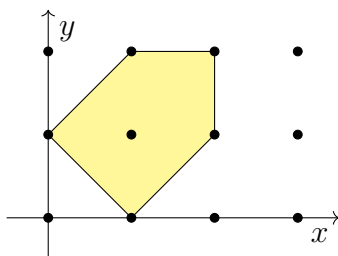


Figura 3.4.1: Polígono de Newton del ejemplo 3.4.4.

Ahora vamos a introducir la notación que utilizaremos en el Teorema de estructura. Sea  $f \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  un polinomio de Laurent,  $f = c_1 \mathbf{x}^{\mathbf{u}_1} + \dots + c_r \mathbf{x}^{\mathbf{u}_r}$  ( $c_i \neq 0$  para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq r$ ). Para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , sea  $\tilde{\mathbf{u}}_i = (\mathbf{u}_i, \text{val}(c_i)) \in \mathbb{Z}^n \times \Gamma_{\text{val}}$  y consideramos



el politopo levantado  $P_{\text{val}} = \text{conv}(\{\tilde{\mathbf{u}}_i : 1 \leq i \leq r\})$ . Denotamos  $L_i(\mathbf{w}) = \text{val}(c_i) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_i$ , y para cada  $J \subset I = \{1, \dots, r\}$  sea

$$D_J = \{\mathbf{w} : L_i(\mathbf{w}) = L_j(\mathbf{w}) < L_k(\mathbf{w}), \forall i, j \in J, \forall k \notin J\}.$$

Estos conjuntos corresponden a la construcción del complejo poliedral  $\Sigma_{\text{trop}(f)} = \{\overline{D}_J : D_J \neq \emptyset\}$  que hicimos en la observación 2.3.9, que es puro de dimensión  $n-1$  y con soporte  $|\Sigma_{\text{trop}(f)}| = \mathbb{R}^n$ . Además, en este caso  $\Sigma_{\text{trop}(f)}$  es  $\Gamma_{\text{val}}$ -racional. Para cada cara inferior  $F_J$  de  $P_{\text{val}}$  se construye

$$\tilde{\mathcal{N}}(F_J) = \overline{\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \text{face}_{(\mathbf{w},1)}(P_{\text{val}}) = F_J\}}.$$

**Proposición 3.4.5.**  $\mathbf{w} \in \tilde{\mathcal{N}}(F_J)$  si, y solo si,  $(\mathbf{w}, 1) \in \mathcal{N}(F_J)$ .

*Demostración.* Sea  $\mathbf{w} \in \tilde{\mathcal{N}}(F_J)$ . Existe una sucesión  $(\mathbf{w}_k)_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{w}_k = \mathbf{w}$  y  $\text{face}_{(\mathbf{w}_k,1)}(P_{\text{val}}) = F_J$  para todo  $k$ , es decir,  $(\mathbf{w}_k, 1) \in \mathcal{N}(F_J)$  para todo  $k$ . Por lo tanto,  $(\mathbf{w}, 1) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{w}_k, 1) \in \mathcal{N}(F_J)$ .

Recíprocamente, sea  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $(\mathbf{w}, 1) \in \mathcal{N}(F_J)$ . Existe una sucesión  $((\mathbf{w}_k, \lambda_k))_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^{n+1}$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{w}_k, \lambda_k) = (\mathbf{w}, 1)$  y  $\text{face}_{(\mathbf{w}_k, \lambda_k)}(P_{\text{val}}) = F_J$  para todo  $k$ . Podemos suponer  $\lambda_k > 0$  para todo  $k$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} \text{face}_{(\mathbf{w}_k, \lambda_k)}(P_{\text{val}}) &= \{\mathbf{x} \in P_{\text{val}} : (\mathbf{w}_k, \lambda_k) \cdot \mathbf{x} \leq (\mathbf{w}_k, \lambda_k) \cdot \mathbf{y}, \forall \mathbf{y} \in P_{\text{val}}\} \\ &= \{\mathbf{w} \in P_{\text{val}} : \left(\frac{1}{\lambda_k} \mathbf{w}_k, 1\right) \cdot \mathbf{x} \leq \left(\frac{1}{\lambda_k} \mathbf{w}_k, 1\right) \cdot \mathbf{y}, \forall \mathbf{y} \in P_{\text{val}}\} \\ &= \text{face}_{\left(\frac{1}{\lambda_k} \mathbf{w}_k, 1\right)}(P_{\text{val}}) \end{aligned}$$

Entonces para todo  $k$ ,  $\frac{1}{\lambda_k} \mathbf{w}_k \in \tilde{\mathcal{N}}(F_J)$ , que es cerrado, luego  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} \mathbf{w}_k = \mathbf{w} \in \tilde{\mathcal{N}}(F_J)$ .  $\square$

**Proposición 3.4.6.** En las condiciones anteriores,  $D_J \neq \emptyset$  si, y solo si,  $F_J$  es una cara inferior de  $P_{\text{val}}$ , y en este caso  $\overline{D}_J = \tilde{\mathcal{N}}(F_J)$ .

*Demostración.* Puesto que  $F_J = \text{conv}(\{\tilde{\mathbf{u}}_i : i \in J\})$ , es claro que  $F_J = \text{face}_{(\mathbf{w},1)}(P_{\text{val}})$  si, y solo si,  $L_i(\mathbf{w})$  alcanza el mínimo exactamente en los índices de  $J$ , lo que equivale a  $\mathbf{w} \in D_J$ . Por lo tanto,  $F_J$  es cara inferior de  $P_{\text{val}}$  si, y solo si,  $D_J \neq \emptyset$ , y  $\tilde{\mathcal{N}}(F_J) = \overline{D}_J$  si esto es cierto.  $\square$

Como en el lema 1.2.29, denotamos  $I_{\text{val}} = \{J \subset I : F_J \text{ es cara inferior de } P_{\text{val}}\}$ . Con las notaciones que hemos introducido, ya estamos en condiciones de enunciar y demostrar el Teorema de Estructura para hipersuperficies:

**Teorema 3.4.7.** La hipersuperficie tropical  $\text{trop}(V(f))$  es el soporte del  $(n-1)$ -esqueleto del complejo poliedral  $\Sigma_{\text{trop}(f)} = \{\tilde{\mathcal{N}}(F_J) : J \in I_{\text{val}}\}$ , que es un complejo  $\Gamma_{\text{val}}$ -racional dual a la subdivisión regular de  $\text{Newt}(f)$  inducida por los pesos  $\text{val}(c_i)$  en los puntos  $\mathbf{u}_i$ .

*Demostración.* Por definición,  $\text{trop}(V(f)) = \bigcup_{\substack{J \in I_{\text{val}}, \\ \#J \geq 2}} D_J$ , luego

$$\text{trop}(V(f)) = \bigcup_{\substack{J \in I_{\text{val}}, \\ \#J \geq 2}} \overline{D}_J = \bigcup_{\substack{J \in I_{\text{val}}, \\ \#J \geq 2}} \tilde{\mathcal{N}}(F_J).$$

Puesto que  $F_J$  es un vértice si, y solo si  $\#J = 1$ , deducimos que  $\dim(\tilde{\mathcal{N}}(F_J)) \leq n - 1$  si, y solo si,  $\#J \geq 2$ .

Finalmente, la subdivisión regular de  $\text{Newt}(f)$  es precisamente el complejo poliedral  $\{\pi(F_J) : J \in I_{\text{val}}\}$ , que es dual a  $\{\tilde{\mathcal{N}}(F_J) : J \in I_{\text{val}}\}$ , puesto que  $P_{\text{val}}$  es dual a su abanico normal.  $\square$

**Observación 3.4.8.** Sea  $F = F_J$  una cara inferior de  $P_{\text{val}}$ . De la dualidad del teorema 3.4.7 se deduce lo siguiente:

- (1) Por la observación 1.2.20,  $\dim(\mathcal{N}(F)) + \dim F = n$ . Por otra parte, está claro que  $\dim(\tilde{\mathcal{N}}(F)) = \dim(\mathcal{N}(F))$  y  $\dim(\pi(F)) = \dim F$ , luego las dimensiones de  $\pi(F)$  y  $\tilde{\mathcal{N}}(F) = \overline{D}_J$  son complementarias:  $\dim(\pi(F)) + \dim(\overline{D}_J) = n$ .
- (2) Dados  $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \tilde{\mathcal{N}}(F)$ , de la proposición 3.4.5 se deduce que  $\mathbf{w} - \mathbf{w}'$  pertenece al espacio lineal paralelo a  $\tilde{\mathcal{N}}(F)$  si, y solo si,  $(\mathbf{w} - \mathbf{w}', 0)$  pertenece al espacio lineal paralelo a  $\mathcal{N}(F)$ . Por lo tanto, según la observación 1.2.20, los espacios lineales paralelos a  $\pi(F)$  y a  $\tilde{\mathcal{N}}(F) = \overline{D}_J$  son ortogonales.

**Ejemplo 3.4.9.** Consideramos el cuerpo de series de Puiseux en la variable  $t$  con coeficientes complejos,  $K = \mathbb{C}\{\{t\}\}$ , y sea  $n = 2$ . Sea

$$f = 3tx^2 + 5xy - 7ty^2 + 8x - y + t^2 \in \mathbb{C}\{\{t\}\}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}].$$

Ponemos  $\mathbf{u}_1 = (2, 0)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (1, 1)$ ,  $\mathbf{u}_3 = (0, 2)$ ,  $\mathbf{u}_4 = (1, 0)$ ,  $\mathbf{u}_5 = (0, 1)$ ,  $\mathbf{u}_6 = (0, 0)$ , de modo que  $\text{Newt}(f) = \text{conv}(\{\mathbf{u}_i : 1 \leq i \leq 6\})$ . Asociamos a cada  $\mathbf{u}_i$  el peso  $w_i = \text{val}(c_i)$ , de modo que  $\mathbf{w} = (1, 0, 1, 0, 0, 2)$ . La subdivisión regular del politopo  $P$  inducida por el vector  $\mathbf{w}$  es la que se explicó en el ejemplo 1.2.32. Las caras inferiores del politopo levantado  $P_{\text{val}}$  están indexadas por los siguientes conjuntos de índices  $J$ :

- $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$ .
- $\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}$ .
- $\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}$ .

Esto se deduce de la figura 3.4.2. Por otra parte,

$$\text{trop}(f)(w_1, w_2) = \min\left\{\underbrace{1 + 2w_1}_{L_1(\mathbf{w})}, \underbrace{w_1 + w_2}_{L_2(\mathbf{w})}, \underbrace{1 + 2w_2}_{L_3(\mathbf{w})}, \underbrace{w_1}_{L_4(\mathbf{w})}, \underbrace{w_2}_{L_5(\mathbf{w})}, \underbrace{2}_{L_6(\mathbf{w})}\right\},$$

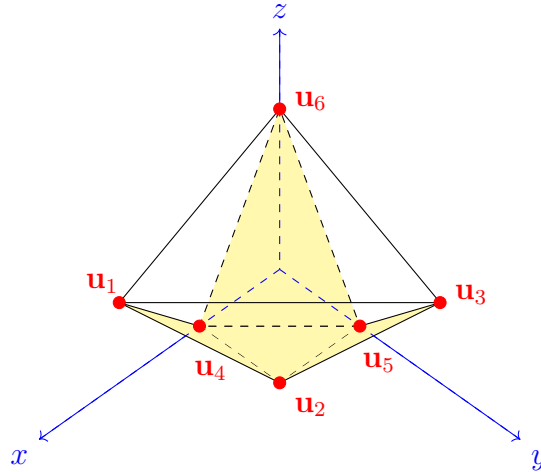


Figura 3.4.2: Polítopo levantado y caras inferiores del ejemplo 3.4.9.

y en el teorema 3.4.7 hemos visto que  $trop(V(f)) = \bigcup_{\substack{J \in I_{\text{val}}, \\ \#J \geq 2}} \overline{D}_J$ .

Basándonos en la dualidad que establece dicho teorema, la curva tropical  $trop(V(f))$  vendrá dada por los conjuntos  $\overline{D}_J$  tales que  $\#J \geq 2$  y  $F_J$  es cara inferior de  $P_{\text{val}}$ .

Por ejemplo, para  $J = \{1, 2\}$ , el conjunto  $D_J$  está formado por los  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$  tales que  $1 + 2w_1 = w_1 + w_2 < 1 + 2w_2, w_1, w_2, 2$ . Es decir,  $D_J = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2 : w_1 < w_2 - 1, w_1 < -1\}$ . Por lo tanto,  $\overline{D}_J = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2 : w_1 = w_2 - 1, w_1 \leq -1\}$ . En la tabla 3.1 se presentan los conjuntos  $\overline{D}_J$  que constituyen la curva tropical  $trop(V(f))$ .

Finalmente, el teorema 3.4.7 nos permite relacionar la subdivisión regular del polítopo de Newton,  $Newt(f)$ , con la curva tropical  $trop(V(f))$ . La dualidad que establece el teorema queda clara en las figuras 3.4.3 y 3.4.4, en las que se han representado el polítopo de Newton de  $f$ , la curva tropical  $trop(V(f))$  y los índices que definen los conjuntos  $\overline{D}_J$  y  $\pi(F_J)$ .

$J$	$\overline{D}_J$
$\{1, 2\}$	$\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2 : w_1 - w_2 = -1, w_1 \leq -1\}$
$\{1, 4\}$	$\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2 : w_1 = -1, w_2 \geq 0\}$
$\{2, 3\}$	$\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2 : w_1 - w_2 = 1, w_1 \leq 0\}$
$\{2, 4\}$	$\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2 : w_2 = 0, -1 \leq w_1 \leq 0\}$
$\{2, 5\}$	$\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2 : w_1 = 0, -1 \leq w_2 \leq 0\}$
$\{3, 5\}$	$\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2 : w_2 = -1, w_1 \geq 0\}$
$\{4, 5\}$	$\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2 : w_1 = w_2, 0 \leq w_1 \leq 2\}$
$\{4, 6\}$	$\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2 : w_1 = 2, w_2 \geq 2\}$
$\{5, 6\}$	$\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2 : w_1 = 2, w_1 \geq 2\}$

Tabla 3.1: Conjuntos  $\overline{D}_J$  que constituyen la curva tropical  $trop(V(f))$  del ejemplo 3.4.9.

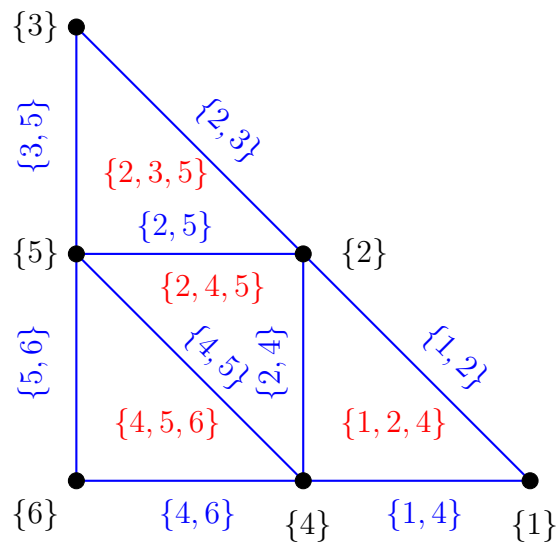


Figura 3.4.3: Subdivisión regular del polígono de Newton del ejemplo 3.4.9.

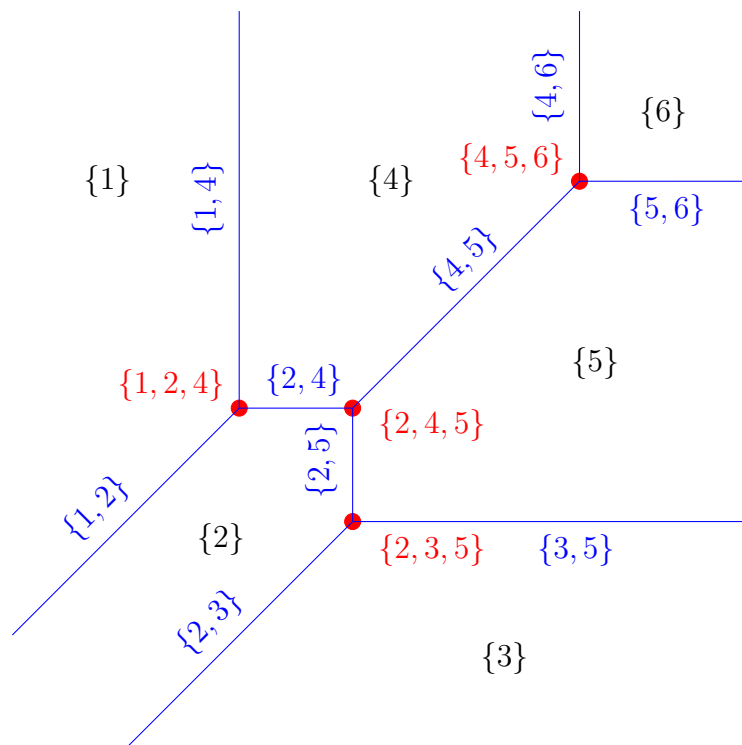


Figura 3.4.4: Curva tropical del ejemplo 3.4.9.

A continuación incluimos dos ejemplos más de curvas tropicales en el plano junto con sus polígonos de Newton duales. Estos ejemplos se han calculado con la función “drawTropicalCurve” de SINGULAR

**Ejemplo 3.4.10.** (1) Sea  $f_1 = 3t^3x^2 + 5xy - 7t^3y^2 + 8tx - ty + 1$ . La curva tropical  $trop(V(f_1))$  es dual a la subdivisión regular del polígono

$$P_1 = conv\{(2, 0), (1, 1), (0, 2), (1, 0), (0, 1), (0, 0)\}$$

inducida por  $\mathbf{w} = (3, 0, 3, 1, 1, 0)$ . La curva tropical  $trop(V(f_1))$  se ha representado en la figura 3.4.5a y la subdivisión regular de  $P_1$  en la figura 3.4.5b.

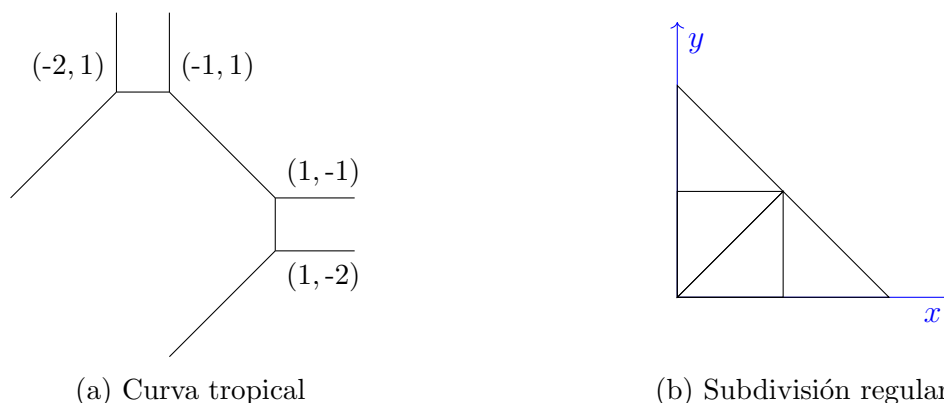


Figura 3.4.5: Curva tropical y subdivisión regular del ejemplo 3.4.10 (1).

(2) Sea  $f_2 = 5t^3x^3 + 7tx^2y - 8txy^2 + 9t^3y^3 + 8tx^2 + 5xy - ty^2 + 4tx + 8ty + t^3$ . La curva tropical  $trop(V(f_2))$  es dual a la subdivisión regular del polígono

$$P_2 = conv\{(3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3), (2, 0), (1, 1), (0, 2), (1, 0), (0, 1), (0, 0)\}$$

inducida por  $\mathbf{w} = (3, 1, 1, 3, 1, 0, 1, 1, 1, 3)$ . La curva tropical  $trop(V(f_2))$  se ha representado en la figura 3.4.6a y la subdivisión regular de  $P_2$  en la figura 3.4.6b.

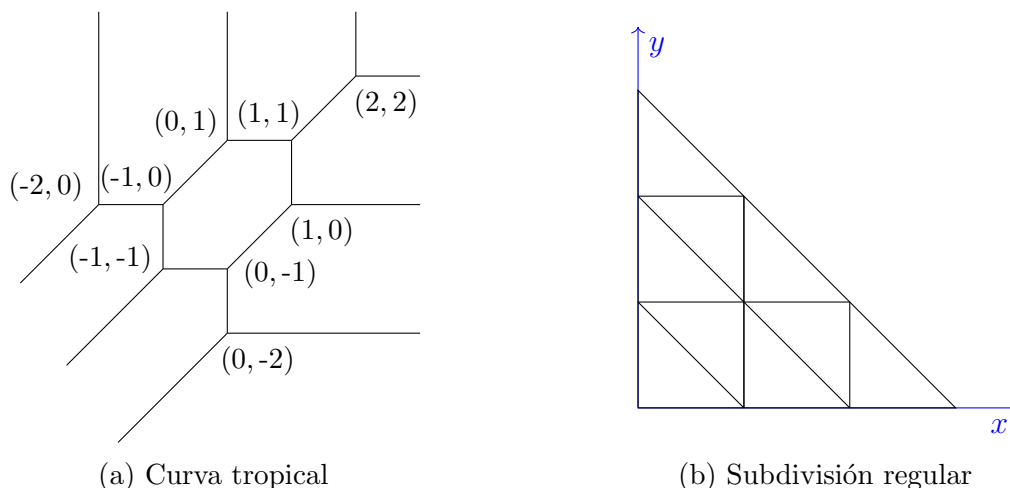


Figura 3.4.6: Curva tropical y subdivisión regular del ejemplo 3.4.10 (2).

Un caso particular importante del teorema 3.4.7 se tiene cuando las valoraciones de todos los coeficientes del polinomio  $f$  son iguales a 0. En particular, si la valoración  $\text{val}$  del cuerpo  $K$  es trivial, entonces siempre estaremos en esta situación. En este caso, la hipersuperficie tropical es un abanico poliedral en  $\mathbb{R}^n$ . Para demostrar este resultado, vamos a probar primero el siguiente lema.

**Lema 3.4.11.** Sea  $f \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  un polinomio de Laurent cuyos coeficientes tienen valoración nula. Entonces el complejo poliedral  $\Sigma_{\text{trop}(f)}$  de la definición 2.3.8 es el abanico normal del politopo  $P = \text{Newt}(f)$ .

*Demostración.* Para cada  $J \subset I$ , sea  $F_J = \text{conv}(\{\mathbf{u}_i : i \in J\})$ . Entonces  $F = F_J$  es cara de  $P$  si, y solo si, existe  $\mathbf{w}$  tal que  $F_J = \text{face}_{\mathbf{w}}(P)$ . Es decir, si, y solo si, existe un vector  $\mathbf{w}$  tal que  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_i$  se minimiza en  $i \in J$ . Puesto que  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_i = L_i(\mathbf{w})$ , esto equivale a  $\mathbf{w} \in D_J$ . Por tanto,  $F_J$  es cara de  $P$  si, y solo si,  $D_J \neq \emptyset$ , y en este caso  $\mathcal{N}(F_J) = D_J$ .  $\square$

**Proposición 3.4.12.** Sea  $f \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  un polinomio de Laurent cuyos coeficientes tienen valoración nula. Entonces la hipersuperficie tropical  $\text{trop}(V(f))$  es el soporte de un abanico poliedral de dimensión  $n - 1$  en  $\mathbb{R}^n$ . Además, este abanico es el  $(n - 1)$ -esqueleto del abanico normal al politopo de Newton de  $f$ .

*Demostración.* Sea  $f = \sum_{i=1}^r c_i \mathbf{x}^{\mathbf{u}_i}$ . Si  $\text{val}(c_i) = 0$  para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , entonces la subdivisión regular del politopo de Newton de  $f$ ,  $\text{Newt}(f)$ , inducida por el vector  $(\text{val}(c_1), \dots, \text{val}(c_r)) = (0, \dots, 0)$  es el propio politopo  $\text{Newt}(f)$ .

Aplicando el lema 3.4.11, el complejo poliedral  $\Sigma_{\text{trop}(f)}$  de la definición 2.3.8 es el abanico normal del politopo  $\text{Newt}(f)$ , y el teorema 3.4.7 nos permite concluir el resultado.  $\square$

**Ejemplo 3.4.13.** Consideramos el polinomio

$$f = 5x^3 + 7x^2y + 8xy^2 + 9y^3 + 8x^2 + 5xy - y^2 + 4x + 8y + 1 \in \mathbb{C}\{\{t\}\}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}].$$

La curva tropical cúbica  $\text{trop}(V(f))$  es dual a la subdivisión regular del polígono

$$P = \text{conv}\{(3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3), (2, 0), (1, 1), (0, 2), (1, 0), (0, 1), (0, 0)\}$$

inducida por el vector  $\mathbf{w} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{10}$ , que consiste únicamente en el triángulo  $P$ . Hemos representado la curva tropical  $\text{trop}(V(f))$  en la figura 3.4.7b y la subdivisión regular de  $P$  en la figura 3.4.7a.

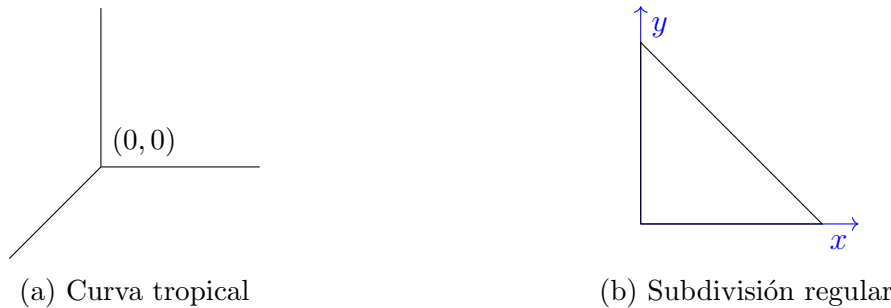


Figura 3.4.7: Curva tropical y subdivisión regular del ejemplo 3.4.13.

# Capítulo 4

## Teorema Fundamental de la Geometría Tropical

El objetivo de este capítulo se centra en enunciar y demostrar el Teorema Fundamental de la Geometría Algebraica Tropical, que establece una conexión entre las variedades clásicas y las variedades tropicales. Este resultado es una generalización del Teorema de Kapranov (teorema 3.3.1).

En la sección 4.1 definimos el concepto de variedad tropical. En la sección 4.2 enunciamos el Teorema Fundamental y discutimos las hipótesis del enunciado. En la sección 4.3 demostramos el teorema, reduciéndolo al caso de hipersuperficies (Teorema de Kapranov). Por último, en la sección 4.4, presentamos algunas consecuencias notables del Teorema Fundamental.

La referencia principal que se ha seguido en este capítulo es [MS15, Cap. 2, §3.2].

### 4.1. Variedades tropicales

**Definición 4.1.1** (Variedad Tropical). Sea  $I \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  un ideal del anillo de polinomios de Laurent en  $n$  variables, y denotemos por  $X = V(I)$  a la variedad que define sobre el toro algebraico  $T_K^n$ . La *tropicalización* de la variedad  $X$ ,  $trop(X)$ , es la intersección de todas las hipersuperficies tropicales definidas por cada polinomio  $f \in I_X$ :

$$trop(X) = \bigcap_{f \in I_X} trop(V(f)) \subset \mathbb{R}^n. \quad (4.1.1)$$

Una *variedad tropical* en  $\mathbb{R}^n$  es cualquier subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  de la forma  $trop(X)$ , donde  $X$  es una subvariedad en el toro  $T_K^n$ , siendo  $K$  un cuerpo valorado.

**Observación 4.1.2.** Aunque comenzamos con un ideal  $I \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  cualquiera, en la definición anterior es necesario considerar el ideal  $I_X$  de la variedad  $X$ , que es radical. En esta definición, nos hemos alejado de [MS15], pues los autores de este libro definen  $trop(X) = \bigcap_{f \in I} trop(V(f))$ . Con esta definición,  $trop(X)$  depende del ideal  $I$ , no solo de

la variedad  $X$ . No obstante, vamos a demostrar que en el caso  $K$  algebraicamente cerrado esta definición no supone ningún problema.

**Proposición 4.1.3.** Sea  $I \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  un ideal del anillo de polinomios de Laurent en  $n$  variables y denotamos por  $\sqrt{I}$  a su radical. Entonces

$$\bigcap_{f \in I} \text{trop}(V(f)) = \bigcap_{g \in \sqrt{I}} \text{trop}(V(g)).$$

*Demostración.* Como  $I \subset \sqrt{I}$ , en particular cada elemento del conjunto de la izquierda pertenece al conjunto de la derecha.

Recíprocamente, sean  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\mathbf{w} \in \bigcap_{f \in I} \text{trop}(V(f))$ , y  $g \in \sqrt{I}$  arbitrario. Veamos que  $\mathbf{w} \in \text{trop}(V(g))$ .

Como  $g \in \sqrt{I}$ , existe un entero  $m \geq 1$  tal que  $g^m \in I$ , así que por hipótesis  $\mathbf{w} \in \text{trop}(V(g^m))$ , es decir, el mínimo en  $\text{trop}(g^m)(\mathbf{w})$  se alcanza al menos dos veces.

Por otra parte, de la demostración de la proposición 2.4.3(3) se deduce  $\text{trop}(g^m)(\mathbf{w}) = m \cdot \text{trop}(g)(\mathbf{w})$ , y como  $m \geq 1$ , entonces el mínimo en  $\text{trop}(g^m)(\mathbf{w})$  se alcanza al menos dos veces si, y solo si, pasa lo mismo con el mínimo en  $\text{trop}(g)(\mathbf{w})$ , es decir,  $\mathbf{w} \in \text{trop}(V(g))$ .  $\square$

**Corolario 4.1.4.** Sean  $K$  un cuerpo algebraicamente cerrado y  $X \subset T^n$  una variedad. Si  $J \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  un ideal tal que  $V(J) = X$ , entonces

$$\text{trop}(X) = \bigcap_{f \in J} \text{trop}(V(f)).$$

*Demostración.* Por el Teorema de los ceros de Hilbert, si  $V(J) = X$ , entonces  $\sqrt{J} = \sqrt{I_X} = I_X$ . Por lo tanto,

$$\text{trop}(X) = \bigcap_{f \in I_X} \text{trop}(V(f)) = \bigcap_{f \in \sqrt{J}} \text{trop}(V(f)) = \bigcap_{f \in J} \text{trop}(V(f)).$$

$\square$

**Observación 4.1.5.** El corolario anterior nos permite “relajar” la definición 4.1.1 cuando el cuerpo  $K$  es algebraicamente cerrado. Dado  $I \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  ideal, si  $X = V(I) \subset T^n$ , entonces

$$\text{trop}(X) = \bigcap_{f \in I} \text{trop}(V(f)).$$

En el caso  $K$  no algebraicamente cerrado, esto no tiene por qué ser cierto.

**Ejemplo 4.1.6.** Consideramos  $K = \mathbb{Q}$  con la valoración 2-ádica,  $f = x^2 + 1$ ,  $g = x^4 + x^2 + 2$ , y los ideales  $I = \langle f \rangle$ ,  $J = \langle g \rangle$ . Entonces  $V(I) = V(J) = \emptyset$ , pero  $\sqrt{I} \neq \sqrt{J}$ . De hecho,

$$\begin{aligned} \text{trop}(f)(w) &= \min\{2w, 0\}, \text{ luego } \text{trop}(V(f)) = \{0\} \\ \text{trop}(g)(w) &= \min\{4w, 2w, 1\}, \text{ luego } \text{trop}(V(g)) = \{0, 1/2\}. \end{aligned}$$



Y de aquí se deduce  $\text{trop}(V(f)) \neq \text{trop}(V(g))$ . Por el ejemplo 2.4.6,  $\{f\}$  y  $\{g\}$  son bases tropicales de  $I$  y  $J$ , respectivamente. Por lo tanto, de la proposición 4.1.10 deducimos

$$\bigcap_{f \in I} \text{trop}(V(f)) \neq \bigcap_{f \in J} \text{trop}(V(f)).$$

**Observación 4.1.7.** Del ejemplo anterior se sigue que para  $K$  no algebraicamente cerrado hay que tener cuidado. La definición de tropicalización de  $X \subset T^n$  es  $\text{trop}(X) = \bigcap_{f \in I_X} \text{trop}(V(f))$ . Si, dado un ideal  $I \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ , queremos considerar el conjunto  $\bigcap_{f \in I} \text{trop}(V(f))$ , lo denotaremos por

$$\text{trop}(V(I)) = \bigcap_{f \in I} \text{trop}(V(f)),$$

dejando claro que este objeto depende del ideal  $I$ , no solo de la variedad  $X = V(I)$ .

En la definición 4.1.1 no basta con considerar la intersección  $\bigcap_{f \in \mathcal{F}} \text{trop}(V(f))$ , donde  $\mathcal{F}$  es un conjunto finito que genera  $I$ . En otras palabras, la tropicalización y la intersección de variedades no conmutan. Y esto es una característica notable de la Geometría Tropical.

**Definición 4.1.8.** La intersección finita de hipersuperficies tropicales se conoce con el nombre de *prevariedad tropical*.

**Ejemplo 4.1.9.** Sean  $n = 2$  y  $K = \mathbb{C}\{t\}$ . Consideramos los polinomios  $f = x + y + 1$  y  $g = x + 2y$  en el anillo de polinomios de Laurent  $K[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ , y sea  $I = \langle f, g \rangle$  el ideal que generan.

- $\text{trop}(f)(w_1, w_2) = \min\{w_1, w_2, 0\}$ , luego

$$\text{trop}(V(f)) = \{w_1 = w_2 \leq 0\} \cup \{w_1 = 0 \leq w_2\} \cup \{w_2 = 0 \leq w_1\}.$$

- $\text{trop}(g)(w_1, w_2) = \min\{w_1, w_2\}$ , luego  $\text{trop}(V(g)) = \{w_1 = w_2\}$ .

Por lo tanto,  $\text{trop}(V(f)) \cap \text{trop}(V(g)) = \{\mathbf{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2 : w_1 = w_2 \leq 0\}$ . Por otra parte, consideramos el polinomio  $h = g - f = y - 1 \in I$ . Su tropicalización es

- $\text{trop}(h)(w_1, w_2) = \min\{w_2, 0\}$ , luego  $\text{trop}(V(h)) = \{w_2 = 0\}$ .

Por lo tanto,  $\text{trop}(X) \subset \text{trop}(V(f)) \cap \text{trop}(V(g)) \cap \text{trop}(V(h)) = \{(0, 0)\}$ , y de aquí se deduce  $\text{trop}(X) \neq \text{trop}(V(f)) \cap \text{trop}(V(g))$ .

El ejemplo anterior muestra que, en general, una variedad tropical  $\text{trop}(X)$  no es la intersección de las hipersuperficies correspondientes a un sistema de generadores del ideal  $I$ . Sin embargo, este resultado es cierto cuando el sistema de generadores es una base tropical del ideal  $I$ :

**Proposición 4.1.10.** Un sistema de generadores finito  $\mathcal{T}$  del ideal  $I \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  es una base tropical de  $I$  si, y solo si,

$$\text{trop}(V(I)) = \bigcap_{f \in \mathcal{T}} \text{trop}(V(f)).$$

*Demostración.* Supongamos que  $\mathcal{T}$  es una base tropical de  $I$ . Como  $\mathcal{T} \subset I$ , entonces la contención  $\subset$  del enunciado es general. Para probar la otra contención, sea  $\mathbf{w} \notin \text{trop}(V(I))$  y veamos que  $\mathbf{w} \notin \bigcap_{g \in \mathcal{T}} \text{trop}(V(g))$ . Como  $\mathbf{w} \notin \text{trop}(V(I))$ , existe  $f \in I$  tal que  $\mathbf{w} \notin \text{trop}(V(f))$ , entonces el mínimo en  $\text{trop}(f)(\mathbf{w})$  se alcanza una única vez. Por ser  $\mathcal{T}$  base tropical, existe  $g \in \mathcal{T}$  tal que el mínimo en  $\text{trop}(g)(\mathbf{w})$  se alcanza una única vez, es decir,  $\mathbf{w} \notin \bigcap_{g \in \mathcal{T}} \text{trop}(V(g))$ . Por lo tanto, se tiene la igualdad

$$\text{trop}(V(I)) = \bigcap_{f \in \mathcal{T}} \text{trop}(V(f)).$$

Recíprocamente, supongamos que se verifica la igualdad del enunciado. Entonces de dicha igualdad deducimos la siguiente equivalencia: dado  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ , existe  $f \in I$  tal que el mínimo en  $\text{trop}(f)(\mathbf{w})$  se alcanza una única vez si, y solo si, existe  $g \in \mathcal{T}$  tal que el mínimo en  $\text{trop}(g)(\mathbf{w})$  se alcanza una única vez. Es decir, si se da la igualdad del enunciado, entonces  $\mathcal{T}$  es base tropical del ideal  $I$ .  $\square$

**Observación 4.1.11.** Como todo ideal  $I \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  admite una base tropical finita (teorema 2.4.9), entonces toda variedad tropical es una prevariedad tropical.

**Ejemplo 4.1.12.** Volviendo al ejemplo 4.1.9, notemos que los polinomios  $f = x + y + 1$  y  $g = x + 2y$  no forman una base tropical de  $I = \langle f, g \rangle$ , pues hemos visto que  $\text{trop}(V(I)) \neq \text{trop}(V(f)) \cap \text{trop}(V(g))$ . Sin embargo, si añadimos el polinomio  $h = y - 1 \in I$  al sistema de generadores, entonces el conjunto  $\mathcal{T} = \{f, g, h\}$  sí es una base tropical de  $I$ . Esto es porque, como demostraremos en el teorema 4.2.1,  $\text{trop}(X) = \text{val}(X) = \text{val}(\{(-2, 1)\}) = \{(0, 0)\}$ . Entonces se verifica la igualdad  $\text{trop}(X) = \text{trop}(V(f)) \cap \text{trop}(V(g)) \cap \text{trop}(V(h))$ , luego  $\mathcal{T}$  es una base tropical de  $I$  (proposición 4.1.10).

## 4.2. Enunciado del Teorema

Una vez introducidos estos conceptos, estamos en condiciones de generalizar el teorema 3.3.1 (Teorema de Kapranov) al caso de variedades tropicales:

**Teorema 4.2.1** (Teorema Fundamental de la Geometría Algebraica Tropical). Sea  $K$  un cuerpo algebraicamente cerrado con una valoración no trivial. Sea  $I \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  un ideal, y sea  $X = V(I)$  la variedad que define el ideal  $I$  en el toro  $T^n = (K^*)^n$ . Entonces los siguientes tres subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  coinciden:

- (1) La variedad tropical  $\text{trop}(X)$ .
- (2) El conjunto  $\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \text{in}_{\mathbf{w}}(I) \neq \langle 1 \rangle\}$ .
- (3) La clausura del conjunto  $\text{val}(X) = \{(\text{val}(y_1), \dots, \text{val}(y_n)) : (y_1, \dots, y_n) \in X\} \subset \mathbb{R}^n$  para la topología usual.

Además, si  $X$  es irreducible y  $\mathbf{w}$  es cualquier punto de  $\Gamma_{\text{val}}^n \cap \text{trop}(X)$ , entonces el conjunto  $\{\mathbf{y} \in X : \text{val}(\mathbf{y}) = \mathbf{w}\}$  es denso en la variedad clásica  $X = V(I)$  para la topología de Zariski.

El resto de este capítulo está dedicado a demostrar el teorema 4.2.1. Veamos primero que la variedad tropical  $trop(X)$  no depende del cuerpo  $K$ , por lo que para aplicar el teorema bastará con considerar una extensión “adecuada” de  $K$ .

**Definición 4.2.2.** Sea  $L/K$  una extensión de cuerpos. Si  $Y \subset T_K^n$  es una variedad definida por un ideal  $I \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ , entonces la *extensión* de  $Y$  a  $T_L^n$  es la subvariedad  $Y_L$  de  $T_L^n$  definida por el ideal  $I_L = IL[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ .

Recordemos que  $L/K$  es una *extensión de cuerpos valorada* si las valoraciones satisfacen  $val_L|_K = val_K$ . Por el teorema 1.1.26, dados un cuerpo valorado  $K$  y una extensión de cuerpos algebraica  $L/K$ , existe siempre una extensión de la valoración en  $K$  tal que la extensión  $L/K$  es valorada.

**Teorema 4.2.3.** Sea  $K$  un cuerpo provisto de una valoración (posiblemente trivial), y sea  $L/K$  una extensión de cuerpos valorada, tal que el cuerpo  $L$  es algebraicamente cerrado. Sea  $X \subset T_K^n$  una subvariedad del toro  $T_K^n$ , y sea  $X_L$  su extensión a  $T_L^n$ . Entonces

$$trop(X_L) = trop(X) \subset \mathbb{R}^n.$$

*Demostración.* Sea  $I = I_X \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  el ideal de la variedad  $X$ , entonces el ideal  $I_L = IL[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  define la variedad  $X_L$ .

Como  $L$  es algebraicamente cerrado, no hay ambigüedad al definir  $trop(X_L)$ , y tenemos  $trop(X_L) = \bigcap_{f \in I_L} trop(V(f))$ . Como cada polinomio  $f \in I$  pertenece también a  $I_L$ , entonces  $trop(X_L) \subset trop(X)$ , luego es suficiente probar la otra inclusión.

Aplicando el teorema 2.4.9 y la proposición 2.4.8 se deduce la existencia de una base tropical finita  $\mathcal{T}$  de  $I_L$ , con  $\mathcal{T} \subset I_L \cap K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}] = I$ . Por lo tanto,

$$trop(X) = \bigcap_{f \in I} trop(V(f)) \subset \bigcap_{f \in \mathcal{T}} trop(V(f)) = trop(X_L).$$

□

**Observación 4.2.4.** El teorema 4.2.3 nos permite trabajar en una extensión adecuada del cuerpo  $K$  cuando sea necesario. Si el cuerpo  $K$  no es algebraicamente cerrado, entonces primero pasamos a la clausura algebraica de  $K$ ,  $\bar{K}$ .

- Si la valoración en  $K$  es trivial, consideramos en  $\bar{K}$  la valoración trivial y trabajamos en el cuerpo  $L = \bar{K}((\mathbb{R}))$  (o en  $\bar{K}\{\{t\}\}$  si  $\bar{K}$  tiene característica cero).
- Si la valoración en  $K$  no es trivial entonces, por el teorema 1.1.26, se puede extender la valoración a  $\bar{K}$ , y trabajamos en el cuerpo  $\bar{K}$ .

Por lo tanto, siempre podemos suponer que el grupo de valores  $\Gamma_{val}$  es denso en  $\mathbb{R}$  (proposición 1.1.20). Esto nos garantiza también que la valoración admite una escisión  $\Gamma_{val} \rightarrow \bar{K}$  (proposición 1.1.22), lo que nos permite aplicar la teoría de Gröbner desarrollada en el capítulo 2.

Esto no quiere decir que el teorema sea aplicable para un cuerpo no algebraicamente cerrado o tal que la valoración en  $K$  no sea trivial. Lo que quiere decir es que, para calcular  $trop(X)$ , podemos trabajar en una extensión  $L$  en la que se verifiquen las hipótesis del teorema, y entonces  $trop(X) = trop(X_L)$ .

### 4.3. Demostración del teorema

Durante el resto de este capítulo asumiremos que el cuerpo  $K$  es algebraicamente cerrado y consideramos en él una valoración  $\text{val} : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  que escinde. Comenzamos con una serie de resultados cuyo objetivo es preparar la prueba del teorema 4.2.1.

**Lema 4.3.1.** Sean  $K$  un cuerpo algebraicamente cerrado e  $I \subset K[x_0, x_1, \dots, x_n]$  un ideal homogéneo. Dado  $\mathbf{w} \in \Sigma(I)$  (definición 2.3.11), sea  $\sigma \in \Sigma(I)$  una celda tal que  $\mathbf{w} \in \text{relint}(\sigma)$ . Entonces existe  $\mathbf{w}' \in \text{relint}(\sigma) \cap \Gamma_{\text{val}}^{n+1}$ . De hecho, se puede elegir  $\mathbf{w}'$  tal que  $w'_0 = 0$ .

*Demostración.* Por el teorema 2.3.5, el complejo  $\Sigma(I)$  es  $\Gamma_{\text{val}}$ -racional. Supongamos que  $\sigma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ , para unos ciertos  $A \in \mathcal{M}_{m \times (n+1)}(\mathbb{Q})$ ,  $\mathbf{b} \in \Gamma_{\text{val}}^m$ . Entonces

$$\text{relint}(\sigma) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : \begin{array}{l} A_1 \cdot \mathbf{x} < \mathbf{b}_1 \\ A_2 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_2 \end{array} \right\},$$

para  $A_1 \in \mathcal{M}_{m_1 \times (n+1)}(\mathbb{Q})$ ,  $A_2 \in \mathcal{M}_{m_2 \times (n+1)}(\mathbb{Q})$  ( $m_1 + m_2 = m$ ), tales que  $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$  y  $\mathbf{b}_1 \in \Gamma_{\text{val}}^{m_1}$ ,  $\mathbf{b}_2 \in \Gamma_{\text{val}}^{m_2}$  (vectores columna) son tales que  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix}$ .

Como  $\mathbf{w} \in \text{relint}(\sigma)$ , entonces  $\text{relint}(\sigma) \neq \emptyset$ , luego el sistema  $A_2\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$  tiene solución. Sea  $r = \text{rg}(A_2) = \text{rg}(A_2|\mathbf{b}_2)$ . Entonces el conjunto de soluciones de  $A_2\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$  tiene dimensión  $n - r$ . Además, haciendo operaciones elementales por filas, equivale a  $\tilde{A}_2\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}}_2$ , donde

$$\tilde{A}_2 = \left( \begin{array}{c|c} I_r & * \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \quad (\text{salvo reordenación de coordenadas}).$$

Estas operaciones se pueden hacer de modo que  $\tilde{A}_2$  tenga coeficientes en  $\mathbb{Q}$  luego, por ser  $\Gamma_{\text{val}}$  divisible, se obtiene  $\tilde{\mathbf{b}}_2 \in \Gamma_{\text{val}}^{m_1}$  de la forma  $\tilde{\mathbf{b}}_2 = (\tilde{b}_{m_1+1}, \dots, \tilde{b}_{m_1+r}, 0, \dots, 0)$ . Por lo tanto, dados  $\lambda_r, \dots, \lambda_n \in \Gamma_{\text{val}}$ , existen unos únicos  $\lambda_0, \dots, \lambda_{r-1} \in \Gamma_{\text{val}}$  tales que  $\tilde{A}_2 \cdot \lambda = \tilde{\mathbf{b}}_2$ , es decir,  $A_2 \cdot \lambda = \mathbf{b}_2$  (si  $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_{r-1}, \lambda_r, \dots, \lambda_n)$ ).

Para el punto  $\mathbf{w} = (w_0, \dots, w_n) \in \text{relint}(\sigma)$  considerado, denotamos  $\mathbf{w}^{(n-r)} = (w_r, \dots, w_n)$ . Entonces, por la densidad de  $\Gamma_{\text{val}}$ , existe una sucesión  $(\tilde{\mathbf{w}}_i)_{i=1}^{\infty} \subset \Gamma_{\text{val}}^{n+1-r}$  con  $\tilde{\mathbf{w}}_i \rightarrow \mathbf{w}^{(n-r)}$ .

Para cada  $i$ , sea  $\mathbf{w}_i \in \Gamma_{\text{val}}^{n+1}$  el único punto tal que  $\mathbf{w}_i^{(n-r)} = \tilde{\mathbf{w}}_i$  y  $A_2\mathbf{w}_i = \mathbf{b}_2$ . Entonces  $\mathbf{w}_i \rightarrow \mathbf{w}$  (por la unicidad). Además, como la aplicación  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{b}_1 - A_1\mathbf{x}$  es continua y  $\mathbf{b}_1 - A_1\mathbf{w} > 0$ , existe un índice  $i_0$  de modo que el punto  $\mathbf{w}' = \mathbf{w}_{i_0}$  es tal que  $\mathbf{b}_1 - A_1\mathbf{w}' > 0$ , y este  $\mathbf{w}'$  resuelve el problema. De hecho, podemos considerar el punto

$$\mathbf{w}' - w'_0\mathbf{1} = (0, w'_2 - w'_0, \dots, w'_{n+1} - w'_0) \in \Gamma_{\text{val}}^{n+1} \cap \sigma,$$

pues el espacio de linealidad de  $\sigma$  contiene a la recta  $\mathbb{R}\mathbf{1}$ . □

**Proposición 4.3.2.** Sea  $X \subset T^n$  una variedad irreducible cuyo ideal primo es  $I = I_X \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ , y sea  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  con  $\text{in}_{\mathbf{w}}(I) \neq \langle 1 \rangle$ . Entonces todos los ideales primos minimales del ideal inicial  $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$  en  $\mathbb{k}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  tienen la misma dimensión que  $X$ .

*Demostración.* Sea  $d = \dim(X)$  y consideramos el ideal homogéneo  $I_{proj} \subset K[x_0, x_1, \dots, x_n]$ . Primero vamos a reducir el problema al caso  $\mathbf{w} \in \Gamma_{\text{val}}$ . Sea  $\sigma \in \Sigma(I_{proj})$  una celda tal que  $\mathbf{w} \in \text{relint}(\sigma)$ . Por el lema 4.3.1, existe  $\mathbf{w}' \in \Gamma_{\text{val}}^n$  tal que  $(0, \mathbf{w}') \in \sigma$ . Por lo tanto, podemos suponer  $\mathbf{w} \in \Gamma_{\text{val}}^n$ .

Es conocido que el ideal  $I_{proj}$  es primo y tiene dimensión  $d + 1$ . Aplicando el teorema 2.2.12, los primos minimales de  $\text{in}_{(0, \mathbf{w})}(I_{proj})$  tienen dimensión  $d + 1$ .

Denotamos  $A = \mathbb{k}[x_0, \dots, x_n]$ ,  $J = \text{in}_{(0, \mathbf{w})}(I_{proj}) \subset A$ , y  $a = x_0 - 1 \in A$ , y veamos que los primos minimales de  $J + \langle a \rangle$  tienen dimensión  $d$ . Sea  $\mathfrak{p}$  un primo minimal de  $J + \langle a \rangle$ . Entonces  $J \subset \mathfrak{p}$ , y  $\mathfrak{p}/J$  es un primo minimal de  $(J + \langle a \rangle)/J$  en  $A/J$ . Por otra parte,  $(J + \langle a \rangle)/J = \langle \bar{a} \rangle$  es un ideal principal ( $\bar{a}$  denota la clase de  $a$  en el cociente  $A/J$ ). Por lo tanto, por el Teorema del ideal principal de Krull,  $ht(\mathfrak{p}/J) \leq 1$ . Notemos que  $A/\mathfrak{p} \cong (A/J)/(\mathfrak{p}/J)$ , luego

$$\dim(A/\mathfrak{p}) = \dim(A/J) - ht(\mathfrak{p}/J) \geq (d + 1) - 1 = d.$$

(Esto es cierto por ser  $A/J$  una  $\mathbb{k}$ -álgebra finitamente generada y dominio de integridad, no es general).

Si fuera  $\dim(A/\mathfrak{p}) > d$ , existiría una cadena de ideales de  $A/\mathfrak{p}$  de longitud  $d + 1$ , lo que equivale a una cadena  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_{d+1}$ . Como  $\mathfrak{p} \supset J + \langle a \rangle$ , entonces  $J \subset \mathfrak{p}$ , luego existe un primo minimal de  $J$ ,  $\mathfrak{q}$ , tal que  $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{q}$ . Esto es porque los primos minimales de un ideal homogéneo en  $A$  son homogéneos y están contenidos en  $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$  (“ideal irrelevante”); en particular, no contienen al elemento  $a$ . Como  $a \notin \mathfrak{q}$ , entonces  $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{q}$  y se tiene la cadena  $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_{d+1}$ , lo que implica que  $\dim(A/\mathfrak{q}) \geq d + 2$ , en contradicción con el hecho de que todos los primos minimales de  $J$  tienen dimensión  $d + 1$  (teorema 2.2.12).

Por la proposición 2.4.2,  $\text{in}_{\mathbf{w}}(I) = \text{in}_{(0, \mathbf{w})}(I_{proj})|_{x_0=1}$ , visto como un ideal en  $\mathbb{k}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ . Los primos minimales de  $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$  son las imágenes en  $\mathbb{k}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  de los primos minimales de  $\text{in}_{(0, \mathbf{w})}(I_{proj}) + \langle x_0 - 1 \rangle$  que no contienen ningún monomio en  $x_1, \dots, x_n$ . Y ya hemos demostrado que todos estos tienen dimensión  $d$ .  $\square$

La prueba del teorema 4.2.1 se va a reducir al caso particular de hipersuperficies, ya demostrado, proyectando. El siguiente resultado demuestra la existencia de una proyección “adecuada”.

**Proposición 4.3.3.** Sea  $X$  una subvariedad de  $T^n$ , y sea  $m \in \mathbb{N}$ , con  $n \geq m \geq \dim(X)$ . Entonces existe un morfismo de variedades  $\psi : T^n \rightarrow T^m$  cuya imagen  $\psi(X)$  es cerrada en  $T^m$  para la topología de Zariski y verifica  $\dim(\psi(X)) = \dim(X)$ . Además, esta aplicación se puede elegir de modo que se cumplan las siguientes condiciones:

- (1) El núcleo de la aplicación lineal  $\text{trop}(\psi) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  interseca trivialmente con un conjunto prefijado de subespacios  $m$ -dimensionales de  $\mathbb{R}^n$ .
- (2) Cuando  $n > m$ , si cambiamos las coordenadas de modo que  $\psi$  es la proyección sobre las primeras  $m$  coordenadas, entonces el ideal  $I = I_X$  de  $X$  está generado por polinomios en las variables  $x_{m+1}, \dots, x_n$  cuyos coeficientes son monomios (de Laurent) en las variables  $x_1, \dots, x_m$ .

*Demostración.* Para demostrar este resultado, vamos a aplicar inducción sobre  $n - m$ . Si  $n = m$ , la aplicación identidad cumple las propiedades del enunciado.

Para  $n > m$ , el ideal  $I = I_X$  no es el ideal nulo, pues  $\dim(X) < n$ . Para  $l \in \mathbb{N}$ , definimos el cambio de variables en  $T^n$  dado por

$$\phi_l^*(x_1) = x_1 x_n^l, \phi_l^*(x_2) = x_2 x_n^{l^2}, \dots, \phi_{l-1}^* = x_{n-1} x_n^{l^{n-1}}, \phi_l^*(x_n) = x_n.$$

Para cualquier polinomio  $f$ , eligiendo  $l$  suficientemente grande, el polinomio de Laurent transformado

$$g = \phi_l^*(f) = f(x_1 x_n^l, x_2 x_n^{l^2}, \dots, x_{n-1} x_n^{l^{n-1}}, x_n)$$

tiene la propiedad de que cada uno de sus monomios tiene distinto grado en la variable  $x_n$ . Como  $\phi^*$  es invertible, podemos reemplazar  $I$  por  $\phi^*(I)$  y suponer que  $I$  está generado por un conjunto de polinomios con esta propiedad. Esto hecho será de gran utilidad cuando demostremos que  $\phi$  cumple (2).

Fijamos ahora  $m = n - 1$  y consideramos la proyección (monomial)  $\pi : T^n \rightarrow T^{n-1}$  dada por  $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1})$ . Probaremos que  $\pi$  cumple las condiciones del enunciado.

Veamos que  $\pi(X)$  es cerrado. Para ello, vamos a probar que  $\overline{\pi(X)} = V(I')$ , donde  $I' = I \cap K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{n-1}^{\pm 1}]$  y después comprobaremos que  $\pi(X) = \overline{\pi(X)}$ .

Tenemos que demostrar que  $V(I')$  es el menor cerrado que contiene a  $\pi(X)$ . Sea  $\mathbf{y} \in \pi(X)$ , entonces existe  $\mathbf{x} \in X$  tal que  $\pi(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ . Tomamos  $g \in I'$ , entonces  $g(\mathbf{y}) = g(\mathbf{x}) = 0$ , pues en  $g$  no aparece la variable  $x_n$ . Por lo tanto, queda demostrado  $\pi(X) \subset V(I')$ . Veamos ahora que es el menor cerrado que lo contiene, comprobando que si  $J \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{n-1}^{\pm 1}]$  es tal que  $\pi(X) \subset V(J)$ , entonces  $I \cap K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{n-1}^{\pm 1}] \supset J$ , es decir,  $J \subset I$ . Sea  $f \in J$ , en particular  $f \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{n-1}^{\pm 1}]$ , y veamos que  $f \in I$ . Para ello, tomamos  $\mathbf{x} \in X$  y tenemos que probar que  $f(\mathbf{x}) = 0$ . Como  $\mathbf{x} \in X$ , entonces  $\mathbf{y} = \pi(\mathbf{x}) \in \pi(X) \subset V(J)$ , así que  $f(\mathbf{y}) = 0$ . Como en  $f$  no aparece la variable  $x_n$ , entonces  $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}) = 0$ , luego  $f \in I$ . Esto demuestra que  $J \subset I'$ , y entonces concluimos  $\overline{\pi(X)} = V(I')$ .

Veamos ahora que  $\pi(X) = \overline{\pi(X)}$ . Sea  $\mathbf{y} \in \overline{\pi(X)}$ , entonces  $f(\mathbf{y}) = 0$  para todo  $f \in I \cap K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{n-1}^{\pm 1}]$ . Tenemos que encontrar  $y_n \in K^*$  tal que  $(\mathbf{y}, y_n) \in X$ . Para ello, consideramos el ideal  $J = \langle f(\mathbf{y}, x_n) : f \in I \rangle \subset K[x_n^{\pm 1}]$ . Si  $f(\mathbf{y}, x_n)$  es el polinomio nulo para cada  $f \in I$ , entonces podemos fijar cualquier valor  $y_n \in K^*$ . En caso contrario, el ideal  $J \neq \langle 0 \rangle$  y, como  $K[x_n^{\pm 1}]$  es un dominio de ideales principales, existe un polinomio  $f_0 \in I$ ,  $f_0 \neq 0$ , tal que  $J = \langle f_0(\mathbf{y}, x_n) \rangle \subset K[x_n^{\pm 1}]$ . Además, no puede ocurrir que  $f_0 \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{n-1}^{\pm 1}]$ , pues en este caso el polinomio  $f_0(\mathbf{y}, x_n) = f_0(\mathbf{y}) = 0$  sería el polinomio nulo. Sea  $s \geq 0$  el menor número tal que  $\tilde{f}_0 = x_n^s \cdot f_0(\mathbf{y}, x_n) \in K[x_n]$ . Entonces  $\tilde{f}_0$  no puede ser constante, pues si no sería el polinomio nulo ( $\tilde{f}_0(\mathbf{y}, x_n) = \tilde{f}_0(\mathbf{y}) = 0$ ) ni puede ser un múltiplo de  $x_n$ , pues hemos elegido el número  $s$  mínimo. Por tanto, el polinomio  $\tilde{f}_0(x_n)$  tiene al menos una raíz, que es no nula, pues el cuerpo  $K$  es algebraicamente cerrado. Denotamos por  $\alpha$  a una de tales raíces, entonces  $f_0(\mathbf{y}, \alpha) = 0$ . Sea  $f \in I$ , entonces  $f(\mathbf{y}, x_n) \in J$ , luego existe un polinomio  $\lambda \in K[x_n^{\pm 1}]$  tal que  $f(\mathbf{y}, x_n) = \lambda \cdot f_0(\mathbf{y}, x_n)$ . Por tanto,  $f(\mathbf{y}, \alpha) = \lambda(\alpha) \cdot f_0(\mathbf{y}, \alpha) = 0$ , es decir,  $(\mathbf{y}, \alpha) \in X$ . En conclusión,  $\pi(X) = \overline{\pi(X)}$ , luego  $\pi(X)$  es cerrado.

Como  $I$  está generado por un conjunto de polinomios tales que cada uno de sus monomios

tiene distinto grado en la variable  $x_n$ , entonces cada uno de estos polinomios lo podemos escribir como un polinomio en la variable  $x_n$  cuyos coeficientes son monomios en las variables  $x_1, \dots, x_{n-1}$ . Por lo tanto, se verifica la condición (2) del enunciado.

Veamos ahora que la dimensión de  $X$  y de  $\phi(X)$  coinciden. Consideramos en  $K[X]$  la estructura de  $K[\pi(X)]$ -álgebra dada por la restricción de escalares vía el homomorfismo inyectivo  $K[\pi(X)] = K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{n-1}^{\pm 1}]/I' \rightarrow K[X] = K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]/I$ . La  $K[\pi(X)]$ -álgebra  $K[X]$  está finitamente generada por la clase de  $x_n$ , luego su cuerpo de fracciones  $K(X)$  es una extensión finita de  $K(\pi(X))$ . Esto prueba que sus grados de trascendencia son iguales y, por tanto,  $\dim(X) = \dim(\pi(X))$  ([CLO97, Cap. 9, §5, Th.6]).

Aplicando  $n-m$  veces la construcción anterior (caso  $n-m=1$ ), encontramos un morfismo  $\psi : T^n \rightarrow T^m$  cumpliendo la propiedad (2) del enunciado.

Para probar que  $\psi$  cumple (1), notemos que podemos elegir el cambio de coordenadas  $\phi^*$  de modo que el núcleo de  $\text{trop}(\pi)$  evite ciertos subespacios prefijados de  $\mathbb{R}^n$ . En las coordenadas originales,  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  es la aplicación

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1 x_n^l, x_2 x_n^{l^2}, \dots, x_{n-1}^{l^{n-1}}).$$

Por lo tanto, la aplicación lineal  $\text{trop}(\pi) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  viene dada por

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1 + l x_n, x_2 + l^2 x_n, \dots, x_{n-1} + l^{n-1} x_n),$$

luego  $\ker(\text{trop}(\pi))$  es la recta generada por el vector  $(l, l^2, \dots, l^{n-1}, -1) \in \mathbb{R}^n$ . Para  $l > 0$  suficientemente grande, esta recta interseca con un conjunto fijado de hiperplanos de  $\mathbb{R}^n$  únicamente en el origen. El caso general se obtiene, de nuevo, por inducción.  $\square$

Un resultado clave de la Geometría Tropical es que la variedad  $\text{trop}(X)$  es el soporte de un complejo poliedral  $\Gamma_{\text{val}}$ -racional. Una estructura particular de  $\text{trop}(X)$  como complejo  $\Gamma_{\text{val}}$ -racional se deriva, como veremos a continuación, de la caracterización (2) del Teorema Fundamental. En el siguiente resultado identificaremos  $\mathbb{R}^n$  con el cociente  $\mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{R}\mathbf{1}$  mediante la aplicación  $\mathbf{w} \mapsto (0, \mathbf{w}) + \mathbb{R}\mathbf{1}$ .

**Proposición 4.3.4.** Sean  $I \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  un ideal y  $X = V(I)$  la variedad que define en el toro algebraico  $T^n$ . Entonces el conjunto  $\tilde{X} = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \text{in}_{\mathbf{w}}(I) \neq \langle 1 \rangle\}$  es el soporte de un subcomplejo del complejo de Gröbner  $\Sigma(I_{\text{proj}})$  y es, por tanto, el soporte de un complejo  $\Gamma_{\text{val}}$ -racional.

*Demostración.* Por el teorema 2.3.5,  $\Sigma(I_{\text{proj}})$  es un complejo poliedral  $\Gamma_{\text{val}}$ -racional contenido en  $\mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{R}\mathbf{1}$ . Veamos primero que

$$\tilde{X} = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \text{in}_{(0, \mathbf{w})}(I_{\text{proj}}) \text{ no contiene un monomio}\}.$$

Si  $1 \in \text{in}_{\mathbf{w}}(I)$ , por la proposición 2.4.2 existe  $f \in I$  tal que  $1 = \text{in}_{\mathbf{w}}(f)$ . Multiplicando por un monomio de  $K[x_1, \dots, x_n]$ ,  $\mathbf{x}^{\mathbf{u}_0} f \in I \cap K[x_1, \dots, x_n]$  y, por tanto,  $\mathbf{x}^{\mathbf{u}_0} = \text{in}_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}^{\mathbf{u}_0} f) = \text{in}_{(0, \mathbf{w})}(\widetilde{\mathbf{x}^{\mathbf{u}_0} f})|_{x_0=1}$  es un monomio. En definitiva, existe  $f \in I_{\text{proj}}$  homogéneo tal que  $\text{in}_{(0, \mathbf{w})}(f)|_{x_0=1}$  es un monomio. Si  $f = \sum_{\mathbf{u}} c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}}$ , su forma inicial tiene la forma  $\sum_{\mathbf{u}} a_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}}$  (para algunos  $\mathbf{u}$ ), y al particularizar en  $x_0 = 1$ , se obtiene  $\sum_{\mathbf{u}} a_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}'}$

(donde  $\mathbf{u}' = (0, u_1, \dots, u_n)$ ). Ahora, al ser  $f$  homogéneo,  $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_j$  si, y solo si,  $\mathbf{u}'_i = \mathbf{u}'_j$ , luego  $\sum_{\mathbf{u}} a_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}'}$  es un monomio si, y solo si,  $a_{\mathbf{u}} = 0$  para todos los  $\mathbf{u}$  excepto uno, es decir,  $in_{(0, \mathbf{w})}(f)$  es un monomio y pertenece a  $in_{(0, \mathbf{w})}(I_{proj})$ .

Recíprocamente, si  $in_{(0, \mathbf{w})}(f)$  es un monomio de  $in_{(0, \mathbf{w})}(I_{proj})$ , entonces  $in_{\mathbf{w}}(f)|_{x_0=1}$  es un monomio de  $in_{\mathbf{w}}(I)$ , y los monomios son unidades en  $\mathbb{k}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ .

Tenemos  $\tilde{X} = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : in_{(0, \mathbf{w})}(I_{proj}) \text{ no contiene un monomio}\}$ . Por el corolario 2.2.10, el conjunto  $\tilde{X}$  es cerrado. Además, si  $\mathbf{w} \in \tilde{X}$  y  $\mathbf{w}' \in \mathbb{R}^n$  es tal que  $in_{(0, \mathbf{w}')} (I_{proj}) = in_{(0, \mathbf{w})}(I_{proj})$ , entonces  $\mathbf{w}' \in \tilde{X}$ . De aquí se deduce  $C_{I_{proj}}[\mathbf{w}] \subset \tilde{X}$  y, tomando adherencias,  $\overline{C_{I_{proj}}[\mathbf{w}]} \subset \tilde{X}$ . Por lo tanto,  $\tilde{X}$  es la unión de todas las celdas  $\sigma \in \Sigma(I_{proj})$  tales que  $\sigma \cap \tilde{X} \neq \emptyset$ , y estas forman (por lo anterior) un subcomplejo del complejo de Gröbner  $\Sigma(I_{proj})$ .  $\square$

**Observación 4.3.5.** En la proposición anterior, hemos elegido un subcomplejo del complejo de Gröbner. Pero esta elección no es única, y podemos tener distintas formas de ver el conjunto  $\tilde{X}$  como el soporte de un complejo  $\Gamma_{\text{val}}$ -racional, como veremos en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 4.3.6.** Sea  $K = \mathbb{C}$ , y consideramos el ideal

$$I = \langle x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5, 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 11x_5 \rangle \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_5^{\pm 1}].$$

Sea  $\phi : T^5 \rightarrow T^5$  el automorfismo (cambio de coordenadas) dado por

$$\phi^* : x_1 \mapsto x_1, x_2 \mapsto x_2x_3, x_3 \mapsto x_3x_4, x_4 \mapsto x_4x_5, x_5 \mapsto x_5$$

y el ideal transformado  $J = (\phi^*)^{-1}(I)$ .

Para  $I$ , la variedad  $trop(V(I_{proj}))$  tiene una estructura de abanico formada por 10 conos maximales (y conos de dimensión menor), mientras que la de  $trop(V(J_{proj}))$  está formada por 12 conos maximales (y conos de dimensión menor).

Entonces, utilizando el isomorfismo  $trop(\phi) : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ , tenemos dos estructuras distintas de  $trop(V(I_{proj}))$  como subabanico del abanico de Gröbner  $\Sigma(I_{proj})$ . Los cálculos de este ejemplo se han realizado utilizando la función `gfan.tropicalbruteforce` de Gfan ([Jen17]).

Nos embarcamos ahora en la prueba del Teorema Fundamental (4.2.1). En este momento, debemos tratar los tres conjuntos descritos en el enunciado del teorema como objetos distintos. Comenzamos probando un resultado que nos proporciona una cota superior sobre la dimensión del conjunto poliedral  $\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : in_{\mathbf{w}}(I) \neq \langle 1 \rangle\}$ , sin saber todavía que este conjunto es igual a  $trop(X)$ . Este resultado lo mejoraremos en el capítulo siguiente, en el teorema 5.2.3.

**Proposición 4.3.7.** Sea  $X \subset T^n$  una variedad de dimensión  $d$  con ideal  $I = I_X \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ . Entonces cada celda en el complejo de Gröbner  $\Sigma = \Sigma(I_{proj})$  cuyo soporte está contenido en el conjunto  $\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : in_{\mathbf{w}}(I) \neq \langle 1 \rangle\}$  tiene dimensión menor o igual que  $d$ .



*Demostración.* Sea  $P \in \Sigma$  una celda maximal tal que  $|P| \subset \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : in_{\mathbf{w}}(I) \neq \langle 1 \rangle\}$ , y sea  $\mathbf{w} \in \Gamma_{\text{val}}^n$  un punto que pertenece a su interior relativo. El espacio afín de  $P$  es  $\text{aff}(P) = \mathbf{w} + L$ , si  $L \subset \mathbb{R}^n$  es el espacio lineal paralelo a  $P$ . Si  $\dim(L) = k$ , entonces mediante un cambio de base podemos suponer que  $L = \mathcal{L}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$  es el subespacio generado por los primeros  $k$  vectores de la base canónica. Como la celda  $P$  es maximal, entonces es suficiente probar  $k \leq d$ .

Aplicando el corolario 2.2.10 y la proposición 2.4.2, para cada  $\mathbf{v} \in L \cap \mathbb{Z}^n$  existe un número  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño tal que

$$in_{\mathbf{v}}(in_{\mathbf{w}}(I)) = in_{(0, \mathbf{v})}(in_{(0, \mathbf{w})}(I_{\text{proj}})) \Big|_{x_0=1} = in_{(0, \mathbf{w}) + \epsilon'(0, \mathbf{v})}(I_{\text{proj}}) \Big|_{x_0=1} = in_{\mathbf{w} + \epsilon' \mathbf{v}}(I)$$

para cada  $0 < \epsilon' < \epsilon$ . Como  $\mathbf{w} \in \text{relint}(P)$  y  $\mathbf{v} \in L$ , entonces  $\mathbf{w} + \epsilon' \mathbf{v} \in \text{relint}(P)$  para  $0 < \epsilon' < \epsilon$  suficientemente pequeño, luego  $in_{\mathbf{w} + \epsilon' \mathbf{v}}(I) = in_{\mathbf{w}}(I)$ , donde esta igualdad de ideales se verifica porque  $\mathbf{w}$  y  $\mathbf{w} + \epsilon' \mathbf{v}$  están en el interior relativo de la misma celda de  $\Sigma$ . Por lo tanto, aplicando lo anterior,  $in_{\mathbf{v}}(in_{\mathbf{w}}(I)) = in_{\mathbf{w}}(I)$ .

Sea  $\mathcal{G}$  un sistema de generadores de  $in_{\mathbf{w}}(I)$  de modo que ningún generador  $g \in \mathcal{G}$  se puede escribir como suma de dos polinomios de  $in_{\mathbf{w}}(I)$  formados por un número menor de monomios. Entonces, para cada  $g \in \mathcal{G}$ , se verifica  $in_{\mathbf{v}}(g) = g$  para todo  $\mathbf{v} \in L$  (recordemos que en  $\mathbb{k}$  tenemos fijada la valoración trivial, así que esto tiene sentido). En caso contrario,  $in_{\mathbf{v}}(g)$  sería un polinomio de  $in_{\mathbf{v}}(in_{\mathbf{w}}(I)) = in_{\mathbf{w}}(I)$  con un menor número de monomios en su soporte. En particular, tenemos  $in_{\mathbf{e}_i}(g) = g$  para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Esto implica que  $\text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u} = \text{val}(c_{\mathbf{v}}) + \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v}$  para cada  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \text{Supp}(g)$  y cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Como la valoración en  $\mathbb{k}$  es trivial, esto quiere decir que  $u_i = v_i$  para cada  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \text{Supp}(g)$  y cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Esto nos permite sacar factor común a las potencias en las variables  $x_1, \dots, x_k$  en todos los monomios de  $g$  y escribir  $g = m\tilde{g}$ , donde  $m$  es un monomio y  $\tilde{g}$  es un polinomio de Laurent en las variables  $x_{k+1}, \dots, x_n$ . Como los monomios son unidades en  $\mathbb{k}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ , entonces  $in_{\mathbf{w}}(I)$  está generado por polinomios de  $\mathbb{k}[x_{k+1}^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ .

Por lo tanto,

$$\dim(in_{\mathbf{w}}(I)) = n - ht(in_{\mathbf{w}}(I)) \geq n - (n - k) = k.$$

Por otra parte, la aplicación  $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}] \rightarrow \mathbb{k}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  dada por  $f \mapsto in_{\mathbf{w}}(f)$  induce un homomorfismo suprayectivo entre los anillos cociente

$$K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]/I \rightarrow \mathbb{k}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]/in_{\mathbf{w}}(I),$$

luego  $\dim(in_{\mathbf{w}}(I)) \leq \dim(I) = d$ . Por lo tanto, queda demostrado  $k \leq d$ .  $\square$

**Proposición 4.3.8.** Sea  $X \subset T^n$  una variedad irreducible con ideal primo  $I = I_X \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ . Fijamos  $\mathbf{w} \in \Gamma_{\text{val}}^n$  con  $in_{\mathbf{w}}(I) \neq \langle 1 \rangle$ , y sea  $\alpha \in V(in_{\mathbf{w}}(I)) \subset (\mathbb{k}^*)^n$ . Entonces existe un punto  $\mathbf{y} \in X$  con  $\text{val}(\mathbf{y}) = \mathbf{w}$  y  $t^{-\mathbf{w}}\mathbf{y} = \alpha$ . Además, el conjunto  $\mathcal{Y}$  de tales puntos es denso en  $X$  para la topología de Zariski.

*Demostración.* Sea  $d = \dim(X)$ . Los casos  $n = 1$  y  $n - d = 1$  se deducen de la proposición 3.3.5 pues, en estos casos, el ideal  $I$  es principal. Por lo tanto, podemos suponer  $0 \leq d \leq n - 2$ , y vamos a demostrar el resultado por inducción sobre  $n$ . Supongamos que el resultado es cierto para  $n - 1$  variables y veamos que se verifica para  $n$ . Para aplicar la hipótesis de inducción y reducir el problema a uno de una dimensión menor, vamos a

considerar una proyección  $\phi : T^n \rightarrow T^{n-1}$  adecuada. En particular,  $\phi(X) \subset T^{n-1}$  debe ser una variedad irreducible.

Como consecuencia de la proposición 4.3.7, el conjunto  $\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : in_{\mathbf{v}}(I) \neq \langle 1 \rangle\}$  es el soporte de un complejo poliedral  $\Sigma$ , y cada celda  $P \in \Sigma$  tiene dimensión menor o igual que  $d$ . Sea  $L_P$  el espacio vectorial generado por  $\{\mathbf{p} - \mathbf{w} : \mathbf{p} \in P\}$ . Como el espacio lineal paralelo a  $P$  es  $\{\mathbf{p} - \mathbf{q} : \mathbf{p}, \mathbf{q} \in P\}$ , si  $\{\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{p}_d - \mathbf{q}_d\}$  es una base de este,  $\{\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{p}_d - \mathbf{q}_d, \mathbf{p}_1 - \mathbf{w}\}$  genera  $L_P$ , luego  $\dim(L_P) \leq d + 1$ . Entonces  $\dim(L_P) < n$  y  $\mathbf{w} + L_P$  es el espacio afín generado por  $P$  y  $\mathbf{w}$ .

Aplicando la proposición 4.3.3, existe una proyección monomial  $\phi : T^n \rightarrow T^{n-1}$  tal que el núcleo de la aplicación lineal  $trop(\phi) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  interseca trivialmente con todos los subespacios  $L_P$ , es decir,  $\ker(trop(\phi)) \cap L_P = \{\mathbf{0}\}$  para cada  $P \in \Sigma$ . Haciendo un cambio de coordenadas, podemos suponer que  $\phi$  es la proyección sobre las primeras  $n - 1$  coordenadas de  $T^n$  y la imagen  $\phi(X)$  es cerrada en  $T^{n-1}$  (para la topología de Zariski). Estas hipótesis nos garantizan que podemos recuperar el punto  $\mathbf{w}$  a partir de su imagen por  $trop(\phi)$ . Para demostrar esto, supongamos que existe otro vector  $\tilde{\mathbf{w}} \in \Gamma_{\text{val}}^n$  con  $in_{\tilde{\mathbf{w}}}(I) \neq \langle 1 \rangle$  y  $trop(\phi)(\tilde{\mathbf{w}}) = trop(\phi)(\mathbf{w})$ . La primera condición nos asegura la existencia de una celda  $P \in \Sigma$  tal que  $\tilde{\mathbf{w}} \in P$ . Esto implica que  $\tilde{\mathbf{w}} \in \mathbf{w} + L_P$ , así que  $\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{w} \in L_P$ . Por lo tanto,  $\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{w} \in \ker(trop(\phi)) \cap L_P = \{\mathbf{0}\}$ , luego  $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w}$ .

Sean  $I' = \phi^{*-1}(I) = I \cap K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{n-1}^{\pm 1}]$ , y  $X' = V(I')$ . Como el ideal  $I$  es primo en  $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ , entonces  $I'$  es primo en  $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{n-1}^{\pm 1}]$ . En la demostración de la proposición 4.3.3 vimos que en estas condiciones  $X' = \phi(X)$ . Por lo tanto, la variedad  $X' \subset T^{n-1}$  es irreducible.

Denotamos  $\mathbf{w}' = trop(\phi)(\mathbf{w}) = (w_1, \dots, w_{n-1})$  y  $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ . De la proposición 2.4.13 deducimos  $in_{\mathbf{w}'}(I') \neq \langle 1 \rangle$ . Para poder aplicar la hipótesis de inducción, solo falta probar que  $\alpha' \in V(in_{\mathbf{w}'}(I'))$ . Sea  $f \in I'$ . Como en  $f$  no aparece la variable  $x_n$ , entonces en  $in_{\mathbf{w}}(f)$  tampoco. Por lo tanto,  $trop(f)(\mathbf{w}) = trop(f)(\mathbf{w}')$  y se verifica  $in_{\mathbf{w}'}(f)(\alpha') = in_{\mathbf{w}}(f)(\alpha) = 0$ . En consecuencia,  $\alpha' \in V(in_{\mathbf{w}'}(I'))$ , luego  $X'$ ,  $\mathbf{w}'$  y  $\alpha'$  cumplen las condiciones del enunciado.

Aplicando la hipótesis de inducción, existe un punto  $\mathbf{y}' = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in X' \subset T^{n-1}$  con  $\text{val}(y_i) = w_i$  y  $\overline{t^{-w_i} y_i} = \alpha_i$  para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq n - 1$ . Ahora tenemos que encontrar  $y_n \in K^*$  tal que  $(\mathbf{y}', y_n) \in X$ ,  $\text{val}(y_n) = w_n$  y  $\overline{t^{-w_n} y_n} = \alpha_n$ . Consideramos el ideal  $J = \langle f(y_1, \dots, y_{n-1}, x_n) : f \in I \rangle \subset K[x_n^{\pm 1}]$ . Como  $K[x_n^{\pm 1}]$  es un dominio de ideales principales, entonces existe un polinomio  $f \in I$  tal que  $J$  está generado por el polinomio  $f$ ,  $J = \langle f(y_1, \dots, y_{n-1}, x_n) \rangle$ . Por la parte (2) de la proposición 4.3.3, podemos considerar  $f$  como un polinomio en la variable  $x_n$  cuyos coeficientes son monomios en las variables  $x_1, \dots, x_{n-1}$ . Entonces podemos escribir  $f = \sum_i c_i \mathbf{x}^{\mathbf{u}_i} x_n^i$ , para ciertos  $\mathbf{u}_i \in \mathbb{Z}^{n-1}$ . Sea  $\mathbf{w}$  el único vector tal que  $trop(\phi)(\mathbf{w}) = \mathbf{w}'$ , es decir, el vector  $\mathbf{w}$  del enunciado. Denotamos  $g = f(y_1, \dots, y_{n-1}, x_n) = \sum_i c_i \mathbf{y}^{\mathbf{u}_i} x_n^i$ . Entonces se demuestra igual que en la proposición 3.3.5 que  $trop(f)(\mathbf{w}) = trop(g)(w_n)$ . Aquí es donde utilizamos que  $f$  se escribe como polinomio en  $x_n$  cuyos coeficientes son monomios de  $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{n-1}^{\pm 1}]$ . En principio, podría existir otro vector  $\tilde{\mathbf{w}}$  que nos diera el mismo mínimo pero, como buscamos

$trop(f)(\tilde{\mathbf{w}}) = trop(g)(w_n)$ , necesariamente  $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w}$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} in_{w_n}(g)(x_n) &= \sum_{\mathbf{u}: \text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = trop(g)(w_n)} \overline{c_{\mathbf{u}} y_1^{u_1} \cdots y_{n-1}^{u_{n-1}} t^{-\text{val}(c_{\mathbf{u}} y_1^{u_1} \cdots y_{n-1}^{u_{n-1}})}} \cdot x_n^{u_n} \\ &= \sum_{\mathbf{u}: \text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = trop(f)(\mathbf{w})} \overline{c_{\mathbf{u}} t^{-\text{val}(c_{\mathbf{u}})}} \cdot \alpha_1^{u_1} \cdots \alpha_{n-1}^{u_{n-1}} x_n^{u_n} \\ &= in_{\mathbf{w}}(f)(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, x_n). \end{aligned}$$

Como  $\alpha \in V(in_{\mathbf{w}}(I))$ , entonces  $in_{\mathbf{w}}(f)(\alpha) = 0$ , luego  $in_{w_n}(g)(\alpha_n) = 0$ . Aplicando el caso  $n = 1$  de la proposición 3.3.5 deducimos la existencia de un punto  $y_n \in K^*$  con  $g(y_n) = 0$ ,  $\text{val}(y_n) = w_n$  y  $\overline{t^{-w_n} y_n} = \alpha_n$ . Entonces el punto  $\mathbf{y} = (\mathbf{y}', y_n)$  cumple todas las condiciones del enunciado:  $\mathbf{y} \in X$ ,  $\text{val}(\mathbf{y}) = \mathbf{w}$  y  $\overline{t^{-\mathbf{w}} \mathbf{y}} = \alpha$ .

Para terminar la prueba tenemos que demostrar que el conjunto  $\mathcal{Y} = \{\mathbf{y} \in X : \text{val}(\mathbf{y}) = \mathbf{w}, \overline{t^{-\mathbf{w}} \mathbf{y}} = \alpha\}$  es denso en  $X$  para la topología de Zariski. Razonamos por reducción al absurdo:

Supongamos que existe una subvariedad  $X' \subsetneq X$  que contiene a  $\mathcal{Y}$ , es decir,  $\mathcal{Y} \subset X' \subsetneq X$ . Entonces la proyección  $\overline{\phi(X')}$  contiene a  $\overline{\phi(\mathcal{Y})}$  y a todos los puntos  $\mathbf{y}' \in \overline{\phi(X)}$  tales que  $\text{val}(y'_i) = w_i$  y  $\overline{t^{-w_i} y'_i} = \alpha_i$ , para  $1 \leq i \leq n-1$ . Aplicando de nuevo la hipótesis de inducción, deducimos que este conjunto es denso en  $\overline{\phi(X)}$  para la topología de Zariski, luego  $\overline{\phi(X')} = \overline{\phi(X)}$ . Por nuestra elección de la proyección  $\phi$ , se verifica  $\dim(X) = \dim(\overline{\phi(X)}) > 0$ . Pero, por otra parte, como la variedad  $X$  es irreducible y  $X' \subsetneq X$ , entonces  $\dim(X') < \dim(X)$ . Por lo tanto,  $\dim(\overline{\phi(X)}) = \dim(\overline{\phi(X')}) \leq \dim(X') < \dim(X) = \dim(\overline{\phi(X)})$ , que es absurdo. En conclusión, hemos probado que  $\mathcal{Y}$  es denso en  $X$  para la topología de Zariski.  $\square$

Aplicamos ahora el Teorema de Kapranov (3.3.1) y la proposición 4.3.8 para demostrar el Teorema Fundamental (4.2.1).

*Demostración del Teorema 4.2.1.* Sea  $I \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  un ideal y denotamos por  $X = V(I)$  a la variedad que define en el toro  $T^n$ . Recordemos primero la descripción de los tres subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  que aparecen en el teorema:

- (1) La variedad tropical  $trop(X)$ .
- (2) El conjunto  $\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : in_{\mathbf{w}}(I) \neq \langle 1 \rangle\}$ .
- (3) La clausura del conjunto  $\text{val}(X) = \{(\text{val}(y_1), \dots, \text{val}(y_n)) : (y_1, \dots, y_n) \in X\} \subset \mathbb{R}^n$  para la topología usual.

Para demostrar la igualdad de los tres conjuntos, vamos a probar (3)  $\subset$  (1)  $\subset$  (2)  $\subset$  (3):

- (3)  $\subset$  (1): Los puntos del conjunto  $\text{val}(X)$  son de la forma  $(\text{val}(y_1), \dots, \text{val}(y_n))$  para  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in X$ . Por lo tanto,  $f(\mathbf{y}) = 0$  para cada  $f \in I$ . Por el teorema 3.3.1,  $(\text{val}(y_1), \dots, \text{val}(y_n)) \in trop(V(f))$  para cada  $f \in I$ , luego  $(\text{val}(y_1), \dots, \text{val}(y_n)) \in trop(V(I))$ . Como el conjunto  $trop(X)$  es cerrado (por ser intersección de cerrados), entonces (3)  $\subset$  (1).

- (1)  $\subset$  (2): Consideramos  $\mathbf{w} \in \text{trop}(X)$ . Entonces, para cada  $f = \sum c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in I$ , el mínimo del conjunto  $\{\text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} : c_{\mathbf{u}} \neq 0\}$  se alcanza al menos dos veces. Por lo tanto,  $\text{in}_{\mathbf{w}}(f)$  no es un monomio. Dado  $g \in \text{in}_{\mathbf{w}}(I)$ , por la proposición 2.4.3, existe  $f \in I$  tal que  $g = \text{in}_{\mathbf{w}}(f)$ , así que  $g$  no es un monomio. Por lo tanto,  $\text{in}_{\mathbf{w}}(I) \neq \langle 1 \rangle$ , luego  $\mathbf{w}$  pertenece al conjunto (2).

- (2)  $\subset$  (3): Vamos a reducir la prueba al caso en que el ideal  $I$  es primo.

Veamos que  $\text{in}_{\mathbf{w}}(I) = \langle 1 \rangle$  si, y solo si,  $\text{in}_{\mathbf{w}}(\sqrt{I}) = \langle 1 \rangle$ , así que podemos suponer que el ideal  $I$  es radical. Para probar esto, como  $I \subset \sqrt{I}$ , entonces la implicación hacia la derecha es cierta. Recíprocamente, supongamos que  $\text{in}_{\mathbf{w}}(\sqrt{I}) = \langle 1 \rangle$ . Entonces existe un polinomio  $f \in \sqrt{I}$  tal que  $\text{in}_{\mathbf{w}}(f) = 1$ . Como  $f \in \sqrt{I}$ , entonces existe un número  $r \geq 1$  tal que  $f^r \in I$ . Por la proposición 2.4.3,  $\text{in}_{\mathbf{w}}(f^r) = (\text{in}_{\mathbf{w}}(f))^r = 1$ , así que  $\text{in}_{\mathbf{w}}(I) = \langle 1 \rangle$ .

Por lo tanto, suponiendo que  $I$  es radical, podemos escribir  $I = \bigcap_{i=1}^s \mathfrak{p}_i$ , donde cada  $\mathfrak{p}_i$  es primo y  $V(\mathfrak{p}_1), \dots, V(\mathfrak{p}_s)$  son las componentes irreducibles de  $X$ . Notemos que si  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  es tal que  $\text{in}_{\mathbf{w}}(I) \neq \langle 1 \rangle$ , entonces existe  $j \in \{1, \dots, s\}$  tal que  $\text{in}_{\mathbf{w}}(\mathfrak{p}_j) \neq \langle 1 \rangle$ . De no ser así, por la proposición 2.4.3 (parte (1)), existirían polinomios  $f_1, \dots, f_s$  con  $f_i \in \mathfrak{p}_i$  tales que  $\text{in}_{\mathbf{w}}(f_i) = 1$ . Si ponemos  $f = \prod_{i=1}^s f_i$ , entonces  $\text{in}_{\mathbf{w}}(f) = 1$  y  $f \in I$ , así que  $\text{in}_{\mathbf{w}}(I) = \langle 1 \rangle$ , en contradicción con  $\text{in}_{\mathbf{w}}(I) \neq \langle 1 \rangle$ .

Hemos demostrado que si  $\mathbf{w}$  pertenece al conjunto (2) para  $X$ , entonces  $\mathbf{w}$  pertenece al conjunto (2) para alguna componente irreducible  $V(\mathfrak{p}_j)$  de  $X$ . Por lo tanto, para demostrar que  $\mathbf{w} = \text{val}(\mathbf{y})$  para algún  $\mathbf{y} \in X$ , bastará con probar que  $\mathbf{w} = \text{val}(\mathbf{y})$  para algún  $\mathbf{y} \in V(\mathfrak{p}_j)$ . La prueba de esto último está incluida en la proposición 4.3.8.

Para demostrar la última parte del teorema, supongamos que la variedad  $X$  es irreducible, y sea  $\mathbf{w} \in \Gamma_{\text{val}}^n \cap \text{trop}(X)$ . En particular,  $\text{in}_{\mathbf{w}}(I) \neq \langle 1 \rangle$ , y estamos en condiciones de aplicar la proposición 4.3.2. Sea  $\mathfrak{p}$  un primo minimal de  $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$ , entonces  $\dim(\text{in}_{\mathbf{w}}(I)) \geq \dim(\mathfrak{p}) = \dim(X)$ . Por lo tanto, existe  $\alpha \in V(\text{in}_{\mathbf{w}}(I))$ . Por la proposición 4.3.8, el conjunto  $\mathcal{Y} = \{\mathbf{y} \in X : \text{val}(\mathbf{y}) = \mathbf{w}, \overline{t^{-\mathbf{w}}\mathbf{y}} = \alpha\}$  es denso en  $X$  para la topología de Zariski, y de aquí se deduce que  $\{\mathbf{y} \in X : \text{val}(\mathbf{y}) = \mathbf{w}\}$  es denso en  $X$  para la topología de Zariski.  $\square$

**Observación 4.3.9.** La igualdad de conjuntos  $\text{trop}(V(I)) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \text{in}_{\mathbf{w}}(I) \neq \langle 1 \rangle\}$  se verifica aunque el cuerpo  $K$  no sea algebraicamente cerrado:

La demostración (1)  $\subset$  (2) del teorema es válida para cualquier cuerpo. Recíprocamente, si  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  es tal que  $\text{in}_{\mathbf{w}}(I) \neq \langle 1 \rangle$ , entonces para cada  $f \in I$ ,  $\text{in}_{\mathbf{w}}(f)$  no es un monomio, luego  $\mathbf{w} \notin \text{trop}(V(f))$  para todo  $f \in I$ . Por lo tanto,  $\mathbf{w} \in \text{trop}(V(I))$ .

## 4.4. Consecuencias del Teorema Fundamental

En el teorema 4.2.3 hemos demostrado que si  $L/K$  es una extensión de cuerpos valorada, entonces las variedades tropicales  $\text{trop}(X_L)$  y  $\text{trop}(X)$  coinciden. Como corolario inmediato de los teoremas 4.2.3 y 4.2.1 obtenemos el siguiente resultado:

**Corolario 4.4.1.** Sean  $K$  un cuerpo valorado y  $L_1/K$  y  $L_2/K$  dos extensiones de cuerpos valoradas tales que los cuerpos  $L_1$  y  $L_2$  son algebraicamente cerrados y las valoraciones no son triviales. Dada una variedad  $X = V(I) \subset T_K^n$ , denotamos por  $I_{L_i} = IL_i[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ ,  $i = 1, 2$ , y consideramos las variedades  $X(L_i) = V(I_{L_i})$ . Entonces la clausura de los conjuntos  $\text{val}(X(L_1))$  y  $\text{val}(X(L_2))$  coinciden.

*Demostración.* Por el teorema 4.2.3,  $\text{trop}(X) = \text{trop}(X(L_1)) = \text{trop}(X(L_2))$ . Como los cuerpos  $L_1$  y  $L_2$  son algebraicamente cerrados, el resultado se deduce aplicando el Teorema Fundamental (teorema 4.2.1).  $\square$

Al final de la sección 2.4 introdujimos el concepto de tropicalización de una aplicación monomial  $\phi$ , que denotamos por  $\text{trop}(\phi)$ . En este capítulo hemos obtenido tres caracterizaciones equivalentes para la tropicalización de una variedad  $X \subset T^n$ . El siguiente resultado muestra que estas dos nociones son compatibles.

**Proposición 4.4.2.** Sean  $K$  un cuerpo algebraicamente cerrado y  $\phi : T^n \rightarrow T^m$  una aplicación monomial. Consideramos cualquier variedad  $X \subset T^n$  irreducible, y la clausura de Zariski de su imagen en  $T^m$ ,  $\overline{\phi(X)}$ . Entonces

$$\text{trop}\left(\overline{\phi(X)}\right) = \text{trop}(\phi)\left(\text{trop}(X)\right).$$

*Demostración.* Para demostrar este resultado vamos a utilizar las tres caracterizaciones equivalentes que nos da el Teorema Fundamental.

Sea  $I = I_X \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  el ideal de la variedad  $X$ . Denotamos  $I' = \phi^{*-1}(I)$ , entonces es conocido que la clausura de  $\phi(X)$  para la topología de Zariski es  $\overline{\phi(X)} = V(I') \subset T^m$ . Sea  $\mathbf{w}' \in \text{trop}(\phi)\left(\text{trop}(X)\right)$ . Entonces existe  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\mathbf{w}' = \text{trop}(\phi)(\mathbf{w})$  y  $\mathbf{w} \in \text{trop}(X)$ . Por la caracterización (2) del Teorema Fundamental,  $\text{in}_{\mathbf{w}}(I) \neq \langle 1 \rangle$ . Aplicando la proposición 2.4.13, deducimos que  $\text{in}_{\text{trop}(\phi)(\mathbf{w})}(I') = \text{in}_{\mathbf{w}'}(I') \neq \langle 1 \rangle$ , así que  $\mathbf{w}' \in \text{trop}\left(\overline{\phi(X)}\right)$  (aplicando de nuevo la caracterización (2)).

Recíprocamente, veamos que  $\text{trop}\left(\overline{\phi(X)}\right) \subset \text{trop}(\phi)\left(\text{trop}(X)\right)$ . Usando la proposición 4.3.4 y el Teorema Fundamental (4.2.1),  $\text{trop}(X)$  es una unión finita de poliedros. Además, la aplicación  $\text{trop}(\phi)$  es lineal, luego  $\text{trop}(\phi)\left(\text{trop}(X)\right)$  es una unión finita de poliedros (proposición 1.2.7), es decir, un conjunto cerrado. Por lo tanto, es suficiente demostrar  $\{\mathbf{z} \in \overline{\phi(X)} : \text{val}(\mathbf{z}) = \mathbf{w}\} \subset \text{trop}(\phi)\left(\text{trop}(X)\right)$  (aquí hemos usado la caracterización (3)). Por ser  $X$  irreducible, es conocido que  $\phi(X)$  contiene a un abierto no vacío de  $\overline{\phi(X)}$  ([Har77, Cap. 2, Prob. 3.19]), luego ese abierto corta a  $\{\mathbf{z} \in \overline{\phi(X)} : \text{val}(\mathbf{z}) = \mathbf{w}\}$  por ser denso. Por lo tanto,  $\phi(X) \cap \{\mathbf{z} \in \overline{\phi(X)} : \text{val}(\mathbf{z}) = \mathbf{w}\} \neq \emptyset$ . Es decir, existe  $\mathbf{y} \in X$  tal que, si denotamos  $\mathbf{z} = \phi(\mathbf{y}) \in \phi(X)$ , entonces  $\text{val}(\mathbf{z}) = \mathbf{w}$ . Si probamos  $\text{val}(\phi(\mathbf{y})) = \text{trop}(\phi)(\text{val}(\mathbf{y}))$ , entonces habremos terminado, pues

$$\mathbf{w} = \text{val}(\mathbf{z}) = \text{val}(\phi(\mathbf{y})) = \text{trop}(\phi)(\text{val}(\mathbf{y})) \in \text{trop}(\phi)\left(\text{trop}(X)\right).$$

Para demostrar la afirmación anterior, supongamos que la aplicación entre los anillos coordenados  $\phi^* : K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_m^{\pm 1}] \rightarrow K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  viene dada por  $x_i \mapsto M_i = \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_{ij}}$

para  $i = 1, \dots, m$ , donde cada  $M_i$  es un monomio. Entonces la componente  $i$ -ésima de  $\phi(\mathbf{y})$  es  $(\phi(\mathbf{y}))_i = M_i(\mathbf{y}) = \prod_{j=1}^n y_j^{\alpha_{ij}}$  para cada  $1 \leq i \leq m$ , donde  $\alpha_{ij} \in \mathbb{Z}$ . Por lo tanto,

$$\text{val}(\mathbf{y}) = \left( \text{val} \left( \prod_{j=1}^n y_j^{\alpha_{1j}} \right), \dots, \text{val} \left( \prod_{j=1}^n y_j^{\alpha_{mj}} \right) \right) = \left( \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} \cdot \text{val}(y_j), \dots, \sum_{j=1}^n \alpha_{mj} \cdot \text{val}(y_j) \right).$$

Por otra parte, la tropicalización de  $\phi$  viene dada por  $\text{trop}(\phi) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,

$$\mathbf{x} \mapsto \left( \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^n \alpha_{mj} x_j \right).$$

Por lo tanto,

$$\text{trop}(\phi)(\text{val}(\mathbf{y})) = \left( \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} \cdot \text{val}(y_j), \dots, \sum_{j=1}^n \alpha_{mj} \cdot \text{val}(y_j) \right) = \text{val}(\phi(\mathbf{y})).$$

□

**Observación 4.4.3.** El resultado anterior garantiza que la tropicalización y los morfismos del toro conmutan. Esta afirmación deja de ser válida si sustituimos el morfismo  $\phi$  por una aplicación racional. Veamos un ejemplo:

**Ejemplo 4.4.4.** Sea  $K$  un cuerpo arbitrario y consideramos la aplicación  $K \rightarrow K^2$  dada por  $t \mapsto (t, -1 - t)$ . Esta aplicación define una aplicación racional entre el toro  $T^1$  y el toro  $T^2$ ,  $\phi : X = T^1 \rightarrow T^2$ , que no está definida en  $t = -1$ . La imagen de  $X$  por  $\phi$  es  $\overline{\pi(X)} = \overline{\{(t, -1 - t) : t \neq 0, 1\}} = V(x + y + 1) \subset T^2$ , y  $\text{trop}(\overline{\phi(X)})$  es la recta tropical de la figura 3.2.1a. Por otra parte, la tropicalización de  $\phi$  es la aplicación lineal a trozos

$$\text{trop}(\phi) : \text{trop}(X) = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad w \mapsto (w, \min(w, 0)).$$

Y la imagen de  $\text{trop}(X) = \mathbb{R}$  por  $\text{trop}(\phi)$  consiste en la unión de dos de los tres rayos de la recta tropical:

$$\text{trop}(\phi)(\text{trop}(X)) = \{(a, a) : a \leq 0\} \cup \{(a, 0) : a \geq 0\}.$$

En este sencillo ejemplo hemos visto que se verifica la siguiente inclusión, y es estricta

$$\text{trop}(\overline{\phi(X)}) \supsetneq \text{trop}(\phi)(\text{trop}(X)). \quad (4.4.1)$$

Se puede demostrar que la inclusión (4.4.1) es cierta para cualquier aplicación racional  $\phi : T^n \rightarrow T^m$ . La *implicitación tropical* estudia cómo rellenar el “hueco” existente entre esos dos conjuntos. El objetivo de esta área es calcular la tropicalización de una variedad racional directamente a partir de una representación paramétrica  $\phi$ .

# Capítulo 5

## Teorema de Estructura

En el capítulo anterior hemos estudiado la relación de la Geometría Tropical con la Geometría Algebraica clásica. En este capítulo lo que vamos a analizar son las propiedades combinatorias de las variedades tropicales. Con este fin, utilizaremos conceptos de la Geometría Poliedral que ya hemos estudiado en el capítulo 1 e introduciremos nuevos conceptos.

Comenzamos el capítulo con la sección 5.1, en la que incluimos el enunciado del teorema y la explicación de los conceptos que aparecen en él. En las secciones 5.2 y 5.3 demostramos dos de las tres partes de las que se compone el Teorema de Estructura. No abordamos la prueba de la última parte del teorema debido a su complejidad. Por último, en la sección 5.4 comentamos brevemente el problema inverso, es decir, dado un complejo poliedral  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ , ¿bajo qué condiciones existe un ideal  $I$  tal que  $|\Sigma| = \text{trop}(V(I))$ ?

La referencia principal que se ha seguido en este capítulo es [MS15, Cap. 2, §3.3–§3.4].

### 5.1. Enunciado del teorema

**Teorema 5.1.1** (Teorema de estructura). Sea  $X \subset T^n$  una variedad irreducible de dimensión  $\dim(X) = d$ . Entonces  $\text{trop}(X)$  es el soporte de un complejo poliedral equilibrado,  $\Gamma_{\text{val}}$ -racional y puro de dimensión  $d$ . Además, dicho complejo poliedral está conectado a través de codimensión uno.

Antes de poder demostrarlo, tenemos que entender los conceptos nuevos que aparecen en el enunciado del teorema. Ya sabemos qué quiere decir que un complejo poliedral sea puro y  $\Gamma_{\text{val}}$ -racional. Tenemos que definir los conceptos de complejo equilibrado y conectado a través de codimensión uno.

#### 5.1.1. Condición de equilibrio

Primero daremos una definición para abanicos de dimensión uno, después generalizaremos esta definición para abanicos de cualquier dimensión y, por último, estableceremos una definición para complejos poliedrales.

**Definición 5.1.2.** Sea  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$  un abanico poliedral racional de dimensión 1 formado por  $s$  rayos (un *rayo* es un cono de la forma  $\text{pos}(\mathbf{v})$ ). Sea  $\mathbf{v}_i$  el primer punto con coordenadas enteras (*punto entero*) en el  $i$ -ésimo rayo de  $\Sigma$ . Se da a  $\Sigma$  una estructura de abanico “con pesos” asignando a cada rayo  $\text{pos}(\mathbf{v}_i)$  un peso  $m_i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ , y se dice que el abanico  $\Sigma$  está *equilibrado* si  $\sum_{i=1}^s m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ .

**Observación 5.1.3.** (1) Al primer punto entero de un rayo  $\text{pos}(\mathbf{v}) \in \Sigma$  también se le suele llamar *vector primitivo*.

(2) La condición de equilibrio se denomina a veces “condición de tensión nula”. Esto se puede entender de la siguiente forma: supongamos que sobre el origen se aplican  $s$  fuerzas  $\mathbf{F}_i$ ,  $1 \leq i \leq s$ , cada  $\mathbf{F}_i$  en la dirección del rayo  $\mathbf{v}_i$  y de magnitud  $m_i$  ( $\mathbf{F}_i = m_i \frac{\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|}$ ). Entonces estas fuerzas cumplen la condición de tensión nula si, y solo si, el efecto neto de las fuerzas sobre el origen es nulo. Y esto es equivalente a decir que el abanico formado por los rayos  $\mathbf{v}_i$  está equilibrado.

**Ejemplo 5.1.4.** Consideramos el abanico  $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$  formado por los rayos  $\text{pos}(\mathbf{v}_i)$ ,  $1 \leq i \leq 4$ ,  $\mathbf{v}_1 = (0, 1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (2, 1)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (1, -2)$  y  $\mathbf{v}_4 = (-1, -1)$  y los pesos  $m_1 = 4$ ,  $m_2 = 1$ ,  $m_3 = 1$  y  $m_4 = 3$ , entonces

$$\sum_{i=1}^4 m_i \mathbf{v}_i = 4 \cdot (0, 1) + 1 \cdot (2, 1) + 1 \cdot (1, -2) + 3 \cdot (-1, -1) = (0, 0).$$

Este ejemplo se ha representado en la figura 5.1.1. En esta figura se ha escrito el peso de cada rayo en color azul.

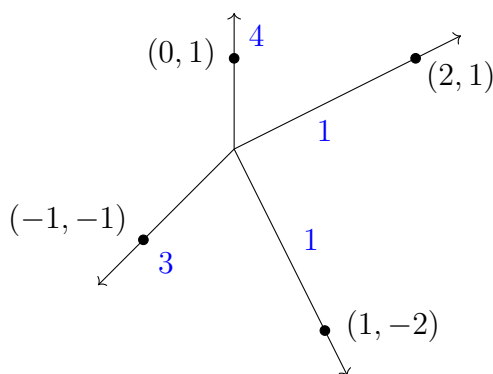


Figura 5.1.1: Un abanico equilibrado en  $\mathbb{R}^2$ .

Ahora vamos a generalizar la definición. Sea  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$  un abanico racional puro de dimensión  $d \leq n$ . Para cada cono  $\sigma \in \Sigma$ , fijamos un peso  $m(\sigma) \in \mathbb{N}$ . Dado un cono  $\tau \in \Sigma$  de dimensión  $d - 1$ , denotamos por  $L$  al espacio lineal paralelo a  $\tau$ , entonces  $L \subset \mathbb{R}^n$  es un subespacio lineal de dimensión  $d - 1$ . Denotamos por  $\pi$  a la proyección  $\pi : \mathbb{R}^n = L \oplus L^\perp \rightarrow L^\perp$ ,  $\pi$  induce un isomorfismo que permite identificar  $\mathbb{R}^n/L$  con  $L^\perp$ .



**Proposición 5.1.5.** Para cada cono  $\sigma \in \Sigma$  con  $\tau \subsetneq \sigma$ , el conjunto  $(\sigma + L)/L$  es un cono racional de dimensión 1 en  $L^\perp$ .

*Demostración.* Sea  $\sigma \in \Sigma$  un cono con  $\tau \subsetneq \sigma$ , entonces  $\dim(\sigma) = d$ . Por la identificación que hemos hecho  $\mathbb{R}^n/L \cong L^\perp$ , podemos considerar  $(\sigma + L)/L \subset L^\perp$ , vía la aplicación  $\mathbf{x} + L \mapsto \pi(\mathbf{x})$ . Si  $\sigma = \text{pos}(\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\})$ , con  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r \in \mathbb{Z}^n$  (por ser  $\sigma$  racional), entonces

$$(\sigma + L)/L = \text{pos}(\{\mathbf{u}_1 + L, \dots, \mathbf{u}_r + L\}) = \text{pos}(\{\pi(\mathbf{u}_1), \dots, \pi(\mathbf{u}_r)\}),$$

luego  $(\sigma + L)/L$  es un cono racional.

Si  $L'$  es el espacio lineal paralelo a  $\sigma$ , entonces el espacio lineal paralelo a  $(\sigma + L)/L$  es  $L'/L$ , que tiene dimensión uno, luego  $(\sigma + L)/L$  es un cono de dimensión 1.  $\square$

**Observación 5.1.6.** Con las notaciones de la proposición,  $(\sigma + L)/L \subset L^\perp$  y

$$((\sigma + L)/L) \cap \mathbb{Z}^n \subset L^\perp \cap \mathbb{Z}^n.$$

Por lo tanto, tiene sentido hablar del vector primitivo del cono racional  $(\sigma + L)/L$ , que tiene dimensión uno.

**Definición 5.1.7.** Con las notaciones anteriores, denotamos por  $\mathbf{v}_\sigma$  al primer punto entero en el rayo  $(\sigma + L)/L$ . Diremos que el abanico  $\Sigma$  está *equilibrado en  $\tau$*  si

$$\sum_{\sigma \in \Sigma: \tau \subsetneq \sigma} m(\sigma) \mathbf{v}_\sigma = \mathbf{0} \tag{5.1.1}$$

y diremos que  $\Sigma$  está *equilibrado* si lo está para cada celda  $\tau \in \Sigma$  con  $\dim(\tau) = d - 1$ .

Sea ahora  $\Sigma$  un complejo poliedral  $\Gamma_{\text{val}}$ -racional, puro de dimensión  $d$  y asignamos a cada celda  $d$ -dimensional de  $\Sigma$  un peso  $m(\sigma) \in \mathbb{N}$ . Para cada celda  $\tau \in \Sigma$  de dimensión  $d - 1$  consideramos el abanico  $\text{star}_\Sigma(\tau)$  (definición 1.2.21). Entonces, sus conos  $\bar{\sigma}$  están indexados por las celdas  $\sigma \in \Sigma$  tales que  $\tau$  es cara de  $\sigma$ , y asignamos a cada cono  $\bar{\sigma}$  el peso  $m(\sigma)$ .

**Definición 5.1.8.** En las condiciones anteriores, diremos que el *complejo*  $\Sigma$  está *equilibrado* si el abanico  $\text{star}_\Sigma(\tau)$  lo está para cada celda  $\tau \in \Sigma$  de dimensión  $d - 1$ .

**Observación 5.1.9.** Para complejos poliedrales de dimensión 0, la definición anterior no supone ninguna restricción, es decir, todos los complejos poliedrales de dimensión 0 están equilibrados.

## 5.1.2. Conexión a través de codimensión uno

El sentido de la expresión “conectado a través de codimensión uno” está relacionado en cierto modo con la conexión topológica, como veremos después, aunque este término es más fuerte que la conexión. Lo definimos para complejos poliedrales puros únicamente:

**Definición 5.1.10.** Sea  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$  un complejo poliedral puro de dimensión  $d$ . Diremos que  $\Sigma$  está conectado a través de codimensión uno si para cada par de celdas  $P, P' \in \Sigma$  de dimensión  $d$  existe una cadena  $P = P_1, P_2, \dots, P_s = P'$ , con  $P_i \in \Sigma$  para cada  $i = 1, \dots, s$ , tal que  $P_i$  y  $P_{i+1}$  comparten una cara maximal  $F_i$  para  $1 \leq i \leq s$ .

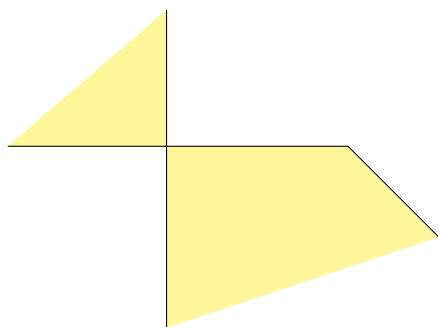
**Observación 5.1.11.** (1) Todo complejo poliedral de dimensión cero está conectado a través de codimensión uno.

(2) Sea  $\Sigma$  un complejo poliedral conectado a través de codimensión uno, entonces su soporte  $|\Sigma| \subset \mathbb{R}^n$  es conexo por caminos, ya que las celdas de  $\Sigma$  son conexas por caminos. La condición de conexión a través de codimensión uno implica que dos puntos cualesquiera de  $|\Sigma|$  se pueden unir por un camino cuya imagen está contenida en  $|\Sigma|$ . Por lo tanto,  $|\Sigma|$  es conexo.

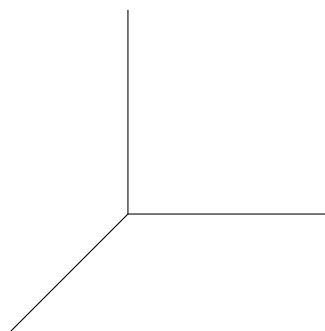
(3) Además, si  $\Sigma$  es de dimensión 1, el recíproco es cierto: un complejo poliedral de dimensión 1 está conectado a través de codimensión uno si, y solo si, es conexo. Esto se verifica porque el soporte de un complejo poliedral puro de dimensión 1 es un grafo, que es conexo si, y solo si, está conectado a través de codimensión uno.

**Ejemplo 5.1.12.** (1) En la figura 5.1.2a hemos representado un complejo poliedral puro de dimensión 2 que no está conectado a través de codimensión uno, ya que no es posible encontrar una cadena que una las dos celdas de dimensión 2 del complejo cumpliendo la propiedad de la definición.

(2) Por otra parte, el complejo poliedral de la figura 5.1.2b sí que está conectado a través de codimensión uno. De hecho, el soporte de este complejo es la recta tropical que define el polinomio  $f = x - y + 1 \in \mathbb{C}\{\{t\}\}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$  (ejemplo 3.2.4).



(a) Complejo poliedral que no está conectado a través de codimensión 1.



(b) Complejo poliedral conectado a través de codimensión 1.

Figura 5.1.2: Complejos poliedrales del ejemplo 5.1.12.

### 5.1.3. Comentarios sobre la demostración

El Teorema de Estructura afirma que dada cualquier variedad irreducible  $X = V(I) \subset T^n$ , la variedad tropical  $trop(X)$  es el soporte de un complejo poliedral que:

- (1) es puro de dimensión  $d = \dim(X)$  y  $\Gamma_{\text{val}}$ -racional.
- (2) está equilibrado para unos ciertos pesos.
- (3) está conectado a través de codimensión uno.

La prueba de (3) a este nivel es prácticamente imposible de abordar. La única prueba que aparece en la bibliografía es la de [MS15], se realiza por inducción y el caso de dimensión uno es bastante complicado porque utiliza conceptos avanzados de Geometría Algebraica. La prueba de (1) constituye la sección 5.2. Por último, la parte (2) en el caso de hipersuperficies es sencilla porque tiene una interpretación geométrica bastante visual pero el caso general se complica porque los pesos vienen dados de una forma demasiado algebraica. Por lo tanto, en la sección 5.3 nos centraremos en el caso de hipersuperficies e indicaremos cómo se obtienen los pesos en el caso de variedades generales.

## 5.2. Demostración de la primera parte

**Proposición 5.2.1.** Sean  $I \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  un ideal y  $X = V(I)$  la variedad que define en el toro  $T^n$ . Sea  $\Sigma$  un complejo poliedral cuyo soporte es  $|\Sigma| = \text{trop}(X) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \text{in}_{\mathbf{w}}(I) \neq \langle 1 \rangle\}$  y fijamos un punto  $\mathbf{w} \in \Sigma$ . Si  $\sigma \in \Sigma$  es una celda del complejo poliedral tal que  $\mathbf{w} \in \text{relint}(\sigma)$ , entonces

$$\text{star}_{\Sigma}(\sigma) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(I)) \neq \langle 1 \rangle\}.$$

Por lo tanto,  $\text{trop}(V(\text{in}_{\mathbf{w}}(I))) = |\text{star}_{\Sigma}(\sigma)|$ .

*Demostración.* Aplicando la proposición 2.2.5 y la proposición 2.4.2, tenemos que dados  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ , existe un número  $\epsilon > 0$  tal que  $\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(I)) = \text{in}_{\mathbf{w} + \epsilon \mathbf{v}}(I)$  para cada  $0 < \epsilon' < \epsilon$ . Sean  $\sigma \in \Sigma$  una celda y  $\mathbf{w} \in \text{relint}(\sigma)$ . Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} & \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(I)) \neq \langle 1 \rangle\} \\ &= \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \text{in}_{\mathbf{w} + \epsilon \mathbf{v}}(I) \neq \langle 1 \rangle \text{ para } \epsilon > 0 \text{ suficientemente pequeño}\} \\ &= \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{w} + \epsilon \mathbf{v} \in \Sigma \text{ para } \epsilon > 0 \text{ suficientemente pequeño}\} \\ &= \text{star}_{\Sigma}(\sigma). \end{aligned}$$

Donde la última igualdad se verifica por la proposición 1.2.22. Hemos demostrado que para cada  $\sigma \in \Sigma$  y  $\mathbf{w} \in \text{relint}(\sigma)$ ,  $\text{star}_{\Sigma}(\sigma) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(I)) \neq \langle 1 \rangle\}$ , luego si  $|\Sigma| = \text{trop}(X)$ , en particular esto implica que  $\text{trop}(V(\text{in}_{\mathbf{w}}(I))) = |\text{star}_{\Sigma}(\sigma)|$ .  $\square$

**Ejemplo 5.2.2.** Consideramos el polinomio de Laurent  $f = tx^2 + x + y + xy + t \in \mathbb{C}\{\{t\}\}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ . Sean  $I = \langle f \rangle$  el ideal que genera y  $X = V(I)$ . La curva tropical  $\text{trop}(X)$  se muestra en la figura 5.2.1. Veamos la validez del teorema en los vértices de  $\text{trop}(X)$ . Recordemos que el polinomio tropical  $\text{trop}(f) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  está dado por  $\text{trop}(f)(w_1, w_2) = \min\{1 + 2w_1, w_1, w_2, w_1 + w_2, 1\}$ .

- Para  $\mathbf{w} = (1, 1)$ ,  $\text{trop}(f)(\mathbf{w}) = 1$ , y el mínimo se alcanza en los términos  $x, y, t$ . Por lo tanto,

$$\text{in}_{(1,1)}(f) = \overline{t^{-\text{val}(1)}1} \cdot x + \overline{t^{-\text{val}(1)}1} \cdot y + \overline{t^{-\text{val}(t)}t} \cdot 1 = x + y + 1.$$

Entonces el ideal inicial  $\text{in}_{(1,1)}(I) = \langle x + y + 1 \rangle$ . La variedad tropical  $\text{trop}(V(\text{in}_{\mathbf{w}}(I)))$  es la recta de rayos  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(-1, -1)$ , que coincide con la estrella del vértice  $(1, 1)$ .

- Para  $\mathbf{w} = (-1, 0)$ ,  $\text{trop}(f)(\mathbf{w}) = -1$ , y el mínimo se alcanza en los términos  $tx^2, x, xy$ . Por lo tanto,

$$\text{in}_{(-1,0)}(f) = \overline{t^{-\text{val}(t)}t} \cdot x^2 + \overline{t^{-\text{val}(1)}1} \cdot x + \overline{t^{-\text{val}(1)}1} \cdot xy = x^2 + x + xy.$$

Entonces el ideal inicial  $\text{in}_{(-1,0)}(I) = \langle x^2 + x + xy \rangle = \langle x + 1 + y \rangle$  y la variedad tropical  $\text{trop}(V(\text{in}_{\mathbf{w}}(I)))$  es la estrella del vértice  $(-1, 0)$ .

- Para  $\mathbf{w} = (0, 0)$ ,  $\text{trop}(f)(\mathbf{w}) = 0$ , y el mínimo se alcanza en los términos  $x, y, xy$ . Por lo tanto,  $\text{in}_{(0,0)}(f) = x + y + xy$ , así que  $\text{in}_{(0,0)}(I) = \langle x + y + xy \rangle$ . Entonces la variedad tropical  $\text{trop}(V(\text{in}_{\mathbf{w}}(I)))$  es la recta definida por los rayos  $(1, 1)$ ,  $(-1, 0)$  y  $(0, -1)$ , que coincide con la estrella del vértice  $(0, 0)$  de  $\text{trop}(X)$ .

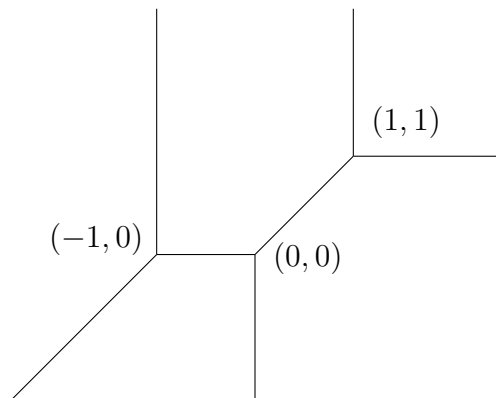


Figura 5.2.1: Curva tropical del ejemplo 5.2.2.

**Teorema 5.2.3.** Sea  $X \subset T^n$  una variedad irreducible. Entonces la variedad tropical  $\text{trop}(X)$  es el soporte de un complejo poliedral  $\Gamma_{\text{val}}$ -racional y puro de dimensión  $d$  en  $\mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* Sea  $I = I_X$ . En particular,  $I$  es primo por ser  $X$  irreducible. Por la caracterización (2) del Teorema Fundamental (teorema 4.2.1),

$$\text{trop}(X) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \text{in}_{\mathbf{w}}(I) \neq \langle 1 \rangle\}$$

(esto es cierto aunque  $K$  no sea algebraicamente cerrado, por la observación 4.3.9) y, por la proposición 4.3.4, este conjunto es el soporte de un subcomplejo  $\Sigma$  del complejo de Gröbner  $\Sigma(I_{\text{proj}})$ , luego  $\text{trop}(X)$  es el soporte de un complejo  $\Gamma_{\text{val}}$ -racional que denotaremos por

$\Sigma$ . Por lo tanto, lo que tenemos que demostrar es que para cada celda maximal  $\sigma \in \Sigma$ ,  $\dim(\sigma) = d$ .

Por la proposición 4.3.7, cada celda de  $\Sigma$  tiene dimensión menor o igual que  $d$ . Por lo tanto, será suficiente demostrar que cada celda maximal  $\sigma \in \Sigma$  tiene dimensión  $\dim(\sigma) \geq d$ .

Sea  $\sigma \in \Sigma$  una celda maximal, llamamos  $k$  a su dimensión y fijamos  $\mathbf{w} \in \text{relint}(\sigma)$ . Por la proposición 5.2.1, tenemos que  $\text{trop}(V(\text{in}_{\mathbf{w}}(I))) = |\text{star}_{\Sigma}(\sigma)|$ . Como  $\sigma$  es una celda maximal, entonces no existe ninguna otra celda  $\tau \in \Sigma$  tal que  $\sigma$  sea cara de  $\tau$ . Por lo tanto, el abanico  $\text{star}_{\Sigma}(\sigma)$  está formado por un único cono, el indexado por  $\sigma$ ,  $\bar{\sigma} = \{\lambda(\mathbf{x} - \mathbf{y}) : \lambda \geq 0, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \sigma\}$ , que es el espacio lineal paralelo a  $\sigma$ . Por lo tanto,  $\text{trop}(V(\text{in}_{\mathbf{w}}(I))) = |\text{star}_{\Sigma}(\sigma)|$  es un subespacio lineal  $L \subset \mathbb{R}^n$  de dimensión  $k$ .

Haciendo un cambio de coordenadas en  $\mathbb{R}^n$ , podemos suponer que  $L$  está generado por los  $k$  primeros vectores de la base canónica:  $L = \mathcal{L}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$ . Sea  $\mathbf{v} \in L$ , aplicando las proposiciones 2.2.5 y 2.4.2, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(I)) = \text{in}_{\mathbf{w} + \epsilon \mathbf{v}}(I)$  para cada  $0 < \epsilon' < \epsilon$ . Por otra parte, como  $\mathbf{w} \in \text{relint}(\sigma)$  y  $\mathbf{v} \in L$ , que es el espacio lineal paralelo a  $\sigma$ , existe  $0 < \epsilon' < \epsilon$  tal que  $\mathbf{w} + \epsilon' \mathbf{v} \in \text{relint}(\sigma)$ . Como  $\mathbf{w}$  y  $\mathbf{w} + \epsilon' \mathbf{v}$  pertenecen al interior relativo de la misma celda del complejo de Gröbner  $\Sigma(I_{\text{proj}})$ , entonces  $\text{in}_{\mathbf{w} + \epsilon' \mathbf{v}}(I) = \text{in}_{\mathbf{w}}(I)$ . Hemos demostrado que, para cada  $\mathbf{v} \in L$ ,  $\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(I)) = \text{in}_{\mathbf{w}}(I)$ . Aplicando la proposición 2.4.3, deducimos que para cada  $\mathbf{v} \in L$ , el ideal  $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$  es homogéneo para la graduación dada por  $\mathbf{v}$ . En particular,  $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$  es homogéneo para el grado dado por  $\deg(x_i) = \delta_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , para cada  $j = 1, \dots, k$ . Vamos a probar que  $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$  está generado por polinomios de Laurent en las variables  $x_{k+1}, \dots, x_n$ , por inducción sobre  $j$ ,  $1 \leq j \leq k$ :

Sea  $j = 1$ , tenemos que demostrar que  $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$  está generado por polinomios en los que no aparece la variable  $x_1$ . Como  $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$  es homogéneo para el grado dado por  $\deg(x_1) = 1$ ,  $\deg(x_i) = 0$ ,  $i > 1$ , existe un sistema de generadores homogéneo  $\{f_1, \dots, f_r\}$  para este grado. Podemos escribir cada  $f_i = x_1^{m_i} \cdot f'_i$ , siendo  $f'_i$  un polinomio en las variables  $x_2, \dots, x_n$ . Entonces

$$\text{in}_{\mathbf{w}}(I) = \langle f_1, \dots, f_r \rangle = \langle f'_1, \dots, f'_r \rangle.$$

Supongamos ahora que  $j < k$  y existe un sistema de generadores  $\{g_1, \dots, g_s\}$  de  $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$  tal que  $g_i \in \text{in}_{\mathbf{w}}(I) \cap \mathbb{k}[x_j^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  para cada  $i$ , y veamos que podemos construir otro sistema de generadores de  $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$  en el que no aparezcan las variables  $x_1, \dots, x_j$ . El ideal  $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$  es homogéneo para el grado dado por  $\deg(x_i) = \delta_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Si ponemos cada  $g_i$  como suma de sus componentes homogéneas para este grado,  $g_i = \sum_{k=0}^{m_i} g_{ik}$ , entonces  $g_{ik} \in \text{in}_{\mathbf{w}}(I)$  para cada  $1 \leq i \leq s$ ,  $0 \leq k \leq m_i$  (por ser  $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$  homogéneo). Está claro que

$$\text{in}_{\mathbf{w}}(I) = \langle g_i : 1 \leq i \leq s \rangle = \langle g_{ik} : 1 \leq i \leq s, 0 \leq k \leq m_i \rangle.$$

Ahora cada  $g_{ik} \in \mathbb{k}[x_j^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  y es homogéneo para el grado dado por  $\deg(x_i) = \delta_{ij}$ . Entonces podemos escribir  $g_{ik} = x_j^{l_{ik}} \cdot g'_{ik}$  con  $g'_{ik} \in \text{in}_{\mathbf{w}}(I) \cap \mathbb{k}[x_{j+1}^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ . Por lo tanto,  $\{g'_{ik} : 1 \leq i \leq s, 0 \leq k \leq m_i\}$  es un sistema de generadores de  $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$  formado por polinomios en las variables  $x_{j+1}, \dots, x_n$ . Esto termina el proceso de inducción.

Sea  $J = \text{in}_{\mathbf{w}}(I) \cap \mathbb{k}[x_{k+1}^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ . Veamos que  $\text{trop}(V(J)) = \{\mathbf{0}\}$ . Sea  $\mathbf{v}' \in \text{trop}(V(J))$  y denotamos  $\mathbf{v} = (\mathbf{0}, \mathbf{v}') \in \mathbb{R}^{k+(n-k)} = \mathbb{R}^n$ . Si  $\mathbf{v}' \neq \mathbf{0}$ , entonces  $\mathbf{v} \notin L$  (pues  $L = \mathcal{L}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$ ). Por otra parte, recordemos que  $L = \text{trop}(V(\text{in}_{\mathbf{w}}(I)))$ , luego  $\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(I)) = \langle 1 \rangle$ . Por lo tanto, existe  $f \in \text{in}_{\mathbf{w}}(I)$  con  $\text{in}_{\mathbf{v}}(f) = 1$ . Como el vector  $\mathbf{v}$  tiene ceros en sus

primeras  $k$  coordenadas e  $in_{\mathbf{w}}(I)$  está generado por polinomios únicamente en las variables  $x_{k+1}, \dots, x_n$ , entonces podemos tomar  $f \in J$ .

Como en  $f$  no aparecen las variables  $x_1, \dots, x_k$ , entonces  $in_{\mathbf{v}}(f) = in_{\mathbf{v}'}(f)$ , así que  $in_{\mathbf{v}'}(f) = \langle 1 \rangle$ , en contradicción con  $\mathbf{v}' \in trop(V(J))$ . Por lo tanto, se tiene  $\mathbf{v}' = \mathbf{0}$ , luego  $trop(V(J)) \subset \{\mathbf{0}\}$ . Recíprocamente, como  $1 \notin in_{\mathbf{w}}(I)$  (porque  $\mathbf{w} \in trop(X)$ ), entonces tenemos que  $in_{\mathbf{0}}(J) = J \neq \langle 1 \rangle$ , así que  $\mathbf{0} \in trop(V(J))$ . En conclusión,  $trop(V(J)) = \{\mathbf{0}\}$ . Del lema 5.2.4 se deduce que  $V(J)$  es un conjunto finito. Y puesto que  $V(in_{\mathbf{w}}(I)) \subset \mathbb{k}^k \times V(J)$ , se tiene  $\dim(in_{\mathbf{w}}(I)) \leq k$ . Por la proposición 4.3.2, sabemos que  $\dim(in_{\mathbf{w}}(I)) = d$ , luego  $k = \dim(\sigma) \geq d$ , como queríamos demostrar.  $\square$

**Lema 5.2.4.** Sea  $X \subset T^n$  una variedad irreducible. Si la variedad tropical  $trop(X)$  es un conjunto finito de puntos de  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $X$  es un conjunto finito de puntos de  $\mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* Lo vamos a demostrar por inducción sobre el número de variables  $n$ . Para  $n = 1$ , todas las variedades no triviales son finitas, y  $trop(T^1) = \mathbb{R}^1$ . Supongamos que el resultado es cierto para  $1, 2, \dots, n-1$  variables y veamos que lo es también para  $n$ .

Sea  $X \subset T^n$  una variedad. Si  $X$  es una hipersuperficie, entonces el teorema 3.4.7 garantiza que el conjunto  $trop(X)$  no es finito. Por lo tanto, podemos suponer  $\dim(X) < n-1$ . Aplicando la proposición 4.3.3, existe un morfismo  $\pi : T^n \rightarrow T^{n-1}$  con  $Y := \pi(X) = \pi(X)$  y, haciendo un cambio de coordenadas, podemos suponer que  $\pi$  es la proyección sobre las primeras  $n-1$  coordenadas.

Por la proposición 4.4.2, la variedad  $trop(Y) = trop(\pi)(trop(X))$ , así que  $trop(Y) \subset \mathbb{R}^{n-1}$  es un conjunto finito de puntos. Aplicando la hipótesis de inducción, la variedad  $Y = \pi(X)$  es finita.

Como hemos aplicado la proposición 4.3.3, podemos suponer que el ideal  $I$  está generado por polinomios en la variable  $x_n$  cuyos coeficientes son monomios (de Laurent) en las variables  $x_1, \dots, x_n$ . Si  $I$  contiene un monomio, entonces  $I = \langle 1 \rangle$ , luego  $X = \emptyset$  es finito. Supongamos que  $I$  no contiene ningún monomio, y sea  $f \in I \cap K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{n-1}^{\pm 1}][x_n]$  un polinomio con la forma anterior. Multiplicando por un término monomial, podemos suponer que  $f$  es de la forma  $f = 1 + \sum_{i=1}^s c_i M_i x_n^i$ , donde cada  $M_i \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{n-1}^{\pm 1}]$  es un monomio.

Ahora, para cada  $\mathbf{y}_i \in Y$ , el polinomio  $f(\mathbf{y}, x_n)$  no se anula, y el punto  $\mathbf{y}_i$  tiene como máximo  $s$  ( $=$  grado de  $f$  en la variable  $x_n$ ) preimágenes  $\mathbf{z} \in X$  con  $\pi(\mathbf{z}) = \mathbf{y}_i$ . Como  $Y$  es finito, entonces  $X \subset T^n$  es un conjunto finito de puntos.  $\square$

### 5.3. Demostración de la condición de equilibrio

En esta sección vamos a demostrar que el complejo poliedral que aparece en el Teorema de Estructura está equilibrado para unos ciertos pesos. Haremos la demostración únicamente en el caso de hipersuperficies. Para demostrarlo, primero tenemos que definir los pesos.

### 5.3.1. Caso de hipersuperficies

Sea  $P$  un politopo *entero* en  $\mathbb{R}^n$ , donde entero quiere decir que  $P$  es la envolvente convexa de puntos enteros. Sea  $\mathcal{N}_P$  el abanico normal a  $P$  y denotamos por  $\Sigma$  al  $(n-1)$ -esqueleto de  $\mathcal{N}_P$ . Por la proposición 3.4.12, el soporte del abanico  $\Sigma$  es la hipersuperficie tropical  $\text{trop}(V(f))$  de cualquier polinomio  $f$  cuyos coeficientes tienen todos valoración nula y tal que el politopo de Newton de  $f$  es  $P$ . Equivalentemente,  $\Sigma = V(F)$ , donde  $F$  es un polinomio tropical cuyos coeficientes son todos nulos y los exponentes en sus monomios tienen como envolvente convexa al politopo  $P$ .

Vamos a asignar pesos al abanico  $\Sigma$ . Cada cono maximal  $\sigma \in \Sigma$  es el cono normal interior de una cara de dimensión 1 (*arista*)  $e(\sigma)$  del politopo  $P$ . Definimos  $m(\sigma)$  como la longitud entera de la arista  $e(\sigma)$ , que es

$$m(\sigma) = \#\{\text{puntos enteros en } e(\sigma)\} - 1.$$

Para hipersuperficies tropicales genéricas, vamos a generalizar la construcción anterior utilizando subdivisiones regulares. Sea  $f = \sum_{\mathbf{u}} c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  un polinomio y sea  $P = \text{Newt}(f)$  su politopo de Newton. Denotamos por  $\Delta$  a la subdivisión regular de  $P$  inducida por los pesos  $\text{val}(c_{\mathbf{u}})$  para cada  $\mathbf{u}$  en el soporte de  $f$ . Si  $F = \text{trop}(f)$ , de hecho, por el teorema 3.4.7, la hipersuperficie tropical  $V(F)$  es el soporte del  $(n-1)$ -esqueleto de  $\Sigma_F$ , que denotaremos por  $\Sigma$ . Por la observación 3.4.8, cada cara maximal  $\sigma \in \Sigma$  se corresponde con una cara de dimensión 1,  $e(\sigma)$ , de  $\Delta$ , y definimos  $m(\sigma)$  como la longitud entera de  $e(\sigma)$ .

Teniendo en cuenta las multiplicidades que acabamos de definir, podemos demostrar el siguiente resultado.

**Proposición 5.3.1.** El complejo poliedral  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ , de dimensión  $n-1$ , definido por un polinomio tropical  $F$  en  $n$  variables, y cuyo soporte es  $V(F)$ , está equilibrado para los pesos  $m(\sigma)$  definidos anteriormente.

Antes de probarlo, vamos a recuperar dos ejemplos que han aparecido en los capítulos anteriores para entender el significado geométrico de los pesos y la condición de equilibrio.

**Ejemplo 5.3.2.** (1) Consideramos el cuadrilátero  $P$  del ejemplo 1.2.19 y su abanico normal, que denotaremos por  $\mathcal{N}_P$ . Sea  $\Sigma$  el 1-esqueleto de  $\mathcal{N}_P$ . Los conos maximales de  $\Sigma$  son los rayos  $\sigma_1 = \text{pos}(0, -1)$ ,  $\sigma_2 = \text{pos}(-3, -2)$ ,  $\sigma_3 = \text{pos}(0, 1)$  y  $\sigma_4 = \text{pos}(3, 1)$  y las correspondientes aristas en el polígono  $P$  son  $e(\sigma_i)$ ,  $1 \leq i \leq 4$  de la figura 5.3.1. En esta figura, podemos observar que las aristas de  $P$  son perpendiculares a los rayos de  $\Sigma$ , esto es un hecho general que usaremos en la demostración de la proposición 5.3.1. La longitud entera de las aristas es  $m(\sigma_1) = m(\sigma_2) = m(\sigma_4) = 1$ ,  $m(\sigma_3) = 4$ . Entonces, la condición de equilibrio de  $\Sigma$  se escribe como:

$$1 \cdot (0, -1) + 4 \cdot (0, 1) + 1 \cdot (-3, -2) + 1 \cdot (3, -1) = (0, 0).$$

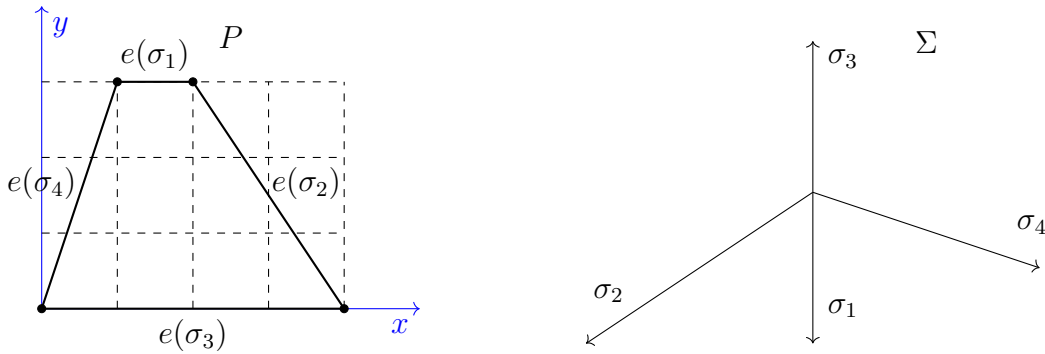


Figura 5.3.1: Condición de equilibrio para el cuadrilátero del ejemplo 5.3.2 (1).

- (2) Sea  $f = 3tx^2 + 5xy - 7ty^2 + 8x - y + t^2 \in \mathbb{C}\{\{t\}\}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ . Su tropicalización es el polinomio tropical

$$F = 1 \odot x^2 \oplus xy \oplus 1 \odot y^2 \oplus x \oplus y \oplus 2.$$

El polígono de Newton de  $f$  es  $P = \text{Newt}(f) = \text{conv}\{(0, 0), (2, 0), (0, 2)\}$ . La hipersuperficie tropical  $V(F)$  y la subdivisión regular de  $P$ ,  $\Delta$ , son las que se calcularon en el ejemplo 3.4.9, y las hemos representado en la figura 5.3.2. Sea  $\Sigma = \Sigma_F$  el complejo poliedral de la observación 2.3.9, entonces  $V(F)$  es el soporte del  $n - 1$ -esqueleto de  $\Sigma$ . Y el teorema 3.4.7 establece una dualidad entre las celdas de  $\Sigma$  y los poliedros de  $\Delta$  (esta dualidad se analizó en detalle en las figuras 3.4.3 y 3.4.4). Cada celda  $\tau_i \in \Sigma$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , de dimensión 0 es dual a una celda de  $\Delta$  de dimensión dos,  $Q_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ .

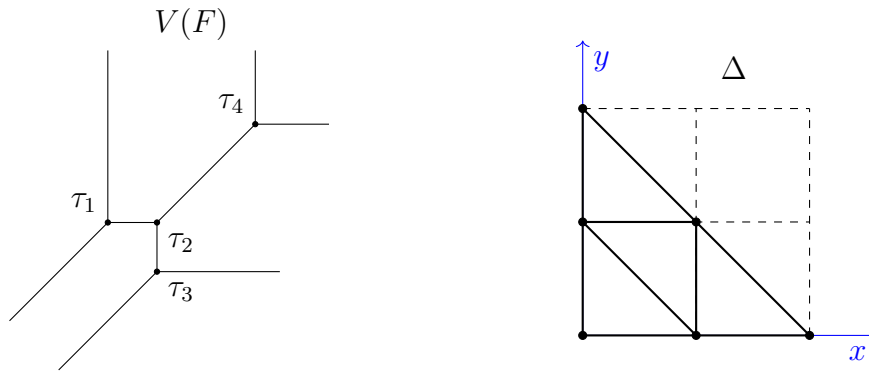


Figura 5.3.2: Curva tropical y subdivisión regular del ejemplo 5.3.2 (2).

Veamos cuál es la condición de equilibrio para cada una de los vértices  $\tau_i \in \Sigma$ . En la figura 5.3.3 hemos representado las estrellas de los vértices  $\tau_i$ ,  $\text{star}_\Sigma(\tau_i)$ , y los polígonos  $Q_i \in \Delta$  duales a los vértices  $\tau_i$ , para  $1 \leq i \leq 4$ . Para cada  $Q_i$ , la longitud entera de cada una de sus aristas es igual a uno, pues en ellas hay exactamente dos puntos enteros.

- Las estrellas  $\text{star}_\Sigma(\tau_1)$ ,  $\text{star}_\Sigma(\tau_3)$  y  $\text{star}_\Sigma(\tau_4)$  coinciden. Los vectores primitivos de sus rayos son  $\mathbf{u}_1 = (1, 0)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (0, 1)$  y  $\mathbf{u}_3 = (-1, -1)$ . Por lo tanto, la condición de equilibrio en ellas se escribe  $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 = (0, 0)$ .



- Los vectores primitivos de los rayos de la estrella  $star_{\Sigma}(\tau_2)$  son  $\mathbf{v}_1 = (-1, 0)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (0, -1)$  y  $\mathbf{v}_3 = (1, 1)$ . Por lo tanto, la condición de equilibrio se escribe  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = (0, 0)$ .

Hemos visto que  $\Sigma$  está equilibrado en cada uno de sus vértices, luego está equilibrado.

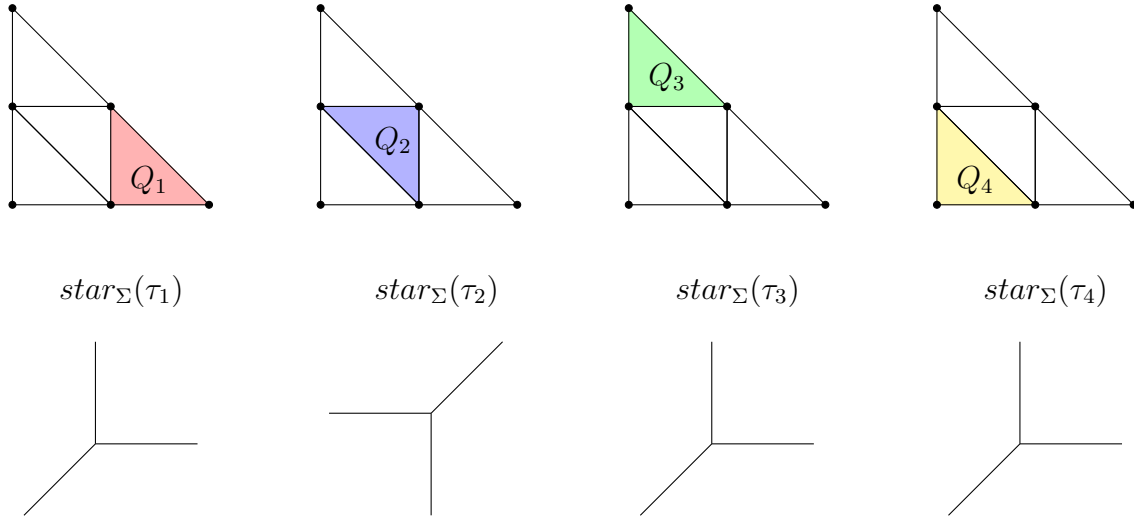


Figura 5.3.3: Polígonos  $Q_i$  y estrellas  $star_{\Sigma}(\tau_i)$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , del ejemplo 5.3.2 (2).

*Demostración de la proposición 5.3.1.* Para  $n = 1$ , el resultado es trivial por la observación 5.1.9.

Sea  $n = 2$ , entonces  $d = \dim(V(F)) = 1$ . Veamos que el abanico  $star_{\Sigma}(\tau)$  está equilibrado para cada celda  $\tau \in \Sigma$  de dimensión  $d - 1 = 0$ . Los conos de  $star_{\Sigma}(\tau)$  están indexados por las celdas  $\sigma \in \Sigma$  que tienen a  $\tau$  como cara. Por la observación 3.4.8 del teorema 3.4.7, cada vértice  $\tau \in \Sigma$  es dual a un polígono  $Q$  de dimensión 2 en la subdivisión regular  $\Delta$ . Los vectores  $\mathbf{v}_{\sigma}$  en (5.1.1) son los vectores primitivos perpendiculares a las aristas de  $Q$  y, al multiplicar estos vectores por los pesos  $m(\sigma)$ , obtenemos los vectores  $m(\sigma)\mathbf{v}_{\sigma}$  que definen las aristas de  $\sigma$  rotados  $90^\circ$ . Entonces la ecuación (5.1.1) se verifica porque la suma de los vectores que definen las aristas de cualquier polígono convexo es igual a cero. Para  $n \geq 3$ , vamos a reducir la prueba al caso  $d = 2$  trabajando módulo  $L$ , como en la definición 5.1.7. Sea  $\tau \in \Sigma$  una celda de dimensión  $\dim(\tau) = d - 1 = n - 2$ , y denotamos por  $L$  al espacio lineal paralelo a  $\tau$ . Por el teorema 3.4.7,  $\tau$  es dual a una celda  $Q \in \Delta$  de dimensión  $\dim(Q) = n - (d - 1) = 2$ , es decir, a un polígono. Y las celdas  $\sigma \in \Sigma$  tales que  $\tau \subsetneq \sigma$  se corresponden por la dualidad a las aristas de  $Q$ . Puesto que  $\tau$  y  $Q$  son ortogonales (observación 3.4.8), de hecho el espacio lineal paralelo a  $Q$  es el plano  $L^\perp$ , y podemos identificar  $Q$  con su proyección  $\pi(Q)$  sobre  $L^\perp$ .

Tenemos que comprobar que  $\Sigma$  está equilibrado en  $\tau$ , lo que equivale a probar que  $star_{\Sigma}(\tau)$  es un abanico equilibrado. Ahora bien, para ello hay que ver que dicho abanico está equilibrado en las celdas de dimensión  $d - 1$ , y la única es  $\bar{\tau} = L$ .

La condición de equilibrio en  $\bar{\tau}$  se define a través de las celdas  $\bar{\sigma}$  de  $star_{\Sigma}(\tau)$  tales que

$\bar{\tau} \subsetneq \bar{\sigma}$ , que se corresponden con las celdas  $\sigma \in \Sigma$  tales que  $\tau \subsetneq \sigma$  (y, por tanto, con las artistas de  $Q$ , por la dualidad).

Cada cono  $(\bar{\sigma} + L)/L$  se identifica, para la condición de equilibrio, con un cono de dimensión 1 en  $L^\perp$ , generado por un vector primitivo de la forma  $\pi(\mathbf{u}_\sigma)$  con  $\mathbf{u}_\sigma \in \bar{\sigma}$ . Puesto que los vectores de  $\sigma$  son de la forma  $\lambda(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ , para  $\lambda \geq 0$ ,  $\mathbf{x} \in \sigma$ ,  $\mathbf{y} \in \tau$ , sus proyecciones serán de la forma  $\lambda\pi(\mathbf{x})$  y, puesto que  $\sigma$  es ortogonal a su arista dual en  $Q$ , dicha ortogonalidad se conserva al proyectar, por lo que  $\pi(\mathbf{u}_\sigma)$  es un vector normal interior a la arista  $\pi(Q)$ . Por lo tanto, por el mismo razonamiento hecho en el caso  $n = 2$  y teniendo en cuenta la definición de los pesos  $m(\sigma)$ , se obtiene que  $star_\Sigma(\tau)$  está equilibrado, como queríamos demostrar.  $\square$

### 5.3.2. Indicaciones para el caso general

Sea  $X \subset T^n$  una variedad con ideal  $I = I_X \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ . De la proposición 4.3.4 se deduce que la variedad tropical  $trop(X)$  es el soporte de un complejo poliedral  $\Gamma_{\text{val}}$ -racional  $\Sigma$ . Mientras que  $|\Sigma| = trop(X)$  está determinado por  $I$ , la elección de  $\Sigma$  no lo está (observación 4.3.5). De nuevo, por la proposición 4.3.4, podemos elegir el complejo  $\Sigma$  de modo que para cada celda  $\sigma \in \Sigma$ ,  $in_{\mathbf{w}}(I) = in_{\mathbf{w}'}(I)$  para cada par de puntos  $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in relint(\sigma)$ .

Denotamos  $S = \mathbb{k}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ . Dado cualquier ideal  $I \subset S$ , denotaremos por  $Ass^{min}(I)$  al conjunto de primos minimales de  $I$ . Si  $I = \bigcap_{i=1}^r \mathfrak{q}_i$  es una descomposición primaria irredundante de  $I$ , entonces  $Ass^{min}(I) = \{\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i} : 1 \leq i \leq r\}$ .

**Definición 5.3.3.** Definimos la *multiplicidad* de cada ideal  $\mathfrak{p}_i \in Ass^{min}(I)$  como el entero positivo

$$mult(\mathfrak{p}_i, I) = l\left(\left(\frac{S}{\mathfrak{q}_i}\right)_{\mathfrak{p}_i}\right) = l\left(\left(\frac{(I : \mathfrak{p}_i^\infty)}{I}\right)_{\mathfrak{p}_i}\right),$$

donde  $l(M)$  denota la longitud de un  $S_{\mathfrak{p}_i}$ -módulo  $M$ , que es la longitud  $s$  de la cadena más larga de submódulos  $M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \dots \supsetneq M_s$ .

**Ejemplo 5.3.4.** Sea  $f = \alpha \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{m_i}$ , con  $\alpha, \lambda_i \in \mathbb{k}$  un polinomio en la variable  $x$ . Entonces una descomposición primaria del ideal  $\langle f \rangle$  es (de hecho, en este caso hay unicidad)

$$\langle f \rangle = \langle (x - \lambda_1)^{m_1} \rangle \cap \dots \cap \langle (x - \lambda_r)^{m_r} \rangle.$$

Por lo tanto, el conjunto de primos minimales asociados al ideal  $\langle f \rangle$  es

$$Ass^{min}(\langle f \rangle) = \{\langle x - \lambda_i \rangle : 1 \leq i \leq r\}.$$

Y las multiplicidades de los primos minimales de  $\langle f \rangle$  son  $mult(\langle x - \lambda_i \rangle, \langle f \rangle) = m_i$ .

**Definición 5.3.5.** Sea  $I \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  un ideal (no necesariamente radical). Sea  $\Sigma$  un complejo poliedral con soporte  $|\Sigma| = trop(V(I))$  tal que para cada celda  $\sigma \in \Sigma$  y cada  $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in relint(\sigma)$ ,  $in_{\mathbf{w}}(I) = in_{\mathbf{w}'}(I)$ . Dada una celda  $\sigma \in \Sigma$  de dimensión máxima, definimos la *multiplicidad* de  $\sigma$ ,  $mult(\sigma)$ , por

$$mult(\sigma) = \sum_{\mathfrak{p} \in Ass^{min}(in_{\mathbf{w}}(I))} mult(\mathfrak{p}, in_{\mathbf{w}}(I)) \quad \text{para cualquier } \mathbf{w} \in relint(\sigma).$$

Con las multiplicidades definidas anteriormente, el complejo poliedral  $\Sigma$  está equilibrado. Esto es el contenido del siguiente teorema:

**Teorema 5.3.6.** Sea  $I \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  un ideal tal que todas las componentes irreducibles de  $V(I)$  tienen la misma dimensión,  $d$ . Fijamos un complejo poliedral  $\Sigma$  cuyo soporte es  $|\Sigma| = \text{trop}(V(I))$  y tal que para cada celda  $\sigma \in \Sigma$  y cada par de puntos  $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \text{relint}(\sigma)$ ,  $\text{in}_{\mathbf{w}}(I) = \text{in}_{\mathbf{w}'}(I)$ . Entonces el complejo poliedral  $\Sigma$  está equilibrado para los pesos dados por la función *mult* de la definición 5.3.5.

Nosotros no vamos a demostrar este teorema, pues que la prueba es demasiado extensa (se puede encontrar en [MS15, Cap. 3, §3.4]). Lo que vamos a probar es que las multiplicidades de la definición 5.3.5 coinciden con los pesos que hemos asignado en el caso de hipersuperficies en la subsección anterior.

**Proposición 5.3.7.** Sea  $f = \sum_{\mathbf{u}} c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  un polinomio de Laurent. Denotamos por  $\Delta$  a la subdivisión regular de  $\text{Newt}(f)$  inducida por los pesos  $\text{val}(c_{\mathbf{u}})$ , y sea  $\Sigma$  el complejo poliedral cuyo soporte es igual a  $\text{trop}(V(f))$ , que es dual a  $\Delta$ . Entonces la multiplicidad de cada celda maximal  $\sigma \in \Sigma$  es igual a la longitud entera de la arista  $e(\sigma) \in \Delta$  dual a  $\sigma$ .

Antes de probar este resultado, veamos un ejemplo:

**Ejemplo 5.3.8.** Consideramos el polinomio

$$f = 5x^3 + 7x^2y + 8xy^2 + 9y^3 + 8x^2 + 5xy - y^2 + 4x + 8y + 1 \in \mathbb{C}\{\{t\}\}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}].$$

La curva tropical  $\text{trop}(V(f))$  es dual a la subdivisión regular  $\Delta$  del triángulo  $\text{Newt}(f) = \text{conv}((0, 0), (3, 0), (0, 3))$  dada por el vector peso  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{10}$  (la dualidad viene dada por el teorema 3.4.7). Consideramos el rayo  $\sigma = \{(\lambda, \lambda) : \lambda \leq 0\}$  de  $\text{trop}(V(f))$ , que es dual a la arista  $e(\sigma) = \{(0, 3) + \lambda(1, -1) : 0 \leq \lambda \leq 3\}$  de  $\Delta$ . La longitud entera de  $e(\sigma)$  es 3. La tropicalización del polinomio  $f$  es

$$\text{trop}(f)(w_1, w_2) = \min\{3w_1, 2w_1 + w_2, w_1 + 2w_2, 3w_2, 2w_1, w_1 + w_2, 2w_2, w_1, w_2, 0\}.$$

Tomamos cualquier  $\mathbf{w} \in \text{relint}(\sigma)$ . Por ejemplo,  $\mathbf{w} = (-1, -1)$ . Entonces  $\text{trop}(f)(-1, -1) = -3$ , y el mínimo se alcanza en los términos  $5x^3, 7x^2y, 8xy^2, 9y^3$  de  $f$ . En general, los exponentes de estos términos son algunos de los puntos enteros de  $e(\sigma)$  (por la dualidad dada en el teorema 3.4.7). En este caso, coinciden exactamente con los puntos enteros en  $e(\sigma)$ , que son  $\{(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)\}$ . La forma inicial de  $f$  para el peso  $\mathbf{w}$  es

$$\text{in}_{\mathbf{w}}(f) = 5x^3 + 7x^2y + 8xy^2 + 9y^3 = \sum_{\mathbf{u} \in e(\sigma): \text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = \text{trop}(f)(\mathbf{w})} \overline{t^{-\text{val}(c_{\mathbf{u}})} c_{\mathbf{u}}} \cdot \mathbf{x}^{\mathbf{u}}.$$

La arista  $e(\sigma)$  tiene dimensión uno, es decir, su espacio lineal paralelo es una recta. Por lo tanto, las diferencias  $\mathbf{u} - \mathbf{u}'$  para cada par de puntos enteros  $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in e(\sigma)$  son proporcionales. Sea  $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}'$  un vector de los descritos anteriormente que tenga norma (euclídea) mínima. En este caso  $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2}$ . Tomamos  $\mathbf{v} = (1, -1)$ . Sea  $\mathbf{u}_0$  el punto del soporte de  $\text{in}_{\mathbf{w}}(f)$  mínimo para el orden lexicográfico (LEX). En este caso,  $\mathbf{u}_0 = (0, 3)$ .

Entonces los puntos enteros de  $e(\sigma)$  los podemos representar por  $(x, y) = (0, 3) + \lambda(1, -1)$  para ciertos  $\lambda \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto, factorizando  $\mathbf{x}^{\mathbf{u}_0} = y^3$  en  $in_{\mathbf{w}}(f)$ :

$$\begin{aligned} in_{\mathbf{w}}(f) &= 5x^3 + 7x^2y + 8xy^2 + 9y^3 = y^3 [5x^3y^{-3} + 7x^2y^{-2} + 8xy^{-1} + 9] \\ &= y^3 [9 + 8xy^{-1} + 7(xy^{-1})^2 + 5(xy^{-1})^3]. \end{aligned}$$

Es decir,  $in_{\mathbf{w}}(f)$  se puede expresar como el producto de un monomio por un polinomio en la variable  $z = \mathbf{x}^{\mathbf{v}}$  cuyo término independiente es no nulo:  $g(z) = 9 + 8z + 7z^2 + 5z^3$ . Además,  $\deg(g)$  es igual a la longitud entera de  $e(\sigma)$  y, por el ejemplo 5.3.4,  $mult(\sigma)$  es la suma de las multiplicidades de las raíces de  $g$ , que es igual al grado de  $g$ .



Figura 5.3.4: Subdivisión regular y curva tropical del ejemplo 5.3.8.

Procedemos ahora a demostrar la proposición. En la demostración vamos a utilizar las mismas ideas del ejemplo previo, pero generalizando las construcciones que hemos hecho.

*Demostración de la proposición 5.3.7.* Fijamos una celda  $\sigma \in \Sigma$  de dimensión máxima ( $\dim(\sigma) = n - 1$ ) y tomamos un punto  $\mathbf{w} \in \text{relint}(\sigma)$ . Por el teorema 3.4.7,  $\sigma$  es dual a una celda  $e(\sigma)$  de dimensión uno (es decir, una arista) en la subdivisión regular  $\Delta$  de  $\text{Newt}(f)$ . También por la dualidad del teorema 3.4.7, los términos  $c_{\mathbf{u}}\mathbf{x}^{\mathbf{u}}$  en los que se alcanza el mínimo de  $\text{trop}(f)(\mathbf{w})$  son todos tales que  $\mathbf{u} \in e(\sigma)$ . Por lo tanto,

$$in_{\mathbf{w}}(f) = \sum_{\mathbf{u} \in e(\sigma): \text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = \text{trop}(f)(\mathbf{w})} \overline{t^{-\text{val}(c_{\mathbf{u}})} c_{\mathbf{u}}} \cdot \mathbf{x}^{\mathbf{u}}.$$

Como  $e(\sigma)$  es una arista, su espacio lineal paralelo tiene dimensión uno. Para cada par de puntos enteros  $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in e(\sigma)$ , denotamos  $\mathbf{v}_{\mathbf{u}\mathbf{u}'} = \mathbf{u} - \mathbf{u}' \in \text{lin}(e(\sigma))$ , y consideramos el vector  $\mathbf{v}$  de norma mínima y que sea mayor que  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  para el orden LEX. Sea  $\mathbf{u}_0 \in \text{supp}(in_{\mathbf{w}}(f))$  mínimo para el orden LEX. Entonces, por la forma en la que hemos elegido  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{u}_0$ , todos los puntos  $\mathbf{u} \in \text{supp}(in_{\mathbf{w}}(f))$  se pueden escribir de la forma  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \lambda\mathbf{v}$ , donde  $\lambda = 0$  para  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ , y  $\lambda \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  para cada  $\mathbf{u} \neq \mathbf{u}_0$ . Por lo tanto, podemos escribir

$$in_{\mathbf{w}}(f) = \mathbf{x}^{\mathbf{u}_0} \left( \underbrace{\overline{t^{-\text{val}(c_{\mathbf{u}_0)}} c_{\mathbf{u}_0}}}_{\neq 0} + \sum_{\lambda \geq 1, \mathbf{u} \neq \mathbf{u}_0} \overline{t^{-\text{val}(c_{\mathbf{u}})} c_{\mathbf{u}}} \cdot (\mathbf{x}^{\mathbf{v}})^{\lambda} \right).$$

Es decir,  $in_{\mathbf{w}}(f) = M(x_1, \dots, x_n) \cdot g(z)$ , donde  $M$  es un monomio y  $g$  es un polinomio ordinario en la variable  $z = \mathbf{x}^{\mathbf{v}}$  cuyo término independiente es no nulo. Además, por la forma en que hemos elegido  $\mathbf{u}_0$  y  $\mathbf{v}$ , está claro que el grado de  $g$  es igual a la longitud entera de  $e(\sigma)$ .

Por otra parte, como vimos en el ejemplo 5.3.4, la suma de las multiplicidades de los primos minimales de  $\langle in_{\mathbf{w}}(f) \rangle = \langle g \rangle$  es exactamente el grado del polinomio  $g$  en la variable  $z = \mathbf{x}^{\mathbf{v}}$ , lo que completa la prueba.  $\square$

## 5.4. Problema inverso

El Teorema de Estructura 5.1.1 describe la forma que tienen las variedades tropicales. Ahora nos podemos plantear el problema inverso, es decir, dado un complejo poliedral  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$  equilibrado para unos ciertos pesos,  $\Gamma_{\text{val}}$ -racional y puro de dimensión  $d \leq n$ , ¿existe una variedad  $X \subset T^n$  tal que  $trop(X) = |\Sigma|$ ?

En general, la respuesta a esta pregunta es negativa. Pero en el caso de hipersuperficies el resultado es cierto:

**Proposición 5.4.1.** Sea  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$  un complejo poliedral equilibrado para unos ciertos pesos,  $\Gamma_{\text{val}}$ -racional y puro de dimensión  $n - 1$ . Entonces existe un polinomio tropical  $F$ , con coeficientes en  $\Gamma_{\text{val}}$ , tal que  $|\Sigma| = V(F)$ . Y esto asegura la existencia de un polinomio de Laurent  $f \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  tal que  $|\Sigma| = trop(V(f))$ .

*Demostración.* [MS15, Cap. 3, Prop. 3.3.10].  $\square$

La demostración de este resultado proporciona un algoritmo para encontrar de forma efectiva un polinomio tropical  $F$  tal que  $V(F) = |\Sigma|$ .

Se han encontrado complejos poliedrales  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$  que cumplen todas las condiciones del Teorema de Estructura, pero tales que  $|\Sigma| \neq trop(X)$  para cualquier variedad  $X \subset T^n$ . Un ejemplo de esto se puede ver en [MS15, Cap. 4, Ejemplo 4.2.15]). Actualmente, se desconoce si imponiendo más condiciones se puede resolver completamente el problema inverso.



# Conclusiones

En este trabajo se han estudiado las bases de la Geometría Algebraica Tropical, siguiendo el libro [MS15]. Para poder desarrollar el trabajo, ha sido necesario incluir algunos temas que no estaban contemplados inicialmente, como la teoría de valoraciones. Esto ha enriquecido enormemente mi formación, permitiéndome profundizar en temas que me interesan y no se estudian en el Grado.

Durante el estudio de este tema nos hemos encontrado con diversas dificultades. Por ejemplo, hemos tenido que afinar la definición de variedad tropical que aparece en [MS15], pues tal como viene en el libro, las variedades tropicales no están bien definidas.

Este trabajo se podría extender *ad infinitum*, por lo que a continuación cito algunas líneas de trabajo que me gustaría abordar en el futuro:

- Teorema de Bézout para curvas tropicales.
- Estudio del Teorema de Estructura en más profundidad.
- Estudio de los algoritmos que se utilizan para el cálculo de variedades tropicales, bases de Gröbner y demás aspectos computacionales.
- Aplicaciones de la Geometría Tropical en otras áreas. Para esto, un primer acercamiento se puede realizar siguiendo el artículo [ZNL18].





# Bibliografía

- [AM69] Atiyah, M. F. y MacDonal, I. G. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley series in mathematics; 361. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1969.
- [Ber71] Bergman, G. M. The logarithmic limit-set of an algebraic variety. *Transactions of the American Mathematical Society*, 157:459–469, 1971.
- [CA00] Casas-Alvero, E. *Newton–Puiseux algorithm*, pages 15–38. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 2000.
- [Che79] Chevalley, C. *Introduction to the theory of algebraic functions of one variable*. Mathematical Surveys; 6. American Mathematical Society, New York, 5th printing edition, 1979.
- [CLO97] Cox, D., Little, J., y O’Shea, D. *Ideals, Varieties, and Algorithms An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2nd edition, 1997.
- [CM13] Chan, A. y Maclagan, D. Gröbner bases over fields with valuations. *Mathematics of Computation*, 88, 2013.
- [DGPS20] Decker, W., Greuel, G.-M., Pfister, G., y Schönemann, H. SINGULAR 4-2-0 — A computer algebra system for polynomial computations. <http://www.singular.uni-kl.de>, 2020.
- [Eis95] Eisenbud, D. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, 150. Springer New York, New York, NY, 1st edition, 1995.
- [EKL06] Einsiedler, M., Kapranov, M., y Lind, D. Non-archimedean amoebas and tropical varieties. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, (601), 2006.
- [Ful89] Fulton, W. *Algebraic curves : an introduction to algebraic geometry*. Advanced Book Classics. Addison-Wesley, Redwood City, California, 1989.
- [Har77] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, 52. Springer New York, 1977.

- [Jen17] Jensen, A. N. Gfan, a software system for Gröbner fans and tropical varieties. Disponible en <http://home.imf.au.dk/jensen/software/gfan/gfan.html>, 2017.
- [LR08] Lu, S. y Robinson, S. M. Normal fans of polyhedral convex sets: Structures and connections. *Set-Valued Analysis*, 16, 2008.
- [MS15] Maclagan, D. y Sturmfels, B. *Introduction to tropical geometry*. Graduate studies in mathematics; 161. American Mathematical Society, Providence (R. I.), 2015.
- [Ost35] Ostrowski, A. Untersuchungen zur arithmetischen theorie der körper. (die theorie der teilbarkeit in allgemeinen körpern) teil i. *Mathematische Zeitschrift*, 39:269–320, 1935.
- [Pas77] Passman, D. S. *The algebraic structure of group rings*. Pure and applied mathematics. John Wiley and sons, New York, 1977.
- [Poo93] Poonen, B. Maximally complete fields. *Enseign. Math*, 39(1-2):87–106, 1993.
- [Rib99] Ribenboim, P. *The Theory of Classical Valuations*. Springer Monographs in Mathematics. Springer New York, 1st edition, 1999.
- [Zie95] Ziegler, G. M. *Lectures on Polytopes*. Graduate Texts in Mathematics, 152. Springer New York, 1st edition, 1995.
- [ZNL18] Zhang, L., Naitzat, G., y Lim, L.-H. Tropical geometry of deep neural networks. In Dy, J. y Krause, A., editors, *Proceedings of the 35th International Conference on Machine Learning*, volume 80 of *Proceedings of Machine Learning Research*, pages 5824–5832. PMLR, 10-15 Jul 2018.

# Índice de figuras

1.2.1. Dos formas alternativas de describir un politopo. . . . .	12
1.2.2. Un subconjunto convexo de un politopo que no es una cara. . . . .	13
1.2.3. Un complejo poliedral. . . . .	14
1.2.4. Abanicos poliedrales. . . . .	15
1.2.5. Colección de conos que no forman un abanico poliedral. . . . .	15
1.2.6. El abanico normal (interior) de un poliedro. . . . .	17
1.2.7. Estrella de un poliedro en un complejo poliedral. . . . .	18
1.2.8. Explicación del ejemplo 1.2.30 (1). . . . .	22
1.2.9. Subdivisión regular del cono del ejemplo 1.2.30 (1). . . . .	22
1.2.10. Explicación del ejemplo 1.2.30 (2). . . . .	23
1.2.11. Subdivisiones regulares del ejemplo 1.2.30 y su relación según la proposición 1.2.28. . . . .	23
1.2.12. Subdivisiones regulares del ejemplo 1.2.31. . . . .	23
1.2.13. Politopo levantado y caras inferiores del ejemplo 1.2.32 para el vector peso $\mathbf{w} = (1, 0, 1, 0, 0, 2)$ . . . . .	24
1.2.14. Subdivisiones regulares del ejemplo 1.2.32. . . . .	24
2.3.1. Complejo de Gröbner e ideales iniciales del ejemplo 2.3.13. . . . .	45
3.2.1. Una recta tropical y una cuádrica tropical. Figuras del ejemplo 3.2.4. . . . .	58
3.4.1. Polígono de Newton del ejemplo 3.4.4. . . . .	64
3.4.2. Politopo levantado y caras inferiores del ejemplo 3.4.9. . . . .	67
3.4.3. Subdivisión regular del polígono de Newton del ejemplo 3.4.9. . . . .	68
3.4.4. Curva tropical del ejemplo 3.4.9. . . . .	68
3.4.5. Curva tropical y subdivisión regular del ejemplo 3.4.10 (1). . . . .	69
3.4.6. Curva tropical y subdivisión regular del ejemplo 3.4.10 (2). . . . .	69
3.4.7. Curva tropical y subdivisión regular del ejemplo 3.4.13. . . . .	70
5.1.1. Un abanico equilibrado en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	88
5.1.2. Complejos poliedrales del ejemplo 5.1.12. . . . .	90

5.2.1. Curva tropical del ejemplo 5.2.2. . . . .	92
5.3.1. Condición de equilibrio para el cuadrilátero del ejemplo 5.3.2 (1). . . . .	96
5.3.2. Curva tropical y subdivisión regular del ejemplo 5.3.2 (2). . . . .	96
5.3.3. Polígonos $Q_i$ y estrellas $star_{\Sigma}(\tau_i)$ , $1 \leq i \leq 4$ , del ejemplo 5.3.2 (2). . . . .	97
5.3.4. Subdivisión regular y curva tropical del ejemplo 5.3.8. . . . .	100