Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias

Trabajo Fin de Grado

Grado en Matemáticas

Números notables relativos a funciones aritméticas de divisores.

Autor: ***Mikel Pardiñas Franco***

Tutor: ***José Enrique Marcos Naveira***

Índice general

Proemio

El siguiente trabajo hace una recopilación de ciertos números relacionados con las funciones suma de divisores y número de divisores. Dichos números son: los perfectos, multiperfectos, armónicos y aritméticos.
Se van a describir propiedades de todos ellos, y algunas de estas se van a usar para comparar a estos números entre sí. Por ejemplo, si son multiplicativos, impares, etc...

En concreto, en el caso de los números perfectos, esta última propiedad citada da lugar al problema implícito más antiguo de la historia de las matemáticas.
Ya en el siglo I.V. a.C. el matemático Euclides hacía referencia en su libro IX de "Los Elementos.ª los números perfectos pares, por tanto, es lógico que desde ese preciso momento surja la pregunta de qué sucede con los números perfectos impares.

Pero no solo Euclídes se encuentra entre los matemáticos más notables que han estudiado estos números. Tenemos cómo Euler, Descartes, Fermat, Carmichael, Mersenne y Ore entre otros, ocuparon gran parte de sus vidas al estudio de estos números. Hecho que a mi parecer les da un valor notable. Tienen que tener algo realmente interesante o especial para que a grandes matemáticos como ellos les causara tal fascinación.

Aunque si de fascinación se trata, a mi parecer tanto los números perfectos como los primos de Mersenne son los ganadores. No hay más que comprobar cómo estos últimos siguen siendo un tema de estudio muy actual. Una viva prueba de ello es el proyecto GIMPS, un proyecto global en el que miles de personas participan de manera activa para intentar encontrar el siguiente primo de Mersenne. Este proyecto posee relevancia por el hecho de que los primos más grandes que se conocen son primos de Mersenne, y se han conseguido gracias a él. Si a eso se le suma la gran importancia que tienen los números primos con tamaños elevados en distintas ramas de la ciberseguridad, resulta clara la relevancia actual que siguen teniendo.

Y aunque este trabajo esté realizado en su mayoría utilizando teoría de números elemental, eso no quiere decir que sea trivial. Sin ir más lejos, si el problema ya antes mencionado sobre los números perfectos impares fuese trivial, ya estaría resuelto. Al igual que este, tenemos otros problemas de apariencia bastante sencilla pero que no han conseguido tener solución. Por ejemplo, dar un nuevo número 3-perfecto o probar que no existe ninguno más, ya que desde 1643 nadie ha conseguido encontrar uno nuevo. Si a esto se le añade el trabajo de Øystein Ore con la creación de números armónicos y aritméticos y la gran cantidad de problemas abiertos que estos generan, podemos asegurar que por mucho que se trate de una teoría elemental, aún carecemos de herramientas tanto teóricas como prácticas para poder resolver problemas elementales y muy antiguos. Estos ejemplos ya deberían ser más que suficientes para tener en cuenta a estos números.

Además, como se puede observar en la bibliografía de este trabajo, a día de hoy se continúan haciendo publicando sobre estos números. De nuevo, este hecho que hace pensar que no están obsoletos. Si le sumamos toda la información previa ya existente, es normal que se siga investigando acerca de ellos.

Personalmente, me ha llamado mucho la atención la evolución histórica de algunos de estos números. Vemos cómo en el pasado a los números perfectos se les otorgaron poderes divinos por las coincidencias que presentaban con ciertos números que tenían un significado religioso o espiritual. Irónicamente, fue un clero llamado S. Agustín quien trató de despojar a los números de estas cualidades en el siglo I.V. d.C.; es llamativo cómo actualmente los adolescentes, y no solo adolescentes vuelven a creer en hechos como la numerología o la astrología, otorgando de nuevo habilidades divinas a meros conceptos científicos. Personalmente, considero que no hemos madurado intelectualmente como sociedad tanto como pensamos.

Por otro lado, he de reconocer que de todos estos números los que más me han llamado la atención son los multiperfectos. Unos números que en principio no tienen ninguna aplicación práctica pero que aún así han sido capaces de reunir a Fermat, Descartes, Mersenne, Lehmer, Carmichael, ... en su estudio, y no de manera puntual. Muchos de ellos dedicaron gran parte de su vida a su estudio. De nuevo he de recalcar que matemáticos tan sumamente importantes le dedicaran tanto tiempo a algo supuestamente tan inservible, es sorprendente.

En contraposición, los números aritméticos me han parecido bastante monótonos y aburridos. Solamente por el hecho de que haya tantos de estos números, hace que carezcan de mucho interés, o al menos esa es mi opinión.

Este ha sido un trabajo, que me ha llevado bastante tiempo realizar y aunque en bastantes casos he tratado cosas sencillas me ha sorprendido ver cómo cosas tan básicas en teoría de números son omitidas en la carrera. Desde mi punto de vista solo por lo histórico de estos conceptos deberían ser tratados, aunque sea un poco.

Para finalizar este proemio, querría realizar dos agradecimientos.
El primero, a mi tutor del trabajo, por todo el tiempo que me ha dedicado y por estar siempre dispuesto a echarme una mano cuando lo necesitaba. Sinceramente, ha sido un gran apoyo y ayuda en este final de carrera.
Y el segundo y más sentido, a la persona que durante todo el tiempo que me ha llevado terminar esta carrera, ha sido una gran psicóloga, amiga y principalmente madre. Si no hubiese estado todos estos años apoyándome y evitando que me rindiese, dudo mucho que hubiese llegado hasta este punto. Por todos estos motivos quería dejar constancia de lo agradecido que me siento y creo que no hay un lugar más idóneo que en este trabajo, que es la culminación de mi grado. Muchas gracias Esther.

Capítulo 1 Las funciones aritméticas.

En este primer capítulo se presentan las principales herramientas que utilizaremos a lo largo de este trabajo, las funciones aritméticas. Aunque se tratan varios ejemplos a lo largo del capítulo, dos de ellas van a ser las protagonistas del trabajo: la función número de divisores y la función suma de divisores.

Estas funciones llevan suscitando interés desde hace siglos, Marin Mersenne (1588-1648) ya se preguntaba en 1644 cuantos números tendrían 60 divisores. Pero fue Frans Van Schooten (1615-1660) quién formuló formalmente por primera vez la pregunta de como calcular todos los divisores de un número, siendo este un número cualquiera. No fue hasta 1708, que Pierre Rémond de Montmort (1678-1719) escribió formalmente que el problema de Van Schooten era análogo a probar que $a_1^{e_1} \cdot a_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{e_n}$ tiene $(e_1+1) \cdot (e_2+1) \cdot \ldots \cdot (e_n+1)$ divisores, si cada a_i es un primo distinto y todos los e_i son enteros.
Esta expresión fue probada por E. Waring (1734-1798) en 1782, y es la expresión que se sigue usando a día de hoy para calcular el número de divisores de un número.

La otra gran protagonista, la función suma de divisores, ya aparece en manuscritos que fechan de 1701 pertenecientes a R. Descartes(1596-1650), junto con la expresión para calcular la suma de divisores de p^n, esta es $\left(\dfrac{p^{n+1}-1}{p-1}\right)$, siendo p un primo. También aparece la formula de la multiplicidad de esta función. Aunque la forma más sofisticada de esta expresión, y la que se utiliza actualmente fue dada por Jhon Wallis (1616-1703) en 1658.

Como se puede apreciar, estas funciones han ocupado el estudió de grandes personalidades del mundo matemático.
La información respectiva a esta breve introducción se ha obtenido de [8].

1.1 Definición y principales resultados

En primer lugar, es necesario definir las funciones aritméticas, extraído de [19].

Definición 1. *Cualquier función $f : \mathbb{N}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}$, del conjunto de los naturales positivos al conjunto de números enteros se llama función aritmética.*

Nota 1. *También se conocen como funciones aritméticas $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ y $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$. Todas las propiedades que se estudien en el conjunto de los enteros son extrapolables a estos otros casos.[19]*

Algunos de los ejemplos más famosos de dichas funciones son:

- La función ϕ de Euler.
- La función μ de Möbius.

- La función τ número de divisores.
- La función σ suma de divisores.

Empezamos definiendo el conjunto $\triangle$, y estudiando algunas de sus propiedades.
La información relativa a las siguientes definiciones se ha obtenido de [19].

Definición 2. *Se define $\triangle$ como el conjunto de funciones aritméticas, $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$.*

Definición 3. *Sea $\triangle$, con f y g pertenecientes a $\triangle$. Se define*

- *La suma:*
$$(f+g)(n) = f(n) + g(n). \tag{1.1}$$
- *El producto de Dirichlet:*
$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d) = \sum_{ab=n} f(a)g(b) = \sum_{d|n} f(n/d)g(d). \tag{1.2}$$

La siguiente definición obtenida de [29], dice cuándo son multiplicativas estas funciones.

Definición 4. *Sea f una función aritmética no nula, con $m.c.d(n,m) = 1$.*
Entonces f es multiplicativa si
$$f(nm) = f(n)f(m). \tag{1.3}$$

Nota 2. *Que la condición $f(nm) = f(n)f(m)$ sea cierta, no implica que $m.c.d(n,m) = 1$.*

Definición 5. *Sea f una función aritmética no nula, que cumple*
$$f(nm) = f(n) + f(m), \tag{1.4}$$
para cada $m, n \in \mathbb{N}$, tales que $mcd(n,m) = 1$, entonces se dice que f es aditiva.

Se pueden dar propiedades equivalentes y más fuertes si no se exige que m y n sean primos entre sí.

Definición 6. *Sea f una función perteneciente a $\triangle$, se la denomina :*

- *Completamente aditiva, si $f(mn) = f(m) + f(n)$ para cada m y n naturales.*
- *Completamente multiplicativa, si $f(mn) = f(m)f(n)$ para cada m y n naturales.*

Estas dos últimas definiciones se han tomado de [37].
A continuación, una proposición que va a ser de gran ayuda en el resto del capítulo.

Proposición 7. *Sea f es una función multiplicativa, entonces*
$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \tag{1.5}$$
también lo es.

Demostración: Para ver que g es una función multiplicativa se prueba que $g(mn) = g(m)g(n)$, para cada $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $mcd(n, m) = 1$.
Por hipótesis, se tiene que f es multiplicativa, y sea d un divisor de mn, entonces

$$d = d_1 d_2,$$

con d_1 divisor de m y d_2 de n, por lo cual $d_1 d_2$ es un divisor de mn, luego:

$$g(mn) = \sum_{\substack{d_1|m \\ d_2|n}} f(d_1 d_2) = \sum_{\substack{d_1|m \\ d_2|n}} f(d_1)f(d_2) = \left(\sum_{d_1|m} f(d_1)\right)\left(\sum_{d_2|n} f(d_2)\right) = g(m)g(n).$$

Como $g(mn) = g(m)g(n)$, g es multiplicativa.
Se ha obtenido de [16]

□

Nota 3. *Se ha introducido esta proposición ya que muchos de los ejemplos más importantes vienen expresados de esta manera.*

Ejemplo 1: *La función identidad, $f(n) = 1$, es obviamente multiplicativa, puesto que:*

$$f(mn) = 1 \cdot 1 = f(m)f(n)$$

Pasa lo mismo con $g(n) = n^k$, con k un entero, tenemos que:

$$g(mn) = (mn)^k = m^k n^k = g(m)g(n)$$

A continuación, se presenta un teorema que permite aplicar funciones aritméticas sobre cualquier número entero.

Teorema 8. (Teorema fundamental de las funciones multiplicativas) *Sea f una función multiplicativa y n un entero positivo con la siguiente descomposición:*

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}.$$

Entonces

$$f(n) = f(p_1^{e_1}) f(p_2^{e_2}) \dots f(p_k^{e_k}). \tag{1.6}$$

Demostración: Razonamos por inducción.
Sea n un número natural formado por distintos primos. En el primer caso, $k = 1$, se tiene $n = p_1^{e_1}$, luego:

$$f(n) = f(p_1^{e_1}).$$

Como es cierto para el primer caso, se supone correcto hasta un cierto k y se prueba para un $k+1$.
Sea n con la siguiente descomposición canónica:

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k} p_{k+1}^{e_{k+1}}$$

Teniendo en cuenta que f es multiplicativa por hipótesis, junto con el hecho de que el $mcd(p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}, p_{k+1}^{e_{k+1}}) = 1$ por ser cada p_i con $i = 1, 2, ..., k, k+1$ un primo distinto, se tiene que

$$f(p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k} p_{k+1}^{e_{k+1}}) = f(p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}) f(p_{k+1}^{e_{k+1}}) = f(p_1^{e_1}) f(p_2^{e_2}) \dots f(p_k^{e_k}) f(p_{k+1}^{e_{k+1}})$$

por hipótesis de inducción. Se ha tomado de [17].

□

En la siguiente sección se tratarán los principales ejemplos de este campo, además de las tres protagonistas del capítulo, las funciones número de divisores, suma de divisores y suma k-ésima de divisores.

1.2 Principales funciones aritméticas

Antes de pasar al grueso de la sección, se van a tratar dos ejemplos que no pueden ser omitidos por su gran relevancia en la teoría de números. estas dos funciones son la función μ de Möbius y la función ϕ de Euler.

1.2.1. La función μ de Möbius

Definición 9. *Sea n un número entero positivo, entonces la función se define como:*

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ (-1)^k & \text{si } n \textit{ es el producto de } k \textit{ primos distintos} \\ 0 & \text{si } n \textit{ tiene algún divisor cuadrado mayor de } 1 \end{cases} \tag{1.7}$$

Se ha extraído de [16].

Ejemplo 2: *Los distintos casos que se pueden obtener con esta función son:*

- $\mu(1) = 1$ *, por definición.*
- $\mu(11) = -1$ *, ya que $k = 1$.*
- $\mu(10) = 1$ *, por ser el producto de 2 y 5 luego $k = 2$.*
- $\mu(8) = 0$ *, puesto que $8 = 2^3$.*

La siguiente proposición muestra cómo la función μ cumple las propiedades vistas de las funciones aritméticas.

Proposición 10. *Sea n un número natural y μ la función definida anteriormente, tenemos entonces que:*

(a). La función $\mu(n)$ es multiplicativa.

(b). Se cumple que:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \textit{ es mayor que } 1 \end{cases} \tag{1.8}$$

`Demostración:`

(a). Se quiere ver que $\mu(n)$ es una función multiplicativa, $\mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$.
Sean m, n naturales con $mcd(m, n) = 1$ y las siguientes descomposiciones:

$$m = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r} \ , \ n = q_1^{\beta_1} \dots q_s^{\beta_s} \text{ con } p_i \neq q_j,$$

siendo p_i, q_j primos, α_i, β_j enteros y $p_i \neq q_j$.
Se diferencian dos posibles casos:

- Si alguno de los α_i o β_j es mayor que 1, entonces m o n tiene algún divisor cuadrado mayor que 1, y por tanto $\mu(m) = 0$ o $\mu(n) = 0$. Al mismo tiempo, por tener m o n algún divisor cuadrado mayor que 1, mn también lo tiene, luego $\mu(mn) = 0$. Por tanto

$$\mu(mn) = 0 = \mu(m)\mu(n)$$

  Y la igualdad es cierta.

- Si ninguno de los α_i o β_j es mayor que 1, se tiene que:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_s = 1,$$

  luego

$$\mu(n) = \mu(q_1^{\beta_1} ... q_s^{\beta_s}) = \mu(q_1 ... q_s) = (-1)^s$$
$$\mu(m) = \mu(p_1^{\alpha_1} ... p_r^{\alpha_r}) = \mu(p_1 ... p_r) = (-1)^r.$$

  De el mismo modo se tiene

$$\mu(nm) = \mu(q_1^{\alpha_1} \cdot \dots q_s^{\alpha_s} \cdot p_1^{\beta_1} \cdot \dots p_r^{\beta_r}) = \mu(p_1 \cdot \dots \cdot p_r \cdot q_1 \cdot \dots \cdot q_s \cdot) = (-1)^{r+s}$$

  Por consiguiente

$$\mu(nm) = (-1)^{r+s} = (-1)^s \cdot (-1)^r = \mu(n)\mu(m)$$

(b). Como se vio en la proposición 7., si f es multiplicativa, $g(n) = \sum_{d|n} f(n)$, también lo es. De este mismo modo, como $\mu(n)$ es multiplicativa, $g(n) = \sum_{d|n} \mu(n)$ también lo es.
Sea $n = \prod_{i \in I} q_i^{\alpha_i}$, se tiene

$$g(n) = \prod_{i \in I} g(q_i^{\alpha_i}),$$

con q_i primo y α_i entero. Como los q_i son primos se tiene:

$$g(q_i^{\alpha_i}) = \sum_{d | q_i^{\alpha_i}} \mu(d) = \mu(1) + \mu(q_i) + \mu(q_i^2) + ... + \mu(q_i^{\alpha_i}) = 1 - 1 + 0 + 0 + \dots + 0 = 0$$

El valor 1, -1 y 0 se obtiene de la definición de $\mu(n)$. Se ha tratado el caso $n > 1$ y omitido $n = 1$ por su trivialidad. La información de este resultado con su respectiva demostración se ha obtenido de [16].

□

Valores de $\mu(n)$																	
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
$\mu(n)$	1	-1	-1	0	-1	1	-1	0	0	1	-1	0	-1	1	1	0	...

Cuadro 1.1: A008683

La información de esta tabla se ha extraído de [30].

1.2.2. La función ϕ de Euler

Definición 11. *La función ϕ de Euler se define como el número de enteros positivos menores o iguales que n y relativamente primos con él(coprimos).[17]*

Es trivial que $\phi(1)$ es 1, para el resto de casos no tan triviales se tiene la siguiente proposición.

Proposición 12. *Sea p un primo y k un numero natural, tenemos que:*

(a). $\phi(p) = p - 1$.

(b). $\phi(p^k) = (p-1)p^{k-1}$.

`Demostración:`

(a). Todo número primo p es relativamente primo con todos los elementos anteriores a él, es decir con $p-1$ elementos, por tanto $\phi(p) = p - 1$.

(b). Probamos por inducción.
Por el apartado anterior se sabe que es cierto para el primer caso, $\phi(p^1) = \phi(p) = (p-1)p^{1-1}$. Se supone cierto para el caso $\phi(p^k)$, $\phi(p^k) = (p-1)p^{k-1}$ y se debe probar para el caso $\phi(p^{k+1})$, es decir,

$$\phi(p^{k+1}) = (p-1)p^k. \tag{1.9}$$

Como $\phi(p^k)$ es la cantidad de números relativamente primos con p^k, si se multiplica por p, la cantidad de números relativamente primos con p^k aumenta p veces, luego

$$\phi(p^k)p = \phi(p^{k+1}).$$

Si además se reescribe el término $(p-1)p^k$ como

$$(p-1)p^k = (p-1)p^{k-1}p = ((p-1)p^{k-1})p = \phi(p^k)p,$$

se tiene que

$$\phi(p^{k+1}) = \phi(p^k)p = (p-1)p^{k-1}p = (p-1)p^k.$$

Tal y como se quería probar.

Esta demostración se ha obtenido de [34].

□

A continuación, se examinan algunos ejemplos para observar el cálculo de esta función.

Ejemplo 3: *Calculamos* $\phi(8)$, $\phi(81)$ *y* $\phi(15625)$.

- $\phi(8) = \phi(2^3) = 2^3 - 2^2 = 8 - 4 = 4.$
- $\phi(81) = \phi(3^4) = 3^4 - 3^3 = 54.$
- $\phi(15625) = \phi(5^6) = 5^6 - 5^5 = 12500.$

Nota 4. *La función* ϕ *de Euler también se puede definir como:*

$$\phi(n) = n \prod_{p_i | n} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \tag{1.10}$$

Lo último por estudiar de esta función es que es multiplicativa, al igual que el resto de las funciones aritméticas que se tratan.

Proposición 13. *La función* ϕ *de Euler es multiplicativa.*

`Demostración:` Para realizar esta prueba tenemos que ver: $\phi(nm) = \phi(n)\phi(m)$, con $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$ y $m = q_1^{d_1} q_2^{d_1} \dots q_j^{e_j}$; siendo p_i, q_i primos y e_i, d_i enteros con $m.c.d(n, m) = 1$. Por la nota anterior se sabe que:

$$\phi(n)\phi(m) = n \prod_{p_i | n} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) m \prod_{q_i | m} \left(1 - \frac{1}{q_i}\right) = nm \prod_{p_i | n} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \prod_{q_i | m} \left(1 - \frac{1}{q_i}\right).$$

Como el $mcd(n, m) = 1$, ninguno de los factores primos de mn coincide, por tanto se pueden dar los factores de mn como: $mn = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k} q_1^{d_1} q_2^{d_1} \dots q_j^{e_j}$, luego

$$\phi(nm) = nm \prod_{p_i | n} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \prod_{q_i | m} \left(1 - \frac{1}{q_i}\right).$$

Finalmente, $\phi(nm) = \phi(n)\phi(m)$ y la demostración esta concluida.
Se ha tomado de [37].

□

Tratamos un ejemplo para ver la utilidad de esta proposición.

Ejemplo 4: *Calcular* $\phi(221)$ *y* $\phi(6125)$.

$$\phi(221) = \phi(13 \cdot 17) = \phi(13) \cdot \phi(17) = 12 \cdot 16 = 192.$$
$$\phi(6125) = \phi(5^3 \cdot 7^2) = \phi(5^3) \cdot \phi(7^2) = (5^3 - 5^2)(7^2 - 7) = 4200.$$

Se da una tabla con los 20 primeros valores de esta función. Los valores de esta tabla los hemos obtenido de [30].
Finalmente nos encontramos con las protagonistas de este capítulo, las funciones τ, σ, σ_k.

Valores de $\phi(n)$																					
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	...
$\phi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8	8	16	6	18	8	...

Cuadro 1.2: A000010

1.2.3. Las funciones τ número de divisores y σ suma de divisores

Definición 14. *Sea $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$, el número de divisores positivos que tiene n, contando el propio n.*

Definición obtenida de [16].
Se da un ejemplo para ver mejor el significado de esta definición:

Ejemplo 5: *Calcula $\tau(18)$*
$\tau(18) = 6$, *ya que los divisores de 18 son: 1, 2, 3, 6, 9 y 18, luego tiene 6 divisores.*

La siguiente proposición relaciona τ con los números primos.

Proposición 15. *Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces, $\tau(n) = 2$, sí y solo si, n es primo.*

`Demostración:`
La vamos a obviar por trivial. Pero si se desea se puede consultar en [17].

□

Nota 5. *Podemos definir también la función τ como:*

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1 \tag{1.11}$$

Es decir, sumar una unidad por cada divisor d de n, así la suma final es el número de divisores.

Definición 16. *Se denomina σ, $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$, a la función que para todo n entero devuelve la suma de todos los divisores positivos de n.*

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d \tag{1.12}$$

Se ha obtenido de [16].

Ejemplo 6: *Calcula $\sigma(28)$*

$\sigma(28) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56$, *ya que $1, 2, 4, 7, 14, 28$ es el conjunto de todos los divisores de 28.*

A continuación se comprueba como estas funciones son también multiplicativas.

Teorema 17. *Las funciones τ y σ son multiplicativas.*

`Demostración:`
Tanto la función $f(n) = 1$ como $g(n) = n$ son multiplicativas. Usando estos resultados obtenemos que:

$$\sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} 1 = \tau(n),$$
$$\sum_{d|n} g(d) = \sum_{d|n} d = \sigma(n).$$

Como f es una función multiplicativa, por la proposición 7., $\tau(n)$ también es una función multiplicativa. Para la parte de σ se procede de manera análoga. Hemos extraído esta prueba de [17].

□

Nota 6. *El hecho de que estas funciones son multiplicativas implica que si* $mcd(m, n) = 1$*:*

$$\tau(mn) = \tau(m)\tau(n),$$
$$\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n).$$

Examinamos un ejemplo donde podemos apreciar la importancia de este resultado en el cómputo:

Ejemplo 7: *Calcular* $\tau(36)$ *y* $\sigma(36)$

$$\tau(36) = \tau(4 \cdot 9) = \tau(4)\tau(9) = 3 \cdot 3 = 9.$$
$$\sigma(36) = \sigma(4 \cdot 9) = \sigma(4)\sigma(9) = (1 + 2 + 4)(1 + 3 + 9) = 91.$$

Se exponen otros dos resultados, tomados de [17], cuyo uso también radica en facilitar el cálculo de dichas funciones, el primero es solo un caso más débil del segundo, que se utiliza en mayor medida.

Teorema 18. *Sean* p *un primo y* e *un entero positivo. Entonces:*

$$\tau(p^e) = e + 1, \tag{1.13}$$

$$\sigma(p^e) = \frac{p^{e+1} - 1}{p - 1}. \tag{1.14}$$

`Demostración:` Los factores positivos de p^e son los p^i tal que $0 \leq i \leq e$, tenemos $e + 1$ maneras de expresar p^i, por tanto: $\tau(p^e) = e + 1$.
Mientras que en el otro caso tenemos que:

$$\sigma(p^e) = 1 + p^1 + p^2 + p^3 + \ldots + p^e = \sum_{i=0}^{e} p^i = \frac{p^{e+1} - 1}{p - 1}$$

.

□

Teorema 19. *Sea* n *un entero positivo, con la siguiente descomposición canónica:* $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} ... p_t^{e_t}$*, donde cada* p_i *primo y cada* e_i *entero, se tiene que:*

$$\tau(n) = (e_1 + 1)(e_2 + 1) \ldots (e_t + 1) \tag{1.15}$$

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{e_1} - 1}{p_1 - 1} \frac{p_2^{e_2} - 1}{p_2 - 1} \ldots \frac{p_t^{e_t} - 1}{p_t - 1} \tag{1.16}$$

`Demostración:`
Se va a tratar primero τ. Como sabemos que $\tau(p^e) = (e+1)$ y que τ es multiplicativa, se tiene que:

$$\tau(n) = \tau(p_1^{e_1}p_2^{e_2}\dots p_t^{e_t}) = \tau(p_1^{e_1})\tau(p_2^{e_2})\dots\tau(p_t^{e_t}) = (e_1+1)(e_2+1)\dots(e_t+1).$$

Con σ pasa algo bastante parejo, ya que $\sigma(p^e) = \frac{p^{e+1}-1}{p-1}$, y σ es multiplicativa, por tanto se da:

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{e_1}p_2^{e_2}\dots p_t^{e_t}) = \sigma(p_1^{e_1})\sigma(p_2^{e_2})\dots\sigma(p_t^{e_t}) = \frac{p_1^{e_1+1}-1}{p_1-1}\frac{p_1^{e_1+1}-1}{p_1-1}\dots\frac{p_t^{e_t+1}-1}{p_t-1}.$$

Que es lo que se quería probar.

□

Ejemplo 8: *Calcular* $\tau(6120)$ *y* $\sigma(6120)$.

Primero vamos a descomponer 6120, $6120 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 17$, *luego:*

$$\tau(6120) = \tau(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 17) = (3+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 48.$$
$$\sigma(6120) = \sigma(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 17) = \frac{2^{3+1}-1}{2-1} \cdot \frac{3^{2+1}-1}{3-1} \cdot \frac{5^{1+1}-1}{5-1} \cdot \frac{17^{1+1}-1}{17-1} = 21060.$$

Nota 7. *Cabe destacar que* σ, *esta ínfimamente relacionada con los denominados números perfectos, que se tratarán más adelante.*

Por último queda tratar la función suma de divisores k-ésima, σ_k.

1.2.4. La función σ_k, suma de divisores k-ésimos

Definición 20. *La función* σ_k *para cada* n *entero positivo, se define como la suma de las k-ésimas potencias de los divisores (enteros positivos) de* n.*[17]*

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k \tag{1.17}$$

Como en el resto de casos se da un ejemplo para comprobar como se calcula esta función.

Ejemplo 9: *Calcula* $\sigma_k(140)$ *para* $k = 0, 1, 2, 3$.

El número 140 tiene los siguientes divisores: 1, 2, 4, 5, 7, 10, 14, 20, 28, 35, 70 y 140, por tanto tiene 12 divisores, así que tenemos:

$$\sigma_0(140) = 12$$
$$\sigma_1(140) = \sum d_i = 1+2+4+5+7+10+14+20+28+35+70+140 = 336$$
$$\sigma_2(140) = \sum d_i^2 = 1^2+2^2+4^2+5^2+7^2+10^2+14^2+20^2+28^2+35^2+70^2+140^2 = 27300$$
$$\sigma_3(140) = \sum d_i^3 = 1^3+2^3+4^3+5^3+7^3+10^3+14^3+20^3+28^3+35^3+70^3+140^3 = 3164112$$

Nota 8. *Como se puede apreciar a simple vista, nuestra función suma de divisores no es más que un caso específico de esta función, en concreto cuando* $k = 1$.

Al igual que con las otras funciones se prueba que es multiplicativa.

Proposición 21. *La función σ_k es multiplicativa.*

`Demostración:` Como ya se ha dicho, la función σ_k se define como:

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$$

y $f(d) = d^k$ es multiplicativa puesto que:

$$f(a \cdot b) = (a \cdot b)^k = a^k \cdot b^k = f(a)f(b)$$

sabiendo esto y aplicando 7. se concluye que σ_k es multiplicativa.

□

Nota 9. *Como con el resto de funciones existe una expresión que facilita el cálculo de esta función. Es la siguiente:*

$$\sigma_k(n) = \sigma_k(p_1^{\alpha_1})\sigma_k(p_2^{\alpha_2})\dots\sigma_k(p_k^{\alpha_r}) = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{(\alpha_1+1)k} - 1}{p_i^k - 1}$$

Es una expresión muy parecida a la obtenida con σ y la manera de proceder con ella es idéntica.[37]

Finalizamos con una tabla de los valores de σ_k donde podemos apreciar como a medida que la k aumenta, los valores empiezan también a aumentar muy considerablemente y a gran velocidad. Al lado de cada sucesión hemos puesto su correspondiente referencia en OEIS, todas ellas se han tomado de [30].

Valores de $\sigma_k(n)$ para $n = 1, 2, ..., 10$		
k	OEIS	σ_k
0	A000005	$1, 2, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3, 4$
1	A000203	$1, 3, 4, 7, 6, 12, 8, 15, 13, 18$
2	A001157	$1, 5, 10, 21, 26, 50, 50, 85, 91, 130$
3	A001158	$1, 9, 28, 73, 126, 252, 344, 585, 757, 1134$
4	A001159	$1, 17, 82, 273, 626, 1394, 2402, 4369, 6643, 10642$
5	A001160	$1, 33, 244, 1057, 3126, 8052, 16808, 33825, 59293, 103158$
6	A013954	$1, 65, 730, 4161, 15626, 47450, 117650, 266305, 532171, 1015690$

Concluimos el tema con dos tablas que tienen los valores de τ y σ, respectivamente.
La sucesión de valores de τ y σ se han extraído de [30].

Valores de $\tau(n)$															
n	$\tau(n)$	n	$\tau(n)$	n	$\tau(n)$	n	$\tau(n)$	n	$\tau(n)$	n	$\tau(n)$	n	$\tau(n)$	n	$\tau(n)$
1	1	14	4	27	4	40	8	53	2	65	8	78	2	91	6
2	2	15	4	28	6	41	2	54	8	66	2	79	10	92	4
3	2	16	5	29	2	42	8	55	4	67	6	80	5	93	4
4	3	17	2	30	8	43	2	55	8	68	4	81	4	94	4
5	2	18	6	31	2	44	6	56	4	69	8	82	2	95	12
6	4	19	2	32	6	45	6	57	4	70	2	83	12	96	2
7	2	20	6	33	4	46	4	58	2	71	12	84	4	97	6
8	4	21	4	34	4	47	2	59	12	72	2	85	4	98	6
9	3	22	4	35	4	48	10	60	2	73	4	86	4	99	9
10	4	23	2	36	9	49	3	61	4	74	6	87	8	100	2
11	2	24	8	37	2	50	6	62	6	75	6	88	2	101	8
12	6	25	3	38	4	51	4	63	7	76	4	89	12	102	2
13	2	26	4	39	4	52	6	64	4	77	8	90	4	103	8

Cuadro 1.3: A000005

Valores de $\sigma(n)$											
n	$\sigma(n)$	n	$\sigma(n)$	n	$\sigma(n)$	n	$\sigma(n)$	n	$\sigma(n)$	n	$\sigma(n)$
1	1	14	24	27	40	40	90	53	54	65	144
2	3	15	24	28	56	41	42	54	120	66	68
3	4	16	31	29	30	42	96	55	72	67	126
4	7	17	18	30	72	43	44	55	120	68	96
5	6	18	39	31	32	44	84	56	80	69	144
6	12	19	20	32	63	45	78	57	90	70	144
7	8	20	42	33	48	46	72	58	60	71	688
8	15	21	32	34	54	47	48	59	168	72	195
9	13	22	36	35	48	48	124	60	62	73	74
10	18	23	24	36	91	49	57	61	96	74	114
11	12	24	60	37	38	50	93	62	104	75	124
12	28	25	31	38	60	51	72	63	127	76	140
13	14	26	42	39	56	52	98	64	84	77	96

Cuadro 1.4: A000203

Capítulo 2 Los números perfectos y primos de Mersenne.

En este capítulo se trata con un nuevo término, los números perfectos. Estos fueron así llamados por primera vez por la escuela filosófica-religiosa de los pitagóricos, en el sigo I.V. a.C. Este grupo se dedicó a su estudio, en gran medida debido a que pensaban que albergaban ciertas propiedades místicas. Este hecho siguió estando vigente en los siglos posteriores, se puede apreciar como en la Edad media, distintas escuelas religiosas asociaban que el número 6, el primer número perfecto, lo era por ser el número de días que tardó Dios en realizar la creación, o el hecho de que el segundo número perfecto, el 28, coincide con el tiempo que tarda la Luna en dar una vuelta a la Tierra; no era de extrañar entonces que estos números suscitasen el interés de su estudio debido a sus supuestas características divinas.

Tenemos que desplazarnos hasta el siglo I.V. d.C. casi 800 años desde su aparición, para que la figura de S. Agustín (13 de noviembre del 354-Hipona, 28 de agosto del 430) marque una diferencia en el pensamiento que se tenía sobre estos números, puesto que él cree que Dios realizó su creación en 6 días porque el 6 era un número perfecto, y no viceversa. Como podemos apreciar es el primer intento que se hacía de despojar a estos números de sus divinas propiedades para poder hacer un estudio más riguroso y científico de los mismos.

Los cuatro primeros números perfectos ya venían descritos en *Introductio Arithmeticae* obra de Nicomachus (60–120 AD), siendo el descubridor del quinto anónimo y de los dos siguientes el matemático italiano Pietro Antonio Cataldi(15 de abril de 1548 - 11 de febrero de 1626). Tendría que pasar algo más de un siglo y medio para que Euler encontrase el octavo número en 1750. A día de hoy se cree que existen infinitos números perfectos, aunque dicho resultado nunca ha sido probado, habiendo hasta la fecha solamente 51 números perfectos conocidos, siendo el último descubierto en Diciembre de 2018, encontrado gracias a la búsqueda de primos de Mersenne en el GIMPS(Great Internet Mersenne Prime Search). Tanto esta introducción como del resto de la sección se ha obtenido la información mayoritariamente de [26] y [17] .

2.1 Algunos resultados de Aritmética modular

Antes de empezar con los contenidos propios de este capítulo, se van a tratar una serie de resultados de Aritmética modular, que serán de gran utilidad el resto del capítulo.

Definición 22. *Sean a y b dos números enteros, se dice que a es congruente con b módulo q,*

$$a \equiv b \pmod{q},$$

si q divide exactamente a la diferencia $a - b$.

Proposición 23. *Sean a, b, c, d y m enteros, de modo que $a \equiv b \pmod{m}$ y $c \equiv d \pmod{m}$, se* *cumple*

$$a + c \equiv b + d \pmod{m} \tag{2.1}$$
$$ac \equiv bd \pmod{m} \tag{2.2}$$

`Demostración`: Como $a \equiv b \pmod{m}$ y $c \equiv d \pmod{m}$ se tiene que $a - b = qm$ y $c - d = hm$ para unos ciertos q y h. Con unas sencillas operaciones se aprecia que

$$(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d) = qm + hm = (q + h)m.$$

Luego $(a + c) - (b + d)$ es un múltiplo de m y por tanto $a + c \equiv b + d \pmod{m}$.
De manera equivalente se tiene

$$ac - bd = ac + bc - bc - bd = (a - b)c + (c - d)b = (qm)c + (hm)b = (qc + hb)m.$$

Como $ac - bd$ es múltiplo de m, se tiene $ac \equiv bd \pmod{m}$.

□

Nota 1. *De este teorema se extrae fácilmente que si* $a \equiv b \pmod{m}$ *es cierto que* $a^k \equiv b^k \pmod{m}$

Lema 24. (Ley de Cancelación) *Sean* a, x *e* y *números enteros con* a *no divisible por un primo* p*, si* $ax \equiv ay \pmod{p}$*, entonces:*

$$x \equiv y \pmod{p}$$

`Demostración:` Si un primo p divide a $ax - ay$, al sacar factor común, $p \mid a(x - y)$, fuerza a que p divida a $x - y$ ó a, pero por hipótesis la segunda opción no se puede dar, por tanto divide a $x - y$:

$$x \equiv y \pmod{q}$$

□

Lema 25. (De Reagrupación) *La secuencia* $a, 2a, \ldots, (p - 1)a$ *con* a *no divisible por* p*, cuando es reducida módulo* p*, se puede reordenar como* $1, 2, \ldots, (p - 1)$

`Demostración:` Si k es un número entre 1 y $p - 1$, no es divisible por p, a tampoco lo es por hipótesis, luego ka no es divisible por p. A continuación, se toman los términos $a, 2a, \ldots, (p - 1)a$ y se reducen módulo p. Como ninguno de ellos se cancela estarán entre los $1, 2, \ldots, (p - 1)$.
Todos los término de $a, 2a, \ldots, (p - 1)a$ deben ser distintos, lo cual es cierto, ya que si $na \equiv ma \pmod{p}$ por la ley de Cancelación podemos decir que $n \equiv m \pmod{p}$, por lo que si finalmente tomamos todos los términos de $a, 2a, \ldots, (p - 1)a$ y los reducimos módulo p, nos quedan los valores $1, 2, \ldots, (p - 1)$.

□

Ambos lemas pertenecen a [37], se han introducido para servir de ayuda en la demostración del siguiente teorema.

<u>Teorema</u> 26. (Pequeño de Fermat) *Sea* p *un primo, para cada número natural* a *con* $a > 0$ *y coprimo con* p *se tiene:*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \tag{2.3}$$

`Demostración:`
Sea a un entero positivo coprimo con p. Se tiene la siguiente secuencia:

$$a, 2a, \ldots, (p-1)a,$$

que al aplicarle los lemas 24. y 25., se obtiene

$$1, 2, \ldots, (p-1).$$

Se puede apreciar que al multiplicar todos los términos de la primera secuencia, esta es equivalente módulo p al producto de toda la segunda secuencia:

$$a \cdot 2a \cdot \ldots \cdot (p-1)a \equiv 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p-1) \pmod{p}$$

A continuación, se extrae factor común en el término de la izquierda y aplicando el lema 24. a los dos términos iguales situados a ambos lados de la igualdad, se obtiene

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

□

La información para esta demostración se ha tomado de [37].

Definición 27. *Sea a un entero y n un entero positivo, coprimo con a. Se denomina orden multiplicativo de a orden n al menor entero i tal que:*

$$a^i \equiv 1 \pmod{n}$$

Teorema 28. *Sea a, un entero, de orden k módulo n. Entonces $a^b \equiv 1 \pmod{n}$, sí y solo si, $k \mid b$.*

`Demostración`:
$\Rightarrow$
Sea b cualquier entero positivo, que satisface $a^b \equiv 1 \pmod{n}$. Existen un q y r, con $0 \leq r < q$, tal que: $b = qk + r$, luego:

$$a^b = a^{qk+r} = a^{qk}a^r = (a^k)^q a^r$$

Por hipótesis sabemos que $a^b \equiv 1 \pmod{n}$ y como el orden es k, $a^k \equiv 1 \pmod{n}$, esto implica que $a^r \equiv 1 \pmod{n}$, pero $r < k$, siendo k el orden, lo cual sería absurdo, esto fuerza que $r = 0$ y se tiene que: $b = qk$, por tanto

$$k \mid b.$$

$\Leftarrow$
Se supone $k \mid b$, por tanto existe un q tal que $b = qk$. Como a tiene orden k, se tiene que: $a^k \equiv 1 \pmod{n}$ y aplicando la nota 1. se obtiene

$$a^{k \cdot j} \equiv 1^j \pmod{n}$$

Junto con $b = kj$, se concluye que

$$a^b \equiv 1 \pmod{n}$$

□

La información de ambos resultados pertenece a [3].

Definición 29. *Un número entero q se llama residuo cuadrático módulo m, si existe un x, tal que:*

$$x^2 \equiv q \pmod{m}$$

Proposición 30. (Criterio de Euler) *Sea $p > 2$ un primo y a un número entero coprimo con p, entonces a es un residuo cuadrático módulo p si y solo si*

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{q} \tag{2.4}$$

`Demostración:`

$\Rightarrow$

Suponemos que $a \equiv x^2 \pmod{p}$, por el teorema 26., como p es primo y a coprimo con él se tiene que

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

luego,

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv (x^2)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

Además se tiene que $(x^2)^{\frac{p-1}{2}} = x^{p-1}$, por tanto

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv x^{p-1} \pmod{p}$$

Y se concluye

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

$\Leftarrow$

En este caso se tiene que $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$ y sea b un entero positivo de modo que es un elemento primitivo módulo p. Luego, para un cierto i:

$$a \equiv b^i \pmod{p}$$

Razonando como antes se obtiene que:

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv (b^i)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$$

El orden de b es $p-1$, por lo que

$$(p-1) \mid i(\frac{p-1}{2}),$$

así que i debe ser par, en consecuencia a es un residuo cuadrático.

□

Se introduce a continuación la definición del símbolo de Legendre, obtenida de [25].

Definición 31. *Dado un entero a y un primo p, se denomina símbolo de Legendre a la función $\left(\frac{a}{q}\right)$, que toma los siguientes valores:*

- *0, si p divide a a*
- *1, si a es un residuo cuadrático módulo p*
- *-1, si a es no residuo cuadrático módulo p*

Nota 2. *También se puede ver el símbolo de Legendre como*

$$\left(\frac{a}{q}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$$

con $\left(\frac{a}{q}\right)$ *siendo 0, 1 ó -1.*

Teorema 32. *Sea p un primo impar, entonces* $\left(\frac{2}{p}\right)$ *es*

- 1, *si* $p \equiv 1 \pmod{8}$ *ó* $p \equiv 7 \pmod{8}$
- -1, *si* $p \equiv 3 \pmod{8}$ *ó* $p \equiv 5 \pmod{8}$

La demostración de este teorema excede un poco lo pretendemos con esta breve introducción de los resultados como meras herramientas, más que como el propio campo de estudio de este trabajo. De todos modos se puede consultar en [3].

2.2 Números Perfectos

2.2.1. Definición y principales resultados

Definición 33. *Sea n un entero positivo, n es un número perfecto si la suma de sus divisores propios es n.[17]*

Esta definición es equivalente a decir

$$\sigma(n) - n = n$$

por tanto,

$$\sigma(n) = 2n \tag{2.5}$$

Como se aprecia en la definición, es clara la relación entre números perfectos y la función número de divisores, como ya se mencionó en el capítulo anterior.
Debajo se pueden observar los ocho primeros números perfectos

$$6 = 2(2^2 - 1)$$

$$28 = 2^2(2^3 - 1)$$
$$496 = 2^4(2^5 - 1)$$
$$8128 = 2^6(2^7 - 1)$$
$$33{,}550{,}336 = 2^{12}(2^{13} - 1)$$
$$8{,}589{,}869{,}056 = 2^{16}(2^{17} - 1)$$
$$137{,}438{,}691{,}328 = 2^{18}(2^{19} - 1)$$
$$2{,}305{,}843{,}008{,}139{,}952{,}128 = 2^{30}(2^{31} - 1)$$

En esta pequeña lista se aprecia como todos vienen expresados de la siguiente forma : $2^{p-1}(2^p - 1)$

con p y $(2^p - 1)$ ambos números primos. Todo número perfecto conocido se puede expresar de esta forma. En relación a este hecho tenemos los dos siguientes teoremas, el primero probado por Euclídes en su libro "Los Elementos"(300 a.C), y el segundo por Euler casi 2000 años más tarde. Ambos teoremas con sus respectivas demostraciones se han tomado de [17].

Teorema 34. (Euclídes) *Sea n un entero, mayor o igual a 2 y $2^n - 1$ un primo. Entonces*

$$N = 2^{n-1}(2^n - 1) \tag{2.6}$$

es un número perfecto.

`Demostración:` Razonamos por inducción.
Por hipótesis se tiene que $2^n - 1$ es un primo y por el teorema 19.:

$$\sigma(2^n - 1) = 1 + (2^n - 1) = 2^n \tag{2.7}$$

Además, la función σ es multiplicativa, por consiguiente:

$$\sigma(N) = \sigma(2^{n-1}(2^n - 1)) = \sigma(2^{n-1})\sigma(2^n - 1) = (\frac{2^{n-1+1} - 1}{2 - 1})(2^n) = (2^n - 1)(2^n) = (2^n - 1) \cdot 2 \cdot 2^{n-1} = 2N$$

Como $\sigma(N) = 2N$, N es un número perfecto.

□

Teorema 35. (Euler) *Si $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$ es un número perfecto, entonces $2^n - 1$ es un número primo*

`Demostración:` Sea $N = 2^e s$ con e mayor o igual que 1 y s un entero impar. Sabemos por hipótesis, que N es un número perfecto, luego se cumple que $\sigma(N) = 2N$, por tanto:

$$\sigma(N) = 2N = 2^{e+1}s \tag{2.8}$$

Como σ es una función multiplicativa haciendo uso del teorema 19., se tiene:

$$\sigma(N) = \sigma(2^e s) = \sigma(2^e)\sigma(s) = (2^{e+1} - 1)\sigma(s),$$

lo que implica

$$2^{e+1}s = (2^{e+1} - 1)\sigma(s).$$

Es obvio que el $m.c.d(2^{e+1}, 2^{e+1} - 1) = 1$; por consiguiente 2^{e+1} es un divisor de $\sigma(s)$, y debe existir un $t \in \mathbb{Z}$, positivo, tal que

$$\sigma(s) = 2^{e+1}t \tag{2.9}$$

si operamos

$$2^{e+1}s = (2^{e+1} - 1)\sigma(s) = (2^{e+1} - 1)2^{e+1}t$$

$$s = (2^{e+1} - 1)t. \tag{2.10}$$

Se tiene que t es un divisor de s y además es menor que s, ya que si $t = s$, esto implicaría que $2^{e+1} - 1 = 1$ y en consecuencia $e = 0$ pero por hipótesis sabemos que $e \geq 1$ y sería absurdo. Queda probar que $t = 1$, para ello:

$$s = (2^{e+1} - 1)t = 2^{e+1}t - t$$

$$s + t = 2^{e+1}t \tag{2.11}$$

Por (2.9) se tiene que $\sigma(s) = s + t$, por consiguiente t es la suma de los factores propios de s, ya se había visto en (2.10) que t es un factor propio de s, lo que nos fuerza a que $t = 1$, ya que un número siempre se divide por sí mismo y la unidad.
Esto implica $\sigma(s) = s + t = s + 1$, luego s es un primo. Y finalmente

$$s + t = 2^{e+1}t$$

$$s = 2^{e+1} - 1 \tag{2.12}$$

Se concluye que $N = 2^e s = 2^e(2^{e+1} - 1)$, siendo $2^{e+1} - 1$ un primo.

□

Proposición 36. *Si $a^k - 1$ es un primo con $a > 0$ y $k \geqslant 2$, entonces $a = 2$ y k es un primo.[3]*

`Demostración:` Al factorizar $a^k - 1$, se obtiene

$$a^k - 1 = (a-1)(a^{k-1} + a^{k-2} + ... + a + 1) \tag{2.13}$$

Por hipótesis se sabe que $a^k - 1$ es un número primo y solo puede tener dos divisores siendo uno de ellos 1, y es obvio que

$$a^{k-1} + a^{k-2} + ... + a + 1 \geqslant a + 1 > 1,$$

lo que implica $a - 1 = 1$, y por tanto $a = 2$, tal y como se quería ver. Continuamos con la segunda parte de la demostración, probando que k es primo.
Reducción al absurdo. Si k es un número compuesto, se puede expresar como: $k = rs$ con $r, s > 1$, y se puede descomponer como

$$\begin{aligned} a^k - 1 &= (a^r)^s - 1 \\ &= (a^r - 1)(a^{r(s-1)} + a^{r(s-2)} + ... + a^r + 1). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Lo cual es cierto ya que:

$$\begin{gathered} (a^r - 1)(a^{r(s-1)} + a^{r(s-2)} + \ldots + a^r + 1) = \\ = a^{r+r(s-1)} + a^{r+r(s-2)} + \ldots + a^{2r} + a^r - a^{r(s-1)} - a^{r(s-2)} - \ldots - a^r - 1 \\ = a^{r(s)} + a^{r(s-1)} + a^{r(s-2)} + \ldots + a^r - a^{r(s-1)} - a^{r(s-2)} - \ldots - a^r - 1 \\ = a^{rs} - 1 \end{gathered}$$

Los términos que se encuentran al final de (2.14) son ambos mayores que 1, lo cual sería un absurdo, y por consiguiente k no puede ser un número compuesto, por lo que k es un número primo.
Esta demostración la hemos obtenido de [3].

□

En la antigüedad se pensó que todo número perfecto, además de ser par, terminaba de manera alterna con 6 u 8, esta afirmación es falsa por el hecho de la alternancia, solo es cierta en los cuatro primeros casos, con relación a este hecho encontramos el siguiente teorema.

Teorema 37. *Un número perfecto par n, termina en el dígito 6 u 8, o lo que es equivalente $n \equiv 6 \pmod{10}$ ó $n \equiv 8 \pmod{10}$.*

`Demostración`: Todo número perfecto par n es de la forma $2^{k-1}(2^k-1)$, con k primo. En el primer caso, con $k=2$ es cierto ya que $n=6$, así que nos vamos a encargar del resto de los casos, y para ello se van a dividir los exponentes en dos tipos: $4m+1$ y $4m+3$, puesto que todo primo se puede expresar de una de esas dos maneras para un cierto m. (Todas las congruencias son módulo 10)

- $k = 4m+1$:

  $$2^{k-1}(2^k-1) = 2^{4m}(2^{4m+1}-1) = 2^{8m+1} - 2^{4m} = 2\cdot 16^{2m} - 16^m = 16^m(2\cdot 16^m - 1)$$

  Y como se tiene que $16 \equiv 6 \pmod{10}$, extendiéndolo con la nota 1. , se puede observar que:

  $$16^m(2\cdot 16^m - 1) \equiv 6^m(2\cdot 6^m - 1) \equiv 6(2\cdot 6 - 1) \equiv 6 \pmod{10}$$

  Una de las dos opciones ya esta probada, vamos con el otro caso:

- $k = 4m+3$:

  $$\begin{gathered}2^{k-1}(2^k-1) = 2^{4m+2}(2^{4m+3}-1) = 2^{8m+5} - 2^{4m+2} = 2^5\cdot 16^{2m} - 2^2\cdot 16^m = 16^m(2^5\cdot 16^m - 2^2) = \\ 2^2\cdot 16^m(2^3\cdot 16^m - 1) \equiv 2^2\cdot 6^m(2^3\cdot 6^m - 1) \equiv 2^2\cdot 6(2^3\cdot 6 - 1) \equiv \\ \equiv 24\cdot 47 \equiv 4\cdot 7 \equiv 8 \pmod{10}\end{gathered}$$

  Y hemos concluido nuestra prueba.

□

Se ha obtenido de [3].

Para finalizar esta parte se tiene una pequeña tabla en la que se recogen los primeros números perfectos y los valores que toman las principales funciones aritméticas con ellos. Los valores de la tabla se han calculado con el programa *Maple* y en él hemos usado el comando: *divisors()* para calcular el número de divisores, con el paquete previamente cargado *numtheory*, y el comando *nops()* para contar el número de divisores; obviamente por ser números perfectos la suma de sus divisores siempre es el doble del número.

Números Perfectos			
k	$n = 2^{k-1}(2^k-1)$	$\tau(n)$	$\sigma(n)$
2	6	4	12
3	28	6	56
5	496	10	992
7	8128	14	16256
13	33550336	26	67100672
17	8589869056	34	17179738112
19	137438691328	38	274877382656
31	2305843008139952128	62	4611686016279904256
61	2658455991569831744654692615953842176	122	5316911983139663489309385231907684352

2.2.2. Números Perfectos Impares

Ya se tiene constancia de que el estudio de los números perfectos se lleva dando desde la antigüedad, pero no ha sido hasta una fecha bastante más cercana, 1638, que R. Descartes se planteó la idea de que no todo número perfecto tiene porque ser par.
A este pensamiento se unieron otros matemáticos como Frenicle ó Euler. Hasta entonces existía la creencia de que todo número perfecto tenia que ser de la forma de Euclídes y por ende un número par.
A día de hoy, después de varios siglos, se sigue sin tener claro si los números perfectos impares existen o no. Aunque no hay ningún descubrimiento que diga que no existan, la experimentación ha llegado a comprobar valores de hasta 10^{1500} sin haber tenido éxito, lo que hace presuponer que en caso de haberlos, será muy difícil encontrarlos. A continuación tenemos los autores que han realizado las comprobaciones de la no existencia de dichos números y la cifra hasta la que han realizado sus cálculos:

- Kanold (1957), 10^{20}
- Tuckerman (1973), 10^{36}
- Hagis (1973), 10^{50}
- Brent y Cohen (1989), 10^{160}
- Brenet (1991), 10^{300}
- Ochen y Rao (2012), 10^{1500}

Esta información se ha obtenido de [15]. A continuación se introduce un algoritmo, que en caso de existir los números perfectos impares, nos ayudaría a calcularlos.

Algoritmo de Búsqueda de Números Perfectos Impares y algunas conclusiones

El siguiente algoritmo se encuentra en [32].
Para que un número n, impar, sea un número perfecto, debe ser de la forma:

$$n = k \cdot p^a \tag{2.15}$$

con $k > 1$, p primo , ambos impares y $m.c.d(p^a, k) = 1$. Utilizando las propiedades de la función σ, se tiene:

$$\sigma(n) = \sigma(kp^a) = \sigma(k)\sigma(p^a) = \sigma(k)\frac{p^{a+1} - 1}{p - 1}$$

Por (2.5),

$$\sigma(n) = 2n = 2kp^a$$

Y si juntamos ambas expresiones se obtiene:

$$2kp^a = \sigma(k)\left(\frac{p^{a+1} - 1}{p - 1}\right)$$

Agrupando por un lado lo que depende de k y por otro lo de p:

$$\frac{\sigma(k)}{2k} = \frac{p^a(p - 1)}{p^{a+1} - 1}$$

Tendremos que encontrar ahora un $k > 1$ y que debe cumplir, $\sigma(k) < 2k$, lo que se denomina un k deficiente (número deficiente es el número natural que es mayor que la suma de sus divisores propios); y un p^a como el que se ha descrito en (2.15).
Para verlo de una manera más clara, se va a estudiar el caso más sencillo de todos, $a = 1$:

$$n = k \cdot p \tag{2.16}$$

el $m.c.d(k, p) = 1$, lo que nos permite usar las propiedades de σ:

$$\sigma(n) = \sigma(kp) = \sigma(k)\sigma(p) = \sigma(k)(p + 1)$$
$$\sigma(n) = 2n = 2kp$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{\sigma(k)}{2k} = \frac{p}{p+1}$$

Y todo se reduce a encontrar dos valores que satisfagan la siguiente ecuación:

$$p = \frac{\sigma(k)}{2k - \sigma(k)} \tag{2.17}$$

con $k > 1$, p primo y ambos impares.

Puede no parecer una ardua tarea encontrar estos valores pero no debemos olvidar que ya se ha llegado a comprobar valores de la magnitud de 10^{1500} sin ningún éxito.
Carl Pomerance, mediante diversos procedimientos, conjeturó que no podrían existir dichos números, ya que todo número perfecto es también un número armónico de Ore(los cuales se estudiaremos en los próximos capítulos), y puesto que se supone que no hay números impares de Ore superiores a 1, tampoco debería haber números perfectos impares. De todos modos, se han llegado a ciertas conclusiones que deberá cumplir un número perfecto impar en caso de existir, y son las siguientes(que hemos recogido de [26]) :

- $n = k^b p_1^{2a_1} ... p_j^{2a_j}$ con $k^b > 10^{62}$ ó $p_j^{2a_j} > 10^{62}$ para algunos j.
- $n > 10^{1500}$.
- $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 12)$ ó $n \equiv 117 (\mathrm{mod}\ 468)$ ó $n \equiv 81 (\mathrm{mod}\ 324)$.
- n no es divisible por 105.
- $(3n)^{\frac{1}{3}} >$ (el factor primo más grande de n) $> 10^8$.
- $(2n)^{\frac{1}{5}} >$ (el segundo factor primo más grande de n) $> 10^4$.
- $100 <$ (el tercer factor primo más grande de n).
- n tiene al menos 101 factores primos y por lo menos 10 son factores primos distintos.

Existen más condiciones relacionadas a k, los p_j y los a_j, si se desea se pueden consultar en [26].

2.3 Primos de Mersenne

Los números primos siempre han suscitado gran interés en la comunidad matemática, desde el pasado en busca de ciertas propiedades especiales, hasta la actualidad con el papel fundamental que presentan en todo el campo de la criptografía y los códigos correctores.
Uno de los matemáticos que dedicó gran parte de su vida a este estudio, fue el monje Mínimo, Marin Mersenne (8 de Septiembre de 1588, 1 de septiembre de 1648), al cual se debe el nombre que reciben el siguiente tipo de número que se tratan, los primos de Mersenne. Estos números primos son de la forma $2^k - 1$, debido a la cual se está hablando de ellos, su gran relación con los números perfectos. Obviamente habrá tantos números perfectos pares como primos de Mersenne existan.

En 1644, Mersenne afirmó en su obra,*Cogiata Physica-Mathemetica*, que $2^k - 1$ era primo para los siguientes valores de $k : 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127$ y 257. Pero para la mayoría de matemáticos de la época, no parecía excesivamente confiable el hecho de que hubiese podido comprobar toda esa cantidad de números, aunque tampoco había ninguna evidencia que lo contradijese, por lo que se tomó por cierto.
No fue hasta 1772, que Euler cercioró el resultado con $k = 31$ y Lucas que también era cierto para $k = 127$ en 1876. Los siguientes resultados se deben a Pervushin y Powers, ambos encontraron nuevos valores entre los k que ya habían sido nombrados por Mersenne, el primero $k = 61$ en 1883 y Powers $k = 89, 107$ en 1911 y 1914 respectivamente.
A partir de este momento todos los demás resultados se han conseguido por medio de ordenadores, pudiéndose probar así que para $k = 67, 257$ no es cierto y pudiendo encontrar bastantes nuevos valores con una cierta regularidad. Esta breve reseña histórica ha sido elaborada con información de [3] y [17].

Definición 38. *Se llama primo de Mersenne a un número primo del siguiente tipo:*

$$M_k = 2^k - 1,$$

donde necesariamente k es primo(Proposición 36.). Se ha extraído de [1].

El teorema que se tiene a continuación da información sobre el tipo de divisor de M_p si p es un primo impar.

<u>Teorema</u> 39. *Si p es un primo impar, entonces cada divisor de M_p es de la forma $2kp + 1$.[3]*

`Demostración:` Sea q cualquier divisor de M_p, por congruencias se sabe que se puede expresar también como $2^p \equiv 1 \pmod{q}$.
Si 2 tiene orden k (es decir, k es el menor entero positivo, tal que, $2^k \equiv 1 \pmod{q}$), por el teorema 28., se tiene que

$$2^p \equiv 1 \pmod{q} \text{ y 2 tiene orden } k, \text{ luego } k \mid p.$$

Se diferencian dos casos:

- $k = 1$; si este caso es cierto, como $q \mid k$ y $k = 1$, esto implica qué $q \mid 1$, lo cual es imposible por ser q un primo impar, por tanto esta opción es un absurdo.
- $k > 1$; esta opción es la correcta, por ser la otra un absurdo; por tanto, tenemos $k \mid p$, $k > 1$ y p primo, esto fuerza a que $k = p$.

Haciendo uso del Teorema Pequeño de Fermat, tenemos: $2^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$. Y haciendo uso de nuevo del teorema 28. y teniendo que:

$$2^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$$
$$2^{p} \equiv 1 \pmod{q}$$

Se concluye $p \mid q-1$ y por consiguiente $q-1 = pt$, lo que da $q = pt+1$.
Para concluir esta demostración, solo queda probar que t no es número impar, lo cual es obvio, ya que si lo fuese pt sería un valor impar por ser p un primo impar, y al sumarle 1, nuestra q sería un valor par, lo cual es absurdo. Luego t es un valor par y se puede expresar como $t = 2k$ para algún k y así queda la expresión buscada:

$$q = 2kp + 1 \tag{2.18}$$

□

Esta demostración se ha tomado de [3].

Teorema 40. *Si p es un primo impar, todo q divisor de M_p cumple que* $q \equiv \pm 1 \pmod{8}$.

`Demostración:` Sea q un divisor de M_p, por tanto $2^p \equiv 1 \pmod{q}$, de aquí deducimos que el orden de $2 \pmod{q}$ es un divisor de p, como es un primo impar, el orden es el propio p.
Se cumple:

$$2^{pk} \equiv 1 \pmod{q} \tag{2.19}$$

Por el teorema 39. tenemos que $q = 2kp+1$, o lo que es lo mismo $\frac{q-1}{2} = kp$, lo que unido a (2.19) nos proporciona

$$2^{\frac{q-1}{2}} \equiv 1 \pmod{q}$$

Concluimos nuestra demostración haciendo uso del criterio de Euler(Proposición 30.),por tanto, 2 es un residuo cuadrático $\pmod{q}$ y en términos del símbolo de Legendre se puede expresar como:

$$\left(\frac{2}{q}\right) = 1 \tag{2.20}$$

Y por el teorema 32., $q \equiv \pm 1 \pmod{8}$ y queda demostrado.

□

Para finalizar el capítulo, se estudia en la siguiente página una tabla con todos los números perfectos y primos de Mersenne conocidos.
En ella se esta usando la siguiente notación:

$$M_p = 2^p - 1.$$
$$n = 2^{p-1}M_p = 2^{p-1}(2^p - 1).$$

Para hacer referencia a dichos términos. Solo vamos a indicar el número de dígitos y el descubridor con la fecha, ya que el tamaño de la mayoría de estos números imposibilita poder introducirlos en una tabla. Los datos se han tomado de [37] y [35].

Números Perfectos y Primos de Mersenne				
número	p	dígitos M_p	dígitos n	Fecha y Descubridor
1	2	1	1	Antigüedad
2	3	1	2	Antigüedad
3	5	2	3	Antigüedad
4	7	3	4	Antigüedad
5	13	4	8	(1456) Anónimo
6	17	6	10	(1588) Cataldi
7	19	6	12	(1588) Cataldi
8	31	10	19	(1772) Euler
9	61	19	37	(1883) Pervushin
10	89	27	54	(1911) Powers
11	107	33	65	(1914) Powers
12	127	39	77	(1876) Lucas
13	521	157	314	(1952) Robinson
14	607	183	366	(1952) Robinson
15	1279	386	770	(1952) Robinson
16	2203	664	1327	(1952) Robinson
17	2281	687	1373	(1952) Robinson
18	3217	969	1937	(1957) Riesel
19	4253	1281	2561	(1961) Hurwitz
20	4423	1332	2663	(1961) Hurwitz
21	9689	2917	5834	(1963) Gillies
22	9941	2993	5985	(1963) Gillies
23	11 213	3376	6751	(1963) Gillies
24	19 937	6002	12 003	(1971) Tuckerman
25	21 701	6533	13 066	(1978) Noll y Nickel
26	23 209	6987	13 973	(1979) Noll
27	44 497	13 395	26 790	(1979) Nelson y Slowinski
28	86 243	25 962	51 924	(1982) Slowinski
29	110 503	33 265	6 6530	(1988) Colquitt y Welsh
30	132 049	39 751	79 502	(1983) Slowinski
31	216 091	65 050	130 100	(1985) Slowinski
32	756 839	227 832	455 663	(1992) Slowinski y Gage
33	859 433	258 716	517 430	(1994) Slowinski y Gage
34	1257 787	378 632	757 263	(1996) Slowinski y Gage
35	1398 269	420 921	841 842	(1996) Armengaud, Woltman, et. al. (GIMPS)
36	2976 221	895 932	1 791 864	(1997) Spence, Woltman, et. al. (GIMPS)
37	3021 377	909.526	1819050	(1998) Clarkson, Woltman, Kurowski, et. al. (GIMPS)
38	6972 593	2 098 960	4 197 919	(1999) Hajratwala, Woltman, Kurowski, et. al. (GIMPS)
39	13 466 917	4 053 946	8 107 892	(2001) Cameron (GIMPS)
40	20 996 011	6 320 430	12 640 858	(2003) Shafer, Woltman, Kurowski, et. al. (GIMPS)
41	24 036 583	7 235 733	14 471 465	(2004) Findley, Woltman, Kurowski, et. al. (GIMPS)
42	25 964 951	7 816 230	15 632 458	(2005) Nowak, Woltman, Kurowski, et. al. (GIMPS)
43	30 402 457	9 152 052	18 304 103	(2005) Cooper, Boone, Woltman, Kurowski, et al. (GIMPS)
44	32 582 657	9 808 358	19 616 714	(2006) Cooper, Boone, Woltman, Kurowski, et al. (GIMPS)
45	32 582 657	11 185 272	22 370 543	(2008) Elvenich, Woltman, Kurowski, et al. (GIMPS)
46	42 643 801	12 837 064	25 674 127	(2009) Strindmo, Woltman, Kurowski, et al. (GIMPS)
47	43 112 609	12 978 189	25 956 377	(2008) Smith, Woltman, Kurowski, et al. (GIMPS)
48	57 885 161	17 425 170	34 850 340	(2013) Curtis Cooper, Kurowski, et al. (GIMPS)
49	74 207 281	22 338 618	44 677 235	(2016) Cooper, Woltman, Kurowski, Blosser, et al. (GIMPS)
50	77 232 917	23 249 425	46 498 850	(2017) Pace, Woltman, Kurowski, Blosser, et al. (GIMPS)
51	82 589 933	24 862 048	49 724 095	(2018) Laroche (GIMPS)

Capítulo 3 Los números multiperfectos.

El trabajo continúa con los números multiperfectos, los cuales son una generalización de los números del capítulo anterior. La diferencia entre ambos radica en que la suma de divisores puede ser igual a cualquier múltiplo entero del número y no únicamente el doble, como se había impuesto.
Se va a empezar definiendo que es un número multiperfecto.

Definición 41. *Sea n , con $n \in \mathbb{N}$, se dice que n es un número multiperfecto si la suma de sus divisores es un múltiplo de n.*

$$\sigma(n) = kn, \ k \geq 2 \tag{3.1}$$

Nota 1. *El caso más sencillo es $k = 2$, los ya conocidos números perfectos.*

Por comodidad, a partir de ahora vamos a denotar a un número multiperfecto de multiplicidad m como P_m, o lo que es equivalente: n es P_m si $\sigma(n) = m \cdot n$.
Antes de tratar algunas propiedades relativas a ellos, hacemos un breve repaso a su historia y los matemáticos que participaron en ella.
Toda la información utilizada para realizar esta introducción ha sido sacada en su mayor parte de [8] con algunas breves reseñas de [28].

Tenemos que desplazarnos hasta 1557, año en el que Robert Recorde (1510-1558) descubrió el primer número multiperfecto, 120, al percatarse de que este número era un P_3, o sea $\sigma(120) = 360 = 3 \cdot 120$. Tras este hallazgo, Marin Mersenne fue consciente de los problemas existentes para dar con otro P_3, P_4 o P_m cualquiera, y se puso en contacto con Descartes para tratar de encontrar el siguiente P_3. Aunque no fue él, sino Fermat (1601-1665) quién en 1636 encontró el segundo P_3, 672. Ante este descubrimiento y para el asombro de todos los demás matemáticos, Mersenne llegó a afirmar que Fermat había sido capaz de desarrollar un algoritmo que calculaba estos números. El algoritmo era el siguiente:

Tomamos las progresiones geométricas $a_n = 2^n$, $b_n = 2^n - 1$ y $c_n = 2^n + 1$.
A continuación, se realiza el cociente:

$$\frac{b_{n+3}}{c_n} = \alpha.$$

Si α es un número primo, el resultado de $3 \cdot \alpha \cdot a_{n+2}$, es un P_3.

Por ejemplo, con el valor $n = 3$ el algoritmo se cumple,

$$\frac{b_6}{c_3} = \frac{63}{9} = 7,$$

es un primo y por tanto $3 \cdot 7 \cdot a_5 = 3 \cdot 7 \cdot 32 = 672$ es un P_3, lo cual es cierto.

Dos años después de este descubrimiento, en 1638, el prior y gran amigo de Descartes, André Jumeau (1588-1641) encontró el tercer P_3, 523776.

Ante este hecho Jumeau quiso retar a su amigo Descartes, sugiriéndole encontrar el cuarto P_3, pero a diferencia de cuando Mersenne le pidió ayuda para hallar el segundo P_3, no solo resolvió satisfactoriamente el reto propuesto sino que además encontró los seis primeros P_4 y el primer P_5, casi todos ellos en 1638. Aunque muchos de ellos más tarde ocuparían otra posición debido a nuevos descubrimientos. Estos valores son,

$$
\begin{array}{llll}
P_3^5 = 1476304896 & P_4^1 = 30240 & P_4^2 = 32760 & P_4^4 = 23569920 \\
P_4^6 = 142990848 & P_4^9 = 66433720320 & P_4^{11} = 403031236608 & P_5^1 = 14182439040
\end{array}
$$

Y aunque Fermat también encontró el cuarto P_3, se sospecha que lo consiguió gracias a información que circulaba por París referente a los descubrimientos de Descartes.
Los cuatro siguientes asertos fueron dados por Descartes y son las reglas que utilizó para realizar sus numerosos descubrimientos:

(a). Si n es un P_3 no divisible por 3, entonces $3n$ es un P_4.

(b). Si un P_3 es divisible por 3, pero no por 5 ni 9, entonces $45P_3$ es un P_4.

(c). Si un P_3 es divisible por 3, pero no por 7, 9 ni 13, entonces $3 \cdot 7 \cdot 13P_3$ es un P_4.

(d). Si n no es divisible por 3 y $3n$ es un P_{4k}, entonces n es un P_{3k}.

Para conseguir P_4^1, P_4^4, P_4^9 aplicó a la regla (b) a P_3^2, P_3^3 y P_3^4, respectivamente. Y para P_4^2, P_4^6, P_4^{11} aplicó (c) a P_3^1, P_3^3 y P_3^4, también respectivamente.

Al poco tiempo en ese mismo año, 1638, Frenicle de Bessy (1604-1675) encontró un nuevo P_5, que más tarde ocuparía el quinto lugar, $P_5^5 = 30823866178560$. Dicho número también le sirvió de ayuda a Descartes para descubrir un nuevo P_5 a partir de él, este era $P_5^2 = 31998395520$.
Frenicle también halló el cuarto P_3, $P_3^4 = 459818240$, que al no ser divisible por 3, utilizando la primera regla de Descartes, obtenemos el séptimo P_4, $P_4^7 = 1379454720$, aunque este es atribuido a Lucas (1842-1891) por Carmichael (1879-1967). En los cuales tampoco coincide el lugar que ocupa con su orden de descubrimiento.
Todos los números multiperfectos descubiertos hasta este momento, 1639, fueron listados por Mersenne, aunque cabe destacar que en algunos olvidó mencionar al descubridor. Aun así añadió dos números más, P_4^5 y P_4^8, y un tercero que es erróneo, aunque seguramente se deba a una errata, ya que el número publicado fue $P_5^3 = 508666803200$, y el correcto es $P_5^3 = 518666803200$, que solo difiere en un dígito.
Los siguientes descubrimientos se los debemos a Fermat, el cual afirmó haber hallado un método que permitía calcular todos los P_m existentes. Fue capaz de encontrar los siguientes valores: P_3^6, P_4^{10}, P_4^{15}, P_5^{10}, P_5^{14}, P_6^7, P_6^{46} y dos erróneo P_5 que años más tarde serían corregidos por Carmichael.

Los siguientes grandes descubrimientos no se dieron hasta el siglo XX, cuando Lehmer (1905-1991) encontró 5 nuevos P_m, y se percató del siguiente aserto:
Todo P_3 contiene al menos 3 factores primos distintos, todo P_4 contiene al menos 4 factores primos distintos, etc... resultado que se probará más adelante.
Más tarde Cunningham estudiaría los P_m de la forma

$$2^{q-1}(2^q - 1)F$$

siendo este F un valor determinado. De esta manera fue capaz de encontrar más de 85 P_m, aunque solo publicó uno de ellos, el P_6^{160}.

En los últimos años y gracias al uso de ordenadores cada vez más potentes y con mayor capacidad de computación se han seguido descubriendo nuevos P_m sin descanso, apareciendo prácticamente cada mes nuevos números multiperfectos. Podemos destacar los nombres de Rich Schroeppel y Shingeru Nakamura, el primero por intentar hacer la mayor compilación de todos estos números que se había dado hasta la fecha, y el segundo por haber encontrado 76 P_m. Pero sin duda alguna hay que destacar a Fred Helenius que fue capaz de encontrar 114 P_7, 327 P_8 y dos P_9.
Como acabamos de decir, cada mes se siguen descubriendo nuevos números multiperfectos, de ahí que sea tan difícil tener una lista actualizada con todos ellos de manera continua, aun así al final de este tema presentaremos unas tablas con los primeros valores de cada P_m, para poder tener así suficientes ejemplos de estos números.

3.1 Algunas propiedades de los números multiperfectos

En la anterior introducción hemos enunciado unos asertos de Descartes, los cuales le fueron de gran utilidad. Vamos a demostrarlos a continuación.

Proposición 42. *Sea n un número natural, tal que*

(a). Si n es un P_3 no divisible por 3, entonces $3n$ es un P_4.

(b). Si n es P_3 y divisible por 3, pero no por 5 ni 9, entonces $45P_3$ es un P_4.

(c). Si n es P_3 y divisible por 3, pero no por 7, 9 ni 13, entonces $3 \cdot 7 \cdot 13P_3$ es un P_4.

(d). Si n no es divisible por 3 y $3n$ es un P_{4k}, entonces n es un P_{3k}.

`Demostración:`

(a). Sea n, con $n \in P_3$, luego $\sigma(n) = 3n$. Además n no es divisible por 3 y por tanto $m.c.d(n, 3) = 1$. Queremos ver que $3n$ es un P_4, o lo que es lo mismo $\sigma(3n) = 4(3n)$.

$$\sigma(3n) = \sigma(3)\sigma(n) = 4 \cdot (3n)$$

(b). Sea n, con $n \in P_3$ y divisible por 3 pero no por 5 ni 9. Queremos probar que $45n$ es un P_4, o equivalentemente $\sigma(45n) = 4(45n)$
Sabemos que n es divisible por 3, luego $n = 3m$ con $m.c.d(m, 3) = 1$, y como $\sigma(n) = 3n$ se tiene que:

$$\sigma(n) = 3n = 3(3m) = 9m$$
$$\sigma(n) = \sigma(3m) = \sigma(3)\sigma(m) = 4\sigma(m)$$

luego

$$\sigma(m) = \frac{9}{4}m.$$

Y finalmente se tiene que

$$\sigma(45n) = \sigma(5 \cdot 9 \cdot n) = \sigma(5 \cdot 9 \cdot 3m) = \sigma(5 \cdot 27 \cdot m) = \sigma(5)\sigma(27)\sigma(m) =$$
$$= 6 \cdot \left(\frac{3^4 - 1}{3 - 1}\right) \cdot \frac{9}{4}m = 6 \cdot 40 \cdot \frac{9}{4}m = 6 \cdot 10 \cdot 9m = 6 \cdot 10 \cdot 3n = 180n = 4(45n).$$

(c). Esta vez n es un P_3 divisible por 3, pero no por 7, 9 ni 13, y vamos a probar que $3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot n$ es un P_4.
Como en el caso anterior procedemos a descomponer n como $n = 3m$ con $m.c.d(m, 3) = 1$ y $\sigma(n) = 3n$, luego

$$\sigma(m) = \frac{9}{4}m.$$

Para concluir tenemos,

$$\sigma(3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot n) = \sigma(3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 3m) = \sigma(9 \cdot 7 \cdot 13 \cdot m) = \sigma(9)\sigma(7)\sigma(13)\sigma(m) =$$
$$= 13 \cdot 8 \cdot 14 \cdot \frac{9}{4}m = 13 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 3n = 4(13 \cdot 7 \cdot 3 \cdot n).$$

(d). Por último, probamos que si n no es divisible por 3 y $3n$ es un P_{4k}, entonces n es un P_{3k}.
Se tiene $\sigma(3n) = 4k(3n)$ y como n no es divisible por 3, $\sigma(3n) = 4\sigma(n)$, luego:

$$4\sigma(n) = 4k(3n)$$

por consiguiente, $\sigma(n) = 3k(n)$ y n es un P_{3k}.

□

Ejemplo 1: *Se van a presentar unos ejemplos donde se aplica esta proposición.*

- *Se tiene* $P_3^4 = 2^8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73$, *que es un* P_3 *no divisible por 3; si aplicamos (a).*

$$3P_3^4 = 2^8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73 = P_4^7.$$

- *Se tiene* $P_3^2 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7$, *el cual es divisible por 3, pero no por 5 ni 9; luego aplicando el apartado (b). de la proposición se obtiene*

$$45P_3^2 = 45 \cdot 2^5 \cdot 3 \cdot 7 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = P_4^1.$$

- *Esta vez, se tiene* $P_3^1 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, *que es divisible por 3, pero no por 7, 9 ni 13; luego aplicando el apartado (c). se tiene*

$$3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot P_3^1 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = P_4^2.$$

- *También se puede aplicar (d). al primer ejemplo.*
Sea $n = P_3^4$, *se tiene que 3 no divide a* n *y*

$$\sigma(3n) = \sigma(3) \cdot \sigma(n) = 4\sigma(n) = 4(3n).$$

Por tanto, $3n$ *es un* P_{4k} *con* $k = 1$ *y por consiguiente* n *es un* P_{3k} *con* $k = 1$, *lo cual es cierto.*

A partir de estos resultados, Mersenne se percató del siguiente hecho:
Si un P_3 no es divisible por 3, entonces $3P_3$ es un P_4; si un P_5 no es divisible por 5, entonces $5P_5$ es un P_6;...
Hecho que podemos sintetizar en el siguiente resultado, y cuyo enunciado se ha obtenido de [37].

Proposición 43. *Sea* n, *con* $n \in \mathbb{N}$ *y* p *un primo. Si* n *es* p*-perfecto y no divisible por* p, *entonces* pn *es* $(p+1)$*-perfecto.*

`Demostración:` Sea p un primo y n un número entero p-perfecto y no divisible por p, luego $\sigma(n) = pn$.
Y se quiere probar que pn es $(p+1)$-perfecto, o equivalentemente $\sigma(pn) = (p+1)(pn)$.
Luego

$$\sigma(pn) = \sigma(p)\sigma(n) = (p+1) \cdot (pn),$$

como se quería comprobar.

□

El siguiente resultado de Sylvester se puede extrapolar al caso general. Como veremos después. Este resultado junto con su prueba se encuentra en [9].

Proposición 44. *Un número multiperfecto de multiplicidad 3, debe contener al menos 3 divisores primos distintos.*

`Demostración:` Reducción al absurdo.
Suponemos que n es un número multiperfecto de multiplicidad k, con la siguiente descomposición:

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{a_i}, \text{ con } p_i \text{ primo y } a_i \text{ entero}$$

y como nuestro n es P_k, se tiene $\sigma(n) = kn$.
Por tanto,

$$\sigma(n) = kn = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{a_i+1} - 1}{p_i - 1} \tag{3.2}$$

o lo que es lo mismo,

$$k = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{a_i+1} - 1}{(p_i - 1)p_i^{a_i}} = \prod_{i=1}^{r} \frac{\left(\frac{p_i^{a_i+1}-1}{p_i^{a_i}}\right)}{p_i - 1} = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i - \frac{1}{p_i^{a_i}}}{p_i - 1},$$

y como

$$\prod_{i=1}^{r} \frac{p_i - \frac{1}{p_i^{a_i}}}{p_i - 1} < \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i}{p_i - 1}$$

se tiene que

$$k < \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i}{p_i - 1}. \tag{3.3}$$

Se estudia ahora el caso concreto, $k = 3$, por (3.3),

$$3 < \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i}{p_i - 1}$$

Y como suponemos que n tiene menos de tres factores primos,

$$3 < \frac{p_1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2}{p_2 - 1} \leq \frac{2}{2-1} \cdot \frac{3}{3-1} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3,$$

lo cual es absurdo.

□

En la demostración se ha tratado el caso general, el cual se puede extender a la multiplicidad que uno desee, teniendo así que los números multiperfectos P_4 tienen al menos 4 divisores primos distintos, los P_5 tienen al menos 6 divisores primos distintos, etc...
El resto de casos se comprueban igual que el caso $k = 3$, por ejemplo con $k = 4$:

- $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{4} < 4$, con 3 factores primos distintos no se cumple.
- $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} = \frac{35}{8} > 4$, en cambio con 4 si que lo cumple.

Se va a concluir esta primera sección con un resultado obtenido de [11], el cual relaciona dos números multiperfectos del siguiente modo.

Proposición 45. *Sean* $A = 19^2 \cdot 127$ *y* $B = 19^4 \cdot 151 \cdot 911$.
Sea n *un número natural positivo, tal que* $m.c.d(n, A) = m.c.d(n, B) = 1$. *Se tiene que*

$$\sigma(nA) = knA \text{ , si y solo si, } \sigma(nB) = knB,$$

con k *un valor entero.*

`Demostración:` Se tiene por hipótesis que $A = 19^2 \cdot 127$ y $B = 19^4 \cdot 151 \cdot 911$, luego

$$\sigma(A) = \sigma(19^2 \cdot 127) = \sigma(19^2) \cdot \sigma(127) = (19^2 + 19 + 1) \cdot 128 = 48768 = 2^7 \cdot 3 \cdot 127$$
$$\sigma(B) = \sigma(19^4 \cdot 151 \cdot 911) = (19^3 + 19^2 + 19 + 1) \cdot 152 \cdot 912 = 2^7 \cdot 3 \cdot 19^2 \cdot 151 \cdot 911.$$

A continuación, se va a reexpresar $\sigma(A)$ y $\sigma(B)$ en función de A y B respectivamente,

$$\sigma(A) = 2^7 \cdot 3 \cdot 127 = \frac{2^7 \cdot 3}{19^2} \cdot A$$
$$\sigma(B) = 2^7 \cdot 3 \cdot 19^2 \cdot 151 \cdot 911 = \frac{2^7 \cdot 3}{19^2} \cdot B.$$

Una vez se han obtenido estas nuevas expresiones, estamos en disposición de probar la proposición.

$\Rightarrow$
Se sabe por hipótesis que $\sigma(nA) = knA$ y hay que probar $\sigma(nB) = knB$
Como $m.c.d(n, A) = 1$, se tiene

$$\sigma(nA) = \sigma(n) \cdot \sigma(A) = \sigma(n) \cdot \frac{2^7 \cdot 3}{19^2} \cdot A,$$

luego,

$$\sigma(n) \cdot \frac{2^7 \cdot 3}{19^2} \cdot A = \sigma(nA) = knA,$$

por tanto

$$\sigma(n) \cdot \frac{2^7 \cdot 3}{19^2} \cdot A = knA,$$

y finalmente

$$\sigma(n) \cdot \frac{2^7 \cdot 3}{19^2} = kn. \tag{3.4}$$

Como queremos ver $\sigma(nB) = knB$, con $m.c.d(n, B) = 1$, se tiene

$$\sigma(nB) = \sigma(n) \cdot \sigma(B) = \sigma(n) \cdot \frac{2^7 \cdot 3}{19^2} \cdot B,$$

y aplicando (3.4), concluimos

$$\sigma(nB) = \sigma(n) \cdot \frac{2^7 \cdot 3}{19^2} \cdot B = knB.$$

Tal y como se quería ver.
$\Leftarrow$
Este caso es análogo, por hipótesis $\sigma(nB) = knB$, y queremos probar $\sigma(nA) = knA$.
Como $m.c.d(n, B) = 1$, se tiene

$$\sigma(nB) = \sigma(n) \cdot \sigma(B) = \sigma(n) \cdot \frac{2^7 \cdot 3}{19^2} \cdot B = knB,$$

luego,

$$\sigma(n) \cdot \frac{2^7 \cdot 3}{19^2} = kn.$$

Como $m.c.d(n, A) = 1$, concluimos

$$\sigma(nA) = \sigma(n) \cdot \sigma(A) = \sigma(n) \cdot \frac{2^7 \cdot 3}{19^2} \cdot A = knA.$$

□

Nota 2. *Aunque en el último resultado afirmamos que $A = 19^2 \cdot 127$ y $B = 19^4 \cdot 151 \cdot 911$, no son los únicos valores que cumplen dicha propiedad. Se ha puesto este caso concreto por ser el que más veces se repite entre los números multiperfectos conocidos, con un total de 257 repeticiones.*
Otras posibles parejas son:

- $A_2 = 23 \cdot 37^3 \cdot 73 \cdot 137^2$ *y* $B_2 = 23^2 \cdot 37 \cdot 79 \cdot 137$.
- $A_3 = 13 \cdot 31^2 \cdot 61 \cdot 83 \cdot 331$ *y* $B_3 = 13^2 \cdot 31 \cdot 61^2 \cdot 97$.
- ...

Es posible consultar el resto de parejas en [11].

En la última sección del capítulo, presentamos unas tablas con distintos números multiperfectos. En el siguiente ejemplo mostramos las parejas de números multiperfectos presentes en las tablas que cumplen la propiedad de la proposición, aunque cabe destacar que no son todos los números multiperfectos que lo cumplen, puesto que no están todos ahí recogidos.

Ejemplo 2: *(a). Parejas de números 4-perfectos que lo cumplen:*

- $P_4^{12} = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 19^2 \cdot 127$
  $P_4^{17} = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 19^4 \cdot 151 \cdot 911$
- $P_4^{13} = 2^8 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19^2 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 127$
  $P_4^{19} = 2^8 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19^4 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 151 \cdot 911$

- $P_4^{21} = 2^{17} \cdot 3^{10} \cdot 7 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 107 \cdot 127 \cdot 3851$
  $P_4^{25} = 2^{17} \cdot 3^{10} \cdot 7 \cdot 19^4 \cdot 23 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 107 \cdot 151 \cdot 911 \cdot 3851$
- $P_4^{22} = 2^{17} \cdot 3^{6} \cdot 7 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 127 \cdot 137 \cdot 547 \cdot 1093$
  $P_4^{27} = 2^{17} \cdot 3^{6} \cdot 7 \cdot 19^4 \cdot 23 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 137 \cdot 151 \cdot 547 \cdot 911 \cdot 1093$
- $P_4^{23} = 2^{25} \cdot 3^{4} \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 19^2 \cdot 127 \cdot 683 \cdot 2731 \cdot 8191$
  $P_4^{29} = 2^{25} \cdot 3^{4} \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 19^4 \cdot 151 \cdot 683 \cdot 911 \cdot 2731 \cdot 8191$
- $P_4^{24} = 2^{25} \cdot 3^{5} \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19^2 \cdot 127 \cdot 683 \cdot 2731 \cdot 8191$
  $P_4^{30} = 2^{25} \cdot 3^{5} \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19^4 \cdot 151 \cdot 683 \cdot 911 \cdot 2731 \cdot 8191$

(b). Parejas de números 5-perfectos que lo cumplen:

- $P_5^{10} = 2^{17} \cdot 3^{5} \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 13 \cdot 19^2 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 127$
  $P_5^{20} = 2^{17} \cdot 3^{5} \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 13 \cdot 19^4 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 151 \cdot 911$
- $P_5^{24} = 2^{21} \cdot 3^{8} \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 89 \cdot 127 \cdot 379 \cdot 683 \cdot 757$
  $P_5^{32} = 2^{21} \cdot 3^{8} \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19^4 \cdot 23 \cdot 89 \cdot 151 \cdot 379 \cdot 683 \cdot 757 \cdot 911$
- $P_5^{33} = 2^{24} \cdot 3^{8} \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19^2 \cdot 31 \cdot 43 \cdot 53 \cdot 127 \cdot 379 \cdot 601 \cdot 757 \cdot 1801$
  $P_5^{39} = 2^{24} \cdot 3^{8} \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19^4 \cdot 31 \cdot 43 \cdot 53 \cdot 151 \cdot 379 \cdot 601 \cdot 757 \cdot 911 \cdot 1801$

(c). Parejas de números 6-perfectos que lo cumplen:

- $P_6^{8} = 2^{19} \cdot 3^{5} \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 19^2 \cdot 31^3 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 61 \cdot 127$
  $P_6^{22} = 2^{19} \cdot 3^{5} \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 19^4 \cdot 31^3 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 61 \cdot 151 \cdot 911$
- $P_6^{13} = 2^{19} \cdot 3^{4} \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^3 \cdot 13 \cdot 19^2 \cdot 31^3 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 61 \cdot 127$
  $P_6^{26} = 2^{19} \cdot 3^{4} \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^3 \cdot 13 \cdot 19^4 \cdot 31^3 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 61 \cdot 151 \cdot 911$

(d). Parejas de 7-perfectos que lo cumplen:

- $P_7^{3} = 2^{39} \cdot 3^{11} \cdot 5^7 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19^2 \cdot 29 \cdot 31^2 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 61 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 127 \cdot 157 \cdot 313 \cdot 331 \cdot 2203 \cdot 30841 \cdot 61681$
  $P_7^{11} = 2^{39} \cdot 3^{11} \cdot 5^7 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19^4 \cdot 29 \cdot 31^2 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 61 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 151 \cdot 157 \cdot 313 \cdot 331 \cdot 911 \cdot 2203 \cdot 30841 \cdot 61681$
- $P_7^{5} = 2^{35} \cdot 3^{13} \cdot 5^2 \cdot 7^5 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19^2 \cdot 31 \cdot 37^2 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 61^2 \cdot 67 \cdot 73 \cdot 97 \cdot 109 \cdot 127 \cdot 163 \cdot 307 \cdot 547^2 \cdot 613 \cdot 1093$
  $P_7^{12} = 2^{35} \cdot 3^{13} \cdot 5^2 \cdot 7^5 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19^4 \cdot 31 \cdot 37^2 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 61^2 \cdot 67 \cdot 73 \cdot 97 \cdot 109 \cdot 151 \cdot 163 \cdot 307 \cdot 547^2 \cdot 613 \cdot 911 \cdot 1093$
- $P_7^{6} = 2^{35} \cdot 3^{13} \cdot 5^2 \cdot 7^5 \cdot 11^3 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19^2 \cdot 31^2 \cdot 37^2 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 73 \cdot 83 \cdot 109 \cdot 127 \cdot 163 \cdot 307 \cdot 331 \cdot 547^2 \cdot 613 \cdot 1093$
  $P_7^{16} = 2^{35} \cdot 3^{13} \cdot 5^2 \cdot 7^5 \cdot 11^3 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19^4 \cdot 31^2 \cdot 37^2 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 73 \cdot 83 \cdot 109 \cdot 151 \cdot 163 \cdot 307 \cdot 331 \cdot 547^2 \cdot 613 \cdot 911 \cdot 1093$

Antes de pasar a la siguiente sección, querría destacar que mientras realizaba la búsqueda de los anteriores ejemplos en las tablas, reparé en la existencia de un caso diferente que no venía recogido en [11] y el cual se muestra a continuación.

Proposición 46. *Sean* $A = 3^4 \cdot 7 \cdot 11^2$ *y* $B = 3^5 \cdot 7^2 \cdot 13$.
Sea n *un número natural positivo tal que* $m.c.d(n, A) = m.c.d(n, B) = 1$. *Se tiene que*

$$\sigma(nA) = knA \text{ si y solo si } \sigma(nB) = knB,$$

con k *un valor entero.*

`Demostración:` La demostración es análoga a la realizada en la proposición 45.. Lo primero es calcular $\sigma(A)$ y $\sigma(B)$.

$$\sigma(A) = \sigma(3^4 \cdot 7 \cdot 11^2) = \sigma(3^4) \cdot \sigma(7) \cdot \sigma(11^2) = 121 \cdot 8 \cdot 133 = 11^2 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot 19$$
$$\sigma(B) = \sigma(3^5 \cdot 7^2 \cdot 13) = \sigma(3^5) \cdot \sigma(7^2) \cdot \sigma(13) = 364 \cdot 57 \cdot 14 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 13.$$

Y a continuación, se re-expresa $\sigma(A)$ y $\sigma(B)$ en función de A y B respectivamente.

$$\sigma(A) = 11^2 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot 19 = \frac{2^3 \cdot 19}{3^4} \cdot A$$
$$\sigma(B) = 2^3 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 13 = \frac{2^3 \cdot 19}{3^4} \cdot B.$$

Una vez obtenidas, procedemos con la prueba.
$\Rightarrow$ Se tiene por hipótesis que $\sigma(nA) = knA$, con $m.c.d(n, A) = 1$, luego

$$\sigma(nA) = \sigma(n)\sigma(A) = \sigma(n) \cdot \frac{2^3 \cdot 19}{3^4} \cdot A = knA,$$

por tanto

$$kn = \sigma(n) \cdot \frac{2^3 \cdot 19}{3^4}.$$

Hay que comprobar que se cumple $\sigma(nB) = knB$, lo cual es cierto, ya que

$$\sigma(nB) = \sigma(n)\sigma(B) = \sigma(n) \cdot \frac{2^3 \cdot 19}{3^4} \cdot B = knB. \tag{3.5}$$

$\Leftarrow$ En este caso se cumple que $\sigma(nB) = knB$, con $m.c.d(n, B) = 1$, luego

$$\sigma(nB) = \sigma(n)\sigma(B) = \sigma(n) \cdot \frac{2^3 \cdot 19}{3^4} \cdot \frac{2^3 \cdot 19}{3^4} \cdot B = knB,$$

por tanto,

$$\sigma(n) \cdot \frac{2^3 \cdot 19}{3^4} = kn.$$

Se tiene que probar que $\sigma(nA) = knA$, con $m.c.d(n, A) = 1$, pero lo cual es cierto ya que

$$\sigma(nA) = \sigma(n) \cdot \sigma(A) = \sigma(n) \cdot \frac{2^3 \cdot 19}{3^4} \cdot A = knA.$$

Tal y como se quería probar.

□

Un aspecto curioso de este caso, es que aunque aparezca solo 4 veces en nuestras tablas finales, se supone que hay más casos, puesto que se han observado algunos números multiperfectos del tipo de A de nuestra última proposición, pero sin su correspondiente pareja. Este hecho hace presuponer que la pareja se encuentre en los siguientes valores que ya no han sido añadidos a las tablas. Además, cada una de las 4 parejas está formada por dos números consecutivos, como se aprecia en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3: *Los siguientes 4 ejemplos son los presentes en las tablas.*

- $P_4^{23} = 2^{25} \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 19^2 \cdot 127 \cdot 683 \cdot 2731 \cdot 8191$
  $P_4^{24} = 2^{25} \cdot 3^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19^2 \cdot 127 \cdot 683 \cdot 2731 \cdot 8191$

- $P_4^{29} = 2^{25} \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 19^4 \cdot 151 \cdot 683 \cdot 911 \cdot 2731 \cdot 8191$
  $P_4^{30} = 2^{25} \cdot 3^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19^4 \cdot 151 \cdot 683 \cdot 911 \cdot 2731 \cdot 8191$

- $P_5^1 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 17 \cdot 19$
  $P_5^2 = 2^7 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$

- $P_5^4 = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 89$
  $P_5^5 = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 89$

Como curiosidad, cabe destacar que los valores $P_4^{23}, P_4^{24}, P_4^{29}$ y P_4^{30} han aparecido tanto en el anterior ejemplo como en este, ya que los dos primeros tienen los factores $3^4 \cdot 7 \cdot 11^2$ y $19^2 \cdot 127$, mientras que los dos segundos poseen $3^5 \cdot 7^2 \cdot 13$ y $19^4 \cdot 151 \cdot 911$.
De ahí que aparezcan en ambos casos.

3.1.1. Números multiperfectos impares

Toda la información utilizada para la confección de esta sección se ha extraído de [2].

Hasta ahora todo lo estudiado de números multiperfectos ha sido relativo a números pares únicamente. Empezamos definiendo un nuevo término.

Definición 47. *Un número multiperfecto impar es un número impar cuya suma de divisores coincide con un múltiplo de él mismo.*

Al igual que pasaba en el tema anterior, no se ha encontrado un número multiperfecto impar, y la mayor parte de estudios relativos a este campo pretende precisar cada vez más las condiciones que deben cumplir estos número en caso de existir.
Por ejemplo, en 1832, el matemático estadounidense Benjamin Peirce (1809-1880), probó que todo número perfecto impar debe tener necesariamente al menos 4 divisores primos distintos, pero como ya se vio en la página 26, actualmente se sabe que el número de divisores primos distintos tiene que ser al menos 10.
Después de Peirce, los matemáticos Sylvester y Cl. Servais siguieron con su estudio sobre estos números y sus propiedades. Consiguieron aumentar el número mínimo de divisores que tenía que tener un número perfecto impar a 5 y Servais probó que si m es el número de divisores primos que tiene un número perfecto impar P, entonces el mínimo divisor de P no puede exceder de m.
En febrero de 1941, el matemático G.F. Cramer basándose en estos resultados dio una extensión para poder aplicarlos a números multiperfectos. Dicho resultado es el siguiente.

Teorema 48. (Cramer) *Sea n, un número entero impar, con la siguiente factorización:*

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \dots p_t^{\alpha_t}$$

con p_i primo, α_i entero y $p_k < p_{k+1}$ para todo k con $k = 1, 2, \dots, t-1$.
Sea A la abundancia de n, o lo que es lo mismo

$$A = \frac{\sigma(n)}{n},$$

entonces

$$p_1 < \frac{A + t - 1}{A - 1}. \tag{3.6}$$

Demostración:

Como σ es multiplicativa, la abundancia se puede expresar del siguiente modo:

$$A = \frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\sigma(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_t^{\alpha_t})}{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_t^{\alpha_t}} = \frac{\sigma(p_1^{\alpha_1})\sigma(p_2^{\alpha_2})\dots\sigma(p_t^{\alpha_t})}{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_t^{\alpha_t}} = \frac{\sigma(p_1^{\alpha_1})}{p_1^{\alpha_1}}\cdot\frac{\sigma(p_2^{\alpha_2})}{p_2^{\alpha_2}}\cdot\dots\cdot\frac{\sigma(p_t^{\alpha_t})}{p_t^{\alpha_t}} =$$

$$= \frac{\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}}{p_1^{\alpha_1}}\cdot\frac{\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}}{p_2^{\alpha_2}}\cdot\dots\cdot\frac{\frac{p_t^{\alpha_t+1}-1}{p_t-1}}{p_t^{\alpha_t}} = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1^{\alpha_1+1}-p_1^{\alpha_1}}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2^{\alpha_2+1}-p_2^{\alpha_2}}\cdot\dots\cdot\frac{p_t^{\alpha_t+1}-1}{p_t^{\alpha_t+1}-p_t^{\alpha_t}} \tag{3.7}$$

A continuación, se define la siguiente función para $x > 0$ y $p > 1$,

$$f(p^x) = \frac{p^{x+1}-1}{p^{x+1}-p^x},$$

cuyo límite es

$$\lim_{x\to\infty} f(p^x) = \frac{p}{p-1}.$$

Debido a ello, podemos afirmar que

$$f(p_k^{\alpha_k}) < \frac{p_k}{p_k-1}$$

para $k = 1, 2, \dots, t$.
Y utilizando esta desigualdad en (3.7) se tiene la siguiente desigualdad:

$$A < \frac{p_1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2}{p_2-1}\cdot\dots\cdot\frac{p_t}{p_t-1}. \tag{3.8}$$

Además, los p_i son primos y $p_k < p_{k+1}$, por tanto $p_1 < p_2 < \dots < p_t$. De ahí se sigue que $p_2 > p_1+1$, $p_3 > p_1+2$, $\dots$, $p_t > p_1+t-1$.
Se define otra función $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$, decreciente, con la misma forma que los factores de (3.8). Utilizando las anteriores desigualdades y el hecho de que es decreciente, deducimos que

$$A < \frac{p_1}{p_1-1}\cdot\frac{p_1+1}{p_1}\cdot\frac{p_1+2}{p_1+1}\cdot\dots\cdot\frac{p_1+t-1}{p_1+t-2} \tag{3.9}$$

Y anulando los factores que coinciden en numeradores y denominadores se obtiene

$$A < \frac{p_1+t-1}{p_1-1},$$

de donde finalmente se deduce

$$p_1 < \frac{A+t-1}{A-1}. \tag{3.10}$$

Tal como se quería probar.

□

Una vez probado el resultado de Cramer, extendemos dicho resultado para acotar los 3 primeros divisores primos de n y no solo el primero como en el resultado anterior.

Teorema 49. *Sea n, número entero impar, con la siguiente factorización:*

$$n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\dots p_t^{\alpha_t}$$

con p_i primo y α_i entero, y además $p_k < p_{k+1}$, para todo k con $k = 1, 2, \ldots, t-1$. Sea A la abundancia de n y $t = \omega(n)$ el número de factores primos distinto de n, si $A > \dfrac{15}{8}$, entonces

$$p_1 < \frac{A+t-1}{A-1} \quad , \quad p_2 < \frac{2A+3t-6}{2A-3} \quad , \quad p_3 < \frac{8A+15t-45}{8A-15} \quad .$$

`Demostración:`

El primer caso ya se ha tratado en el teorema anterior, así que nos vamos a apoyar en su prueba para demostrar los casos p_2 y p_3.

Sabemos por (3.8) que el primer término A es $\dfrac{p_1}{p_1-1}$ y como solo se tratan números impares $p_1 = 3$. Por tanto

$$\frac{p_1}{p_1-1} \leq \frac{3}{3-1} = \frac{3}{2}.$$

De nuevo se cumple que $p_k < p_{k+1}$, y se dan las siguientes desigualdades: $p_3 > p_2 + 1$, $p_4 > p_2 + 2$, $\ldots$, $p_t > p_2 + t - 2$.

Si aplicamos estas desigualdades en (3.9), junto con la del primer término se obtiene

$$A < \frac{3}{2} \cdot \frac{p_2}{p_2-1} \cdot \frac{p_2+1}{p_2} \cdot \ldots \cdot \frac{p_2+t-2}{p_2+t-3}. \tag{3.11}$$

Anulando los términos que coinciden en los numeradores y denominadores, se tiene

$$A < \frac{3}{2} \cdot \frac{p_2+t-2}{p_2-1},$$

y realizando operaciones elementales sobre esta desigualdad se concluye que

$$p_2 < \frac{2A+3t-6}{2A-3}. \tag{3.12}$$

Para finalizar esta demostración, ocupamos el caso p_3. Como en el resto de los casos se pueden establecer las siguientes desigualdades: $p_4 > p_3 + 1$, $p_5 > p_3 + 2$, $\ldots$, $p_t > p_3 + t - 3$.

Además se tiene que

$$\frac{p_2}{p_2-1} \leq \frac{5}{5-1} = \frac{5}{4},$$

Y aplicando ambos hechos a la desigualdad (3.9) se obtiene

$$A < \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{p_3}{p_3-1} \cdot \frac{p_3+1}{p_3} \cdot \frac{p_3+2}{p_3+1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_3+t-3}{p_3+t-4} = \frac{15}{8} \cdot \frac{p_3+t-3}{p_3-1}.$$

Por hipótesis sabemos que $A > \dfrac{15}{8}$, lo que nos permite resolver esta desigualdad para p_3,

$$p_3 < \frac{8A+15t-45}{8A-15}. \tag{3.13}$$

□

Nota 3. *Si n es número multiperfecto impar, por los resultados previos se puede establecer lo siguiente: si su abundancia es 2, tiene que cumplir $p_1 < 1 + t$, $p_2 < 3t - 2$ y $p_3 < 15t - 29$; si la abundancia es 3, $p_1 < \dfrac{t+2}{2}$, $p_2 < t$ y $p_3 < \dfrac{5t-7}{3}$; etc...*

3.2 Tablas números multiperfectos

En esta sección presentamos unas tablas respectivas a números multiperfectos, los números en las tablas han sido situados en función de su valor y no de su fecha de descubrimiento. Todas ellas han sido extraídas de [11].

Números 3-Perfectos			
	Valor	Factorización	Fecha y Descubridor
P_3^1	120	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	(1557) Recorde
P_3^2	672	$2^5 \cdot 3 \cdot 7$	(1636) Fermat
P_3^3	523776	$2^9 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 31$	(1638) Jumeau
P_3^4	459818240	$2^8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73$	(1638) Frenicle
P_3^5	1476304896	$2^{13} \cdot 3 \cdot 11 \cdot 43 \cdot 127$	(1638) Descartes
P_3^6	51001180160	$2^{14} \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 151$	(1643) Fermat

Cabe destacar de esta primera tabla, que estos 6 números son todos los conocidos hasta la fecha, ya que desde 1643 no se ha encontrado ninguno más. Tampoco se ha sido capaz de probar si existen más o no, siendo este un problema abierto actualmente.

Vemos ahora con la tabla de los 4-perfectos, que también son todos los conocidos, al igual que en el caso anterior.

Números 4-Perfectos			
	Valor	Factorización	Fecha y Descubridor
P_4^1	30240	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$	(1638) Descartes
P_4^2	32760	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$	(1638) Descartes
P_4^3	3201120	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$	(1901) Lehmer
P_4^4	23569920	$2^9 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31$	(1638) Descartes
P_4^5	45532800	$2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 31$	(1639) Mersenne
P_4^6	142990848	$2^9 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 31$	(1638) Descartes
P_4^7	1379454720	$2^8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73$	(1638?) Frenicle
P_4^8	43861478400	$2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 89$	(1639) Mersenne
P_4^9	66433720320	$2^{13} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 43 \cdot 127$	(1638) Descartes
P_4^{10}	...	$2^{14} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 3 \cdot 151$	(1643) Fermat
P_4^{11}	...	$2^{13} \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 43 \cdot 127$	(1638) Descartes
P_4^{12}	...	$2^5 \cdot 3^4 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 19^2 \cdot 127$	(1911) Carmichael
P_4^{13}	...	$2^8 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19^2 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 127$	(1901) Lehmer
P_4^{14}	...	$2^7 \cdot 3^{10} \cdot 5 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 107 \cdot 3851$	(1911) Carmichael
P_4^{15}	...	$2^7 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 137 \cdot 547 \cdot 1093$	(1643) Fermat
P_4^{16}	...	$2^{14} \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19^2 \cdot 31 \cdot 127 \cdot 151$	(1910) Carmichael
P_4^{17}	...	$2^5 \cdot 3^4 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 19^4 \cdot 151 \cdot 911$	(1929) Poulet
P_4^{18}	...	$2^9 \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 11^3 \cdot 31^2 \cdot 61 \cdot 83 \cdot 331$	(1911) Carmichael
P_4^{19}	...	$2^8 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19^4 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 151 \cdot 911$	(1929) Poulet
P_4^{20}	...	$2^{25} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 683 \cdot 2731 \cdot 8191$	(1910) Carmichael
P_4^{21}	...	$2^{17} \cdot 3^{10} \cdot 7 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 107 \cdot 127 \cdot 3851$	(1911) Carmichael
P_4^{22}	...	$2^{17} \cdot 3^6 \cdot 7 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 127 \cdot 137 \cdot 547 \cdot 1093$	(1911) Carmichael
P_4^{23}	...	$2^{25} \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 19^2 \cdot 127 \cdot 683 \cdot 2731 \cdot 8191$	(1911) Carmichael
P_4^{24}	...	$2^{25} \cdot 3^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19^2 \cdot 127 \cdot 683 \cdot 2731 \cdot 8191$	(1911) Carmichael
P_4^{25}	...	$2^{17} \cdot 3^{10} \cdot 7 \cdot 19^4 \cdot 23 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 107 \cdot 151 \cdot 911 \cdot 3851$	(1929) Poulet
P_4^{26}	...	$2^{25} \cdot 3^{10} \cdot 5 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 107 \cdot 683 \cdot 2731 \cdot 3851 \cdot 8191$	(1911) Carmichael
P_4^{27}	...	$2^{17} \cdot 3^6 \cdot 7 \cdot 19^4 \cdot 23 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 137 \cdot 151 \cdot 547 \cdot 911 \cdot 1093$	(1929) Poulet
P_4^{28}	...	$2^{25} \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 137 \cdot 547 \cdot 683 \cdot 1093 \cdot 2731 \cdot 8191$	(1910) Carmichael
P_4^{29}	...	$2^{25} \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 19^4 \cdot 151 \cdot 683 \cdot 911 \cdot 2731 \cdot 8191$	(1929) Poulet
P_4^{30}	...	$2^{25} \cdot 3^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19^4 \cdot 151 \cdot 683 \cdot 911 \cdot 2731 \cdot 8191$	(1929) Poulet
P_4^{31}	...	$2^{33} \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 11^3 \cdot 31 \cdot 61 \cdot 83 \cdot 331 \cdot 43691 \cdot 131071$	(1911) Carmichael
P_4^{32}	...	$2^{33} \cdot 3^{10} \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 83 \cdot 107 \cdot 331 \cdot 3851 \cdot 43691 \cdot 131071$	(1911) Carmichael
P_4^{33}	...	$2^{33} \cdot 3^6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 83 \cdot 137 \cdot 331 \cdot 547 \cdot 1093 \cdot 43691 \cdot 131071$	(1911) Carmichael
P_4^{34}	...	$2^{37} \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 11^3 \cdot 31 \cdot 61 \cdot 83 \cdot 331 \cdot 43691 \cdot 174763 \cdot 524287$	(1911) Carmichael
P_4^{35}	...	$2^{37} \cdot 3^{10} \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 83 \cdot 107 \cdot 331 \cdot 3851 \cdot 43691 \cdot 174763 \cdot 524287$	(1911) Carmichael
P_4^{36}	...	$2^{37} \cdot 3^6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 83 \cdot 137 \cdot 331 \cdot 547 \cdot 1093 \cdot 43691 \cdot 174763 \cdot 524287$	(1911) Carmichael

Como sucede en el caso anterior, en las siguientes tablas también va a crecer mucho el tamaño de los números, haciendo que introducirles en la tabla sea una prácticamente imposible, además de no aportar ninguna información relevante dichos números.
Por consiguiente, en las siguientes tablas se omitirá dicha columna, dejando solamente la de la factorización junto con el nombre y fecha de su descubridor.
Por último, cabe destacar que solo las dos tablas anteriores contarán con todos los números que las integran. En las demás tablas hay muchos más ejemplos que los ahí situados, aunque solo se introducirán unos pocos a modo de ejemplo, pudiendo ver las tablas completas si se desease en [11].

Números 5-Perfectos		
	Factorización	Fecha y Descubridor
P_5^1	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 17 \cdot 19$	(1638) Descartes
P_5^2	$2^7 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$	(1639) Descartes
P_5^3	$2^{11} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31$	(1639) Mersenne
P_5^4	$2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 89$	(1639) Fermat
P_5^5	$2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 89$	(1638) Frenicle
P_5^6	$2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13^2 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 61$	(1911) Carmichael
P_5^7	$2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 13^3 \cdot 17$	(1911) Carmichael
P_5^8	$2^{15} \cdot 3^7 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 257$	(1911) Carmichael
P_5^9	$2^{11} \cdot 3^{10} \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 107 \cdot 3851$	(1911) Carmichael
P_5^{10}	$2^{17} \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 13 \cdot 19^2 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 127$	(1643) Fermat
P_5^{11}	$2^{11} \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 137 \cdot 547 \cdot 1093$	(1911) Carmichael
P_5^{12}	$2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 13^2 \cdot 31^2 \cdot 61 \cdot 83 \cdot 331$	(1911) Carmichael
P_5^{13}	$2^{14} \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31^2 \cdot 83 \cdot 151 \cdot 331$	(1911) Carmichael
P_5^{14}	$2^{20} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13^2 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 61 \cdot 127 \cdot 337$	(1643) Fermat
P_5^{15}	$2^{20} \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 127 \cdot 337$	(1911) Carmichael
P_5^{16}	$2^{20} \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 31 \cdot 127 \cdot 337$	(1911) Carmichael
P_5^{17}	$2^{21} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 89 \cdot 683$	(1911) Carmichael
P_5^{18}	$2^{19} \cdot 3^{10} \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 107 \cdot 3851$	(1911) Carmichael
P_5^{19}	$2^{19} \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 137 \cdot 547 \cdot 1093$	(1911) Carmichael
P_5^{20}	$2^{17} \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 13 \cdot 19^4 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 151 \cdot 911$	(1929) Poulet
P_5^{21}	$2^{22} \cdot 3^7 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 151 \cdot 197 \cdot 178481$	(1911) Carmichael
P_5^{22}	$2^{20} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 13^2 \cdot 31^2 \cdot 61 \cdot 83 \cdot 127 \cdot 331 \cdot 337$	(1911) Carmichael
P_5^{23}	$2^{19} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 31^2 \cdot 41^2 \cdot 83 \cdot 331 \cdot 431 \cdot 1723$	(1911) Carmichael
P_5^{24}	$2^{21} \cdot 3^8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 89 \cdot 127 \cdot 379 \cdot 683 \cdot 757$	(1911) Carmichael
P_5^{25}	$2^{20} \cdot 3^7 \cdot 5 \cdot 7^4 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 41 \cdot 127 \cdot 337 \cdot 467 \cdot 2801$	(1911) Carmichael
P_5^{26}	$2^{21} \cdot 3^{10} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 23^2 \cdot 31 \cdot 79 \cdot 89 \cdot 107 \cdot 683 \cdot 3851$	(1911) Carmichael
P_5^{27}	$2^{21} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 23^2 \cdot 31 \cdot 79 \cdot 89 \cdot 137 \cdot 547 \cdot 683 \cdot 1093$	(1901) Lehmer
P_5^{28}	$2^{33} \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 83 \cdot 331 \cdot 43691 \cdot 131071$	(1911) Carmichael
P_5^{29}	$2^{27} \cdot 3^{10} \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 43 \cdot 107 \cdot 113 \cdot 127 \cdot 3851$	(1911) Carmichael
P_5^{30}	$2^{27} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 43 \cdot 113 \cdot 127 \cdot 137 \cdot 547 \cdot 1093$	(1911) Mason
P_5^{31}	$2^{33} \cdot 3^7 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 41 \cdot 83 \cdot 331 \cdot 43691 \cdot 131071$	(1911) Carmichael
P_5^{32}	$2^{21} \cdot 3^8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19^4 \cdot 23 \cdot 89 \cdot 151 \cdot 379 \cdot 683 \cdot 757 \cdot 911$	(1929) Poulet
P_5^{33}	$2^{24} \cdot 3^8 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19^2 \cdot 31 \cdot 43 \cdot 53 \cdot 127 \cdot 379 \cdot 601 \cdot 757 \cdot 1801$	(1911) Carmichael
P_5^{34}	$2^{27} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 11^4 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 43 \cdot 61 \cdot 71 \cdot 113 \cdot 179 \cdot 3221$	(1911) Mason
P_5^{35}	$2^{37} \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 83 \cdot 331 \cdot 43691 \cdot 174763 \cdot 524287$	(1911) Carmichael
P_5^{36}	$2^{28} \cdot 3^8 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 61 \cdot 127 \cdot 233 \cdot 379 \cdot 757 \cdot 1103 \cdot 2089$	(1911) Mason
P_5^{37}	$2^{38} \cdot 3^7 \cdot 5^5 \cdot 7^3 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 53 \cdot 79 \cdot 229 \cdot 8191 \cdot 121369$	(1911) Masson
P_5^{38}	$2^{37} \cdot 3^7 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 41 \cdot 83 \cdot 331 \cdot 43691 \cdot 174763 \cdot 524287$	(1911) Carmichael
P_5^{39}	$2^{24} \cdot 3^8 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19^4 \cdot 31 \cdot 43 \cdot 53 \cdot 151 \cdot 379 \cdot 601 \cdot 757 \cdot 911 \cdot 1801$	(1929) Poulet
P_5^{40}	$2^{29} \cdot 3^{10} \cdot 7^5 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 19^3 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 43 \cdot 83 \cdot 107 \cdot 151 \cdot 181 \cdot 331 \cdot 3851$	(1911) Carmichael
...	...	...

Números 6-Perfectos		
	Factorización	Fecha y Descubridor
P_6^1	$2^{15} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 43 \cdot 257$	(1907) Carmichael
P_6^2	$2^{15} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 257$	(1911) Carmichael
P_6^3	$2^{15} \cdot 3^5 \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 43 \cdot 71 \cdot 257$	(1911) Mason
P_6^4	$2^{19} \cdot 3^{10} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 107 \cdot 3851$	(1911) Carmichael
P_6^5	$2^{19} \cdot 3^5 \cdot 5^5 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 19 \cdot 31^3 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 61$	(1911) Carmichael
P_6^6	$2^{19} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 137 \cdot 547 \cdot 1093$	(1901) Lehmer
P_6^7	$2^{27} \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 43 \cdot 61 \cdot 113 \cdot 127$	(1643) Fermat
P_6^8	$2^{19} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 19^2 \cdot 31^3 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 61 \cdot 127$	(1911) Carmichael
P_6^9	$2^{19} \cdot 3^4 \cdot 5^5 \cdot 7^3 \cdot 11^3 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31^3 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 61$	(1911) Carmichael
P_6^{10}	$2^{27} \cdot 3^5 \cdot 5^5 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 43 \cdot 113 \cdot 127$	(1911) Carmichael
P_6^{11}	$2^{17} \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 19^3 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 61 \cdot 73 \cdot 181$	(1911) Carmichael
P_6^{12}	$2^{27} \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11^3 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 43 \cdot 61 \cdot 113 \cdot 127$	(1911) Carmichael
P_6^{13}	$2^{19} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^3 \cdot 13 \cdot 19^2 \cdot 31^3 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 61 \cdot 127$	(1911) Carmichael
P_6^{14}	$2^{23} \cdot 3^7 \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11^3 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 61 \cdot 71 \cdot 241$	(1911) Mason
P_6^{15}	$2^{17} \cdot 3^{11} \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 53 \cdot 71 \cdot 73^2 \cdot 1801$	(1911) Carmichael
P_6^{16}	$2^{24} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 53 \cdot 601 \cdot 1801$	(1911) Mason
P_6^{17}	$2^{19} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^5 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 19^2 \cdot 31^2 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 83 \cdot 127 \cdot 331$	(1953) Franqui-Garcia
P_6^{18}	$2^{20} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 127 \cdot 337 \cdot 467 \cdot 2801$	(1911) Mason
P_6^{19}	$2^{27} \cdot 3^{10} \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 43 \cdot 107 \cdot 113 \cdot 127 \cdot 3851$	(1911) Carmichael
P_6^{20}	$2^{27} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 43 \cdot 113 \cdot 127 \cdot 137 \cdot 547 \cdot 1093$	(1911) Carmichael
P_6^{21}	$2^{19} \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11^6 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 43 \cdot 71 \cdot 103 \cdot 45319$	(1954) Brown
P_6^{22}	$2^{19} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 19^4 \cdot 31^3 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 61 \cdot 151 \cdot 911$	(1929) Poulet
P_6^{23}	$2^{15} \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17^2 \cdot 19 \cdot 43 \cdot 257 \cdot 307 \cdot 467 \cdot 2801$	(1911) Mason
P_6^{24}	$2^{28} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 61 \cdot 233 \cdot 1103 \cdot 2089$	(1911) Carmichael
P_6^{25}	$2^{28} \cdot 3^7 \cdot 5^5 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 233 \cdot 1103 \cdot 2089$	(1911) Carmichael
P_6^{26}	$2^{19} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^3 \cdot 13 \cdot 19^4 \cdot 31^3 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 61 \cdot 151 \cdot 911$	(1929) Poulet
P_6^{27}	$2^{27} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19^4 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 43 \cdot 113 \cdot 127 \cdot 151 \cdot 911$	(1953) Franqui-Garcia
P_6^{28}	$2^{24} \cdot 3^7 \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 53 \cdot 71 \cdot 601 \cdot 1801$	(1911) Mason
P_6^{29}	$2^{28} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 127 \cdot 233 \cdot 1103 \cdot 2089$	(1911) Mason
P_6^{30}	$2^{21} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11^3 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 61^2 \cdot 71 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 683$	(1929) Poulet
...	...	...

Números 7-Perfectos		
	Factorización	Fecha y Descubridor
P_7^1	$2^{32} \cdot 3^{11} \cdot 5^4 \cdot 7^5 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19^3 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43 \cdot 61 \cdot 71 \cdot 73 \cdot 89 \cdot 181 \cdot 2141 \cdot 599479$	(1911) Mason
P_7^2	$2^{32} \cdot 3^{11} \cdot 5^4 \cdot 7^8 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19^3 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 37^2 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 71 \cdot 73 \cdot 89 \cdot 181 \cdot 307 \cdot 1063 \cdot 2141 \cdot 599479$	(1929) Poulet
P_7^3	$2^{39} \cdot 3^{11} \cdot 5^7 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19^2 \cdot 29 \cdot 31^2 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 61 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 127 \cdot 157 \cdot 313 \cdot 331 \cdot 2203 \cdot 30841 \cdot 61681$	(1911) Mason
P_7^4	$2^{44} \cdot 3^9 \cdot 5^3 \cdot 7^5 \cdot 11^3 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19^3 \cdot 31^2 \cdot 37 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 61^2 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 97 \cdot 151 \cdot 181 \cdot 331 \cdot 631 \cdot 23311$	(1929) Poulet
P_7^5	$2^{35} \cdot 3^{13} \cdot 5^2 \cdot 7^5 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19^2 \cdot 31 \cdot 37^2 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 61^2 \cdot 67 \cdot 73 \cdot 97 \cdot 109 \cdot 127 \cdot 163 \cdot 307 \cdot 547^2 \cdot 613 \cdot 1093$	(1929) Poulet
P_7^6	$2^{35} \cdot 3^{13} \cdot 5^2 \cdot 7^5 \cdot 11^3 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19^2 \cdot 31^2 \cdot 37^2 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 73 \cdot 83 \cdot 109 \cdot 127 \cdot 163 \cdot 307 \cdot 331 \cdot 547^2 \cdot 613 \cdot 1093$	(1911) Carmichael
P_7^7	$2^{46} \cdot 3^{15} \cdot 5^3 \cdot 7^5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 61 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 127 \cdot 193 \cdot 2351 \cdot 4513 \cdot 442151 \cdot 13264529$	(1902) Cunningham
P_7^8	$2^{41} \cdot 3^{11} \cdot 5^5 \cdot 7^6 \cdot 11^3 \cdot 13^3 \cdot 17^2 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 31^2 \cdot 37 \cdot 43 \cdot 61 \cdot 73 \cdot 83 \cdot 127 \cdot 263 \cdot 271 \cdot 307 \cdot 331 \cdot 337 \cdot 4733 \cdot 5419$	(1911) Mason
P_7^9	$2^{32} \cdot 3^{17} \cdot 5^5 \cdot 7^6 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19^3 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31^2 \cdot 37 \cdot 61 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 181 \cdot 263 \cdot 331 \cdot 379 \cdot 757 \cdot 2141 \cdot 4733 \cdot 599479$	(1953) Franqui-Garcia
P_7^{10}	$2^{35} \cdot 3^{14} \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11^4 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19^2 \cdot 31 \cdot 37^2 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 73 \cdot 109 \cdot 127 \cdot 163 \cdot 179 \cdot 257 \cdot 2281 \cdot 3221 \cdot 4561 \cdot 19531$	(1911) Mason
P_7^{11}	$2^{39} \cdot 3^{11} \cdot 5^7 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19^4 \cdot 29 \cdot 31^2 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 61 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 151 \cdot 157 \cdot 313 \cdot 331 \cdot 911 \cdot 2203 \cdot 30841 \cdot 61681$	(1929) Poulet
P_7^{12}	$2^{35} \cdot 3^{13} \cdot 5^2 \cdot 7^5 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19^4 \cdot 31 \cdot 37^2 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 61^2 \cdot 67 \cdot 73 \cdot 97 \cdot 109 \cdot 151 \cdot 163 \cdot 307 \cdot 547^2 \cdot 613 \cdot 911 \cdot 1093$	(1929) Poulet
P_7^{13}	$2^{32} \cdot 3^{11} \cdot 5^6 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17^3 \cdot 19^3 \cdot 23 \cdot 29^2 \cdot 37 \cdot 43 \cdot 67 \cdot 73 \cdot 89 \cdot 181 \cdot 257 \cdot 263 \cdot 2141 \cdot 4733 \cdot 19531 \cdot 599479$	(1992) Helenius
P_7^{14}	$2^{35} \cdot 3^{17} \cdot 5^5 \cdot 7^5 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19^6 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 37^3 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 73 \cdot 109 \cdot 137 \cdot 379 \cdot 701 \cdot 757 \cdot 11807 \cdot 70841$	(1954) Brown
P_7^{15}	$2^{35} \cdot 3^{13} \cdot 5^5 \cdot 7^7 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 37^2 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 61^2 \cdot 67 \cdot 73 \cdot 97 \cdot 109 \cdot 163 \cdot 307 \cdot 547^2 \cdot 601 \cdot 613 \cdot 1093 \cdot 1201$	(1929) Poulet
P_7^{16}	$2^{35} \cdot 3^{13} \cdot 5^2 \cdot 7^5 \cdot 11^3 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19^4 \cdot 31^2 \cdot 37^2 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 73 \cdot 83 \cdot 109 \cdot 151 \cdot 163 \cdot 307 \cdot 331 \cdot 547^2 \cdot 613 \cdot 911 \cdot 1093$	(1929) Poulet
P_7^{17}	$2^{35} \cdot 3^{15} \cdot 5^9 \cdot 7^7 \cdot 11^4 \cdot 13 \cdot 17^2 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 37^2 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 67 \cdot 71 \cdot 73 \cdot 97 \cdot 109 \cdot 179 \cdot 193 \cdot 307 \cdot 521 \cdot 601 \cdot 1201 \cdot 3221$	(1911) Carmichael
P_7^{18}	$2^{35} \cdot 3^{15} \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 37^2 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 53 \cdot 61^2 \cdot 67 \cdot 73 \cdot 97^2 \cdot 109 \cdot 127 \cdot 193 \cdot 257 \cdot 307 \cdot 317 \cdot 3169 \cdot 19531$	(1954) Brown
P_7^{19}	$2^{39} \cdot 3^9 \cdot 5^5 \cdot 7^7 \cdot 11^5 \cdot 13 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 29 \cdot 31^3 \cdot 37^2 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 127 \cdot 307 \cdot 601 \cdot 1201 \cdot 2203 \cdot 30841 \cdot 61681$	(1991) Gretton
P_7^{20}	$2^{35} \cdot 3^{13} \cdot 5^5 \cdot 7^7 \cdot 11^3 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 31^2 \cdot 37^2 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 73 \cdot 83 \cdot 109 \cdot 163 \cdot 307 \cdot 331 \cdot 547^2 \cdot 601 \cdot 613 \cdot 1093 \cdot 1201$	(1929) Poulet
...	...	...

Números 8-Perfectos		
	Factorización	Fecha y Descubridor
P_8^1	$2^{62} \cdot 3^{15} \cdot 5^9 \cdot 7^7 \cdot 11^3 \cdot 13^3 \cdot 17^2 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31^2 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 53 \cdot 61^2 \cdot 71^2 \cdot 73 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 97^2 \cdot 127 \cdot 193 \cdot 283 \cdot$	(1990) Gretton
-	$\cdot 307 \cdot 317 \cdot 331 \cdot 337 \cdot 487 \cdot 521^2 \cdot 601 \cdot 1201 \cdot 1279 \cdot 2557 \cdot 3169 \cdot 5113 \cdot 92737 \cdot 649657$	
P_8^2	$2^{47} \cdot 3^{26} \cdot 5^9 \cdot 7^{10} \cdot 11^4 \cdot 13^5 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31^3 \cdot 37^2 \cdot 43^2 \cdot 47 \cdot 61 \cdot 67^2 \cdot 71 \cdot 73 \cdot 79^2 \cdot 97 \cdot 109 \cdot 137 \cdot 157 \cdot 179 \cdot$	(1993) Helenius-Flammenkamp
-	$\cdot 241 \cdot 257 \cdot 281 \cdot 337 \cdot 379 \cdot 433 \cdot 521 \cdot 631 \cdot 673 \cdot 757 \cdot 821 \cdot 1123 \cdot 3221 \cdot 8209 \cdot 293459$	
P_8^3	$2^{62} \cdot 3^{20} \cdot 5^4 \cdot 7^9 \cdot 11^3 \cdot 13^5 \cdot 17 \cdot 19^4 \cdot 23^2 \cdot 29^2 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 61^3 \cdot 67 \cdot 71 \cdot 73 \cdot 79^2 \cdot 89 \cdot 127 \cdot 137 \cdot 151 \cdot$	(1993) Helenius-Flammenkamp
-	$\cdot 157 \cdot 191 \cdot 337 \cdot 409 \cdot 467 \cdot 487 \cdot 521 \cdot 547 \cdot 911 \cdot 1093 \cdot 1861 \cdot 2801 \cdot 36809 \cdot 92737 \cdot 368089 \cdot 649657$	-
P_8^4	$2^{69} \cdot 3^{23} \cdot 5^8 \cdot 7^9 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17^3 \cdot 19^5 \cdot 23 \cdot 29^2 \cdot 31^2 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43^2 \cdot 47 \cdot 67 \cdot 71 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83^2 \cdot 127^2 \cdot 167 \cdot 191 \cdot$	(1992) Helenius
-	$\cdot 271 \cdot 281 \cdot 331 \cdot 367 \cdot 463 \cdot 467 \cdot 631 \cdot 683 \cdot 829 \cdot 2801 \cdot 5419 \cdot 6481 \cdot 6829 \cdot 86171 \cdot 122921$	-
P_8^5	$2^{62} \cdot 3^{24} \cdot 5^4 \cdot 7^{11} \cdot 11^5 \cdot 13^5 \cdot 17^2 \cdot 19^4 \cdot 23 \cdot 29^3 \cdot 37^2 \cdot 43^2 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 61^2 \cdot 67 \cdot 71 \cdot 73 \cdot 79^2 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 127 \cdot 151 \cdot 157 \cdot$	(1993) Helenius-Flammenkamp
-	$\cdot 181 \cdot 211 \cdot 281 \cdot 307 \cdot 337 \cdot 373 \cdot 421 \cdot 487 \cdot 521 \cdot 631 \cdot 911 \cdot 8951 \cdot 92737 \cdot 391151 \cdot 649657$	-
P_8^6	$2^{62} \cdot 3^{24} \cdot 5^5 \cdot 7^8 \cdot 11^3 \cdot 13^3 \cdot 17^4 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 29^3 \cdot 31 \cdot 37^2 \cdot 43^2 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 61^2 \cdot 67 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 127^2 \cdot 211 \cdot$	(1992) Helenius
-	$\cdot 271 \cdot 281 \cdot 337 \cdot 373 \cdot 421 \cdot 487 \cdot 521 \cdot 631 \cdot 1063 \cdot 5419 \cdot 8951 \cdot 11093 \cdot 44371 \cdot 88741 \cdot 92737 \cdot 391151 \cdot 649657$	-
P_8^7	$2^{59} \cdot 3^{28} \cdot 5^7 \cdot 7^{10} \cdot 11 \cdot 13^4 \cdot 17 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31^2 \cdot 37^2 \cdot 41 \cdot 47^2 \cdot 59 \cdot 61^2 \cdot 67^2 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 97 \cdot 127 \cdot 151 \cdot 157 \cdot$	(1992) Helenius
-	$\cdot 181 \cdot 191 \cdot 281 \cdot 313 \cdot 331^3 \cdot 661 \cdot 751 \cdot 1123 \cdot 1321 \cdot 1889 \cdot 24977 \cdot 28537 \cdot 30941 \cdot 99907 \cdot 293459 \cdot 20381027$	-
P_8^8	$2^{71} \cdot 3^{21} \cdot 5^6 \cdot 7^{13} \cdot 11^7 \cdot 13^3 \cdot 17^2 \cdot 19^5 \cdot 23^2 \cdot 29^2 \cdot 31^3 \cdot 37^3 \cdot 43 \cdot 61 \cdot 67^2 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 107 \cdot 109 \cdot 113 \cdot 127 \cdot 131 \cdot 137 \cdot$	(1992) Helenius
-	$\cdot 173 \cdot 241 \cdot 257 \cdot 263 \cdot 307 \cdot 331 \cdot 433 \cdot 523 \cdot 661 \cdot 911 \cdot 2767 \cdot 3851 \cdot 4733 \cdot 7321 \cdot 19531 \cdot 38737$	-
P_8^9	$2^{59} \cdot 3^{22} \cdot 5^9 \cdot 7^{15} \cdot 11^5 \cdot 13^5 \cdot 17^3 \cdot 19^3 \cdot 23 \cdot 29^2 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43^2 \cdot 47 \cdot 61^2 \cdot 67 \cdot 71 \cdot 79^2 \cdot 97 \cdot 139 \cdot 151 \cdot 157 \cdot$	(1993) Helenius-Flammenkamp
-	$\cdot 181 \cdot 331^2 \cdot 367 \cdot 521 \cdot 601 \cdot 631 \cdot 661 \cdot 1201 \cdot 1321 \cdot 2617 \cdot 3613 \cdot 5233 \cdot 169553 \cdot 2384579 \cdot 1001523179$	-
P_8^{10}	$2^{58} \cdot 3^{26} \cdot 5^9 \cdot 7^{10} \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19^5 \cdot 23^2 \cdot 29 \cdot 31^2 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 71 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 109 \cdot 127 \cdot 137 \cdot$	(1992) Helenius
-	$\cdot 163 \cdot 227 \cdot 281 \cdot 331 \cdot 379 \cdot 433 \cdot 521 \cdot 757 \cdot 821 \cdot 1123 \cdot 3457 \cdot 8209 \cdot 22699 \cdot 136193 \cdot 145193 \cdot 179951 \cdot 293459 \cdot 3203431780337$	-
...	...	...

Números 9-Perfectos		
	Factorización	Fecha y Descubridor
P_9^1	$2^{104} \cdot 3^{43} \cdot 5^9 \cdot 7^{12} \cdot 11^6 \cdot 13^4 \cdot 17 \cdot 19^4 \cdot 23^2 \cdot 29 \cdot 31^4 \cdot 37^3 \cdot 41^2 \cdot 43^2 \cdot 47^2 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 71^3 \cdot 73 \cdot 79^2 \cdot 83 \cdot$	(1995) Helenius
-	$\cdot 89 \cdot 97 \cdot 103^2 \cdot 107 \cdot 127 \cdot 131^2 \cdot 137^2 \cdot 151^2 \cdot 191 \cdot 211 \cdot 241 \cdot 331 \cdot 337 \cdot 431 \cdot 521 \cdot 547 \cdot 631 \cdot 661 \cdot 683 \cdot 709 \cdot$	-
-	$\cdot 911 \cdot 1093 \cdot 1301 \cdot 1723 \cdot 2521 \cdot 3067 \cdot 3571 \cdot 3851 \cdot 5501 \cdot 6829 \cdot 6911 \cdot 8647 \cdot 17293 \cdot 17351 \cdot 29191 \cdot 30941 \cdot 45319 \cdot 106681 \cdot 110563 \cdot 122921 \cdot 152041 \cdot 570461 \cdot 16148168401$	-
P_9^2	$2^{139} \cdot 3^{43} \cdot 5^{20} \cdot 7^9 \cdot 11^6 \cdot 13^7 \cdot 17^2 \cdot 19^6 \cdot 23^3 \cdot 29 \cdot 31^3 \cdot 37^3 \cdot 41^2 \cdot 43^4 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 67 \cdot 71 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 97 \cdot$	(1993) Flammenkamp
-	$\cdot 103 \cdot 107 \cdot 109 \cdot 113 \cdot 127 \cdot 131 \cdot 137 \cdot 167 \cdot 191 \cdot 193 \cdot 223 \cdot 257 \cdot 281 \cdot 307 \cdot 331 \cdot 379 \cdot 431 \cdot 467 \cdot 643 \cdot 661 \cdot 683 \cdot 701 \cdot$	-
-	$\cdot 1039 \cdot 1499 \cdot 1723 \cdot 2801 \cdot 3067 \cdot 3851 \cdot 5501 \cdot 6829 \cdot 11807 \cdot 14281 \cdot 19531 \cdot 45319 \cdot 70841 \cdot 86171 \cdot 122921 \cdot 519499 \cdot 570461 \cdot 583367 \cdot 3500201 \cdot 7416361 \cdot 23696191 \cdot 47392381$	-
...	...	...

En las dos últimas tablas se han introducido pocos ejemplos, al igual que se han omitido las tablas referentes a los 10-perfectos y 11-perfectos, debido al gran tamaño que presentan los números y la imposibilidad física de seguirlos añadiendo a la tabla; aún así con la gran cantidad de ejemplos dados queda patente la gran cantidad existente de ellos.
En la siguiente tabla se indica, cuantos números de cada uno de estos tipos se espera que haya en total, tal y como indica [11]. Aunque esto solo es la suposición de su autor, puesto que no hay nada que pruebe que esas cantidades sean ciertas. Es más, hay ciertas referencias bibliográficas como [30], donde se le critica al autor por hacer dicha suposición. Aun así, su suposición es la siguiente.

Cantidad esperada de cada P_i				
P_2	∞		P_7	515(aprox.)
P_3	6		P_8	1140(aprox.)
P_4	36		P_9	2200(aprox.)
P_5	65		P_{10}	4500(aprox.)
P_6	245		P_{11}	10000(aprox.)

Capítulo 4 Las medias pitagóricas.

Toda la información relativa a este capítulo se ha obtenido de [37].
En las siguientes páginas se tratan 3 medias distintas, las *medias pitagóricas*, conocidas así desde la antigüedad. Dicho nombre es debido a sus descubridores, la escuela pitagórica.
En matemáticas se entiende por media la medida de una tendencia central, o equivalentemente, es el número situado hacia el centro de una distribución de valores dados.
La primera de ellas se denomina media aritmética, y se define de la siguiente manera.

Definición 50. *Sea n y cada x_i con $i = 1, \dots, n$, números enteros. Se define la media aritmética de $x_1, \dots, x_n$ como*

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}. \tag{4.1}$$

Nota 1. *Esta media es la más conocida de todas, por su enorme uso en casi cualquier campo de estudio, como pueden ser la economía, la medicina o cualquier rama de las ciencias.*

La siguiente media que se trata es la denominada media geométrica, que se define a continuación.

Definición 51. *Sea n y cada x_i con $i = 1, \dots, n$, números enteros. Se define la media geométrica de $x_1, \dots, x_n$ como*

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}. \tag{4.2}$$

Nota 2. *Esta media se diferencia de la aritmética, en el uso del producto frente al de la suma. Se suele utilizar principalmente en ámbitos financieros, y presenta ciertas ventajas frente a la media aritmética, como pueden ser: considerar todos los valores de la distribución y ser menos sensible a valores extremos. Pero, en contraposición tenemos que si algún valor de los x_i es 0, la media se anula.*

La tercera y última media pitagórica es la denominada media armónica. De entre las tres, esta es la más utilizada en nuestro trabajo por su estrecha relación con los números armónicos de Ore, que se trabajarán en el siguiente capítulo. Se comienza aportando su definición.

Definición 52. *Sea n y cada x_i con $i = 1, \dots, n$, números enteros. Se define la media armónica de $x_1, \dots, x_n$ como*

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = n \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}. \tag{4.3}$$

Nota 3. *Esta media se puede entender también como el recíproco de la media aritmética de los recíprocos valores observados. En la siguiente proposición se esclarece este concepto.*

Proposición 53. *Sean n y los $x_1, x_2, \dots, x_n$ números enteros, se tiene que*

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{H\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}\right)}.$$

`Demostración:` Una vez conocidas las definiciones de las medias es inmediato comprobar este hecho. Se tiene

$$H\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}\right) = \frac{n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n},$$

por tanto

$$\frac{1}{H\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}\right)} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = A(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

□

Nota 4. *Como curiosidad, el músico italiano Saverio Mattei (1742-1795) dedicó gran parte de su vida al estudio de la comprensión de la música como una ciencia exacta para los pitagóricos. Afirmó que esta media recibe el nombre de armónica por ser descubierta a partir de los intervalos musicales. Esta curiosidad histórica se ha tomado de [10].*

Presentamos un lema, que se utiliza en la demostración del siguiente teorema.

Lema 54. *Sea $x > 0$, entonces $2 \leq x + \frac{1}{x}$.*

`Demostración:` Se define la función $f(x) = x + \frac{1}{x}$ y se comprueba su crecimiento y el comportamiento en sus extremos. Se puede apreciar con cierta facilidad que $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, y por consiguiente basta con estudiar la función en los casos $x \geq 1$.
Ya que si se toma un valor para x entre $(0, 1)$, como por ejemplo el $\frac{1}{4}$, sin pérdida de generalidad, se tiene

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(\frac{1}{\frac{1}{4}}\right) = f(4),$$

y por tanto el valor ya está comprendido en los valores de $x \geq 1$.
A continuación, se calcula que valor toma la función con el x más pequeño posible, $x = 1$,

$$f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2.$$

Si se deriva se observa que

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}, \text{ para todo } x \geq 1.$$

Como $f'(x) > 0$, para todo $x \geq 1$, se tiene que f es una función creciente en el intervalo $(1, +\infty)$ y por tanto, $2 = f(1) \leq f(x) = x + \frac{1}{x}$, en dicho intervalo.
Tal y como se quería probar.

□

Teorema 55. *Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$, números enteros mayores que 0, se tiene*

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq A(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{4.4}$$

`Demostración:` Se tiene que probar que $H(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o lo que es equivalente

$$\frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Para facilitar las cuentas, se van a agrupar las n y los x_i a ambos lados de la desigualdad, de modo que

$$n^2 \leq (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right). \tag{4.5}$$

Se aprecia en el lado derecho de la desigualdad que todos los productos del tipo $x_i \cdot \dfrac{1}{x_i}$ tienen como resultado 1, y de los cuales hay n productos. Tras agrupar el resto de términos por parejas, se obtiene la siguiente expresión que es igual a (4,5)

$$n + \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1}{x_3} + \ldots + \frac{x_1}{x_n} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_2}{x_n} + \ldots + \frac{x_n}{x_1} + \frac{x_n}{x_2} + \ldots + \frac{x_n}{x_{n-1}}\right) =$$

$$n + \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right) + \left(\frac{x_1}{x_3} + \frac{x_3}{x_1}\right) + \ldots + \left(\frac{x_1}{x_n} + \frac{x_n}{x_1}\right) + \left(\frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_2}\right) + \ldots + \left(\frac{x_2}{x_n} + \frac{x_n}{x_2}\right) + \ldots + \left(\frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_{n-1}}\right) =$$

$$= n + \sum_{i<j}^{n} \left(\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i}\right),$$

luego

$$n^2 \leq (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) = n + \sum_{i<j}^{n} \left(\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i}\right).$$

Y por tanto

$$n^2 \leq n + \sum_{i<j}^{n} \left(\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i}\right).$$

Por nociones básicas de combinatoria existen $\binom{n}{2}$ combinaciones distintas de $\dfrac{x_i}{x_j}$, y aplicando el Lema 54. se tiene que $\left(\dfrac{x_i}{x_j} + \dfrac{x_j}{x_i}\right) \geq 2$ en cada caso, luego

$$n + \sum_{i<j}^{n} \left(\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i}\right) \geq n + \left(2 \cdot \frac{n(n-1)}{2}\right) = n + (n(n-1)) = n + n^2 - n = n^2$$

Se ha obtenido que $n + \sum_{i<j}^{n} \left(\dfrac{x_i}{x_j} + \dfrac{x_j}{x_i}\right)$, es tanto, $n + \sum_{i<j}^{n} \left(\dfrac{x_i}{x_j} + \dfrac{x_j}{x_i}\right) \leq n^2$, como $n + \sum_{i<j}^{n} \left(\dfrac{x_i}{x_j} + \dfrac{x_j}{x_i}\right) \geq n^2$, por consiguiente se tiene que dar la igualdad, y la expresión (4,5), es cierta.

$\square$

Por último se va a dar una cota para la media armónica, que no dependan de otras medias.

Proposición 56. *Sean $x_1, \ldots, x_n$ números enteros positivos, se tiene la siguiente acotación*

$$min(x_1, \ldots, x_n) \leq H(x_1, \ldots, x_n) \leq n \cdot min(x_1, \ldots, x_n),$$

donde min hace referencia al elemento mínimo del conjunto.

`Demostración:` Se comienza con el lado izquierdo de la acotación.
Se quiere ver que $min(x_1, \ldots, x_n) \leq H(x_1, \ldots, x_n)$, para ello se supone sin pérdida de generalidad que $min(x_1, \ldots, x_n) = x_1$, por consiguiente

$$x_1 \leq \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}}.$$

Se sitúan todos los términos x_i en el mismo lado de la desigualdad

$$x_1 \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} \right) \leq n.$$

El primer término va a ser 1, puesto que $\dfrac{x_1}{x_1} = 1$, pero el resto de términos son menores que 1, ya que al ser x_1 el mínimo, $x_1 \leq x_i$ para todo $i = 2, \ldots, n$, luego $\dfrac{x_1}{x_i} \leq 1$ y por tanto es cierta la primera desigualdad.
En el lado derecho de la desigualdad se tiene que probar $H(x_1, \ldots, x_n) \leq n \cdot min(x_1, \ldots, x_n)$ o lo que es equivalente,

$$\frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}} \leq n \cdot x_1,$$

de nuevo agrupando las n y los x_i a cada lado de la desigualdad se obtiene

$$\frac{n}{n} \leq x_1 \cdot \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n},$$

o lo que es equivalente

$$1 \leq 1 + \frac{x_1}{x_2} + \ldots + \frac{x_1}{x_n},$$

y como cada $\frac{x_1}{x_i} > 0$, se tiene que la desigualdad es cierta.

□

Este resultado, ha servido para concluir el tema. Cabe destacar que este tema no es más que una mera herramienta para el siguiente tema, ya que este va a tratar de los números armónicos de Ore, los cuales se fundamentan en el concepto de media armónica.

Capítulo 5 Los números armónicos de Ore.

En este capítulo se tratan los denominados *números armónicos de Ore* y algunas de sus propiedades. Antes de empezar con ellos, se realizará una breve aclaración para evitar futuras confusiones.
Cuando en este capítulo se hable de números armónicos, estos no se van a referir a los números procedentes de la conocida suma armónica, que no es otra que la siguiente:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n},$$

donde si se empieza por $n = 1$, se tiene que los primeros valores son: $1, \frac{3}{2}, \frac{21}{6}, \frac{25}{12}, \ldots$

Cabe destacar de esta serie su gran utilidad en matemáticas a lo largo de la historia. En 1773, L.Euler utilizó la divergencia de esta serie para probar que existen infinitos números primos, y años más tarde, en 1859, B. Riemann amplió este trabajo y enunció la famosa hipótesis de Riemann.
Con estos simples ejemplos, se aprecia la trascendencia de esta serie y los números que produce, pero recordamos que este tema no va a tratar de ellos. De aquí en adelante cuando se use el término *números armónicos*, hará referencia a los de Ore y no a los aquí mencionados.
La primera vez que se mencionó este tipo de números, los armónicos de Ore, fue en 1948 por O. Ore en su artículo [22]. Esta breve introducción aclaratoria se ha tomado de [37].

5.1 Las medias pitagóricas de divisores de un número y primeros resultados

Se va a comenzar esta sección dando notación para las medias pitagóricas de los divisores de un número, obtenidas de [22].

Sea n un número entero positivo. Se denota por $A(n)$ la media aritmética de los divisores de n y su valor es

$$A(n) = \frac{\sigma(n)}{\tau(n)}. \tag{5.1}$$

De el mismo modo se denota por $G(n)$ la media geométrica de los divisores de n y tiene por valor

$$G(n) = \sqrt[\tau(n)]{\prod_{d|n} d} = \sqrt{n}. \tag{5.2}$$

Nota 1. *Esta última media solo toma valores enteros cuando n se trata de un cuadrado, lo que hace que dicha media carezca de interés.*

Por último se trata la media más importante de este capítulo, la media armónica de los divisores de un número entero. Se denota por $H(n)$ y se tiene que

$$H(n) = \frac{\tau(n)}{\sum_{d|n} \frac{1}{d}},$$

teniendo en cuenta que

$$n\sum_{d|n} \frac{1}{d} = \sum_{d|n} \frac{n}{d} = \sum_{d|n} d = \sigma(n),$$

se tiene

$$\sum_{d|n} \frac{1}{d} = \frac{\sigma(n)}{n}.$$

Una vez dadas estas expresiones, estamos en virtud de enunciar el siguiente lema.

Lema 57. *Sea n un número entero positivo. La media armónica de los divisores de n tiene por valor*

$$H(n) = \frac{n\tau(n)}{\sigma(n)}. \tag{5.3}$$

Nota 2. *Se observa con facilidad que combinando las formulas se obtiene:*

$$A(n) \cdot H(n) = \frac{\sigma(n)}{\tau(n)} \cdot \frac{n\tau(n)}{\sigma(n)} = n = G(n)^2 \tag{5.4}$$

Lo que se puede entender como: "La media geométrica de los divisores es la media geométrica de las medias aritmética y armónica de los divisores". Dicha nota se ha tomado de [4].

Proposición 58. *Sea n y m números enteros positivos, con $m.c.d(n,m) = 1$. Se tiene que*

$$H(nm) = H(n)H(m). \tag{5.5}$$

`Demostración:` *Por el lema 57. se tiene*

$$H(nm) = \frac{nm\tau(nm)}{\sigma(nm)}.$$

Por hipótesis sabemos que $m.c.d(n,m) = 1$, luego $\sigma(nm) = \sigma(n)\sigma(m)$ y $\tau(nm) = \tau(n)\tau(m)$, por tanto

$$H(nm) = \frac{nm\tau(nm)}{\sigma(nm)} = \frac{nm\tau(n)\tau(m)}{\sigma(n)\sigma(m)} = \frac{n\tau(n)}{\sigma(n)}\frac{m\tau(m)}{\sigma(m)} = H(n)H(m).$$

□

A partir de el lema 57., se definen los números armónicos de Ore, la pieza de estudio fundamental del capítulo.

Definición 59. *Sea n un número entero positivo, se dice que n es un número armónico de Ore, si $H(n)$ es un valor entero.*

Se comenzará enunciando dos resultados, los cuales indican cuándo un número n no puede ser un número armónico. La información de ambos resultados, con sus respectivas pruebas, ha sido obtenida de [22].

Proposición 60. *Sea n un número entero y positivo, con la siguiente descomposición*

$$n = p^{\alpha},$$

con p primo. En este caso, n nunca es un número armónico

`Demostración:` Sea $n = p^{\alpha}$, luego las funciones $\sigma(n)$ y $\tau(n)$ toman los siguientes valores

$$\tau(n) = (\alpha + 1)$$
$$\sigma(n) = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1} = p^{\alpha} + p^{\alpha-1} + \ldots + p + 1,$$

por tanto, la media armónica es

$$H(n) = \frac{n\tau(n)}{\sigma(n)} = \frac{p^{\alpha}(\alpha + 1)}{p^{\alpha} + p^{\alpha-1} + \ldots + p + 1}.$$

Como $m.c.d(p^{\alpha}, p^{\alpha} + p^{\alpha-1} + \ldots + p + 1) = 1$ y $(\alpha + 1) < p^{\alpha} + p^{\alpha-1} + \ldots + p + 1$, el denominador no se simplifica, y por consiguiente, la media armónica nunca es entera, luego n no puede ser un número armónico.

□

Proposición 61. *Sea n un número entero positivo, con la siguiente descomposición en factores primos*

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$$

con $p_i < p_{i+1}$, para todo $i = 1, 2, \ldots, r - 1$.
Salvo para $n = 6$, n nunca es un número armónico.

`Demostración:` Sea n un número natural con la siguiente descomposición en primos distintos

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r, \quad p_i < p_{i+1},$$

se tiene por tanto, que las funciones aritméticas toman los siguientes valores

$$\tau(n) = (e_1 + 1)(e_2 + 1) \ldots (e_r + 1) = 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^r$$
$$\sigma(n) = \frac{p_1^{e_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{e_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_r^{e_r+1} - 1}{p_r - 1} = \frac{p_1^2 - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^2 - 1}{p_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_r^2 - 1}{p_r - 1} =$$
$$= (p_1 + 1) \cdot (p_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (p_r + 1),$$

luego la media armónica es

$$H(n) = \frac{n\tau(n)}{\sigma(n)} = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r \cdot 2^r}{(p_1 + 1) \cdot (p_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (p_r + 1)},$$

con $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$.
A partir de este punto, se diferencian dos casos, cuando n es impar, y cuando no.
Suponemos que n es impar, luego se puede re-expresar $H(n)$ como

$$H(n) = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r}{\frac{p_1 + 1}{2} \cdot \frac{p_2 + 1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{p_r + 1}{2}} \tag{5.6}$$

Se tiene que el denominador contiene r factores, pero entre ellos no se encuentra el valor p_r, luego el cociente no puede ser un valor entero.
Se procede con el otro caso, para ello se supone que $p_1 = 2$, y por tanto

$$H(n) = \frac{n\tau(n)}{\sigma(n)} = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r \cdot 2^r}{(p_1+1)\cdot(p_2+1)\cdot\ldots\cdot(p_r+1)} = \frac{2 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r \cdot 2^r}{3\cdot(p_2+1)\cdot\ldots\cdot(p_r+1)} =$$

$$= \frac{2^{r+1} \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r}{3\cdot(p_2+1)\cdot\ldots\cdot(p_r+1)} = \frac{4 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r}{3 \cdot \frac{p_2+1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{p_r+1}{2}}.$$

Y esta expresión solo puede ser entera si $p_2 = 3$, luego

$$H(n) = \frac{4 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r}{3 \cdot \frac{p_2+1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{p_r+1}{2}} = \frac{2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_r}{\frac{p_3+1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{p_r+1}{2}},$$

con $p_3 < p_4 < \ldots < p_r$.
De nuevo, se sabe que hay $r-2$ factores en el denominador, pero ninguno de ellos coincide con p_r, luego se concluye que cada uno de ellos debe ser igual a uno de los factores primos del numerador.
Pero la suposición

$$\frac{p_3+1}{2} = 2$$

ya estaba descartada, puesto que dicha igualdad fuerza a $p_3 = 3$, pero $p_2 = 3$, luego $p_3 \geq 5$, lo que forzaría dos situaciones:

- $\frac{p_3+1}{2}$ tiene un factor primo impar menor que p_3, por lo que no simplifica el numerador.
- $\frac{p_3+1}{2} = 2^t$ con $t \geq 2$, pero en este caso tampoco se simplificaría con el numerador.

Por tanto, $H(n)$ no puede tomar valores enteros y n no puede ser un número armónico.

□

5.1.1. Relación entre números armónicos de Ore y los números perfectos-multiperfectos

Una vez vistos estos primeros resultados, en los que n no puede ser un número armónico, se va a relacionar los números armónicos con los conceptos ya vistos en este trabajo anteriormente, los números perfectos y multiperfectos.
Aunque antes se presenta un lema que va a ser de utilidad en las siguientes pruebas.

Lema 62. *Sea n un número perfecto impar, con la siguiente factorización*

$$n = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{s_r},$$

donde los p_i son primos impares distintos. Entonces algún exponente s_i es impar. Equivalentemente, n no es un cuadrado.

`Demostración:` Reducción al absurdo.
Suponemos que todos los exponentes s_i son pares, luego

$$\sigma(n)=\frac{p_1^{s_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\ldots\cdot\frac{p_1^{s_r+1}-1}{p_r-1}=(p_1^{s_1}+p_1^{s_1-1}+\ldots+p_1+1)\cdot\ldots\cdot(p_r^{s_r}+p_r^{s_r-1}+\ldots+p_r+1).$$

Donde cada $(p_i^{s_i}+p_i^{s_i-1}+\ldots+p_i+1)$ es un valor impar, por ser la suma de s_i+1 valores impares. Luego $\sigma(n)$ es un valor impar, pero por ser n perfecto, se tendría que tener $\sigma(n)=2n$, luego es un absurdo.

□

El siguiente resultado se ha tomado de [22].

Proposición 63. *Sea n un número perfecto, entonces n es un número armónico.*

`Demostración:` Sea n un número perfecto, luego $\sigma(n)=2n$. Si se aplica esta igualdad, a la definición de media armónica se obtiene

$$H(n)=\frac{n\tau(n)}{\sigma(n)}=\frac{n\tau(n)}{2n}=\frac{\tau(n)}{2}.$$

Al mismo tiempo, por ser también n un número perfecto, se sabe que es del siguiente tipo, $n=2^\alpha\cdot p$, con α y p primos con $m.c.d(2^\alpha,p)=1$, por tanto

$$\tau(n)=\tau(2^\alpha\cdot p)=\tau(2^\alpha)\cdot\tau(p)=(\alpha+1)\cdot 2,$$

luego

$$H(n)=\frac{\tau(n)}{2}=\frac{2(\alpha+1)}{2}=\alpha+1,$$

y se tiene que $H(n)$ es un entero.
Quedaría estudiar el caso de que n sea un número perfecto impar, donde uno de los exponentes en la descomposición en factores primos es impar, por el lema 62., luego $\tau(n)$ es par en ese caso también, y por tanto $H(n)$ tendría un valor entero y n sería un numero armónico.

□

Las dos siguientes proposiciones siguen profundizando en la relación que existe entre los números perfectos y armónicos. Ambos resultados, junto con el lema que se sitúa entre ambos, ha sido tomado de [4].

Proposición 64. *Sea $n=2^{a-1}(2^a-1)$ un número perfecto par, entonces $H(n)=a$.*

`Demostración:` Sea n un número perfecto, luego $\sigma(n)=2n$. Por ser perfecto también se tiene, $n=2^\alpha p$ con α y p primos, y por la proposición anterior se sabe que

$$H(n)=\alpha+1.$$

En nuestro caso se tiene que $n=2^{a-1}p$, con $p=2^a-1$, luego se tiene

$$H(n)=\alpha+1=(a-1)+1=a$$

□

Antes de proseguir con la siguiente proposición, se enuncia un lema, que trata una serie de desigualdades, las cuales serán útiles más adelante en diversas demostraciones.

Lema 65. *Sean p y q primos, se establece la siguiente notación:*

$$S(n) = \frac{\sigma(n)}{n}, \tag{5.7}$$

teniendo que

$$\lim_{b\to\infty} S(p^b) = \lim_{b\to\infty} \frac{p^{b+1}-1}{p^b(p-1)} = \frac{p}{p-1} = S(\bar{p}).$$

Entonces si $1 < p < q$, $1 < a < b$, y $c \geq 1$ se tiene que

$$1 < S(q^a) < S(q^b) < S(\bar{q}) = \frac{q}{q-1} \leq \frac{p+1}{p} = S(p) \leq S(p^c). \tag{5.8}$$

`Demostración:` Vamos a probar una a una las desigualdades de (5.8).

(a). $1 < S(q^a)$
Por hipótesis se sabe que $q > 1$, luego $q^a > 1$, y por tanto $q^{a+1} - q^a < q^{a+1} - 1$.
Utilizando estas desigualdades se tiene que

$$1 < \frac{q^{a+1}-1}{q^{a+1}-q^a} = \frac{q^{a+1}-1}{q^a(q-1)} = \frac{\sigma(q^a)}{q^a} = S(q^a).$$

(b). $S(q^a) < S(q^b)$
Se tiene que $S(q^a) = \dfrac{\sigma(q^a)}{q^a}$ con

$$\frac{\sigma(q)}{q} = \frac{q^2-1}{q(q-1)} = \frac{q+1}{q} > 1.$$

Al mismo tiempo se tiene

$$S(q^a) = \frac{\sigma(q^a)}{q^a} = \frac{\sigma(q)\sigma(q)\ldots\sigma(q)}{q^a} = \frac{\sigma(q)}{q}\frac{\sigma(q)}{q}\ldots\frac{\sigma(q)}{q} = \left(\frac{\sigma(q)}{q}\right)^a,$$

y como $\dfrac{\sigma(q)}{q} > 1$ con $a < b$ se concluye que

$$\left(\frac{\sigma(q)}{q}\right)^a < \left(\frac{\sigma(q)}{q}\right)^b.$$

(c). $S(q^b) < S(\bar{q})$
Este caso es siempre cierto por el hecho de que $S(\bar{q})$ es el límite cuando $b \to \infty$ de $S(q^b)$.

(d). $S(\bar{q}) \leq S(p)$
En este caso, se debe probar lo siguiente

$$S(\bar{q}) = \frac{q}{q-1} \leq \frac{p+1}{p} = S(p),$$

o equivalentemente
$$pq \leq (p+1)(q-1).$$
Si ahora se expande el lado derecho se obtiene
$$pq \leq (p+1)(q-1) = pq - p + q - 1.$$
A continuación, se sitúan los factores de grado 2 a un lado de la desigualdad, y los de grado 1 al otro, obteniendo
$$pq - pq \leq -p + q - 1,$$
o lo que es lo mismo
$$0 \leq -p + q - 1.$$
Si se suma $p+1$ a ambos lados de la desigualdad se tiene que
$$p + 1 \leq q,$$
es la expresión equivalente a probar. La cual sabemos que es cierta por hipótesis, ya que $p < q$.

(e). $S(p) \leq S(p^c)$
Como en el caso (b) se tiene
$$S(p^c) = \left(\frac{\sigma(p)}{p}\right)^c$$
con $\dfrac{\sigma(p)}{p} > 1$. Una vez conocidas estas expresiones es inmediato puesto que
$$\left(\frac{\sigma(p)}{p}\right) \leq \left(\frac{\sigma(q)}{q}\right)^c$$
por ser $c \geq 1$, tal y como se quería probar.

□

Una vez concluido este lema, se enuncia la última proposición que relaciona números armónicos con números perfectos. Para ello, se introduce una nueva notación.

Nota 3. *Se denota por $\omega(n)$, el número de factores primos distintos de n.*

Teorema 66. *Si n es un número armónico con $H(n) = p$, siendo p un primo, entonces $p \mid n$ ó n es perfecto.*

`Demostración:` Para realizar esta demostración se van a calcular dos cotas para $\tau(n)$.
Se tiene que $H(n)\sigma(n) = n\tau(n)$, y como por hipótesis $H(n) = p$, se tiene que $p \mid n\tau(n)$. Se va a suponer que $p \mid \tau(n)$, entonces $q^{p-1} \mid n$, para algún primo q y por tanto $n = q^{p-1} \cdot h$, con $m.c.d(q^{p-1}, h) = 1$. Se tiene que n posee $\omega(n)$ divisores primos distintos, luego
$$h = \frac{n}{q^{p-1}},$$
tiene $\omega(n) - 1$ divisores primos distintos.
Por consiguiente $\tau(h) \geq 2^{\omega(n)-1}$ y por tanto
$$\tau(n) = \tau(q^{p-1} \cdot h) = \tau(q^{p-1})\tau(h) = p\tau(h) \geq p \cdot 2^{\omega(n)-1},$$

luego
$$\tau(n) \geq p \cdot 2^{\omega(n)-1}.$$
A continuación se procede con la otra cota.
Se supone que n tiene una descomposición como anteriormente
$$n = \prod_{i=1}^{\omega(n)} p_i^{a_i}.$$
Además $p_i \geq i+1$, dándose solo la igualdad en los dos primeros casos p_1 y p_2, mientras que en todos los demás es siempre $p_i > i+1$. Por consiguiente, se tiene que para todo i
$$\tau(n) = H(n)S(n) = p \prod_{i=1}^{\omega(n)} S(p_i^{a_i}),$$
ahora utilizando el lema 5.8
$$p \prod_{i=1}^{\omega(n)} S(p_i^{a_i}) < p \prod_{i=1}^{\omega(n)} \frac{p_i}{p_i - 1},$$
y finalmente, haciendo uso de la condición $p_i \geq i+1$ se tiene
$$\tau(n) < p \prod_{i=1}^{\omega(n)} \frac{p_i}{p_i - 1} \leq p \prod_{i=1}^{\omega(n)} \frac{i+1}{i} = p(\omega(n)+1),$$
luego
$$\tau(n) < p(\omega(n)+1).$$
Haciendo uso de ambas desigualdades, se tiene
$$2^{\omega(n)-1} p \leq \tau(n) < p(\omega(n)+1)$$
lo que fuerza la siguiente desigualdad
$$2^{\omega(n)-1} p < p(\omega(n)+1)$$
Pero esta desigualdad solo es cierta para $\omega(n) < 3$, por consiguiente, $p \mid n$ cuando $\omega(n) \geq 3$.
Queda probar que n es perfecto cuando $\omega(n) < 3$. Para ello se diferencian casos, sabiendo que el número de primos distintos en la descomposición de n no puede ser mayor que 3, al tener $\omega(n) < 3$.
Se diferencian los siguientes casos:

- Sea n con alguna de las dos siguientes descomposiciones sin perdida de generalidad, $n = p_1$ ó $n = p_1 p_2$ con $p_1 \neq p_2$. Por hipótesis se tiene que n es un número armónico, luego aplicando la proposición 61., se tiene que n solo puede ser 6, el cual es un número perfecto.

- Sea n con la siguiente descomposición, $n = p_1^{a_1}$, con p_1 primo y a_1 un entero positivo, pero aplicando la proposición 60., se sabe que n no puede ser un número armónico, luego este caso queda descartado.

- Por último tenemos que n tenga una descomposición del tipo $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2}$, se sabe por el artículo publicado por C. Pomerance,[23], que todos los números armónicos con ese tipo de factorización son siempre numeros perfectos.

Finalmente, se ha probado que en todos los casos que es posible que n sea un número armónico, también es un número perfecto, tal y como se quería probar.

□

Una vez concluidos los resultados relacionados con números perfectos, se va a enunciar la relación entre números armónicos y números multiperfectos.

Proposición 67. *Sea n un número multiperfecto de multiplicidad k. Se tiene que si $k \mid \tau(n)$, entonces n es armónico.*

`Demostración:` Se tiene que n es un número multiperfecto de multiplicidad k, luego $\sigma(n) = kn$. Por tanto

$$H(n) = \frac{n\tau(n)}{\sigma(n)} = \frac{n\tau(n)}{nk} = \frac{\tau(n)}{k}.$$

Solo cuando $k \mid \tau(n)$, $H(n)$ es un entero y equivalentemente n un número armónico.

□

Este último resultado tiene consecuencias lo suficientemente interesantes como para ser comentadas. Se puede extraer, por tanto, de este resultado las siguientes conclusiones:

- Los números multiperfectos de multiplicidad 3 son también armónicos cuando alguno de sus factores primos tiene un exponente, el cual si se le suma una unidad es múltiplo de 3.
  Si se consulta en la tabla de los números 3-perfectos, se aprecia que solo hay tres valores que cumplan esta condición:

$$\begin{aligned} P_3^2 &= 2^5 \cdot 3 \cdot 7, &\quad \text{con } H(P_3^2) = 8 \\ P_3^4 &= 2^8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73, &\quad \text{con } H(P_3^4) = 96 \\ P_3^6 &= 2^{14} \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 151, &\quad \text{con } H(P_3^6) = 160, \end{aligned}$$

  y todos ellos son armónicos también. Cabe destacar que estos son los únicos números armónicos y 3-perfectos, puesto que hasta la fecha no se han descubierto más que los 6 que aparecen en la tabla.

- Con los números 4-perfectos, se opera del mismo modo. En este caso, basta con encontrar dos factores primos con exponente 1, para que $\tau(n)$ sea múltiplo de 4.
  En este caso tenemos que los 36 elementos que aparecen en la tabla de los números 4-perfectos lo cumplen, por tanto todos ellos son números armónicos.
  Al igual que en el caso anterior, hasta la fecha no se han descubierto más números multiperfectos que los 36 que aparecen en la tabla, por tanto es bastante reseñable que todos los números 4-perfectos sean también números armónicos.
  De ahí que se pueda realizar la siguiente conjetura:

  Todos los números 4-perfectos son armónicos.

- También hay varios números 5-perfectos armónicos. De nuevo, buscando en la tabla de los números 5-perfectos factores primos con exponentes: 4, 9, 14, 19, 24, ...; se tienen

$$P_5^1, P_5^4, P_5^{13}, P_5^{18}, P_5^{19}, P_5^{20}, P_5^{23}, P_5^{25}, P_5^{32}, P_5^{33}, P_5^{34}, P_5^{39}, P_5^{40}.$$

  Estos no son todos los números 5-perfectos que también son armónicos, puesto que en la tabla no se han introducido todos los valores existentes.

- Los números 6-perfectos que se indican como armónicos no van a ser la totalidad de ellos, como paso en el caso anterior, puesto que en las tablas no se encuentran todos ellos.
  En el caso de los 6-perfectos, se tiene que todos los elementos presentes en su tabla correspondiente son armónicos, salvo los valores $P_6^{12}, P_6^{19}, P_6^{20}$, que no lo son.

- Con los 7-perfectos, se tiene que son armónicos los siguientes valores

$$P_7^5, P_7^6, P_7^8, P_7^9, P_7^{10}, P_7^{12}, P_7^{13}, P_7^{14}, P_7^{15}, P_7^{16}, P_7^{18}, P_7^{20}.$$

  En el resto de casos que se dejan sin tratar, se procede de manera análoga.
  Como acabamos de ver, una gran cantidad de números multiperfectos son armónicos. Se tiene que todos los 2-perfectos y 4-perfectos conocidos son armónicos, la mitad de los 3-perfectos también los son, y en el resto de casos, sin tener demasiados valores introducidos en las tablas, podemos apreciar como la gran mayoría de los 6-perfectos y 7-perfectos también lo son. Esto hace que se aprecie a simple vista la gran relación existente entre ambos conceptos, es más, a continuación veremos como estas implicaciones no quedan solo aquí, sino que también los números armónicos impares y los números perfectos impares están estrechamente relacionados.

5.2 Números armónicos de Ore impares

Al igual que en el resto de números que se han tratado en este trabajo, se estudia la posibilidad de que estos números sean impares. La mayor parte de la información de esta sección se ha tomado de [6].
Hasta la fecha como en el resto de casos, no se ha podido encontrar ningún número armónico impar, aunque este sigue siendo un problema abierto, puesto que tampoco ha sido posible probar su no existencia. Ore conjeturó que el único numero impar armónico es el 1.

Como ya se ha visto en la proposición 63., todo número perfecto es un número armónico, por tanto, si se consiguiese probar la no existencia de los números armónicos impares, se probaría que no existiría números perfectos impares.
Actualmente se han comprobado valores hasta la cifra de 10^{24} por los investigadores G. L. Cohen y R. M. Sorli, sin conseguir ningún resultado satisfactorio.

En esta sección se dan algunos resultados con ciertas condiciones, que en caso de existir dicho tipo de números, deberán cumplir.
Aunque antes de comenzar con ellas se va a dar un resultado respectivo a números impares, cuya prueba se puede consultar en [6].

Proposición 68. *Si n es un número natural, con $n > 10^6$ e impar, entonces $\tau(n) \leq \sqrt[3]{n}$.*

A continuación, los resultados propios de números armónicos impares.

Proposición 69. *Si n es un número armónico impar, entonces $\tau(n) \leq \sqrt[3]{n}$.*

`Demostración:` Este resultado es directo por la proposición anterior, sabemos que si n es impar y mayor que 10^6, se tiene que $\tau(n) \leq \sqrt[3]{n}$.
Y por las comprobaciones hechas por Cohen y Sorli se sabe que no hay números armónicos impares menores que 10^{24}, por tanto tiene que ser mayor que 10^6 y consecuentemente $\tau(n) \leq \sqrt[3]{n}$.

□

Nota 4. *Se denota por $p^a \parallel n$, cuando se cumpla que $p^a \mid n$, pero $p^{a+1} \nmid n$. A p^a se le denomina componente de n.*

Proposición 70. *Si n es un número armónico impar con $p^a \parallel n$, siendo a un entero positivo y p un primo, se cumple que $n > p^{\frac{3a}{2}}$.*

`Demostración:` Se asume que $p^a \parallel n$, luego $p^a \mid n$ y por tanto $n = p^a \cdot h$ con $m.c.d(p^a, h) = 1$. Por consiguiente se tiene que

$$H(n)\sigma(p^a h) \mid n\tau(n),$$

luego

$$\sigma(p^a) \mid n\tau(n).$$

Como $p^a \mid n$, esto implica que $p^a \mid n\tau(n)$.
Juntando ambos hechos se tiene que $p^a\sigma(p^a) \mid n\tau(n)$, con $m.c.d(p^a, \sigma(p^a)) = 1$. Usando ahora la proposición 69. se tiene

$$n\sqrt[3]{n} \geq n\tau(n) \geq p^a\sigma(p^a) > p^{2a},$$

por tanto

$$n^{\frac{4}{3}} > p^{2a},$$

y finalmente

$$n > p^{\frac{3a}{2}}.$$

□

Proposición 71. *Sea n un número armónico impar con $p^a \parallel n$, entonces $p^a \equiv 1 \pmod 4$.*

La prueba se puede consultar en [14, Teorema 2.5], o la proporcionada por Mariano García en, [12, Teorema 2].

La información mostrada en esta sección, como se ha dicho anteriormente, ha sido tomada prácticamente en su totalidad de [6]. La pretensión principal de dicho artículo y hacia donde se orientan todos los resultados, es llegar a probar el siguiente resultado, el cual nosotros solo enunciaremos.

Teorema 72. *Si n es un número armónico impar, entonces $n > 10^{24}$*

Debido a la extensión de la prueba se omite en este trabajo, se puede consultar en [6, Teorema 6]. Con este resultado se deja patente, que de existir algún número armónico impar, este deberá tener un tamaño muy considerable, aunque Ore ya conjeturó que no habría ninguno además del 1, por tanto a día de hoy, su hipótesis sigue siendo igual de válida que el día que se enunció.

5.3 Algoritmo de las semillas armónicas

En esta sección se describe el denominado *algoritmo de las semillas armónicas*. Dicho algoritmo ya fue descrito en 1948 por O. Ore en su trabajo, [22].
Este se basa en construir nuevos números armónicos a partir de las propiedades multiplicativas de las funciones τ, σ y $H(n)$. En dicho algoritmo solo se trabaja con valores menores que 10^{12}.
Antes de pasar a describir el algoritmo se enuncian unas definiciones necesarias, que se han tomado de [7].

Definición 73. *Sea d un número entero y positivo, se dice que d es un divisor unitario de n si*

$$d \mid n, \text{ y } m.c.d\left(d, \frac{n}{d}\right) = 1.$$

Se denota $d \parallel n$.

Definición 74. *Un número armónico n es una semilla armónica, si no tiene un divisor unitario propio que sea armónico.*

Definición 75. *Un número armónico n, es un múltiplo armónico, si es resultado del producto de una semilla armónica m por otro número d con $m.c.d(m, d) = 1$.*

En relación a las dos últimas definiciones se ve claro que todo número armónico es una semilla armónica o por el contrario es un múltiplo armónico.

Ejemplo 1: *Se toma el siguiente número armónico $n = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 31$ con $H(n) = 27$.*
Se tiene que los divisores unitarios de n son los distintos productos que se obtiene de los siguientes factores: $2^3, 3^3, 5^2, 31$.
En este caso concreto se tiene que $2^3 \cdot 5^2 \cdot 31$ es también un número armónico, pero este no tiene ya más divisores unitarios que sean armónicos, por tanto $2^3 \cdot 5^2 \cdot 31$ es un semilla armónica, mientras que por el contrario $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 31$ es un múltiplo armónico, por ser el producto de una semilla armónica por 3^3.

Proposición 76. *Todo número perfecto, es una semilla armónica.*

`Demostración:` Es trivial esta demostración, puesto que ya se conoce por la proposición 60., que no puede haber números armónicos con una descomposición del tipo p^a. Y la siguiente descomposición más pequeña que se tiene es del tipo $p^a q^b$ con $p \neq q$, aunque por el artículo de Pomerance, [23], se sabe que todo número armónico con esa descomposición es siempre un número perfecto. Por consiguiente un número perfecto no puede tener un divisor unitario y es siempre una semilla armónica.

□

Antes de describir el algoritmo se introduce una pequeña nota aclarativa.

Nota 5. *Como ya se ha dicho en la proposición anterior, todo número perfecto es una semilla armónica, por lo que en este algoritmo se buscan semillas distintas a los números perfectos. Cabe destacar también que nosotros construimos semillas armónicas pares, debido a que no se conoce la existencia de números armónicos impares, y por ende, tampoco semillas armónicas impares.*

`Algoritmo de búsqueda de semillas armónicas:`

Se va a construir semillas armónicas pares, por consiguiente se toma 2^a con $1 \leq a \leq 35$, puesto que $2^{36} > 10^{12}$. Se selecciona un a_i, entre todos los posibles de manera que

$$H(2^{a_i}) = \frac{2^{a_i}\tau(2^{a_i})}{\sigma(2^{a_i})} = \frac{\upsilon \cdot \varsigma}{\varrho}$$

donde se tiene que υ es una potencia de 2. A continuación se toma un factor k_1 que habitualmente coincide con el factor primo más grande de ϱ, de manera que $k_1 \parallel \varrho$ con $\varrho = k_1 \cdot k_2$ y $m.c.d(k_1, k_2) = 1$. De manera que se procede como a continuación

$$H(2^{a_i} \cdot k_1) = H(2^{a_i}) \cdot H(k_1) = \frac{\upsilon \cdot \varsigma}{\varrho} \cdot \frac{k_1 \tau(k_1)}{\sigma(k_1)} = \frac{\upsilon \cdot \varsigma \cdot \tau(k_1)}{k_2 \cdot \sigma(k_1)}. \tag{5.9}$$

De manera que si la expresión de la derecha de (5.9) es un valor entero, se ha concluido el algoritmo al encontrar un número armónico. Pero en caso de no ser así se repetiría el mismo proceso, hasta conseguir que sea un valor entero.

Este algoritmo que se ha presentado es una pequeña variación del dado por O. Ore en [22], con conceptos nuevos añadidos por M. Garcia en [12] y Cohen en [7].
A continuación se van a dar dos ejemplos para clarificar el algoritmo y ver más fácilmente como se procede con él.

Ejemplo 2: *Se tiene que tomar un 2^a con $1 \leq a \leq 35$, en este caso se va a tomar $a = 13$. Se tiene*

$$H(2^{13}) = \frac{2^{13} \cdot \tau(2^{13})}{\sigma(2^{13})} = \frac{2^{14} \cdot 7}{3 \cdot 43 \cdot 127}.$$

Ahora toca escoger el k_1, que en este caso es 127, y se tiene que $127^b \parallel n$ con $1 \leq b \leq 3$, ya que $2^{13} \cdot 3 \cdot 127^4 > 10^{12}$, ó también se puede tomar $p^{126} \mid n$, de manera que $127 \mid \tau(n)$, para todo primo p. En este caso vamos a tomar 127 con $b = 1$, y se tiene

$$H(2^{13} \cdot 127) = H(2^{13}) \cdot H(127) = \frac{2^{14} \cdot 7}{3 \cdot 43 \cdot 127} \cdot \frac{127 \tau(127)}{\sigma(127)} = \frac{2^{14} \cdot 7}{3 \cdot 43 \cdot 127} \cdot \frac{127 \cdot 2}{2^7} = \frac{2^8 \cdot 7}{3 \cdot 43}.$$

Ahora se escoge 43, de manera que $43^c \parallel n$ con $1 \leq c \leq 3$, puesto que $2^3 \cdot 127 \cdot 43 > 10^{12}$, o como en el otro caso se puede tomar $p^{42} \mid n$, de modo que $43 \mid \tau(n)$. En el resto de casos esta opción siempre sigue siendo posible, pero se va a omitir por comodidad. Se toma 43 con $c = 1$, luego

$$H(2^{13} \cdot 127 \cdot 43) = H(2^{13} \cdot 127) \cdot H(43) = \frac{2^8 \cdot 7}{3 \cdot 43} \cdot \frac{43 \cdot 2}{11 \cdot 2^2} = \frac{2^7 \cdot 7}{3 \cdot 11}.$$

De nuevo se repite el proceso con 11,

$$H(2^{13} \cdot 127 \cdot 43 \cdot 11) = H(2^{13} \cdot 127 \cdot 43) \cdot H(11) = \frac{2^6 \cdot 7}{3^2}.$$

En este punto del algoritmo, se tienen varias opciones para poder elegir. Se tiene que $3^d \parallel n$, para $1 \leq d \leq 6$, ó $p^2 \mid n$ para dos primos p distintos, ó finalmente $p^8 \mid n$, para todo primo p. Nosotros tomamos 3^d con $d = 2$ y se tiene

$$H(2^{13} \cdot 127 \cdot 43 \cdot 11 \cdot 3^2) = H(2^{13} \cdot 127 \cdot 43 \cdot 11) \cdot H(3^2) = \frac{2^6 \cdot 7}{3^2} \cdot \frac{3^3}{2 \cdot 5} = \frac{2^5 \cdot 7 \cdot 3}{5}$$

Finalmente se repite el proceso con el valor 5, y se tiene

$$H(2^{13} \cdot 127 \cdot 43 \cdot 11 \cdot 3^2 \cdot 5) = H(2^{13} \cdot 127 \cdot 43 \cdot 11 \cdot 3^2) \cdot H(5) = \frac{2^5 \cdot 7 \cdot 3}{5} \cdot \frac{5 \cdot 2}{2 \cdot 3} = 2^5 \cdot 7$$

Se ha conseguido que $H(n)$ tenga un valor entero, por consiguiente $2^{13} \cdot 127 \cdot 43 \cdot 11 \cdot 3^2 \cdot 5$ es una semilla armónica y el algoritmo ha concluido.

Se procede ahora con el otro ejemplo.

Ejemplo 3: *En este caso se toma 2^a con $a = 9$. Y se tiene*

$$H(2^9) = \frac{2^9 \cdot \tau(2^9)}{\sigma(2^9)} = \frac{2^{10} \cdot 5}{3 \cdot 11 \cdot 31}.$$

A continuación, se escoge el k_1, que en este caso es 31, $31^b \parallel n$ con $1 \leq b \leq 5$, ya que $2^9 \cdot 3 \cdot 31^6 > 10^{12}$. Se toma $b = 1$, y se tiene

$$H(2^9 \cdot 31) = H(2^9) \cdot H(31) = \frac{2^{10} \cdot 5}{3 \cdot 11 \cdot 31} \cdot \frac{31 \cdot 2}{2^5} = \frac{2^6 \cdot 5}{3 \cdot 11}$$

Y ahora se elige el valor 11, de modo que $11^c \parallel n$ con $1 \leq c \leq 7$, ya que $2^9 \cdot 31 \cdot 11^7 > 10^{12}$. Se escoge $c = 1$, luego

$$H(2^9 \cdot 31 \cdot 11) = H(2^9 \cdot 31) \cdot H(11) = \frac{2^6 \cdot 5}{3 \cdot 11} \cdot \frac{11 \cdot 2}{3 \cdot 2^2} = \frac{2^5 \cdot 5}{3^2}$$

Se vuelve a dar una situación como en el ejemplo anterior, en este caso nosotros tomamos como factor 3^2, y se tiene

$$H(2^9 \cdot 31 \cdot 11 \cdot 3^2) = H(2^9 \cdot 31 \cdot 11) \cdot H(3^2) = \frac{2^5 \cdot 3 \cdot 5}{13}$$

El último paso en este ejemplo es tomar el factor 13, y con ello se concluiría el ejemplo, puesto que

$$H(2^9 \cdot 31 \cdot 11 \cdot 3^2 \cdot 13) = H(2^9 \cdot 31 \cdot 11 \cdot 3^2) \cdot H(13) = \frac{2^5 \cdot 3 \cdot 5}{13} \cdot \frac{7 \cdot 2}{2^3} = 2^6 \cdot 3 \cdot 5.$$

este último es un valor entero, por consiguiente se tiene que $n = 2^9 \cdot 31 \cdot 11 \cdot 3^2 \cdot 13$, es una semilla armónica y el algoritmo ha finalizado.

Los dos ejemplos aquí presentados se han tomado de [7] y [12], respectivamente.

Nota 6. *Durante la realización de los ejemplos, se han tomado ciertos valores, al igual que se podían haber tomado otros. Estas elecciones no se han hecho por ningún motivo en concreto.*

Nota 7. *Cabe destacar que este método ha sido usado para intentar buscar semillas armónicas impares, y con ello números armónicos impares. Ya en 1954, M. García fue capaz de comprobar con dicho algoritmo, que no había números armónicos impares hasta la cantidad de 10^7, aunque dicha cifra queda ensombrecida a día de hoy, al haber llegado Cohen y Sorli hasta 10^{24}.*

5.4 Problemas sin resolver

Aunque la teoría de números es una disciplina antigua dentro de las matemáticas, sigue habiendo problemas sin resolver dentro de ella, como puede ser la existencia de números perfectos impares. En este capítulo haremos una breve mención a los referentes a números armónicos de Ore. Los cuales han sido tomados de [14].

`Problema 1:` *¿Existe un número armónico impar no trivial?*

En su trabajo [22], Ore conjetura que NO, pero actualmente no se tiene respuesta a esta pregunta. Ya que su no existencia implicaría la no existencia de números perfectos impares, como se ha dicho anteriormente.

Problema 2: *¿Son infinitos los números armónicos y las semillas armónicas?*

T. Goto y S. Shibata conjeturan que SÍ en su artículo [14].

Problema 3: *En caso de que la respuesta a la anterior pregunta sea sí, ¿Hay un número infinito de semillas armónicas n con $\omega(n) = 3$?*

La respuesta a esta pregunta depende directamente del problema anterior.

Problema 4: *¿Cada número armónico tiene una semilla armónica única?*

T. Goto y S. Shibata, conjeturaron en [14], que cada número SÍ tiene una semilla armónica única. Aunque T. Goto aportó posteriormente en [13] el siguiente contraejemplo:
Sea n el número armónico

$$n = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 31^2 \cdot 83 \cdot 331,$$

con $H(n) = 525$. Tiene dos semillas armónicas,

$$s_1 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 31^2 \cdot 83 \cdot 331$$
$$s_2 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 31^2 \cdot 83 \cdot 331.$$

puesto que $n = 5^2 s_1$ y $n = 3s_2$.

Problema 5: *¿Existe un número armónico potente no trivial?*

Se dice que un número n es potente si $p \mid n$ implica que $p^2 \mid n$, para cada p primo. En inglés se denomina Powerfull number.
En el trabajo publicado por Cohen y Sorli, ya insinuaron que los números armónicos no triviales no son potentes, probando que no había ningún número armónico potente no trivial menor que 10^{12}.

Problema 6: *¿Existe un número armónico deficiente no trivial?*

Se tiene que un número armónico n es deficiente si $H(n) > \dfrac{\tau(n)}{2}$. Como $H(n) = \dfrac{n\tau(n)}{\sigma(n)}$, un número es deficiente si $2n > \sigma(n)$. Solamente tenemos la referencia de Cohen y Deng en,[5] , donde afirman que $H(n) < \dfrac{2\tau(n)}{3}$.

Problema 7: *¿Todo número 4-perfecto es armónico?*

Como hemos visto en este mismo capítulo, solo se conocen 36 números 4-perfectos, los cuales son todos armónicos. Por tanto opino que esta conjetura es cierta.

Se concluye el capítulo aportando unos resultados y tablas de números armónicos.

5.4.1. Resultados finales y tablas

Para concluir este capítulo, se plantean unas preguntas que se le pueden haber suscitado al lector a lo largo de el capítulo. ¿Qué valores toma la media armónica para los distintos números armónicos?, ¿Dicha media toma todo los valores enteros?.

La respuesta a la última pregunta es NO. Al final del tema hay una tabla de números armónicos con los valores de sus medias, y se puede apreciar que no toma los valores: 4, 12, 16, 18, 20, 22, ...
Los siguientes dos resultados obtenidos de [4], tratan sobre ello, el primero se usa para acotar el valor de $H(n)$, mientras que con el segundo se puede afirmar que no existen números armónicos con $H(n) = 4$ ó $H(n) = 12$.
Recordamos que $\omega(n)$ denota el número de factores primos distintos de n.

Teorema 77. *Para todo n natural, se tiene*

$$H(n) > \frac{2^{\omega(n)+1}}{\omega(n)+1}, \tag{5.10}$$

salvo para las siguientes excepciones, donde p denota un número primo,

- $n = p$,
- $n = 2p$,
- $n = 6p$ *con* $p \neq 3$,
- $n = 30p$ *con* $7 \leq p \leq 23$,
- $n = 1, 15, 21, 70$.

`Demostración:` Sea n un número natural, y se va a suponer $n > 1$. En este caso n vuelve a poseer una descomposición como anteriormente

$$n = \prod_{i=1}^{t} p_i^{a_i},$$

con todos los p_i primos distintos, los a_i enteros positivos y por último $t = \omega(n)$.
Se tiene además que $p_i \geq i + 1$, dándose la igualdad solo para los casos $i = 1, 2$, mientras que con $i \geq 3$ siempre se da la desigualdad. Si a ello se le suman las desigualdades conocidas por el lema 65., se tiene

$$S(n) = \frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\prod_{i=1}^{t} \frac{p_i^{a_i+1}-1}{p_i-1}}{\prod_{i=1}^{t} p_i^{a_i}} = \prod_{i=1}^{t} \frac{p_i^{a_i+1}-1}{p_i^{a_i}(p_i-1)} < \prod_{i=1}^{t} \frac{p_i}{p_i-1} \leq \prod_{i=1}^{t} \frac{i+1}{i} = t+1.$$

Como se tiene que $H(n) = \frac{\tau(n)}{S(n)}$, con $S(n) < t + 1$, esto implica que

$$H(n) > \frac{\tau(n)}{t+1} = \frac{\tau(n)}{\omega(n)+1},$$

y el teorema estaría probado, para todo n tal que $\tau(n) \geq 2^t + 1 = 2^{\omega(n)} + 1$.
De hecho, se tiene que este siempre es el caso, excepto si n es libre de cuadrados o es de la forma $p^2 m$, con m libre de cuadrados y $p \nmid m$. Pero estas excepciones dan lugar a las excepciones indicadas al final del enunciado del teorema.

□

Este resultado junto a su prueba, ha sido tomado de [4].
El siguiente resultado resalta cómo la media armónica no toma todos los valores posibles.

Teorema 78. *Sea n un número armónico, con $H(n) \leq 13$. Entonces, los únicos n que lo cumplen, son los 13 que aparecen en la tabla final.*
En particular no existe n tal que $H(n) = 4, H(n) = 12$.

Este último resultado ha sido también obtenido de [4], dicho artículo va entero encaminado a probarlo. La prueba se omite en este trabajo debido a su complejidad.

Este resultado, responde directamente a la pregunta realizada al principio de la sección, puesto que al tomar solo esos 13 valores, sin que aparezcan valores como $H(n) = 4$, nos asegura que tampoco van a aparecer más adelante y por tanto $H(n)$ solo toma ciertos valores, como deja claro el siguiente resultado, que se ha tomado de [13].

Teorema 79. *Sean c y n enteros positivos, se tiene que para todo c existe únicamente una cantidad finita de n tales que*

$$H(n) = c. \tag{5.11}$$

Para concluir este tema presentamos unas tablas, las dos primeras con los primeros valores armónicos, pudiendo comprobar en ella que solo aparecen los 13 números indicados en el teorema 78. Además en la tabla se añadirá si un número es semilla armónica o no. Dicha tabla es una combinación de las que se presentan en [4] y [14].
Mientras que la última, ordena los valores en función del tamaño de $H(n)$ y no de n, se ha tomado de [14].

Números Armónicos de Ore		
Factorización	$H(n)$	Semilla
1	1	
$2 \cdot 3$	2	semilla
$2^2 \cdot 7$	3	semilla
$2^2 \cdot 5 \cdot 7$	5	$2^2 \cdot 7$
$2 \cdot 3^3 \cdot 5$	6	semilla
$2^4 \cdot 31$	5	semilla
$2^5 \cdot 3 \cdot 7$	8	semilla
$2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13$	9	semilla
$2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$	11	$2 \cdot 3^3 \cdot 5$
$2^3 \cdot 5^2 \cdot 31$	10	semilla
$2^6 \cdot 127$	7	semilla
$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$	15	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$
$2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 31$	15	$2^3 \cdot 5^2 \cdot 31$
$2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 19$	14	semilla
$2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$	17	$2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13$
$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$	24	semilla
$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$	24	semilla
$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 19$	21	$2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 19$
$2^6 \cdot 13 \cdot 127$	13	$2^6 \cdot 127$
$2^3 \cdot 5^2 \cdot 19 \cdot 31$	19	$2^3 \cdot 5^2 \cdot 31$
$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 31$	27	$2^3 \cdot 5^2 \cdot 31$
$2^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 31$	25	semilla
$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29$	29	$2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13$
$2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$	26	$2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 19$
$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	44	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$
$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$	44	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$
$2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 29 \cdot 31$	29	$2^3 \cdot 5^2 \cdot 31$
$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23$	46	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$
$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$	39	$2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 19$
$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 23$	46	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$
$2^6 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 127$	27	$2^6 \cdot 127$
$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$	42	semilla
$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 47$	47	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$
$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 47$	47	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$
$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$	54	$2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 19$
$2^2 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 13$	35	semilla

Cuadro 5.1:

Números Armónicos de Ore		
Factorización	$H(n)$	Semilla
$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 41$	41	$2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 19$
$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13$	60	semilla
$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 31$	51	$2^3 \cdot 5^2 \cdot 31$
$2^3 \cdot 5^2 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 37$	37	$2^3 \cdot 5^2 \cdot 31$
$2^9 \cdot 3^3 \cdot 11 \cdot 31$	48	semilla
$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 127$	45	$2^6 \cdot 127$
$2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 31$	49	$2^3 \cdot 5^2 \cdot 31$
$2^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$	50	semilla
$2^5 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 31$	49	semilla
$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 31 \cdot 53$	53	$2^3 \cdot 5^2 \cdot 31$
$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19$	77	$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$
$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 43$	86	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$
$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 43$	86	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$
$2^6 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 127$	51	$2^6 \cdot 127$
$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$	96	semilla
$2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$	75	$2^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$
$2^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 31$	70	semilla
$2^9 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31$	80	$2^9 \cdot 3^3 \cdot 11 \cdot 31$
$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19$	99	$2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 19$
$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$	110	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13$
$2^3 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$	81	semilla
$2^9 \cdot 3 \cdot^7 \cdot 11 \cdot 31$	84	$2^9 \cdot 3^3 \cdot 11 \cdot 31$
$2^{12} \cdot 8191$	13	semilla
$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$	102	$2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 19$
$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 41$	82	$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$
$2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 31$	96	semilla
$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19$	114	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13$
$2^6 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 53 \cdot 127$	53	$2^6 \cdot 127$
$2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 19$	108	semilla
$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 23$	115	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13$
$2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 31$	105	$2^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 31$
$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29$	116	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13$
$2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31$	91	$2^3 \cdot 5^2 \cdot 31$
$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 127$	85	$2^6 \cdot 127$
$2 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$	105	semilla
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Cuadro 5.2:

Primeros valores para $H(n)$ entero		
$H(n)$	número	factorización
1	1	
2	6	$2 \cdot 3$
3	28	$2^2 \cdot 7$
5	140	$2^2 \cdot 5 \cdot 7$
5	496	$2^4 \cdot 31$
6	270	$2 \cdot 3^3 \cdot 5$
7	8128	$2^6 \cdot 127$
8	672	$2^5 \cdot 3 \cdot 7$
9	1638	$2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13$
10	6200	$2^3 \cdot 5^2 \cdot 31$
11	2970	$2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$
13	105664	$2^6 \cdot 13 \cdot 127$
13	33550336	$2^{12} \cdot 8191$
14	18620	$2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 19$
15	8190	$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$
15	18600	$2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 31$
17	27846	$2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$
17	8589869056	$2^{16} \cdot 131071$
19	117800	$2^3 \cdot 5^2 \cdot 19 \cdot 31$
19	137438691328	$2^{18} \cdot 524287$
21	55860	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 19$
24	30240	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$
24	32760	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$
25	173600	$2^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 31$
26	242060	$2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$
27	167400	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 31$
27	950976	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 127$
27	301953024	$2^{12} \cdot 3^2 \cdot 8191$
29	237510	$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29$
29	539400	$2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 29 \cdot 31$
31	23...952128	$2^{30}(2^{31} - 1)$
35	2229500	$2^2 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 13$
37	4358600	$2^3 \cdot 5^2 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 37$
37	5085231579136	$2^{18} \cdot 37 \cdot 524287$
39	726180	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$
41	2290260	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 41$

Cuadro 5.3:

Primeros valores para $H(n)$ entero		
$H(n)$	número	factorización
42	1089270	$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$
44	332640	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$
44	360360	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$
45	4754880	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 127$
45	150976520	$2^{12} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 8191$
46	695520	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23$
46	753480	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 23$
47	1421280	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 47$
47	1539720	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 47$
48	4713984	$2^9 \cdot 3^3 \cdot 11 \cdot 31$
49	5772200	$2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 31$
49	8506400	$2^5 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 31$
49	6734495875072	$2^{18} \cdot 7^2 \cdot 524287$
50	6051500	$2^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$
51	2845800	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 31$
51	16166592	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 127$
51	5133201408	$2^{12} \cdot 3^2 \cdot 17 \cdot 8191$
53	8872200	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 31 \cdot 53$
53	50401728	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 53 \cdot 127$
53	16003510272	$2^{12} \cdot 3^2 \cdot 53 \cdot 8191$
54	2178540	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$
60	2457000	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13$
61	14...79808	$2^{30} \cdot 61 \cdot (2^{31} - 1)$
61	26...42176	$2^{60} \cdot (2^{61} - 1)$
70	23088800	$2^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 31$
73	318177800	$2^3 \cdot 5^2 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 73$
73	371221905276928	$2^{18} \cdot 37 \cdot 73 \cdot 524287$
75	18154500	$2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$
75	55...03200	$2^30 \cdot 5^2 \cdot (2^{31} - 1)$
77	11981970	$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19$
78	115048440	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13^2 \cdot 31 \cdot 61$
80	23569920	$2^9 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31$
81	29410290	$2^3 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$
82	44660070	$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 41$
...	...	...

Cuadro 5.4:

Capítulo 6 Los números aritméticos

En este capítulo se trata brevemente un nuevo tipo de números, que al igual que sucedía en el capítulo anterior, son una consecuencia directa de una media pitagórica.

Definición 80. *Sea n un entero positivo. Se dice que n es un número aritmético, si la media aritmética de los divisores de n es un número entero.*

Nota 1. *Se recuerda que la media de aritmética de los divisores de un entero n es*

$$A(n) = \frac{\sigma(n)}{\tau(n)}.$$

Los números aritméticos no suelen ser un tema de estudio recurrente por existir una cantidad muy grande de este tipo de números. Sin embargo en este trabajo se les va a tratar brevemente por su relación con los números armónicos.
La primera propiedad que se va a estudiar, es ver que la función $A(n)$ es multiplicativa.

Proposición 81. *Sean n y m dos enteros positivos con $m.c.d(n, m) = 1$. Se tiene*

$$A(n \cdot m) = A(n) \cdot A(m). \tag{6.1}$$

`Demostración:` Se tiene por hipótesis que $m.c.d(n, m) = 1$, luego

$$\sigma(n \cdot m) = \sigma(n) \cdot \sigma(m),$$
$$\tau(n \cdot m) = \tau(n) \cdot \tau(m).$$

Si se junta este hecho a la expresión de $A(n)$, se obtiene que

$$A(n \cdot m) = \frac{\sigma(n \cdot m)}{\tau(n \cdot m)} = \frac{\sigma(n) \cdot \sigma(m)}{\tau(n) \cdot \tau(m)} = \frac{\sigma(n)}{\tau(n)} \cdot \frac{\sigma(m)}{\tau(m)} = \sigma(n) \cdot \sigma(m).$$

Tal y como se quería probar.

□

El siguiente resultado, describe como es la media aritmética de los divisores de un número, para un primo impar.

Nota 2. *Sea p un primo impar, se tiene que*

$$A(p) = \frac{p+1}{2},$$

siempre es un entero. El 2 no esta incluido, por no ser

$$A(2) = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2},$$

un valor entero.

A continuación, se presentan dos resultados que relacionan los conceptos de números perfectos, armónicos y aritméticos.

Lema 82. *Sea n un número perfecto, con $n \geq 28$. Entonces n es armónico pero no aritmético.*

`Demostración:` Sea n un número perfecto mayor o igual que 28, por la proposición 63., se sabe que es también armónico. Por tanto, solo queda probar que n no es un número aritmético.
Como n es un número perfecto, se tiene que $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ con p y $(2^p - 1)$ primos. Por ser n perfecto tenemos también,

$$\sigma(n) = 2n,$$
$$\tau(n) = 2p.$$

Por tanto, si se sustituyen estos valores en la expresión de $A(n)$, obtenemos

$$A(n) = \frac{\sigma(n)}{\tau(n)} = \frac{2(2^{p-1}(2^p - 1))}{2p} = \frac{2^p(2^p - 1)}{2p}.$$

Que no es natural salvo para $p = 2$, de ahí la restricción a $n \geq 28$.

□

El siguiente resultado y corolario han sido tomados de [14], donde se puede consultar la prueba.

Proposición 83. *Sea n un número armónico. Entonces n es aritmético si y solo si $H(n) \mid n$.*

`Demostración:`
$(\Rightarrow)$
Sea n un número natural armónico y aritmético, luego

$$H(n) = \frac{n\tau(n)}{\sigma(n)}$$

y

$$A(n) = \frac{\sigma(n)}{\tau(n)}$$

son valores enteros.
Por la nota 2. del tema anterior, se tiene

$$n = A(n) \cdot H(n) = \left(\frac{\sigma(n)}{\tau(n)}\right) \cdot H(n).$$

Por consiguiente

$$\frac{n}{H(n)} = \frac{\sigma(n)}{\tau(n)},$$

y como $\frac{\sigma(n)}{\tau(n)}$ es entero, $\frac{n}{H(n)}$ también lo es, se concluye que $H(n) \mid n$.
$(\Leftarrow)$
Sea n un número entero armónico tal que $H(n) \mid n$, como

$$A(n) \cdot H(n) = n,$$

se tiene
$$A(n) = \frac{n}{H(n)}.$$

Como por hipótesis $H(n)$ dividie a n, $\left(\frac{n}{H(n)}\right)$ es un entero y $A(n)$ también lo es. Por tanto n es aritmético.

□

Proposición 84. *Si p es un número primo impar, entonces p^p es aritmético.*

`Demostración:` Sea p un primo impar, y se tiene que probar que p^p es aritmético, o equivalentemente $A(p^p)$ es entero.
Calculamos el valor de $A(p^p)$,

$$A(p^p) = \frac{\sigma(p^p)}{\tau(p^p)} = \frac{p^{p+1}}{p-1} \cdot \frac{1}{p+1} = \frac{p^{p+1}-1}{p^2-1}.$$

Como p es un primo impar, $p+1 = 2k$, luego

$$A(p^p) = \frac{p^{p+1}-1}{p^2-1} = \frac{p^{2k}-1}{p^2-1},$$

es un valor entero, puesto que
$$p^2 \equiv 1 \mod (p^2-1),$$
luego,
$$p^{2k} \equiv 1 \mod (p^2-1),$$
y por tanto p^2-1 divide a $p^{2k}-1$, y se concluye que

$$A(p^p) = \frac{p^{2k}-1}{p^2-1},$$

es un entero.

□

El enunciado se ha obtenido de [21].

Nota 3. *Este último resultado diferencia a este tipo de números de los ya estudiados, ya que sí existen números aritméticos impares, a diferencia de todos los demás.*
Por ejemplo, el número 3, es impar y aritmético.

Las siguientes proposiciones relacionan los números aritméticos con los números de Mersenne.
Los resultados se han obtenido de [21].

Proposición 85. *Sea p un primo impar y m un número de Mersenne. Se tiene entonces que p^m es un número aritmético.*

Proposición 86. *Sea m un entero, entonces p^m es aritmético para todo primo impar p, si y solo si m es un número de Mersenne.*

Las pruebas de ambos resultados se encuentran en [21].
Se puede apreciar de manera sencilla que el último resultado es una adaptación del anterior.

Como ya se ha mencionado anteriormente, muchos números son aritméticos, por tanto no es de sorprender que la gran mayoría de los números armónicos sean aritméticos también.
Para ver más claramente este hecho, se toman las tablas 5.4.1 y 5.4.1. Y de los 76 primeros números armónicos que se recogen en ellas, solamente

$$\begin{aligned} 28 &= 2^2 \cdot 7, \\ 496 &= 2^4 \cdot 31, \\ 8128 &= 2^6 \cdot 127, \\ 950976 &= 2^6 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 127, \\ 2178540 &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19, \\ 33550336 &= 2^{12} \cdot 8191, \end{aligned}$$

no son aritméticos, nótese que la mayoría son perfectos. Todos los demás valores en ellas, además de armónicos son aritméticos. Motivo suficiente para ver la relación entre ambos conceptos.
Finalmente, se concluye este tema con un problema abierto de números aritméticos, que se ha obtenido de [14].

`Problema:` *Sea n un número natural y asumimos que $H(n)$ es el triple de un primo. ¿Es n aritmético?*

Si $H(n)$ es el triple de un primo y menor que 300, entonces n es aritmético. Pero no está claro si 3 divide a n cuando n es armónico y $H(n) > 300$.

Bibliografía

[1] Arrondo, E. (2009), *Apuntes de Teoría Elemental de Números*, recuperado de `http://www.mat.ucm.es/~arrondo/ten.pdf` .

[2] Betcher, J. T., Jaroma J. H. (2003) *An Extension of the Results of Servais and Cramer on Odd Perfect and Odd Multiply Perfect Numbers*, The American Mathematical Monthly , Vol. 110, No. 1 (Jan., 2003), pp. 49-52.

[3] Burton, D. M. (1990) *Elementary Number Theory*, second edition, New Delhi, Universall Book Stall.

[4] G. L. Cohen (1997), *Numbers whose positive divisors have small integral harmonic mean*, Mat. Of Comp., Vol. 66, Number 218, 883-891 .

[5] G. L. Cohen,. D. Moujie (1998), *On a generalisation of Ore´s harmonic numbers*, Nieuw. Arch. Wisk., Vol. 16, 161-172 .

[6] G. L. Cohen., R. M. Sorli (2010), *Odd harmonic number exceed* 10^{24}, Mat. Of Comp., Vol. 79, Number 272, 2451-2460 .

[7] G. L. Cohen., R. M. Sorli (1998), *Harmonic seeds*, The Fibonacci Quarterly, Vol. 36.5, 86-90 .

[8] Dickson, L. E. (1971), *History of the Theory of Number*, Volume 1, New York, Printed Bronx.

[9] Derrick N. Lehmer (1900-1901), *The Annals of Mathematics*, Second Series, Vol. 2, No. 1/4, pp. 103-104 .

[10] Dos Santos Ozga, J. G. (2019), *La música en la obra de Pitágoras de Samos y los Pitagóricos: Breves fragmentos*, Babelcube Inc.

[11] Achim Flammenkamp (2018), *The Multiply Perfect Numbers Page*, recuperado de `https://http://wwwhomes.uni-bielefeld.de/achim/mpn.html` .

[12] M. Garcia (1954), *On Numbers with Integral Harmonic Mean*, The American Mathemathical Monthly., Vol. 61, Number 2, 89-96 .

[13] T. Goto (2004), *On Ore´s harmonic number*, slides ,Seminar at University of Technology, Sydney .

[14] T. Goto and S. Shibata (2003), *All numbers whose positive divisors have integral harmonic mean up to 300*, Mat. Of Comp., Vol. 73, Number 245, 475-491 .

[15] Greathouse, Charles and Weissein, Ericw (s.f.) *Odd Perfect Number*, en Mathworld-Wolfram Web Resource, recuperado el 12 de Enero de 2021 de `https://mathworld.wolfram.com/OddPerfectNumber.html` .

[16] Cilleruelo, F.J., *Capítulo 2, Funciones Aritméticas*, extraído de `http://matematicas.uam.es/~franciscojavier.cilleruelo/Curso/capitulo%202.pdf`.

[17] Koshy, T. (2007), *Elementary Number Theory with Applications*, second edition, China: Academic Press.

[18] Leoneti, P. - Sanna, C. (2019), *Practical numbers among the binomial coefficients*, Journal of Number Theory, number 207, 144-155.

[19] Marcos, J.E., *Teoría de Números*, apuntes, Universidad de Valladolid.

[20] Melfi, G. (1996), *On two conjectures about practical numbers*, Journal of Number Theory., number 56, 205-210.

[21] Oller-Marcén, A. (2015), *On arithmetic numbers*, Math. Nachr.,288, number 5-6, 665-669.

[22] Ore, O. (1948), *On the averages of the divisor of a number*, Amer. Math. Monthly, number 55, 615-619.

[23] Pomerance, C. (1973), *On a problem of Ore: harmonic numbers*, Unpublished manuscript.

[24] Qaz.wiki (s.f.), *Mersenne Primes*, recuperado de `https://es.qaz.wiki/wiki/Mersenne_prime` .

[25] Qaz.wiki (s.f.), *Legendre Symbol*, recuperado de `https://es.qaz.wiki/wiki/Legendre_symbol` .

[26] Qaz.wiki (s.f.), *Perfect Number*, recuperado de `https://es.qaz.wiki/wiki/Perfect_number` .

[27] Rangel Mondragon, J. (2000), *Introducción a las funciones multiplicativas*, recuperado de `http://www.unizar.es/matematicas/personales/pjmiana_archivos/Teoriadenumeros/MaterialRelacionado/en1604.pdf` , Universidad Autónoma de Querétaro.

[28] Richard, K. Guy. (1994), *Unsolved Problems in Number Theory*, second edition, New York, Springer-Verlag.

[29] Rogen, K. H. (2011), *Elementary Number Theory with Applications*, London, Pearson Education.

[30] Sloane, N.J., *OEIS*, The On-line Encyclopedia of Integer Sequences. Recuperado de `https://oeis.org` .

[31] Srinivasan, A.K., (1948) *Practical Numbers*, Current Science, 17 (1948), 179-180. .

[32] The On-line Encyclopedia of Integer Sequences, (s.f.) *Odd Perfect Numbers*, recuperado de `https://oeis.org/wiki/Odd_perfect_numbers` .

[33] The On-line Encyclopedia of Integer Sequences, (s.f.) *Practical numbers* .

[34] Universidad del Norte, (s.f.) *Función ϕ de Euler*, recuperado de `https://www.uninorte.edu.co/documents/611838/14457053/Pista_3_Funcion_Euler_8_copias.pdf` .

[35] Vaxasoftware *Lista de números perfectos*, recuperado de `http://www.vaxasoftware.com/doc_edu/mat/numperfe_esp.pdf`

[36] Weisstein, Eric, W., (s.f.) *Divisor function*, en Mathworld-wolfram web Resource, recuperado el 28 de noviembre de `https://mathworld.wolfram.com/DivisorFunction.html` .

[37] Wikipedia *The Free Encyclopedia*, recuperado de `https://en.wikipedia.org` .

Nota 4. *Dentro de Wikipedia se han usado las páginas:*

- *Arithmetic mean.*
- *Criterio de Euler.*
- *Demostraciones pequeño teorema de Fermat.*
- *Función Aritmética.*
- *Función ϕ de Euler*
- *Geometric mean.*
- *Harmonic mean.*
- *Harmonic number.*
- *Multiply perfect number.*
- *Mean.*
- *Número primo de Mersenne.*
- *Números prácticos.*