Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

Trabajo Fin de Grado

Grado en Matemáticas

Diferentes formas de compactificar

Autor: Pablo Martín San José

Tutor/es: Jesus M. Domínguez Gómez

Índice general

Introducción

Como se indica en el título de esta memoria, nuestro objetivo es estudiar varias formas de obtener compactificaciones de Hausdorff de un espacio topológico (en el título se omitió la palabra "Hausdorff" para simplificar). La memoria es esencialmente autocontenida, solo omitimos las demostraciones de varios resultados básicos de Topología General que se prueban siempre en la asignatura del grado que contiene esa materia.

Comenzamos esta introducción definiendo los espacios de Tychonoff y explicando que, a la vista de nuestro objetivo, no supone ninguna restricción limitar nuestro estudio a ese tipo de espacios. Describimos a continuación el contenido esencial de la memoria, pero no vamos describiendo por orden los diferentes capítulos de la memoria. Los capítulos de la memoria se corresponden con el orden lógico, cada capítulo presupone, en parte o en su totalidad, los capítulos precedentes, mientras que, en esta primera parte de la introducción hemos preferido que la narración sea más atractiva, aunque tengamos que hacer algunos saltos lógicos y repitamos conceptos en algunas ocasiones. Dejamos para el final la descripción del contenido de cada capítulo y la mención de la bibliografía utilizada en cada uno de ellos.

Sea F un subconjunto no vacío de un espacio métrico (X, d). Entonces la función

$$\begin{aligned} g : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto d(x, F) = \inf\{d(x, a) \mid a \in F\} \end{aligned}$$

es continua y $\overline{F} = \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$. Así pues, si F es cerrado y $x \notin F$, entonces $g(F) = \{0\}$ y $g(x) \neq 0$. Luego la función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(y) = g(y)/g(x)$ es una función continua tal que $f(F) = \{0\}$ y $f(x) = 1$. Decimos, coloquialmente hablando, que la función f *"separa"* el punto x y el cerrado F.
Llamaremos espacios de Tychonoff (o espacios de Hausdorff completamente regulares) a los espacios de Hausdorff en los que hay suficientes funciones continuas con llegada en $\mathbb{R}$ para separar los puntos y los cerrados. Acabamos de ver que los espacios

métricos son de Tychonoff. En virtud del Lema de Uryshon, los espacios compactos y de Hausdorff también son espacios de Tychonoff. Como el ser de Tychonoff es una propiedad que heredan los subespacios, concluimos que los subespacios de los espacios compactos y de Haudorff también son espacios de Tychonoff, y veremos en el segundo capítulo de esta memoria que lo recíproco también es cierto. Así pues, los espacios de Tychonoff son exactamente los subespacios de los espacios compactos y de Hausdorff.

¿Qué entendemos por una compactificación de un espacio topológico X? Puesto que nos limitamos a estudiar espacios de Hausdorff, diremos que un espacio compacto y de Hausdorff K es una compactificación de un subespacio $X \subset K$, si X es denso en K, en cuyo caso también decimos que $K \setminus X$ es el *"resto"* de la compactificación, es decir, el conjunto de puntos que se han añadido a X para obtener K. Así pues, los espacios que pueden compactificarse (o ser vistos como subespacios de espacios compactos y de Hausdorff) son exactamente los espacios de Tychonoff. La recta extendida $\overline{\mathbb{R}}$ es una compactificación por dos puntos de $\mathbb{R}$ o, equivalentemente, $[0,1]$ es una compactificación por dos puntos del intervalo abierto $(0,1)$. El intervalo $[0,1]$ también es una compactificación de $\mathbb{Q} \cap (0,1)$, pero en este caso el resto es un conjunto infinito.
Ahora bien, la mayoría de las compactificaciones no se presentan así. Cuando decimos que $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ es la compactificación por un punto de $(0,1)$, estamos identificando el intervalo $(0,1)$ con $\mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$ mediante la aplicación

$$\begin{aligned} (0,1) &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ x &\longmapsto \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x \end{aligned}$$

Esta es la forma habitual en que se presentan las compactificaciones: tenemos un espacio de Tychonoff X, un espacio compacto y de Hausdorff αX y una inmersión $\alpha : X \longrightarrow \alpha X$ tal que $\alpha(X)$ es denso en αX (la aplicación α es, por lo tanto, continua, inyectiva e induce un homeomorfismo entre X y su imagen $\alpha(X)$). Si identificamos cada x con $\alpha(x)$, podemos considerar, abusando del lenguaje, que α es la aplicación de inclusión.
Obsérvese que, para conseguir una compactificación de X, si tenemos una inmersión α de X en un espacio compacto y de Hausdorff K, nos basta con definir $\alpha X = \overline{\alpha(X)}$.

A partir de la inmersión $\alpha : X \longrightarrow \alpha X$ podemos, ciertamente, construir un espacio compacto y de Hausdorff K del que X sea un subespacio denso. Para ello consideraríamos un conjunto R, disjunto con X y equipotente al resto $\alpha X \setminus \alpha(X)$, y utilizando una biyección $g : R \longrightarrow \alpha X \setminus \alpha(X)$ extenderíamos el homeomorfismo α entre X y $\alpha(X)$ hasta conseguir una biyección

$$X \bigsqcup R \xrightarrow{\alpha \sqcup g} \alpha(X) \bigsqcup (\alpha X \setminus \alpha(X)) = \alpha X.$$

Trasladaríamos ahora al espacio $X \bigsqcup R$ la topología de αX, tomando como abiertos de $X \bigsqcup R$ las imágenes inversas por $\alpha \sqcup g$ de los abiertos de αX. La topología así trasladada induce en el espacio X la topología que este tenía originalmente y hace de $X \bigsqcup R$ un espacio compacto y de Hausdorff del que X es un subespacio denso. Ahora bien, nunca repetiremos esta construcción (solo pretendíamos dejar claro que es posible hacerla), pues es mucho más cómodo y eficaz manejar las compactificaciones tal y como se suelen presentar, es decir, como espacios inmersos (de forma densa) en espacios compactos y de Hausdorff.

Es fácil probar, como veremos en 2.22, que la compactificación de Alexandroff (o compactificación por un punto) ωX de un espacio localmente compacto y de Hausdorff X es la mínima compactificación de X, mínima en el sentido de que, para cualquier otra compactificación αX, existe una aplicación continua $q_{\alpha,\omega} : \alpha X \longrightarrow \omega X$ que deja fijos los puntos de X (o tal que $q_{\alpha,\omega} \circ \alpha = \omega$, si no hacemos identificaciones). También existe, para cualquier espacio de Tychonoff X, una máxima compactificación, es decir, una compactificación βX tal que, para cualquier compactificación αX, existe una aplicación continua $q_{\beta,\alpha} : \beta X \longrightarrow \alpha X$ que deja fijos los puntos de X. A βX se la denomina la compactificación de Stone-Cech de X.

Hagamos ahora una primera construcción de βX (veremos otras a lo largo de la memoria). Denotemos por $\mathcal{C}^*(X)$ al conjunto de todas las funciones continuas y acotadas de X en $\mathbb{R}$. Para cada $f \in \mathcal{C}^*(X)$, sea I_f el mínimo intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$ que contiene a $f(X)$, y consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \beta : X &\longrightarrow \prod_{f \in \mathcal{C}^*(X)} I_f \\ x &\longmapsto (f(x))_{f \in \mathcal{C}^*(X)} \end{aligned}$$

Probaremos en 1.33 que la aplicación β así definida es una inmersión de X en el espacio compacto y de Hausdorff $\prod_{f \in \mathcal{C}^*(X)} I_f$. Basta ahora tomar $\beta X = \overline{\beta(X)} \subset \prod_{f \in \mathcal{C}^*(X)} I_f$. Decimos que hemos construido βX mediante una inmersión del espacio X en el "*cubo*" $\prod_{f \in \mathcal{C}^*(X)} I_f$ (lo llamamos"cubo" por tratarse de un producto de copias del intervalo unidad $[0, 1]$).
Veremos en 2.7 que cualquier compactificación de X puede obtenerse sumergiendo X en un cubo adecuado.

Hemos comentado anteriormente que los subespacios de los espacios compactos y de Hausdorff son espacios de Tychonoff. La demostración habitual de lo recíproco se basa en la construcción anterior, en la que hemos visto que cada espacio de Tychonoff X es un subespacio del espacio compacto y de Hausdorff βX.
Observemos que si el espacio X de partida es compacto, entonces la aplicación β antes definida es un homeomorfismo entre X y $\beta X = \overline{\beta(X)} \subset \prod_{f\in\mathcal{C}^*(X)} I_f$, pudiendo así concluir que los espacios compactos y de Hausdorff son precisamente los subespacios cerrados de los cubos (pues, a partir del Teorema de Tychonoff sobre el producto de espacios compactos, es inmediato que todo subespacio cerrado de un cubo es un espacio compacto y de Hausdorff).

Si X es un espacio topológico cualquiera, denotaremos por $\mathcal{C}(X)$ al anillo de todas las funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ con las operaciones definidas "punto a punto" ($\mathcal{C}^*(X)$ es un subanillo de $\mathcal{C}(X)$). Sea $x \in X$, y consideremos el epimorfismo de anillos

$$\begin{aligned} C(X) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

El núcleo de este morfismo es el ideal maximal $M_x = \{f \in \mathcal{C}(X) \mid f(x) = 0\}$. Decimos que un ideal maximal de $\mathcal{C}(X)$ es un "*ideal maximal fijo*" si es de la forma M_x, en caso contrario decimos que es un "*ideal maximal libre*". Veremos que si M es cualquier ideal maximal de $\mathcal{C}(X)$, entonces el orden parcial de $\mathcal{C}(X)$, definido "punto a punto", induce un orden total en el cuerpo residual $\mathcal{C}(X)/M$. Si M es un ideal maximal fijo, entonces el cuerpo residual $\mathcal{C}(X))/M$ no es otra cosa que $\mathbb{R}$. Ahora bien, si M es un ideal maximal libre, entonces el cuerpo residual $\mathcal{C}(X)/M$ puede ser una extensión propia del cuerpo $\mathbb{R}$, en cuyo caso diremos que M es un "*ideal maximal hiperreal* ", y el cuerpo $\mathcal{C}(X)/M$ no será arquimediano, conteniendo, por lo tanto, elementos infinitamente grandes así como elementos no nulos infinitamente pequeños (o "*infinitésimos no nulos*"). Llamaremos espacios "*realcompactos*" (o Q-espacios, según Hewitt) a los espacios de Tychonoff X en los que todo ideal maximal libre de $\mathcal{C}(X)$ es un ideal maximal hiperreal.

Dedicamos el quinto capítulo de esta memoria al estudio de los espacios realcompactos. Veremos allí que la clase de los espacios realcompactos es muy extensa. Probaremos que son realcompactos los espacios compactos y de Hausdorff, así como los espacios métricos separables. En particular, cualquier subespacio de $\mathbb{R}^n$ es realcompacto. Los resultados relativos a espacios realcompactos guardan gran analogía con los relativos a espacios compactos y de Hausdorff. Queremos resaltar que, mientras que los espacios compactos y de Hausdorff son exactamente los subespacios cerrados de los cubos (o productos de copias del intervalo $[0,1]$), los espacios realcompactos son exactamente los subespacios cerrados de los productos de copias de $\mathbb{R}$ (véase el corolario 5.16). Probaremos también que, para cada espacio de Tychonoff X, existe un espacio realcompacto υX tal que los anillos $\mathcal{C}(X)$ y $\mathcal{C}(\upsilon X)$ son isomorfos.

Dada la importancia que tienen en nuestra memoria los anillos $\mathcal{C}(X)$ y $\mathcal{C}^*(X)$, observemos que, desde un punto de vista algebraico, los anillos $\mathcal{C}^*(X)$ son un caso particular de anillos $\mathcal{C}(X)$, ya que el anillo $\mathcal{C}^*(X)$ es isomorfo a $\mathcal{C}(\beta X)$. Por otra parte, para cada espacio topológico X, existe un espacio de Tychonoff Y de forma que los anillos $\mathcal{C}(X)$ y $\mathcal{C}(Y)$ son isomorfos. Así pues, si solo pretendiésemos estudiar propiedades algebraicas de los anillos $\mathcal{C}(X)$, no supondría ninguna restricción el suponer que el espacio X es de Tychonoff. Una última simplificación: si el espacio X es de Tychonoff, entonces el anillo $\mathcal{C}(X)$ es isomorfo al anillo $\mathcal{C}(\upsilon X)$, luego, para el estudio de propiedades algebraicas de los anillos $\mathcal{C}(X)$, tampoco supondría ninguna restricción el limitarnos a considerar espacios realcompactos.

Volvamos a las compactificaciones de un espacio de Tychonoff X. Hemos comentado anteriormente que la compactificación de Stone-Cech βX es la máxima compactificación de X y que la compactificación de Alexandroff ωX es la mínima compactificación de un espacio localmente compacto y de Hausdorff X. Seamos ahora un poco más precisos. Diremos que dos compactificaciones αX y γX son equivalentes si existe un homeomorfismo $h : \alpha X \longrightarrow \gamma X$ tal que $h \circ \alpha = \gamma$. Una vez identificadas entre sí las compactificaciones equivalentes, al conjunto $K(X)$ de todas las compactificaciones de X podemos dotarlo de un orden parcial definiendo $\alpha X \geq \gamma X$ si existe una aplicación continua $q_{\alpha,\gamma} : \alpha X \longrightarrow \gamma X$ tal que $q_{\alpha,\gamma} \circ \alpha = \gamma$. Obsérvese que la aplicación $q_{\alpha,\gamma}$, si existe, es única, ya que X (o $\alpha(X)$, si no realizamos la correspondiente identificación) es denso en αX. Veremos en el segundo capítulo de la memoria que $K(X)$ es un retículo completo si, y solo si, X es localmente compacto. En general $K(X)$ no es ni siquiera un retículo, ahora bien, siempre es un semirretículo superiormente completo, es decir, existe el extremo superior de cualquier subconjunto no vacío de $K(X)$. Si X no es localmente compacto, veremos que $K(X)$ no solo no tiene elemento mínimo, sino que, ni siquiera tiene elementos minimales, pues, para cada compactificación αX, existe otra compactificación γX tal que $\gamma X < \alpha X$.

Los espacios de Hausdorff localmente compactos son también los únicos espacios que admiten compactificaciones con resto finito. Es fácil probar (véase 2.25) que, mientras que $\mathbb{R}$ puede compactificarse añadiendo uno o dos puntos, si $n \geq 2$, entonces $\mathbb{R}^n$ solo admite una compactificación con resto finito, la compactificación de Alexandroff $\omega\mathbb{R}^n$.

Sea X un espacio de Tychonoff y $\mathrm{Max}(\mathcal{C}^*(X))$ el conjunto de todos los ideales maximales del anillo $\mathcal{C}^*(X)$. Dotémos a $\mathrm{Max}(\mathcal{C}^*(X))$ de la topología de Zariski (o topología de Stone). Para cada $x \in X$, consideremos el epimorfismo de anillos

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^*(X) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

El núcleo de este morfismo es el ideal maximal $M_x^* = \{f \in \mathcal{C}^*(X) \mid f(x) = 0\}$. Veremos en el cuarto capítulo que $\mathrm{Max}(\mathcal{C}^*(X))$ es un espacio compacto y de Hausdorff, y que la aplicación

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow \mathrm{Max}(\mathcal{C}^*(X)) \\ x &\longmapsto M_x^* \end{aligned}$$

es una inmersión cuya imagen es densa en $\mathrm{Max}(\mathcal{C}^*(X))$. Luego $\mathrm{Max}(\mathcal{C}^*(X))$ es una compactificación de X, de hecho, $\mathrm{Max}(\mathcal{C}^*(X)) = \beta X$ (hemos identificado compactificaciones equivalentes).
Si repetimos la construcción anterior, substituyendo $\mathrm{Max}(\mathcal{C}^*(X))$ por $\mathrm{Max}(\mathcal{C}(X))$ y M_x^* por $M_x = \{f \in \mathcal{C}(X) \mid f(x) = 0\}$, llegamos a que la aplicación

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow \mathrm{Max}(\mathcal{C}(X)) \\ x &\longmapsto M_x \end{aligned}$$

es una inmersión cuya imagen es densa en $\mathrm{Max}(\mathcal{C}(X))$, resultando que también $\mathrm{Max}(\mathcal{C}(X)) = \beta X$. En ambos casos decimos que hemos construido βX utilizando ideales maximales de anillos de funciones continuas. Veremos que cada compactificación de X puede obtenerse mediante ideales maximales de un adecuado anillo de funciones continuas.

Examinemos una última forma de construir βX. Para cada $f \in \mathcal{C}(X)$ sea $Z(f) = f^{-1}(0) = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$. Por analogía con las raíces o ceros de un polinomio, decimos que $Z(f)$ es el conjunto de ceros o "*ceroconjunto*" de la función f. Sea $Z(X)$ el conjunto de todos los ceroconjuntos en X, es decir, $Z(X) = \{Z(f) \mid f \in \mathcal{C}(X)\}$, que coincide con $\{Z(f) \mid f \in \mathcal{C}^*(X)\}$.
La aplicación

$$\begin{aligned} Z : \mathcal{C}(X) &\longrightarrow Z(X) \\ f &\longmapsto Z(f) \end{aligned}$$

es ciertamente sobreyectiva, y llamamos "*z-filtros*" en X a las imágenes por Z de los ideales propios de $\mathcal{C}(X)$. Los z-filtros maximales (para la relación de inclusión) son denominados "*z-ultrafiltros*" en X.
Denotemos por $\mathrm{Max}(Z(X))$ al conjunto de todos los z-ultrafiltros en el espacio de Tychonoff X. La aplicación

$$\begin{aligned} \mathrm{Max}(\mathcal{C}(X)) &\longrightarrow \mathrm{Max}(Z(X)) \\ M &\longmapsto Z(M) = \{Z(f) \mid f \in M\} \end{aligned}$$

es biyectiva y permite trasladar a $\mathrm{Max}(Z(X))$ la topología de $\mathrm{Max}(\mathcal{C}(X))$.
Para cada $x \in X$, sea $\mathcal{F}_x = \{Z \in Z(X) \mid x \in Z\}$. Luego $\mathcal{F}_x = Z(M_x)$ y, en consecuencia, la aplicación

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow \mathrm{Max}(Z(X)) \\ x &\longmapsto \mathcal{F}_x \end{aligned}$$

es también una inmersión cuya imagen es densa en $\mathrm{Max}(Z(X))$. Luego $\mathrm{Max}(Z(X))$ es una compactificación de X. De nuevo, $\mathrm{Max}(Z(X)) = \beta X$.
Si substituimos $Z(X)$ por el conjunto $\mathcal{Z}$ de todos los cerrados de un espacio topológico X que satisface el axioma T_4 de separación (normal y de Hausdorff) y extendemos a $\mathcal{Z}$ las nociones de z-filtro y z-filtro maximal, entonces volvemos a conseguir un espacio compacto y de Hausdorff $w_{\mathcal{Z}}X = \mathrm{Max}(\mathcal{Z})$ junto con una inmersión $X \longrightarrow w_{\mathcal{Z}}X$, de forma que $w_{\mathcal{Z}}X$ es, de nuevo, una compactificación de X equivalente a βX.

¿Hasta dónde podemos generalizar la situación anterior de forma que sigamos obteniendo compactificaciones de X? La respuesta la encontramos en la teoría de las "*bases normales*" de Wallman. Dedicamos el tercer capítulo de la memoria a esta forma de compactificar. A diferencia de lo que ocurre con los otros dos métodos generales (inmersión en cubos y espectros maximales de anillos de funciones continuas), hay compactificaciones que no pueden obtenerse por el método de Wallman (véase [Ul]).
Hemos visto ya que la compactificación de Stone-Cech es de tipo Wallman. Son también de tipo Wallman (véase [CF]):

- La compactificación de Freudenthal (la máxima compactificación con resto 0-dimensional).
- Las compactificaciones con resto numerable.

- Las compactificaciones metrizables.

Aunque, como vemos, se conocen varias familias de compactificaciones que son de tipo Wallman, no sabemos de ningún resultando "contundente" que explique qué compactificaciones pueden obtenerse por el método de Wallman.

El capítulo 1 sirve como una introducción a los espacios de Tychonoff, y también como un recordatorio de algunos conceptos topológicos y ejemplos básicos que necesitaremos más adelante. Para elaborarlo, nos hemos apoyado en el libro [Ch] de Chandler y en el [Wi] de Willard.

En el capítulo 2 definiremos el concepto de compactificación (de Hausdorff) de un espacio topológico, presentaremos un primer método para obtener compactificaciones (la inmersión en cubos), y estudiaremos algunas propiedades del conjunto parcialmente ordenado de las compactificaciones de un espacio de Tychonoff, ilustrando algunas de las ideas con ejemplos. La bibliografía básica de este capítulo es el texto [Ch] de Chandler, aunque el último ejemplo proviene del artículo [SS] de Steiner y Steiner.

En el capítulo 3 se presentará el concepto de base normal $\mathcal{Z}$ de un espacio topológico X, y de $\mathcal{Z}$-filtro, y después se enunciarán sus propiedades básicas, para construir una compactificación de X asociada a $\mathcal{Z}$. Después estudiaremos con más detalle el caso en el que $\mathcal{Z}$ es la colección de los ceroconjuntos de X, y veremos la relación que tienen los $\mathcal{Z}$-filtros con los ideales de $\mathcal{C}(X)$, para terminar demostrando que, en este caso particular, la compactificación que se obtiene es βX.
Para el estudio de los $\mathcal{Z}$-filtros nos hemos basado en el libro [AS] de Alò y Saphiro y los apuntes [Iv] de Ivorra, mientras que para el caso particular de los ceroconjuntos hemos utilizado el método de Chandler ([Ch]).

Los resultados probados en el capítulo 3 hacen razonable pensar que hay una topología natural en el conjunto de los ideales maximales de $\mathcal{C}(X)$ con la que es homeomorfo al conjunto de los z-ultrafiltros, y con la que es una compactificación de X equivalente a la compactificación de Stone-Cech.
En el capítulo 4, después de presentar esta topología y demostrar que la topología de un espacio X compacto y de Hausdorff está caracterizada por la estructura de anillo de $\mathcal{C}^*(X)$, estudiaremos las diferencias que tienen los anillos $\mathcal{C}^*(X)$ y $\mathcal{C}(X)$, dando pie a los conceptos centrales del siguiente capítulo.
En lo relativo a los conceptos puramente algebraicos, el texto de referencia ha sido el

libro [AM] de Atiyah y Macdonald, mientras que para los conceptos más topológicos nos hemos apoyado en el texto [GJ] de Gillman y Jerison.

En el capítulo 5 vamos a definir una forma débil de compacidad (la realcompacidad), basada en la "diferencia" que encontramos en el capítulo cuarto entre $\mathcal{C}(X)$ y $\mathcal{C}^*(X)$, y después vamos a estudiar esta propiedad de una manera completamente análoga a la que hicimos con la compacidad en el segundo capítulo. Construiremos realcompactificaciones, demostraremos algunas propiedades que comparten los espacios compactos y los realcompactos, y mostraremos ejemplos de algunas en las que se diferencian, basándonos, principálmente, en el texto [GJ] de Gillman y Jerison.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo sirve como una introducción a los espacios de Tychonoff, que son el espacio prototipo que se maneja a lo largo de todo el trabajo, y también como un recordatorio de algunos conceptos topológicos y ejemplos básicos que necesitaremos más adelante. Para elaborarlo, nos hemos apoyado en el libro de Chandler ([Ch]) y en el de Willard ([Wi]).

Definición 1.1. Dado un espacio topológico X, se definen los siguientes conjuntos:
$\mathcal{C}(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$.
$\mathcal{C}^*(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua y acotada}\}$.
Dada una función f en cualquiera de los dos conjuntos anteriores, definimos:
$Z(f) = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$, el ceroconjunto de f.

Definición 1.2. Si X es un conjunto cualquiera, denotaremos por $\mathcal{P}(X)$ al conjunto de todos los subconjuntos de X. También utilizaremos, a veces, la palabra colección para referirnos a un conjunto.

Definición 1.3. Dado un espacio de Hausdorff X, diremos que X es de Tychonoff si además es completamente regular. Es decir, si cumple que, para cada cerrado F de X y cada punto $x \in X \setminus F$, existe $f \in \mathcal{C}(X)$ tal que $f(x) \notin \overline{f(F)}$.
Comprobemos que esta definición es equivalente a la habitual, es decir: dados $F \subset X$ cerrado y $x \in X \setminus F$, existe $g : X \longrightarrow [0, 1]$ continua tal que $g(x) = 0$ y $g(F) = \{1\}$.

Demostración. Es claro que la definición habitual implica la que acabamos de definir, puesto que, como $F \subset X$ es cerrado y $x \in X \setminus F$, existe $f : X \longrightarrow [0, 1]$ continua tal que $f(x) = 0$ y $f(F) = \{1\}$. Esta misma f cumple que

$$f(x) = 0 \notin \{1\} = \overline{\{1\}} = \overline{f(F)},$$

y por lo tanto el espacio X cumple la propiedad.
Recíprocamente, supongamos que el espacio de Hausdorff X cumple esta propiedad, y vamos a demostrar que entonces cumple la definición habitual. Sean $F \subset X$ un cerrado, y $x \in X \setminus F$. Vamos a buscar una función $g : X \longrightarrow [0,1]$ continua y tal que $g(x) = 0$ y $g(F) = \{1\}$.
Sabemos que existe $f \in \mathcal{C}(X)$ tal que $f(x) \notin \overline{f(F)}$. Puesto que $f(x)$ no pertenece a la adherencia de $f(F)$, debe existir $\delta > 0$ tal que $(f(x) - \delta, f(x) + \delta) \cap f(F) = \emptyset$. Podemos entonces definir $g(y) = \min\{1, \frac{|f(y)-f(x)|}{\delta}\}$.
El valor $g(y)$ es claramente menor o igual que 1, y por ser g el mínimo entre dos cantidades no negativas, es no negativa también, luego $g : X \longrightarrow [0,1]$. Además, g es composición de funciones continuas, y por tanto es continua. Por último, es claro que $g(x) = \min\{1, 0\} = 0$, y si $y \in F$ se cumple que $|f(y) - f(x)| \geq \delta$, luego $g(y) = 1$. □

En ambos casos diremos, coloquialmente, que la función f (o g) separa al punto x del cerrado F, o que x y F están completamente separados (por f o g, según corresponda).

Ejemplo 1.4. Todo espacio metrizable es de Tychonoff. En efecto, si d es una métrica en X, F es un cerrado de (X, d) y x un punto de $X \setminus F$, podemos definir la función

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow [0,1] \\ y &\longmapsto \frac{d(x,y)}{d(x,y) + d(y,F)} \end{aligned}$$

que es continua por ser composición de continuas (el denominador no se anula nunca porque $x \notin \overline{F}$), y es claro que se anula en x y vale 1 en el cerrado F, luego x y F están completamente separados por f.

Definición 1.5. Si X es un espacio topológico, diremos que un conjunto $\mathcal{B}$ de cerrados de X es una base para los cerrados de la topología si para cada cerrado $F \subset X$, y cada $x \in X \setminus F$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $F \subset B$ y $x \notin B$.
Se dice que un conjunto $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ forma una subbase para los cerrados de X si el conjunto de las uniones finitas de elementos de $\mathcal{S}$ forma una base para los cerrados de X. Esto implica que todos los elementos de $\mathcal{S}$ son cerrados de X.
Equivalentemente, podríamos haber definido que $\mathcal{B}$ es una base para los cerrados de X si el conjunto formado por los complementarios de los miembros de $\mathcal{B}$ es una base para los abiertos de X, y que $\mathcal{S}$ es una subbase para los cerrados de X si el conjunto formado por los complementarios de los miembros de $\mathcal{S}$ forma una subbase para los

abiertos de X.

Conviene notar que, al igual que una base de abiertos está caracterizada por el hecho de que cualquier abierto se puede escribir como unión de abiertos de la base, una base de cerrados se caracteriza por el hecho de que cualquier cerrado se puede escribir como intersección de cerrados de la base.

Lema 1.6. Si X es un espacio de Hausdorff, entonces X es de Tychonoff si, y solo si, $\{Z(f) \mid f \in \mathcal{C}^*(X)\}$ es una base para los cerrados de X.

Demostración. Si X es de Tychonoff, dados F cerrado y $x \in X \setminus F$, sabemos que existe una función $g \in \mathcal{C}^*(X)$ que cumple que $g(x) = 0$ y $g(F) = \{1\}$. Si definimos $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = 1 - g(x)$, entonces $f \in \mathcal{C}^*(X)$, $f(x) = 1 \neq 0$ y $f(F) = \{0\}$, luego tenemos que $x \notin Z(f)$ y $F \subset Z(f)$, luego $\{Z(f) \mid f \in \mathcal{C}^*(X)\}$ forma una base para los cerrados de X.

Por otro lado, si $\{Z(f) \mid f \in \mathcal{C}^*(X)\}$ forma una base para los cerrados de X, entonces dados $F \subset X$ cerrado y $x \in X \setminus F$, existe $f \in \mathcal{C}^*(X)$ tal que $F \subset Z(f)$ y $x \notin Z(f)$, luego, en particular $f(x) \notin \overline{f(F)} = \{0\}$, así que f separa al punto x del cerrado F. □

Observemos que si X es un espacio de Tychonoff, entonces los conjuntos $\{Z(f) \mid f \in \mathcal{C}(X)\}$ y $\{Z(f) \mid f \in \mathcal{C}^*(X)\}$ coinciden. Claramente el segundo está contenido en el primero, y si tomamos un conjunto de la forma $Z(f)$, con $f \in \mathcal{C}(X)$, entonces $Z(f) = Z(\text{mín}\{|f|, 1\})$, y $\text{mín}\{|f|, 1\} \in \mathcal{C}^*(X)$.

Corolario 1.7. Todo subespacio de un espacio de Tychonoff es de Tychonoff.

Demostración. Si $A \subset X$ y X es un espacio de Tychonoff, entonces A es de Hausdorff por serlo X. Como $\{Z(f) \mid f \in \mathcal{C}^*(X)\}$ es una base para los cerrados de X, el conjunto $\{Z(f) \cap A \mid f \in \mathcal{C}^*(X)\}$ es una base para los cerrados de A. Observemos que si $f \in \mathcal{C}^*(X)$, entonces $Z(f) \cap A = Z(f|_A)$, y $f|_A \in \mathcal{C}^*(A)$, por lo tanto $\{Z(g) \mid g \in \mathcal{C}^*(A)\}$ es una base para los cerrados de A, y se deduce que A es de Tychonoff. □

Definición 1.8. Si τ y τ' son dos topologías sobre un conjunto X, diremos que τ es más débil que τ' si $\tau \subset \tau'$.

Dado un conjunto X y un conjunto $\mathcal{F} = \{f_i : X \longrightarrow Y_i\}$ de aplicaciones definidas en X, se define en X la topología débil para $\mathcal{F}$ como la que tiene por subbase de abiertos a la colección de los conjuntos de la forma $f_i^{-1}(U_i)$, donde $i \in I$ y U_i es un abierto de Y_i. El nombre proviene del hecho de que es la topología en X más débil para la cual todas las aplicaciones f_i son continuas. También se dice (Bourbaki) que es la topología inicial para las aplicaciones f_i.

Proposición 1.9. Un espacio de Hausdorff (X, τ) es de Tychonoff si, y solo si, su topología es la más débil que hace continuas a todas las funciones de $\mathcal{C}^*(X, \tau)$.

Demostración. Empecemos suponiendo que (X, τ) es un espacio de Tychonoff, que τ' es más débil que τ, y que toda función τ-continua y acotada es τ'-continua, y vamos a demostrar que en ese caso también se cumple que τ es más débil que τ'.
Sea F cerrado en τ. Si $F = X$, entonces F también es cerrado en τ'. En caso contrario, por ser (X, τ) de Tychonoff, para cada $x \in X \setminus F$, existe una función $f_x : X \longrightarrow \mathbb{R}$, que es τ-continua y acotada (y por tanto τ'-continua), que cumple que $x \notin Z(f_x)$ y $F \subset Z(f_x)$. Por lo tanto, se cumplirá que

$$F = \bigcap_{x \in X \setminus F} Z(f_x)$$

Así pues, F es una intersección de conjuntos τ'-cerrados, luego τ'-cerrado, como queríamos demostrar.
Ahora, sea τ' la topología más débil en X para la cual todas las funciones τ-continuas y acotadas son continuas, y supongamos que esta topología coincide con τ. Vamos a probar que entonces el espacio (X, τ) (o, equivalentemente, (X, τ')) es de Tychonoff, suponiendo que sea de Hausdorff. Para ello, aplicaremos el lema 1.6, por lo que tratamos de ver que $\{Z(f) | f \in \mathcal{C}^*(X)\}$ es una base para los cerrados de (X, τ).
El conjunto $\{(-\infty, x] \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{[x, \infty) \mid x \in \mathbb{R}\}$ es una subbase para los cerrados de $\mathbb{R}$, y por lo tanto el conjunto $\mathcal{S}$ formado por

$$\{x \in X \mid f(x) \leq r\}, \text{ donde } r \in \mathbb{R} \text{ y } f \in \mathcal{C}^*(X),$$

junto con

$$\{x \in X \mid f(x) \geq r\}, \text{ donde } r \in \mathbb{R} \text{ y } f \in \mathcal{C}^*(X),$$

es una subbase para los cerrados de (X, τ'). Veamos que la base de cerrados $\mathcal{B}$ generada por $\mathcal{S}$ es exactamente $\{Z(f) \mid f \in \mathcal{C}^*(X)\}$.
Para empezar, todo conjunto $Z(f)$, con $f \in \mathcal{C}^*(X)$, es un conjunto de $\mathcal{B}$, porque podemos expresar $Z(f)$ como $\{x \in X \mid \ |f|(x) \leq 0\} \in \mathcal{S} \subset \mathcal{B}$.
Por último, notemos que un miembro de $\mathcal{B}$ es unión finita de elementos de $\mathcal{S}$, por lo que basta probar que los miembros de $\mathcal{S}$ son ceroconjuntos de funciones continuas y acotadas, y que el conjunto de todos los ceroconjuntos de funciones continuas y acotadas es cerrado para uniones finitas. En efecto, un conjunto $A \in \mathcal{S}$ será, o bien de la forma $\{x \in X \mid f(x) \leq r\}$, en cuyo caso $A = Z(\text{máx}\{0, f - r\})$, o bien de la forma $\{x \in X \mid f(x) \geq r\}$, y entonces $A = Z(\text{mín}\{0, f - r\})$. Además, $\bigcup_{i=1}^n Z(f_i) = Z(f_1 f_2 ... f_n)$, luego la colección de los ceroconjuntos de funciones continuas y acotadas definidas en X es cerrado para uniones finitas, como queríamos demostrar. $\square$

Corolario 1.10. Si X es un espacio de Hausdorff cuya topología es la más débil que hace continuas a las funciones de $\mathcal{C}'$, donde $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}^*(X)$, entonces X es de Tychonoff.

Demostración. La topología que induce $\mathcal{C}'$ en X es más débil que la que induce $\mathcal{C}^*(X)$, porque $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}^*(X)$. Por otro lado, la topología que induce $\mathcal{C}^*(X)$ es más débil que la de X, porque todas las funciones de $\mathcal{C}^*(X)$ son continuas en X. Como la topología de X coincide con la inducida por $\mathcal{C}'$, se deduce que ambos conjuntos inducen la misma topología, y por lo tanto X es de Tychonoff. □

Definición 1.11. Diremos que un espacio de Hausdorff X es T_4 si además es normal, es decir, si cumple que para cada par de cerrados A y B disjuntos, existen dos abiertos disjuntos U y V, con $A \subset U$ y $B \subset V$.

No incluimos la demostración de este resultado fundamental porque se ha probado en la asignatura de Topología.

Teorema 1.12 (Lema de Urysohn)**.** Si X es un espacio T_4 y A y B son dos cerrados disjuntos de X, entonces existe una función continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ que cumple que $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$.

Corolario 1.13. Los espacios T_4 son de Tychonoff.

Demostración. Como en un espacio de Hausdorff los conjuntos unipuntuales son cerrados, si el espacio es además normal, podemos aplicar el Lema de Urysohn para separar puntos de cerrados por funciones continuas. □

Ahora vamos a recordar algunos resultados sobre compacidad que se usan de forma recurrente a lo largo del trabajo, y que no demostraremos porque se han estudiado en el grado:

Definición 1.14. Se dice que un espacio topológico X es compacto si, para todo conjunto de abiertos $\mathcal{U}$ que recubra X (es decir, $\mathcal{U}$ es un recubrimiento abierto de X), existe un subconjunto finito $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ que también recubre X. Esto es equivalente a que todo conjunto $\mathcal{F}$ de cerrados de X con la propiedad de la intersección finita (es decir, ningún subconjunto finito de $\mathcal{F}$ tiene intersección vacía) tiene intersección no vacía.

Propiedades 1.15. Sea X un espacio compacto:
(1) Si $F \subset X$ es cerrado, entonces F es compacto.
(2) Si X es subespacio de Y, e Y es un espacio de Hausdorff, entonces X es cerrado en Y.
(3) Si $f : X \longrightarrow Y$ es continua y sobreyectiva, entonces Y es compacto.

(4) Si $f : X \longrightarrow Y$ es continua y biyectiva, e Y es un espacio de Hausdorff, entonces f es un homeomorfismo.

Teorema 1.16. Si X es un espacio compacto y de Hausdorff, entonces X es T_4.

Corolario 1.17. Los espacios compactos y de Hausdorff son de Tychonoff.

Teorema 1.18. Sea X un espacio de Tychonoff, $\mathcal{B}$ una base de abiertos de X y $\mathcal{B}'$ la base de cerrados de X formada por los complementarios de los miembros de $\mathcal{B}$. Son equivalentes:
(1) X es compacto.
(2) Cualquier recubrimiento de X formado por abiertos de $\mathcal{B}$ tiene un subrecubrimiento finito.
(3) Cualquier conjunto de cerrados de $\mathcal{B}'$ con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía.
(4) Si M es un ideal maximal del anillo $\mathcal{C}^*(X)$, entonces existe $x \in X$ tal que $f(x) = 0$, para toda $f \in M$. Un ideal que cumpla esta propiedad se llama fijo, así que podríamos expresar esta condición diciendo que todo ideal maximal de $\mathcal{C}^*(X)$ es fijo.

Demostración. Vamos a probar la equivalencia entre (2) y (3). La condición (2) (todo subconjunto $\mathcal{U}$ de $\mathcal{B}$ que recubra X tiene un subconjunto finito que recubre X) equivale a su contrarrecíproco, que es "si un subconjunto $\mathcal{U}$ de $\mathcal{B}$ no tiene un subconjunto finito que recubra X, entonces $\mathcal{U}$ no recubre X". Si denotamos por $\mathcal{U}'$ al conjunto formado por los complementarios de los miembros de $\mathcal{U}$, nuestra condición se transforma en la condición (equivalente) "si un subconjunto $\mathcal{U}'$ de $\mathcal{B}'$ no tiene un subconjunto finito con intersección vacía, entonces $\mathcal{U}'$ tampoco". Es decir, todo subconjunto de $\mathcal{B}'$ con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía, que es la condición (3).
(2) es un caso particular de (1), veamos que también (2)$\Rightarrow$(1), y por tanto también son equivalentes. Supongamos que la base de abiertos $\mathcal{B}$ cumple la propiedad de (2), y $\mathcal{U}$ es un recubrimiento abierto de X. Entonces, para cada $x \in X$ y $U \in \mathcal{U}$, por ser $\mathcal{B}$ una base de abiertos, existe $V_{x,U} \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V_{x,U} \subset U$. Como el conjunto $\{V_{x,U} \mid x \in X,\ U \in \mathcal{U}\}$ es un recubrimiento abierto de X formado por elementos de $\mathcal{B}$, por hipótesis existen $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ y $U_1, U_2, ..., U_n \in \mathcal{U}$ tales que $X = \cup_{i=1}^{n} V_{x_i,U_i}$, y deducimos que $\{U_1, U_2, ..., U_n\}$ es un subrecubrimiento finito de $\mathcal{U}$.
(1)$\Rightarrow$(4). Como X es compacto, $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}^*(X)$, luego una función $f \in \mathcal{C}^*(X)$ es una unidad si, y solo si, $Z(f) = \emptyset$, porque si f no se anula en ningún punto entonces $\frac{1}{f}$ está

bien definida y es continua, y además está acotada por ser X compacto. Como M es un ideal maximal, es propio, luego no contiene unidades, y deducimos que $Z(f) \neq \emptyset$, para toda $f \in M$. Ahora, notemos que el conjunto de cerrados $\{Z(f) \mid f \in M\}$ tiene la propiedad de la intersección finita, porque si $f_1, f_2, ..., f_n \in M$, entonces, por ser M un ideal, también $f_1^2+f_2^2+...+f_n^2 \in M$, luego $\cap_{i=1}^n Z(f_i) = Z(f_1^2+f_2^2+...+f_n^2) \neq \emptyset$, por ser M un ideal propio. Por lo tanto, por compacidad, $\{Z(f) \mid f \in M)\}$ tiene intersección no vacía y existe $x \in X$ tal que para toda $f \in M$, se verifica que $f(x) = 0$, como queríamos probar.
(4)⇒(1). Como sabemos que (3)⇒(1) y X es un espacio de Tychonoff, basta que probemos que dado un conjunto $\{Z(f) \mid f \in C\}$ (donde $C \subset \mathcal{C}^*(X)$) con la propiedad de la intersección finita, su intersección es no vacía. Sea I el ideal generado por C en $\mathcal{C}^*(X)$. Notemos que es un ideal propio, porque en caso contrario existirían $g_1, g_2, ..., g_n \in \mathcal{C}^*(X)$, $f_1, f_2, ..., f_n \in C$ tales que $g_1f_1 + g_2f_2 + ... + g_nf_n = 1$, luego $Z(g_1f_1+g_2f_2+...+g_nf_n) = \emptyset$, mientras que $Z(g_1f_1+g_2f_2+...+g_nf_n) \supset \cap_{i=1}^n Z(f_i)$, que es un conjunto no vacío por hipótesis. Por lo tanto, existe un ideal maximal (que será fijo) $M \supset I$, y deducimos que

$$\emptyset \neq \bigcap_{f\in M} Z(f) \subset \bigcap_{f\in I} Z(f) \subset \bigcap_{f\in C} Z(f),$$

luego el conjunto $\{Z(f) \mid f \in C\}$ tiene intersección no vacía, como queríamos demostrar. □

Definición 1.19. Se dice que un espacio topológico X es de Lindelöf cuando todo recubrimiento abierto de X tiene un subrecubrimiento numerable. Esto equivale a que todo conjunto de cerrados de X con la propiedad de la intersección numerable tenga intersección no vacía.
Claramente un espacio de compacto también es de Lindelöf, pero el recíproco no es cierto. Un ejemplo de espacio de Lindelöf es un espacio métrico y separable. Por lo tanto, todo subespacio de $\mathbb{R}^n$, con $n \in \mathbb{N}$, es de Lindelöf, pero no es necesariamente compacto.

Definición 1.20. Se dice que un espacio topológico X es pseudocompacto si $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}^*(X)$. Es claro que un espacio compacto es pseudocompacto, pero veremos un ejemplo que muestra que el recíproco no es cierto.

Proposición 1.21. Un espacio topológico X secuencialemente compacto (es decir, en el que toda sucesión tenga una subsucesión convergente) es numerablemente compacto (es decir, todo recubrimiento de X abierto y numerable tiene un subrecubrimiento finito). Además, todo espacio numerablemente compacto es pseudocompacto.

Ejemplo 1.22. Vamos a construir un espacio topológico de Tychonoff, que es pseucompacto, pero no compacto (de hecho, ni siquiera es de Lindelöf).
Sea X un conjunto no numerable cualquiera, al que dotamos de un buen orden. Sea Ω el subconjunto de X formado por los elementos de X cuya sección inicial es numerable, es decir:

$$\Omega = \{\alpha \in X \mid |\{\beta \in X \mid \beta < \alpha\}| \leq |\mathbb{N}|\}$$

Notemos que si $\alpha \in \Omega$ y $\beta \leq \alpha$, entonces también $\beta \in \Omega$. Esto nos permite deducir que Ω es no numerable. En efecto, si suponemos que Ω es numerable, podemos denotar por α al mínimo elemento de $X \setminus \Omega$ (conjunto no vacío porque X es no numerable y estamos suponiendo que Ω es numerable), y vamos a ver que $\alpha \in \Omega$ (lo cual es absurdo). Como $\alpha \notin \Omega$, α debe ser una cota superior estricta de Ω, o en caso contrario sería un elemento de Ω. Por lo tanto, por la definición de α, $\{\beta \in X \mid \beta < \alpha\} = \Omega$, y como estamos suponiendo que Ω es numerable, deducimos que $\alpha \in \Omega$, lo cual es absurdo.
Se suele decir que Ω es el menor ordinal no numerable, porque cualquier conjunto no numerable bien ordenado contiene a una copia de Ω, y Ω contiene copias (como secciones) de todos los conjuntos bien ordenados y numerables. Vamos a cometer un abuso de notación y a redefinir Ω de la siguiente manera:
Llamemos 0 al mínimo elemento de Ω. Consideramos el siguiente conjunto, ordenado por contención:

$$\Omega^* = \{[0, \alpha) \mid \alpha \in \Omega\} \cup \{\Omega\}$$

Es claro que hay una biyección, que conserva el orden, entre Ω y el conjunto de sus secciones iniciales (esto es, el subconjunto $\{[0, \alpha) \mid \alpha \in \Omega\}$ de Ω^*). Por eso, a partir de ahora consideramos a Ω como el subconjunto $[0, \Omega)$ de Ω^* (Ω^* es un conjunto bien ordenado que tiene a Ω como máximo y a $\emptyset$ como mínimo), que está bien ordenado por la inclusión de conjuntos (la desigualdad estricta es la relación de pertenencia). Esto nos permite simplificar algunas fórmulas, porque si $A \subset \Omega^*$, entonces:

$$\min A = \cap A, \sup A = \cup A$$

Por analogía con los números naturales, dado $\alpha \in \Omega^*$, denotamos por $\alpha + 1$ al mínimo elemento de $\Omega^* \setminus \alpha$ (conjunto no vacío porque $\alpha \subsetneq \Omega^*$). De esa manera, $0 = \emptyset$, $1 = 0 + 1 = \{0\}$, $2 = 1 + 1 = \{0, 1\}$, $3 = 2 + 1 = \{0, 1, 2\}$,..., $\Omega^* = \Omega + 1$. En general, para cada $\alpha \in \Omega^*$, $\alpha = [0, \alpha)$.
Podemos considerar a Ω^* como un espacio topológico con la topología del orden, y a Ω como un subespacio suyo. Notemos que la topología de subespacio de cualquier intervalo $A \subset \Omega^*$ (en particular, la de cualquier $\alpha \in \Omega^*$) es la misma que la topología

del orden inducido en A por Ω^*. Obsérvese también que todos los miembros de Ω son numerables, y que Ω es el único miembro de Ω^* que no es numerable.

El espacio Ω es un abierto denso de Ω^*, porque $\Omega = [0, \Omega)$, un abierto de la base usual de la topología del orden, y cualquier de abierto de la base de la topología del orden en Ω^* corta a Ω. Si probamos que Ω^* es un espacio compacto y de Hausdorff, deduciremos que es T_4, luego Ω será un espacio de Tychonoff y localmente compacto, por ser un abierto de Ω^*.

En efecto, dados dos puntos distintos α y β de Ω^*, podemos suponer sin pérdida de generalidad, que $\alpha < \beta$, es decir, $\alpha + 1 \leq \beta$. Por lo tanto, $[0, \alpha + 1)$ y $(\alpha + 1, \Omega]$ son dos entornos disjuntos de α y β respectivamente.

Para probar que Ω^* es compacto, vamos a probar que, de hecho, todos los conjuntos de la forma $\gamma + 1 = [0, \gamma]$, con $\gamma \in \Omega^*$ son compactos. Tomemos un recubrimiento $\mathcal{U}$ de $\gamma + 1$ formado por abiertos de la base usual de la topología del orden, que recordamos que es:

$$\mathcal{B} = \{[0, \alpha) \mid \alpha \in \gamma + 1\} \cup \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \gamma + 1\} \cup \{(\alpha, \gamma] \mid \alpha \in \gamma + 1\}.$$

Como $\mathcal{U}$ es un recubrimiento de $\gamma+1$, entonces $\gamma \in \bigcup \mathcal{U}$, luego debe haber un abierto $U_0 \in \mathcal{U}$ de la forma $(\alpha_0, \gamma]$, con $\alpha_0 \in \gamma$. De nuevo, por ser $\mathcal{U}$ un recubrimiento, debe ser $\alpha_0 \in \bigcup \mathcal{U}$, luego tiene que haber un abierto $U_1 \in \mathcal{U}$ tal que $\alpha_0 \in U_1$. El abierto U_1 puede ser de la forma $[0, \alpha_1]$, con $\alpha_1 > \alpha_0$, de la forma (α_1, β_1), con $\alpha_1 < \alpha_0 < \beta_1$, o de la forma $(\alpha_1, \gamma]$, con $\alpha_1 < \alpha_0$. En el primer caso, $\{U_0, U_1\}$ es un subrecubrimiento finito de $\mathcal{U}$. En el segundo y tercer caso, podemos repetir el proceso, y encontrar un abierto U_2 de $\mathcal{U}$ que contenga a α_1. Pero, si repetimos este proceso, en algún punto debemos estar ante el primer caso, pues de lo contrario encontraríamos una sucesión $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ de elementos de $\gamma + 1$ estrictamente decreciente, en contra de que $\gamma + 1$ está bien ordenado. Se deduce que $\mathcal{U}$ tiene un subrecubrimiento finito, por lo que $\gamma + 1$ es un espacio compacto.

Ahora vamos a ver que Ω es pseudocompacto, pero no es de Lindelöf.

El espacio Ω no es de Lindelöf, porque vamos a demostrar que $\mathcal{U} = \{\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ es un recubrimiento abierto de Ω que no admite ningún subrecubrimiento numerable. En efecto, si admitiera un subrecubrimiento $\{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, entonces sería $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n$, unión numerable de conjuntos numerables, en contra de que Ω es no numerable.

Para demostrar que Ω es pseudocompacto, vamos a demostrar que es secuencialmente compacto, y aplicaremos la proposición anterior.

En efecto, si $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos de Ω, entonces está acotada superiormente (en Ω), porque en caso contrario sería (en Ω^*), $\Omega = \sup\{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n$, que es una unión numerable de conjuntos numerables, en contra de que

Ω es no numerable. Por lo tanto, $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene subsucesión convergente, porque es una sucesión acotada.
Deducimos, por lo tanto, que Ω es un espacio de Tychonoff, localmente compacto y secuencialmente compacto (luego numerablemente compacto y pseudocompacto), pero que no es de Lindelöf, luego no es compacto. $\square$

Como en la asignatura de topología del grado solo estudiamos el producto finito de espacios topológicos, vamos a probar algunos resultados de la teoría general:

Definición 1.23. Supongamos que tenemos una familia $\{X_i\}_{i\in I}$ de espacios topológicos. Se define su producto cartesiano por:

$$\prod_{i\in I} X_i = \{f : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} X_i \mid \text{para todo } j \in I, \text{ se verifica que } f(j) \in X_j\}$$

Aunque los elementos de $\prod_{i\in I} X_i$ sean aplicaciones, los denotaremos como si fueran "vectores", es decir, $(x_i)_{i\in I}$ representa a la aplicación:

$$\begin{aligned} x : I &\longrightarrow \bigcup_{i\in I} X_i \\ i &\longmapsto x(i) = x_i \end{aligned}$$

Para un índice $j \in I$, denotaremos por π_j a la aplicación de proyección sobre el j-ésimo factor:

$$\begin{aligned} \pi_j : \prod_{i\in I} X_i &\longrightarrow X_j \\ (x_i)_{i\in I} &\longmapsto x_j \end{aligned}$$

Podemos considerar a $\prod_{i\in I} X_i$ como un espacio topológico con la topología más débil que hace continuas a todas las proyecciones, la que llamaremos topología producto. Es decir, la que tiene como subbase de abiertos a los conjuntos de la forma $\pi_i^{-1}(U_i)$, donde $i \in I$ y U_i es un abierto de X_i. Llamaremos base usual de la topología producto a la que genera esta subbase, es decir, a la formada por los conjuntos de la forma:

$$\pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \pi_{i_2}^{-1}(U_{i_2}) \cap ... \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n}),$$

donde cada U_{i_j} es un abierto de X_{i_j}.
Por último, si $X_i = X$, para todo $i \in I$, denotaremos a $\prod_{i\in I} X_i$ por X^I, por analogía con el producto finito.

Proposición 1.24. Una aplicación $f : X \longrightarrow \prod_{i\in I} X_i$ es continua si, y solo si, para todo $j \in I$ la aplicación $\pi_j \circ f$ es continua.

Demostración. Por la definición de la topología producto en $\prod_{i\in I} X_i$, si f es continua entonces todas las aplicaciones $\pi_j \circ f$ son continuas por ser composición de continuas. Recíprocamente, si todas las aplicaciones $\pi_j \circ f$ son continuas, entonces dado un conjunto $\pi_j^{-1}(U_j)$ de la subbase de abiertos usual de $\prod_{i\in I} X_i$, su contraimagen por f es un abierto: $f^{-1}(\pi_j^{-1}(U_j)) = (f \circ \pi_j)^{-1}(U_j)$. □

Definición 1.25. Si $J \subset I$, denotamos por π_J a la proyección:

$$\begin{aligned} \pi_J : \prod_{i\in I} X_i &\longrightarrow \prod_{j\in J} X_j \\ (x_i)_{i\in I} &\longmapsto (x_j)_{j\in J} \end{aligned}$$

Proposición 1.26. Las proyecciones π_J, con $J \subset I$, son aplicaciones continuas y abiertas.

Demostración. Para la continuidad aplicamos la proposición 1.24. Dado $x \in X = \prod_{i\in I} X_i$, se tiene que $\pi_j(\pi_J(x)) = \pi_j((x_l)_{l\in J}) = \pi_j(x)$, y como π_j es continua por definición, deducimos que π_J es continua.
Para ver que π_J es abierta, vamos a probar que envía conjuntos de una base de abiertos en conjuntos abiertos. Esto es suficiente porque las aplicaciones respetan las uniones de conjuntos. Sea pues $U = \cap_{p=1}^{n} \pi_{i_p}^{-1}(U_{i_p})$ un abierto de la base usual de la topología producto de X, y denotemos por H al conjunto finito $\{i_1, i_2, ..., i_p\}$:

$$\pi_J(U) = \pi_J(\prod_{i\in H} U_i \times \prod_{\substack{i\in I\\ i\notin H}} X_i) = (\prod_{\substack{i\in J\\ i\in H}} U_i) \times (\prod_{\substack{i\in J\\ i\notin H}} X_i) = \bigcap_{\substack{i\in J\\ i\in H}} \pi_i^{-1}(U_i),$$

siendo este último conjunto abierto por ser intersección finita de abiertos. □

Proposición 1.27. El producto de espacios de Tychonoff es de Tychonoff.

Demostración. Veamos primero que el producto de espacios de Hausdorff es de Hausdorff:
Sean x e y dos puntos distintos del espacio $\prod_{i\in I} X_i$, producto de espacios de Hausdorff. Por ser los dos puntos distintos, debe existir $i \in I$ tal que $x_i \neq y_i$. Por ser el espacio X_i de Hausdorff, existen dos abiertos disjuntos U_i, V_i que contienen a x_i e y_i, respectivamente. Entonces los conjuntos $\pi_i^{-1}(U_i)$ y $\pi_i^{-1}(V_i)$ son dos abiertos disjuntos de $\prod_{i\in I} X_i$ que contienen a x e y, respectivamente.
Ahora, para finalizar la prueba, tomemos $a \in X = \prod_{i\in I} X_i$, y F un cerrado de X que no contenga al punto a. Podemos tomar un entorno U de a que no corte a F, y que sea un miembro de la base usual de abiertos de X, es decir, $U = \prod_{i\in I} U_i$, donde $U_i = X_i$, salvo para $i_1, i_2, ..., i_n$, en cuyo caso U_{i_j} es un abierto cualquiera de X_{i_j}.

Por ser cada espacio X_i de Tychonoff, para cada $j \in \{1, 2..., n\}$ existe una función $f_j : X_{i_j} \longrightarrow [0, 1]$ tal que $f(a_{i_j}) = 1$ y $f(X_{i_j} \setminus U_{i_j}) = \{0\}$. La función

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow [0, 1] \\ f(x) &\longmapsto f_1(\pi_{i_1}(x))f_2(\pi_{i_2}(x))...f_n(\pi_{i_n}(x)) \end{aligned}$$

es continua por ser producto de funciones continuas, se anula fuera de U (luego en particular se anula en F), y vale 1 en a, como queríamos. □

Definición 1.28. Sea X un conjunto y $\mathcal{P}$ una colección de subconjuntos de X. Diremos que $\mathcal{P}$ es de carácter finito si $\emptyset \in \mathcal{P}$ y, dado un conjunto $A \subset X$, A pertenece a $\mathcal{P}$ si, y solo si, todo subconjunto finito de A pertenece a $\mathcal{P}$.

Teorema 1.29 (Lema de Tukey)**.** Sea X un conjunto, $\mathcal{P}$ una colección de subconjuntos de X de carácter finito y $A \in \mathcal{P}$. Entonces existe un conjunto B que es maximal (respecto al orden dado en $\mathcal{P}(X)$ por la inclusión) entre los que cumplen que $B \in \mathcal{P}$ y $A \subset B$.

Demostración. Si el conjunto ordenado (por la inclusión) $\Gamma = \{H \subset X \mid H \in \mathcal{P} \text{ y } A \subset H\}$ cumple las hipótesis del Lema de Zorn, entonces tendrá un elemento maximal, y habremos probado lo que queremos.
Para empezar, notemos que $\Gamma \neq \emptyset$, porque $A \in \Gamma$.
Ahora, sea $T = \{H_i \mid i \in I\}$ un subconjunto de Γ totalmente ordenado y no vacío. Veamos que tiene una cota superior. El conjunto $H = \cup T$ contiene a todos los elementos de T, luego si $H \in \Gamma$ habremos terminado.
Como para todo i, $A \subset H_i$, también $A \subset H$. Por otro lado, para probar que $H \in \mathcal{P}$, como $\mathcal{P}$ es de carácter finito, basta probar que, dado un subconjunto finito D de H, D pertenece a $\mathcal{P}$. Para cada $d \in D$, existe H_{i_d} tal que $d \in H_{i_d}$. Como D es finito y T está totalmente ordenado, algún H_{i_d} contendrá a todos los demás, y podemos afirmar que D es un subconjunto finito de $H_{i_d} \in \mathcal{P}$, luego $D \in \mathcal{P}$. Como $\mathcal{P}$ es de carácter finito, deducimos que $H \in \mathcal{P}$. □

Teorema 1.30 (de Tychonoff)**.** El producto de espacios topológicos compactos es compacto.

Demostración. Tomemos un conjunto $\mathcal{F}$ de cerrados de $X = \prod_{i \in I} X_i$ (producto de espacios compactos) con la propiedad de la intersección finita. Puesto que el conjunto de todas las colecciones de subconjuntos de X que tienen la propiedad de la intersección finita es de carácter finito (un conjunto tiene la propiedad de la intersección finita si, y solo si, la tiene todo subconjunto finito suyo, y el vacío tiene la

propiedad de la intersección finita, porque su interserrcción es todo X), por el Lema de Tukey podemos tomar una colección de subconjuntos $\mathcal{B}$ que sea maximal entre las que tienen la propiedad de la intersección finita y contienen a $\mathcal{F}$. Si $\mathcal{B}$ tiene intersección no vacía, lo mismo le ocurrirá a $\mathcal{F}$, ya que está contenido en $\mathcal{B}$.
Antes de continuar con la demostración, vamos a probar dos propiedades que se deducen de la maximalidad de $\mathcal{B}$:
(1) Si $A, B \in \mathcal{B}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{B}$.
(2) Si $A \subset X$ corta a todo conjunto de $\mathcal{B}$, entonces $A \in \mathcal{B}$.
Demostración. En ambos casos se trata de una reducción al absurdo, vamos a suponer que no se cumple la propiedad, y entonces aumentaremos la colección $\mathcal{B}$ a otra $\mathcal{B}'$ que contendrá estrictamente a $\mathcal{B}$ (y por lo tanto a $\mathcal{F}$) y tendrá la propiedad de la intersección finita, en contra de que $\mathcal{B}$ es maximal:
(1) Supongamos que existen $A, B \in \mathcal{B}$ tales que $A \cap B \notin \mathcal{B}$. Definimos $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{A \cap B\}$. Veamos que $\mathcal{B}'$ tiene la propiedad de la intersección finita. En efecto, si $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{B}'$, entonces:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \supset \Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big) \cap A \cap B$$

Y el último conjunto es no vacío por ser una intersección finita de elementos de $\mathcal{B}$.
(2) Utilizando el mismo argumento que en el apartado anterior, dado un conjunto A que corte a todo elemento de $\mathcal{B}$ pero no esté en $\mathcal{B}$, la colección $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{A\}$ contiene a $\mathcal{B}$ y tiene la propiedad de la intersección finita.
Prosiguiendo con la prueba, se trata de encontrar un punto $x \in \cap\mathcal{B}$. Para ello, notemos que para cada $i \in I$, el conjunto de cerrados $\{\overline{\pi_i(B)} \mid B \in \mathcal{B}\}$ tiene la propiedad de la intersección finita, porque si $B_1, B_2, ..., B_n \in \mathcal{B}$ entonces, como tienen intersección no vacía, se deduce que:

$$\bigcap_{j=1}^{n} \overline{\pi_i(B_j)} \supset \bigcap_{j=1}^{n} \pi_i(B_j) \supset \pi_i(\bigcap_{j=1}^{n} B_j) \neq \pi_i(\emptyset) = \emptyset$$

Por lo tanto, como cada X_i es compacto, existe $x_i \in \bigcap\{\overline{\pi_i(B)} \mid B \in \mathcal{B}\}$. Vamos a definir $x = (x_i)_{i\in I}$, y probaremos que $x \in \bigcap\mathcal{B}$.
Si U_i es un entorno de x_i entonces, para cualquier $B \in \mathcal{B}$, como $x_i \in \overline{\pi_i(B)}$, se cumple que $U_i \cap \pi_i(B) \neq \emptyset$. Tomando contraimágenes por la aplicación π_i a ambos lados de la ecuación, deducimos que $\pi_i^{-1}(U_i) \cap B \neq \emptyset$, para todo $B \in \mathcal{B}$. De la propiedad (2) se sigue que $\pi_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{B}$, y de (1) deducimos que toda intersección finita de conjuntos de esta forma también está en $\mathcal{B}$.
Al ser las intersecciones finitas de conjuntos de esta forma una base de la topología

de X, deducimos que para todo U entorno de x, y $B \in \mathcal{B}$ se cumple que $U \cap B \neq \emptyset$, luego $x \in \overline{B}$, como queríamos demostrar. $\square$

Definición 1.31. Sea $\mathcal{F} = \{f_i : X \longrightarrow Y_i \mid i \in I\}$ un conjunto de aplicaciones definidas en X. Diremos que $\mathcal{F}$ separa puntos si para cada par de puntos distintos x, y de X, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Análogamente, diremos que $\mathcal{F}$ separa puntos de cerrados si, para cada cerrado $F \subset X$ y cada punto $x \in X \setminus F$, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) \notin \overline{f(F)}$. Definimos la aplicación de evaluación asociada a $\mathcal{F}$ por:

$$\begin{aligned} e_{\mathcal{F}} : X &\longrightarrow \prod_{i \in I} Y_i \\ x &\longmapsto \big(f_i(x)\big)_{i \in I} \end{aligned}$$

Definición 1.32. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua entre dos espacios topológicos. Se dice que f es una inmersión si induce un homeomorfismo

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow f(X) \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

cuando restringimos el conjunto de llegada a $f(X)$.

Teorema 1.33. Sea $\mathcal{F} = \{f_i : X \longrightarrow Y_i \mid i \in I\}$ un conjunto de aplicaciones definidas en X. Se cumplen las siguientes propiedades:
(1) Si todas las aplicaciones de $\mathcal{F}$ son continuas, entonces $e_{\mathcal{F}}$ también lo es.
(2) Si $\mathcal{F}$ separa puntos, entonces $e_{\mathcal{F}}$ es inyectiva.
(3) Si $\mathcal{F}$ separa puntos de cerrados, entonces $e_{\mathcal{F}} : X \longrightarrow e_{\mathcal{F}}(X)$ es abierta.
(4) Si todas las aplicaciones de $\mathcal{F}$ son continuas, y al menos una de ellas es una inmersión, entonces $e_{\mathcal{F}}$ también es una inmersión.

Demostración. (1) Aplicando la proposición 1.24, como para todo i se cumple que $\pi_i \circ e_{\mathcal{F}} = f_i$ (aplicación continua por hipótesis), deducimos que $e_{\mathcal{F}}$ es continua.
(2) Sean x e y dos puntos distintos de X. Para probar que tienen imágenes distintas por la aplicación $e_{\mathcal{F}}$ notemos que, como $\mathcal{F}$ separa puntos, existe $f_i \in \mathcal{F}$ tal que $f_i(x) \neq f_i(y)$, luego $e_{\mathcal{F}}(x)$ y $e_{\mathcal{F}}(y)$ tienen, al menos, la componente i-ésima distinta, y por tanto son dos puntos distintos.
(3) Sea $U \subset X$ un abierto de X, veamos que $e_{\mathcal{F}}(U)$ es un abierto de $e_{\mathcal{F}}(X)$, probando que es entorno de todos sus puntos. Tomamos un punto genérico de la forma $e_{\mathcal{F}}(x)$, con $x \in U$, y como $\mathcal{F}$ separa puntos de cerrados, existe un $i \in I$ tal que $f_i(x) \notin \overline{f_i(X \setminus U)}$. Por tanto, si definimos:

$$V = \pi_i^{-1}\left(Y_i \setminus \overline{f_i(X \setminus U)}\right)$$

Obtenemos un abierto de $\prod_{i\in I} X_i$ que contiene a $e_{\mathcal{F}}(x)$. Veamos ahora, por reducción al absurdo, que si $e_{\mathcal{F}}(p) \in V$, entonces $p \in U$. En efecto, si no fuera así, podríamos tomar un $p \notin U$ tal que $e_{\mathcal{F}}(p) \in V$. Por la primera condición deducimos que $f_i(p) \in f_i(X\backslash U)$, pero por la segunda condición y la definición de V sabemos que $\pi_i(e_{\mathcal{F}}(p)) = f_i(p) \in Y_i \setminus \overline{f_i(X \setminus U)}$, lo que es absurdo. Por lo tanto, también se cumplirá que si $e_{\mathcal{F}}(p) \in V$, entonces $e_{\mathcal{F}}(p) \in e_{\mathcal{F}}(U)$. Deducimos que $V \cap e_{\mathcal{F}}(X)$ es un entorno de $e_{\mathcal{F}}(x)$ (en el espacio $e_{\mathcal{F}}(X)$) contenido en $e_{\mathcal{F}}(U)$, como queríamos demostrar.
(4) Supongamos que $f \in \mathcal{F}$ es una inmersión, y vamos a demostrar que $\mathcal{F}$ separa puntos y separa puntos de cerrados, y entonces deduciremos de las propiedades anteriores que es una aplicación inyectiva y abierta sobre su imagen, y por lo tanto una inmersión.
Como f es una inmersión, en particular es inyectiva, así que si x e y son dos puntos distintos de X entonces $f(x) \neq f(y)$, y se deduce que $\mathcal{F}$ separa puntos.
Sean ahora $F \subset X$ un cerrado y $x \in X \setminus F$. Como f es una inmersión, respeta las clausuras relativas a $f(X)$, por lo tanto $f(x) \notin \mathrm{cl}_{f(X)}(f(F)) = f(X) \cap \overline{f(F)}$. Como $f(x) \in f(X)$, se deduce que $f(x) \notin \overline{f(F)}$, luego $\mathcal{F}$ separa puntos de cerrados. □

Definición 1.34. Sea $A \subset X$ y $f : A \longrightarrow Y$ una aplicación continua. Si $g : X \longrightarrow Y$ es continua y $g|_A = f$ diremos que g es una extensión (continua) de f (a X).

Proposición 1.35. Una aplicación con llegada en un espacio de Hausdorff y definida en un subespacio denso de un espacio topológico tiene, a lo sumo, una extensión.

Demostración. Si una aplicación definida en un denso tuviera dos extensiones, digamos f y g, entonces el conjunto de puntos donde ambas coinciden es un cerrado que contiene a un denso, luego se trata del espacio total.

□

Teorema 1.36. Sea X un espacio de Hausdorff. Si $f : X \longrightarrow Y$ es continua y $D \subset X$ es un denso de X tal que $f|_D$ es una inmersión, entonces $f(X \setminus D) \subset Y \setminus f(D)$.

Demostración. Supongamos, por reducción al absurdo, que existen $x \in X \setminus D$, y $d \in D$ tales que $f(x) = f(d)$. Entonces, por ser X de Hausdorff podemos tomar un entorno V de d que sea cerrado y no contenga a x. Entonces $f(V \cap D) = U \cap f(D)$, para algún abierto U de Y.
Si H es un entorno de x que no corta a V, entonces, como corta a D (por densidad) y $f|_D$ es un homeomorfismo, tenemos que $f(H)$ no puede estar contenido en U. Puesto que todo entorno de x contiene a uno que no corta a V, se deduce que f no es continua en x, lo cual es absurdo. □

Definición 1.37. Si $A \subset X$ es tal que toda $f \in \mathcal{C}(A)$ tiene una extensión a X, diremos que A está $\mathcal{C}$-sumergido en X. Análogamente, si toda $f \in \mathcal{C}^*(A)$ tiene una extensión a X, diremos que A está $\mathcal{C}^*$-sumergido en X.

Capítulo 2

Compactificaciones: inmersión en cubos

En este capítulo todos los espacios involucrados se supondrán de Tychonoff (pues, como veremos, son exactamente los espacios que pueden compactificarse), y las aplicaciones serán todas continuas, a no ser que se especifique lo contrario.
Definiremos el concepto de compactificación (de Hausdorff) de un espacio topológico, presentaremos un primer método para obtener compactificaciones (la inmersión en cubos), y estudiaremos algunas propiedades básicas del conjunto parcialmente ordenado de las compactificaciones de un espacio de Tychonoff, ilustrando algunas de las ideas con ejemplos. La bibliografía básica de este capítulo es el texto [Ch] de Chandler, aunque el último ejemplo proviene del artículo [SS] de Steiner y Steiner.

Definición 2.1. Una compactificación (de Hausdorff) de X es un par $(\alpha, \alpha X)$ (que normalmente denotaremos tan solo por αX, abusando de la notación) donde αX es un espacio compacto (y de Hausdorff) y $\alpha : X \longrightarrow \alpha X$ es una inmersión tal que $\alpha(X)$ es denso en αX. Como X y $\alpha(X)$ son homeomorfos, normalmente los trataremos como si fueran el mismo espacio, y en ese caso α pasa a ser la aplicación de inclusión.
Al conjunto $\alpha X \setminus X$ se le llama el resto de la compactificación αX.

Ejemplo 2.2. Vamos a dar algunos ejemplos sencillos de compactificaciones:

- El espacio Ω^*, del ejemplo 1.22, es una compactificación de Ω, cuyo resto es el conjunto $\{\Omega\}$.

- Podemos considerar la aplicación

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ x &\longmapsto \left(\frac{2x}{x^2+1}, \frac{x^2-1}{x^2+1}\right) \end{aligned}$$

que es la inversa de la proyección estereográfica de la circunferencia unidad (salvo el polo norte) en la recta real. Es sencillo demostrar que f_1 es una inmersión, luego $(f_1, \mathbb{S}^1)$ es una compactificacion de $\mathbb{R}$.
Se puede hacer una construcción análoga para conseguir una compactificación $(f_n, \mathbb{S}^n)$ de $\mathbb{R}^n$. Observamos que el resto de la compactificación $f_n, n \geq 1$, es siempre unipuntual (el polo norte).

- Como la topología en $\mathbb{R}$ es la del orden, tenemos una inclusión

$$\begin{aligned} i : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

donde el segundo conjunto tiene la topología del orden, y es homeomorfo a $[0,1]$. Por lo tanto $(i, \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\})$ es una compactificación de $\mathbb{R}$. En este caso el resto es el conjunto $\{+\infty, -\infty\}$.
Puesto que $\mathbb{R}$ es homeomorfo a $(0,1)$ (y el homeomorfismo se puede tomar de manera que conserve el orden), esto es equivalente a decir que $(i, [0,1])$ es una compactificación de $(0,1)$.

- Si $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ denota al espacio proyectivo real de dimensión n, y $[x_0, x_1, ..., x_n]$ son las coordenadas homogéneas del punto $\{\lambda(x_0, x_1, ..., x_n) \mid \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$, podemos definir la inmersión:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \\ (x_1, x_2, ..., x_n) &\longmapsto [1, x_1, x_2, ..., x_n] \end{aligned}$$

Sabemos que $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ es compacto porque es homeomorfo a un cociente de $\mathbb{S}^n$, y no es difícil probar que es de Hausdorff, así que $(f, \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}})$ es una compactificación de $\mathbb{R}^n$, y el resto es un hiperplano del infinito, el conjunto $\{[x_0, x_1, ..., x_n] \mid x_0 = 0\}$.

- Ahora vamos a construir un espacio X y una compactificación de X cuyo resto tenga exactamente n puntos, para un $n \in \mathbb{N}$ arbitrario. Consideramos, en el plano complejo $\mathbb{C}$, para cada $k \in \{1, 2, ..., n\}$, el segmento de recta R_k que une el origen con el punto $e^{2\pi i \frac{k}{n}}$, pero que no contiene a este último. Si definimos $X = \cup_{k=1}^n R_k$, entonces X no es compacto (porque no es cerrado) pero, como es acotado, su adherencia en $\mathbb{C}$ también lo es, por lo que nos proporciona una compactificación de X, cuyo resto es el conjunto $\{e^{2\pi i \frac{k}{n}} \mid k \in \{1, 2, ..., n\}\}$.

Definición 2.3. Dadas dos compactificaciones αX y γX de X, diremos que $\alpha X \geq \gamma X$ si existe una (única, por densidad) aplicación continua $f : \alpha X \longrightarrow \gamma X$ que cumpla que $f \circ \alpha = \gamma$. Es decir, que haga el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\alpha X \arrow[rr, "f"] & & \gamma X \\
& X \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[ur, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

Como ya hemos comentado, a veces no distinguiremos entre X y su imagen dentro de una compactificación. Esto justifica que, coloquialmente, a veces diremos que f deja fijos los puntos de X.
Si la aplicación f es además homeomorfismo diremos que las dos compactificaciones son equivalentes, y lo denotaremos por $\alpha X \approx \gamma X$

Lema 2.4. Dos compactificaciones αX y γX de X son equivalentes si, y solo si, $\alpha X \geq \gamma X$ y $\gamma X \geq \alpha X$.

Demostración. Si $\alpha X \approx \gamma X$, entonces existe un homeomorfismo $h : \alpha X \longrightarrow \gamma X$ tal que $h \circ \alpha = \gamma$, y por lo tanto $\alpha X \geq \gamma X$. Además, como h es homeomorfismo, h^{-1} también lo es, y $h^{-1} \circ \gamma = \alpha$, luego $\gamma X \geq \alpha X$.
Recíprocamente, supongamos que $\alpha X \geq \gamma X$ y $\gamma X \geq \alpha X$. Entonces existen dos aplicaciones f, g que hacen conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\alpha X \arrow[rr, bend left=10, "f"] & & \gamma X \arrow[ll, bend left=10, "g"] \\
& X \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[ur, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

Notemos que $\gamma = f \circ \alpha = f \circ g \circ \gamma$, y como γ es una inmersión deducimos que $(f \circ g)\,|_X = Id_X$, y análogamente $(g \circ f)\,|_X = Id_X$. Entonces, $f \circ g$ es una extensión de Id_X, y lo mismo ocurre para $g \circ f$. Por la unicidad de la extensión, deducimos que f y g son inversas la una de la otra. Como ambas son continuas, se tiene que f es un homeomorfismo, como queríamos demostrar. $\square$

Definición 2.5. Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}^*(X)$ es un conjunto de funciones que separa puntos de cerrados (luego también separa puntos por ser X de Hausdorff), entonces el teorema 1.33 nos asegura que la aplicación

$$\begin{aligned} e_{\mathcal{F}} : X &\longrightarrow \prod_{f \in \mathcal{F}} I_f \\ x &\longmapsto (f(x))_{f \in \mathcal{F}} \end{aligned}$$

(donde $I_f = [\alpha_f, \omega_f]$, α_f es el ínfimo de los valores que toma f, y ω_f es el supremo) es una inmersión. Por lo tanto, como por el teorema de Tychonoff $\prod_{f \in \mathcal{F}} I_f$ es un compacto, el par

$$\left(e_{\mathcal{F}}, e_{\mathcal{F}}X = \overline{e_{\mathcal{F}}(X)}\right)$$

es una compactificación de X, que denotaremos por $e_{\mathcal{F}}X$.

Proposición 2.6. Un espacio topológico X admite alguna compactificación si, y solo si, es de Tychonoff.

Demostración. Si X admite una compactificación Y, entonces Y es compacto y de Hausdorff, luego es de Tychonoff, y el corolario 1.7 nos dice que X es de Tychonoff por ser un subespacio de un espacio de Tychonoff.
Por otro lado, si X es de Tychonoff, entonces $\mathcal{C}^*(X)$ separa puntos de cerrados, luego determina a la compactificación $e_{\mathcal{C}^*(X)}X$ de X. □

Teorema 2.7. Para cualquier compactificación αX de X, existe un conjunto $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}^*(X)$ tal que $\alpha X \approx e_{\mathcal{F}}X$.

Demostración. Definamos:

$$\mathcal{F} = C_\alpha = \{f \in \mathcal{C}^*(X) \mid f \text{ tiene una extensión a } \alpha X\}.$$

Vamos a empezar probando que $\mathcal{F}$ separa puntos de cerrados, y así sabremos que determina una compactificación de X.
Si $F \subset X$ es cerrado y $x \in X \setminus F$, como X es un subespacio de αX, existe un cerrado $K \subset \alpha X$ tal que $F = K \cap X$. Como $x \notin F$, entonces $x \notin K$, y por ser αX de Tychonoff, existe una función $f \in \mathcal{C}^*(\alpha X)$ tal que $f(x) \notin \overline{f(K)}$. Entonces la función $f|_X : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, acotada, ciertamente está en $\mathcal{F}$, y además $f|_X(x) \notin \overline{f|_X(F)}$, como queríamos demostrar.
Ahora veamos que $\alpha X \approx e_{\mathcal{F}}X$. Para ello, dada $f \in \mathcal{F}$, f^α denotará a la única extensión de f a αX, y definimos la aplicación

$$\begin{aligned} h : \alpha X &\longrightarrow \prod_{f \in \mathcal{F}} I_f \\ x &\longmapsto (f^\alpha(x))_{f \in \mathcal{F}} \end{aligned}$$

Dada $f \in \mathcal{F}$, se tiene que $\pi_f \circ h = f^\alpha$, luego, por el teorema 1.24, h es continua. Además

$$h \circ \alpha(x) = (f^\alpha(\alpha(x)))_{f \in \mathcal{F}} = (f(x))_{f \in \mathcal{F}} = e_{\mathcal{F}}(x).$$

Esto justifica que $h(\alpha X) = h(\overline{\alpha(X)} \subset \overline{h(\alpha(X))} = \overline{e_{\mathcal{F}}(X)} = e_{\mathcal{F}}X$, luego podemos considerar que, de hecho, $h : \alpha X \longrightarrow e_{\mathcal{F}}X$, y por lo tanto $\alpha X \geq e_{\mathcal{F}}X$. Si probamos

que h es homeomorfismo habremos acabado.
La aplicación h es inyectiva, porque si $h(x) = h(y)$, entonces para toda $f \in \mathcal{F}$, se verifica que $f(x) = f(y)$, luego, como $\mathcal{F}$ separa puntos, debe ser $x = y$.
La aplicación h es sobre, porque como $h(\alpha X) = h(\overline{\alpha(X)}) \supset h(\alpha(X)) = e_{\mathcal{F}}(X)$, h es continua y αX es compacto, tenemos que $h(\alpha X)$ es un subespacio compacto (luego cerrado) de $e_{\mathcal{F}}X$ que contiene a $e_{\mathcal{F}}(X)$, luego debe coincidir con $e_{\mathcal{F}}X$.
Con todo esto hemos probado que h es una aplicación continua, biyectiva, que parte de un espacio compacto y llega a un espacio de Hausdorff, luego es un homeomorfismo, como queríamos demostrar. □

Definición 2.8. Dado un espacio topológico X, si en la colección de todos las conjuntos de funciones continuas y acotadas de X que separan puntos de cerrados consideramos la relación de equivalencia $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}' \Leftrightarrow e_{\mathcal{F}}X \approx e_{\mathcal{F}'}X$, podemos definir el conjunto cociente

$$K(X) = \frac{\{\mathcal{F} \subset \mathcal{C}^*(X) \mid \mathcal{F} \text{ separa puntos de cerrados}\}}{\sim}.$$

Se puede interpretar a $K(X)$ como el "conjunto" de todas las compactificaciones de X (habiendo identificado compactificaciones equivalentes). Esto tiene sentido porque cualquier conjunto de funciones continuas y acotadas de X que separe puntos de cerrados determina una compactificación de X, y cualquier compactificación de X es equivalente a una dada por un conjunto de funciones continuas y acotadas que separa puntos de cerrados.
Podemos definir una relación de orden en $K(X)$ dada por $[\mathcal{F}]_\sim \leq [\mathcal{F}']_\sim \Leftrightarrow e_{\mathcal{F}'}X \geq e_{\mathcal{F}}X$.

Teorema 2.9 (de Lubben)**.** Todo conjunto no vacío de compactificaciones $\{\alpha_i X \mid i \in I\} \subset K(X)$ tiene supremo respecto del orden $\leq$.

Demostración. Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} e : X &\longrightarrow \prod_{i \in I} \alpha_i X \\ x &\longmapsto (\alpha_i(x))_{i \in I} \end{aligned}$$

que, por ser sus componentes inmersiones, es una inmersión (teorema 1.33). Por lo tanto, e determina una compactificación $eX = \overline{e(X)}$. Veamos que es el supremo de $\{\alpha_i X \mid i \in I\}$.
Para demostrar que es una cota superior sea, para cada $j \in I$, $f_j : eX \longrightarrow \alpha_j X$ la restricción a eX de la proyección j-ésima. Aplicando las definiciones, tenemos que

$$f_j(e(x)) = f_j\Big((\alpha_i(x))_{i \in I}\Big) = \alpha_j(x),$$

luego, para todo $j \in I$, se verifica que $eX \geq \alpha_j X$.
Para ver que es de hecho el supremo, supongamos que $\gamma X \in K(X)$ es tal que para cada $i \in I$ existe $g_i : \gamma X \longrightarrow \alpha_i X$ tal que $g_i \circ \gamma = \alpha_i$, y vamos a probar que entonces $\gamma X \geq eX$. Sea:

$$\begin{aligned} f : \gamma X &\longrightarrow \prod_{i\in I} \alpha_i X \\ p &\longmapsto (g_i(p))_{i\in I} \end{aligned}$$

Se trata de una aplicación continua, puesto que sus componentes son continuas, y además

$$f(\gamma(x)) = \Big(g_i(\gamma(x))\Big)_{i\in I} = (\alpha_i(x))_{i\in I} = e(x),$$

luego $f \circ \gamma = e$, lo cual prueba que

$$f(\gamma X) = f\Big(\overline{\gamma(X)}\Big) \subset \overline{f(\gamma(X))} = \overline{e(X)} = eX,$$

por lo tanto $\gamma X \geq eX$, como queríamos demostrar. $\square$

Corolario 2.10. *$K(X)$ tiene un máximo, que denotaremos por βX, la compactificación de Stone-Cech de X.*

Recordamos que, dada una compactificación $\alpha X \in K(X)$, denotamos por C_α al conjunto de funciones continuas y acotadas que determina a αX. Es decir,

$$C_\alpha = \{f \in \mathcal{C}^*(X) \mid f \text{ tiene una extensión a } \alpha X\}.$$

De manera que, como ya demostramos, $\alpha X \approx e_{C_\alpha} X$.

Teorema 2.11. *Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{C}^*(X)$ son dos conjuntos de funciones que separan puntos de cerrados entonces $e_{\mathcal{F}} X \leq e_{\mathcal{G}} X$. Además, dadas dos compactificaciones αX y γX, se cumple que $\alpha X \leq \gamma X$ si, y solo si $C_\alpha \subset C_\gamma$.*

Demostración. Denotemos por ϕ a la restricción a $e_{\mathcal{G}} X$ de la proyección:

$$\pi_{\mathcal{F}} : \prod_{g\in\mathcal{G}} I_g \longrightarrow \prod_{f\in\mathcal{F}} I_f$$

que es continua por ser la restricción de una aplicación continua. Además se cumple que

$$\phi(e_{\mathcal{G}}(x)) = \phi\Big((g(x))_{g\in\mathcal{G}}\Big) = (g(x))_{g\in\mathcal{F}} = e_{\mathcal{F}}(x).$$

Por lo tanto, $e_{\mathcal{G}} X \geq e_{\mathcal{F}} X$ y por lo tanto, $\gamma X \geq \alpha X$, siempre que $C_\alpha \subset C_\gamma$.
Recíprocamente, si $\gamma X \geq \alpha X$, entonces existe $q : \gamma X \longrightarrow \alpha X$ tal que $q \circ \gamma = \alpha$. Si

f tiene una extensión f^α a αX, entonces vamos a ver que $f^\alpha \circ q$ es la extensión de f a γX. En efecto,

$$(f^\alpha \circ q) \circ \gamma = f^\alpha \circ \alpha = f$$

Y por lo tanto $C_\alpha \subset C_\gamma$. $\square$

Teorema 2.12. La compactificación de Stone-Cech de X es equivalente a $e_{\mathcal{C}^*(X)}X$. En consecuencia, X está $\mathcal{C}^*$-sumergido en βX y, por el teorema anterior, βX es la única compactificación de X en la que este está $\mathcal{C}^*$-sumergido.

Demostración. Por definición, $\beta X \geq e_{\mathcal{C}^*(X)}X$. Por otro lado, $C_\beta \subset \mathcal{C}^*(X)$, luego por el teorema anterior también $\beta X \leq e_{\mathcal{C}^*(X)}X$, y por el lema 2.4 son equivalentes. $\square$

Corolario 2.13. Un espacio de Hausdorff es compacto si, y solo si, es homeomorfo a un subespacio cerrado de un cubo $[0,1]^I$, para un conjunto de índices I adecuado.

Demostración. Si X es compacto, entonces $X = \beta X \approx e_{\mathcal{C}^*(X)}X$, que es un subespacio cerrado de $\prod_{f \in \mathcal{C}^*(X)} I_f$. Como cada I_f es homeomorfo a $[0,1]$, se deduce que X es homeomorfo a un subespacio cerrado de $[0,1]^{\mathcal{C}^*(X)}$.
Recíprocamente, si X es un subespacio cerrado de $[0,1]^I$ entonces, por el teorema de Tychonoff, X es un cerrado de un compacto, luego X es compacto. $\square$

Ejemplo 2.14 ([Ch], 4.12)**.** Ya comentamos que el espacio Ω^* (ejemplo 1.22) es una compactificación de Ω. Vamos a demostrar que, de hecho, Ω está $\mathcal{C}^*$-sumergido en Ω^*, para deducir que $\Omega^* = \beta\Omega$.

Demostración. Vamos a probar una condición más fuerte: toda función continua y acotada (o, equivalentemente, continua, puesto que Ω es pseudocompacto) de Ω es constante a partir de un cierto punto. Es decir, para cada $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, existen $\alpha \in \Omega$ y $r \in \mathbb{R}$ tal que si $\beta \geq \alpha$, entonces $f(\beta) = r$. Esto nos permite extender a la función f a Ω^* definiendo $f(\Omega) = r$.
Sea $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Para cada $\sigma \in \Omega$, denotamos por $S(\sigma)$ al intervalo $[\sigma, \Omega)$. Obsérvese que $S(\sigma)$ es un conjunto no numerable bien ordenado, y cualquier sección suya (esto es, cualquier intervalo $[\sigma, \alpha)$, con $\sigma < \alpha < \Omega$) es numerable. Deducimos que $S(\sigma)$ es un conjunto ordenado isomorfo a Ω, luego en particular, como la topología de subespacio de $S(\sigma)$ coincide con la del orden inducido, $S(\sigma)$ es homeomorfo a Ω. Lo que tratamos de probar es que existe un $\alpha \in \Omega$ tal que $f|_{S(\alpha)}$ es constante.
Como $S(\sigma)$ es homeomorfo a Ω, que es numerablemente compacto, $f(S(\sigma))$ también es numerablemente compacto, luego compacto (por ser métrico), luego cerrado en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, el conjunto de cerrados $\{f(S(\sigma)) \mid \sigma \in \Omega\}$ de $f(\Omega)$ (un compacto) tiene intersección no vacía, pues tiene la propiedad de la intersección finita. Sea $r \in \mathbb{R}$ un

punto de esta intersección.
El conjunto $H = f^{-1}(r)$ es un cerrado de Ω y, como corta a cada $S(\sigma)$, no es acotado en Ω. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $K_n = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus (r - \frac{1}{n}, r + \frac{1}{n}))$ es un cerrado de Ω que no corta a H. Eso implica que K_n debe ser acotado, pues si no lo fuera, y tomaramos dos sucesiones estrictamente crecientes $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}$ de puntos de H y $(\beta_k)_{k=1}^{\infty}$ de puntos de K_n, entonces el punto $\gamma = \cup_{k\in\mathbb{N}} \max\{\alpha_k, \beta_k\}$ sería adherente tanto a H como a K_n, y como ambos son cerrados, eso implicaría que no son disjuntos.
Se deduce que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un $\alpha_n \in \Omega$ que es cota superior de K_n. Definimos $\alpha = (\cup_{n\in\mathbb{N}}\alpha_n) + 1$, y vamos a ver que $f|_{S(\alpha)} = r$. En efecto, sea $\beta \geq \alpha$, entonces $\beta > \alpha_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\beta \notin K_n$, para ningún $n \in \mathbb{N}$, luego $\beta \in H$, así que $f(\beta) = r$, como queríamos demostrar. □

Definición 2.15. Sea $\alpha X \in K(X)$ y sea $\{f_i : X \longrightarrow Y_i \mid i \in I\}$ un conjunto de aplicaciones continuas, donde cada Y_i es compacto. Como α es una inmersión, también lo será la aplicación de evaluación $c_{\mathcal{F}}$ asociada al conjunto $\mathcal{F} = \{\alpha\} \cup \{f_i \mid i \in I\}$, que tiene llegada en el espacio compacto $\alpha X \times \prod_{i\in I} Y_i$. Por lo tanto, en estas condiciones, $c_{\mathcal{F}}X = \overline{c_{\mathcal{F}}(X)}$ es una compactificación de X.

Más adelante veremos un ejemplo sencillo de aplicación de la construcción anterior.

Teorema 2.16. Sea $\alpha X \in K(X)$ y $\{f_i : X \longrightarrow Y_i \mid i \in I\}$ un conjunto de aplicaciones continuas, donde cada Y_i es un espacio compacto. Si definimos el conjunto $\mathcal{F} = \{\alpha\} \cup \{f_i \mid i \in I\}$, entonces podemos extender cada f_j a $c_{\mathcal{F}}X$, y además $c_{\mathcal{F}}X \geq \alpha X$.

Demostración. Sea f_j^* la restricción a $c_{\mathcal{F}}X$ de la proyección sobre Y_j. Se trata de una aplicación continua por ser la restricción de una que es continua, y es la extensión a $c_{\mathcal{F}}X$ de f_j porque

$$f_j^*(c_{\mathcal{F}}(x)) = \pi_j\Big(\alpha(x), \big(f_i(x)\big)_{i\in I}\Big) = f_j(x).$$

Análogamente, si α^* denota a la restricción a $c_{\mathcal{F}}X$ de la proyección sobre αX, entonces

$$\alpha^*(c_{\mathcal{F}}(x)) = \pi_\alpha\Big(\alpha(x), \big(f_i(x)\big)_{i\in I}\Big) = \alpha(x),$$

y concluimos que $c_{\mathcal{F}}X \geq \alpha X$. □

Corolario 2.17. Si $f : X \longrightarrow Y$ es continua e Y es compacto, entonces f se puede extender a βX.

Demostración. Por el teorema anterior, f se puede extender a $c_{\{\beta,f\}}X$. Como $\beta X \geq c_{\{\beta,f\}}X$ por definición, y se da la desigualdad contraria por el teorema anterior, ambas compactificaciones deben coincidir, y por tanto f se puede extender a βX. □

Teorema 2.18. La compactificación de Stone-Cech está caracterizada por la propiedad anterior.

Demostración. Supongamos que $\alpha X \in K(X)$ es tal que toda aplicación de X en un espacio compacto se puede extender a αX. Entonces, en particular, toda función de $\mathcal{C}^*(X)$ se puede extender a αX, luego $C_\alpha = \mathcal{C}^*(X)$, y por el teorema 2.12, se deduce que $\alpha X = \beta X$. $\square$

Teorema 2.19. Si $\alpha X \geq \gamma X$, entonces γX es homeomorfo a un espacio cociente de αX.

Demostración. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\alpha X = e_{C_\alpha} X$ y $\gamma X = e_{C_\gamma} X$. En este caso, sabemos por la demostración del teorema 2.11 que la aplicación f dada por la restricción a αX de la proyección π_{C_γ} es continua y tal que $f \circ \alpha = \gamma$. Además, por ser αX compacto y γX de Hausdorff, es una aplicación cerrada, y como X es denso en γX, debe ser sobreyectiva, luego es una aplicación cociente, y eso nos garantiza que existe un único homeomorfismo:

$$\begin{aligned} h : \alpha X / R &\longrightarrow \gamma X \\ [x]_R &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

donde R es la relación de equivalencia que tiene como clases a las fibras $f^{-1}(y)$, con $y \in \gamma X$. $\square$

Teorema 2.20. Un conjunto $\{\alpha_i X \mid i \in I\} \subset K(X)$ tiene ínfimo si, y solo si, $\cap_{i \in I} C_{\alpha_i}$ separa puntos de cerrados.

Demostración. Para empezar, si existe $\alpha X = \text{ínf}\{\alpha_i X \mid i \in I\}$, entonces, por el teorema 2.11, $C_\alpha \subset C_{\alpha_i}$ para todo $i \in I$, luego $C_\alpha \subset \cap_{i \in I} C_{\alpha_i}$, y como C_α separa puntos de cerrados, también lo hará $\cap_{i \in I} C_{\alpha_i}$.
Recíprocamente, si $C = \cap_{i \in I} C_{\alpha_i}$ separa puntos de cerrados, entonces por el teorema 2.11, para todo i se cumple que $\alpha_i X \geq e_C X$, luego $e_C X$ es una cota inferior de $\{\alpha_i X \mid i \in I\}$, veamos que de hecho es el ínfimo. Si $\alpha X \in K(X)$ es tal que $\alpha X \leq \alpha_i X$ para todo i, entonces $C_\alpha \subset C_{\alpha_i}$ para todo i, y en consecuencia $C_\alpha \subset C$, luego $e_C X \geq \alpha X$. Por lo tanto, $e_C X$ es el ínfimo de $\{\alpha_i X \mid i \in I\}$, como queríamos demostrar. $\square$

Teorema 2.21 (de Lubben)**.** Cada subconjunto de $K(X)$ tiene ínfimo si, y solo si, X es localmente compacto.

Demostración. Primero vamos a demostrar que si X no es localmente compacto, entonces $K(X)$ no tiene una cota inferior, y por tanto no tendrá un ínfimo. Más concretamente, dada $\alpha X \in K(X)$, buscamos $C \subset \mathcal{C}^*(X)$ tal que $e_C X < \alpha X$.
Como X no es localmente compacto, $\alpha X \setminus X$ no puede ser cerrado en αX, porque de ser así, X sería un abierto de αX, que es localmente compacto, y entonces X sería localmente compacto. Por lo tanto $\alpha X \setminus X$ no puede ser unipuntual, y existen dos puntos distintos x_1, x_2 de $\alpha X \setminus X$. Podemos definir:

$$C = \{f \in C_\alpha \mid f^\alpha(x_1) = f^\alpha(x_2)\}$$

Vamos a probar ahora que C separa puntos de cerrados de X, y por lo tanto determina una compactificación de X. Sea F un cerrado de X y $x \in X \setminus F$. Por ser X un subespacio de αX, existe $G \subset \alpha X$ cerrado tal que $F = G \cap X$. Notemos que $x \notin G$, luego, como αX es de Tychonoff, existe una función $g : \alpha X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 0$ y $g(G \cup \{x_1, x_2\}) = \{1\}$. Si definimos $f = g|_X$, f es una función continua de X en $\mathbb{R}$, y $0 = f(x) \notin \{1\} = \overline{f(F)}$. Además, $f^\alpha = g$, luego $1 = f^\alpha(x_1) = f^\alpha(x_2)$, así que $f \in C$, lo que queríamos demostrar.
Como $C \subset C_\alpha$, por el teorema 2.11, $e_C X \leq \alpha X$. Por lo tanto, para probar que no son iguales, si aplicamos de nuevo el teorema 2.11, basta encontrar una función $h \in C_\alpha$ que no pueda extenderse a $e_C X$. Para ello, tomemos una función $h^\alpha : \alpha X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $h^\alpha(x_1) \neq h^\alpha(x_2)$ (que existe porque αX es de Tychonoff). Vamos a identificar a αX con $e_{C_\alpha} X$, y recordemos el siguiente hecho general: si y es un punto de un espacio producto $\prod_{i \in I} X_i$, entonces $y = (\pi_i(y))_{i \in I}$. Ahora supongamos, por reducción al absurdo, que h tiene una extensión h^C a $e_C X$. En ese caso, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
e_{C_\alpha}X \arrow[rr, "\pi_C"] \arrow[ddr, "h^\alpha"'] & & e_C X \arrow[ddl, "h^C"] \\
& X \arrow[ul, "e_{C_\alpha}"'] \arrow[ur, "e_C"] \arrow[d, "h"] & \\
& \mathbb{R} &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, debe cumplirse que $h^\alpha = h^C \circ \pi_C$. Pero esto es absurdo, porque $h^\alpha(x_1) \neq h^\alpha(x_2)$, mientras que, por la definición de C,

$$\begin{aligned} h^C \circ \pi_C(x_1) &= h^C\Big(\pi_C(f^\alpha(x_1)_{f \in C_\alpha})\Big) = h^C\big((f^\alpha(x_1)_{f \in C})\big) = h^C\big((f^\alpha(x_2)_{f \in C})\big) \\ &= h^C\Big(\pi_C(f^\alpha(x_2)_{f \in C_\alpha})\Big) = h^C \circ \pi_C(x_2). \end{aligned}$$

Ahora supongamos que X es localmente compacto, y vamos a buscar un subconjunto C de $\mathcal{C}^*(X)$ que separe puntos de cerrados y que esté contenido en cualquier C_α para $\alpha X \in K(X)$. Si lo conseguimos, cualquier intersección $\cap_{i\in I} C_{\alpha_i}$ contendrá a C, y por tanto separará puntos de cerrados. El teorema anterior nos permite deducir que todo subconjunto de $K(X)$ tendrá un ínfimo.
Definimos, pues:

$$C = \{f \in \mathcal{C}^*(X) \mid \text{para todo } \varepsilon > 0 \text{ existe } K \subset X \text{ compacto tal que } f(K) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)\}.$$

Para ver que C separa puntos de cerrados, tomamos $F \subset X$ cerrado y $x \in X \setminus F$. Por ser X de Tychonoff y localmente compacto, podemos tomar un entorno compacto K de x que no corte a F. Entonces, existirá $f : X \longrightarrow [0, 1]$ tal que $f(x) = 1$ y $f(X \setminus \mathring{K}) = \{0\}$. La función f separa al punto x del cerrado F, y dado $\varepsilon > 0$, se verifica que $f(X \setminus K) = \{0\} \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$, luego $f \in C$.
Por último, si $\alpha X \in K(X)$ veamos que $C \subset C_\alpha$. Dada una función $f \in C$, la podemos extender a una función $f^\alpha : \alpha X \longrightarrow \mathbb{R}$ por 0, y vamos a probar que la función resultante es continua.
La función f^α es continua en todos los puntos de X, porque X es un abierto de αX (porque X es un subespacio denso y localmente compacto del espacio de Hausdorff αX), y $f^\alpha|_X = f$.
Por otro lado, si $p \in \alpha X \setminus X$, dado $\varepsilon > 0$, por ser $f \in C$, existe un compacto $K \subset X$ tal que $f(X \setminus K) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$. Entonces, $\alpha X \setminus K$ es un entorno de p, y como $f^\alpha(\alpha X \setminus X) = \{0\}$, se deduce que $f^\alpha(X \setminus K) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$, y por lo tanto f^α es continua en p. □

Definición 2.22. Si X es localmente compacto, denotaremos por ωX al mínimo elemento de $K(X)$, que también llamaremos la compactificación de Alexandroff, o compactificación por un punto de X. Esto es porque, por la prueba del teorema anterior, si $\alpha X \setminus X$ tiene más de un punto, entonces hay una compactificación de X menor que αX, por lo tanto $\omega X \setminus X$ debe ser unipuntual. Habitualmente llamaremos ∞ al único punto de $\omega X \setminus X$.

Recordamos ahora un resultado conocido sobre la topología de ωX.

Proposición 2.23. Los abiertos de ωX son exactamente los conjuntos que cumplen una de las siguientes propiedades:
(1) Son abiertos de X.
(2) Son complementarios de compactos contenidos en X.

Demostración. Como X es abierto en ωX (por ser el complementario de un conjunto unipuntual, luego cerrado), los conjuntos de tipo (1) son abiertos en ωX. Por otro

lado, un compacto de X es cerrado en ωX, luego su complementario será abierto, y deducimos que los conjuntos de tipo (2) también son abiertos.
Recíprocamente, tomemos un abierto $A \subset \omega X$ y veamos que debe ser de tipo (1) o de tipo (2). Si $A \subset X$, entonces A es de tipo (1), por ser el corte con X de un abierto de ωX. En caso contrario, si $\infty \in A$, entonces $\omega X \setminus A$ es un cerrado (luego compacto) contenido en X, y A es su complementario, luego A es de tipo (2). □

Proposición 2.24. Si $\alpha X \in K(X)$ y $\alpha X \setminus X = \{p\}$ entonces $\alpha X \approx \omega X$.

Demostración. Por definición de ωX, sabemos que $\omega X \leq \alpha X$, y por lo tanto existe una aplicación continua y sobreyectiva (teorema 2.19) $f : \alpha X \longrightarrow \omega X$ que coincide con la identidad en X. Por lo tanto debe ser $f(p) = \infty$, así que f es una aplicación continua y biyectiva entre espacios compactos y de Hausdorff , luego es un homeomorfismo (que deja fijos a los puntos de X), y se deduce que $\alpha X \approx \omega X$. □

Proposición 2.25. Si $n > 1$, entonces la única compactificación de $\mathbb{R}^n$ con resto finito es $\omega\mathbb{R}^n$.

Demostración. Basta que probemos que $\mathbb{R}^n$ no admite una compactificación cuyo resto tenga dos puntos, pues si $\alpha\mathbb{R}^n$ es una compactificación de $\mathbb{R}^n$ cuyo resto es finito y tiene más de dos puntos, podemos construir una compactificación de $\mathbb{R}^n$ cuyo resto tiene dos puntos, identificando mediante una relación de equivalencia todos los puntos de $\alpha\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n$ salvo uno.
Supongamos, por reducción al absurdo, que $\mathbb{R}^n$ tiene una compactificación $\alpha\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \cup \{p, q\}$. Como $\alpha\mathbb{R}^n$ es un espacio de Hausdorff, podemos encontrar dos abiertos disjuntos G'_1 y G'_2 de $\alpha\mathbb{R}^n$ que contengan a p y q respectivamente. Si definimos

$$G_1 = \mathbb{R}^n \cap G'_1 = G'_1 \setminus \{p\},$$

$$G_2 = \mathbb{R}^n \cap G'_2 = G'_2 \setminus \{q\},$$

$$K = \mathbb{R}^n \setminus (G_1 \cup G_2) = \alpha\mathbb{R}^n \setminus (G'_1 \cup G'_2),$$

entonces K es el complementario de un abierto de $\alpha\mathbb{R}^n$, luego es compacto. Sin embargo, $K \cup G_1$ no puede ser compacto, pues si lo fuera sería cerrado en $\alpha\mathbb{R}^n$, y entonces $G'_2 \cup \{p\}$ (su complementario), sería abierto, y entonces el conjunto unipuntual $\{p\} = G'_1 \cap (G'_2 \cup \{p\})$ también sería abierto por ser intersección de dos abiertos. Como $\{p\}$ es cerrado porque $\alpha\mathbb{R}^n$ es de Hausdorff, esto implicaría que p es un punto aislado de $\alpha\mathbb{R}^n$, luego no puede ser adherente a $\mathbb{R}^n$, en contra de que $\mathbb{R}^n$ es denso en $\alpha\mathbb{R}^n$. Análogamente se prueba que $K \cup G_2$ no puede ser compacto.
Si recopilamos lo que hemos probado, tenemos que $\mathbb{R}^n = K \cup G_1 \cup G_2$ (unión disjunta), K es compacto, pero $K \cup G_1$ y $K \cup G_2$ no lo son. Por lo tanto, K es acotado

y G_1, G_2 no pueden serlo. Tomemos una bola $B \subset \mathbb{R}^n$ que contenga a K, y que no podrá contener ni a G_1 ni a G_2, luego podemos tomar también dos puntos $g_1 \in G_1 \setminus B$ y $g_2 \in G_2 \setminus B$. Ambos puntos están en $\mathbb{R}^n \setminus B$, que, como $n > 1$, es un conjunto conexo por arcos. Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus B$ una curva biyectiva que una los puntos g_1 y g_2. Sea

$$A = \{t \in [0,1] \mid f([0,t]) \subset G_1\}.$$

Como A no es vacío ($0 \in A$), podemos definir $p = \sup A$.
Hemos llegado a una contradicción, porque vamos a demostrar que $f(p)$ es un punto de $\mathbb{R}^n$ que no está en K, ni en G_1, ni en G_2, en contra de que $\mathbb{R}^n = K \cup G_1 \cup G_2$. En efecto, $f(p)$ no puede estar en K porque no está en B. Tampoco puede ser $f(p) \in G_1$, porque entonces, como G_1 es un abierto, y f es una inmersión, existe $\varepsilon > 0$ tal que $f([0, p+\varepsilon]) \subset G_1$, en contra de que $p = \sup A$. Análogamente, tampoco puede ser $f(p) \in G_2$, porque entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $f([0, p-\varepsilon]) \subset G_2$, así que p no puede ser el supremo de A. $\square$

Teorema 2.26. Sea X un espacio localmente compacto, $\alpha X \in K(X)$ y $\{f_i : X \longrightarrow Y_i \mid i \in I\}$ un conjunto de aplicaciones continuas, donde los Y_i son compactos. Entonces se cumple que la compactificación $c_{\mathcal{F}}X$ asociada a $\mathcal{F} = \{\alpha\} \cup \{f_i \mid i \in I\}$ es la mínima a la cual se pueden extender todas las f_i de manera continua si, y solo si, $\alpha X = \omega X$.

Demostración. Supongamos que $\alpha X = \omega X$, y sea $\gamma X \in K(X)$ tal que todas las f_i admiten extensión f_i^γ a γX. Veamos que entonces $\gamma X \geq c_{\mathcal{F}}X$. Como $\gamma X \geq \omega X$, sabemos que existe una única aplicación continua (que restringida a X es la identidad) $f : \gamma X \longrightarrow \omega X$. Definimos la aplicación $g : \gamma X \longrightarrow \omega X \times \prod_{i\in I} Y_i$ de evaluación asociada al conjunto $\{\{f\} \cup \{f_i^\gamma \mid i \in I\}\}$. Entonces, se cumple que:

$$g(\gamma(x)) = \Big(f(\gamma(x)), \big(f_i^\gamma(\gamma(x))\big)_{i\in I}\Big) = \Big(\omega(x), \big(f_i(x)\big)_{i\in I}\Big) = c_{\mathcal{F}}(x)$$

Esto justifica que la aplicación g se puede considerar con llegada en $c_{\mathcal{F}}X$ y que $g \circ \gamma = c_{\mathcal{F}}$, luego $\gamma X \geq c_{\mathcal{F}}X$.
Recíprocamente, supongamos que $\alpha X > \omega X$, y vamos a encontrar una compactificación que sea menor estrictamente que $c_{\mathcal{F}}X$ y a la que podamos extender de manera continua todas las f_i. En concreto, vamos a probar que si $\mathcal{G} = \{\{\omega\} \cup \{f_i \mid i \in I\}\}$, entonces $c_{\mathcal{F}}X > c_{\mathcal{G}}X$, porque en ese caso, por el teorema 2.16 todas las f_i tendrán extensión a $c_{\mathcal{G}}X$ y habremos probado lo que queremos.
Primero, si $f : \alpha X \longrightarrow \omega X$ denota a la aplicación continua que deja fijos a los

puntos de X, entonces se define

$$\begin{aligned} g : c_{\mathcal{F}}X &\longrightarrow c_{\mathcal{G}}X \\ (x, y) &\longmapsto (f(x), y) \end{aligned}$$

La aplicación g es continua por tener componentes continuas, y además cumple que $g \circ c_{\mathcal{F}} = c_{\mathcal{G}}$. Por lo tanto $g : c_{\mathcal{F}}X \longrightarrow c_{\mathcal{G}}X$ es la aplicación continua que deja fijos a los puntos de X, lo que nos permite deducir que $c_{\mathcal{F}}X \geq c_{\mathcal{G}}X$. Para ver que de hecho son dos compactificaciones distintas probaremos, por reducción al absurdo, que g no es un homeomorfismo.
Sean p_1 y p_2 dos puntos distintos de $\alpha X \setminus X$ (que existen porque $\alpha X > \omega X$) y $\pi_\alpha : c_{\mathcal{F}}X \longrightarrow \alpha X$ la restricción a $c_{\mathcal{F}}X$ de la primera proyección. Como π_α es sobre y deja fijos a los puntos de X, podemos tomar dos puntos (distintos) $q_1, q_2 \in c_{\mathcal{F}}X \setminus X$ tales que $\pi_\alpha(q_1) = p_1$ y $\pi_\alpha(q_2) = p_2$. Como estamos suponiendo que g es un homeomorfismo, $g(q_1) \neq g(q_2)$, y puesto que la segunda componente de g es la identidad, los puntos $g(q_1)$ y $g(q_2)$ de $c_{\mathcal{G}}X \setminus X$ tendrán la primera componente distinta. Aplicamos el teorema 1.36, a la restricción a $c_{\mathcal{G}}X$ de la primera proyección $\pi_\omega : c_{\mathcal{G}}X \longrightarrow \omega X$, y se deduce que $\pi_\omega(c_{\mathcal{G}}X \setminus X) \subset \omega X \setminus X$. Por lo tanto, $\pi_\omega(g(q_1))$ y $\pi_\omega(g(q_2))$ son dos puntos distintos de $\omega X \setminus X$, lo cual es absurdo. Por lo tanto g no puede ser homeomorfismo, tal y como queríamos demostrar. □

Ejemplo 2.27. Supongamos que X es un espacio localmente compacto y de Hausdorff, pero no compacto, y que K es un espacio compacto y de Hausdorff. Si tenemos una aplicación continua $f : X \longrightarrow K$, tal que para todo compacto $C \subset X$ se cumple que $f(X \setminus C)$ es denso en K, entonces la compactificación $c_{\mathcal{F}}X$ asociada a $\mathcal{F} = \{\omega, f\}$ verifica que $c_{\mathcal{F}}X \setminus X$ (el resto de la compactificación) es homeomorfo a K.

Demostración. Notemos que $c_{\mathcal{F}}X$ no es otra cosa que la adherencia (en $\omega X \times K$) del grafo de f, es decir

$$c_{\mathcal{F}}X = \overline{G(f)} = \overline{\{(x, f(x)) \mid x \in X\}}$$

y la inmersión $c_{\mathcal{F}}$ es la aplicación que envía a cada x en $(x, f(x)) \in G(f)$.
Puesto que K es de Hausdorff, $G(f)$ es un cerrado de $X \times K$, así que $\overline{G(f)} \setminus G(f) \subset \{\infty\} \times K$. Así pues, todo se reduce a probar que $\overline{G(f)} \setminus G(f) = \{\infty\} \times K$, y esto último, como veremos, es consecuencia de la condición de densidad impuesta a f.
Sea $k \in K$. Veamos que $(\infty, k) \in \overline{G(f)}$. Tomamos, pues un abierto de la base usual de la topología producto que contenga a (∞, k). Este abierto será de la forma $(\omega X \setminus C) \times U$, donde C es un compacto de X y U un abierto de K que contiene a k. Como $f(X \setminus C)$ es denso en K, existe un $x \in X \setminus C$ tal que $f(x) \in U$, luego

$(x, f(x)) \in G(f) \cap ((\omega X \setminus C) \times U)$, y se deduce que $(\infty, k) \in \overline{G(f)}$, como queríamos demostrar. $\square$

Un caso concreto de la situación anterior se obtiene cuando $X = (0, 1]$, $K = [-1, 1]$ y $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$. Eso nos proporciona una compactificación de $(0, 1]$ con resto homeomorfo a $[-1, 1]$.

Capítulo 3

El método de Wallman-Frink

El método de inmersión en cubos es muy útil, pues nos permite obtener todas las compactificaciones de un espacio de Tychonoff, pero tiene una deficiencia, y es que no nos da una muy buena idea sobre "quienes" son los puntos del resto de la compactificación. Si bien estas descripciones siempre van a ser limitadas, pues una buena parte de la topología relacionada con la compacidad depende del axioma de elección, en este capítulo presentamos una nueva forma de compactificar, en la que está un poco más claro quienes son los puntos que añadimos.
Se presentará el concepto de base normal $\mathscr{Z}$ de un espacio topológico X, y de $\mathscr{Z}$-filtro, y después se enunciarán sus propiedades básicas, para construir una compactificación de X asociada a $\mathscr{Z}$. Después estudiaremos con más detalle el caso en el que $\mathscr{Z}$ es la colección de los ceroconjuntos de X, y veremos la relación que tienen los $\mathscr{Z}$-filtros con los ideales de $\mathcal{C}(X)$, para terminar demostrando que, en este caso particular, la compactificación que se obtiene es βX.
Para el estudio de los $\mathscr{Z}$-filtros nos hemos basado en el libro [AS] de Alò y Saphiro y en los apuntes [Iv] de Ivorra, mientras que para el caso particular de los ceroconjuntos hemos utilizado el método de Chandler ([Ch]).

Definición 3.1. Haciendo abstracción de las propiedades que poseen los conjuntos cerrados de un espacio topológico T_4 (normal y de Hausdorff), diremos que un conjunto $\mathscr{Z}$ de cerrados de un espacio topológico X es una base normal de cerrados de X si posee las siguientes propiedades:
(1) Las uniones e intersecciones finitas de miembros de $\mathscr{Z}$ son miembros de $\mathscr{Z}$.
(2) Si F es un cerrado de X, y $x \in X \setminus F$, entonces existe $Z \in \mathscr{Z}$ tal que $x \in Z$ y $Z \cap F = \emptyset$.
(3) Si A_1 y A_2 son dos miembros disjuntos de $\mathscr{Z}$, entonces existen dos elementos Z_1, Z_2 de $\mathscr{Z}$ tales que $A_1 \cap Z_1 = \emptyset$, $A_2 \cap Z_2 = \emptyset$ y $X = Z_1 \cup Z_2$.
(4) $\mathscr{Z}$ es una base de los cerrados de X.

Observamos que la condición (1) implica (puesto que $\emptyset$ es un conjunto finito) que $\emptyset, X \in \mathcal{Z}$.

Ejemplo 3.2. Veamos algunos ejemplos de bases normales:

- Como ya hemos comentado, si X es un espacio normal, el conjunto de todos los cerrados de X cumple las cuatro propiedades anteriores, luego es una base normal de X. Obsérvese, por lo tanto, que si X es un espacio discreto, entonces $\mathcal{P}(X)$ es una base normal de X.

- Si X es un espacio de Tychonoff, veamos que la colección de todos los ceroconjuntos de X es una base normal de X:

Demostración. (1) El vacío es el ceroconjunto de la función 1, X es el ceroconjunto de la función nula, y además $Z(f_1) \cup Z(f_2) = Z(f_1 f_2)$ y $Z(f_1) \cap Z(f_2) = Z(f_1^2 + f_2^2)$, luego la colección es cerrada para uniones e intersecciones finitas.
(2) Esta condición es exactamente decir que X es completamente regular.
(3) Supongamos que $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^*(X)$ son tales que $Z(f_1) \cap Z(f_2) = \emptyset$. Llamemos $A_1 = Z(f_1)$ y $A_2 = Z(f_2)$. Consideramos la función

$$g = \frac{|f_1|}{|f_1| + |f_2|},$$

que ciertamente es continua (porque no hay puntos de X en los que f_1 y f_2 se anulen simultáneamente), y acotada, pues $|g| \leq 1$.
Definamos ahora los ceroconjuntos:

$$Z_1 = \left\{x \in X \mid g(x) \geq \frac{1}{2}\right\} = \left\{x \in X \mid \text{mín}\{g - \frac{1}{2}, 0\}(x) = 0\right\}$$

$$Z_2 = \left\{x \in X \mid g(x) \leq \frac{1}{2}\right\} = \left\{x \in X \mid \text{máx}\{g - \frac{1}{2}, 0\}(x) = 0\right\}$$

Entonces se verifica que $A_1 \cap Z_1 = \emptyset$, $A_2 \cap Z_2 = \emptyset$, y $X = Z_1 \cup Z_2$.
(4) Probamos en la proposición 1.6 que $\{Z(f) \mid f \in \mathcal{C}^*(X)\}$ es una base de cerrados de X cuando X es de Tychonoff. □

Definición 3.3. Si $\mathcal{Z}$ es una base normal de cerrados de X y $\mathcal{F} \subset \mathcal{Z}$, se dice que $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{Z}$-filtro si:
(1) Dados $A, B \in \mathcal{F}$, también $A \cap B \in \mathcal{F}$.
(2) Si $F \in \mathcal{F}$, $Z \in \mathcal{Z}$ y $Z \supset F$, entonces $Z \in \mathcal{F}$.
(3) $\mathcal{F}$ es no vacío y $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
Si además de estás tres propiedades, $\mathcal{F}$ es maximal para la relación de contención en el conjunto de todos los $\mathcal{Z}$-filtros, diremos que $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{Z}$-ultrafiltro.

Si A es subconjunto de $\mathcal{Z}$ cerrado para intersecciones finitas, entonces engendra un $\mathcal{Z}$-filtro, dado por:

$$\mathcal{F} = \{Z \in \mathcal{Z} \mid \text{existe } B \in A \text{ tal que } Z \supset B\}$$

En consecuencia, si A es un subconjunto de $\mathcal{Z}$ con la propiedad de intersección finita, el conjunto de todas las intersecciones finitas de miembros de A es cerrado para intersecciones finitas, luego engendra un $\mathcal{Z}$-filtro.
Notemos que, como el vacío siempre es un miembro de una base normal de cerrados $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}$ nunca puede ser un $\mathcal{Z}$-filtro.

Ejemplo 3.4. Las dos principales aplicaciones de los $\mathcal{Z}$-filtros son las siguientes:
(1) Si X es un espacio discreto y $\mathcal{Z} = \mathcal{P}(X)$, entonces se obtienen los filtros tradicionales, que sirven para estudiar la convergencia en espacios topológicos.
(2) Si $\mathcal{Z}$ es una base normal de un espacio de Tychonoff X, construiremos más adelante una compactificación $w_{\mathcal{Z}}X$. En el caso $\mathcal{Z} = \{Z(f) \mid f \in \mathcal{C}^*(X)\}$, obtendremos una construcción alternativa de βX. En este caso, llamaremos a los $\mathcal{Z}$-filtros simplemente z-filtros.

Proposición 3.5. Todo $\mathcal{Z}$-filtro está contenido en un $\mathcal{Z}$-ultrafiltro.

Demostración. Si probamos que todo conjunto $\{\mathcal{F}_i \mid i \in I\}$ totalmente ordenado y no vacío de $\mathcal{Z}$-filtros tiene una cota superior, se deducirá por el Lema de Zorn que dado cualquier $\mathcal{Z}$-filtro siempre existe uno maximal que lo contiene.
Definimos $\mathcal{F} = \cup_{i\in I}\mathcal{F}_i$. Ciertamente $\mathcal{F} \supset \mathcal{F}_i$ para todo i, luego si vemos que $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{Z}$-filtro entonces será cota superior de $\{\mathcal{F}_i \mid i \in I\}$, y habremos acabado:
(1) Si $A, B \in \mathcal{F}$ entonces existen $i, j \in I$ tales que $A \in \mathcal{F}_i$ y $B \in \mathcal{F}_j$. Como $\{\mathcal{F}_i \mid i \in I\}$ está totalmente ordenado, o bien $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_j$ o bien $\mathcal{F}_j \subset \mathcal{F}_i$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que se da el primer caso. Entonces, como $A, B \in \mathcal{F}_j$ y $\mathcal{F}_j$ es un $\mathcal{Z}$-filtro, se verifica que $A \cap B \in \mathcal{F}_j \subset \mathcal{F}$.
(2) Supongamos que $F \in \mathcal{F}$, $Z \in \mathcal{Z}$ y $Z \supset F$. Entonces, existe $i \in I$ tal que $F \in \mathcal{F}_i$. Por lo tanto, como $Z \supset F$ y $F \in \mathcal{F}_i$, también $Z \in \mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}$, como queríamos demostrar.
(3) $\mathcal{F}$ es no vacío porque es unión no vacía de conjuntos no vacíos, y además $\mathcal{F}$ no tiene al vacío como elemento porque no lo tiene ningún $\mathcal{F}_i$.
Así pues, dado un $\mathcal{Z}$-filtro $\mathcal{F}$, aplicando el Lema de Zorn al conjunto formado por los $\mathcal{Z}$-filtros que contienen a $\mathcal{F}$, obtenemos un $\mathcal{Z}$-ultrafiltro que contiene a $\mathcal{F}$. $\square$

Lema 3.6. Si $\mathcal{Z}$ es una base normal de cerrados de X, y $\mathcal{F}$ un $\mathcal{Z}$-filtro, entonces $\mathcal{F}$ es $\mathcal{Z}$-ultrafiltro si, y solo si, para cada $Z \in \mathcal{Z}$ tal que $Z \notin \mathcal{F}$, existe $Z' \in \mathcal{F}$ tal que $Z \cap Z' = \emptyset$.

Demostración. Si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{Z}$-ultrafiltro y $Z \notin \mathcal{F}$, entonces el conjunto $\{Z' \cap Z \mid Z' \in \mathcal{F}\}$ no puede tener la propiedad de la intersección finita, porque de ser así engendraría un $\mathcal{Z}$-filtro que contendría a $\mathcal{F}$ y a $\{Z\}$, en contra de que $\mathcal{F}$ es maximal. Por lo tanto, existe $Z' \in \mathcal{F}$ tal que $Z \cap Z' = \emptyset$.
Recíprocamente, si $\mathcal{F}$ cumpliera esta propiedad, pero no fuera maximal, existiría un $\mathcal{Z}$-filtro $\mathcal{F}'$ que contendría estrictamente a $\mathcal{F}$, y si tomamos $Z \in \mathcal{F}' \backslash \mathcal{F}$, por hipótesis existe $Z' \in \mathcal{F}$ tal que $Z \cap Z' = \emptyset$. Esto es absurdo, porque $\mathcal{F}'$ es un $\mathcal{Z}$-filtro, así que, como Z y Z' están en $\mathcal{F}'$, debe ser también $\emptyset = Z \cap Z' \in \mathcal{F}'$. □

Recordemos que se dice que un espacio topológico es T_1 (o que satisface el axioma T_1 de separación) cuando los subconjuntos unipuntuales de X son cerrados.

Definición 3.7. Sea X un espacio T_1 y $\mathcal{Z}$ una base normal de cerrados de X. Denotamos por $w_{\mathcal{Z}}X$ al conjunto de todos los $\mathcal{Z}$-ultrafiltros de X. Vamos a dotar a $w_{\mathcal{Z}}X$ de una topología con la que será una compactificación (de Hausdorff) de X, que llamaremos la compactificación de Wallman-Frink de X con base $\mathcal{Z}$.
Obsérvese que, a priori, no estamos exigiendo a X que sea de Tychonoff para construir una compactificación suya. Solo estamos pidiendo que sea T_1 y tenga una base normal de cerrados.

Demostración. Para empezar, dado $Z \in \mathcal{Z}$, definimos $\overline{Z} = \{\mathcal{F} \in w_{\mathcal{Z}}X \mid Z \in \mathcal{F}\}$. Veamos que la colección $\mathcal{B} = \{\overline{Z} \mid Z \in \mathcal{Z}\}$ es base de cerrados de una topología en $w_{\mathcal{Z}}X$. Para ello, basta comprobar que la intersección de todos los elementos de $\mathcal{B}$ es el vacío y que $\mathcal{B}$ es cerrada para uniones finitas (en ese caso, el conjunto de todas las intersecciones de elementos de $\mathcal{B}$ concide con la colección de conjuntos cerrados de una topología en $w_{\mathcal{Z}}X$, para la cual $\mathcal{B}$ es una base de cerrados).
Para probar que $\cap\mathcal{B}$ es vacío, notemos que esa intersección es, a lo sumo $\{\mathcal{Z}\}$. Como $\mathcal{Z}$ no es un $\mathcal{Z}$-filtro, se deduce que $\cap\mathcal{B} = \emptyset$.
Para probar que es $\mathcal{B}$ cerrada para uniones finitas, notamos que $\overline{\emptyset} = \emptyset$, luego $\emptyset \in \mathcal{B}$. Además, si tomamos $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}$, veremos que $\overline{Z_1 \cup Z_2} = \overline{Z_1} \cup \overline{Z_2}$, y el resultado se deducirá del hecho de que $\mathcal{Z}$ es cerrada para uniones finitas. Veamos la doble contención:
Si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{Z}$-ultrafiltro tal que $Z_1 \cup Z_2 \in \mathcal{F}$, entonces por el lema 3.6, se deduce que $Z_1 \in \mathcal{F}$ o $Z_2 \in \mathcal{F}$, porque en caso contrario existirían $Z_1', Z_2' \in \mathcal{F}$ tales que $Z_i \cap Z_i' = \emptyset$, y entonces sería $\emptyset = (Z_1 \cup Z_2) \cap (Z_1' \cap Z_2') \in \mathcal{F}$, en contra de que $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{Z}$-filtro.
Recíprocamente, supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\mathcal{F} \in \overline{Z_1}$, y probemos que $\mathcal{F} \in \overline{Z_1 \cup Z_2}$. Como $Z_1 \in \mathcal{F}$, y $Z_1 \cup Z_2$ es un elemento de $\mathcal{Z}$ que contiene a Z_1, se deduce que $Z_1 \cup Z_2 \in \mathcal{F}$, como queríamos probar.

Ahora que $w_{\mathcal{Z}}X$ tiene una topología, vamos a probar que es un espacio compacto y de Hausdorff.
Para la compacidad, por el teorema 1.18, basta que probemos que un subconjunto de $\mathcal{B}$ con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía. Tomamos entonces, $\mathcal{Y} \subset \mathcal{Z}$ de forma que $A = \{\overline{Z} \mid Z \in \mathcal{Y}\}$ tenga la propiedad de la intersección finita. Entonces $\mathcal{Y}$ también tiene la propiedad de la intersección finita, porque si no la tuviera, existirían $Z_1, Z_2, ..., Z_n \in \mathcal{Y}$ tales que $\cap_{i=1}^{n} Z_i = \emptyset$, y entonces

$$\bigcap_{i=1}^{n} \overline{Z_i} = \overline{\bigcap_{i=1}^{n} Z_i} = \overline{\emptyset} = \emptyset,$$

en contra de que A tiene la propiedad de la intersección finita. Como $\mathcal{Y}$, tiene la propiedad de la intersección finita, genera un $\mathcal{Z}$-filtro, que estará contenido en un $\mathcal{Z}$-ultrafiltro $\mathcal{F} \in w_{\mathcal{Z}}X$. Entonces vemos que $\mathcal{F} \in \cap A$, porque para todo $Z \in \mathcal{Y}$, como $\mathcal{F} \supset \mathcal{Y}$, se verifica que $Z \in \mathcal{F}$, luego $\mathcal{F} \in \overline{Z}$.
Veamos que $w_{\mathcal{Z}}X$ es de Hausdorff. Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos puntos distintos de $w_{\mathcal{Z}}X$. Como ambos son $\mathcal{Z}$-ultrafiltros, ninguno de los dos puede estar contenido en el otro. Por lo tanto, existe $Z \in \mathcal{F}$ tal que $Z \notin \mathcal{G}$. Por el lema 3.6, existe $Z' \in \mathcal{G}$ tal que $Z \cap Z' = \emptyset$. Por la propiedad (3) de base normal, existen $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}$ cuya unión es X, y tales que $Z_1 \cap Z = \emptyset$, $Z_2 \cap Z' = \emptyset$. Luego $Z_2 \supset Z$ y $Z_1 \supset Z'$, así que $Z_2 \in \mathcal{F}$ y $Z_1 \in \mathcal{G}$. Veamos que los abiertos $w_{\mathcal{Z}}X \setminus \overline{Z_1}$ y $w_{\mathcal{Z}}X \setminus \overline{Z_2}$ son disjuntos y contienen a $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, respectivamente. Ciertamente son disjuntos, porque, como probamos antes, $\overline{Z_1} \cup \overline{Z_2} = \overline{Z_1 \cup Z_2} = \overline{X} = w_{\mathcal{Z}}X$. Por otra parte, si fuera $Z_1 \in \mathcal{F}$, entonces sería $\emptyset = Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{F}$, y eso no puede ser, porque $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{Z}$-filtro, luego $Z_1 \notin \mathcal{F}$, es decir, $\mathcal{F} \in w_{\mathcal{Z}}X \setminus \overline{Z_1}$. Análogamente se prueba que $\mathcal{G} \in w_{\mathcal{Z}}X \setminus \overline{Z_2}$.
Ahora vamos a sumergir a X en $w_{\mathcal{Z}}X$. Para ello, definimos la aplicación:

$$\begin{aligned} w_{\mathcal{Z}} : X &\longrightarrow w_{\mathcal{Z}}X \\ x &\longmapsto \mathcal{F}_x = \{Z \in \mathcal{Z} \mid x \in Z\} \end{aligned}$$

Para concluir que $w_{\mathcal{Z}}X$ es una compactificación de X, tenemos que probar:
(1) Que $\mathcal{F}_x$ siempre es un $\mathcal{Z}$-ultrafiltro.
(2) Que $w_{\mathcal{Z}}$ es una inmersión.
(3) Que $w_{\mathcal{Z}}(X)$ es denso en $w_{\mathcal{Z}}X$.
Demostración.
(1) Si $Z_1, Z_2 \in \mathcal{F}_x$, entonces $x \in Z_1 \cap Z_2$, luego $Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{F}_x$. Si $Z \in \mathcal{F}_x$ y $Z' \in \mathcal{Z}$ contiene a Z, entonces $x \in Z \subset Z'$, luego $Z' \in \mathcal{F}_x$. Cada conjunto $\mathcal{F}_x$ es no vacío, porque $x \in X$, y $X \in \mathcal{Z}$, como ya observamos en la definición de base normal. Además, $x \notin \emptyset$, luego $\emptyset \notin \mathcal{F}_x$, y por lo tanto $\mathcal{F}_x$ es un $\mathcal{Z}$-filtro. Para probar que es

maximal aplicamos el lema 3.6. Dado $Z \in \mathcal{Z}$ que no contenga a x, buscamos $Z' \in \mathcal{Z}$ tal que $x \in Z'$ y $Z \cap Z' = \emptyset$. Esto es exactamente lo que nos proporciona la condición (2) de la definición de base normal.

(2) La aplicación $w_{\mathcal{Z}}$ es inyectiva, pues veremos a continuación que $\cap \mathcal{F}_x = \{x\}$, luego si dos puntos tienen la misma imagen por $w_{\mathcal{Z}}$ entonces son iguales. La intersección de $\mathcal{F}_x$ es $\{x\}$ porque, si $y \neq x$, podemos aplicar la propiedad (2) de la definición de base normal al cerrado $\{y\}$ y al punto x, para obtener un $F \in \mathcal{F}_x$ tal que $y \notin F$, y por lo tanto $y \notin \cap \mathcal{F}_x$.

Si probamos que $w_{\mathcal{Z}}$ manda cerrados de X en cerrados (de $w_{\mathcal{Z}}(X)$), y que las contraimágenes de cerrados de $w_{\mathcal{Z}}(X)$ son cerrados de X, entonces $w_{\mathcal{Z}}$ será una aplicación continua y cerrada (sobre su imagen), luego una inmersión. Basta comprobar la condición para elementos de dos bases de cerrados, una de X y otra de $w_{\mathcal{Z}}(X)$. En X, una base de cerrados está formada por $\mathcal{Z}$, y como $\mathcal{B}$ es una base de los cerrados de $w_{\mathcal{Z}}X$, $\{\overline{Z} \cap w_{\mathcal{Z}}(X) \mid Z \in \mathcal{Z}\}$ nos proporciona una base para los cerrados de $w_{\mathcal{Z}}(X)$. Si $Z \in \mathcal{Z}$, veamos que $w_{\mathcal{Z}}(Z) = \overline{Z} \cap w_{\mathcal{Z}}(X)$. En efecto, por la biyectividad de la aplicación $w_{\mathcal{Z}} : X \longrightarrow w_{\mathcal{Z}}(X)$, se verifica que $\mathcal{F}_x \in w_{\mathcal{Z}}(Z)$ si, y solo si, $x \in Z$, lo que equivale a que $Z \in \mathcal{F}_x$, es decir, a que $\mathcal{F}_x \in \overline{Z} \cap w_{\mathcal{Z}}(X)$, como queríamos demostrar. Por lo tanto, $w_{\mathcal{Z}}$ es una inmersión.

(3) Como $\mathcal{B}$ es una base de los cerrados, todo cerrado se puede escribir como intersección de elementos de la forma $\overline{Z}$, con $Z \in \mathcal{Z}$. En particular:

$$\mathrm{cl}\Big(w_{\mathcal{Z}}(X)\Big) = \bigcap_{\substack{Z \in \mathcal{Z} \\ \overline{Z} \supset w_{\mathcal{Z}}(X)}} \overline{Z}.$$

Pero si $Z \in \mathcal{Z}$ es tal que $\overline{Z}$ contiene a todos los $\mathcal{F}_x$, con $x \in X$, entonces $x \in Z$, para todo $x \in X$, luego $Z = X$, por lo tanto $\mathrm{cl}\Big(w_{\mathcal{Z}}(X)\Big) = \overline{X} = w_{\mathcal{Z}}X$, como queríamos demostrar. □

Observación. En la demostración anterior, cuando escribíamos $\overline{Z}$, siendo Z un miembro de $\mathcal{Z}$, nos referíamos al subconjunto de $w_{\mathcal{Z}}X$ formado por los $\mathcal{Z}$ultrafiltros $\mathcal{F}$ tales que $Z \in \mathcal{F}$. Ahora que sabemos que $w_{\mathcal{Z}}X$ es una compactificación de X, podemos ver a Z como un subconjunto de $w_{\mathcal{Z}}X$, formado por los $\mathcal{Z}$-ultrafiltros $\mathcal{F}_z$, con $z \in Z$. En ese caso, la adherencia de $\{\mathcal{F}_z \mid z \in Z\}$ en $w_{\mathcal{Z}}X$ es exactamente lo que en la prueba definimos como $\overline{Z}$.

Corolario 3.8. Si X es T_1, entonces es de Tychonoff si, y solo si, admite alguna base normal.

Demostración. Si X es de Tychonoff, ya demostramos que $\{Z(f) \mid f \in \mathcal{C}^*(X)\}$ es una base normal.

Recíprocamente, si X es T_1 y admite una base normal $\mathcal{Z}$, entonces X es homeomorfo a un subespacio de $w_{\mathcal{Z}}X$, que es un espacio de Tychonoff (por ser compacto y de Hausdorff), luego X es a su vez de Tychonoff. □

Nuestro siguiente propósito va a ser demostrar que si en un espacio de Tychonoff tomamos la base normal de todos los ceroconjuntos, entonces la compactificación de Wallman-Frink asociada a esa base es la compactificación de Stone-Cech. Antes de ello estudiaremos más en profundidad los z-filtros (es decir, los $\mathcal{Z}$-filtros, cuando $\mathcal{Z} = \{Z(f) \mid f \in \mathcal{C}(X)\}$), y su relación con los ideales del anillo $\mathcal{C}(X)$.

Definición 3.9. Si X es un espacio topológico, denotamos por $Z(X)$ a la colección de todos los ceroconjuntos de X. Podemos considerar la aplicación (sobreyectiva):

$$\begin{aligned} Z : \mathcal{C}(X) &\longrightarrow Z(X) \\ f &\longmapsto Z(f) \end{aligned}$$

Supongamos que $\mathcal{F}$ es un z-filtro de X e I un ideal (propio) de $\mathcal{C}(X)$. Se definen:
(1)$Z[I] = Z(I) = \{Z(f) \mid f \in I\}$
(2) $Z^{-1}[\mathcal{F}] = Z^{-1}(\mathcal{F}) = \{f \in \mathcal{C}(X) \mid Z(f) \in \mathcal{F}\}$

Teorema 3.10. Sean $\mathcal{F}$ un z-filtro de X e I un ideal propio de $\mathcal{C}(X)$. Entonces:
(1) El conjunto $Z[I]$ es un z-filtro. Además, si I es un ideal maximal, entonces $Z[I]$ es un z-ultrafiltro.
(2) El subconjunto $Z^{-1}[\mathcal{F}]$ de $\mathcal{C}(X)$ es un ideal propio. Además, si $\mathcal{F}$ es un z-ultrafiltro, entonces $Z^{-1}[\mathcal{F}]$ es un ideal maximal.

Demostración. (1) Si tomamos dos ceroconjuntos $Z(f), Z(g)$ con $f, g \in I$, entonces $Z(f) \cap Z(g) = Z(f^2 + g^2)$, y como $f^2 + g^2 \in I$, también $Z(f) \cap Z(g) \in Z[I]$.
Si tenemos un ceroconjunto de la forma $Z(g)$ que contenga a uno de la forma $Z(f)$, con $f \in I$, entonces, como $Z(g) = Z(fg)$ y $fg \in I$, concluimos que $Z(g)$ también está en $Z[I]$.
El vacío no es un elemento de $Z[I]$ porque, como I es propio, no hay ninguna unidad en I, y las unidades de $\mathcal{C}(X)$ son exactamente las funciones f tales que $Z(f) = \emptyset$.
Por último, si I es maximal, vamos a suponer, por reducción al absurdo, que $Z[I]$ no es un z-ultrafiltro. Entonces, debe existir un filtro $\mathcal{F}$ que contenga a $Z[I]$ y a algún ceroconjunto $Z(f)$ que no esté en $Z[I]$. Como I es maximal, el ideal generado por I y por f es el total, luego existen $g \in I$ y $h, h' \in \mathcal{C}(X)$ tal que $1 = gh + fh'$. Como $\mathcal{F}$ es un z-filtro al que pertenecen $Z(f)$ y $Z(g)$, también pertenecerá a $\mathcal{F}$ el conjunto $Z(1) = Z(gh + fh') \supset Z(g) \cap Z(f)$. Pero $Z(1)$ es vacío, lo que es absurdo, porque $\mathcal{F}$ es z-filtro.

(2) Como $\mathcal{F}$ es un z-filtro, no contiene al vacío, y por lo tanto $Z^{-1}[\mathcal{F}]$ no contiene a la función 1, así que si probamos que es un ideal, será propio.
Si $f, g \in Z^{-1}[\mathcal{F}]$, entonces, como $\mathcal{F}$ es un z-filtro y $Z(f), Z(g) \in \mathcal{F}$, se deduce que $Z(f+g) \supset Z(f) \cap Z(g) \in \mathcal{F}$, luego $Z(f+g) \in \mathcal{F}$, y $f+g \in Z^{-1}[\mathcal{F}]$.
Si $f \in Z^{-1}[\mathcal{F}]$ y $g \in \mathcal{C}(X)$ entonces, como $Z(fg) \supset Z(f)$, se deduce que $Z(fg) \in \mathcal{F}$, luego $fg \in Z^{-1}[\mathcal{F}]$.
Por lo tanto, $Z^{-1}[\mathcal{F}]$ es un ideal propio. Veamos que si $\mathcal{F}$ es z-ultrafiltro entonces $Z^{-1}[\mathcal{F}]$ es maximal. Sea $h \notin Z^{-1}[\mathcal{F}]$, vamos a probar que el ideal generado por h y $Z^{-1}[\mathcal{F}]$ es el total, o sea, contiene alguna unidad. Del hecho de que $Z(h) \notin \mathcal{F}$ y del lema 3.6, deducimos que hay un $Z(f) \in \mathcal{F}$ tal que $Z(f) \cap Z(h) = \emptyset$. Por tanto, $Z(f^2 + h^2) = \emptyset$, y se sigue que $f^2 + h^2$ es una unidad que está en el ideal generado por $Z^{-1}[\mathcal{F}]$ y por h, como queríamos demostrar. □

Definición 3.11. Se dice que un ideal I de $\mathcal{C}(X)$ es un z-ideal si $I = Z^{-1}Z[I]$, o sea, si $Z(f) \in I$ implica que $f \in I$. Un z-filtro de X es primo si $Z_1 \cup Z_2 \in \mathcal{F}$ implica que $Z_1 \in \mathcal{F}$ o $Z_2 \in \mathcal{F}$, para Z_1 y Z_2 ceroconjuntos arbitrarios de X. Recordamos que en la prueba de 3.7 demostramos que todo z-ultrafiltro es primo.

Lema 3.12. Los ideales maximales de $\mathcal{C}(X)$ son z-ideales.

Demostración. Si M es un ideal maximal, por el teorema 3.10, se verifica que $Z^{-1}Z[M]$ es un ideal maximal. Además, como $Z^{-1}Z[M]$ contiene a M, debe coincidir con él, y por lo tanto M es un z-ideal. □

Lema 3.13. Si I es un z-ideal de $\mathcal{C}(X)$, entonces son equivalentes:
(1) I es primo
(2) I contiene a algún ideal primo.

Demostración. Ciertamente, si I es primo, contiene a algún ideal primo (él mismo). Recíprocamente, supongamos que el z-ideal I contiene a un ideal primo P, y vamos a probar que entonces I también es primo. Sean $f, g \in \mathcal{C}(X)$ tales que $fg \in I$. Definimos $h = |f| - |g| \in \mathcal{C}(X)$. Como $\text{máx}\{h, 0\} \cdot \text{mín}\{h, 0\} = 0$, y $0 \in P \subset I$, por ser P un ideal primo, debe ser $\text{máx}\{h, 0\} \in I$ o $\text{mín}\{h, 0\} \in I$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que se da el primer caso. Entonces, observemos que en el conjunto $Z(\text{máx}\{h, 0\})$, la función h es menor o igual que 0, luego en ese conjunto cualquier cero de g es un cero de f. Así que:

$$Z(f) \supset Z(\text{máx}\{h, 0\}) \cap Z(f) \supset Z(\text{máx}\{h, 0\}) \cap Z(fg).$$

Como los dos últimos conjuntos están en $Z[I]$, y este es un z-filtro, $Z(f)$ también está en I, y por ser I un z-ideal deducimos que $f \in I$, como queríamos. □

Lema 3.14. Cada ideal primo de $\mathcal{C}(X)$ está contenido en un único ideal maximal.

Demostración. Todo ideal primo, por ser propio, está contenido en un ideal maximal. Supongamos que P es un ideal primo que está contenido en dos ideales maximales $M_1 \neq M_2$ de $\mathcal{C}(X)$. El ideal $M_1 \cap M_2$ es un z-ideal, porque si $Z(f) \in Z[M_1 \cap M_2]$, entonces $Z(f) = Z(g)$, con $g \in M_1 \cap M_2$, luego $Z(f) \in Z[M_1] \cap Z[M_2]$, y como M_1 y M_2 son z-ideales, $f \in M_1 \cap M_2$. Entonces, como, $M_1 \cap M_2$ contiene a P, es un z-ideal primo. Si tomamos $f_1 \in M_1 \setminus M_2$ y $f_2 \in M_2 \setminus M_1$, entonces $Z(f_1 f_2) = Z(f_1) \cup Z(f_2) \in Z[M_1] \cap Z[M_2] = Z[M_1 \cap M_2]$, y como $M_1 \cap M_2$ es un z-ideal, necesariamente $f_1 f_2 \in M_1 \cap M_2$. Puesto que $M_1 \cap M_2$ es un ideal primo, concluimos que uno de los dos elementos está en $M_1 \cap M_2$, lo que es absurdo. $\square$

Lema 3.15. Si P es un ideal primo de $\mathcal{C}(X)$, entonces $Z[P]$ es un z-filtro primo. Recíprocamente, si $\mathcal{F}$ es un z-filtro primo, entonces $Z^{-1}[\mathcal{F}]$ es un z-ideal primo.

Demostración. Sea $P_1 = Z^{-1}Z[P]$. Veamos que P_1 es un z-ideal y que contiene a P. En efecto, si $Z(f) \in Z[P_1]$, entonces $Z(f) \in ZZ^{-1}Z[P] = Z[P]$ (porque Z es una aplicación sobreyectiva), luego $f \in Z^{-1}Z[P] = P_1$. Por otro lado, si $f \in P$, entonces $Z(f) \in Z[P]$, y $f \in Z^{-1}Z[P] = P_1$. Por lo tanto, por el lema 3.13, P_1 es un z-ideal primo. Además, $Z[P] = Z[P_1]$. Veamos que se trata de un z-filtro primo. Supongamos que $Z(f) \cup Z(g) \in Z[P_1]$. Como $Z(f) \cup Z(g) = Z(fg)$ y P_1 es un z-ideal, debe ser $fg \in P_1$, y como es primo, se cumple que $f \in P_1$ o $g \in P_1$, y por lo tanto $Z(f) \in Z[P_1]$ o $Z(g) \in Z[P_1]$, como queríamos demostrar.
Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{F}$ es un z-filtro primo, y veamos que $Z^{-1}[\mathcal{F}]$ es un z-ideal primo. Para empezar, $Z^{-1}[\mathcal{F}]$ es un z-ideal, porque $Z^{-1}Z[Z^{-1}[\mathcal{F}]] = Z^{-1}[ZZ^{-1}[\mathcal{F}]] = Z^{-1}[F]$, porque Z es una aplicación sobreyectiva. Ahora, para ver que es primo, supongamos que $fg \in Z^{-1}[\mathcal{F}]$. Notemos de nuevo que $\mathcal{F} = ZZ^{-1}[\mathcal{F}]$, luego $Z(fg) = Z(f) \cup Z(g) \in \mathcal{F}$, y como $\mathcal{F}$ es primo, $Z(f) \in \mathcal{F}$ o $Z(g) \in \mathcal{F}$, y por ser $Z^{-1}[\mathcal{F}]$ un z-ideal, se deduce que $f \in Z^{-1}[\mathcal{F}]$ o $g \in Z^{-1}[\mathcal{F}]$, como queríamos probar. $\square$

Corolario 3.16. Todo z-filtro primo de X está contenido en un único z-ultrafiltro.

Demostración. Si $\mathcal{F}$ es un z-filtro primo, entonces por el lema 3.15, $Z^{-1}[\mathcal{F}]$ es un ideal primo, que por el lema 3.14 estará contenido en un único ideal maximal M. Por lo tanto, $Z[M]$ es un z-ultrafiltro que contiene a $\mathcal{F}$. Si hubiera otro z-ultrafiltro distinto que también lo contuviera, digamos $\mathcal{F}'$, entonces $Z^{-1}[\mathcal{F}']$ sería un ideal maximal distinto de M que contendría a $Z^{-1}[\mathcal{F}]$, lo que es absurdo. $\square$

Definición 3.17. Diremos que un z-ultrafiltro de X es fijo si tiene intersección no vacía. Un z-ultrafiltro que no sea fijo diremos que es libre. Ya dijimos que un ideal maximal M de $\mathcal{C}(X)$ es fijo si $Z[M]$ tiene intersección no vacía. Análogamente, se dice que un ideal maximal es libre cuando no es fijo.

Observación. Si X es un espacio de Tychonoff y M es un ideal fijo de $\mathcal{C}(X)$, entonces existe $x \in X$ tal que $x \in Z[M]$. Entonces, M está contenido en el ideal

$$M_x = Z^{-1}[\mathcal{F}_x] = \{f \in \mathcal{C}(X) \mid f(x) = 0\}$$

El ideal M_x es maximal, porque coincide con el núcleo del epimorfismo de anillos:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(X) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto, por maximalidad, $M = M_x$, y además no puede existir ningún punto de $y \in X$, con $y \neq x$, tal que $M = M_y$, porque como X es de Tychonoff existe una función f que se anula en x pero que vale 1 en el cerrado $\{y\}$, luego $f \notin M_y$.
Como la aplicación $Z : \mathcal{C}(X) \longrightarrow Z(X)$ induce una biyección entre los ideales maximales y los z-ultrafiltros, toda la discusión que hemos hecho para ideales maximales fijos vale para z-ultrafiltros fijos, así que tenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.18. Sea X un espacio de Tychonoff. Entonces:
(1) Los ideales maximales fijos de $\mathcal{C}(X)$ son exactamente los de la forma M_x, con $x \in X$. Además, dado un ideal maximal fijo M, hay un único punto x en $\cap Z[M]$, que cumple que $M = M_x$. Por lo tanto, si $x \neq y$, entonces $M_x \neq M_y$.
(2) Los z-ultrafiltros fijos de X son exactamente los de la forma $\mathcal{F}_x$, con $x \in X$. Además, dado un z-ultrafiltro fijo $\mathcal{F}$, hay un único punto x en $\cap\mathcal{F}$, que cumple que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_x$. Por lo tanto, si $x \neq y$, entonces $\mathcal{F}_x \neq \mathcal{F}_y$.

Teorema 3.19. Para un espacio topológico X de Tychonoff, son equivalentes:
(1) Todo ideal maximal de $\mathcal{C}(X)$ es fijo.
(2) Todo ideal maximal de $\mathcal{C}^*(X)$ es fijo.
(3) Todo z-ultrafiltro de X es fijo.
(4) X es compacto.

Demostración. Ya probamos la equivalencia entre (2) y (4) en el teorema 1.18.
Por la proposición anterior, (1) y (3) también son equivalentes.
(2) implica (3), porque por el teorema 1.18, si todo ideal maximal de $\mathcal{C}^*(X)$ es fijo, entonces todo conjunto de cerrados con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía, y un z-ultrafiltro es un conjunto de cerrados con la propiedad de la intersección finita, luego será fijo.

Por último, veamos que (1) implica (4). Basta probar que toda colección de ceroconjuntos de X con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía, y entonces, por el teorema 1.18, deduciremos que X es un espacio compacto. Sea, pues, $\mathcal{B}$ una colección de ceroconjuntos de X con la propiedad de la intersección finita, y $\mathcal{F}$ el z-filtro engendrado por $\mathcal{B}$. Sea $\mathcal{A}$ un z-ultrafiltro que contenga a $\mathcal{F}$. Entonces $Z^{-1}[\mathcal{A}]$ es un ideal maximal de $\mathcal{C}(X)$, luego será fijo, y por lo tanto también lo es el filtro $\mathcal{A}$, así que $\emptyset \neq \cap\mathcal{A} \subset \cap\mathcal{F} \subset \cap\mathcal{B}$, y se deduce que $\mathcal{B}$ tiene intersección no vacía, como queríamos demostrar. $\square$

Teorema 3.20. Para todo espacio de Tychonoff X, se verifica que $w_zX \approx \beta X$.

Demostración. Vamos a probar que $w_zX \geq \beta X$, y como βX es el máximo de $K(X)$, se deducirá que son compactificaciones equivalentes. Para simplificar la notación, suponemos que $X \subset \beta X$, y que β es la aplicación de inclusión de X en βX. Para cada $\mathcal{F} \in w_zX$, se define:

$$G_{\mathcal{F}} = \{A \in Z(\beta X) \mid \text{ existe } Z \in \mathcal{F} \text{ con } A \supset Z\}$$

Veamos que $G_{\mathcal{F}}$ es un z-filtro primo de βX. Si $A, B \in G_{\mathcal{F}}$, entonces existen $A', B' \in \mathcal{F}$ tales que $A \supset A'$ y $B \supset B'$. Entonces $A \cap B \supset A' \cap B' \in \mathcal{F}$, luego $A \cap B \in G_{\mathcal{F}}$. Si $A \in G_{\mathcal{F}}$ y $B \in Z(\beta X)$ contiene a A, entonces, como existe $Z \in \mathcal{F}$ tal que $A \supset Z$, también $B \supset Z$, luego $B \in G_{\mathcal{F}}$. Como $\beta X \supset X \in \mathcal{F}$, $\beta X \in G_{\mathcal{F}}$, y se deduce que $G_{\mathcal{F}}$ es no vacío. Además, como $\emptyset \notin \mathcal{F}$, $\emptyset$ no puede contener a ningún elemento de $\mathcal{F}$, así que $\emptyset \notin G_{\mathcal{F}}$, luego $G_{\mathcal{F}}$ es un z-filtro. Por último, veamos que es primo. Sean $Z(f_1), Z(f_2) \in Z(\beta X)$ tales que $Z(f_1) \cup Z(f_2) \in G_{\mathcal{F}}$. Entonces, $Z(f_1) \cap X = Z(f_1|_X)$ y $Z(f_2|_X) \cap X$ son dos ceroconjuntos de X, y $(Z(f_1) \cap X) \cup (Z(f_2) \cap X) \supset Z \in \mathcal{F}$, luego $(Z(f_1) \cap X) \cup (Z(f_2) \cap X) \in \mathcal{F}$, y como $\mathcal{F}$ es un z-filtro primo (por ser maximal), entonces para algún $i \in \{1, 2\}$, se verifica que $Z(f_i) \cap X \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, $Z(f_i) \supset Z(f_i) \cap X \in \mathcal{F}$, y se deduce que $Z(f_i) \in G_{\mathcal{F}}$.
Como $G_{\mathcal{F}}$ es un z-filtro primo, por el corolario 3.16, $G_{\mathcal{F}}$ está contenido en un único z-ultrafiltro $A_{\mathcal{F}}$ de βX. Por el teorema anterior, como βX es compacto, $A_{\mathcal{F}}$ es fijo, luego por la proposición 3.18, existe un único $p \in \beta X$ tal que $A_{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_p$. Podemos por lo tanto definir una aplicación:

$$\begin{aligned} f : w_zX &\longrightarrow \beta X \\ \mathcal{F} &\longmapsto \cap A_{\mathcal{F}} = p \end{aligned}$$

(estamos abusando de la notación y tratando indistintamente al punto p de βX y al conjunto unipuntual $\{p\}$, pero esperamos que eso no genere confusión).
Vamos a demostrar que se cumple que $f \circ w_z$ es la inclusión de X en βX, y que f

es continua, para deducir que $w_zX \geq \beta X$.
Recordemos que $w_z(x) = \mathcal{F}_x = \{Z \in Z(X) \mid x \in Z\}$, luego para probar que $f(w_z(x)) = x$, es suficiente que probemos que

$$f(w_z(x)) = \mathcal{G}_{\mathcal{F}_x} = \{Z \in Z(\beta X) \mid x \in Z\},$$

pues a partir de esa igualdad concluiremos que $\mathcal{G}_{\mathcal{F}_x}$ es el z-ultrafiltro fijo de βX correspondiente al punto x, y por lo tanto, por la proposición 3.18,

$$\cap \mathcal{A}_{\mathcal{F}_x} = \cap \mathcal{G}_{\mathcal{F}_x} = \{x\}.$$

En efecto, si $A \in \mathcal{G}_{\mathcal{F}_x}$, entonces existe $Z \in \mathcal{F}_x$ tal que $A \supset Z$. Como $Z \in \mathcal{F}_x$, debe ser $x \in Z$, luego $x \in A$, así que A está en el z-ultrafiltro fijo de βX correspondiente al punto x. Recíprocamente, si $f \in \mathcal{C}(\beta X)$ es tal que $x \in Z(f)$, entonces $Z(f) \supset Z(f|_X) \in \mathcal{F}_x$, luego $Z(f) \in \mathcal{G}_{\mathcal{F}_x}$.
Ahora, para la continuidad, veamos que es continua en cada punto $\mathcal{F} \in w_zX$. Sea A un entorno abierto de $f(\mathcal{F})$. Como βX es compacto y de Hasudorff, es localmente compacto y normal, así que podemos encontrar un entorno compacto (luego cerrado) K de $f(\mathcal{F})$ que esté contenido en A, y después aplicar el Lema de Urysohn para encontrar una función continua $g : \beta X \longrightarrow \mathbb{R}$ que se anule en K y valga 1 en $\beta X \setminus A$.
Por lo tanto, si definimos $U = Z(g)$, como U contiene a K, U también es un entorno de $f(\mathcal{F})$ y además $U \subset A$, por lo que ahora basta que encontremos un entorno H de $\mathcal{F}$ tal que $f(H) \subset U$.
Como los ceroconjuntos de βX forman una base para los cerrados, sus complementarios forman una base para los abiertos, así que debe existir un ceroconjunto $U' = Z(g')$ de βX tal que $f(\mathcal{F}) \in \beta X \setminus U' \subset U$. Entonces, $Z = Z(g|_X)$ y $Z' = Z(g'|_X)$ son dos ceroconjuntos de X cuya unión es X, porque la unión de U y U' es βX.
Vamos a demostrar que si definimos $H = w_zX \setminus \overline{Z'}$, entonces H es un entorno de $\mathcal{F}$ tal que $f(H) \subset U$.
H es abierto por ser complementario de un cerrado, veamos que contiene a $\mathcal{F}$. Si fuera $\mathcal{F} \in \overline{Z'}$, entonces $Z' \in \mathcal{F}$, luego U' es un ceroconjunto de βX que contiene a Z', así que $U' \in G_{\mathcal{F}}$. Pero esto es absurdo, porque $f(\mathcal{F}) = \cap A_{\mathcal{F}} \subset \cap G_{\mathcal{F}}$, y $f(\mathcal{F}) \notin U'$.
Ahora, supongamos que $\mathcal{F}' \in H$, y veamos que $f(\mathcal{F}') \in U$. Por definición de H y de $\overline{Z'}$, no puede ser $Z' \in \mathcal{F}'$. Además, $Z \cup Z' = X \in \mathcal{F}'$, luego como $\mathcal{F}'$ es un z-filtro primo (por ser $z-$ultrafiltro), debe ser $Z \in \mathcal{F}'$. Por lo tanto U es un ceroconjunto de βX que contiene a Z, y se deduce que $U \in G_{\mathcal{F}}$ y $f(\mathcal{F}') \in U$, como queríamos demostrar. □

Ejemplo 3.21. En el capítulo anterior demostramos que todas las compactificaciones de X se pueden obtener de la forma $e_{\mathcal{F}}X$, para un conjunto $\mathcal{F}$ de funciones

continuas y acotadas adecuado. Cabría preguntarse si se puede hacer lo mismo con las compactificaciones de Wallman-Frink. Es decir, dada $\alpha X \in K(X)$, ¿existe siempre una base normal $\mathcal{Z}$ de X tal que $\alpha X \approx w_{\mathcal{Z}} X$?
Hemos probado que esto es cierto para βX, y también se cumple para muchas otras compactificaciones concretas (ver [CF]). Sin embargo, Ul'yanov probó en [Ul] que el resultado es falso en general, encontrando un espacio discreto y una compactificación suya que no se puede obtener como una compactificación de Wallman-Frink.
A pesar de ello, hay una manera razonable de asignar a cada compactificación $\alpha X \in K(X)$ una base normal de cerrados de X, definiendo

$$\mathcal{Z}_\alpha = \{Z(f) \mid f \in C_\alpha\},$$

la colección de todos los ceroconjuntos de funciones continuas y acotadas que admiten extensión a αX. Veamos que $\mathcal{Z}_\alpha$ es una base normal de X:

Demostración. En efecto, veamos que se cumplen las cuatro propiedades que caracterizan a las bases normales. Notemos que C_α es un subanillo de $\mathcal{C}^*(X)$ que contiene a las funciones constantes.
(1) El vacío y el total son los ceroconjuntos de las funciones 1 y 0, respectivamente, que admiten una extensión a αX. Si $Z(f), Z(g) \in \mathcal{Z}_\alpha$, entonces $Z(f) \cup Z(g) = Z(fg) \in \mathcal{Z}_\alpha$, y $Z(f) \cap Z(g) = Z(f^2 + g^2) \in \mathcal{Z}_\alpha$.
(2) Sean F un cerrado de X y $x \in X \setminus F$. Entonces, como αX es de Tychonoff, existe una función $f \in \mathcal{C}(\alpha X)$ que separa al punto x del cerrado $\mathrm{cl}_{\alpha X}(F)$. La función $f|_X$ ciertamente está en C_α y separa al punto x del cerrado F.
(3) Sean $f_1, f_2 \in C_\alpha$ tales que $Z(f_1) \cap Z(f_2) = \emptyset$. Necesitamos hallar $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}_\alpha$ tales que $Z(f_1) \cap Z_1 = \emptyset$, $Z(f_2) \cap Z_2 = \emptyset$ y $Z_1 \cup Z_2 = X$. Consideremos para ello la función $g = |f_1^\alpha| - |f_2^\alpha|$, que ciertamente pertenece a $\mathcal{C}(\alpha X)$. Sean $g_1 = \min\{g, 0\}$ y $g_2 = \max\{g, 0\}$. Es obvio que $g_1, g_2 \in C(\alpha X)$ y que $g_1 g_2 = 0$. Luego $\alpha X = Z(g_1 g_2) = Z(g_1) \cup Z(g_2)$ y, en consecuencia, $X = Z(g_1|_X) \cup Z(g_2|_X)$. Sean $Z_1 = Z(g_1|_X)$ y $Z_2 = Z(g_2|_X)$. Está claro que $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}_\alpha$ y que $Z_1 \cup Z_2 = X$. Veamos que $Z(f_1) \cap Z_1 = \emptyset$. De no ser así, existiría $x \in Z(f_1) \cap Z_1$, de donde se deduciría que $f_1(x) = 0$, luego $g(x) = -|f_2(x)| < 0$, siendo la última desigualdad estricta ya que, por hipótesis, $Z(f_1) \cap Z(f_2) = \emptyset$. Por otra parte, de $x \in Z_1 = Z(g_1|_X)$ se deduciría que $g(x) \geq 0$, llegando así a contradicción. Análogamente se prueba que $Z(f_2) \cap Z_2 = \emptyset$.
(4) Basta que probemos que todo ceroconjunto de X es intersección de miembros de $\mathcal{Z}_\alpha$, y entonces, por ser la colección de todos los ceroconjuntos de X una base para los cerrados de X, tendremos que se puede expresar cualquier cerrado de X como una intersección de miembros de $\mathcal{Z}_\alpha$.

Sea $f \in \mathcal{C}^*(X)$. Para cada $y \notin Z(f)$, consideramos una función $g_y \in C_\alpha$ que valga 0 en el cerrado $Z(f)$ y 1 en y (podemos hacerlo por la propiedad (2)). Deducimos que

$$Z(f) = \bigcap_{y \notin Z(f)} Z(g_y),$$

como queríamos demostrar. $\square$

Por lo tanto, dada una compactificación $\alpha X \in K(X)$, siempre podemos asignarle otra, de tipo Wallman-Frink, dada por $w_{\mathcal{Z}_\alpha} X$. Si bien siempre se cumple que $w_{\mathcal{Z}_\alpha} X \geq \alpha X$ (véase [Br]), nada nos garantiza que $\alpha X \approx w_{\mathcal{Z}_\alpha} X$, como muestra el siguiente ejemplo:
Consideramos la compactificación $\omega\mathbb{N}$ de $\mathbb{N}$. En este caso, veremos que $\mathcal{Z}_\omega = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. En efecto, si tenemos un subconjunto A de $\mathbb{N}$, entonces podemos considerar la función

$$f(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \in A \\ \frac{1}{n} \text{ en otro caso} \end{cases}$$

que se puede extender a $\omega\mathbb{N}$ definiendo $f^\omega(\infty) = 0$, y que cumple que $Z(f) = A$. Por lo tanto, $w_{\mathcal{Z}_\omega}\mathbb{N} = \beta\mathbb{N}$. Si estas dos compactificaciones coincidieran, $\mathbb{N}$ estaría $\mathcal{C}^*$-sumergido en $\omega\mathbb{N}$, lo cual es falso, porque la función continua y acotada definida por $f(2n) = 0$ y $f(2n+1) = 1$ es continua, acotada, y no puede extenderse a $\omega\mathbb{N}$.

Capítulo 4

Anillos de funciones continuas

En el capítulo anterior construimos la compactificación de Stone-Cech de un espacio de Tychonoff X dotando de una topología adecuada al conjunto de todos los z-ultrafiltros de X. También probamos que el conjunto de los z-ultrafiltros de X está en biyección con el conjunto de los ideales maximales de $\mathcal{C}(X)$. Por lo tanto, es razonable pensar que hay una topología natural en el conjunto de los ideales maximales de $\mathcal{C}(X)$ con la que es homeomorfo al conjunto de los z-ultrafiltros, y con la que es una compactificación de X equivalente a la compactificación de Stone-Cech.
Después de presentar esta topología y demostrar que la topología de un espacio X compacto y de Hausdorff está caracterizada por la estructura de anillo de $\mathcal{C}^*(X)$, estudiaremos las diferencias que tienen los anillos $\mathcal{C}^*(X)$ y $\mathcal{C}(X)$, dando pie a los conceptos centrales del siguiente capítulo.
En lo relativo a los conceptos puramente algebraicos, el texto de referencia ha sido el libro [AM] de Atiyah y Macdonald, mientras que para los conceptos más topológicos nos hemos apoyado en el texto [GJ] de Gillman y Jerison.

Definición 4.1. Dado un anillo conmutativo y unitario A, el espectro primo de A es el conjunto de todos sus ideales primos,

$$\mathrm{Spec}(A) = \{I \subset A \mid I \text{ es un ideal primo de A}\}.$$

Le podemos dotar a $\mathrm{Spec}(A)$ de una topología tomando como base para los cerrados a los conjuntos de la forma

$$V(f) = \{I \in \mathrm{Spec}(A) \mid f \in I\},\ f \in A.$$

Esto tiene sentido, porque $\emptyset = V(1)$, y $V(f) \cup V(g) = V(fg)$, luego el conjunto de las intersecciones de elementos de la forma $V(f)$ coincide con el conjunto de cerrados

de una topología en $\mathrm{Spec}(A)$, que se llama topología de Zariski.
El espectro maximal de A es el subespacio de $\mathrm{Spec}(A)$ formado por los ideales maximales,

$$\mathrm{Max}(A) = \{M \subset A \mid M \text{ es ideal maximal de } A\}.$$

Al estar dotado de la topología de subespacio de $\mathrm{Spec}(A)$, una base de los cerrados de $\mathrm{Max}(A)$ viene dada por los conjuntos

$$M(f) = \{M \in \mathrm{Max}(A) \mid f \in M\} = V(f) \cap \mathrm{Max}(A),\ f \in A.$$

En el caso particular en el que A sea el anillo de las funciones continuas con valores reales de un espacio topológico X, denotaremos $\mathrm{Max}(\mathcal{C}(X)) = \mathcal{M}(X)$, y para el caso de las funciones continuas y acotadas, $\mathrm{Max}(\mathcal{C}^*(X)) = \mathcal{M}^*(X)$.

Proposición 4.2. Si $\varphi : A \longrightarrow B$ es un isomorfismo de anillos, entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi' : \mathrm{Spec}(B) &\longrightarrow \mathrm{Spec}(A) \\ I &\longmapsto \varphi^{-1}(I) \end{aligned}$$

es un homeomorfismo, que además induce un homeomorfismo entre $\mathrm{Max}(B)$ y $\mathrm{Max}(A)$.

Demostración. Como φ es un isomorfismo de anillos, la aplicación φ' está bien definida (esto es, envía ideales primos en ideales primos) y es biyectiva. Para demostrar que es un homeomorfismo, veremos que induce una biyección entre la base de cerrados usual de $\mathrm{Spec}(B)$ y la base de cerrados usual de $\mathrm{Spec}(A)$. En particular, vamos a demostrar que $\varphi'(V(f)) = V(\varphi^{-1}(f))$:

$$\varphi'(V(f)) = \{\varphi^{-1}(J) \mid J \in \mathrm{Spec}(B) \text{ y } f \in J\} = \{I \in \mathrm{Spec}(A) \mid \varphi^{-1}(f) \in I\} = V(\varphi^{-1}(f))$$

Además, como φ es un isomorfismo de anillos, la restricción de φ' a $\mathrm{Max}(B)$ también es una biyección (al considerarla con llegada en $\mathrm{Max}(A)$), luego φ' induce un homeomorfismo entre $\mathrm{Max}(B)$ y $\mathrm{Max}(A)$. □

Teorema 4.3. Si X es un espacio de Tychonoff, entonces la aplicación:

$$\begin{aligned} \Phi : X &\longrightarrow \mathcal{M}(X) \\ x &\longmapsto M_x = \{f \in \mathcal{C}(X) \mid f(x) = 0\} \end{aligned}$$

es una inmersión, y su imagen está formada exactamente por los ideales maximales fijos de $\mathcal{C}(X)$, por lo que, si X es compacto, es además un homeomorfismo.
El mismo resultado es válido si se cambia $\mathcal{M}(X)$ por $\mathcal{M}^*(X)$ y $\mathcal{C}(X)$ por $\mathcal{C}^*(X)$ (en ese caso se denota a Φ como Φ^*, y $\Phi^*(x) = M_x^*$).

Demostración. Ya justificamos en la observación previa a la proposición 3.18 que la aplicación Φ está bien definida, es inyectiva, y su imagen es el conjunto de los ideales maximales fijos de $\mathcal{C}(X)$.
Además, se comprueba sin dificultad que, dada $f \in \mathcal{C}(X)$, se cumple que $\Phi(Z(f)) = M(f) \cap \Phi(X)$, luego Φ transforma la base de cerrados $\{Z(f) \mid f \in \mathcal{C}(X)\}$ de X en la base de cerrados $\{M(f) \cap \Phi(X) \mid f \in \mathcal{C}(X)\}$ de $\Phi(X)$.
Se deduce que la aplicación es una inmersión y, como comentamos, si X es compacto, todos los ideales maximales de $\mathcal{C}(X)$ son fijos, luego Φ es sobreyectiva, y por lo tanto homeomorfismo. □

Corolario 4.4. Dos espacios compactos y de Hausdorff X e Y son homeomorfos si, y solo si, los anillos $\mathcal{C}^*(X)$ y $\mathcal{C}^*(Y)$ son isomorfos.

Demostración. Ciertamente, si $h : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo, entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^*(Y) &\longrightarrow \mathcal{C}^*(X) \\ f &\longmapsto h \circ f \end{aligned}$$

es un isomorfismo de anillos.
Recíprocamente, por la proposición 4.2, si $\mathcal{C}^*(X)$ y $\mathcal{C}^*(Y)$ son anillos isomorfos, entonces $\mathcal{M}^*(Y)$ y $\mathcal{M}^*(X)$ son espacios topológicos homeomorfos. Por lo tanto, por el teorema anterior, X es homeomorfo a $\mathcal{M}^*(X)$, que es homeomorfo a $\mathcal{M}^*(Y)$, que es homeomorfo a Y, como queríamos demostrar. □

Teorema 4.5. Si X es un espacio de Tychonoff, entonces toda compactificación $\alpha X \in K(X)$ se puede obtener como el espectro maximal de un cierto subanillo de $\mathcal{C}^*(X)$.

Demostración. Basta tomar el subanillo C_α de las funciones continuas y acotadas que admiten una extensión a αX. En ese caso, tenemos el isomorfismo de anillos

$$\begin{aligned} \varphi : C_\alpha : &\longrightarrow \mathcal{C}(\alpha X) \\ f &\longmapsto f^\alpha \end{aligned}$$

que, por la proposición 4.2, induce el homeomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi' : \mathcal{M}(\alpha X) &\longrightarrow \mathrm{Max}(C_\alpha) \\ M &\longmapsto \varphi^{-1}(M) \end{aligned}$$

Tenemos, por lo tanto, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\alpha X \arrow[r, "\Phi_\alpha"] & \mathcal{M}(\alpha X) \arrow[r, "\varphi'"] & \mathrm{Max}(C_\alpha) \\
& X \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[ur, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

(donde $\gamma(x) = \{f \in C_\alpha \mid f(x) = 0\}$, y Φ_α viene dada como en el teorema 4.3) en el que $\varphi' \circ \Phi_\alpha$ es un homeomorfismo. Por lo tanto, si demostramos que $\gamma = \varphi' \circ \Phi_\alpha \circ \alpha$ (o sea, que el diagrama anterior es conmutativo), entonces $(\gamma, \mathrm{Max}(C_\alpha))$ es una compactificación de X equivalente a αX.
En efecto, dado $x \in X$, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\varphi' \circ \Phi_\alpha \circ \alpha(x) = \varphi'(\{f \in \mathcal{C}(\alpha X) \mid f(\alpha(x)) = 0\}) = \\
&= \{f|_X \mid f(\alpha(x)) = 0\} = \{f \in C_\alpha \mid f(x) = 0\} = \gamma(x),
\end{aligned}$$

como queríamos probar. $\square$

Teorema 4.6 (de Gelfand-Kolmogorov)**.** Sea X un espacio de Tychonoff. Entonces la aplicación

$$\begin{aligned}
\Psi : \beta X &\longrightarrow \mathcal{M}(X) \\
p &\longmapsto M^p = \{f \in \mathcal{C}(X) \mid p \in \overline{Z(f)}\}
\end{aligned}$$

(donde la clausura de $Z(f)$ se toma en βX) es un homeomorfismo. Además, $\Psi|_X = \Phi$, luego $(\Phi, \mathcal{M}(X))$ es una compactificación de X equivalente a βX.

Demostración. Identificamos a βX con $w_z X$. En este caso, un punto $p \in \beta X$ no es otra cosa que un z-ultrafiltro en X. Sabemos que hay una correspondecia biunívoca (teorema 3.10) entre los z-ultrafiltros de X y los ideales maximales de $\mathcal{C}(X)$ dada por $p \longmapsto Z^{-1}[p]$.
Además, resulta que $\Psi(p) = Z^{-1}[p]$, porque, si recordamos la observación posterior a la definición de $w_{\mathcal{Z}} X$, se cumple que $\overline{Z(f)} = \{p \in w_z X | \ Z(f) \in p\}$, luego dada $f \in \mathcal{C}(X)$, se verifica que $f \in \Psi(p)$ si, y solo si, $p \in \overline{Z(f)}$, si y solo si, $Z(f) \in p$, si y solo si $f \in Z^{-1}[p]$. Por lo tanto Ψ es biyectiva. Notemos que si $x \in X$, entonces x se corresponde con el z-filtro $\mathcal{F}_x$ de los ceroconjuntos a los que pertenece x, que se corresponde por Ψ con el ideal maximal $Z^{-1}[\mathcal{F}_x] = M_x = \Phi(x)$, luego, supuesto que probemos que Ψ es un homeomorfismo, se cumple que $(\Phi, \mathcal{M}(X))$ es una compactificación de X equivalente a βX.
Sabemos que el conjunto $\{\overline{Z(f)} \mid f \in \mathcal{C}(X)\}$ es una base para los cerrados de βX,

y que $\{M(f) \mid f \in \mathcal{C}(X)\}$ es una base para los cerrados de $\mathcal{M}(X)$, por lo que si probamos que Ψ induce una biyección entre estos dos conjuntos, deduciremos que es un homeomorfismo. Es decir, vamos a probar que para cada $f \in \mathcal{C}(X)$, se cumple que $\Psi\big(\overline{Z(f)}\big) = M(f)$. En efecto, dado $\Psi(p) \in \mathcal{M}(X)$, se verifica que $\Psi(p) \in M(f)$ si, y solo si, $f \in \Psi(p)$, si y solo si $p \in \overline{Z(f)}$, como queríamos demostrar. $\square$

Teorema 4.7. Sea X un espacio de Tychonoff. Entonces la aplicación:

$$\begin{aligned} \Psi^* : \beta X &\longrightarrow \mathcal{M}^*(X) \\ p &\longmapsto M^{*p} = \{f \in \mathcal{C}^*(X) \mid f^\beta(p) = 0\} \end{aligned}$$

(donde $f^\beta : \beta X \longrightarrow \mathbb{R}$ es la única extensión de f a βX) es un homeomorfismo. Además, $\Psi^*|_X = \Phi^*$, luego $(\Phi^*, \mathcal{M}^*(X))$ es una compactificación de X equivalente a βX.

Demostración. La aplicación de extensión

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{C}^*(X) &\longrightarrow \mathcal{C}(\beta X) \\ f &\longmapsto f^\beta \end{aligned}$$

ciertamente es un homomorfismo de anillos. Por la caracerización de βX como la única compactificación de X en la que este está $\mathcal{C}^*$-sumergido, es sobreyectivo, y como X es denso en βX, es inyectivo. Por lo tanto es un isomorfismo de anillos, e induce el homeomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi' : \mathcal{M}(\beta X) &\longrightarrow \mathcal{M}^*(X) \\ M &\longmapsto \varphi^{-1}(M) = \{f|_X \mid f \in M\} \end{aligned}$$

Como βX es compacto, el teorema 4.3 nos proporciona el homeomorfismo

$$\begin{aligned} \Phi : \beta X &\longrightarrow \mathcal{M}(\beta X) \\ p &\longmapsto M_p = \{f \in \mathcal{C}(\beta X) \mid f(p) = 0\} \end{aligned}$$

Como se cumple que $\varphi'(\Phi(p)) = \{f|_X \mid f(p) = 0\} = \{f \in \mathcal{C}^*(X) \mid f^\beta(p) = 0\} = \Psi^*(p)$, deducimos que Ψ^* es composición de homeomorfismos, luego homeomorfismo. Por último, notemos que si $x \in X$ entonces

$$\Psi^*(x) = \{f \in \mathcal{C}^*(X) \mid f^\beta(x) = 0\} = \{f \in \mathcal{C}^*(X) \mid f(x) = 0\} = \Phi^*(x)$$

luego $(\Phi^*, \mathcal{M}^*(X))$ es una compactificación de X equivalente a βX. $\square$

Observación. Ya comentamos en la observación de la página 52 que el ideal maximal fijo $M_x = \{f \in \mathcal{C}(X) \mid f(x) = 0\}$ es el núcleo del epimorfismo de anillos

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(X) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

y por lo tanto, $\mathcal{C}(X)/M_x \approx \mathbb{R}$. Ahora bien, si M es un ideal maximal arbitrario de $\mathcal{C}(X)$, veremos más adelante que $\mathcal{C}(X)/M$ puede ser una extensión propia de $\mathbb{R}$. Sin embargo, el caso de $\mathcal{C}^*(X)$ es diferente, pues como $\mathcal{C}^*(X)$ es isomorfo a $\mathcal{C}(\beta X)$, y βX es compacto, todo ideal maximal M^* de $\mathcal{C}^*(X)$ se corresponde con un ideal maximal fijo M_p de $\mathcal{C}(\beta X)$, luego el cociente $\mathcal{C}^*(X)/M^*$ es isomorfo a $\mathcal{C}(\beta X)/M_p \approx \mathbb{R}$.

Corolario 4.8. Si X es un espacio de Tychonoff y $f \in \mathcal{C}^*(X)$, sabemos que f tiene una única extensión f^β a βX. Dado un punto $p \in \beta X$, sabemos que se asocia con el ideal maximal M^{*p} de $\mathcal{C}^*(X)$. Entonces, $f^\beta(p)$ es el único numero real r tal que $f - r \in M^{*p}$.

Demostración. Por el teorema anterior, p se asocia con el ideal:

$$M^{*p} = \{g \in \mathcal{C}^*(X) \mid g^\beta(p) = 0\}$$

Por lo tanto, para un número real r, se verifica que $f - r \in M^{*p}$ si, y solo si, $f^\beta(p) - r = 0$, lo que equivale a que $f^\beta(p) = r$, como queríamos demostrar. $\square$

Hemos probado que los ideales maximales de $\mathcal{C}(X)$ y de $\mathcal{C}^*(X)$ se pueden identificar con los puntos de βX, y que además estos anillos nos sirven para conocer el valor de la extensión de una función de $\mathcal{C}^*(X)$ a βX. De hecho, en el caso en que X es compacto, nos permiten reconstruir su topología a partir de propiedades algebraicas de estos anillos. Sin embargo, hasta ahora parece que $\mathcal{C}(X)$ y $\mathcal{C}^*(X)$ son igual de "buenos" para estudiar la topología de X: ambos nos permiten distinguir entre si X es compacto o no, en función de si todos sus ideales maximales son fijos o no. Ahora probaremos que en el caso en que X no es compacto (y por tanto hay ideales maximales que no son fijos tanto en $\mathcal{C}(X)$ como en $\mathcal{C}^*(X)$), $\mathcal{C}(X)$ nos permite detectar una propiedad topológica que a $\mathcal{C}^*(X)$ "se le escapa".

En la siguiente sección denotaremos por A al anillo $\mathcal{C}(X)$ (con X un espacio de Tychonoff), donde tendremos una relación de orden parcial dada por el orden punto a punto, es decir, $f \leq g$ si para todo $x \in X$, $f(x) \leq g(x)$. Este orden es compatible con la estructura de anillo, es decir, para todas $f, g, h \in A$ se cumple que:

$$f \leq g \Rightarrow f + h \leq g + h$$

$$f, g \geq 0 \Rightarrow fg \geq 0$$

Definición 4.9. Diremos que un ideal $I \subset A$ es convexo si cuando se cumple que $0 \leq f \leq g$ y $g \in I$, también se cumple que $f \in I$. Notemos que, en ese caso, si $f, h \in I$ y $f \leq g \leq h$, entonces $0 \leq g - f \leq h - f$ y $h - f \in I$, luego $g - f \in I$, y por lo tanto $g \in I$. De esta segunda propiedad deducimos que si $|f| \in I$, entonces, como $-|f| \leq f \leq |f|$, también $f \in I$.
Diremos que un ideal I de A es absolutamente convexo si $|f| \leq |g|$ y $g \in I$ implican que $f \in I$. En particular, se cumplirá que cuando $f \in I$, también $|f| \in I$. Claramente un ideal absolutamente convexo es convexo, pero el recíproco no es cierto.

En el anillo cociente A/I, denotaremos por $[f]_I$ a la clase $f + I = \{f + g \mid g \in I\}$, o simplemente por $[f]$, cuando no haya confusión.

Proposición 4.10. Si $I \subset A$ es un ideal convexo, podemos definir en A/I la siguiente relación de orden (parcial):

$$[f] \leq [g] \Leftrightarrow \text{existe } h \in A \text{ tal que } h \geq 0 \text{ y } [g] - [f] = [h]$$

Esta relación de orden es compatible con la estructura de anillo en A/I, y además la aplicación de paso al cociente es creciente.
Obsérvese que $[f] \leq [g]$ si, y solo si, existen $f' \in [f]$ y $g' \in [g]$ tales que $f' \leq g'$.

Demostración. Veamos primero que es una relación de orden. Denotamos por $[f], [g], [h]$ a tres elementos genéricos de A/I:
$[f] \leq [f]$, porque $[f] - [f] = [0]$, y $0 \geq 0$.
Si $[f] \leq [g]$ y $[g] \leq [f]$, entonces existen dos elementos de A, $h_1, h_2 \geq 0$ tales que $[g] - [f] = [h_1]$ y $[f] - [g] = [h_2]$. Sumando ambas expresiones, deducimos que $[h_1] = -[h_2]$, luego $h_1 + h_2 \in I$, así que como $0 \leq h_1 \leq h_1 + h_2$ y el ideal I es convexo, deducimos que $h_1 \in I$, y por lo tanto $[f] = [g]$.
Por último, si $[f] \leq [g] \leq [h]$, entonces existen $h_1, h_2 \geq 0$ tales que $[g] - [f] = [h_1]$ y $[h] - [g] = [h_2]$. Entonces si sumamos las dos igualdades, se deduce que $[h] - [f] = [h_1 + h_2]$, y como $h_1 + h_2 \geq 0$, deducimos que $[f] \leq [h]$.
Se trata de un anillo ordenado, porque si $[f] \leq [g]$, entonces existe $h_1 \geq 0$ tal que $[g] - [f] = [h_1]$. Por lo tanto, para cualquier $[h] \in A/I$, $[h] + [g] - [f] - [h] = [g] - [f] = [h_1]$, luego $[f] + [h] \leq [g] + [h]$. Además, si $[f], [g] \geq 0$, entonces existen $h_1, h_2 \geq 0$ tales que $h_1 \in [f]$ y $h_2 \in [g]$, luego $[f][g] = [h_1 h_2]$, y $h_1 h_2 \geq 0$, así que $[f][g] \geq 0$
El paso al cociente preserva el orden, porque si $f \leq g$ entonces $g - f \geq 0$ y $[g] - [f] = [g - f]$, luego $[f] \leq [g]$. $\square$

Teorema 4.11. Si I es un ideal convexo de A entonces son equivalentes las siguientes propiedades:

(1) I es absolutamente convexo.
(2) $f \in I$ implica que $|f| \in I$.
(3) $f, g \in I$ implica que $\max\{f, g\} \in I$.
(4) Dados $f, g \in A$, siempre existen el supremo y el ínfimo de $[f]$ y $[g]$ en A/I, y se verifica que:

$$\sup\{[f], [g]\} = [\max\{f, g\}] \qquad \inf\{[f], [g]\} = [\min\{f, g\}]$$

(5) $[f] \geq 0$ si, y solo si, $[f] = [|f|]$.

Demostración. Ya indicamos en la definición de ideal absolutamente convexo que (1)⇒(2).
También (2)⇒(1), porque si $g \in I$ y $|f| \leq |g|$ entonces, por (2), se verifica que $|g| \in I$ y, por ser I convexo, $|f| \in I$, luego $f \in I$.
Para (2)⇒(3), notemos que $\max\{f, g\} = \frac{|f+g|+|f-g|}{2}$, que es una combinación de miembros de I, luego es un miembro de I.
(3)⇒(4). Claramente $[\max\{f, g\}]$ es una cota superior del conjunto $\{[f], [g]\}$. Ahora supongamos que $[h]$ es otra, y vamos a demostrar que $[\max\{f, g\}] \leq [h]$. Sabemos que existen $h_1, h_2 \geq 0$ tales que $[h] - [f] = [h_1]$ y $[h] - [g] = [h_2]$. Denotaremos, por abreviar: $x = f + h_1 - h$, $y = g + h_2 - h$, que son dos miembros de I. Entonces:

$$\max\{f, g\} \leq \max\{f + h_1, g + h_2\} = \max\{h + x, h + y\} = h + \max\{x, y\}$$

Si $t = h + \max\{x, y\} - \max\{f, g\}$, entonces $t \geq 0$, y como $x, y \in I$, también $\max\{x, y\} \in I$, luego $[h] - [\max\{f, g\}] = [t]$, y por lo tanto $[\max\{f, g\}] \leq [h]$, como queríamos demostrar.
La demostración para el caso del ínfimo es análoga.
(4)⇒(5). Si $[f] = [|f|]$, entonces claramente $[f] \geq 0$.
Recíprocamente, si $[f] \geq 0$, entonces $-[f] \leq 0 \leq [f]$, luego $[f] = \sup\{[f], -[f]\} = [\max\{f, -f\}] = [|f|]$.
(5)⇒(2). Si $f \in I$ entonces $[f] = 0 \geq 0$, luego $[|f|] = [f] = 0$, y por lo tanto $|f| \in I$. □

Proposición 4.12. Todo z-ideal de A es absolutamente convexo.

Demostración. Sea I un z-ideal de A. Supongamos que $|f| \leq |g|$ y $g \in I$. En ese caso, $Z(g) \subset Z(f)$, y como $Z(g) \in Z[I]$, también $Z(f) \in Z[I]$, luego por ser I un z-ideal, tenemos que $f \in I$. □

Lema 4.13. Si I es un z-ideal de A y $f \in A$, entonces $[f] \geq 0$ si, y solo si, existe $Z \in Z[I]$ tal que $f|_Z \geq 0$.

Demostración. Si suponemos que $[f] \geq 0$, entonces como I es absolutamente convexo, por el teorema 4.11, apartado (5), se verifica que $f - |f| \in I$, luego $Z(f - |f|) \in Z[I]$, y ciertamente $f|_{Z(f-|f|)} \geq 0$.
Recíprocamente, si $Z \in Z[I]$ es tal que $f|_Z \geq 0$, entonces $Z \subset Z(f - |f|)$, y como $Z \in Z[I]$, también $Z(f-|f|) \in Z[I]$. Como I es un z-ideal, se cumple que $f-|f| \in I$, luego por el teorema 4.11, debe ser $[f] \geq 0$. □

Teorema 4.14. Si P es un ideal primo de A, entonces P es absolutamente convexo, y A/P está totalmente ordenado. Además, la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow A/P \\ \lambda &\longmapsto [\lambda] \end{aligned}$$

es un monomorfismo de anillos que conserva el orden.

Demostración. Vamos a justificar que P es absolutamente convexo. Si $g \in P$ y $|f| \leq |g|$ entonces definimos la función $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f^2(x)}{g(x)} & \text{si } g(x) \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Veamos que la función h es continua. Para empezar, notemos que h es continua en el abierto $X \setminus Z(g)$, por ser cociente de funciones continuas con denominador no nulo. Falta probar que es continua en todo punto $x_0 \in Z(g)$.
En los puntos $x \in X \setminus Z(g)$, como $|f(x)| \leq |g(x)|$, también $\frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq 1$, luego $|h(x)| \leq |f(x)|$. Como, de hecho, en los $x \in Z(g)$ se verifica que $h(x) = 0$, la cota anterior para el valor absoluto de h vale para cada $x \in X$. En base a esto, puesto que $g(x_0) = 0$, también $f(x_0) = 0$, luego por la continuidad de f, para cada $\varepsilon > 0$ existe un entorno U de x_0 tal que $f(U) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$, y por lo tanto $h(U) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$, luego h es continua en x_0. Se deduce que h es continua en todo X.
Como $f^2 = gh \in P$, y este es un ideal primo, se deduce que $f \in P$, luego P es absolutamente convexo.
Para probar que A/P está totalmente ordenado, basta comprobar que dada $f \in A$, se cumple que $[f] \geq 0$ o bien $[f] \leq 0$, y por ser el orden de A/P compatible con la estructura de anillo, deduciremos que dos elementos cualesquiera de A/P son comparables. Observamos que

$$(f + |f|)(f - |f|) = f^2 - |f|^2 = 0 \in P$$

Como P es un ideal primo, entonces $f + |f| \in P$ o bien $f - |f| \in P$. En el primer caso se concluye que $[f] \leq 0$, y en el segundo que $[f] \geq 0$, luego hemos probado lo

que queríamos.
Por último, consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow A/P \\ \lambda &\longmapsto [\lambda] \end{aligned}$$

Es claro que se trata de un homomorfismo de anillos, es inyectivo porque parte de un cuerpo, y ya justificamos que el paso al cociente conserva el orden. □

En particular, si M es un ideal maximal de A, entonces M es primo, luego el cociente A/M es un cuerpo totalmente ordenado que contiene a $\mathbb{R}$ como subcuerpo. Esto da pie a la siguiente definición:

Definición 4.15. Sea M un ideal maximal de A. Diremos que M es real si A/M es isomorfo a $\mathbb{R}$. En caso contrario (es decir, A/M contiene estrictamente a $\mathbb{R}$) diremos que M es hiperreal.

Observación. Si R es un anillo totalmente ordenado cualquiera, entonces, para $a \in R$ se puede definir $|a| = \max\{-a, a\}$. Siempre se cumple que $|a| \geq 0$, porque si $a \geq 0$, entonces, como el orden de R es compatible con la estructura de anillo, $-a \leq 0$, así que $-a \leq a$, y $|a| = a \geq 0$. Análogamente se prueba que si $a \leq 0$, entonces $|a| = -a \geq 0$, y como en un anillo totalmente ordenado siempre se da al menos uno de esos dos casos, siempre se cumplirá que $|a| \geq 0$.
Si K es un cuerpo totalmente ordenado, dado $\varepsilon \in K$, diremos que ε es infinitamente pequeño (también diremos que es infinitesimal, o que es un infinitésimo) si para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $|\varepsilon| < \frac{1}{n}$. En particular, 0 siempre es un infinitésimo de K.
Análogamente, diremos que $x \in K$ es infinitamente grande (o un elemento infinito de K) si $\frac{1}{x}$ es infinitesimal. Es decir, si para todo $N \in \mathbb{N}$, se cumple que $|x| > N$.
En el caso de que M sea un ideal hiperreal de A, vamos a demostrar ahora que en $K = A/M$ debe haber elementos infinitésimos no nulos, y también elementos infinitos. Es más, vamos a demostrar que dado un elemento $\alpha \in K \setminus \mathbb{R}$, si α no es infinito ni infinitésimo, entonces existe un único número real a tal que $a - \alpha$ es un infinitésimo. En particular, como $a \neq \alpha$, el elemento $a - \alpha$ es un infinitésimo no nulo, luego su inverso es infinitamente grande. En el contexto del análisis no estándar se dice que a es la parte estándar de α.

Demostración. Supongamos que $\alpha \in K \setminus \mathbb{R}$ no es ni infinito ni infinitésimo. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que de hecho $\alpha > 0$, pues el caso en que $\alpha < 0$ es análogo. Entonces existen $m, N \in \mathbb{N}$ tales que $\frac{1}{m} < \alpha < N$, y por lo tanto el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid x < \alpha\}$ es no vacío (porque $\frac{1}{m} < \alpha$), y además tiene una cota superior (N). Por lo tanto, tiene un supremo real a. Por hipótesis, $\alpha \notin \mathbb{R}$, luego $\alpha \neq a$. Además $a - \alpha$ tiene que ser infinitamente pequeño, porque para todo $n \in \mathbb{N}$, $a - \frac{1}{n} < \alpha < a + \frac{1}{n}$ (en caso contrario a no sería un supremo), luego $|a - \alpha| < \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $a' \in \mathbb{R}$ también cumpliera que $a' - \alpha$ es un infinitésimo, entonces $a - a'$ sería un infinitésimo real, por lo tanto sería 0, luego se deduce que a es único. $\square$

Hemos probado que si M es un ideal maximal fijo de A entonces $A/M \approx \mathbb{R}$, luego M es real. En el caso de que M sea libre, veremos que esto no tiene por qué ser así:

Teorema 4.16. Si M es un ideal maximal de A, y $f \in A$, entonces son equivalentes:
(1) $[f]_M$ es infinitamente grande.
(2) Para todo $Z \in Z[M]$, $f|_Z$ es una función no acotada.
(3) Para todo $n \in \mathbb{N}$, el ceroconjunto $Z_n = \{x \in X \mid |f(x)| \geq n\}$ es un elemento de $Z[M]$.

Demostración. El que $[f]$ no sea infinitamente grande equivale a que exista $n \in \mathbb{N}$ tal que $-n \leq [f] \leq n$, lo cual equivale, por el lema 4.13, a que exista $Z \in Z[M]$ tal que $-n \leq f|_Z \leq n$, es decir, a que f esté acotada en algún $Z \in Z[M]$. Por lo tanto (1) y (2) son equivalentes, por serlo sus negaciones.
Usando de nuevo el lema 4.13, (1) equivale a que, para cada $n \in \mathbb{N}$, Z_n contenga a un cierto $Z \in Z[M]$, y como $Z[M]$ es un z-filtro, eso es equivalente a que $Z_n \in Z[M]$, porque Z_n es el ceroconjunto de la función $f_n(x) = \text{máx}\{0, n - |f(x)|\}$. Por lo tanto, (1) es quivalente a (3), como queríamos demostrar. $\square$

Recordamos que un espacio topológico X es pseudocompacto si $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}^*(X)$.

Corolario 4.17. Todo ideal maximal de $\mathcal{C}^*(X)$ es real, y el único caso en el que todos los ideales maximales de $\mathcal{C}(X)$ son reales es cuando X es pseudocompacto.

Demostración. Ya justificamos en la observacion de la página 62 que todos los ideales maximales de $\mathcal{C}^*(X)$ son reales.
Para el caso de $\mathcal{C}(X)$, si suponemos que hay una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua pero no acotada, entonces la colección de ceroconjuntos $\{Z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ del teorema anterior tiene la propiedad de la intersección finita, luego determinará un z-filtro, que podemos ampliar a un z-ultrafiltro $\mathcal{F}$. Si definimos $M = Z^{-1}[\mathcal{F}]$, entonces M es hiperreal, porque $[f]_M$ es infinitamente grande por el teorema anterior: $Z_n \in Z[M]$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Por lo tanto, la existencia de ideales maximales hiperreales equivale a la existencia de funciones continuas no acotadas, como queríamos demostrar. $\square$

Esta es la diferencia entre $\mathcal{C}(X)$ y $\mathcal{C}^*(X)$ que anticipábamos: si X es un espacio de Tychonoff en el que hay funciones continuas no acotadas, en $\mathcal{C}(X)$ hay ideales maximales que son hiperreales, mientras que en $\mathcal{C}^*(X)$ todos los ideales maximales son reales.
Ahora enunciamos un teorema análogo a 4.8, que caracteriza los valores de la extensión de una función continua a βX en términos puramente algebraicos:

Teorema 4.18. Si $f \in \mathcal{C}(X)$, podemos considerar a la misma función pero con $\omega\mathbb{R}$ como su conjunto de llegada, y al ser $\omega\mathbb{R}$ compacto, la función f admite una única extensión $\tilde{f} : \beta X \longrightarrow \omega\mathbb{R}$. Entonces, para $p \in \beta X$ se cumple que:
(1) $\tilde{f}(p) = \infty$ si, y solo si, $[f]_{M^p}$ es infinitamente grande.
(2) $\tilde{f}(p) = r$, para $r \in \mathbb{R}$, si y solo si, r es el único número real que cumple que $[r]_{M^p} - [f]_{M^p}$ es infinitamente pequeño (o sea, r es la parte estándar de $[f]_{M^p}$).

Demostración. Identificamos a βX con $w_z X$. Como los casos (1) y (2) son excluyentes, basta que probemos las dos implicaciones en un sentido para concluir las equivalencias:
(1) Si $\tilde{f}(p) = \infty$, como $\tilde{f}$ es continua en p, y para cada $n \in \mathbb{N}$, $\omega\mathbb{R} \setminus (-n, n)$ es un entorno de ∞, los conjuntos $U_n = \tilde{f}^{-1}(\omega\mathbb{R} \setminus (-n, n))$ son entornos de p en βX. Los conjuntos $Z_n = \{x \in X \mid |f(x)| \geq n\}$ del teorema 4.16 son exactamente los cortes de U_n con X. Por lo tanto, si U es cualquier entorno de p en βX, entonces $U \cap U_n$ también, y como X es denso en βX:

$$U \cap Z_n \supset U \cap U_n \cap Z_n = U \cap U_n \cap (U_n \cap X) = (U \cap U_n) \cap X \neq \emptyset$$

Como el entorno U era arbitrario, tenemos que $p \in \overline{Z_n}$, luego por la definición de $\overline{Z_n}$ y el teorema de Gelfand-Kolmogorov, se deduce que $Z_n \in p = Z[M^p]$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el teorema 4.16, $[f]_{M^p}$ es infinitamente grande.
(2) Si $\tilde{f}(p) = r \in \mathbb{R}$ entonces, razonando de manera idéntica al apartado anterior, tenemos que $p \in \overline{Y_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $Y_n = \{x \in X \mid |f(x) - r| \leq \frac{1}{n}\}$. Por lo tanto, por el teorema de Gelmand Kolmogorov, $Y_n \in p = Z[M^p]$, luego por el lema 4.13, como $|f - r| \leq \frac{1}{n}$ en Y_n, debe ser $[f - r]_{M^p} \leq \frac{1}{n}$. Como esto vale para todo $n \in \mathbb{N}$, se deduce que $[f]_{M^p} - r$ es un infinitésimo, como queríamos demostrar. □

Teorema 4.19. Sea M un ideal maximal de $\mathcal{C}(X)$. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:
(1) M es real.
(2) $Z[M]$ es cerrado para intersecciones numerables.
(3) $Z[M]$ tiene la propiedad de la intersección numerable.

Llamaremos z-filtros reales a los que tengan la propiedad de la intersección numerable (o, equivalentemente, sean cerrados para intersecciones numerables).
Este teorema nos permite concluir que la aplicación $Z : \mathcal{C}(X) \longrightarrow Z(X)$ induce una biyección entre los ideales maximales reales de $\mathcal{C}(X)$ y los z-ultrafiltros reales de X.

Demostración. (1)⇒(2). Razonamos por contrarrecíproco. Supongamos que existe un subconjunto numerable $\{Z(f_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ de $Z[M]$ cuya intersección no pertenece a $Z[M]$. Para cada $N \in \mathbb{N}$, definimos la función continua

$$g_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \text{mín}\{\frac{1}{2^n}, |f_n(x)|\},$$

que está en M, porque $Z(g_N) = \cap_{i=1}^{N} Z(f_i) \in Z[M]$, y M es un z-ideal por ser maximal. La sucesión $(g_N)_{N\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy en X, luego su límite puntual $g(x)$ es una función continua, que toma valores no negativos (luego $[g]_M \geq 0$), y se anula exactamente en los puntos de $\cap\{Z(f_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$, luego no está en M, y deducimos que $[g]_M > 0$. Por otro lado, si $x \in Z(g_N) \in Z[M]$, entonces

$$g(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \text{mín}\{\frac{1}{2^n}, |f_n(x)|\} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N}$$

luego, por el lema 4.13, deducimos que $[g]_M \leq \frac{1}{2^N}$. Como esto vale para todo $N \in \mathbb{N}$, deducimos que $[g]_M$ es un infinitésimo no nulo, luego M no es real.
(2)⇒(3) Si $Z[M]$ es cerrado para intersecciones numerables, en particular tiene la propiedad de la intersección numerable, porque el vacío no puede ser nunca un elemento de un z-filtro.
(3)⇒(1) Volvemos a razonar por contrarrecíproco. Si M es hiperreal, entonces existe $f \in \mathcal{C}(X)$ tal que $[f]_M$ es infinitamente grande, luego, por el teorema 4.16, los ceroconjuntos Z_n están en $Z[M]$. Sin embargo, la intersección de todos los Z_n, cuando $n \in \mathbb{N}$, es vacía, luego $Z[M]$ no es cerrado para intersecciones numerables. $\square$

Capítulo 5

Espacios realcompactos

Vamos a definir una forma débil de compacidad (la realcompacidad), basada en la “diferencia” que encontramos en el capítulo anterior entre $\mathcal{C}(X)$ y $\mathcal{C}^*(X)$, y después vamos a estudiar esta propiedad de una manera completamente análoga a la que hicimos con la compacidad en el segundo capítulo. Construiremos realcompactificaciones, demostraremos algunas propiedades que comparten los espacios compactos y los realcompactos, y mostraremos ejemplos de algunas en las que se diferencian, basándonos, principálmente, en el texto [GJ] de Gillman y Jerison.
Al igual que en el segundo capítulo, asumiremos que todos los espacios involucrados son de Tychonoff, y también demostraremos que esto no es una verdadera restricción al estudiar realcompactificaciones.

Definición 5.1. Diremos que un espacio topológico X es realcompacto si todo ideal maximal real de $\mathcal{C}(X)$ es fijo o, equivalentemente, si todo ideal maximal libre de $\mathcal{C}(X)$ es hiperreal. En vista del teorema 4.19, esto equivale a que todo z-ultrafiltro real sea fijo.
La realcompacidad es una propiedad topológica, pues si tenemos dos espacios topológicos homeomorfos, entonces sus anillos de funciones continuas son isomorfos, luego todos los ideales maximales reales del primero son fijos, si y solo si, lo son los del segundo. O sea, si un espacio es realcompacto, lo son todos los que son homeomorfos a él.
Una realcompactificación de un espacio topológico es un par $(\eta, \eta X)$, donde η es una inmersión de X en un espacio realcompacto ηX de forma que $\eta(X)$ es denso en ηX. Al igual que con las compactificaciones, haremos un abuso de notación y diremos que ηX es una realcompactificación de X cuando esté claro quién es la aplicación η. Tampoco haremos distinción entre X y $\eta(X)$.
Dadas dos realcompactificaciones $\eta X, \mu X$ se dice que $\eta X \geq \mu X$ cuando existe una

aplicación continua $f : \eta X \longrightarrow \mu X$ que hace conmmutativo el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\eta X \arrow[rr, "f"] & & \mu X \\
& X \arrow[ul, "\eta"] \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd}
$$

Cuando f sea además homeomorfismo diremos que las dos realcompactificaciones son equivalentes y lo denotaremos por $\eta X \approx \mu X$.
Obviamente un espacio compacto es realcompacto. Por lo tanto, una compactificación es una realcompactificación.

Veremos que muchos de los resultados que teníamos para compactificaciones los tenemos también para realcompactificaciones, pero con $\mathcal{C}(X)$ jugando el papel que en las compactificaciones jugaba $\mathcal{C}^*(X)$. Por ejemplo:

Teorema 5.2. Dos espacios realcompactos X e Y son homeomorfos si, y solo si, los anillos $\mathcal{C}(X)$ y $\mathcal{C}(Y)$ son isomorfos.

Demostración. Si $h : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo, entonces $\phi(f) = f \circ h$ es un isomorfismo entre los anillos $\mathcal{C}(Y)$ y $\mathcal{C}(X)$.
Para el recíproco, observamos que un espacio realcompacto X es homeomorfo al subespacio de $\mathcal{M}(X)$ formado por los ideales maximales fijos (teorema 4.3), que son exactamente los que son reales, por ser X realcompacto. Por lo tanto, si $\mathcal{C}(X)$ y $\mathcal{C}(Y)$ son isomorfos, entonces $\mathcal{M}(X)$ y $\mathcal{M}(Y)$ son homeomorfos, así como sus subespacios formados por los ideales maximales reales, luego X e Y son homeomorfos. $\square$

Recordamos que un espacio topológico es de Lindelöf cuando todo recubrimiento abierto suyo tiene un subrecubrimiento numerable.

Teorema 5.3. Todo espacio de Lindelöf es realcompacto (pero el recíproco no es cierto).

Demostración. Si $\mathcal{F}$ es un z-ultrafiltro real del espacio de Lindelöf X, entonces $\mathcal{F}$ es un conjunto de cerrados de X con la propiedad de la intersección numerable (teorema 4.19), luego tiene intersección no vacía, porque X es de Lindelöf, así que $\mathcal{F}$ es un z-ultrafiltro fijo. $\square$

Veremos más adelante un ejemplo que muestra que existen espacios realcompactos que no son de Lindelöf.

Ejemplo 5.4. El teorema anterior nos proporciona muchos ejemplos de espacios realcompactos. Todo espacio métrico y separable es de Lindelöf, luego realcompacto. En particular, cualquier subespacio de $\mathbb{R}^n$ es realcompacto.

Proposición 5.5. Un espacio topológico es compacto si, y solo si, es realcompacto y pseudocompacto.

Demostración. Si X es un espacio compacto, como ya hemos comentado, es realcompacto, y además es pseudocompacto.
Recíprocamente, si X es pseudocompacto, entonces todos los ideales maximales de $\mathcal{C}(X)$ son reales por el corolario 4.17. Si además X es realcompacto, entonces todos los ideales maximales reales son fijos, luego todo ideal maximal de $\mathcal{C}(X)$ es fijo, y se deduce que X es compacto por el teorema 3.19. $\square$

Ejemplo 5.6. En el ejemplo 1.22 construimos un espacio topológico (de Tychonoff) que era pseudocompacto pero no compacto. Deducimos de la proposición anterior que Ω (el primer ordinal no numerable) es un ejemplo de espacio que no es realcompacto. En los ejemplos 5.12 y 5.25 veremos otros espacios que no son realcompactos.

Definición 5.7. Dado un espacio topológico X, denotamos por υX (ípsilon X) al subespacio de βX formado por los z-ultrafiltros reales.

Observación. En la definición anterior estamos haciendo un abuso de notación, en el que confundimos a βX con $w_z X$. Esto no es ningún problema, porque si $\beta X \in K(X)$ es una compactificación equivalente a $w_z X$, entonces existe un homeomorfismo $h : w_z X \longrightarrow \beta X$ que deja fijos a los puntos de X. Por lo tanto, en ese caso, entendemos que υX es la imagen por h del conjunto de los z-ultrafiltros reales. Por ejemplo, si $\beta X = \mathcal{M}(X)$, entonces υX es el conjunto de los ideales maximales reales de $\mathcal{C}(X)$.

Teorema 5.8. Un espacio X es realcompacto si, y solo si, $X = \upsilon X$.

Demostración. El teorema no es más que otra manera de expresar que un espacio topológico es realcompacto si, y solo si, el conjunto de sus z-ultrafiltros fijos es el mismo que el de sus z-ultrafiltros reales. $\square$

Teorema 5.9. υX es una realcompactificación de X, y está caracterizada por cualquiera de las siguientes propiedades:
(1) υX es el mayor subespacio de βX en el que X está $\mathcal{C}$-sumergido.
(2) Es el menor subespacio realcompacto de βX que contiene a X.
(3) Es la única realcompactificación de X en la que X está $\mathcal{C}$-sumergido.

(4) Toda aplicación $f : X \longrightarrow Y$, donde Y es realcompacto, tiene una extensión continua $f^{\upsilon} : \upsilon X \longrightarrow Y$.
El espacio υX se conoce como la realcompactificación de Hewitt de X.

Demostración. Puesto que $X \subset \upsilon X \subset \beta X$ y X es denso en βX, también es denso en υX, luego para demostrar que se trata de una realcompactificación de X, solo tenemos que demostrar que υX es realcompacto. Para ello, vamos a demostrar primero que υX está caracterizado por la propiedad (1), y después probaremos que un espacio con la propiedad (1) es realcompacto.
Identificamos a βX con $w_z X$. Supongamos que $X \subset Y \subset \beta X$ y que X está $\mathcal{C}$-sumergido en Y. Vamos a probar que todos los $p \in Y$ son z-ultrafiltros reales (o sea, $Y \subset \upsilon X$). Para $f \in \mathcal{C}(X)$, denotamos por f^Y a la extensión de f a Y, y por $\tilde{f} : \beta X \to \omega\mathbb{R}$ a la extensión de f a βX del teorema 4.18. Por la densidad de Y en βX, debe ser $f^Y = \tilde{f}|_Y$, así que, como f^Y tiene llegada en $\mathbb{R}$, se tiene que cumplir que, para toda $f \in \mathcal{C}(X)$ y todo $p \in Y$, $[f]_{M^p}$ no sea infinitamente grande. Esto nos permite deducir que M^p es real, para todo $p \in Y$, luego por el teorema 4.19 deducimos que todos los elementos de Y son z-ultrafiltros reales.
Recíprocamente, si $X \subset Y \subset \upsilon X$, (es decir, si todos los elementos de Y son z-ultrafiltros reales) entonces, si razonamos como antes, toda $f \in \mathcal{C}(X)$ tiene una extensión continua $f^Y : Y \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f^Y = \tilde{f}|_Y$, luego X está $\mathcal{C}$-sumergido en Y. Por lo tanto, υX queda caracterizado como el mayor subespacio de βX en el que X está $\mathcal{C}$-sumergido, como queríamos probar.
Ahora, para demostrar que υX es realcompacto, queremos ver que $\upsilon X = \upsilon\upsilon X$. Por (1), sabemos que $\upsilon\upsilon X$ es el mayor subespacio de $\beta\upsilon X$ en el que υX está $\mathcal{C}$-sumergido. Podemos tomar $\beta\upsilon X$ como βX, porque cualquier función $f \in \mathcal{C}^*(\upsilon X)$, admite una extensión a βX (dada por $f^{\beta} = (f|_X)^{\beta}$), y esta propiedad caracteriza a la compactificación de Stone-Cech. Como υX está $\mathcal{C}$-sumergido en $\upsilon\upsilon X$, entonces X está $\mathcal{C}$-sumergido en $\upsilon\upsilon X$, y por (1) deducimos que $\upsilon X = \upsilon\upsilon X$, luego υX es realcompacto.
Para la propiedad (2), notemos que υX es un subespacio realcompacto de βX que contiene a X, así que solo tenemos que demostrar que es el menor. Supongamos, pues, que $X \subset Y \subset \beta X$, con Y realcompacto, y vamos a demostrar que $\upsilon X \subset Y$. Si tomamos $f \in \mathcal{C}(Y)$, entonces $f^* = (\tilde{f})|_{Y \cup \upsilon X}$ es una extensión de f a $Y \cup \upsilon X$, y su llegada es $\mathbb{R}$, porque si $p \in Y$, entonces $f^*(p) = f(p) \in \mathbb{R}$, y si $p \in \upsilon X$, entonces p es un z-ultrafiltro real, luego M^p es un ideal maximal real, y $[f]_{M^p}$ no puede ser infinitamente grande, luego por el teorema 4.18, se verifica que $f^*(p) \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, Y está $\mathcal{C}$-sumergido en $\upsilon X \cup Y$. Por la propiedad (1), como Y es realcompacto,

y $\beta Y = \beta X$ (por densidad), se deduce que:

$$\upsilon X \cup Y \subset \upsilon Y = Y \Rightarrow \upsilon X \subset Y,$$

como queríamos demostrar.
Para (3), volvemos a observar que υX es una realcompactificación de X en la que este está $\mathcal{C}$-sumergido, así que basta probar que si Y es una realcompactificación en la que X está $\mathcal{C}$-sumergido, entonces $Y \approx \upsilon X$. Para ello vamos a ver que Y es equivalente a un subespacio de βX, y entonces por (1), como X está $\mathcal{C}$-sumergido en Y, entonces $Y \subset \upsilon X$, y como Y es realcompacto, de (2) se deduce que $\upsilon X \subset Y$, así que ambos espacios coinciden.
En efecto, vemos que Y está $\mathcal{C}^*$-sumergido en βX, porque si $f \in \mathcal{C}^*(Y)$, entonces $f|_X$ tiene una extensión $f^* = (f|_X)^\beta$ a βX, y vamos a probar que entonces f^* es una extensión de f a βX. La aplicación f^* es continua, luego solo falta comprobar que $f^*|_Y = f$. La función f es una extensión de $f|_X$ a Y, y $f^*|_Y$ es otra, luego, por la unicidad de las extensiones y la densidad de X en Y, ambas deben coincidir en todos los puntos de Y. Por lo tanto, $\beta Y = \beta X$, luego Y es equivalente a un subespacio de βX, como queríamos demostrar.
Si Y es una realcompactificación de X que cumple (4) entonces, como $\mathbb{R}$ es realcompacto, Y también cumple (3), luego $Y \approx \upsilon X$, así que solo tenemos que demostrar que toda aplicación $f : X \longrightarrow Y$, con Y realcompacto, tiene una extensión a υX. Podemos considerar a la aplicación f con llegada en βY, y como βY es compacto, f tiene una extensión $f^* : \beta X \longrightarrow \beta Y$. Si probamos que la aplicación $f^\upsilon = f^*|_{\upsilon X}$ tiene llegada en υY, entonces, como Y es realcompacto, podremos concluir que $f^\upsilon : \upsilon X \longrightarrow Y$ es una extensión de f.
Dada un función $g \in \mathcal{C}(Y)$ y un punto $p \in \upsilon X$, tenemos que $\tilde{g}(f^*(p)) \in \mathbb{R}$ si, y solo si, $[g]_{M^{f^*(p)}}$ no es infinitamente grande, y la única manera de que se cumpla esta condición para toda $g \in \mathcal{C}(Y)$, es que el ideal $M^{f^*(p)}$ sea real, es decir, que $f^*(p) \in \upsilon Y$, que es exactamente lo que queremos demostrar, así que vamos a probar esa condición equivalente.
Si x es un punto de X, entonces $\tilde{g} \circ f^*(x) = g(f(x))$, así que por la unicidad de las extensiones, $\tilde{g} \circ f^*$ coincide con la extensión $\widetilde{g \circ f} : \beta X \longrightarrow \omega\mathbb{R}$, luego, para todo $p \in \upsilon X$, se verifica que $\tilde{g}(f^*(p)) = (\widetilde{g \circ f})(p)$, y este es un número real, porque $p \in \upsilon X$. $\square$

Corolario 5.10. X es pseudocompacto si, y solo si, $\upsilon X = \beta X$.

Demostración. Si $\mathcal{C}^*(X) = \mathcal{C}(X)$, entonces X está $\mathcal{C}$-sumergido en βX, luego $\beta X \subset \upsilon X$, y ambos espacios coinciden, porque siempre se cumple que $\upsilon X \subset \beta X$.

Recíprocamente, si $\upsilon X = \beta X$, entonces toda función $f \in \mathcal{C}(X)$ tiene una extensión a βX, luego es acotada, así que $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}^*(X)$. $\square$

Ahora probamos algunas propiedades de los espacios realcompactos que también cumplen los espacios compactos:

Proposición 5.11. Un subespacio cerrado de un espacio realcompacto es realcompacto.

Demostración. Supongamos que X es un subespacio cerrado del espacio realcompacto Y. La aplicación de inclusión $i : X \hookrightarrow Y$ admite una extensión $i^\upsilon : \upsilon X \longrightarrow Y$. Como $i^\upsilon|_X$ es una inmersión y X es denso en υX, el teorema 1.36 nos dice que $i^\upsilon(\upsilon X \setminus X) \subset Y \setminus X$. De ahí se deduce que $(i^\upsilon)^{-1}(X) = X$, así que por la continuidad y el hecho de que X es cerrado en Y, deducimos que X es cerrado en υX, y como también es denso, será $X = \upsilon X$, luego X es realcompacto. $\square$

Ejemplo 5.12. Gracias a la proposición anterior, podemos construir un espacio topológico que no es realcompacto ni pseudocompacto (véase [GM], corolario 3.7):

Demostración. Sea X la unión disjunta de $\mathbb{R}$ y Ω, con la topología que tiene por abiertos a las uniones (disjuntas) de un abierto de $\mathbb{R}$ y un abierto de Ω. Notemos que tanto $\mathbb{R}$ como Ω son abiertos y cerrados en X.
El espacio X no puede ser realcompacto, pues si lo fuera lo sería Ω, por ser un cerrado de X.
Tampoco es pseudocompacto, porque como $\mathbb{R}$ y Ω son dos abiertos de X, la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{si } x \in \Omega \end{cases}$$

es continua (por serlo sus restricciones a $\mathbb{R}$ y Ω) pero no es acotada, luego $\mathcal{C}(X) \neq \mathcal{C}^*(X)$. $\square$

Proposición 5.13. El producto de espacios realcompactos es realcompacto.

Demostración. Sea $X = \prod_{i\in I} X_i$ un producto de espacios realcompactos. Entonces, cada proyección $\pi_i : X \longrightarrow X_i$ tiene una extensión $\pi_i^\upsilon : \upsilon X \longrightarrow X_i$. Si definimos la aplicación $f : \upsilon X \longrightarrow X$ por $f = (\pi_i^\upsilon)_{i\in I}$, entonces $f|_X = Id_X$ (una inmersión), y como X es denso en υX, el teorema 1.36 nos dice que $f(\upsilon X \setminus X) \subset X \setminus X = \emptyset$, y esto solo es posible si $X = \upsilon X$. Por lo tanto X es realcompacto. $\square$

Estos dos últimos teoremas son la clave para construir realcompactificaciones de forma análoga a nuestra primera manera de obtener compactificaciones: mediante una inmersión en un producto de copias de $\mathbb{R}$ (en contraposición a las inmersiones en cubos).

Definición 5.14. Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X)$ es un conjunto de funciones que separa puntos de cerrados (luego también separa puntos por ser X de Hausdorff), entonces el teorema 1.33 nos asegura que la aplicación de evaluación

$$\begin{aligned} e_{\mathcal{F}} : X &\longrightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{F}} \\ x &\longmapsto \big(f(x)\big)_{f\in\mathcal{F}} \end{aligned}$$

es una inmersión. Por lo tanto, por las dos proposiciones anteriores, $e_{\mathcal{F}}X = \overline{e_{\mathcal{F}}(X)}$ es realcompacto, por ser un cerrado de un realcompacto, así que el conjunto $\mathcal{F}$ nos determina una realcompactificación de X, que llamaremos $e_{\mathcal{F}}X$.
Si además todas las funciones de $\mathcal{F}$ son acotadas, entonces la llegada de $e_{\mathcal{F}}$ se puede considerar como un cubo, y en esas condiciones $e_{\mathcal{F}}X$ es un cerrado de un compacto, luego compacto, y de hecho coincide con la compactificación de X que definimos en 2.5.

Proposición 5.15. La realcompactificación de Hewitt υX es equivalente a $e_{\mathcal{C}(X)}X$.

Demostración. Vamos a probar que X está $\mathcal{C}$-sumergido en $e_{\mathcal{C}(X)}X$, y por la caracterización de υX del teorema 5.9 (apartado (3)) tendremos la equivalencia entre las realcompactificaciones.
Si $f \in \mathcal{C}(X)$, denotamos por $f^* : e_{\mathcal{C}(X)}X \longrightarrow \mathbb{R}$ a la restricción a $e_{\mathcal{C}(X)}X$ de la proyección sobre el factor f-ésimo, que es continua por ser la restricción de una aplicación continua. Entonces, si $x \in X$, se verifica que $f^*(x) = \pi_f\Big(\big(g(x)\big)_{g\in\mathcal{C}(X)}\Big) = f(x)$, y por lo tanto f^* es un extensión de f a $e_{\mathcal{C}(X)}X$, como queríamos probar. $\square$

Corolario 5.16. Un espacio de Hausdorff es realcompacto si, y solo si, es homeomorfo a un subespacio cerrado de un producto $\mathbb{R}^I$ de copias de $\mathbb{R}$, para un conjunto de indices I adecuado.

Demostración. Si X es realcompacto entonces $X = \upsilon X \approx e_{\mathcal{C}(X)}X$, que es un subespacio cerrado de $\mathbb{R}^{\mathcal{C}(X)}$.
Recíprocamente, si X es un cerrado de $\mathbb{R}^I$ entonces como $\mathbb{R}$ es realcompacto, X es realcompacto en virtud de las proposiciones 5.13 y 5.11. $\square$

Definición 5.17. Sea ηX una realcompactificación de X y $\{f_i : X \longrightarrow Y_i \mid i \in I\}$ un conjunto de aplicaciones continuas, donde cada Y_i es realcompacto. Como η es una inmersión, también lo será la aplicación de evaluación $c_{\mathcal{F}}$ asociada al conjunto $\mathcal{F} = \{\eta\} \cup \{f_i \mid i \in I\}$, que tiene llegada en el espacio realcompacto $\eta X \times \prod_{i \in I} Y_i$. Por lo tanto, en estas condiciones $c_{\mathcal{F}} X = \overline{c_{\mathcal{F}}(X)}$ es una realcompactificación de X.

Teorema 5.18. Sea ηX una realcompactificación de X y $\{f_i : X \longrightarrow Y_i \mid i \in I\}$ un conjunto de aplicaciones continuas, donde cada Y_i es un espacio realcompacto. Si definimos el conjunto $\mathcal{F} = \{\eta\} \cup \{f_i \mid i \in I\}$, entonces podemos extender cada f_j a $c_{\mathcal{F}} X$, y además $c_{\mathcal{F}} X \geq \eta X$.

Demostración. Sea f_j^* la restricción a $c_{\mathcal{F}} X$ de la proyección sobre Y_j. Se trata de una aplicación continua por ser la restricción de una que es continua, y es la extensión a $c_{\mathcal{F}} X$ de f_j porque:

$$f_j^*(c_{\mathcal{F}}(x)) = \pi_j\Big(\eta(x), \big(f_i(x)\big)_{i \in I}\Big) = f_j(x)$$

Análogamente, si η^* denota a la restricción a $c_{\mathcal{F}} X$ de la proyección sobre ηX entonces:

$$\eta^*(c_{\mathcal{F}}(x)) = \pi_\eta\Big(\eta(x), \big(f_i(x)\big)_{i \in I}\Big) = \eta(x)$$

Concluimos que $c_{\mathcal{F}} X \geq \eta X$. □

A diferencia del caso de los espacios compactos, la imagen por una aplicación continua de un espacio realcompacto no tiene por qué ser un espacio realcompacto. Sin embargo, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 5.19. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua, $A \subset Y$, y tanto X como A son realcompactos, entonces $f^{-1}(A)$ es realcompacto.

Demostración. Como X es realcompacto, la aplicación de inclusión $i : f^{-1}(A) \hookrightarrow X$ admite una extensión $g : \upsilon f^{-1}(A) \longrightarrow X$. Como A es realcompacto, la aplicación $f|_{f^{-1}(A)} : f^{-1}(A) \longrightarrow A$ tiene una extensión $h : \upsilon f^{-1}(A) \longrightarrow A$. En los puntos de $f^{-1}(A)$, las aplicaciones $f \circ g$ y h coinciden, luego, por la densidad de $f^{-1}(A)$ en $\upsilon f^{-1}(A)$, se verifica que $h = f \circ g$. Como i es una inmersión y $f^{-1}(A)$ es denso en $\upsilon f^{-1}(A)$, por el teorema 1.36:

$$g\left(\upsilon f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(A)\right) \subset X \setminus f^{-1}(A)$$

Si aplicamos componemos con f por la izquierda a ambos lados de la igualdad, como $h = f \circ g$:

$$h\left(\upsilon f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(A)\right) \subset f\left(X \setminus f^{-1}(A)\right) \subset Y \setminus A$$

Como $h : \upsilon f^{-1}(A) \longrightarrow A$, el único subconjunto de $\upsilon f^{-1}(A)$ cuya imagen por h está contenida en $Y \setminus A$ es el vacío. Por lo tanto, $\upsilon f^{-1}(A) = f^{-1}(A)$, luego $f^{-1}(A)$ es realcompacto, como queríamos demostrar. □

Corolario 5.20. Si X es un espacio realcompacto, entonces los ceroconjuntos de X son realcompactos, y los complementarios de ceroconjuntos también son realcompactos.

Demostración. Si $f \in \mathcal{C}(X)$, entonces $Z(f) = f^{-1}(\{0\})$, y $X \setminus Z(f) = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Como f es continua, y los espacios X, $\{0\}$ y $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ son realcompactos, entonces por la proposición anterior tanto $Z(f)$ como $X \setminus Z(f)$ son realcompactos. □

Proposición 5.21. La intersección de subespacios realcompactos es realcompacta.

Demostración. Supongamos que $\{X_i \mid i \in I\}$ es un conjunto de subespacios topológicos realcompactos de un mismo espacio topológico, y sea X la intersección de todos. Vamos a probar que $\upsilon X = X$.
Cada aplicación de inclusión $X \hookrightarrow X_i$ tiene una extensión $f_i : \upsilon X \longrightarrow X_i$. Por definición, todas las aplicaciones f_i coinciden en X (en ese conjunto son la identidad), y por densidad se deduce que todas coinciden en υX con una misma aplicación continua $f : \upsilon X \longrightarrow X$. Como $f|_X$ es una inmersión y X es denso en υX, por el teorema 1.36, $f(\upsilon X \setminus X) \subset f(\upsilon X) \setminus X = \emptyset$, así que $\upsilon X = X$, como queríamos demostrar. □

Otra diferencia con los espacios compactos es que una unión finita de subespacios realcompactos no tiene porque ser realcompacta. A pesar de ello, tenemos un resultado parcial:

Proposición 5.22. Si R y K son dos subespacios de un mismo espacio topológico, y se verifica que R es realcompacto y que K es compacto, entonces $X = R \cup K$ es realcompacto.

Demostración. Supongamos que X no es realcompacto, y vamos a demostrar que entonces R no es realcompacto, probando que está $\mathcal{C}$-sumergido en un espacio que contiene estrictamente a R como un denso, y por lo tanto $\upsilon R \neq R$.
Como X no es realcompacto, podemos tomar un punto $p \in \upsilon X \setminus X$, que debe ser adherente a R, porque, como K es cerrado en υX por ser compacto, $p \in \overline{R \cup K} = \overline{R} \cup K$, y como $p \notin K$, necesariamente $p \in \overline{R}$.
Por lo tanto, R es denso en $R \cup \{p\}$. Veamos que, además, está $\mathcal{C}$-sumergido. Dada una función $f \in \mathcal{C}(R)$, vamos a extender a f de forma continua a $R \cup \{p\}$. Como υX es un espacio de Tychonoff, podemos tomar una función $f_1 \in \mathcal{C}(X)$ que se anule en p y valga 1 en K. Entonces, los dos ceroconjuntos $H_1 = Z(g_1) = \{x \in X \mid f_1(x) \leq 1/3\}$ y $H_2 = Z(g_2) = \{x \in X \mid f_1(x) \geq 2/3\}$ son disjuntos y entornos de p y K respectivamente. La función $g = \frac{|g_2|}{|g_1|+|g_2|}$ es continua en υX, se anula en H_2 (un entorno de K), y vale 1 en H_1 (un entorno de p). Vamos a apoyarnos en g para

extender a f al punto p.
La función $g|_R \cdot f$ vale 0 en los puntos de $K \cap R$, así que se puede extender a una función $h \in \mathcal{C}(X)$ que valga 0 en todos los puntos de K. Consideramos la función h^υ que resulta de extender h a υX, y construimos una extensión f' de f a $R \cup \{p\}$ definiendo $f'(p) = h^\upsilon(p)$. Si comprobamos que f' es continua en p hemos conseguido lo que queríamos.
Sea U un entorno (en $\mathbb{R}$) de $h^\upsilon(p)$. Por ser h^υ continua en p, existe un entorno V (en υX) de p tal que $h^\upsilon(V) \subset U$. Podemos, además, suponer que V está contenido en H_1. El conjunto $V \cap (R \cup \{p\})$ es un entorno en $R \cup \{p\}$ de p, y además:

$$\begin{aligned} f'((R \cup \{p\}) \cap V) &= f'((R \cap V) \cup \{p\}) = f'(R \cap V) \cup \{h^\upsilon(p)\} = \\ &= h(R \cap V) \cup \{h^\upsilon(p)\} = h^\upsilon((R \cap V) \cup \{p\}) \subset h^\upsilon(V) \subset U \end{aligned}$$

Luego f' es continua en p, como queríamos demostrar. □

Ya comentamos anteriormente que la imagen de un espacio realcompacto por una aplicación continua no es necesariamente realcompacta. Para dar un ejemplo de esto, nuestro objetivo va a ser demostrar que $\mathbb{R}$ con la topología discreta es realcompacto. Como todo subespacio de un espacio discreto es cerrado, el teorema 5.11 nos permite deducir que todo espacio discreto con cardinal menor o igual que el de $\mathbb{R}$ es realcompacto. En particular, Ω (ejemplo 1.22) con la topología discreta es realcompacto (recordemos que Ω es el menor ordinal no numerable, así que si dotamos a $\mathbb{R}$ de un buen orden encontramos una inyección $\Omega \hookrightarrow \mathbb{R}$). Por lo tanto, la aplicación identidad $Id : \Omega \longrightarrow \Omega$, donde a la izquierda consideramos la topología discreta, y a la derecha la del orden, es continua y envía a un espacio realcompacto en uno que no lo es.

Proposición 5.23. Supongamos que X e Y son dos espacios topológicos (de Tychonoff), que todos los subespacios de Y son realcompactos, y que tenemos una aplicación continua $\sigma : X \longrightarrow Y$ cuyas fibras son compactas. Entonces X es realcompacto.

Demostración. Como Y es un espacio realcompacto, la aplicación σ tiene una extensión $\sigma^\upsilon : \upsilon X \longrightarrow Y$. Vamos a demostrar que todas las fibras $(\sigma^\upsilon)^{-1}(y)$ están contenidas en X, luego $\sigma^\upsilon(\upsilon X \setminus X) = \emptyset$, y de ahí deduciremos que $\upsilon X = X$, así que X es realcompacto.
Sea $y \in Y$. Como $Y \setminus \{y\}$ es realcompacto, por el teorema 5.19, $S_y = (\sigma^\upsilon)^{-1}(Y \setminus \{y\})$ es realcompacto. Como, por hipótesis, las fibras $\sigma^{-1}(y)$ son compactas, por el teo-

rema 5.22, el conjunto

$$R_y = S_y \cup \sigma^{-1}(y) = (\sigma^{\upsilon})^{-1}(Y \setminus \{y\}) \cup \sigma^{-1}(y) = \big(\upsilon X \setminus (\sigma^{\upsilon})^{-1}(y)\big) \cup \sigma^{-1}(y) = \\ = \upsilon X \setminus \big((\sigma^{\upsilon})^{-1}(y) \setminus \sigma^{-1}(y)\big)$$

también es realcompacto. Cada espacio R_y cumple que $X \subset R_y \subset \upsilon X$, luego, como R_y es realcompacto, por el teorema 5.9, $R_y = \upsilon X$, lo cual quiere decir que $(\sigma^{\upsilon})^{-1}(y) = \sigma^{-1}(y)$, luego $(\sigma^{\upsilon})^{-1}(y) \subset X$, como queríamos demostrar. □

Corolario 5.24. Todo espacio discreto X con cardinal menor o igual que el de $\mathbb{R}$, es realcompacto.

Demostración. Si el cardinal de X es menor o igual que el de $\mathbb{R}$, entonces existe una aplicación inyectiva $i : X \longrightarrow \mathbb{R}$, que será continua cuando X tiene la topología discreta. Además, la fibra $i^{-1}(a)$, con $a \in \mathbb{R}$, es el vacío si $a \notin i(X)$, o el conjunto $\{x\}$, si $i(x) = a$, luego es compacta en cualquiera de los dos casos. Entonces, por la proposición anterior, como todos los subespacios de $\mathbb{R}$ son realcompactos, X es realcompacto. □

Este resultado también nos permite concluir que el recíproco del teorema 5.3 no es cierto, porque $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (con la topología discreta) es un espacio que no es de Lindelöf, pero si es realcompacto.
Por último, vamos a ver un ejemplo que muestre que la unión de dos subespacios realcompactos no tiene por qué ser realcompacta:

Ejemplo 5.25 ([GJ], 5I)**.** Veamos, en primer lugar, que existe un subconjunto infinito $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ con la siguiente propiedad: todos los miembros de $\mathcal{A}$ son infinitos, y dos cualesquiera de ellos tienen intersección finita (suponiento que sean distintos). Denotemos por Γ a la colección de subconjuntos infinitos de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ que cumplen la propiedad anterior.
Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de subconjuntos de $\mathbb{N}$ infinitos y disjuntos dos a dos (que existe porque $\mathbb{N}$ es equipotente a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$), y $\mathcal{A} = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, entonces $\mathcal{A} \in \Gamma$, luego Γ es no vacío, y podemos ordenar a Γ mediante la inclusión.
Es fácil comprobar que todo subconjunto totalmente ordenado de Γ tiene una cota superior (su unión). Por lo tanto, el Lema de Zorn nos proporciona un conjunto infinito $\mathcal{A} \in \Gamma$ que es maximal entre los elementos de Γ. Definimos el conjunto $\Psi = \mathbb{N} \cup \mathcal{A}$, y vamos a dotarlo de una topología, especificando cuales son los entornos de cada punto:
Si $n \in \mathbb{N}$, entonces todos los subconjuntos de Ψ son entornos de n. Es decir, $\{n\}$ es un abierto de Ψ.

Si $A \in \mathcal{A}$, entonces los entornos de A son los conjuntos de la forma $\{A\} \cup A'$, donde A' es un subconjunto de Ψ tal que $A \setminus A'$ es finito.

Nuestra definición de entorno de un punto cumple que todo entorno de un punto contiene a ese punto; si un subconjunto de Ψ contiene a un entorno de un punto también es entorno de ese punto; la intersección de dos entornos de un punto es un entorno de ese punto, y todo punto tiene un entorno que es entorno de todos sus puntos. Por lo tanto, existe una única topología en Ψ (en la que los abiertos son los subconjuntos de Ψ que son entornos de todos sus puntos) para la cual los entornos de cada punto son exactamente los que hemos definido antes. Vamos a demostrar que esa topología cumple las siguientes propiedades:

(1) Los subespacios $\mathbb{N}$ y $\mathcal{A}$ son discretos.

(2) Dado $C \subset \Psi$, $\overline{C} = C \cup \{A \in \mathcal{A} \mid C \cap A \text{ es infinito}\}$

(3) El espacio Ψ es de Tychonoff.

(4) Ψ es pseudocompacto.

(5) Ψ no es un espacio compacto.

Entonces, por (4), (5) y la proposición 5.5, deduciremos que Ψ no es realcompacto. Sin embargo, es de Tychonoff, y es unión de dos espacios realcompactos, porque como $|\mathcal{A}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$, la propiedad (1) y el corolario 5.24 nos garantizan que $\mathbb{N}$ y $\mathcal{A}$ son realcompactos.

Demostración. (1) Como todos los conjuntos de la forma $\{n\}$, con $n \in \mathbb{N}$ son abiertos en Ψ, cualquier subconjunto de $\mathbb{N}$ es abierto en Ψ, luego también será abierto en la topología de subespacio de $\mathbb{N}$.

Por otro lado, dado $A \in \mathcal{A}$, tenemos que $\{A\} = \mathcal{A} \cap (\{A\} \cup \mathbb{N})$, luego $\{A\}$ es abierto en la topología de subespacio de $\mathcal{A}$, así que $\mathcal{A}$ también es discreto con la topología de subespacio.

(2) Supongamos que A es un punto de $\overline{C} \setminus C$, y vamos a demostrar que entonces $A \in \mathcal{A}$ y $C \cap A$ es infinito.

No puede ser $A \in \mathbb{N}$, porque como $A \notin C$, entonces $\{A\} \cap C = \emptyset$, y si $A \in \mathbb{N}$, entonces $\{A\}$ es un entorno de A. Luego debe ser $A \in \mathcal{A}$.

Tampoco puede ser $C \cap A$ finito, porque en ese caso vemos que $U = \{A\} \cup (\mathbb{N} \setminus (C \cap A))$ es un entorno de A que no corta a C. En efecto, que U no corta a C es claro por la definición, y que sea un entorno de A equivale a que el conjunto

$$A \setminus (\mathbb{N} \setminus (C \cap A)) = (A \setminus \mathbb{N}) \cap C \cap A$$

sea finito, y lo es, porque está contenido en $C \cap A$, que es finito.

(3) Veamos primero que Ψ es de Hausdorff. Sean A, B dos puntos distintos de Ψ. Vamos a encontrar dos entornos disjuntos U y V de A y B, respectivamente:

- Si $A, B \in \mathbb{N}$, entonces definimos $U = \{A\}$, y $V = \{B\}$.
- Si $A \in \mathbb{N}$ y $B \in \mathcal{A}$, definimos $U = \{A\}$, y $V = \{B\} \cup (\mathbb{N} \setminus \{A\})$. El caso en que $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathbb{N}$ es análogo.
- Si $A, B \in \mathcal{A}$, se definen $U = \{A\} \cup (B \setminus A)$, y $V = \{B\} \cup (A \setminus B)$

En los tres casos es inmediato a partir de las definiciones que U y V son entornos disjuntos de A y B respectivamente.
Ahora, para probar que Ψ es completamente regular, tomemos un cerrado F de Ψ y un punto $A \in \Psi \setminus F$. Vamos a encontrar dos abiertos disjuntos U y V que contengan a A y F, respectivamente, y cuya unión sea Ψ. En ese caso, la función $f : \Psi \longrightarrow \mathbb{R}$ que vale 0 en U y 1 en V es continua por serlo sus restricciones a dos abiertos que recubren Ψ, y nos permite separar al punto A del cerrado F. Distinguimos dos casos:

- Si $A \in \mathbb{N}$, definimos $U = \{A\}$ y $V = \Psi \setminus \{A\}$. El conjunto U es abierto porque el punto A es aislado, V es abierto por ser el complementario de un conjunto unipuntual (que en un espacio de Hausdorff es un cerrado), y claramente U contiene a $\{A\}$, V contiene a F y $U \cup V = \Psi$.
- Si $A \in \mathcal{A}$, definimos $U = \{A\} \cup (A \setminus F)$, y $V = \Psi \setminus U = (\mathcal{A} \setminus \{A\}) \cup (\mathbb{N} \setminus A) \cup F$. Ciertamente su unión es Ψ, U contiene a $\{A\}$ y V contiene a F, ahora vamos a demostrar que ambos son abiertos:
  Todos los puntos de $A \setminus F$ son naturales, luego están en el interior de U. Por lo tanto, solo falta comprobar que $A \in \mathring{U}$, es decir, que $A \setminus U$ es finito. Como $x \notin F = \overline{F}$, puesto que $A \in \mathcal{A}$, por la propiedad (2), $A \cap F$ es finito, luego $A \setminus U = A \setminus (A \setminus F) = A \cap F$, que es un conjunto finito.
  Todos los puntos de $\mathbb{N} \setminus A$ o de F son naturales, luego están en el interior de V, luego basta con que tomemos $B \in \mathcal{A}$, con $B \neq A$, y que probemos que $B \in \mathring{V}$, es decir, que $B \setminus V$ es finito. Recordemos que, por la definición de $\mathcal{A}$, los conjuntos A y B tienen intersección finita. Por lo tanto $B \setminus V = B \setminus (F \cup (\mathbb{N} \setminus A)) = (B \setminus F) \cap (B \setminus (\mathbb{N} \setminus A)) = (B \setminus F) \cap A \cap B \subset A \cap B$, y este último es un conjunto finito, luego $B \in \mathring{V}$, como queríamos demostrar.

(4) Supongamos que una función $f \in \mathcal{C}(X)$ es no acotada. Entonces, por la densidad de $\mathbb{N}$ en Ψ, f no puede ser acotada en $\mathbb{N}$. Esto a su vez implica que existe $A \in \mathcal{A}$ tal que f no es acotada en A, porque, en caso contrario, existiría un número natural $n \in \mathbb{N}$ que no estaría en ningún $A \in \mathcal{A}$. Eso nos permite tomar un conjunto $B \in \mathcal{A}$, y definir $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{B \cup \{n\}\}$. Ciertamente $\mathcal{A}' \in \Gamma$ y $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$, en contra de que $\mathcal{A}$ es

maximal.
Sin embargo, es absurdo que f sea no acotada en algún $A \in \mathcal{A}$, porque entonces tampoco es acotada en $\overline{A} = A \cup \{A\}$, y vamos a probar que este conjunto es compacto. Sea $\mathcal{U}$ un recubrimiento abierto de $\overline{A}$ formado por abiertos de Ψ. Como $\mathcal{U}$ recubre $\overline{A}$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $A \in U$. Como U es un entorno de A, U contiene a todos los puntos de A salvo a una cantidad finita, digamos $a_1, a_2, ..., a_n$. Como $\mathcal{U}$ es un recubrimiento de $\overline{A}$, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ existe $U_i \in \mathcal{U}$ tal que $a_i \in U_i$. En consecuencia, $\{U, U_1, U_2, ..., U_n\}$ es un subrecubrimiento finito de $\mathcal{U}$, como queríamos demostrar.
(5) Como todos los conjuntos unipuntuales $\{n\}$, con $n \in \mathbb{N}$ son abiertos en Ψ, también lo es $\mathbb{N}$, por ser unión de abiertos. Por lo tanto, $\mathcal{A}$ es cerrado en Ψ, así que si Ψ fuera compacto, también lo sería $\mathcal{A}$. Sin embargo, hemos probado que $\mathcal{A}$ es un subespacio discreto, y como es infinito no puede ser compacto, luego tampoco lo es Ψ. $\square$

Bibliografía

[AS] R.A. Alò and H.L. Shapiro, *Normal Topological Spaces*, Cambridge University Press, 1974.

[AM] M.F. Atiyah and I.G. Macdonald, *Introducción al Algebra Conmutativa*, Reverté, 1978.

[Br] R. Brooks, *On Wallman compactifications*, Fund. Math. 60 (1967), 157-173.

[Ch] R.E. Chandler, *Hausdorff Compactifications*, Marcel Dekker, 1976.

[CF] R.E. Chandler and G.D. Faulkner, *Hausdorff Compactifications: A Retrospective*, en: C.E. Aull and R. Lowen, *Handbook of the History of General Topology*, vol 2, Springer, Dordrecht, 1998.

[Fr] O. Frink, *Compactifications and semi-normal spaces*, American J. Math. 86 (1964), 602-607.

[GJ] L. Gillman and M. Jerison, *Rings of Continuous Functions*, Van Nostrand, 1960.

[GM] P. P. Ghosh and B. Mitra, *Hard pseudocompact spaces*, Quaest. Math. 35 (2012), 313-329.

[He] E. Hewitt, *Rings of Real-Valued Continuous Functions. I*, Trans. Amer. Math. Soc. 64, No. 1 (1948), 45-99.

[Iv] C. Ivorra, *Topología*, https://www.uv.es/ivorra/Libros/Libros.htm, 2020.

[SS] A.K. Steiner and E.F. Steiner, *Compactifications as closures of graphs*, Fund. Math. 63 (1968), 221-223.

[Ul] V.M. Ul'yanov, Solution of a basic problem on compactifications of Wallman type, Soviet Math. Dokl. 18 (1977), 567-571.

[Wi] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley, 1970.