



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

Trabajo Fin de Grado

Grado en Matemáticas

Sucesiones enteras recurrentes y meta-recurrentes

Autora: Raquel Hernández Cantero

Tutor: José Enrique Marcos Naveira

Se recomienda impresión a color

Índice general

Introducción	9
1. Sucesión de Fibonacci	12
1.1. Definición recursiva	12
1.2. Forma de Binet y el número áureo	13
1.3. Propiedades de los números de Fibonacci	18
1.4. Fibonacci con matrices	23
1.5. Aplicaciones y ejemplos	27
1.5.1. Fibonacci en la naturaleza	27
1.5.2. Fibonacci y la física	29
1.5.3. En probabilidad y juegos como el ajedrez.	32
1.5.4. En informática	38
1.5.5. Fibonacci y la teoría de grafos	40
2. Sucesión compañera de Lucas	44
2.1. Definición recursiva	44
2.2. Forma de Binet	45
2.3. Propiedades de los números de Lucas	46
2.3.1. Lucas con matrices	49
2.4. Aplicaciones y ejemplos	53
3. Sucesiones (generales) de Lucas	59
3.1. Definiciones recursivas	59
3.2. Formas de Binet	60
3.3. Propiedades de las sucesiones de Lucas	63
3.3.1. Expresiones matriciales generales	66
3.3.2. Criterios de divisibilidad y números primos	67
3.4. Sucesiones específicas	70

3.4.1.	Sucesión de Pell y su sucesión compañera de Pell-Lucas	71
3.4.2.	Sucesión de Jacobsthal y su compañera Jacobsthal-Lucas	74
3.5.	Aplicaciones y ejemplos	76
4.	Sucesiones lineales enteras recurrentes de orden 3 o superior	78
4.1.	Conceptos previos	78
4.2.	Sucesión de Perrin	81
4.3.	Sucesión de Padovan	83
4.3.1.	Relación entre las sucesiones de Perrin y Padovan	88
4.4.	Sucesiones de Tribonacci, Tetranacci y de orden n	90
4.5.	Sucesión adicional: Narayana	95
5.	Sucesiones enteras meta-recurrentes	98
5.1.	Introducción y conceptos previos	98
5.2.	G-sucesión de Hofstadter (y H-sucesión)	101
5.3.	Q-sucesión de Hofstadter	106
5.4.	Sucesión de los 10,000 \$ de Hofstadter-Conway	108
5.5.	Otras sucesiones	110
5.5.1.	La prima caótica de la sucesión de Conway y otros parientes	110
5.5.2.	Sucesiones casadas de Hofstadter	112
5.5.3.	Sucesión caótica con forma de corazón (de Hofstadter)	114
5.5.4.	Sucesión de Golomb	116
	Programas en MAPLE utilizados	120
	Bibliografía	125

Índice de figuras

1.1. Proporción áurea	16
1.2. Espiral de Fibonacci y el número áureo	17
1.3. Problema de los conejos	28
1.4. Estructura curiosa de la piña	29
1.5. Óptica 1 - platos de cristal	30
1.6. Óptica 2 - platos de cristal	30
1.7. Óptica 3 - platos de cristal	31
1.8. Problema de electrostática	31
1.9. Ajedrez 1 - tablero de dimensión 1 x n	35
1.10. Ajedrez 2 - posibles casillas para situar el rey	36
1.11. Composiciones en un panal	38
1.12. Grafos no dirigidos	40
1.13. Grafos - árboles de Fibonacci	41
2.1. Relación visual números de Lucas y num. de Fibonacci	46
2.2. Espiral de Lucas	54
2.3. Grafos - diagrama de Hasse	56
2.4. Grafos - vallas o zigzags	57
2.5. Grafos - vallas cerradas o corrales	57
3.1. Ternas pitagóricas con números de Pell	74
4.1. Padovan y el triángulo de Pascal	88
4.2. Espiral de triángulos equiláteros	88
5.1. Interpretación en árbol de la G-sucesión	105
5.2. Interpretación en árbol de la H-sucesión	106
5.3. Construcción de la Q-sucesión	107
5.4. MAPLE: Suc. prima caótica de Conway	111

5.5. MAPLE: Sucesiones casadas	113
5.6. MAPLE: Q-sucesión de Hofstadter	114
5.7. MAPLE: Sucesión de Conway	114
5.8. MAPLE: Sucesión con forma de corazón	115
5.9. MAPLE: Sucesión de Golomb	118

Índice de tablas

1.1. Números de Fibonacci	13
1.2. Propiedades del número áureo α y el num. β	18
1.3. Pétalos y números de Fibonacci	29
2.1. Números de Lucas	45
3.1. Términos iniciales de las sucesiones de Lucas	60
3.2. Sucesiones específicas de Lucas	70
4.1. Números de Perrin	81
4.2. Números de Padovan	84
4.3. Números de Tribonacci	91
4.4. Números de Tetranacci	94
4.5. Núm. sucesión de las vacas de Narayana	96
5.1. Números G	101
5.2. Números Q	107
5.3. Números de Hofstadter-Conway	109

Notación y terminología

Los símbolos y notaciones que utilizaremos en este trabajo son:

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$: conjuntos de los números naturales, enteros, reales y complejos.
- $\sin(), \cos(), \log()$: funciones trigonométricas y función logaritmo.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = l$ o $f(n) \rightarrow l$: límite de una función f (o de un término que depende de n) cuando n tiende a infinito.
- $f'(x)$: derivada de f con respecto a x .
- $MCD(a, b)$: máximo común divisor de dos números enteros a y b .
- $a \mid b$ ($a \nmid b$): a divide (no divide) a b , para a y b enteros.
- $\#A = |A|$: cardinal de un conjunto A / número de elementos de A .
- (A, \mathcal{R}) : par o conjunto parcialmente ordenado formado por el conjunto A y la relación de orden parcial \mathcal{R} .
- $\lfloor x \rfloor$: función suelo / parte entera de un número x .
- $f = o(g)$: f es o pequeña de g .
- $f = O(g)$: f es O grande de g .
- F_n : n -ésimo número de Fibonacci.
- L_n : n -ésimo número de Lucas.
- φ : número áureo o proporción áurea (a veces como α).
- $(U_n(P, Q))_{n \geq 0}$: sucesión de Lucas de primer tipo, para parámetros enteros no nulos P, Q .
- $(V_n(P, Q))_{n \geq 0}$: sucesión de Lucas de segundo tipo, para parámetros enteros no nulos P, Q .
- P_n : n -ésimo número de Pell.
- p_n : n -ésimo número de Pell-Lucas.
- δ_P : número de plata o proporción de plata.
- J_n : n -ésimo número de Jacobsthal.
- j_n : n -ésimo número de Jacobsthal-Lucas.
- \mathcal{M}_n : n -ésimo número de Mersenne.
- \mathcal{F}_n : n -ésimo número de Fermat.
- ψ : número plástico (de Laan).
- E_n : n -ésimo número de Perrin.
- D_n : n -ésimo número de Padovan.
- T_n : n -ésimo número de Tribonacci.

- φ_3 : constante Tribonacci.
- \mathcal{T}_n : n -ésimo número de Tetranacci.
- φ_4 : constante Tetranacci.
- φ_n : constante n -nacci.
- N_n : n -ésimo número de la sucesión de las vacas de Narayana.
- $N_n^{(k)}$: n -ésimo número de la sucesión de k -Narayana para un k entero no nulo.
- Ψ : razón o proporción superdorada.
- $M(n)$: n -ésimo término de una sucesión de meta-Fibonacci.
- G_n o $G(n)$: n -ésimo G -número de Hofstadter.
- H_n o $H(n)$: n -ésimo H -número de Hofstadter.
- Q_n o $Q(n)$: n -ésimo Q -número de Hofstadter.
- C_n o $C(n)$: n -ésimo término de la sucesión de los 10,000 \$ de Hofstadter-Conway.
- K_n o $K(n)$: n -ésimo término de la sucesión prima caótica de la sucesión de Conway.
- S_n o $S(n)$: n -ésimo término de la sucesión pariente *slow* o lenta de Hofstadter.
- $Ma(n)$: n -ésimo término de la sucesión masculina (marido) en sucesiones casadas.
- $Mu(n)$: n -ésimo término de la sucesión femenina (mujer) en sucesiones casadas.
- h_n o $h(n)$: n -ésimo término de la sucesión caótica con forma de corazón.
- g_n o $g(n)$: n -ésimo número de Golomb.

Introducción

Sucesiones. Lo primero que piensa uno al leer el título de este trabajo es: *¡Ah, como la sucesión de Fibonacci!* Incluso alguien no necesariamente con un alto nivel de estudios en matemáticas ha oído hablar de ella, ya sea en películas, como culturilla matemática cuando estaba en el instituto... pues bien, si este tema despierta tu interés vas a querer leer esta memoria. Si por el contrario, eres de los que piensa: *Pues vaya, otro trabajo que habla de la sucesión de Fibonacci...* no hay problema, porque no nos detendremos ahí.

El objetivo en todo momento de este trabajo ha sido recopilar información sobre sucesiones de números enteros, bien contrastada, con un carácter que espero que se haga ameno, y a la vez combinado con los conocimientos matemáticos que se han ido adquiriendo a lo largo de la carrera: capacidad de demostración, lógica... Resumiendo, este trabajo va dirigido tanto a un lector más experto que espere demostraciones, resultados rigurosos y algo nuevo que aportar a sus conocimientos (con sucesiones recientes e innovadoras como las meta-recurrentes); como también va dirigido a una persona interesada simplemente en extraer de la lectura alguna que otra curiosidad matemática: sucesión de Fibonacci, números de Lucas, números de Pell, el número áureo, la proporción de plata...

Personalmente, reconozco que ha quedado una memoria un tanto más extensa de lo que esperaba. Según comencé a profundizar en el tema, me encontré con la complicación de quedarme atrapada por la cantidad de información y datos interesantes existentes.

En particular, el capítulo 1, centrado en la sucesión de Fibonacci, pretende ser introductorio y sin embargo, su contenido abarca más de lo planeado en un principio, ya que quizás al ser un tema muy conocido y estudiado, se me planteaba el dilema de si incluir o no muchísimos hechos, ejemplos, que a mi parecer tienen algo que aportar y consideré inevitable el añadirlos.

Dejar claro que no lo considero un completo error tampoco, puesto que con este caso particular y sus ejemplos fui adquiriendo y completando mis conocimientos sobre sucesiones, relaciones de recurrencia, formas de Binet, matrices, funciones generadoras... conceptos necesarios y que, si los tenía claros, me iban a ser útiles en temas posteriores de esta memoria. Además, con el beneficio añadido de estarme documentando sobre una materia que puede servir y captar la atención en el mundo de la docencia.

Manteniendo la misma estructura del primer capítulo, el propio trabajo me llevó a dedicar el capítulo 2 a la sucesión compañera de Fibonacci: la sucesión de números de Lucas. Veremos en qué consiste esta relación de *compañeras*, junto a toda la información, fórmulas y ejemplos pertinentes relativos a los números de Lucas.

En el capítulo 3 ya entramos un poco más en materia, con las generalizaciones y sucesiones generales de Lucas, de un nivel más elevado, con conceptos un tanto más abstractos, pero que se ven más claros debido a que seguimos las mismas pautas y estructura (definición recursiva, formas de Binet, propiedades...) que en las sucesiones particulares de los dos primeros temas. A mayores, hablaremos también de números de Pell, números de Jacobsthal y demás ejemplos de sucesiones de Lucas.

Siguiendo con sucesiones recurrentes (a grandes rasgos aquellas cuyos términos son la suma de términos anteriores), continuamos con el capítulo 4 y sucesiones en las que tenemos que saber al menos tres términos anteriores o más (orden 3 o superior) para así poder definir las. Ya no se resuelven ecuaciones de segundo grado, lo que complica el asunto, pero con ayuda de MAPLE, hemos podido hacer un buen estudio, prácticamente igual de completo, sobre sucesiones como las de Perrin, Padovan, Tribonacci... que no son tan sonadas como las vistas hasta el momento y sin embargo, igual o más llamativas que las sucesiones anteriores.

Por último, tenemos el capítulo 5, que se puede considerar el capítulo estrella de este trabajo, junto con el matemático Hofstadter, su protagonista. Con su libro, ganador de un Pulitzer, "*Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid*" [15], Hofstadter nos sugiere las primeras sucesiones meta-recurrentes. Un descubrimiento que a día de hoy, y aproximadamente después de 50 años, sigue planteándonos muchos enigmas. Las consecuencias y las posibles repercusiones y aplicaciones que pueden tener en el mundo matemático llaman cuanto menos la atención.

Este último capítulo, no sólo engloba aquellas sucesiones descubiertas por Hofstadter, también incluye otras sucesiones meta-recurrentes posteriores que consideramos relevantes, y demás estudios recientes (algunos del 2017). Todas ellas bien documentadas e ilustradas, con gráficas MAPLE de elaboración propia y pudiéndose consultar en cualquier momento el anexo de esta memoria con los programas correspondientes.

Entre estas sucesiones, tenemos además, como extra, la sucesión de Golomb. Una sucesión que es a la vez meta-recurrente y un ejemplo de sucesión autogenerada.

No sólo hemos hecho uso de MAPLE. Una herramienta que nos ha sido de mucha utilidad en esta memoria es la enciclopedia online de sucesiones de números enteros [OEIS](#) (The **O**n-**L**ine **E**ncyclopedia of **I**nteger **S**equences) creada y fundada por N.J.A.Sloane, dónde aparecen no sólo las sucesiones ya publicadas, sino cualquier otra bien definida y lo suficientemente interesante como para que se haya registrado.

Recurriremos en repetidas ocasiones a este recurso online (aparece en primer lugar entre los links web de nuestra bibliografía), puesto que su base de datos es una gran ayuda para:

a) IDENTIFICAR una determinada sucesión o serie.

Incluso sin saber el nombre o el número identificativo de la sucesión que estamos buscando, podemos localizarla poniendo simplemente en la barra buscadora de la web varios de los términos o números consecutivos que la componen. Buscando pues, dispondremos, siempre que sea posible, de

- Mínimo una descripción, junto con los 50 primeros términos (aproximadamente alrededor de unas 3 líneas de números de la sucesión en nuestra pantalla).
- Fórmulas, recurrencias, funciones generadoras...
- Referencias, enlaces a páginas web que pueden proporcionar la información que buscas, etc.
- Código, en distintos lenguajes de programación incluso, para generar la sucesión en tu ordenador.

b) Descubrir el ESTADO / status actual de una sucesión ya conocida.

Completamos nuestro conocimiento sobre la materia y el manejo de la OEIS con otras publicaciones del propio N.J.A. Sloane (véase [38, 39, 40]).

Aprovechamos para comentar que, si echamos un vistazo a la bibliografía y a las otras fuentes utilizadas, hay muchos artículos y libros que se han consultado.

Una bibliografía tan amplia sólo es el resultado de la variedad de contenidos sobre los que queríamos indagar, contrastar y recopilar datos. También hay que tener en cuenta que muchos de ellos sólo nos han servido para conseguir una información más completa y como mera consulta o curiosidad. Es decir, figuran al final del trabajo todas las fuentes de las que se ha dispuesto, incluidas también aquellas que sólo se han consultado en contadas ocasiones, pero no como recurso o fuente principal.

Finalmente, agradecer el apoyo recibido, tanto a nivel personal como académico, que ha hecho posible que esté escribiendo ahora esta memoria. Un apoyo, que me atrevo a decir que ha sido casi infinito y proveniente de muchas personas; en un recorrido que no ha sido ni corto ni fácil.

En especial agradecer a mi tutor, José Enrique Marcos, toda la ayuda y guía recibida por su parte. Siempre me supo aconsejar, desde la elección de un tema para mi Trabajo de Fin de Grado, que considero que se ha adaptado a mis gustos y del que he podido obtener provecho, hasta cualquier otro detalle, ya sea relativo al grado o al propio trabajo. Porque él también ha dedicado su tiempo, paciencia y ganas a la hora de corregir posibles errores y hacer sugerencias. Todo ello acompañado de la seguridad de poder contar con su ayuda y disponibilidad, que es de agradecer (aún más en los tiempos inciertos que corren).

Dicho esto, buena lectura.

Valladolid, febrero de 2021.

Capítulo 1

Sucesión de Fibonacci

Comenzaremos con un claro y muy conocido ejemplo de sucesión recurrente de números enteros: la famosa sucesión de Fibonacci.

Su ecuación, sencilla en esencia, está muy presente tal y como veremos más adelante con varios ejemplos; hasta tal punto que a veces los números de Fibonacci podrían recibir el calificativo de *ubicuos*.

Siendo pues, un tema que sabemos que es algo trillado, sobre el que se ha escrito muchísimo y del que incluso alguna vez nos han hablado en nuestra educación básica de instituto, curiosamente es también el origen histórico y el paradigma de todo lo que viene y vamos a tratar después.

Usando un símil (al igual que en [34]), la sucesión o serie de Fibonacci es como un iceberg, siendo ésta el pico y la parte más visible para todos, pero en realidad formando parte de una teoría que va más allá.

1.1. Definición recursiva

Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci¹, nos introduce una sucesión de números formada por los términos 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55... que nosotros identificamos como *la sucesión de Fibonacci*².

En esta sucesión somos capaces de determinar los próximos términos si conocemos los números anteriores a éstos. Esta propiedad nos va a permitir, pues, definir los *números de Fibonacci* y la correspondiente sucesión recursiva:

Definición 1.1. Sucesión recursiva de Fibonacci

Para todo $n \geq 0$ y sea F_n el n -ésimo número de Fibonacci, tenemos:

1. $F_0 = 0, F_1 = 1$ (Condiciones iniciales)

2. $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \forall n \geq 2$ (Relación de recurrencia)

¹Recibe muchos otros nombres: Leonardo Pisano, Leonardo Bigollo o Leonardo Bonacci, el más utilizado: simplemente Fibonacci viene de la contracción "*Filius Bonacci*" hijo de Bonacci, un comerciante con una familia próspera establecida en Pisa (Italia).

²Curiosamente Leonardo de Pisa (1170 - 1250) no fue el primero en describir esta sucesión, pero sí el primero en publicarla en su obra más conocida, "*Liber Abaci*". También introdujo y popularizó en Europa el sistema numérico indo-arábigo, el utilizado en la actualidad y formado por los números del 1 al 9 y el 0 ("zephirum", de carácter algo especial).

A partir de esta definición, ya podemos obtener, por ejemplo, los 30 primeros números de Fibonacci que mostramos en la siguiente tabla:

$F_0 = 0$	$F_6 = 8$	$F_{12} = 144$	$F_{18} = 2584$	$F_{24} = 46368$
$F_1 = 1$	$F_7 = 13$	$F_{13} = 233$	$F_{19} = 4181$	$F_{25} = 75025$
$F_2 = 1$	$F_8 = 21$	$F_{14} = 377$	$F_{20} = 6765$	$F_{26} = 121393$
$F_3 = 2$	$F_9 = 34$	$F_{15} = 610$	$F_{21} = 10946$	$F_{27} = 196418$
$F_4 = 3$	$F_{10} = 55$	$F_{16} = 987$	$F_{22} = 17711$	$F_{28} = 317811$
$F_5 = 5$	$F_{11} = 89$	$F_{17} = 1597$	$F_{23} = 28657$	$F_{29} = 514229$

Tabla 1.1: Números de Fibonacci

Podríamos encontrarlos, sin necesidad de calcularlos nosotros mismos, en la enciclopedia online OEIS con el enlace: <https://oeis.org/A000045>, o yendo directamente a la página principal de la web³ y buscando debidamente.

Comprobamos que es una sucesión sobre la que hay mucha información existente: referencias, links, fórmulas... hasta hay disponibles varios códigos de programación para Maple. Entre toda esta información, va a ser vital manejarnos, tanto con los números de Fibonacci en su forma matricial, como con la llamada *forma de Binet*. Comencemos con esta última.

1.2. Forma de Binet y el número áureo

Hasta ahora, si queremos saber un número específico de Fibonacci, como es el F_{42} , tendríamos que comenzar con las condiciones iniciales $F_0 = 0, F_1 = 1$ y usar después repetidas veces la relación de recurrencia $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2$ que aparecía en la definición 1.1. Nuestro próximo objetivo lógico es entonces encontrar la forma de determinar el número F_n sin tener que realizar $n - 1$ operaciones para calcular F_2, F_3, \dots así hasta llegar al F_n , es decir, lo que queremos es una fórmula que nos defina de forma explícita el término general F_n en función del valor n , y no dependiendo de los valores o números previos de la sucesión.

Abordamos este problema con ecuaciones y resolviendo relaciones de recurrencia lineales. Para ello, recordemos la siguiente definición.

Definición 1.2. Entendemos por *relación de recurrencia homogénea de orden k con coeficientes constantes*, la expresión de la forma:

$$C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \dots + C_k a_{n-k} = 0$$

Para $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}$ constantes con $C_0, C_k \neq 0$ y donde $n \geq k$.

Cuando la parte de la derecha de la igualdad es una constante no nula ($\neq 0$), entonces se dice que es una *relación de recurrencia no homogénea*.

En la sucesión de Fibonacci, por tanto, estamos hablando de una relación de recurrencia de segundo orden (u orden 2 con $k = 2, C_0 = 1, C_1 = C_2 = -1$).

Para resolver esta relación de recurrencia⁴, procedemos de la siguiente forma:

³<https://oeis.org/> y escribiendo en la barra buscadora de dicha página, o bien la extensión **A000045**, o tecleando simplemente “Fibonacci”, es decir, identificándola por el nombre. Incluso si ponemos en la barra de navegación varios números consecutivos de la sucesión, llegamos igualmente a ella y su información correspondiente.

⁴Estamos resolviendo una relación de recurrencia lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes, lo que implica que los resultados de x en la ecuación van a ser *raíces reales distintas*. No entramos en detalle de cómo proceder si se dieran los otros dos casos posibles: raíces *complejas* conjugadas o raíces reales *repetidas*.

Supongo $F_n = Ax^n$, $A \neq 0$, $x \neq 0$.

Tras hacer esta sustitución, tenemos la relación de recurrencia,

$$Ax^n = Ax^{n-1} + Ax^{n-2}$$

Si a $Ax^n - Ax^{n-1} - Ax^{n-2} = 0$, vamos a decir que "lo dividimos" por Ax^{n-2} (aunque en realidad la situación en la que estamos es $Ax^{n-2}(x^2 - x - 1) = 0$), obtenemos la siguiente ecuación, denominada *ecuación característica*.

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Ahora ya es sólo resolver con la fórmula para ecuaciones de segundo grado y así obtener las raíces (características):

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1(-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

A partir de ahora a estos valores los vamos a llamar $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ y $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

Estas dos soluciones, lo que quiere decir es que (α^n) y (β^n) cumplen la relación de recurrencia de la definición 1.1.

Es decir, por un lado tenemos una sucesión que satisface: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Por otro lado, otra sucesión diferente que también cumple: $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$.

Como hay linealidad,

$$pF_n + qG_n = H_n \quad p, q \in \mathbb{R}$$

también cumple la relación de recurrencia $H_n = H_{n-1} + H_{n-2}$.

En consecuencia, las sucesiones de la forma

$$F_n = p\alpha^n + q\beta^n, \quad n \geq 0$$

son las que cumplen $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Demostración. Verificamos directamente que $F_n = p\alpha^n + q\beta^n$ es la solución general de nuestra relación de recurrencia.

$$\begin{aligned} (p\alpha^n + q\beta^n) - (p\alpha^{n-1} + q\beta^{n-1}) - (p\alpha^{n-2} + q\beta^{n-2}) &= \\ &= p(\alpha^n - \alpha^{n-1} - \alpha^{n-2}) + q(\beta^n - \beta^{n-1} - \beta^{n-2}) = \\ &= p\alpha^{n-2}(\alpha^2 - \alpha - 1) + q\beta^{n-2}(\beta^2 - \beta - 1) \end{aligned}$$

y como tanto α como β eran soluciones de $x^2 - x - 1 = 0$

$$p\alpha^{n-2} \cdot 0 + q\beta^{n-2} \cdot 0 = 0.$$

(Se cumple $F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0$). □

Sólo nos quedaría por saber quiénes o cuáles son estas constantes arbitrarias p y q .

- Para $n = 0$:

$$0 = F_0 = p \cdot 1 + q \cdot 1$$

- Para $n = 1$:

$$1 = F_1 = p \cdot \alpha + q \cdot \beta = p \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + q \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)$$

Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} p + q = 0 \\ p\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + q\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

resulta que $p = \frac{1}{\sqrt{5}}$ y $q = \frac{-1}{\sqrt{5}}$.

Podemos expresar entonces F_n de forma explícita como

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n + \frac{-1}{\sqrt{5}}\beta^n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}, \quad n \geq 0$$

Observamos que justamente $\alpha - \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$.

Luego, esta fórmula anterior la podemos reescribir también tal que así

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \quad n \geq 0 \tag{1.1}$$

Esta expresión o manera de representar F_n recibe el nombre de **forma de Binet**⁵ para los números de Fibonacci.

Con esta fórmula, ahora podremos demostrar muchas propiedades de los números de Fibonacci, como la identidad de Cassini y tantas otras que veremos en la próxima sección. Además, utilizándola, encontramos otras vías de expresar los números de Fibonacci, como la forma trigonométrica para F_n propuesta por W. Hope Jones en 1921.

Forma trigonométrica para los números de Fibonacci.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(2^n) \left[\cos^n\left(\frac{\pi}{5}\right) - \cos^n\left(\frac{3\pi}{5}\right) \right], \quad n \geq 0$$

Demostración.

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

Hasta aquí no haríamos más que aplicar Binet (1.1).

Establecemos el ángulo $\theta = \frac{\pi}{10}$.

A continuación, se usan conocimientos trigonométricos previos y algunas otras propiedades, pero no nos detendremos mucho, puesto que, como vamos a comprobar más adelante en este capítulo, las propiedades y aplicaciones en las que intervienen los números de Fibonacci, su forma de Binet, los números α y β , etc. son muy numerosas y demasiadas como para incluirlas todas en un trabajo como éste en el que no es siquiera el tema principal de estudio. Para más información y detalle sobre la demostración, véase [14, cap.11] de la bibliografía.

Así pues, a grandes rasgos, con la fórmula del ángulo doble, $\sin(\pi/10) = 1/(2\alpha)$ y otras propiedades de α, β (en concreto, $\alpha\beta = -1, \beta^2 = \beta + 1, \alpha + \beta = 1$), tenemos

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2\left(\frac{1}{2\alpha}\right)^2 = \dots = \frac{(2\alpha^2 - 1)\beta^2}{2\alpha^2\beta^2} = \frac{2 - (\beta + 1)}{2} = \frac{1 - \beta}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

⁵Se considera que fue descubierta en 1843 por el matemático francés Jacques Phillippe Marie Binet (1786 - 1856), pero en realidad, la fórmula ya en 1718, es decir, mucho antes, era utilizada por el matemático francés Abraham DeMoivre (1667 - 1754) e incluso el ingeniero Gabriel Lamé (1795 - 1870) también encontró este resultado en 1844 independientemente de los trabajos realizados por los dos matemáticos anteriores.

De forma similar,

$$\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = 4\cos^3\frac{\pi}{5} - 3\cos\frac{\pi}{5} = 4\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3 \dots = \frac{1}{2}\alpha(\alpha^2 - 3) = \frac{1}{2}\alpha(-\beta^2) = \frac{\beta}{2}$$

Solo que aquí hemos usado $\cos(\pi/5) = \alpha/2$ y $(\alpha^2 + \beta^2 = 3$ y $\alpha\beta = -1)$ en los últimos pasos. Luego, tenemos que $\alpha = 2\cos(\pi/5)$ y $\beta = 2\cos(3\pi/5)$. Y sustituyendo en la forma de Binet, queda demostrado. \square

Centremos ahora nuestra atención en los números α y β .

En sí mismos, estos números también tienen mucho que aportar, no sólo por el papel que juegan en la fórmula de Binet, sino porque tienen algunas propiedades fascinantes.

Sin ir más lejos, lo primero y más destacable

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,61803398\dots$$

es el famoso llamado **número áureo**. Recibe muchos nombres, también conocido como número de oro, razón áurea, razón dorada, razón extrema y media, media áurea, proporción áurea, número de Dios y divina proporción. Representado en muchos libros con la letra griega phi (φ o Φ) en honor al escultor griego Phideas (490 a.C. - 420 a.C.).

Es un número con una cierta trayectoria histórica, los griegos ya lo utilizaban 1600 años antes de que Leonardo de Pisa viera la estrecha relación existente entre su sucesión de Fibonacci y este número. Incluso, antes que los griegos, esta constante era utilizada por los egipcios en la construcción de sus pirámides, como la Gran Pirámide de Guiza (2560 a.C.). Número utilizado tanto por físicos (como Johannes Kepler), en matemáticas, y relevante también en escultura y arquitectura (utilizado también por Salvador Dalí).

En lo que respecta a la parte matemática, dos cantidades son divina proporción si cumplen la siguiente relación geométrica:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618$$

Figura 1.1: Proporción áurea

Como veremos en la última sección de este capítulo, otro de los datos más curiosos sobre el número de oro y la sucesión de Fibonacci es que aparecen en la naturaleza, dando lugar a patrones tan sorprendentes como la disposición en espiral de algunas hojas y plantas.

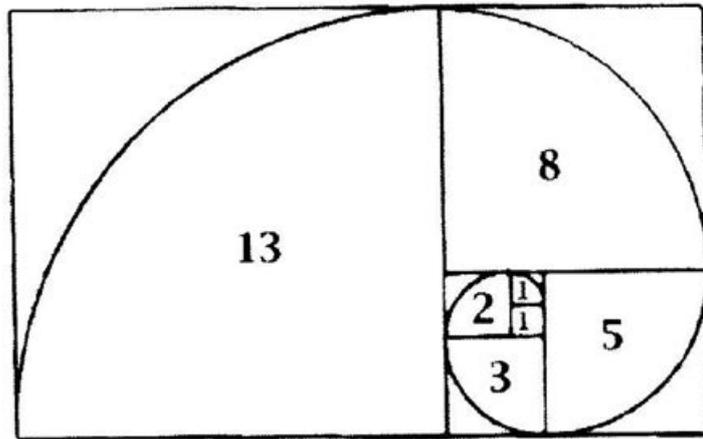


Figura 1.2: Espiral de Fibonacci y el número áureo

Queda claro pues, la estrecha relación existente entre esta constante y la sucesión de Fibonacci sólo con ver la figura, pero ¿cómo se vería esta relación en lenguaje más técnico y formal?

Hemos visto ya la fórmula de Binet (1.1) para los números de Fibonacci, donde aparecía el número de oro.

Pero, aún nos quedaría por destacar otra propiedad que nos relaciona la sucesión de números de Fibonacci con esta constante.

Propiedad 1.3. Sea F_n el n -ésimo número de Fibonacci, se verifica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha.$$

Demostración. Tenemos $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

$$|\beta/\alpha| = |(1 - \sqrt{5})/(1 + \sqrt{5})| < 1$$

Por tanto, para $n \rightarrow \infty$, $|\beta/\alpha|^n \rightarrow 0$. Utilizaremos que $(\beta/\alpha)^n \rightarrow 0$ en nuestro límite:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})(\alpha - \beta)}{(\alpha^n - \beta^n)(\alpha - \beta)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^n - \beta^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n(\alpha - \beta(\beta/\alpha)^n)}{\alpha^n(1 - (\beta/\alpha)^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - \beta(\beta/\alpha)^n}{1 - (\beta/\alpha)^n} = \frac{\alpha - \beta \cdot 0}{1 - 0} = \alpha. \end{aligned}$$

□

Resumiendo, el número de oro entonces no es más que el límite de la razón entre dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci. Y para términos no necesariamente consecutivos, se puede generalizar la propiedad:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+a}}{F_n} = \alpha^a \text{ (con Fibonacci el caso } a = 1\text{)}.$$

En otras palabras, si un número de Fibonacci es dividido por el número que le precede en la sucesión, el cociente aproximado de ellos es α .

Ejemplo 1.4. Cogiendo dos números de la tabla [1.1]:

$$\frac{F_{22}}{F_{21}} = \frac{17711}{10946} = 1,61803... \simeq \alpha$$

Esta propiedad anterior sólo es una de las muchas propiedades que tiene la proporción áurea. En realidad, podríamos dedicar hasta un capítulo entero dedicado exclusivamente a hablar del número de oro α y su compañero β . De hecho, propiedades parecidas o del tipo a la de $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ que utilizamos cuando definimos la forma de Binet en (1.1), hay a montones.

Por eso, cerramos esta sección, recopilando en una tabla, a continuación, las propiedades que consideramos más destacables de α y β . Su demostración no debería ser muy compleja, así que dejamos al gusto y/o ganas del lector el dar con la comprobación.

$\alpha^2 = \alpha + 1$	$\beta^2 = \beta + 1$	
$\alpha\beta = -1$	$\alpha^{-1} = -\beta$	$\beta^{-1} = -\alpha$
$\alpha + \beta = 1$	$\alpha - \beta = \sqrt{5}$	
$\alpha^2 + \beta^2 = 3$	$\alpha^2 - \beta^2 = \sqrt{5}$	
$\alpha^3 + \beta^3 = 4$	$\alpha^3 - \beta^3 = 2\sqrt{5}$	
$\alpha = 1/(\alpha - 1)$	$\beta = 1/(\beta - 1)$	
$\frac{1}{\alpha^n} = \frac{1}{\alpha^{n+1}} + \frac{1}{\alpha^{n+2}}$	$\frac{1}{\beta^n} = \frac{1}{\beta^{n+1}} + \frac{1}{\beta^{n+2}}$	

Tabla 1.2: Propiedades del número áureo α y el num. β

1.3. Propiedades de los números de Fibonacci

Prestando un poco de atención de nuevo a los números de Fibonacci que reunimos en la tabla 1.1, quizás lo primero que nos llama la atención es que entre números consecutivos no hay factores en común, es decir, que son primos entre sí.

Por ejemplo, $F_6 = 8$ tiene como factores o múltiplos el 1, 2, 4 y el 8 (cualquiera de ellos multiplicado por otro nos da 8). Por otro lado, $F_7 = 13$ puede ser dividido por 1 y 13. Luego, no tienen ningún factor en común excepto el 1, lo que hace que su máximo común divisor sea 1 y por tanto, primos entre sí.

Nos hemos topado pues, con la primera propiedad de los números de Fibonacci.

Propiedad 1.5. Para $n \geq 0$, tenemos que $MCD(F_n, F_{n+1}) = 1$.

Demostración. En el ejemplo tenemos un caso particular en el que sí se cumple. Incluidos los dos primeros números de la sucesión, el 0 y el 1, satisfacen $MCD(F_0, F_1) = 1$.

Podemos proceder por reducción al absurdo.

Supongamos que hay algún r para el que se cumple por primera vez que $MCD(F_r, F_{r+1}) > 1$. Eso querría decir también que para todos los anteriores, incluido el $MCD(F_{r-1}, F_r)$ serían iguales a 1. $F_{r+1} = F_r + F_{r-1}$, luego si hay un $d \neq 1$ que divide a F_r y a F_{r+1} . Ese d que divide a este último, por la definición, también tendría que dividir a F_{r-1} .

Contradicción. ($MCD(F_{r-1}, F_r) = 1 \neq d$) □

Al igual que esta propiedad anterior, se podría demostrar de igual manera esta otra:

Propiedad 1.6. Para $n \geq 0$, se cumple $MCD(F_n, F_{n+2}) = 1$.

Existen algunas propiedades más, un tanto particulares y curiosas, en lo que a este tema de múltiplos y factores se refiere.

Propiedad 1.7.

- i) La suma de 6 números consecutivos de Fibonacci cualesquiera, siempre va a ser un múltiplo de 4. Es más, fijado un $n \geq 0$,

$$\sum_{r=0}^5 F_{n+r} = F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + F_{n+5} = 4F_{n+4}.$$

- ii) La suma de 10 números consecutivos de Fibonacci cualesquiera, siempre va a ser un número divisible por 11. De hecho, para $n \geq 0$ (n fijo) se cumple,

$$\sum_{r=0}^9 F_{n+r} = 11F_{n+6}.$$

Demostración. Su demostración es sencilla. Sólo basta aplicar la relación de recurrencia repetidas ocasiones y en cada uno de los sumandos hasta que sólo quede dependiendo de F_{n+4} en i) y de F_{n+6} en ii).

Consejo: Empezar aplicando la relación de recurrencia en el primer sumando y luego en el último, yendo así de fuera hacia dentro. Para quedarnos con los términos centrales que nos interesan. \square

Vayamos ahora a resultados un poco más generales.

Propiedad 1.8. Para $n \geq 0$, se tiene que $\sum_{r=0}^n F_r = F_{n+2} - 1$.

Demostración. Por el Principio de Inducción. \square

Aunque no nos hayamos parado a demostrar esta propiedad con detalle, lo que sí es destacable, es que fue descubierta por Edouard Lucas en 1876, un matemático sobre el que descubriremos mucho más en el Capítulo 2 de este trabajo.

Sigamos con más características de los números de Fibonacci.

Propiedad 1.9. Para $n \geq 0$, la suma de cuadrados es $\sum_{r=0}^n F_r^2 = F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$.

Demostración. Por el Principio de Inducción. (Demostración completa en [14, , pag.10]). \square

Las siguientes dos propiedades relativas a la suma de los términos impares y a la suma de los términos pares de la sucesión de Fibonacci, también fueron descubiertas por Lucas y al igual que las anteriores están entre las fórmulas más relevantes sobre números de Fibonacci.

Propiedad 1.10. Para $n \geq 1$, se satisface $\sum_{r=1}^n F_{2r-1} = F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$.

Demostración. Por el Principio de Inducción. \square

Propiedad 1.11. Para $n \geq 1$, se cumple $\sum_{r=1}^n F_{2r} = F_2 + F_4 + F_6 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$.

Demostración. También por el Principio de Inducción. □

La siguiente propiedad va a ser una de las fórmulas en la que hagamos algo más de hincapié. Fue descubierta en 1680 por el italiano-francés Giovanni Domenico (Jean Dominique) Cassini⁶, por quien recibe su nombre.

Propiedad 1.12. Identidad de Cassini

Para $n \geq 1$, se verifica que

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

Demostración. La identidad de Cassini tiene muchas demostraciones posibles.

Se puede hacer aplicando la forma de Binet, como ya mencionamos con anterioridad.

Más adelante también, en la sección relativa a los números de Fibonacci en forma matricial, veremos una demostración sencilla con matrices. □

Entre las propiedades de los números de Fibonacci, nos encontramos con relaciones lineales, no lineales, con sumatorios (lineales y no lineales)... veamos qué tenemos que decir respecto a estos últimos.

Propiedad 1.13. Para un cierto n , tenemos que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{F_k F_{k+2}} = 1 - \frac{1}{F_{n+1} F_{n+2}}.$$

Y de forma similar, el resultado para sumatorio infinito (cuando $n \rightarrow \infty$),

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{F_k F_{k+2}} = 1.$$

Existen también varias sumas de series infinitas, como esta, que recopilamos a continuación.

Propiedad 1.14.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n F_{n+2}} = 1; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{F_{n+1} F_{n+2}} = 1; \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{F_n}{F_{n-1} F_{n+1}} = 2; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n F_{n+2} F_{n+3}} = \frac{1}{4}.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k}{2^k} = 2; \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k}{8^k} = \frac{8}{55}; \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k}{10^k} = \frac{10}{89}; \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k F_k}{2^k} = 10.$$

⁶Cassini (1625 - 1712), matemático y astrónomo, el primero de una familia conocida de astrónomos, por eso se le conoce también como Cassini I. Trabajó en un observatorio y más tarde fue profesor en la Universidad de Bolonia, ocupando el vacío que dejó la muerte de Cavalieri. Por aquel entonces, Cassini ya creía en la idea de un sistema solar (eso sí, centrado en la Tierra), con cometas más allá de Saturno. Fue tan reconocido en Italia que hasta en la Corte Papal le pedían consejos, incluso el Papa le ofreció trabajar para él permanentemente, pero prefirió su puesto de profesor y seguir investigando. Fue invitado a París por Luis XIV en 1668; la construcción del Observatorio de París acababa de comenzar y a Cassini se le ofreció un generoso salario, alojamiento gratuito y una buena asignación para viajes. El senado de Bolonia y el papa Clemente IX aceptaron el viaje, ya que creían que sería corto, pero finalmente Cassini se quedó en París, convirtiéndose en jefe del Observatorio, cambió su nombre al francés y se casó en 1674. Siguió viajando a Italia, también con su hijo Jacques Cassini, que le sucedería en el Observatorio de París.

Si quisiéramos hacer la suma de la serie $\frac{1}{F_n}$, tenemos también un resultado curioso, ya que obtendríamos un número irracional.

Propiedad 1.15. Para los números de Fibonacci es cierto que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n} = 3.35988566 \dots \quad \text{número real irracional.}$$

Y para terminar con series, nos quedan un par por destacar, entre ellas la bien conocida función generadora.

Propiedad 1.16. Tenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n X^n = \frac{X}{1 - X - X^2}, \quad \text{función generadora.}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k}{r^k} = \frac{r}{r^2 - r - 1}.$$

Siendo esta segunda serie convergente cuando $|r| < \frac{1}{\alpha}$, con α el número áureo.

Por último, los números de Fibonacci también se pueden escribir en forma combinatoria de la siguiente manera:

Propiedad 1.17. Un término F_{n+1} de la sucesión de Fibonacci puede ser escrito como suma de números combinatorios, puesto que se cumple que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k} = F_{n+1}.$$

No es la única propiedad sobre los números de Fibonacci en la que se ven envueltos los números combinatorios. Dejamos a continuación reunidas varias fórmulas y aunque no nos detendremos a demostrar cada una de ellas, sin embargo, dejaremos algunas indicaciones sobre la demostración de una como ejemplo.

Propiedad 1.18.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k = F_{2n}; \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{k+j} = F_{2n+j}.$$

$$F_{mn} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (F_n)^k (F_{n-1})^{m-k} F_k.$$

$$F_{3n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k F_k.$$

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} F_{2k} = 5^n F_{2n}; \quad \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (F_k)^2 = 5^n F_{2n+1}.$$

Demostración. Demostremos, por ejemplo, la última.

Muchas de estas demostraciones, para que sean más sencillas, van a utilizar la forma de Binet que vimos en (1.1), y recordemos que no es más que la fórmula siguiente.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n + \frac{-1}{\sqrt{5}}\beta^n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

También juegan su papel en esta demostración las propiedades de α y β . Conviene, por tanto, que esté presente en nuestra cabeza en todo momento la tabla 1.2.

Aplicando primero Binet tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (F_k)^2 &= \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \left(\frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta} \right)^2 = \left(\frac{1}{\alpha - \beta} \right)^2 \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (\alpha^k - \beta^k)^2 \\ &= \left(\frac{1}{\alpha - \beta} \right)^2 \left[\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (\alpha^2)^k - 2 \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (\alpha\beta)^k + \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (\beta^2)^k \right] \end{aligned}$$

Aplicando aquí $\alpha\beta = -1$ tenemos $(-1)^k$, que multiplicándolo a su vez por $1^{(2n+1)-k}$, ese sumando nos deja de depender de k al reordenar los exponentes y llegamos a una expresión como la siguiente.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (F_k)^2 &= \\ &= \left(\frac{1}{\alpha - \beta} \right)^2 \left[\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (\alpha^2)^k - 2[(-1) + 1]^{2n+1} + \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (\beta^2)^k \right] = \\ &= \left(\frac{1}{\alpha - \beta} \right)^2 \left[\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (\alpha^2)^k + \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (\beta^2)^k \right] = \\ &= \left(\frac{1}{\alpha - \beta} \right)^2 \left[\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (\alpha^2)^k 1^{(2n+1)-k} + \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (\beta^2)^k 1^{(2n+1)-k} \right] = \\ &= \left(\frac{1}{\alpha - \beta} \right)^2 [(1 + \alpha^2)^{2n+1} + (1 + \beta^2)^{2n+1}] \end{aligned}$$

Con otras propiedades de α y β :

$$\alpha - \beta = \sqrt{5}$$

$$\alpha^2 = \alpha + 1 \Rightarrow \alpha^2 + 1 = (\alpha + 1) + 1 = \alpha + 2$$

$$\alpha^2 = \alpha + 1 \Rightarrow (2 + \alpha)^2 = 4 + 4\alpha + \alpha^2 = 4(1 + \alpha) + \alpha^2 = 5\alpha^2$$

$$\beta^2 = \beta + 1 \Rightarrow \beta^2 + 1 = \beta + 2$$

$$\beta^2 = \beta + 1 \Rightarrow (2 + \beta)^2 = 5\beta^2$$

Proseguimos operando,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (F_k)^2 &= \\ &= \left(\frac{1}{\alpha - \beta} \right)^2 [(1 + \alpha^2)^{2n+1} + (1 + \beta^2)^{2n+1}] = \\ &= \left(\frac{1}{5} \right) [(2 + \alpha)^{2n+1} + (2 + \beta)^{2n+1}] = \left(\frac{1}{5} \right) \left[\frac{((2 + \alpha)^2)^{n+1}}{2 + \alpha} + \frac{((2 + \beta)^2)^{n+1}}{2 + \beta} \right] \\ &= \left(\frac{1}{5} \right) \left[\frac{(5\alpha^2)^{n+1}}{2 + \alpha} + \frac{(5\beta^2)^{n+1}}{2 + \beta} \right] = (5^n)(\alpha^{2n+1}) \left[\frac{\alpha}{2 + \alpha} \right] + (5^n)(\beta^{2n+1}) \left[\frac{\beta}{2 + \beta} \right] \end{aligned}$$

Como $\alpha^2 + 1 = \alpha + 2$, $\alpha^2 - (-1) = \alpha^2 - (\alpha\beta) = \alpha + 2$. Fijámonos en esta última igualdad, esto implica que $\alpha/(2 + \alpha) = 1/(\alpha - \beta)$.
De igual manera, $\beta/(2 + \beta) = -1/(\alpha - \beta)$.

$$\begin{aligned} & (5^n)(\alpha^{2n+1}) \left[\frac{\alpha}{2 + \alpha} \right] + (5^n)(\beta^{2n+1}) \left[\frac{\beta}{2 + \beta} \right] = \\ &= (5^n)(\alpha^{2n+1}) \left[\frac{1}{\alpha - \beta} \right] - (5^n)(\beta^{2n+1}) \left[\frac{1}{\alpha - \beta} \right] = \\ &= (5^n) \left[\frac{\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}}{\alpha - \beta} \right] = 5^n F_{2n+1}. \end{aligned}$$

□

Aunque hemos intentado sintetizar lo máximo posible y reunir en esta sección las propiedades existentes sobre los números de Fibonacci, habrá alguna más que nos irán apareciendo a lo largo del capítulo, incluso del trabajo, que no hemos mencionado aún. Sobre todo porque, como nos hemos podido percatar ya, aún nos falta una herramienta esencial que nos simplifica alguna de las demostraciones: las matrices.

1.4. Fibonacci con matrices

En el ámbito del álgebra lineal, también podemos hablar de algunas ideas fundamentales que hacen referencia a los números de Fibonacci.

Operemos con matrices, partiendo de la siguiente:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix}$$

La multiplicamos con el objetivo de encontrar \mathbf{M}^n ,

$$\mathbf{M}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_3 & F_2 \\ F_2 & F_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^3 = \mathbf{M}\mathbf{M}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_4 & F_3 \\ F_3 & F_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^4 = \mathbf{M}\mathbf{M}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_5 & F_4 \\ F_4 & F_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^5 = \mathbf{M}\mathbf{M}^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_6 & F_5 \\ F_5 & F_4 \end{bmatrix}$$

Observamos que los números que vamos obteniendo en estas matrices son todos justamente números de Fibonacci, lo cual nos lleva a formular el siguiente teorema.

Teorema 1.19. Sea $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ para $n \geq 1$ se cumple,

$$\mathbf{M}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

Demostración. Es sencillo verlo por inducción.

Ya hemos comprobado que se cumple para los casos $n = 1..,5$

Supongamos que en general se cumple para $n - 1$.

$$\mathbf{M}^n = \mathbf{M}\mathbf{M}^{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n + F_{n-1} & F_{n-1} + F_{n-2} \\ F_n + 0 & F_{n-1} + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

□

¿Cuál es el determinante de nuestra matriz \mathbf{M}^n ?

Para $n = 1$,

$$\begin{vmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$$

En consecuencia, por propiedades de los determinantes y en particular debido a que el determinante de un producto de matrices es igual a la multiplicación de los determinantes de dichas matrices, tenemos

$$\det(\mathbf{M}^n) = [\det(\mathbf{M})]^n = \left(\begin{vmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{vmatrix} \right)^n = (-1)^n$$

Por otro lado, sabemos que

$$\det(\mathbf{M}^n) = \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix} = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$$

Al haber procedido por esas dos vías para obtener $\det(\mathbf{M}^n)$ vemos que hemos llegado a la igualdad:

$$\boxed{F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n}$$

Una de las propiedades de los números de Fibonacci que recordamos como la **Identidad de Cassini**.

Podemos ver pues, los beneficios de trabajar con matrices y determinantes, que nos llevan a obtener de forma sencilla propiedades que cumplen los números de Fibonacci. Otra propiedad, por ejemplo, sería la siguiente:

Propiedad 1.20. Para $m \geq 1$ y $n \geq 1$, se cumple que

$$F_{m+n+1}F_{m+n-1} - F_{m+n}^2 = (F_{m+1}F_{m-1} - F_m^2)(F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2).$$

Demostración. Observamos que la primera parte de la igualdad se trata de $\det(\mathbf{M}^{m+n})$.

Por propiedades de los determinantes,

$$\det(\mathbf{M}^{m+n}) = \det(\mathbf{M}^m \mathbf{M}^n) = \det(\mathbf{M}^m) \det(\mathbf{M}^n) = \begin{vmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix}$$

Y al multiplicar estos determinantes, obtenemos la segunda parte de la igualdad, tal y como queríamos demostrar. □

Como esta propiedad, ahora estamos en disposición de demostrar más expresiones, entre ellas las que vienen a continuación.

Propiedad 1.21. Sea la matriz $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ tal que $\mathbf{M}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$ y para $m \geq 1, n \geq 1$ se cumple:

1. $F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}$
2. $F_n^2 + 2F_{n-1}F_n = F_{2n}$
3. $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}$
4. $F_{m+n} = F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n$

Demostración. Como bien viene reflejado en [28], todas ellas se pueden probar de forma matricial. \square

Otra observación a mencionar sobre esta matriz \mathbf{M} , es el tema de los autovalores. Encontremos entonces, cuáles son los valores λ que cumplen que

$$\det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}) = 0,$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad 2×2 , $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 1$$

Igualando esto a cero, tenemos la ecuación $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$. Luego, los valores λ que buscamos son:

$$\lambda = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Entonces, los autovalores de nuestra matriz \mathbf{M} son justamente los α y β que aparecían en la forma de Binet (1.1).

Por último, una vez bien definida la matriz \mathbf{M}^n , cerramos esta sección con lo que llamamos "Propiedad del máximo común divisor (MCD)", sobre la que podemos encontrar en algunos libros hasta un capítulo entero dedicado a ella. Es más, esta propiedad incluso podemos clasificarla en la categoría de teorema.

Antes, eso sí, necesitamos unos resultados previos. No los demostramos, pero se pueden encontrar en el libro [14, cap.15].

Lema 1.22. Para $m \geq 1, n \geq 1$, F_m divide a F_{mn} .

Lema 1.23. Para $q \geq 1, n \geq 1$, se cumple $MCD(F_{qn-1}, F_n) = 1$.

Lema 1.24. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ (enteros positivos) con $MCD(a, c) = 1$, entonces $MCD(ab, c) = MCD(b, c)$.

Lema 1.25. Sean $m, n \in \mathbb{Z}^+$ (enteros positivos) con $m \geq n$. Suponemos además que $m = qn + r$, donde q es un entero positivo y $0 \leq r < n$. Entonces $MCD(F_m, F_n) = MCD(F_n, F_r)$.

Entre estos cuatro lemas, el primero nos conduce al segundo y luego, con ayuda de los tres primeros, obtenemos el lema 1.25 que va a desempeñar un papel fundamental en la demostración de nuestro siguiente teorema.

Teorema 1.26. Propiedad del MCD

Sean m, n enteros positivos tales que $m \geq n \geq 1$, entonces,

$$MCD(F_m, F_n) = F_{MCD(m,n)}.$$

Demostración. Para $m, n \geq 1$ sabemos que $\mathbf{M}^{m+n} = \mathbf{M}^m \mathbf{M}^n$. Por como hemos definido \mathbf{M}^n , esta misma expresión en forma matricial es

$$\begin{bmatrix} F_{m+n+1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n & F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1} \\ F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n & F_mF_n + F_{m-1}F_{n-1} \end{bmatrix}$$

Al igualar la primera matriz con la última, que hemos obtenido de simplemente operar y haciendo una multiplicación de matrices, tenemos que se dan las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} F_{m+n+1} &= F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n, \\ F_{m+n} &= F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}, \\ F_{m+n} &= F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n, \\ F_{m+n-1} &= F_mF_n + F_{m-1}F_{n-1}. \end{aligned}$$

Son propiedades que efectivamente cumplen los números de Fibonacci.

Por otro lado, usando el algoritmo de Euclides:

$$\begin{aligned} m &= q_1n + r_1. & 0 \leq r_1 < n \\ n &= q_2r_1 + r_2. & 0 \leq r_2 < r_1 \\ r_1 &= q_3r_2 + r_3. & 0 \leq r_3 < r_2 \\ &\dots \\ r_{k-2} &= q_kr_{k-1} + r_k. & 0 \leq r_k < r_{k-1} \\ r_{k-1} &= q_{k+1}r_k. \end{aligned}$$

donde ahora tenemos que $r_k = MCD(m, n)$.

Y aplicando cuando es oportuno el lema 1.25, nos queda

$$\begin{aligned} MCD(F_m, F_n) &= MCD(F_{q_1n+r_1}, F_n) = MCD(F_n, F_{r_1}) = \\ &= MCD(F_{q_2r_1+r_2}, F_{r_1}) = MCD(F_{r_1}, F_{r_2}) = \\ &\vdots \\ &= MCD(F_{q_kr_{k-1}+r_k}, F_{r_{k-1}}) = MCD(F_{r_{k-1}}, F_{r_k}) \end{aligned}$$

Finalmente, ya sólo es recordar que si r_k divide a r_{k-1} , entonces también F_{r_k} divide a $F_{r_{k-1}}$ y su máximo común divisor es $F_{r_k} = MCD(F_{r_{k-1}}, F_{r_k})$.

Por lo tanto,

$$MCD(F_m, F_n) = MCD(F_{r_{k-1}}, F_{r_k}) = F_{r_k} = F_{MCD(m,n)}.$$

□

Veamos claramente lo que tiene que aportarnos esta propiedad con un ejemplo.

Ejemplo 1.27.

Queremos calcular el MCD de dos números cualesquiera de Fibonacci, por ejemplo, el del 30-ésimo y el 50-ésimo número de Fibonacci.

Primero factorizamos dichos números:

$$F_{30} = 832040 = 2^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 61$$

$$F_{65} = 12586269025 = 5^2 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 151 \cdot 3001$$

Invertimos tiempo en factorizar y hacer la descomposición en números primos. (De hecho, como es laborioso, hemos acudido a MAPLE que facilita esta tarea con la función *ifactor*).

Hecha la factorización, sabemos que el máximo común divisor que buscamos es

$$MCD(F_{30}, F_{50}) = 5 \cdot 11 = 55.$$

Todo este esfuerzo que hemos realizado para hacer la factorización, podríamos habérselo evitado simplemente usando *la propiedad del MCD* (1.26) que cumplen los números de Fibonacci.

$$MCD(F_{30}, F_{50}) = F_{MCD(30,50)} = F_{10} = 55.$$

En conclusión, los números de Fibonacci y sus propiedades, sobre todo trabajando con ellos en forma matricial, son de gran utilidad y están muy presentes en muchos ámbitos como vamos a ver a continuación.

1.5. Aplicaciones y ejemplos

Veremos varios contextos en los que intervienen los números de Fibonacci. Sin embargo, para apreciar aún más los ejemplos, que aparecen en este trabajo sólo con una breve pincelada, recalcamos que aunque la sucesión de Fibonacci es una sucesión aparentemente de lo más sencilla y “omnipresente”, después no es tan fácil como parece establecer la relación de recurrencia, así como tampoco podemos extraer ninguna conclusión o teorema a partir de casos particulares (sean muchos o pocos).

Esperamos pues, con esta sección, transmitir al lector con una selección de ejemplos y en unas pocas líneas lo fascinante de la sucesión de Fibonacci, su aparición en diferentes ámbitos y sin menospreciar ninguno de los resultados a pesar de que no nos detendremos demasiado en alguno de ellos (consultar el libro [14] si se quiere profundizar más).

1.5.1. Fibonacci en la naturaleza

Uno de los casos más emblemáticos de sucesión de Fibonacci que se presenta en la naturaleza es el “*Problema de los conejos*”, con el que Leonardo de Pisa nos introdujo su sucesión.

Ejemplo 1.28. Queremos determinar cuantos pares de conejos tendré a final de año si parto de una pareja de conejos, uno de cada sexo, que se van reproduciendo, e incluyendo en mis cuentas finales a esta primera pareja.

Además se establecen también las siguientes condiciones:

1. Cada nuevo par recién nacido, siempre una hembra y un macho, llega a la madurez para procrear pasado un mes.
2. No es entonces, hasta después de dos meses de su nacimiento que empezamos a ver que se han procreado. Es decir, a los dos meses y cada mes que viene después, una ahora madura pareja de conejos procreará al comienzo del mes, teniendo como resultado una pareja de conejos recién nacidos, macho y hembra, al final del mes. (Ver la imagen que hay a continuación para no dejar lugar a dudas).
3. No muere ningún conejo a lo largo del año.

Sucesión de Fibonacci en la naturaleza:

Fibonacci obtuvo la sucesión que lleva su nombre observando un proceso natural, los ciclos reproductivos de los conejos. Tuvo en cuenta dos reglas básicas: los conejos sólo tienen una pareja de crías cada temporada y un conejo tarda una temporada en alcanzar la edad madura para poder reproducirse.

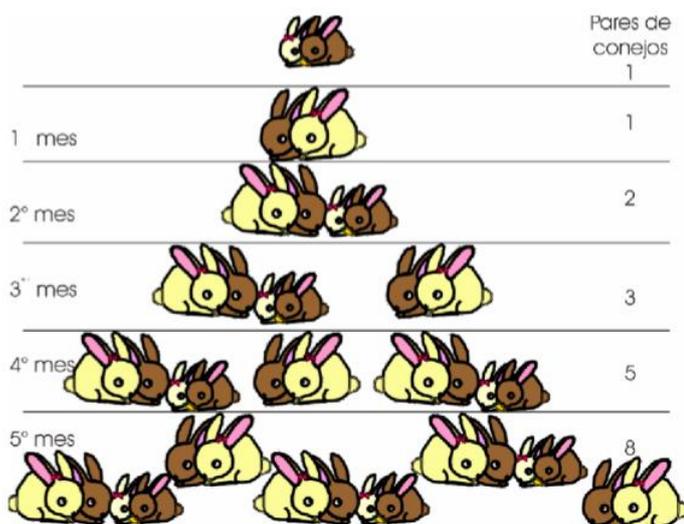


Figura 1.3: Problema de los conejos

Observamos que al contar el número total de pares de conejos, vamos obteniendo cada vez un número que justo van siendo los números de la sucesión de Fibonacci. Por tanto, al final de año, tendré $F_{12} = 144$ pares de conejos si nos fijamos en la tabla 1.1. Aquí estaríamos contando sólo los pares que han llegado a la madurez (es decir, el primer mes habría 0), mientras que serían $233 = F_{13}$ pares si contamos también los recién nacidos, como en la imagen.

Es cierto que el famoso problema de los conejos es un caso bastante hipotético, no muy fiel a lo que ocurre en la realidad, por eso quizás resulta interesante estudiar otros ejemplos que se presentan en la naturaleza, como en el caso de la botánica y las flores, donde a veces encontramos los números de Fibonacci cuando contamos los pétalos de determinadas flores.

Ejemplo 1.29. Por lo general, las flores tienen un determinado número de pétalos. En el caso de la *Circaea lutetiana* encontramos 2 pétalos, la planta *Iris* o el *Trillium* tienen 3. Podemos entonces, en este ejemplo, reunir en una tabla un listado de flores con su correspondiente número de pétalos que crecen de forma natural y homogénea, relacionándolas con un determinado número de la sucesión de Fibonacci. Cuando crezcan y se expandan, seguirían dicha sucesión.

Flor	Número de pétalos
<i>Circaea lutetiana</i>	$2 = F_3$
<i>Iris</i> / <i>Trillium</i>	$3 = F_4$
<i>Ranunculus</i> / <i>Aquilegia</i>	$5 = F_5$
<i>Celidonia</i>	$8 = F_6$
<i>Camomila</i> / <i>Caléndula de maíz</i>	$13 = F_7$
<i>Aster</i>	$21 = F_8$

Tabla 1.3: Pétalos y números de Fibonacci

Es cierto que también nos podemos topar con casos en los que determinado tipo de flor no siempre presenta el mismo número de pétalos.

Aún así, los ejemplos que nos encontramos en la rama de la botánica son varios y numerosos. Por ejemplo, en determinadas estructuras botánicas, como la de las alcachofas, las piñas o los girasoles existe también un patrón.

Ejemplo 1.30. Si cuentas las escamas de una piña te encontrarás con que están en espiral alrededor del vértice, pero no sólo eso. Si nos fijamos en el número de filas de escamas que se enrollan en una dirección, son justamente un número de Fibonacci; y si contamos el número de hileras o filas de escamas que se enrollan en la otra dirección, van a ser también justamente o bien el número de Fibonacci anterior o el posterior del primero que obtuvimos.

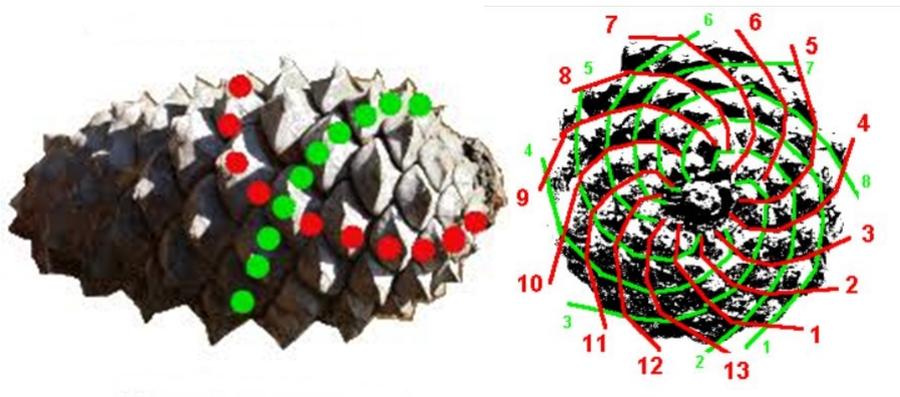


Figura 1.4: Estructura curiosa de la piña

1.5.2. Fibonacci y la física

La rama de la biología y la botánica no es la única que presenta ejemplos de números de Fibonacci, sino también en otras ramas de la ciencia como es la física.

El siguiente ejemplo que vamos a tratar se mueve en una rama de la física en concreto, la óptica, que es la ciencia que investiga la propagación de la luz.

Ejemplo 1.31. Consideramos un plato de cristal con dos caras sobre las que se puede reflejar la luz. Uno como el que se muestra en la siguiente figura.

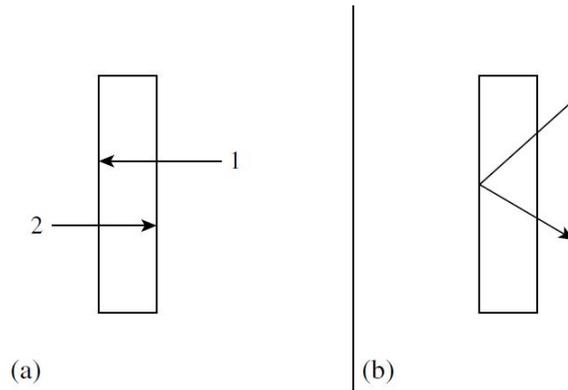


Figura 1.5: Óptica 1 - platos de cristal

¿Qué pasaría si juntáramos dos de estos platos?

Tendríamos 4 caras reflectantes, como las que vemos la figura que hay más abajo en c). Las caras 1 y 2 serían del plato de la izquierda, y las 3 y la 4 del plato a la derecha.

Prestamos atención a todos los casos de los diferentes caminos que puede tomar la trayectoria del rayo de luz. Definimos s_n como el número que lleva la cuenta de los diferentes caminos que puede tomar el rayo si se refleja n veces, para $n \geq 0$.

- Para el caso $n = 0$:

Como el rayo no se refleja, sólo hay un caso posible como vemos en d), luego $s_0 = 1$.

- Para caso $n = 1$:

El apartado e) de la imagen nos muestra los dos casos posibles cuando la luz se refleja 1 vez. Aquí $s_1 = 2$.

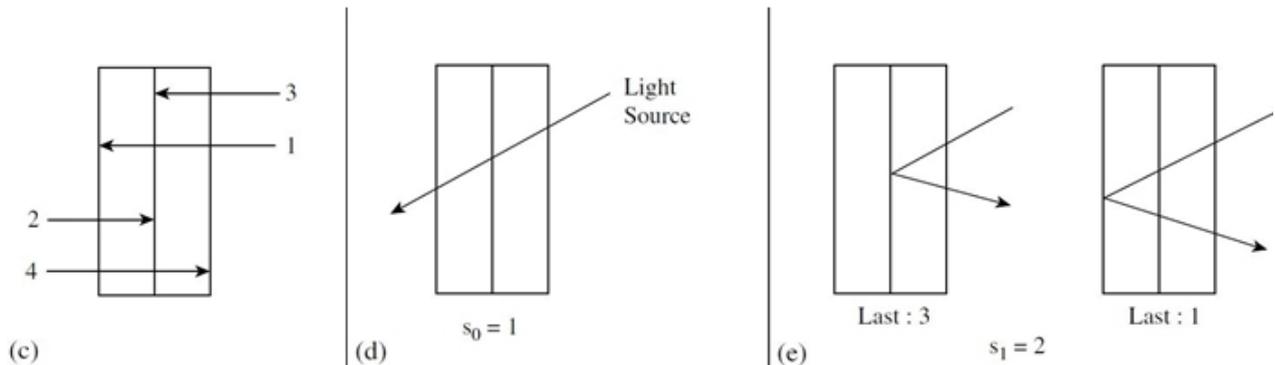


Figura 1.6: Óptica 2 - platos de cristal

- Para $n = 2$ y $n = 3$: Sus casos corresponderían a los de los apartados f) y g).

Si se refleja el rayo de luz 2 veces, tenemos 3 casos ($s_2 = 3$). Cuando se refleja 3 veces, 5 ($s_3 = 5$).

Incluso podríamos ir más allá y pensar que cuando se refleje $n = 4$ veces, habrá $s_4 = 8$ casos. Teniendo mucho cuidado de considerar todos los casos, fijándonos por ejemplo, en qué caras son la última en la que se refleja y en cuál se produce la reflexión anterior a ésta (como hemos hecho en f) y g)).

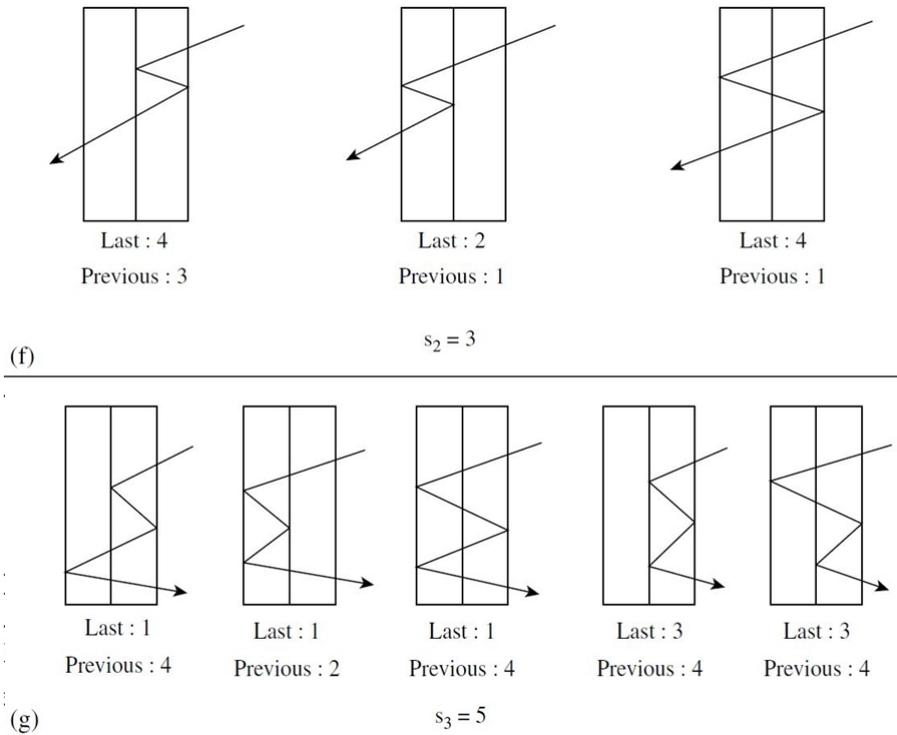


Figura 1.7: Óptica 3 - platos de cristal

Es más, según fuéramos avanzando en nuestros casos, se haría cada vez más evidente en los gráficos que, por ejemplo los de $n = 4$ son resultado de sumar y juntar los rayos de los gráficos anteriores ($s_4 = s_3 + s_2$).

Resumiendo, llegamos a la conclusión de que $s_n = F_{n+2}$ y se cumple:

$$s_0 = 1, s_1 = 2$$

$$s_n = s_{n-1} + s_{n-2}, \quad n \geq 2$$

Hasta aquí el ejemplo de óptica.

Centrándonos más en la física, en esta ocasión hablaremos de electrostática, la rama que estudia la atracción y repulsión entre cargas en función de la distancia existente entre ellas y sin depender del movimiento. Nos encontramos con claros casos en los que incluso intervienen el número de oro que intervenía en la forma de Binet.

Ejemplo 1.32. En este problema se habla de energía potencial⁷ en un sistema formado por dos cargas negativas y una positiva como el de la figura.

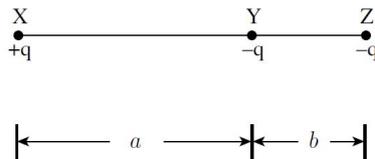


Figura 1.8: Problema de electrostática

⁷Recordemos que una de las fórmulas de la energía potencial es $E_P = \frac{kQq}{d}$, donde $k = 8,99 \times 10^9 (Nm^2)/C^2$ es una constante (llamada constante de Coulomb) y su unidad de medida es el julio J.

Vamos a querer saber que relación va a tener que haber entre a/b para que la energía potencial total del sistema sea igual a cero.

Si sabemos que la energía potencial entre cada una de las cargas del sistema es:

- Para las cargas en X e Y: $k(+q)(-q)/a$
- Para las cargas en Y y Z: $k(-q)(-q)/b$
- Para las cargas en X y Z: $k(-q)(+q)/(a + b)$

En realidad, lo que queremos resolver es entonces la siguiente ecuación,

$$k \frac{(+q)(-q)}{a} + k \frac{(+q)(-q)}{b} + k \frac{(+q)(-q)}{a + b} = 0$$

Prescindiendo de la k y simplificando también el q^2 que obtenemos en todos los términos al multiplicar, llegamos a una ecuación más simplificada. Y multiplicando aquí por $ab(a + b)$, obtenemos

$$a^2 - ab - b^2 = 0$$

Y si lo que queremos es saber la proporción a/b , dividimos por b^2 para resolver así la ecuación

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right) - 1 = 0$$

Las soluciones aquí son $a/b = -(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1(-1)} / (2 \cdot 1) = (1 \pm \sqrt{5})/2$ y como en nuestro caso a y b son distancias, teniendo que ser positivas ($a > 0$ y $b > 0$). Entonces, concluimos que la energía potencial total del sistema es 0 para la solución $\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha$, el número áureo.

1.5.3. En probabilidad y juegos como el ajedrez.

Ejemplos como el último que vimos en el apartado anterior, en los que intervienen el número de oro, son muchos. Incluso en el ámbito de las matemáticas puras, nos encontramos con casos como el de las *fracciones continuas infinitas* o para *operaciones binarias* que queremos que mantengan la asociatividad.

Ejemplo 1.33. Situaciones que se dan en matemáticas.

1. Ejemplo de fracción continua infinita:

$$c = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

Nótese que estamos ante el caso $c = 1 + \frac{1}{c} \Rightarrow c^2 - c - 1 = 0$.

Como $c > 0$, de entre las soluciones $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, la adecuada es el número de oro $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

2. Ejemplo de operación binaria en \mathbb{R} :

Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida tal que

$$f(x, y) = a + b(xy) + c(x + y)$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $ab = 1$.

Si queremos que mantenga la propiedad asociativa, se tiene que cumplir que

$$f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$$

Por cómo está definida la función, se acaba llegando a que, para que esto ocurra, se tiene que dar la igualdad:

$$c^2x + (ab + c)z = abx + cx + c^2z.$$

Y con la condición $ab = 1$,

$$(c^2 - c - 1)x = (c^2 - c - 1)z.$$

Como x y z son arbitrarios, esto sucede si $c^2 - c - 1 = 0 \Rightarrow c = \alpha$ ó $c = \beta$.

En cualquier caso, no nos paramos mucho más en estos ejemplos, puesto que por similitud con el problema ya visto y junto con otros que vamos a ver ahora a continuación en el ámbito de la probabilidad y teoría de juegos, nos sería sencillo su comprensión sin muchas más explicaciones.

Ejemplo 1.34. Tenemos un espacio muestral \mathcal{S} para un determinado experimento. Si A, B son dos casos o eventos de este espacio muestral, que son disjuntos o incompatibles ($A \cap B = \emptyset$) y tales que $A \cup B = \mathcal{S}$ ¿Cuál es el valor de la probabilidad p si $P(A) = p$ y $P(B) = p^2$?

Como $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$ y la probabilidad total es

$$1 = P(\mathcal{S}) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = p + p^2 - 0$$

En consecuencia,

$$1 = p + p^2$$

ó

$$p^2 + p - 1 = 0.$$

Si resolvemos por la fórmula para ecuaciones de segundo grado, las raíces de esta ecuación son. Pero una probabilidad $p = (-1 \pm \sqrt{5})/2$ nunca es negativa, luego $p = (-1 + \sqrt{5})/2 = -\beta$. Este número, aunque lo veamos con el signo menos, es positivo, puesto que $\beta < 0$, lo que implica que $-\beta \approx 0,61803... > 0$.

Incluso podemos encontrar también el clásico ejemplo de teoría de la probabilidad en el que interviene el lanzamiento de una moneda.

Ejemplo 1.35. Dos jugadores lanzan una moneda. La probabilidad de que salga cara en esa moneda es p (por tanto, la probabilidad de que salga cruz va a ser $1 - p$) y el primer jugador que obtenga cara al lanzar la moneda será el ganador.

El primer jugador lanza la moneda, si falla y saca cruz, lo intentará el segundo jugador, que es el siguiente, teniendo dos intentos como beneficio por no haber empezado el primero.

Si el segundo jugador fallara también en sus dos intentos, volvería a intentarlo el primero con una única tirada. Si sacara cruz otra vez, el segundo jugador volvería a tener dos intentos.

Así hasta que uno de los dos saque cara y por lo tanto, tenemos un ganador.

★ La pregunta es: ¿Qué valor tiene que tener p para que el juego sea justo y ambos jugadores tengan probabilidad de ganar $1/2$?

La probabilidad de ganar del primer jugador es

$$p + (1 - p)(1 - p)^2p + (1 - p)(1 - p)^2(1 - p)(1 - p)^2p + \dots$$

El primer sumando es cuando saca cara a la primera con probabilidad p .

El segundo sumando es el caso en el que gana tras haber fallado la primera vez con probabilidad $(1 - p)$, su contrincante falló las dos tiradas $(1 - p)(1 - p) = (1 - p)^2$ y finalmente ganó él con probabilidad p .

El tercer sumando es cuando él saca cruz, el segundo jugador también falla en sus dos intentos, luego él saca cruz de nuevo, el segundo jugador obtiene otras dos tiradas fallidas y finalmente gana él (el primer jugador).

Así sucesivamente para el resto de sumandos.

Podemos simplificar esta probabilidad, sacando factor común p . Nos percatamos de que tenemos ahora una serie geométrica de razón $r = (1 - p)^3$.

Nota. Suma de la serie geométrica: $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots = 1/(1 - r)$.

$$p[1 + (1 - p)^3 + (1 - p)^6 + (1 - p)^9 + \dots] = p \left[\frac{1}{1 - (1 - p)^3} \right]$$

Para que el juego fuera justo, la probabilidad de que gane el primer jugador (al igual que la del segundo) tenía que ser igual a $1/2$, entonces

$$\frac{1}{2} = \frac{p}{1 - (1 - p)^3}.$$

Operando aquí, obtenemos que $2p = 1 - (1 - p)^3$ y desarrollando el $(1 - p)^3$ llegamos a la expresión $0 = p(p^2 - 3p + 1)$ donde $p = 0$ no tiene ningún sentido, es decir, que lo que tenemos que resolver, en realidad, es la ecuación

$$p^2 - 3p + 1 = 0, \quad p > 0$$

Y de las dos raíces existentes de esta ecuación que son $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, la única posible solución es la que cumple $p < 1$ (no existen probabilidades mayores a 1), que es

$$p = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \beta^2.$$

En teoría de juegos, son múltiples los ejemplos que nos podemos encontrar. Los más clásicos son juegos como el ajedrez, en el que tenemos un tablero con unas determinadas dimensiones y número de casillas.

Tanto si nos fijamos más en las propias baldosas o casillas y jugamos a colocarlas como si de rellenar un puzzle se tratara, tanto como si nos fijamos más en los posibles movimientos de las distintas piezas del ajedrez, encontraremos ejemplos con los números de Fibonacci.

Empecemos por el ejemplo más sencillo.

Ejemplo 1.36. Si tenemos un tablero de ajedrez de sólo dos filas, es decir, un tablero de dimensiones $2 \times n$, para un $n \geq 1$. Queremos rellenar este tablero con fichas o baldosas de tamaño 1×2 (fichas horizontales) y de 2×1 (verticales). Veamos de cuántas formas se podría hacer esto.

El caso más simple, es si el tablero es cuadrado 2×2 donde tendríamos dos opciones : tener el tablero con dos baldosas horizontales o tener en el tablero dos baldosas verticales.

Sea q_n el número de maneras que tenemos de cubrir completamente el tablero de tamaño $2 \times n$ con fichas de 1×2 y 2×1 . Tenemos que el tablero de 2 filas y una columna se rellena con una baldosa vertical, es decir, $q_1 = 1$; y el tablero de tamaño 2×2 tenía $q_2 = 2$ opciones de ser rellenado. Para $n \geq 3$, la diferencia la va a marcar la última n -ésima columna, donde tendremos dos opciones:

Op.1) Completar la columna directamente con una ficha vertical (2×1). Y reducimos el problema a las q_{n-1} formas en las que se puede cubrir el $2 \times (n - 1)$ - tablero restante.

Op.2) Colocar dos fichas horizontales (1×2) en la última columna, y por tanto, también cubriendo la penúltima columna. Quedándonos reducido el problema a las opciones que tenemos para rellenar el $2 \times (n - 2)$ - tablero restante.

En resumidas cuentas, llegamos a

$$q_1 = 1, q_2 = 2$$

$$q_n = q_{n-1} + q_{n-2}, \quad n \geq 3$$

y, en conclusión, donde $q_n = F_{n+1}, n \geq 1$.

Ejemplo 1.37. Tenemos ahora un tablero de ajedrez de dimensiones $1 \times n$, para un $n \geq 1$. Queremos rellenar este tablero con fichas o baldosas cuadradas 1×1 y rectangulares 2×1 . Estamos en la situación que vemos en la figura a), y para rellenar el tablero en el caso particular $n = 4$ tenemos las 5 opciones que se muestran en b).

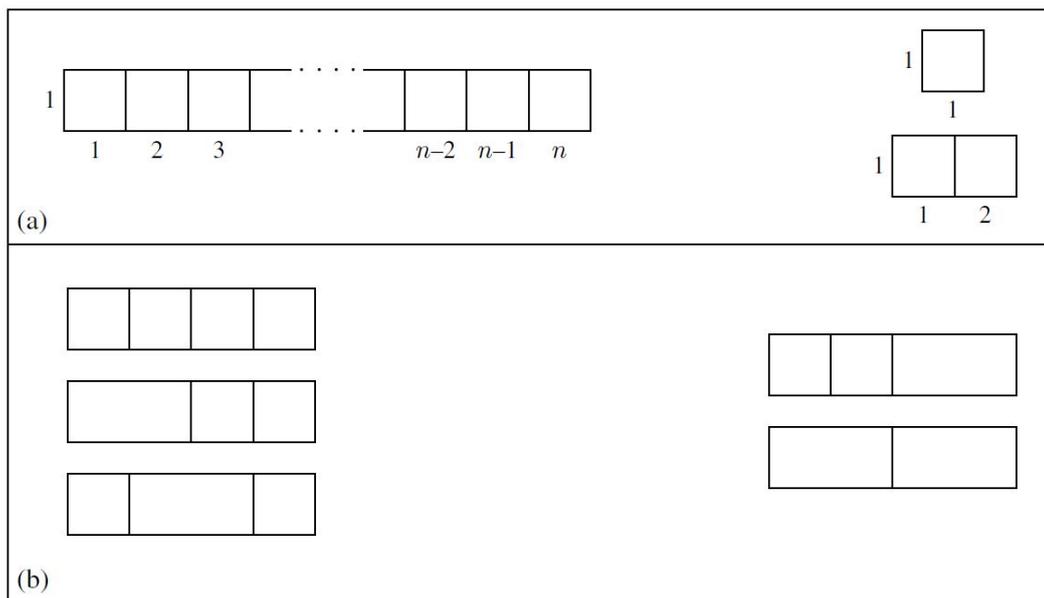


Figura 1.9: Ajedrez 1 - tablero de dimensión $1 \times n$

Sea l_n el número de maneras que tenemos de cubrir completamente el tablero de tamaño $1 \times n$ con fichas cuadradas y rectangulares, vemos que $l_4 = 5$.

De igual manera que en el ejemplo anterior, para obtener una relación de recurrencia para l_n , consideraremos primero lo que ocurre en la última n -ésima casilla del tablero. Para $n \geq 3$, hay dos opciones:

- Op.1) Se cubre la n -ésima casilla con una pieza cuadrada (1×1). Entonces las $n - 1$ casillas restantes del $1 \times n - 1$ - tablero que queda pueden ser embaldosadas de l_{n-1} formas.
- Op.2) Se utiliza una ficha rectangular (1×2) en la última casilla, y por tanto, también cubre la penúltima casilla. Quedándonos reducido el problema a las l_{n-2} opciones que tenemos para rellenar el $1 \times (n - 2)$ - tablero restante.

En el caso general, llegamos también a

$$l_1 = 1, l_2 = 2$$

$$l_n = l_{n-1} + l_{n-2}, \quad n \geq 3$$

y donde $l_n = F_{n+1}, n \geq 1$.

Estos ejemplos, se pueden realizar también con los posibles movimientos que tenemos con las piezas de un ajedrez. Es decir, movimientos o posiciones en las que se puede situar un rey sin que sea comido o estar en peligro de jaque por otro rey. Cómo posicionar los alfiles, las torres... los ejemplos son numerosos.

Ejemplo 1.38. Un tablero de ajedrez suele ser de dimensiones 8×8 , pero ya que hemos trabajado en el ejemplo anterior con un tablero de tamaño $1 \times n$, situemos nuestro ejemplo en este caso más sencillo en el que, por ejemplo, tenemos un tablero como el de la figura a) de tamaño 1×5 .

Queremos saber cuántas formas hay de situar reyes *no-derrotados* en este tipo de tablero. Por *no-derrotados*, entendemos que si los situamos en una casilla determinada, no están en peligro de ser amenazados o derrotados por otro rey.

Recordemos que los reyes sólo se desplazan un espacio a la izquierda o un espacio a la derecha por turno. También se mueven una casilla hacia arriba o hacia abajo o en diagonal (4 opciones de movimientos diagonales), aunque con este tablero reducido nos son relevantes.

Lo que nos va a preocupar en cualquier tipo de tablero es pues, que nuestro rey no esté pegado a ninguna otra figura situada en cualquiera de las 8 casillas colindantes a la suya.

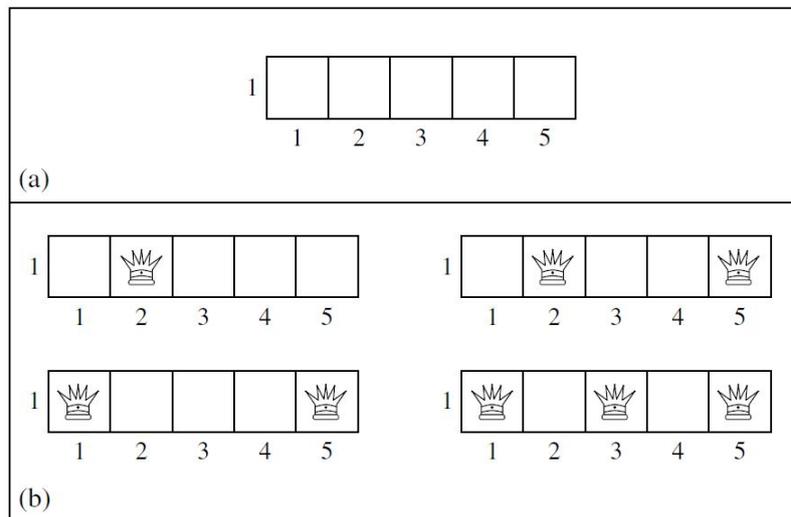


Figura 1.10: Ajedrez 2 - posibles casillas para situar el rey

De esta forma, podemos situar reyes siguiendo la dinámica que vemos en b).

Todas las posibles opciones serían:

- | | |
|---------------------------------|--------------|
| (1) \emptyset (tablero vacío) | |
| (2) 1 | (8) 1, 4 |
| (3) 2 | (9) 1, 5 |
| (4) 3 | (10) 2, 4 |
| (5) 4 | (11) 2, 5 |
| (6) 5 | (12) 3, 5 |
| (7) 1, 3 | (13) 1, 3, 5 |

Luego en un tablero 1×5 tenemos $13 = F_7$ posibilidades.

En un tablero más genérico de tamaño $1 \times n$, para $n \geq 1$, $k_n = F_{n+2}$ donde k_n representa el número de posibles formas de situar reyes *no-derrotados* en un tablero $1 \times n$. Como en los otros ejemplos podríamos obtener la relación de recurrencia con $k_1 = 2$ (Rey en 1 y \emptyset), $k_2 = 3$...

Así mismo, los juegos de composiciones y de palabras (como los *palíndromos*, que son aquellas palabras o frases que se leen igual en un sentido que en otro) siguen también un poco esta dinámica.

Ejemplo 1.39. Un ejemplo sencillo de composición es cuando, por ejemplo, examinamos las posibles composiciones (sumas) de un número entero positivo n , donde sólo podemos escribir estos sumandos con 1's y 2's. Es decir, para $n = 3, 4$ y 5

$$\begin{aligned}(n = 3) &: 2 + 1, 1 + 2, 1 + 1 + 1 \\(n = 4) &: 2 + 2, 2 + 1 + 1, 1 + 2 + 1, 1 + 1 + 2, 1 + 1 + 1 + 1 \\(n = 5) &: 2 + 2 + 1, 2 + 1 + 2, 1 + 2 + 2, \\ & 2 + 1 + 1 + 1, 1 + 2 + 1 + 1, 1 + 1 + 2 + 1, 1 + 1 + 1 + 2 \\ & 1 + 1 + 1 + 1 + 1\end{aligned}$$

Si denotamos por c_n al valor que cuenta el número de composiciones que tiene el entero n (composiciones con sólo sumandos de 1's y 2's), vemos que en el caso $n = 5$: $c_5 = 8 = 5 + 3 = c_4 + c_3$. De hecho, si nos fijamos más, las composiciones de 5 no son más que las tres composiciones del 3 sumándolas $+2$ y las cinco composiciones del 4 sumándolas $+1$.

Llevando esto al caso general,

$$\begin{aligned}c_1 &= 1, c_2 = 2 \\c_n &= c_{n-1} + c_{n-2}, \quad n \geq 3\end{aligned}$$

y llegamos a la conclusión de que $c_n = F_{n+1}$, $n \geq 1$ (p. ej. $c_5 = 8 = F_6$).

Este ejemplo es similar a aquellos con las baldosas y los tableros de ajedrez. Se puede trasladar todavía a otro caso más visual.

Nos imaginamos un panal de abejas, donde las "casillas" que tenemos ahora son de forma hexagonal.

Ejemplo 1.40. En un panal con casillas hexagonales, si partimos de una casilla inicial de salida (S), las abejas tienen dos opciones de desplazamiento:

- Op.1) Moverse diagonalmente hacia arriba o hacia abajo, es decir, \nearrow o \searrow .
Equivalencia con el ejemplo anterior: Estamos en la situación de sumar o añadir el sumando $+1$, puesto que estamos avanzando poquito y desviándonos hacia arriba o hacia abajo, cuando nuestro objetivo es llegar a la última casilla.
- Op.2) Moverse horizontalmente para avanzar a la casilla de al lado, un movimiento que siempre es tal que así: \rightarrow .
Equivalencia con el ejemplo anterior: Es el caso en el que sumábamos $+2$ cuando hacíamos las composiciones de un entero n en sumandos de 1's y 2's. Aquí sumamos el doble porque si nos fijamos un movimiento (\rightarrow) equivale o avanza lo mismo que dos movimientos ($\nearrow + \searrow$) o bien ($\searrow + \nearrow$).

Llevándolo al caso particular $n = 5$, podemos ver más clara la relación que tiene con las composiciones del ejemplo anterior para el entero $n = 5$. Gráficamente nuestro panal de abejas sería como el de la figura siguiente.

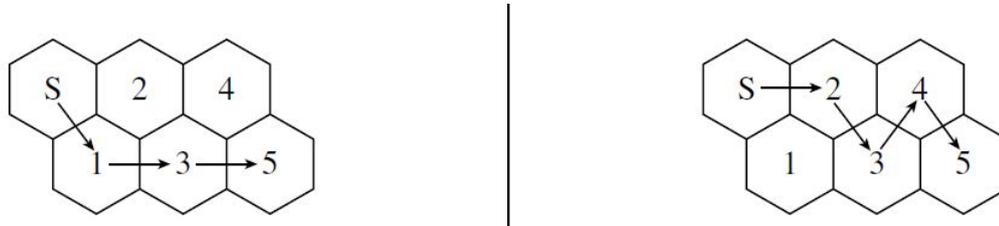


Figura 1.11: Composiciones en un panal

donde el primer camino para llegar a 5 equivale a la composición

$$1 + 2 + 2,$$

y el segundo camino es la composición

$$2 + 1 + 1 + 1.$$

Tendremos las mismas 8 posibilidades que en el ejemplo anterior para acabar llegando a $n = 5$, es decir, una abeja tiene $8 = F_6$ caminos diferentes por los que puede ir para llegar de la casilla (S) a la casilla (5). Y para el caso general $n \geq 1$, igual que en el otro ejemplo, hay F_{n+1} caminos y opciones diferentes que puede tomar la abeja.

1.5.4. En informática

Si seguimos por la rama científica, Fibonacci también ha tenido su influencia en el mundo y la ciencia de los ordenadores.

Nos encontramos con los números de dicha sucesión, por ejemplo, en uno de los trabajos del ingeniero Gabriel Lamé⁸.

Dicho trabajo se centra en el costo operativo, contando el número de divisiones (operaciones) que se realizan con el ordenador, cuando implementamos el algoritmo de Euclides para calcular el máximo común divisor de dos enteros ($MCD(a, b)$ con $a \geq b \geq 2$).

Nota: Para calcular el costo operativo, a la hora de contar las operaciones, sólo se tienen en consideración las multiplicaciones / divisiones indistintamente, ya que las sumas / restas suelen aparecer en número muy parecido al de las multiplicaciones / divisiones y además, aunque esto depende de la máquina usada, suelen ser más baratas.

Ejemplo 1.41. El *teorema de Lamé* dice:

Sean a y b dos números enteros positivos con $a \geq b \geq 2$. Entonces el número de divisiones necesarias en el algoritmo de Euclides para determinar el $MCD(a, b)$ es como mucho y no más de 5 veces el número de cifras o dígitos (decimales) de b .

⁸Ingeniero francés (1795 - 1870). Estuvo en Rusia, donde su tiempo fue productivo como profesor e ingeniero en San Petersburgo, dando conferencias sobre temas de análisis, física, mecánica, química e ingeniería. Incluso intervino en planos de puentes y carreteras. En 1832 volvió a París, donde ocupó también su silla en la *École Polytechnique*. Resumiendo, trabajó en una amplia variedad de temas diferentes y resaltando en muchos de ellos. En matemáticas, lo más destacable son sus coordenadas curvilíneas y sus aportaciones a la geometría diferencial y teoría de números. Ya nos había aparecido incluso antes en este trabajo, en otro pie de página, cuando hablamos de la forma de Binet, puesto que él también se topó con este resultado.

Cuando vimos la demostración de la propiedad del MCD [1.26] vimos el algoritmo de Euclides

$$\begin{aligned}
 a &= q_1 b + r_2. & 0 \leq r_2 < b = r_1 \\
 b &= q_2 r_2 + r_3. & 0 \leq r_3 < r_2 \\
 r_1 &= q_3 r_3 + r_4. & 0 \leq r_4 < r_3 \\
 &\dots \\
 r_{n-2} &= q_{n-1} r_{n-1} + r_n. & 0 \leq r_n < r_{n-1} \\
 r_{n-1} &= q_n r_n
 \end{aligned}$$

donde finalmente $r_n = MCD(a, b)$.

Aquí se han realizado n divisiones. Es más examinando los $n - 1$ restos no nulos $(r_n, r_{n-1}, \dots, r_2)$ junto con $r_1 = b$ encontramos que

$$\begin{aligned}
 r_n &> 0 \Rightarrow r_n \geq 1 = F_2 \\
 r_{n-1} &= q_n r_n \quad (q_n \geq 2, r_n \geq 1) \Rightarrow r_{n-1} \geq 2 = F_3 \\
 r_{n-2} &= q_{n-1} r_{n-1} + r_n \quad (q_i \geq 1, \forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}) \Rightarrow r_{n-2} \geq 1 \cdot r_{n-1} + r_n \geq F_3 + F_2 = F_4 \\
 &\vdots \\
 r_2 &= q_3 r_3 + r_4 \quad (q_i \geq 1, \forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}) \Rightarrow r_2 \geq 1 \cdot r_3 + r_4 \geq F_{n-1} + F_{n-2} = F_n \\
 r_1 &= b = q_2 r_2 + r_3 \quad (q_i \geq 1, \forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}) \Rightarrow r_1 \geq 1 \cdot r_2 + r_3 \geq F_n + F_{n-1} = F_{n+1}
 \end{aligned}$$

Entonces, a parte de las n divisiones que se realizan, tenemos que $b = r_1 \geq F_{n+1}$ donde $a \geq b \geq 2$.

Incluso también hay una relación existente con el número áureo en el trabajo de Lamé. Sin embargo, para no entrar en mucho más detalle, suponemos / damos por cierta una propiedad de los números de Fibonacci que nos dice que

$$F_n > \alpha^{n-2}, n \geq 3$$

Usando esta propiedad, si tenemos que $b \geq F_{n+1}$, esto se traduce a

$$b \geq F_{n+1} > \alpha^{(n+1)-2} = \alpha^{n-1} = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1}$$

Y como resultado de esto, podemos aplicar logaritmos y sus propiedades para demostrar el teorema de Lamé.

$$b > \alpha^{n-1} \Rightarrow \log_{10} b > \log_{10}(\alpha^{n-1}) = (n-1) \log_{10} \alpha$$

Si calculamos $\log_{10} \alpha = \log_{10}[(1 + \sqrt{5})/2] = 0,208988 > 0,2 = 1/5$, luego

$$\log_{10} b > (n-1) \frac{1}{5}$$

Estamos en base 10 (decimal) y ahora vamos a entender por qué hemos trabajado en dicha base. Si el número b tiene k dígitos en el sistema decimal, eso quiere decir que es un número que cumple $b < 1 \cdot 10^k$ y aplicando esto tenemos

$$k = \log_{10} 10^k > \log_{10} b > \frac{n-1}{5}$$

Nos quedamos con la primera parte y la última de esta desigualdad. Si despejamos el entero n , tenemos una desigualdad en función del entero k

$$n < 5k + 1 \leq 5k$$

Quedando completada la prueba para el teorema.

De esta forma, vemos que con el costo operativo, ha quedado analizada la eficiencia del algoritmo de Euclides.

Curiosamente, muchas estructuras de datos y algoritmos sorprendentemente eficientes están basados en dicha sucesión.

1.5.5. Fibonacci y la teoría de grafos

Hablando de estructuras; también en teoría de grafos, va a existir un tipo especial de grafo llamado *árbol de Fibonacci*. Para llegar, sin embargo, a este ejemplo, comencemos primero por algunas ideas básicas de este área de las matemáticas.

Definición 1.42. Entendemos por **grafo no dirigido**, aquel que está compuesto por un conjunto no vacío V de *vértices* y otro conjunto E de *caminos* que se encuentran entre los vértices de V . Estos caminos, también llamados arcos o aristas, son relaciones simétricas entre los vértices y no apuntan en ningún sentido. Mientras que si el grafo fuera **dirigido o digrafo**, las aristas tienen un sentido definido indicado con una flecha.

Nótese que aunque el conjunto de vértices tiene que ser $V \neq \emptyset$, el conjunto E de caminos (edges) sí que puede ser vacío.

De la definición de grafo no dirigido extraemos en claro entonces, que si tenemos 4 vértices $V = w, x, y, z$ y las aristas $E = wx, xy, yz$ (como en la figura inferior (ii)), se entiende que $xy = yx$ y lo mismo da recorrer los caminos en una dirección o en otra. La cuestión es que x, y están conectados, es más, son "vecinos" y w, z , por ejemplo, no lo son.

Otras definiciones curiosas son la de *bucle* que es cuando un vértice está unido o relacionado con sí mismo (existe el camino vv) o la definición de *ciclo*, como lo que constituyen los caminos rs, st y tr en la figura (ii) que es un ciclo de longitud 3, pero no van a ser relevantes para nuestro estudio.

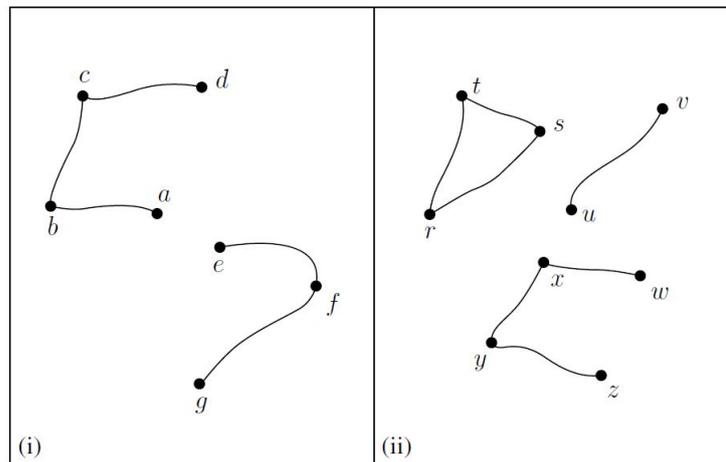


Figura 1.12: Grafos no dirigidos

Como vemos, los grafos no dirigidos pueden estar formados también por más de una sola pieza, aunque nos centraremos en estos últimos. Por ejemplo, como observamos en la figura en (i) hay dos y cada una de estas "piezas" o partes se llaman *componentes*. En el caso del grafo no dirigido en (ii), tiene 3 componentes que están "desconectadas", lo que nos lleva a la siguiente definición.

Definición 1.43. Un grafo es **conexo** cuando para cada par de vértices u y v del grafo G , existe al menos un camino posible desde u a v . (Si el grafo es no dirigido, también existe el camino de v a u). En caso contrario, el grafo es **no conexo**.

Los grafos, por tanto, que hemos visto en la anterior figura son no conexos.

Vistos estos conceptos básicos, nuestro ejemplo relacionado con la sucesión de Fibonacci va a tratar con un tipo concreto de grafo no dirigido conexo llamado *árbol*.

Definición 1.44. En general, un grafo no dirigido con un conjunto de vértices V y un conjunto de caminos E es un **árbol** si el número de vértices es igual a uno más que el número de caminos, es decir, $|V| = |E| + 1$.

Dentro de esta clase de grafos, podemos hablar también de **árbol binario enraizado**. Enraizado porque tiene un vértice r de partida, más conocido como *raíz*, que se suele simbolizar rodeado de un círculo; y binario porque cada vértice tiene dos brazos o ramas, un *hijo izquierdo* (el vértice que queda a la izquierda) y un *hijo derecho* (el vértice que queda a la derecha).

Cuando los vértices ya no tienen más ramas nuevas, es decir, sólo tienen un camino que llega a ellos, son los *vértices hoja*. El resto de vértices del árbol son los *vértices internos* y por definición de árbol binario, cada uno de ellos tendrá como mucho dos hijos.

Igual que a veces se habla de subgrafos, también podemos hablar de *subárboles* cuando fijamos la raíz en uno de los nuevos vértices hijo y se sigue manteniendo la estructura de árbol.

Ahora ya podemos proceder a examinar nuestra colección especial de árboles binarios enraizados.

Ejemplo 1.45. Los *árboles de Fibonacci* $T_n, n \geq 0$ son una variante de árbol binario y vienen definidos recursivamente de la siguiente manera:

1. T_1 es el árbol enraizado compuesto por sólo un único vértice, la raíz.
2. T_2 , al igual que T_1 , es un árbol compuesto sólo por la raíz.
3. $T_n, n \geq 3$ es el árbol binario enraizado con T_{n-1} como su subárbol izquierdo y con T_{n-2} como su subárbol derecho.

En la figura, tenemos cómo son los seis primeros árboles de Fibonacci.

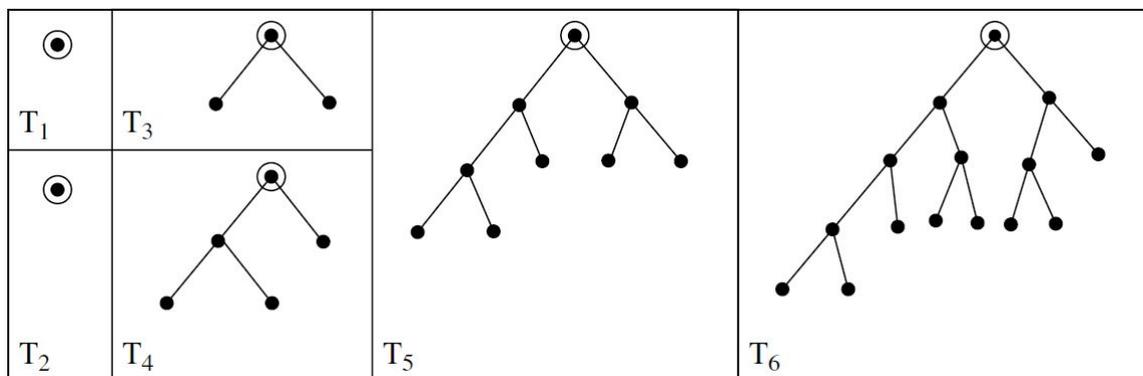


Figura 1.13: Grafos - árboles de Fibonacci

Lo que queremos es, para $n \geq 1$, determinar lo siguiente:

- a) h_n , el número de vértices hoja (en T_n).
- b) v_n , el número total de vértices (en T_n).
- c) i_n , el número de vértices internos (en T_n).
- d) c_n , el número de caminos o ramas (en T_n).

a) Por la definición recursiva que tenemos de T_n , el número de hojas de T_n va a ser la suma del número de hojas en su subárbol izquierdo T_{n-1} más el número de hojas que tiene su subárbol derecho T_{n-2} , es decir, tenemos que

$$\begin{aligned} h_1 &= 1, h_2 = 1 \\ h_n &= h_{n-1} + h_{n-2}, \quad n \geq 3 \end{aligned}$$

donde se cumple $h_n = F_n$.

b) Para el número total de vértices v_n no es tan fácil, ya que tenemos que contar también el vértice raíz. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} v_1 &= 1, v_2 = 1 \\ v_n &= v_{n-1} + v_{n-2} + 1, \quad n \geq 3 \end{aligned}$$

Se trata de una relación de recurrencia lineal *no homogénea* ($v_n - v_{n-1} - v_{n-2} = 1 \neq 0$ y por la Definición 1.2). Resolverla nos llevaría su tiempo, así que en su lugar hacemos la siguiente aproximación examinando los seis primeros árboles de Fibonacci que aparecen en nuestra imagen.

$$\begin{aligned} v_1 &= 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 2F_1 - 1, \\ v_2 &= 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 2F_2 - 1, \\ v_3 &= 3 = 2 \cdot 2 - 1 = 2F_3 - 1, \\ v_4 &= 5 = 2 \cdot 3 - 1 = 2F_4 - 1, \\ v_5 &= 9 = 2 \cdot 5 - 1 = 2F_5 - 1, \\ v_6 &= 15 = 2 \cdot 8 - 1 = 2F_6 - 1. \end{aligned}$$

Conjeturamos con esto, que la relación que hay es

$$v_n = 2F_n - 1, \forall n \geq 1$$

Demostración. Se puede establecer esta conjetura con el Principio Fuerte de Inducción:

Tenemos que es cierta para $n = 1$ y $n = 2$ (así como para $n = 3, 4, 5$ y 6).

Supuesto que es cierta para $n = 1, 2, \dots, k - 1$, k con $k \geq 2$

Sólo nos quedaría demostrarlo para $k + 1$, usando nuestra hipótesis de inducción. (Más detallada en [14]). □

c) Como ya hemos calculado los v_n y los h_n y sabemos que $v_n = h_n + i_n$, para $n \geq 1$,

$$i_n = v_n - h_n = (2F_n - 1) - F_n = F_n - 1, \quad n \geq 1$$

d) Como mencionamos antes, en todos los grafos de tipo árbol se cumple que el número de vértices es uno más que el número de caminos, luego

$$c_n = v_n - 1 = (2F_n - 1) - 1 = 2F_n - 2, \quad n \geq 1$$

Hasta aquí, hemos visto ya muchos ejemplos y propiedades en los que aparecen los números de Fibonacci, pero, la verdad, es que aún hay más que están aún por aparecer en nuestro trabajo, sobre todo en el siguiente capítulo en el que se los relacionará con los llamados *números de Lucas*, que no son más que los términos o valores de la llamada *sucesión compañera de Lucas*.

Como vamos a ver, la sucesión de Fibonacci y esta sucesión de números de Lucas son algo así como “primas - hermanas”, de ahí que usemos la palabra *compañera*.

Capítulo 2

Sucesión compañera de Lucas

En este capítulo veremos la sucesión de números de Lucas, que se debería pronunciar “Lucah” en realidad. Es simplemente una sucesión en la que se mantiene la misma relación de recurrencia que en la sucesión de Fibonacci, salvo que ahora las condiciones iniciales de su definición recursiva han cambiado.

Encontraremos también numerosas propiedades que satisfacen esta sucesión de números. Y no sólo eso, sino que según avancemos, apreciaremos cada vez más la estrecha relación existente entre la sucesión de Fibonacci y la sucesión compañera de Lucas. Tienen propiedades y ejemplos similares e incluso descubriremos nuevas relaciones que involucran a ambas, tanto a números de Fibonacci como a números de Lucas en una misma expresión o fórmula.

2.1. Definición recursiva

François Édouard Anatole Lucas¹, ya mencionado antes en algunas de las propiedades de Fibonacci, fue un matemático francés muy reconocido en el campo de teoría de números y al que debemos los llamados *números de Lucas*.

Estos números y su correspondiente sucesión recursiva van a venir determinados por:

Definición 2.1. Sucesiones recursivas de Lucas

Para todo $n \geq 0$ y sea L_n el n -ésimo número de Lucas, tenemos:

1. $L_0 = 2, \quad L_1 = 1$ (Condiciones iniciales)
2. $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \quad \forall n \geq 2$ (Relación de recurrencia)

Al igual que hicimos con Fibonacci, a partir de esta definición, ya podríamos obtener, por ejemplo, los 30 primeros números de Lucas que mostramos en una tabla a continuación.

¹Nació y vivió en Amiens, hasta que se movió por trabajo al Observatorio de París y ejerció también como profesor de matemáticas en un par de liceos de esta ciudad, donde finalmente murió (1842 - 1891). Curiosamente, su fallecimiento fue debido a un trozo de plato roto que le saltó en un banquete y le cortó la mejilla, provocándole una muerte por erisipela unos días después. Estudió en profundidad la secuencia de Fibonacci y su sucesión compañera o asociada: la sucesión de Lucas, llamada así por él. Ideó también la prueba para los números primos de Mersenne, mejorada más tarde en 1930 por Lehmer, conocida como el test de Lucas-Lehmer, todavía utilizada en la actualidad. Le debemos también algunos juegos o rompecabezas matemáticos como *la Torre de Hanoi*.

$L_0 = 2$	$L_6 = 18$	$L_{12} = 322$	$L_{18} = 5778$	$L_{24} = 103682$
$L_1 = 1$	$L_7 = 29$	$L_{13} = 521$	$L_{19} = 9349$	$L_{25} = 167761$
$L_2 = 3$	$L_8 = 47$	$L_{14} = 843$	$L_{20} = 15127$	$L_{26} = 271443$
$L_3 = 4$	$L_9 = 76$	$L_{15} = 1364$	$L_{21} = 24476$	$L_{27} = 439204$
$L_4 = 7$	$L_{10} = 123$	$L_{16} = 2207$	$L_{22} = 39603$	$L_{28} = 710647$
$L_5 = 11$	$L_{11} = 199$	$L_{17} = 3571$	$L_{23} = 64079$	$L_{29} = 1149851$

Tabla 2.1: Números de Lucas

Encontramos también estos términos de la sucesión en la OEIS, con el enlace: <https://oeis.org/A000032> o buscando debidamente en la página oficial de esta enciclopedia online.

Ahora que ya sabemos dónde acudir para dudas que puedan surgir sobre fórmulas, propiedades, referencias, links, códigos de programación, etc. nos centraremos en la primera de las fórmulas: la forma de Binet. Al igual que en Fibonacci, tiene su importancia en este tipo de sucesiones que estamos estudiando.

2.2. Forma de Binet

De forma general, para los números de Lucas, la forma de Binet es

$$\boxed{L_n = \alpha^n + \beta^n, \quad n \geq 0} \quad (2.1)$$

Siendo α y β las mismas raíces que en la forma de Binet para Fibonacci (1.1). La relación de recurrencia sigue siendo la misma, por lo tanto, el polinomio asociado a esta relación de recurrencia y la ecuación característica a resolver sigue siendo:

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Donde recordemos que, al haber soluciones, las raíces eran $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ y $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

Luego, la forma de Binet para los números de Lucas, también se puede escribir de manera explícita como

$$L_n = \alpha^n + \beta^n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Con esta fórmula, ya podemos proceder a demostrar muchas propiedades.

En concreto, recordemos que había una propiedad que nos relacionaba, a través del límite, la sucesión de Fibonacci con el número áureo $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha \right)$.

Este límite también existe y se demuestra análogamente para los números de Lucas.

Propiedad 2.2. Sea L_n el n -ésimo número de Lucas, se verifica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = \alpha.$$

Además, en esta ocasión, a mayores podemos relacionar a la sucesión de números de Lucas y a la de Fibonacci con otra constante.

Propiedad 2.3. Sean F_n, L_n los n -ésimos números de Fibonacci y de Lucas, respectivamente. Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{F_n} = \sqrt{5}.$$

Demostración. Basta con recordar la forma de Binet de ambas sucesiones.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{F_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n + \beta^n}{(\alpha^n - \beta^n)/\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

□

En otras palabras, si un número de Lucas, en la posición n de la sucesión compañera de Lucas, es dividido por el número n -ésimo correspondiente de la sucesión de Fibonacci, el cociente aproximado de ellos es $\sqrt{5}$.

Ejemplo 2.4. Cogiendo los números implicados de la tablas [1.1] y [2.1]:

$$\frac{L_{18}}{F_{18}} = \frac{5778}{2584} = 2,236068... \simeq \sqrt{5}$$

Esta relación también se mantiene, por supuesto, con el cociente $F_n/L_n \simeq 1/\sqrt{5}$.

Incluso se pueden encontrar, al igual que sucedía para Fibonacci, resultados todavía más genéricos para estos límites. Por ejemplo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+a}}{L_n} = \alpha^a$$

para un $a \geq 1$ fijo. (En libros como [14] y [21])

2.3. Propiedades de los números de Lucas

Lo primero que haremos es buscar más propiedades que nos relacionen los números de Lucas con los números de Fibonacci, ya que venimos observando que van a estar estrechamente vinculados.

Cuando nos fijamos en los términos de una sucesión y de la otra, nos percatamos de lo siguiente:

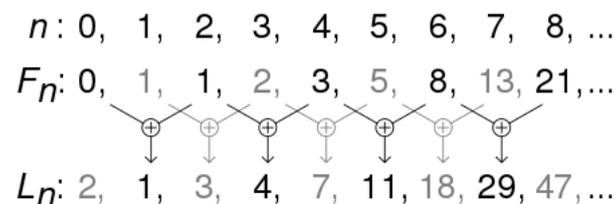


Figura 2.1: Relación visual números de Lucas y num. de Fibonacci

Esto da pie a nuestras primeras propiedades.

Propiedad 2.5. Los números de Lucas se pueden escribir en función de números de Fibonacci, cumpliéndose las siguientes relaciones:

- (i) $L_n = F_{n+1} + F_{n-1} = F_n + 2F_{n-1}, \quad n \geq 1$
- (ii) $L_n = 2F_{n+1} - F_n, \quad n \geq 0$
- (iii) $L_n = F_{n+2} - F_{n-2}, \quad n \geq 2$

Demostración. Son propiedades prácticamente equivalentes.

- (i) La primera igualdad no la demostramos. Salta a la vista en la imagen. Se puede escribir de esa otra forma que exponemos en la segunda igualdad, si tenemos en cuenta la relación de recurrencia (1.1) para F_{n+1} , es decir, es claro que

$$F_{n+1} + F_{n-1} = (F_n + F_{n-1}) + F_{n-1} = F_n + 2F_{n-1}.$$

- (ii) De forma similar, usando la misma relación de recurrencia de nuevo ($F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$), pero esta vez aplicándola sobre F_{n-1} .

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1} = F_{n+1} + (F_{n+1} - F_n) = 2F_{n+1} - F_n.$$

- (iii) Se obtiene a partir de (i) y usando esta vez la relación de recurrencia para F_{n+2} y F_n , sólo que despejándolas y aplicándolas después a los términos que nos interesan.

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1} = (F_{n+2} - F_n) + (F_n - F_{n-2}) = F_{n+2} - F_{n-2}.$$

□

Estas fórmulas nos escriben los números de Lucas L_n respecto a los números de Fibonacci. Sin embargo, también encontramos propiedades a la inversa, es decir, que nos escriben el n -ésimo número de Fibonacci F_n en función de los números de Lucas.

Propiedad 2.6. Los números de Fibonacci verifican la siguiente relación con los números de Lucas:

$$F_n = \frac{L_{n+1} + L_{n-1}}{5}.$$

Esta fórmula, que no nos vamos a parar a demostrar, figura así y con este formato en los apuntes de [27], pero hay que tener en cuenta que en numerosos libros y otras fuentes de información nos puede aparecer en cualquiera de sus otras múltiples versiones, es decir, es equivalente a

$$5F_n = L_{n+1} + L_{n-1} = L_n + 2L_{n-1} = 2L_{n+1} - L_n = L_{n+2} - L_{n-2}.$$

Recordemos que con Fibonacci, las primeras propiedades que mencionamos fueron aquellas relativas al máximo común divisor, pues bien, para los números de Lucas, también tenemos equivalentemente:

Propiedad 2.7. Para $n \geq 0$, se cumple que

$$\begin{aligned} \text{MCD}(L_n, L_{n+1}) &= 1, \\ \text{MCD}(L_n, L_{n+2}) &= 1. \end{aligned}$$

Nota: Para L_{n+3} no es cierto, puede ser $\text{MCD}(L_n, L_{n+3}) \neq 1$.

Demostración. Por reducción al absurdo o contradicción (como en Fibonacci).

Para la nota nos vale con encontrar un contraejemplo, como $MCD(L_3, L_6) = MCD(4, 18) = 2$. \square

Continuando con propiedades para los números de Lucas que son equivalentes a aquellas que vimos para Fibonacci, nos encontramos con los sumatorios lineales y no lineales siguientes. Todos demostrables por el Principio de Inducción.

Propiedad 2.8. Para $n \geq 0$, se cumple que $\sum_{r=0}^n L_r = L_0 + L_1 + L_2 + \dots + L_n = L_{n+2} - 1$.

Propiedad 2.9. Para $n \geq 0$, tenemos la suma de cuadrados $\sum_{r=0}^n (L_r)^2 = L_n L_{n+1} - 2$.

Propiedad 2.10. Para $n \geq 1$, se verifica lo siguiente:

$$\text{(Suma de impares)} \quad \sum_{r=1}^n L_{2r-1} = L_1 + L_3 + L_5 + \dots + L_{2n-1} = L_{2n} - 2$$

$$\text{(Suma de pares)} \quad \sum_{r=1}^n L_{2r} = L_2 + L_4 + L_6 + \dots + L_{2n} = L_{2n+1} - 1$$

Otros sumatorios que nos encontramos cuando hablamos de los números de Lucas son los que reunimos a continuación.

Propiedad 2.11.

$$\sum_{k=0}^{n-1} (L_{2k+1})^2 = F_{4n} - 2n; \quad \sum_{k=1}^n (L_{2k})^2 = F_{4n+2} + 2n - 1;$$

$$\sum_{k=0}^n F_k L_{n-k} = (n+1)F_n.$$

También vamos a tener propiedades con series infinitas, como la función generadora.

Propiedad 2.12. Sea L_n el n -ésimo número de Lucas, se verifica:

$$\sum_{k=0}^{\infty} L_n X^n = \frac{2-X}{1-X-X^2} \quad \text{función generadora.}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{L_k}{r^k} = 2 + \frac{r+2}{r^2-r-1}$$

Siendo esta segunda serie convergente cuando $|r| < \frac{1}{\alpha}$, con α el número áureo.

Si seguimos echando la vista atrás a propiedades que teníamos para los números de Fibonacci, un resultado que nos era bastante útil cuando trabajábamos con ellos era la identidad de Cassini. Comparable a esta propiedad, tenemos para los números de Lucas:

Propiedad 2.13. Para $n \geq 1$, es cierta la igualdad:

$$\boxed{L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1}}$$

Recordemos que cuando demostramos la identidad de Cassini, nos vino bien usar la forma matricial que teníamos para los números de Fibonacci.

En el caso de los números de Lucas, también vamos a poder representarlos a través de matrices con la ayuda de la matriz que ya teníamos del capítulo 1.

Veamos pues la forma matricial, puesto nos es conveniente utilizarla para demostrar propiedades como la que acabamos de enunciar.

2.3.1. Lucas con matrices

Partiendo de la siguiente matriz:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

La multiplicamos por \mathbf{M}^n con el objetivo de encontrar nuestra matriz para los números de Lucas.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{M}^n \end{aligned}$$

Al hacer esto se cumplen las relaciones:

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= F_{n+1} + 2F_n, \\ L_n &= F_n + 2F_{n-1}, \\ L_n &= 2F_{n+1} - F_n, \\ L_{n-1} &= 2F_n - F_{n-1}. \end{aligned}$$

Sabemos que se satisfacen, como vimos al comienzo de la sección, y de ahí que hayamos definido también la matriz \mathbf{N} de esa forma.

Gracias a esta forma matricial se pueden demostrar más propiedades, como una equivalente a aquella propiedad 1.26 del máximo común divisor.

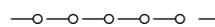
Teorema 2.14. Propiedad del MCD para Lucas

Sean m, n enteros positivos *impares* tales que $m \geq n \geq 1$, entonces,

$$MCD(L_m, L_n) = L_{MCD(m,n)}.$$

Esta vez si nos fijamos, la propiedad es restringida a m, n impares, esto es debido a que también los lemas básicos previos de los que se sustenta esta propiedad y su demostración, ahora tienen esta restricción. Lemas de apoyo similares a aquellos que vimos con el lema 1.25 y compañía, y que se pueden encontrar en cualquier libro de texto o fuente de información como [28]. Más congruencias y criterios de divisibilidad en [45]. Por ejemplo, ahora tenemos que

Lema 2.15. Sea m impar. Entonces $L_n | L_m$ si y solo si $n | m$.



Volviendo a la identidad de Cassini, con esta nueva forma de representar los números de Lucas y a través de los determinantes, podemos ya cumplir nuestro objetivo de demostrar esa nueva expresión, comparable en importancia a la identidad que teníamos para Fibonacci.

Demostración. Para $n \geq 1$,

$$\begin{vmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix}$$

Esto es, $L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = (-5)(F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2)$ y por la identidad de Cassini que teníamos para los números de Fibonacci:

$$L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = 5(-1)^{n+1}.$$

□

Otra propiedad del estilo, pero que involucra tanto a los números de Lucas como a los números de Fibonacci, relacionando a ambos, es

Propiedad 2.16. Para $n \geq 0$, se satisface

$$\boxed{L_n^2 = 5F_n^2 + 4(-1)^n}$$

Demostración. Sabemos que $L_n = F_n + 2F_{n-1}$. Luego,

$$\begin{aligned} L_n^2 &= (F_n + 2F_{n-1})^2 = F_n^2 + 4F_nF_{n-1} + 4F_{n-1}^2 \\ &= F_n^2 + 4F_{n-1}(F_n + F_{n-1}) = F_n^2 + 4F_{n-1}F_{n+1} \end{aligned}$$

Vemos ya la similitud entre esta expresión y la que queremos demostrar. Practicamente lo que nos queda es aplicar la identidad de Cassini $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

$$L_n^2 = F_n^2 + 4F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + 4(F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2) + 4F_n^2 = 5F_n^2 + 4(-1)^n.$$

□

En esta demostración, queda destacada de nuevo la relevancia de la identidad de Cassini. No es de extrañar pues, que exista a mayores una generalización de dicha identidad, establecida por el matemático belga Eugène Charles Catalan² en 1879.

Aunque esta generalización siga siendo para los números de Fibonacci, no la hemos visto hasta ahora porque su demostración implicaba más conocimientos que los que teníamos en el capítulo 1 y necesitábamos de los números de Lucas. De hecho, su demostración es algo larga y apenas daremos un par de indicaciones.

Teorema 2.17. Identidad de Catalan - Generalización de la Identidad de Cassini

Para $n \geq r > 0$, es cierto que

$$F_{n-r}F_{n+r} - F_n^2 = (-1)^{n+r+1}F_r^2.$$

Demostración. Usamos la forma de Binet para los números de Fibonacci.

$$F_{n-r}F_{n+r} - F_n^2 = \frac{\alpha^{n-r} - \beta^{n-r}}{\alpha - \beta} \frac{\alpha^{n+r} - \beta^{n+r}}{\alpha - \beta} - \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right)^2$$

²Este matemático nacido en Brujas (1814-1894) es más conocido por descubrir los números de Catalan, mientras consideraba la solución del problema de disecionar un polígono en triángulos a través de diagonales que no se cruzan. Se llaman así por su apellido, el cual no adoptó hasta los 7 años cuando sus padres finalmente se casaron. En general, tuvo una vida llena de logros. En 1894, de hecho, fue invitado a la École Polytechnique para celebrar el centenario de su fundación y como uno de los exalumnos vivos más antiguos, pero al final no asistió. Su esposa enfermó ese año, él se derrumbó y fue trasladado al hospital por una neumonía. El 11 de febrero murió la mujer y el propio Catalan tres días después.

Lo siguiente será operar y aplicar propiedades de α y β (tabla 1.2), como

$$(\alpha - \beta)^2 = (\sqrt{5})^2 = 5,$$

$$\alpha\beta = -1, \quad \alpha^{-1} = -\beta, \quad \beta^{-1} = -\alpha.$$

Se llega así a una expresión del tipo

$$F_{n-r}F_{n+r} - F_n^2 = \frac{(-1)^{n+r+1}(\alpha^{2r} + \beta^{2r}) + 2(-1)^n}{5}$$

Aquí entran en juego los números de Lucas. Recordando su forma de Binet (2.1), tenemos que $L_{2r} = \alpha^{2r} + \beta^{2r}$. Y aplicando a continuación otra fórmula conocida para L_{2r} tenemos

$$\frac{(-1)^{n+r+1}L_{2r} + 2(-1)^n}{5} = \frac{(-1)^{n+r+1}(5F_r^2 + 2(-1)^r) + 2(-1)^n}{5} \quad (*)$$

Operando, este cociente es

$$(-1)^{n+r+1}F_r^2 + \frac{2}{5}((-1)^{n+2r+1} + (-1)^n) = (-1)^{n+r+1}F_r^2$$

(Demostración completa en [14]). □

En (*) hemos usado una relación para L_{2n} que aún no hemos visto, pero ahora, teniendo ya expresiones como la equivalente a la identidad de Cassini o la propiedad 2.16, junto con la posibilidad de poder trabajar también con la forma matricial y la forma de Binet, estamos en disposición de demostrar muchas más propiedades como las que vienen a continuación.

Propiedad 2.18. Para $n \geq 0$, se cumple:

(i) $F_{2n} = L_n F_n$

(ii) $L_{2n} = 5F_n^2 + 2(-1)^n = L_n^2 + 2(-1)^{n+1} = \frac{1}{2}(5F_n^2 + L_n^2)$

Demostración.

(i) Esta forma de definir F_{2n} es bastante utilizada y sencilla de demostrar. Basta usar formas de Binet.

$$L_n F_n = (\alpha^n + \beta^n) \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{2n} - \cancel{(\alpha\beta)^n} + \cancel{(\beta\alpha)^n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta} = F_{2n}.$$

(ii) L_{2n} tiene muchas propiedades y formas de ser definida. Demostraremos en detalle la primera igualdad, por ser la que hemos utilizado ya en una de nuestras demostraciones.

Utilizando la forma de Binet para los números de Lucas (2.1) y $\alpha\beta = -1$ (tabla 1.2),

$$L_n^2 = (\alpha^n + \beta^n)^2 = \alpha^{2n} + \beta^{2n} + 2(\alpha\beta)^n = L_{2n} + 2(-1)^n.$$

Y usando esto en la propiedad 2.16,

$$5F_n^2 = L_n^2 - 4(-1)^n = (L_{2n} + 2(-1)^n) - 4(-1)^n = L_{2n} - 2(-1)^n,$$

es decir, $5F_n^2 + 2(-1)^n = L_{2n}$.

Las otras igualdades deberían ser fáciles de relacionar con ésta primera que hemos demostrado.

No son más que el resultado de aplicar debidamente la propiedad 2.16 a la igualdad que ya tenemos.

- En una, $5F_n^2 + 2(-1)^n = 5F_n^2 + 2(-1)^n + 2(-1)^n - 2(-1)^n = L_n^2 + 2(-1)^{n+1}$.
- En la otra, sabiendo que $2(-1)^n = (L_n^2 - 5F_n^2)/2$.

□

Propiedad 2.19. Los números de Lucas cumplen:

$$L_{m+n} = L_{m+1}F_n + L_mF_{n-1},$$

$$L_{mn} = L_mL_{m(n-1)} + (-1)^{m+1}L_{m(n-2)}.$$

Demostración. Estas expresiones tienen demostraciones tediosas, pero fáciles de demostrar con la forma matricial.

Por ejemplo, para la primera sólo hay que utilizar las relaciones:

$$F_{m+n} = F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n, \quad F_{m+n+2} = F_{m+2}F_{n+1} + F_{m+1}F_n,$$

que salían de utilizar la matriz \mathbf{M}^n .

Sumándolas y por equivalencias entre los números de Lucas y los de Fibonacci,

$$F_{m+n+2} + F_{m+n} = (F_{m+2} + F_m)F_{n+1} + (F_{m+1} + F_{m-1})F_n$$

$$L_{m+n+1} = L_{m+1}F_{n+1} + L_mF_n$$

Sólo es cambiar n por $n - 1$.

(Para mayor información consultar [21, p.364]).

□

Propiedad 2.20. Para m, n enteros positivos, son ciertas las igualdades:

$$2F_{m+n} = F_mL_n + L_mF_n,$$

$$2L_{m+n} = L_mL_n + 5F_mF_n.$$

Demostración. De nuevo, gracias a la forma matricial de los números de Fibonacci, sabemos que se cumplen:

$$F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}, \quad F_{m+n} = F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n.$$

Y como en la demostración de la propiedad anterior, sólo es sumarlas y aplicar equivalencias entre números de Fibonacci y números de Lucas.

$$2F_{m+n} = F_m(F_{n+1} + F_{n-1}) + F_n(F_{m+1} + F_{m-1}) = F_mL_n + F_nL_m.$$

Igualmente, la segunda no sería difícil de demostrar.

□

Por último, otras expresiones que se demuestran usando la propiedad 2.16 y que pueden recibir hasta la categoría de teorema son:

Teorema 2.21. Para $n \geq 0$, se verifica que,

- (i) $F_{n+1} = \frac{F_n + \sqrt{5F_n^2 + 4(-1)^n}}{2},$
- (ii) $L_{n+1} = \frac{L_n + \sqrt{5(L_n^2 - 4(-1)^n)}}{2}.$

Demostración.

- (i) Sabemos que $L_n = 2F_{n+1} - F_n$ por una de las primeras propiedades ya vistas. Ahora, usando como expresión de partida la propiedad 2.16, tenemos

$$\begin{aligned} L_n^2 = 5F_n^2 + 4(-1)^n &\Rightarrow (2F_{n+1} - F_n)^2 = 5F_n^2 + 4(-1)^n, \\ 2F_{n+1} - F_n &= \pm\sqrt{5F_n^2 + 4(-1)^n}, \\ F_{n+1} &= \frac{F_n \pm \sqrt{5F_n^2 + 4(-1)^n}}{2}. \end{aligned}$$

Es más, como $F_n \geq 0$, de hecho tenemos justamente

$$F_{n+1} = \frac{F_n + \sqrt{5F_n^2 + 4(-1)^n}}{2}.$$

- (ii) Se demuestra de forma análoga a (i). Partimos de nuevo de la propiedad 2.16, sólo que esta vez utilizaremos la propiedad $5F_n = 2L_{n+1} - L_n$. Entonces, sabiendo que se verifica la relación $F_n = (2L_{n+1} - L_n)/5$, se cumple que

$$\begin{aligned} L_n^2 = 5F_n^2 + 4(-1)^n &\Rightarrow L_n^2 = 5\frac{(2L_{n+1} - L_n)^2}{5^2} + 4(-1)^n, \\ (2L_{n+1} - L_n)^2 &= 5(L_n^2 - 4(-1)^n). \end{aligned}$$

Despejando de aquí L_{n+1} , y teniendo en cuenta que los números de Lucas $L_n \geq 0$, queda demostrado. □

Finalmente, sólo nos queda por decir que los números de Lucas, al igual que los de Fibonacci, también se pueden escribir en forma combinatoria. Estas son algunas de las propiedades que se dan con números combinatorios.

Propiedad 2.22. Para $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} L_k &= L_{2n}, & \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} L_{2k} &= L_n, \\ \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} L_{2k} &= 5^n L_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (L_k)^2. \end{aligned}$$

2.4. Aplicaciones y ejemplos

La sucesión de números de Lucas también presenta numerosos ejemplos, muchos de ellos similares a aquellos vistos para la sucesión de Fibonacci. De hecho, teniendo en cuenta que la relación de recurrencia sigue siendo la misma, sólo nos detendremos para añadir algún detalle de nueva aportación, no mucho más.

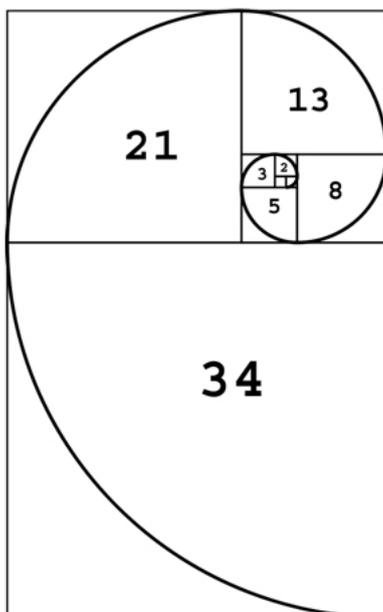


Figura 2.2: Espiral de Lucas

Por ejemplo, seguiremos teniendo casos que aparecen en la naturaleza. No es de extrañar, porque si la relación de recurrencia es la misma, sus raíces, y entre ellas el número de oro, siguen siendo las mismas.

Existe entonces una relación entre la espiral del número de oro y lo que llamamos *la espiral de Lucas*, que no es más que una buena aproximación de esta primera espiral, hecha con cuartos de arco, cuando los términos son grandes.

Es interesante notar que, entonces, también hay conchas con forma de espiral o ciertos tipos de fruto o flor, como algunos girasoles que tienen muchas espirales tanto en sentido horario como en sentido antihorario, que presentan espirales de Lucas adyacentes.

Por supuesto, también la sucesión compañera de Lucas sigue teniendo su utilidad y aplicación en el ámbito de los juegos y las composiciones.

Si recordamos el caso de composición más sencillo que vimos para los números de Fibonacci, el ejemplo 1.39, éste se puede adaptar a los números de Lucas.

Ejemplo 2.23. Vimos que las posibles composiciones (sumas) de un número entero positivo n , donde sólo admitíamos escribir estos sumandos con 1's y 2's, era F_{n+1} , $n \geq 1$.

Pues bien, de estas F_{n+1} composiciones, si nos fijamos en aquellas que empiezan y terminan con 2's son justamente la misma cantidad que si contamos las composiciones que podemos hacer del entero $n - 4$ en sumandos de 1's y 2's, es decir, $F_{n-3} = F_{(n-4)+1}$ composiciones posibles.

En consecuencia, si lo que queremos es saber el número de composiciones de n (en sumandos de 1's y 2's) que NO empiezan y NO terminan con 2, es decir, hallar aquellas composiciones que comienzan y/o acaban por 1, sólo es calcular el siguiente número:

$$F_{n+1} - F_{n-3} = F_{(n-1)+2} - F_{(n-1)-2} = L_{n-1}.$$

Este ejemplo a su vez, nos llevaba a otro caso aún más visual, el ejemplo 1.40, donde una vez más, la naturaleza jugaba su papel presentándonos una situación en la que tenemos un panal de abejas y dónde el espacio por el que se movían las abejas eran casillas hexagonales.

Ejemplo 2.24. Tenemos de nuevo un panal con casillas hexagonales, y en el que recordemos que las abejas tenían dos opciones de desplazamiento: en diagonal (\nearrow / \searrow) o un avance recto (\rightarrow), que equivalían respectivamente a +1 o +2 si lo comparamos con las composiciones del entero n que hemos mencionado en el ejemplo anterior.

En este cuadro, el número de caminos que podía realizar la abeja desde la casilla de salida (S) hasta la casilla número (n) eran F_{n+1} caminos posibles.

Con estas mismas condiciones y en este tipo de ejemplo, podemos encontrarnos números de Fibonacci y de Lucas haciendo los cálculos correspondientes en diferentes situaciones:

- L_{n-1} caminos NO comienzan con el movimiento horizontal (S) \rightarrow (2) y NO terminan con un movimiento ($n - 2$) \rightarrow (n). Queda claro del ejemplo anterior y su equivalencia con no empezar y terminar con +2.

- Para un n par, hay L_{n-1} caminos que NO comienzan con $(S) \searrow (1) \nearrow (2)$ y NO terminan con $(n-2) \searrow (n-1) \nearrow (n)$.
- Para un n impar, existen L_{n-1} caminos que NO empiezan con $(S) \searrow (1) \nearrow (2)$ y NO acaban con $(S) \nearrow (1) \searrow (2)$.
- Para un n par, existen $F_{n+1} - F_{n-1} = F_n$ caminos que NO son iniciados con $(S) \searrow (1)$ y NO finalizan con $(n-1) \nearrow (n)$.
- Para un n impar, hay F_n caminos que NO parten del trayecto $(S) \searrow (1)$ y NO acaban con $(n-1) \searrow (n)$.

Efectivamente, si hay ejemplos relativos a composiciones y juegos de palabras, también los habrá en el campo de teoría de juegos, el ajedrez...

Comencemos primero con un tablero sencillito de ajedrez de sólo dos filas, es decir, como aquel que aparecía en el ejemplo 1.36.

Ejemplo 2.25. En el ejemplo que vimos para Fibonacci teníamos un tablero de dimensiones $2 \times n$, para un $n \geq 1$. Al rellenar dicho tablero con fichas o baldosas de tamaño 1×2 (fichas horizontales) y de 2×1 (verticales), podíamos completarlo de F_{n+1} formas diferentes.

Nos encontramos con más números de Fibonacci y de Lucas cuando queremos contar:

- El número de embaldosados que NO tienen dos piezas horizontales cubriendo los cuatro cuadraditos de las columnas 1 y 2, y NO hay otras dos piezas horizontales rellenando las columnas $n-1$ y n . Este número es $F_{n+1} - F_{n-3} = L_{n-1}$.
- El número de formas de poner las baldosas tal que NO hay dos piezas verticales cubriendo las columnas 1 y 2, y NO hay tampoco otras dos piezas verticales en las columnas $n-1$ y n . Al hacer cuentas, el resultado es también L_{n-1} .
- El número de casos de baldosas dispuestas de tal forma que NO hay una baldosa vertical en la columna 1 NI en la columna n . El resultado es F_n .

Similar a éste, teníamos también el ejemplo 1.37 que iba sobre un tablero de ajedrez, pero esta vez de tamaño $1 \times n$, para un $n \geq 1$ y con fichas o baldosas cuadradas 1×1 y rectangulares 2×1 .

Ejemplo 2.26. Teniendo un tablero de ajedrez y unas fichas para rellenarlo como las descritas en el párrafo anterior, podemos encontrar números de Lucas y de Fibonacci en las siguientes situaciones:

- El número de opciones que tenemos para tapar el tablero con fichas que NO sean una rectangular al comienzo y una rectangular al final es L_{n-1} .
- El número de tableros embaldosados que NO empiezan y acaban con dos baldosas cuadradas al inicio del tablero y otras dos al término de éste, es también L_{n-1} .
- Las opciones de tapar el tablero que NO incluyen usar una ficha cuadrada al principio y otra cuadrada en la última posición, es el número F_n .

Aunque todos estos ejemplos son algo más cotidianos, no olvidemos la relevancia de las sucesiones en el ámbito de la ciencia en general.

La sucesión de números de Lucas, como muchas otras sucesiones, se puede utilizar en el mundo de la informática y en muchas otras ramas científicas, como son la física, la probabilidad y, por supuesto, las matemáticas.

En concreto, seguimos teniendo ejemplos en teoría de grafos.

Ejemplo 2.27. Los números de Lucas intervienen cuando trabajamos con *diagramas de Hasse* y *vallas*.

Un *diagrama de Hasse* es un concepto que se utiliza cuando tenemos un grafo dirigido o digrafo bastante complejo, como el de la figura a), y para una cierta relación de orden parcial (finito)³. Este tipo de diagrama, lo que va a hacer es simplificar:

- Si hay un bucle, como sabemos que una relación de orden parcial tiene propiedad reflexiva, no nos molestamos en representar los bucles, se dan por supuestos.
- Cuando tenemos un camino dirigido, por ejemplo, de x a y , en un diagrama de Hasse donde se da la propiedad transitiva para un orden parcial, a veces ya se sabe que existe el camino xy en nuestro digrafo, por transitividad, así que omitimos caminos innecesarios.
- Omitiendo las flechitas de los caminos dirigidos. Por convenio los caminos están todos dirigidos hacia arriba en este tipo de diagramas.

Como resultado se obtienen diagramas de Hasse como el de la figura b).

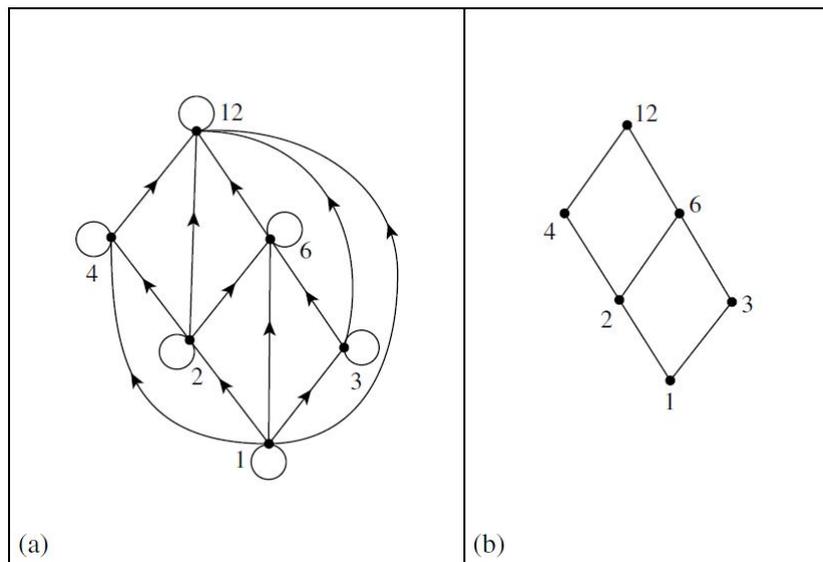


Figura 2.3: Grafos - diagrama de Hasse

Cuando utilizamos diagramas de Hasse para órdenes parciales como los que aparecen en la figura de la siguiente página, decimos que estos órdenes parciales son ejemplos de *vallas* o *zigzags*.

³Entendemos por **orden parcial** (sobre un conjunto A) una relación \mathcal{R} que cumple las siguientes propiedades:

1. *Reflexiva*: $a\mathcal{R}a, \forall a \in A$.
2. *Antisimétrica*: $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}a \Rightarrow a = b, \forall a, b \in A$.
3. *Transitiva*: $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c, \forall a, b, c \in A$.

Cuando tenemos un conjunto A con la relación de orden parcial \mathcal{R} hablamos de un **conjunto parcialmente ordenado** (A, \mathcal{R}) .

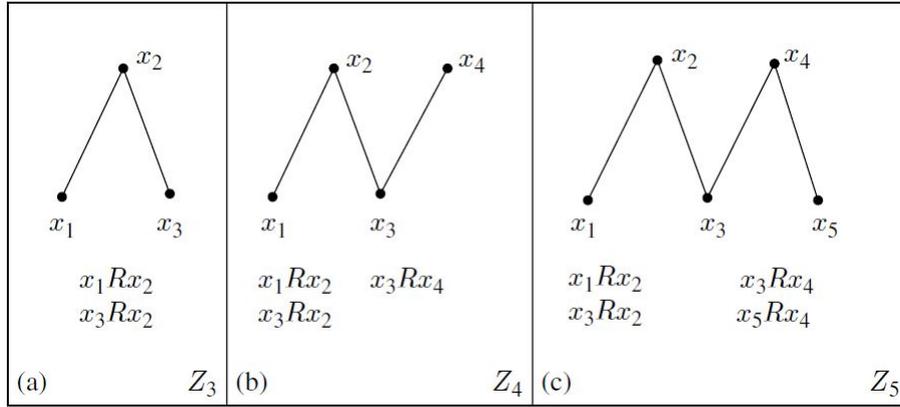


Figura 2.4: Grafos - vallas o zigzags

Estos zigzags los denotamos por (Z_n, \mathcal{R}) , donde n es el número de vértices en el diagrama de Hasse y donde \mathcal{R} es la relación que viene determinada como sigue:

Si $x_k, x_{k+1} \in Z_n$, entonces

- 1) $x_k \mathcal{R} x_{k+1}$, cuando k es impar.
- 2) $x_{k+1} \mathcal{R} x_k$, cuando k es par.

Pues bien, cuando contamos el número de órdenes ideales en nuestros (Z_n, \mathcal{R}) nos aparecen números de Fibonacci y tenemos

$$o_1 = 2, o_2 = 3$$

$$o_n = o_{n-1} + o_{n-2}, \quad n \geq 3$$

y donde $o_n = F_{n+2}$, $n \geq 1$.

(Veáse [14, p.105] si queremos ver cómo se llega a este resultado.)

Definición 2.28. (Nota)

Si tenemos (A, \mathcal{R}) orden parcial y un subconjunto I de A .

$I \subseteq A$ es relación de *orden ideal* o *semiorden* de (A, \mathcal{R}) , si para todo $x, y \in A$ cuando $x \in I$ y $y \mathcal{R} x$, entonces esto implica que $y \in I$.

Existen también otros tipos de órdenes parciales llamados *vallas cerradas* o *corrales*.

La diferencia entre éstos y una valla zigzag de n vértices es que además para $n \geq 4$ se da además la relación $x_1 \mathcal{R} x_n$.

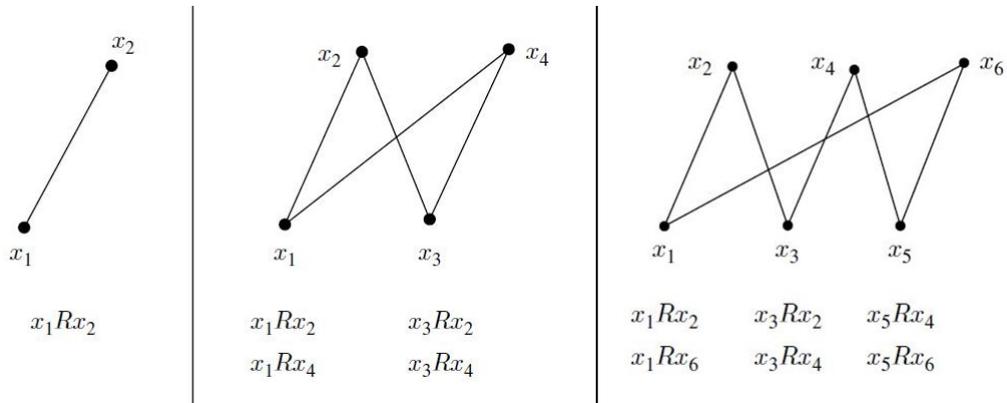


Figura 2.5: Grafos - vallas cerradas o corrales

En estos corrales, como los de la imagen anterior, se llega al resultado siguiente en el que esta vez se usan números de Lucas. Un corral con n vértices, donde n es par,

$$F_{n-1} + F_{n+1} = L_n, \quad n \geq 2$$

tiene L_n órdenes ideales.
(Veáse [14, p.107].)

Tras todos estos ejemplos y propiedades con números de Fibonacci y de Lucas tan estrechamente relacionados, lo siguiente que nos preguntamos es si con tanta similitud entre ambas sucesiones y si realmente tienen una misma relación de recurrencia, no podemos llevar todo esto a un caso más general que aune las sucesiones que son de este tipo.

Aquí es donde entran en juego lo que vamos a llamar *las sucesiones (generales) de Lucas*, entre paréntesis *generales* porque no queremos confundirlas con la sucesión de los números de Lucas que acabamos de tratar, sino que son aquellas sucesiones con una determinada relación de recurrencia más genérica. Tanto los números de Fibonacci, como los números de Lucas no serán más que ejemplos y casos particulares de sucesiones de Lucas. Aclaremos esto.

Capítulo 3

Sucesiones (generales) de Lucas

Las sucesiones de Lucas son un caso claro de sucesiones enteras recursivas y existen múltiples ejemplos conocidos. Entre ellos, son sucesiones de Lucas: los números de Fibonacci y los números de Lucas, que ya hemos visto, y otros como los números de Pell, los números de Mersenne, los números de Jacobsthal o el superconjunto de números de Fermat. Hablaremos de algunas de estas sucesiones concretas de Lucas en este capítulo.

Antes, veremos propiedades y cómo vienen definidas las sucesiones de Lucas del primer tipo $(U_n(P, Q))_{n \geq 0}$ y las del segundo tipo $(V_n(P, Q))_{n \geq 0}$, con P y Q constantes enteras no nulas. A partir de ahí, seremos capaces de distinguir bien que la sucesión de Fibonacci pertenece al primer grupo y no confundiremos estas sucesiones generales de Lucas con la sucesión de números de Lucas, que es una sucesión específica del segundo grupo. De hecho, la llamábamos sucesión *compañera* de Lucas para distinguirla y porque a todas las sucesiones del segundo tipo $(V_n(P, Q))_{n \geq 0}$ se las conoce con este calificativo, como vamos a ver a continuación.

3.1. Definiciones recursivas

Las sucesiones (generales) de Lucas, nombradas así por ser otra de las aportaciones de François Édouard Anatole Lucas al mundo de la sucesiones, vienen definidas a partir de dos constantes enteras no nulas P, Q .

En estas sucesiones, como en todas las que hemos visto hasta ahora, vamos a ser capaces de determinar los próximos términos si conocemos los anteriores a éstos, luego, haciendo uso de esta propiedad podemos definir las sucesiones de forma recursiva, eso sí, una definición que depende de las constantes mencionadas P y Q y del concepto llamado *discriminante*. Veámoslo.

Definición 3.1. Sucesiones recursivas de Lucas

Para todo $n \geq 0$ y sean $U_n = U_n(P, Q)$ y $V_n = V_n(P, Q)$ los n -ésimos términos, se definen por las relaciones de recurrencia:

I) Primera sucesión de Lucas / Sucesión de Lucas de primera clase.

$$1. U_0 = 0, \quad U_1 = 1 \quad (\text{Condiciones iniciales})$$

$$2. U_n = P \cdot U_{n-1} - Q \cdot U_{n-2}, \quad \forall n \geq 2 \quad (\text{Relación de recurrencia})$$

Con $U = (U_n(P, Q))_{n \geq 0}$ la sucesión de primera clase de Lucas con parámetros (P, Q) .

II) Segunda sucesión de Lucas / de segunda clase / Sucesión compañera de Lucas.

1. $V_0 = 2, \quad V_1 = P$ (Condiciones iniciales)
2. $V_n = P \cdot V_{n-1} - Q \cdot V_{n-2}, \quad \forall n \geq 2$ (Relación de recurrencia)

Con $V = (V_n(P, Q))_{n \geq 0}$ la sucesión de segunda clase de Lucas con parámetros (P, Q) .

Cualquier sucesión que satisfaga la relación de recurrencia que aparece en esta definición, se puede representar como una combinación lineal de las sucesiones de Lucas $(U_n(P, Q))_{n \geq 0}$ y $(V_n(P, Q))_{n \geq 0}$.

De manera más general, las sucesiones de Lucas U y V representan sucesiones de polinomios en P y Q con coeficientes enteros. Y si estos polinomios toman ciertos valores, entonces es cuando pasan a ser sucesiones de números enteros.

De hecho, teniendo en cuenta las definiciones que acabamos de dar, podemos observar los términos iniciales de las sucesiones U y V que reunimos en la siguiente tabla:

n	$U_n(P, Q)$	$V_n(P, Q)$
0	0	2
1	1	P
2	P	$P^2 - 2Q$
3	$P^2 - Q$	$P^3 - 3PQ$
4	$P^3 - 2PQ$	$P^4 - 4P^2Q + 2Q^2$
5	$P^4 - 3P^2Q + Q^2$	$P^5 - 5P^3Q + 5PQ^2$
6	$P^5 - 4P^3Q + 3PQ^2$	$P^6 - 6P^4Q + 9P^2Q^2 - 2Q^3$

Tabla 3.1: Términos iniciales de las sucesiones de Lucas

Términos que dependen de P y Q , unas constantes sobre las que aún podemos especificar más.

Si nos fijamos en el polinomio característico, que extraemos de la relación de recurrencia que tienen todas las sucesiones de Lucas (las de primera y segunda clase), obtenemos que la ecuación

$$x^2 - P \cdot x + Q = 0$$

tiene raíces características

$$x = \frac{-(-P) \pm \sqrt{(-P)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (Q)}}{2 \cdot 1} = \frac{P \pm \sqrt{P^2 - 4Q}}{2}$$

donde P y Q , como ya sabemos, son números enteros fijos, y el radicando $P^2 - 4Q = D$ es lo que conocemos como *discriminante*.

Entonces, en este contexto, las dos raíces obtenidas α y β , nos dicen también que las constantes son exactamente $P = \alpha + \beta$ y $Q = \alpha \cdot \beta$ con $\alpha \neq \beta$. Además, el discriminante $D = (\alpha - \beta)^2$.

En la siguiente sección, mientras recordamos algunos conceptos y estudiamos las formas de Binet para estas sucesiones, encontraremos también una explicación más precisa de cómo llegamos a estas conclusiones anteriores.

3.2. Formas de Binet

Estamos buscando expresiones explícitas de las sucesiones de Lucas, por eso, como hemos hecho en otras ocasiones, estudiamos primero la ecuación característica.

Esta ecuación característica, se consigue simplemente sustituyendo por Ax^n en la relación de recurrencia genérica $x_n = P \cdot x_{n-1} - Q \cdot x_{n-2}$ que aparecía en la definición 3.1. Obtenemos,

$$Ax^n = P \cdot Ax^{n-1} - Q \cdot Ax^{n-2}.$$

Una vez hecho esto, al simplificar la expresión $Ax^{n-2}(x^2 - P \cdot x + Q) = 0$, conseguimos finalmente la ecuación mencionada

$$x^2 - P \cdot x + Q = 0,$$

que hemos resuelto como cualquier ecuación de segundo grado, obteniendo las raíces:

$$\alpha = \frac{P + \sqrt{P^2 - 4Q}}{2} = \frac{P + \sqrt{D}}{2} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{P - \sqrt{P^2 - 4Q}}{2} = \frac{P - \sqrt{D}}{2}$$

donde D es el discriminante $D = P^2 - 4Q$.

Simplemente operando, es como nos percatamos de que

- $\alpha + \beta = \frac{P + \sqrt{D}}{2} + \frac{P - \sqrt{D}}{2} = \frac{2P}{2} = P.$
- $\alpha\beta = \frac{P^2 - D}{4} = Q$, puesto que $D = P^2 - 4Q$.
- $\alpha - \beta = \frac{P + \sqrt{D} - P + \sqrt{D}}{2} = \sqrt{D} \Rightarrow D = (\alpha - \beta)^2.$

Tenemos en cuenta, que la sucesión (α^n) y la sucesión (β^n) satisfacen la relación de recurrencia. Sin embargo, es posible que éstas no sean sucesiones enteras.

Por linealidad, sabemos que las sucesiones de la forma

$$x_n = p\alpha^n + q\beta^n, \quad p, q \in \mathbb{R}, n \geq 0$$

cumpren la relación de recurrencia $x_n = P \cdot x_{n-1} - Q \cdot x_{n-2}$.

En función de si estamos hablando de sucesiones de Lucas de primera clase o de segunda clase, calculamos estas constantes arbitrarias p y q , que no hay que confundirlas con (P, Q) , los parámetros de los que dependen nuestras sucesiones (generales) de Lucas.

- Para $n = 0$:

$$0 = U_0 = p \cdot 1 + q \cdot 1$$

$$2 = V_0 = p \cdot 1 + q \cdot 1$$

- Para $n = 1$:

$$1 = U_1 = p \cdot \alpha + q \cdot \beta = p \left(\frac{P + \sqrt{D}}{2} \right) + q \left(\frac{P - \sqrt{D}}{2} \right)$$

$$P = V_1 = p \cdot \alpha + q \cdot \beta = p \left(\frac{P + \sqrt{D}}{2} \right) + q \left(\frac{P - \sqrt{D}}{2} \right)$$

Hemos hallado los sistemas,

$$(1) \begin{cases} p + q = 0 \\ p \left(\frac{P + \sqrt{D}}{2} \right) + q \left(\frac{P - \sqrt{D}}{2} \right) = 1 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} p + q = 2 \\ p \left(\frac{P + \sqrt{D}}{2} \right) + q \left(\frac{P - \sqrt{D}}{2} \right) = P \end{cases}$$

En el sistema (1), al resolver $q = \frac{-1}{\sqrt{D}}$ y $p = -q = \frac{1}{\sqrt{D}}$. Podemos expresar entonces U_n de forma explícita como

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{D}}\alpha^n + \frac{-1}{\sqrt{D}}\beta^n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{D}}, \quad n \geq 0$$

Además, recientemente acabamos de justificar que $\alpha - \beta = \sqrt{D}$. Luego,

$$\boxed{U_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \quad n \geq 0} \quad (3.1)$$

Esta es la **forma de Binet** para las sucesiones de Lucas de **primera clase**.

Resolviendo el sistema (2), en esta ocasión p y q son los valores:

$$q = 1, \quad p = 2 - q = 1.$$

Por lo tanto,

$$\boxed{V_n = \alpha^n + \beta^n, \quad n \geq 0} \quad (3.2)$$

Es la **forma de Binet** para las sucesiones de Lucas de **segunda clase**.

Hemos procedido paso por paso, quedando bien demostradas estas fórmulas que, si nos fijamos, son coherentes con aquellas calculadas con anterioridad.

La sucesión de Fibonacci es una primera sucesión de Lucas. Efectivamente, tiene términos iniciales 0 y 1, con parámetros $P = 1$ y $Q = -1$, su relación de recurrencia es

$$\begin{aligned} U_n(1, -1) &= 1 \cdot U_{n-1} - (-1) \cdot U_{n-2} \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \end{aligned}$$

Su discriminante es entonces $D = P^2 - 4Q = 1^2 - 4(-1) = 5$.

Y su forma de Binet concuerda con la ya obtenida en el capítulo 1 (1.1), puesto que es

$$U_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \quad n \geq 0.$$

La sucesión compañera de números de Lucas es una segunda sucesión de Lucas, con los mismos parámetros $(P, Q) = (1, -1)$ que la sucesión de Fibonacci. Sus términos iniciales cumplen que son 2 y $P = 1$. La relación de recurrencia es la misma que la de Fibonacci, ya que tienen los mismos parámetros, es decir,

$$\begin{aligned} V_n(1, -1) &= 1 \cdot V_{n-1} - (-1) \cdot V_{n-2} \\ L_n &= L_{n-1} + L_{n-2} \end{aligned}$$

Su forma de Binet, como acabamos de demostrar, es exactamente la que apareció por primera vez en el capítulo 2 (2.1).

$$V_n = \alpha^n + \beta^n, \quad n \geq 0.$$

En estos ejemplos, vemos que el parámetro Q sí que puede tomar valores negativos, pero sin embargo, para P , se supone que $P \geq 1$ debido al siguiente resultado.

Proposición 3.2. Para $n \geq 1$ y sean U_n, V_n los n -ésimos términos de las sucesiones de Lucas de primera y segunda clase respectivamente. Se cumple la siguiente equivalencia entre los términos con parámetro negativo $-P$ y los términos con parámetro P ,

$$U_n(-P, Q) = (-1)^{n-1}U_n(P, Q)$$

$$V_n(-P, Q) = (-1)^nV_n(P, Q)$$

Demostración. Por las fórmulas de Binet:

$$\begin{aligned} V_n(-P, Q) &= \alpha^n + \beta^n = \left(\frac{-P + \sqrt{D}}{2}\right)^n + \left(\frac{-P - \sqrt{D}}{2}\right)^n = \\ &= \left(\frac{(-1)(P - \sqrt{D})}{2}\right)^n + \left(\frac{(-1)(P + \sqrt{D})}{2}\right)^n = \\ &= (-1)^n \left[\left(\frac{P - \sqrt{D}}{2}\right)^n + \left(\frac{P + \sqrt{D}}{2}\right)^n \right] = \\ &= (-1)^n(\beta^n + \alpha^n) = (-1)^nV_n(P, Q). \end{aligned}$$

Lo hemos demostrado para V_n porque es un poco más sencillo ver la equivalencia. En cualquier caso, se demuestra de forma análoga para U_n . \square

También estamos suponiendo que $D \neq 0$ y que α y β son raíces distintas. Sin embargo, se puede dar el caso en el que no lo sean.

Cuando $D = 0$, tenemos en realidad una raíz repetida, de modo que $\alpha = \beta = \frac{P}{2} = S$. Lo denominamos S , para obtener expresiones más sencillas que dependen sólo de este parámetro. Resumiendo, este caso ocurre exactamente cuando $P = 2S$ ($P/2 = S$) y $Q = S^2$ ($P^2 = 4Q$) para algún número entero S . Además, se verifica rápidamente por las formas de Binet que

$$U_n(P, Q) = U_n(2S, S^2) = nS^{n-1} \quad (\text{derivada de } S^n, \text{ indeterminación en } \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta})$$

$$V_n(P, Q) = V_n(2S, S^2) = 2S^n \quad (= \alpha^n + \beta^n = S^n + S^n)$$

Por último, y para finalizar con esta sección, remarcamos que las raíces están jugando un papel fundamental cuando hablamos de expresiones explícitas y formas de Binet para las sucesiones de Lucas. Por ello, en algunos textos cuando se habla de las formas de Binet (3.1) y (3.2), también nos encontramos fórmulas como las siguientes en las que aparecen, en vez de U_n y V_n en función de las raíces, al revés.

$$\alpha^n = \frac{V_n + U_n\sqrt{D}}{2}, \quad \beta^n = \frac{V_n - U_n\sqrt{D}}{2}.$$

3.3. Propiedades de las sucesiones de Lucas

Vistas las formas de Binet para las sucesiones de Lucas y cómo interviene en ellas el discriminante, podemos comenzar por averiguar qué relación o propiedad es la que hay entre sucesiones que tienen el mismo discriminante.

Propiedad 3.3. Sucesiones con el mismo discriminante

Si las sucesiones de Lucas U y V tienen discriminante $D = P^2 - 4Q$, las sucesiones con parámetros (P_2, Q_2) , donde

$$P_2 = P + 2 \quad \text{y} \quad Q_2 = P + Q + 1,$$

tienen el mismo discriminante.

Demostración. El discriminante de estas sucesiones de parámetros (P_2, Q_2) es

$$P_2^2 - 4Q_2 = (P + 2)^2 - 4(P + Q + 1) = P^2 - 4Q = D.$$

El mismo discriminante D que el de las sucesiones de Lucas con parámetros (P, Q) . □

Continuemos con relaciones que en realidad son generalizaciones de aquellas que vimos para los números de Fibonacci y los números de Lucas. Con esto, tenemos ya muchos resultados conseguidos y que no nos molestaremos en probar de nuevo, ya que las demostraciones van a ser del estilo.

Recordamos con claridad, por ejemplo, la identidad de Cassini $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$, por ser una de las propiedades que más utilizamos en el capítulo de las sucesiones de Fibonacci, pues bien, en general, hay una identidad como ésta para todas las primeras sucesiones de Lucas.

Propiedad 3.4. Para $n \geq 1$, se verifica que,

$$U_n^2 - U_{n+1}U_{n-1} = Q^{n-1}.$$

Nota: Similitud clara si cambiamos de signo a $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ y la escribimos como $F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n-1}$.

Teníamos también del estilo una expresión que relacionaba los números de Lucas con los de Fibonacci, la propiedad 2.16, que nos decía que $L_n^2 = 5F_n^2 + 4(-1)^n$. De igual manera, hay una generalización que nos dice lo siguiente.

Propiedad 3.5. Para $n \geq 0$, las sucesiones de Lucas cumplen que:

$$V_n^2 = DU_n^2 + 4Q^n.$$

Había asimismo, más de una expresión que relacionaba el n -ésimo número de Fibonacci con los números de Lucas. En general, para las sucesiones de Lucas, también podemos escribir el n -ésimo término de la sucesión de Lucas de primera clase con términos de su sucesión compañera (o sucesión de Lucas de segunda clase). Es decir,

Propiedad 3.6. El término n -ésimo U_n de la primera sucesión de Lucas, cumple la siguiente relación con los términos de la segunda sucesión de Lucas:

$$U_n = \frac{V_{n+1} - QV_{n-1}}{D}.$$

También son ciertas estas igualdades:

$$DU_n = V_{n+1} - QV_{n-1} = PV_n - 2QV_{n-1} = 2V_{n+1} - PV_n = (V_{n+2} - Q^2V_{n-2})/P.$$

Si por el contrario, lo que queremos es escribir los términos de la segunda sucesión de Lucas en función de los términos de la primera sucesión de Lucas, tenemos a continuación una propiedad y algunas equivalentes que se pueden comparar con aquellas propiedades que nos escribían los números de Lucas respecto a los números de Fibonacci.

Propiedad 3.7. El término n -ésimo V_n de la segunda sucesión de Lucas, mantiene la siguiente relación con los términos de la sucesión de Lucas de primera clase:

$$V_n = U_{n+1} - QU_{n-1}.$$

Equivalentemente, tenemos:

$$V_n = U_{n+1} - QU_{n-1} = PU_n - 2QU_{n-1} = 2U_{n+1} - PU_n = (U_{n+2} - Q^2U_{n-2})/P.$$

Tras ver estas relaciones de conversión entre los términos de ambas sucesiones (sucesiones de primera clase y de segunda clase), vamos a poder obtener más expresiones. En concreto, a partir de la relaciones de recurrencia de la definición 3.1, surgen las fórmulas de esta propiedad.

Propiedad 3.8. Para $n > 0$, se cumple,

$$U_n(P, Q) = \frac{P \cdot U_{n-1}(P, Q) + V_{n-1}(P, Q)}{2},$$

$$V_n(P, Q) = \frac{(P^2 - 4Q) \cdot U_{n-1}(P, Q) + P \cdot V_{n-1}(P, Q)}{2}.$$

Teníamos más relaciones no lineales, como las que describían los términos F_{m+n} y L_{m+n} . Para las sucesiones generales de Lucas, podemos encontrar análogamente estos resultados.

Propiedad 3.9. Para $m, n \in \mathbb{Z}^+$, son ciertas las igualdades:

$$2U_{m+n} = U_m V_n + V_m U_n,$$

$$2V_{m+n} = V_m V_n + DU_m U_n.$$

No son las únicas, por supuesto, sabemos que podemos obtener más. Sin ir más lejos, con las matrices, obtuvimos expresiones sencillas, como $F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$ que tiene su equivalente,

$$U_{m+n} = U_m U_{n+1} - QU_{m-1} U_n.$$

Hemos puesto la condición m, n enteros positivos, como hemos hecho siempre hasta ahora, aunque en realidad los resultados se puede extender a $m, n \in \mathbb{Z}$. Existen fórmulas que contemplan los casos con índices negativos.

Propiedad 3.10. Sea $n \geq 1$, son ciertas las igualdades:

$$U_{-n} = -\frac{1}{Q^n} U_n, \quad V_{-n} = \frac{1}{Q^n} V_n$$

Para los $2n$ -ésimos términos obtenemos también propiedades generales para todas las sucesiones de Lucas.

Propiedad 3.11. Para $n \geq 0$, se cumple:

$$U_{2n} = U_n V_n,$$

$$V_{2n} = V_n^2 - 2Q^n.$$

Es más, en [34, pag.9] nos dan incluso expresiones para los términos $3n$ -ésimos, dejando claro que además para un $k \geq 3$ es posible encontrar por inducción las fórmulas para U_{kn} y V_{kn} .

De nuevo, estamos con propiedades que, o bien se demuestran por inducción, por formas de Binet o porque son elementales si operamos con matrices.

Veamos qué matrices se pueden usar, en general, cuando trabajamos con sucesiones de Lucas.

3.3.1. Expresiones matriciales generales

Tanto en la forma matricial para los números de Fibonacci, como en la de los números de Lucas, intervenía la matriz \mathbf{M} . Esta matriz, en realidad, es un caso particular de la matriz \mathbf{G} definida:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} P & -Q \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{y en particular } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ con } (P, Q) = (1, -1).$$

Sea \mathbf{G} la matriz de partida, podemos expresar matricialmente los distintos términos U_n y V_n de la primera y segunda sucesión de Lucas como sigue:

I) Por un lado, para $n \geq 1$, tenemos que

$$\begin{bmatrix} U_n \\ U_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & -Q \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{G}^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esta es la **forma matricial** para las sucesiones de Lucas de **primera clase**.

Ejemplo 3.12. Para el caso particular de los números de Fibonacci, recordemos que la matriz era:

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{M}^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$$

Esto es lo mismo que,
$$\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{n-1} \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si queremos expresar esto de una forma un poco más compacta, y no poner tantos números de Fibonacci, podemos simplificar,

$$\begin{bmatrix} \cancel{F_{n+1}} & F_n \\ \cancel{F_n} & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} \cancel{1} & 1 \\ \cancel{1} & 0 \end{bmatrix}$$

Quedándonos sólo con una expresión que es equivalente a la dada de forma general para las sucesiones de Lucas de primera clase, sólo que en este caso con valores $(P, Q) = (1, -1)$ y donde los términos $U_n = F_n$ son los números de Fibonacci.

$$\begin{bmatrix} U_n \\ U_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -(-1) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

II) Por otro lado, para $n \geq 1$, se obtiene que

$$\begin{bmatrix} V_n \\ V_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & -Q \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} P \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{G}^{n-1} \begin{bmatrix} P \\ 2 \end{bmatrix}$$

Esta es la **forma matricial** para las sucesiones de Lucas de **segunda clase**.

Ejemplo 3.13. En el caso particular de los números de Lucas, teníamos

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{M}^n = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$$

Son matrices simétricas, y podemos operar de la siguiente forma:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{M}^n \right)^T = (\mathbf{M}^n)^T \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \right)^T = \mathbf{M}^n \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, nos da lo mismo trabajar con

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Esto es lo mismo que, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Si queremos expresar esta forma matricial de manera más compacta, y no poner tantos números de Lucas, podemos simplificar,

$$\begin{bmatrix} \cancel{L_{n+1}} & L_n \\ \cancel{L_n} & L_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Llegando a una expresión que es equivalente a la dada de forma general para las sucesiones de Lucas de segunda clase, sólo que en este caso tenemos los valores $(P, Q) = (1, -1)$ y donde los términos $V_n = L_n$ son los números de Lucas.

$$\begin{bmatrix} V_n \\ V_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -(-1) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3.3.2. Criterios de divisibilidad y números primos

Cuando hablábamos de las expresiones para los U_{km} y V_{km} , una de las consecuencias que encontramos es que $U_{km}(P, Q)$ es un múltiplo de $U_m(P, Q)$. Implicando, en particular, que $U_n(P, Q)$ puede ser primo sólo cuando n es primo.

Centrémonos, entonces, en los criterios de divisibilidad que tenemos para las sucesiones de Lucas. Nuestra fuente principal para todo lo comentado en esta subsección es [34, pags.9-12], donde se puede encontrar todo más detallado y con ciertos casos particulares.

Comenzamos por este primer lema.

Lema 3.14. Sean $m, n \geq 1$ enteros positivos y $U_m \neq 1$, entonces $U_m | U_n$ si y sólo si $m | n$.

En algunas fuentes, como en [36], las sucesiones que cumplen una propiedad como ésta son denominadas *sucesiones de divisibilidad o divisibles*.

Equivalentemente, para las sucesiones de Lucas de segunda clase.

Lema 3.15. Sea $m, n \geq 1$ enteros positivos y $V_m \neq 1$, se cumple que, $V_m | V_n$ si y sólo si $m | n$ y $\frac{n}{m}$ es impar.

Recordemos que en lemas como estos, se apoyaban la propiedades del MCD que vimos tanto para Fibonacci como para Lucas. En este ambiente más general, también hay propiedades del estilo.

Teorema 3.16. Propiedad del MCD para primeras sucesiones de Lucas

Suponiendo que $MCD(P, Q) = 1$ y sean $m, n \geq 1$, entonces

$$MCD(U_m, U_n) = U_{MCD(m, n)}.$$

Teorema 3.17. Propiedad del MCD para segundas sucesiones de Lucas

Suponiendo que $MCD(P, Q) = 1$, tenemos que

$$MCD(V_m, V_n) = \begin{cases} V_{MCD(m, n)} & \text{si } \frac{m}{MCD(m, n)} \text{ y } \frac{n}{MCD(m, n)} \text{ impares,} \\ 1 \text{ ó } 2 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es más, en [34] tenemos hasta una propiedad que habla del máximo común divisor de ambos, para un U_m y un V_n .

Teorema 3.18.

Suponiendo que $MCD(P, Q) = 1$, sabemos que

$$MCD(U_m, V_n) = \begin{cases} V_{MCD(m,n)} & \text{si } \frac{m}{MCD(m,n)} \text{ es par, } \frac{n}{MCD(m,n)} \text{ es par,} \\ 1 \text{ ó } 2 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En concreto, hay también resultados sobre los *divisores primos* que tienen las sucesiones de Lucas.

Definición 3.19. Sea \mathcal{P} el conjunto de todos los números primos y dadas las sucesiones de Lucas $U = (U_n(P, Q))_{n \geq 0}$, $V = (V_n(P, Q))_{n \geq 0}$, definimos los siguientes conjuntos de divisores primos:

$$\mathcal{P}(U) = \{p \in \mathcal{P} \mid \exists n \geq 1 \text{ con } U_n \neq 0 \text{ y } p \mid U_n\},$$

$$\mathcal{P}(V) = \{p \in \mathcal{P} \mid \exists n \geq 1 \text{ con } V_n \neq 0 \text{ y } p \mid V_n\}.$$

A continuación, exponemos algunas de las afirmaciones que nos llevan a determinar que $\mathcal{P}(U)$ es un conjunto infinito y que además,

$$\mathcal{P}(U) = \{p \in \mathcal{P} \mid p \nmid Q\}.$$

Propiedad 3.20. Sea p un número primo impar,

- Si $p \mid P$ y $p \mid Q$, entonces $p \mid U_n$ para cada $n > 1$.
- Si $p \mid P$ y $p \nmid Q$, entonces $p \mid U_n$ si y sólo si n es par.
- Si $p \nmid P$ y $p \mid Q$, entonces $p \nmid U_n$ para todo $n \geq 1$.
- Si $p \nmid PQ$ y $p \mid D$, entonces $p \mid U_n$ si y sólo si $p \mid n$.

Estamos dando por supuesto, sin pérdida de generalidad, que $P \geq 1$, $MCD(P, Q) = 1$ y $P^2 \neq Q, 2Q, 3Q, 4Q$.

Al igual que en capítulos anteriores, vemos que la *paridad* (si un número es par o impar) es determinante para algunos de nuestros criterios de divisibilidad. Por ello en muchas fuentes, y en concreto en [34, p.11 3.1], se estudia a veces primero la paridad de los U_n, V_n en función de si P y Q son pares o impares.

En la propiedad 3.20 nos hemos centrado más en criterios de divisibilidad para los U_n , sin embargo, también se obtienen resultados que involucran más a los términos de las sucesiones de segunda clase, como la congruencia

$$V_p \equiv P \pmod{p},$$

para un p primo impar.

Otro concepto que aparece en las sucesiones de Lucas, son los llamados factores primitivos.

Definición 3.21. Un *factor primitivo* es un factor primo de un término en una sucesión de Lucas que no divide a ningún término anterior de la sucesión.

Se pueden encontrar varias aserciones sobre factores primitivos en [34, cap. 3B].

En conclusión, existe un cierto interés en estudiar los números *primos* de las sucesiones de Lucas. Las preguntas más frecuentes que se hace uno son

- a) ¿Existe algún $n > 1$ tal que $U_n(P, Q)$ (respectivamente $V_n(P, Q)$) es un primo?
- b) ¿Existen muchos e infinitos $n > 1$ tales que $U_n(P, Q)$ (respectivamente $V_n(P, Q)$) es un primo?

Se han hecho estudios sobre este tema y un resultado que responde bastante a estos interrogantes es el siguiente.

Proposición 3.22. Sea $D > 0$,

- Si $U_n(P, Q)$ es un primo, entonces $n = 2, 4$ o n es un primo impar.

- Si $V_n(P, Q)$ es un primo, entonces n es una potencia de 2 o un primo.

Este resultado no es válido para $D < 0$.

En [34, p.27-28] hacen un estudio más completo, estudiando los casos especiales, como lo son los números de Fibonacci, los números de Lucas, los números primos de Mersenne y los números primos de Fermat.

Veremos precisamente en la siguiente sección nuevas sucesiones de Lucas específicas como éstas y sabremos mejor de qué estamos hablando.

Hasta aquí los criterios de divisibilidad.

Pocas propiedades más nos quedan por añadir antes de pasar a lo siguiente. Mencionemos que hay unas ecuaciones que reciben el mismo nombre que una de las sucesiones específicas de Lucas.

Definición 3.23. Una **ecuación de Pell** es una ecuación diofántica (con coeficientes enteros y soluciones enteras o naturales) de la forma

$$x^2 - ny^2 = c, \quad n, c \in \mathbb{Z}.$$

Normalmente $c = 1$.

Pues bien, existen algunas ecuaciones particulares de Pell que cumplen todas las sucesiones de Lucas. No son sólo satisfechas por las sucesiones de Pell, como se podría pensar por el nombre.

Ecuaciones de Pell

Cuando $Q = \pm 1$, las sucesiones de Lucas $U_n(P, Q)$ y $V_n(P, Q)$ satisfacen ciertas ecuaciones de Pell,

$$V_n(P, 1)^2 - D \cdot U_n(P, 1)^2 = 4,$$

$$V_{2n}(P, -1)^2 - D \cdot U_{2n}(P, -1)^2 = 4,$$

$$V_{2n+1}(P, -1)^2 - D \cdot U_{2n+1}(P, -1)^2 = -4.$$

Finalmente, aclarar que todavía se pueden encontrar en diversas fuentes más fórmulas y propiedades que las que aquí hemos expuesto (consultar [20]). Algunas de ellas son generalizaciones de las que aparecían en los capítulos 1 y 2, expresiones para los U_n y V_n que son múltiples: con sumatorios, series, números combinatorios, etc. Dejamos aquí, como ejemplo y por ser de las más utilizadas, las funciones generadoras.

Propiedad 3.24. Cuando tenemos sucesiones de Lucas, las funciones generadoras son:

$$\sum_{k \geq 0} U_n(P, Q)X^n = \frac{X}{1 - PX + QX^2},$$

$$\sum_{k \geq 0} V_n(P, Q)X^n = \frac{2 - PX}{1 - PX + QX^2}.$$

Funciones generadoras que nos aparecen en ocasiones, por ejemplo, para llevar a cabo demostraciones más sencillas. Como la prueba alternativa que se da en [24] para la *identidad de Sury*:

$$\sum_{n=0}^n 2^i L_i = 2^{n+1} F_{n+1},$$

que se demuestra con las funciones generadoras particulares de Lucas y Fibonacci (con $P = 1$ y $Q = -1$).

3.4. Sucesiones específicas

A parte de las sucesión de Fibonacci y la sucesión compañera de Lucas, hay otros ejemplos famosos de sucesiones de Lucas, es decir, sucesiones de Lucas algo más conocidas y que reciben nombres específicos para ciertos valores de P y Q .

Son sucesiones de Lucas las siguientes:

P	Q	$U_n(P, Q)$	$V_n(P, Q)$
1	-1	Números de Fibonacci / A000045	Números de Lucas / A000032
1	-2	Números de Jacobsthal / A001045	Números de Jacobsthal-Lucas / A014551
2	-1	Números de Pell / A000129	Números de Pell-Lucas / A002203
3	2	Núm. de Mersenne $2^n - 1$ / A000225	Núm. $2^n + 1$ (n^{os} de Fermat) / A000051
x	-1	Polinomios de Fibonacci	Polinomios de Lucas
$2x$	1	Polinomios de Chebyshev de 2º tipo	Polinomios de Chebyshev de 1ª tipo ($\times 2$)
$x + 1$	x	Repunits* en base x	Polinomios $x^n + 1$

* Un *repunit* es un número como 11, 111 o 1111 que contiene solamente el dígito 1. Es la forma más sencilla de *repdigit*.

Tabla 3.2: Sucesiones específicas de Lucas

Hasta ahora, no habíamos mencionado cómo encontrar sucesiones generales de Lucas en la OEIS. Eso es porque esta enciclopedia online las tiene registradas por casos particulares y para los distintos valores de P y Q . En esta tabla hemos reunido algunas de las extensiones web. Se pueden encontrar en dicha página de internet, buscándolas por el nombre o con la extensión dada.

En concreto, tienen enlace aquellas que son sucesiones de enteros, puesto que recordemos que la OEIS no deja de ser una enciclopedia online para sucesiones de números enteros, no sucesiones de polinomios. Sin embargo, de manera general, las sucesiones de Lucas $U = (U_n(P, Q))_{n \geq 0}$ y $V = (V_n(P, Q))_{n \geq 0}$ son también sucesiones de polinomios en P y Q con coeficientes enteros.

En cualquier caso, nuestro trabajo se centra en sucesiones enteras. Todavía hay más sucesiones de Lucas (de enteros) registradas en la OEIS que las que aparecen aquí. Nosotros nos hemos quedado con las más importantes. A continuación haremos alguna puntualización más sobre alguna de ellas.

3.4.1. Sucesión de Pell y su sucesión compañera de Pell-Lucas

Los *números de Pell* son una sucesión infinita de números enteros ya conocidos desde la antigüedad. Históricamente, comprenden justamente los denominadores de las aproximaciones racionales más cercanas a la raíz cuadrada de 2. Aproximaciones que comienzan tal que así,

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \dots$$

Es decir, si nos quedamos con los denominadores, la sucesión de números de Pell empieza con los números 1, 2, 5, 12, 29, 70...

Si en vez de fijarnos en los denominadores, son los numeradores los que reunimos en una sucesión, éstos son justamente los números de la sucesión compañera de Pell divididos entre 2. Tenemos entonces una segunda sucesión infinita de números enteros con los también llamados *números de Pell-Lucas* y que comienza con 2, 6, 14, 34, 82, 198... (2·numerador).

Tanto los números de Pell como los números de Pell-Lucas se calculan mediante la relación de recurrencia con parámetros $(P, Q) = (2, -1)$, solo que se difieren en sus términos iniciales, es decir sus definiciones recursivas son respectivamente:

Definición 3.25. Sucesión recursiva de Pell

Para todo $n \geq 0$ y sea $P_n = U_n(2, -1)$ el n -ésimo número de Pell, se define recursivamente:

1. $P_0 = 0, P_1 = 1$ (Condiciones iniciales)
2. $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, \forall n \geq 2$ (Relación de recurrencia)

Definición 3.26. Sucesión recursiva de Pell-Lucas

Para todo $n \geq 0$ y sea $p_n = V_n(2, -1)$ el n -ésimo número de Pell-Lucas, tenemos por relación de recurrencia la sucesión:

1. $p_0 = 2, p_1 = 2$ (Condiciones iniciales)
2. $p_n = 2p_{n-1} + p_{n-2}, \forall n \geq 2$ (Relación de recurrencia)

Al igual que con las ecuaciones de Pell, el nombre de los números de Pell proviene de la atribución errónea de Leonhard Euler de estas sucesiones y ecuaciones a John Pell¹.

Los números de Pell-Lucas también llevan el nombre de Édouard Lucas, por ser quien estudió las sucesiones generales definidas por recurrencias de este tipo.

Hay más formas de definir los números de Pell, una de ellas es mediante la fórmula:

$$P_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}.$$

¹Matemático inglés (1611 - 1685) Nacido en Sussex. Ingresó en el Trinity College de Cambridge. Era un experto en latín y griego y, aunque sabemos poco de su formación en matemáticas, sabemos que mantuvo correspondencia con Briggs sobre logaritmos. Pell se convirtió en profesor de matemáticas y trabajó en diversos lugares, destacando: Londres, Amsterdam, Breda (justo antes de la Primera Guerra Anglo-Holandesa por la que volvió a su país), hasta ser nombrado por Cromwell como profesor de matemáticas en Londres. donde fallecería después. Entre 1654 a 1658 también ocupó un cargo en el gobierno en Zúrich. Fue ordenado diácono y posteriormente sacerdote y vicario en Essex. Destacó en álgebra y teoría de números: dio una tabla de factores de todos los números enteros hasta 100000 y se le atribuye la ecuación de Pell $y^2 = ax^2 + 1$, donde a es un número entero no cuadrado. En realidad, la teoría completa fue elaborada por Lagrange y la ecuación fue estudiada por primera vez al menos por otras dos personas. Pell aparece en un libro de Rahn que fue escrito con la ayuda de Pell, incluso algunos dicen que fue escrito íntegramente por el propio Pell y trabajó mucho previamente en esta ecuación, con lo cual quizás Euler sabía lo que estaba haciendo al nombrar la ecuación.

En realidad, se trata de la **forma de Binet** con raíces características $1 + \sqrt{2}$ y $1 - \sqrt{2}$ y $D = 2^2 - 4(-1) = 8$ ($\sqrt{D} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$).

Para valores grandes de n , el término $(1 + \sqrt{2})^n$ domina esta expresión, por eso los números de Pell son aproximadamente proporcionales a las potencias de lo que se llama la **proporción de plata** $\delta_P = 1 + \sqrt{2}$. Se está dando una relación análoga a la que tenían los números de Fibonacci y la proporción áurea.

De hecho, ambas sucesiones, tanto la de Pell como la de Pell-Lucas crecen exponencialmente y proporcionalmente a las potencias de la razón de plata $\delta_P = 1 + \sqrt{2}$. Sobre todo, si tenemos en cuenta que la forma de Binet de los números de Pell-Lucas es

$$p_n = (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n.$$

Por supuesto, es posible tener una tercera definición de los números de Pell y los números de su sucesión compañera, mediante las **formas matriciales**.

$$\begin{bmatrix} P_n \\ P_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & +1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} p_n \\ p_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & +1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Incluso, de igual manera, para los números de Pell tenemos una matriz más sencilla de recordar,

$$\begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n.$$

Muchas expresiones pueden derivarse o probarse a partir de estas tres definiciones, entre ellas, una igualdad análoga a la identidad de Cassini que teníamos para los números de Fibonacci,

$$P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2 = (-1)^n,$$

Consecuencia inmediata de la fórmula matricial y considerando determinantes. (Encontramos ésta y otras fórmulas para los números de Pell en [17] y [29]).

También tenemos la **relación entre números de Pell y de Pell-Lucas**. Al igual que ocurría entre los números de Fibonacci y los de Lucas, en esta ocasión existe la relación:

$$p_n = \frac{P_{2n}}{P_n}$$

para todos los números naturales n .

Por otro lado, sabemos que un número **primo de Pell** es todo aquel número primo que pertenezca a la sucesión, es decir, los primeros números primos son 2, 5, 29, 5741, 33461, 44560482149, 1746860020068409, 68480406462161287469, ...

Los índices n de estos números primos dentro de la secuencia de todos los números de Pell son 2, 3, 5, 11, 13, 29, 41, 53, 59, 89, 97, 101, 167, 181, 191, 523, 929, 1217, 1301, 1361, 2087, 2273, 2393, 8093, ...

Estos índices son todos ellos mismos primos.

Con lo cual, tenemos para números de Pell el resultado: Un número de Pell P_n solo puede ser primo si n en sí mismo es primo, porque si d es un divisor de n , entonces P_d es un divisor de P_n .

Los números de Pell-Lucas, sin embargo, son todos pares, por eso entendemos por **primos de Pell-Lucas** aquellos números primos que nos quedan cuando consideramos los $p_n/2$. Los primeros números primos de Pell-Lucas son 3, 7, 17, 41, 239, 577, ...

que se obtienen de operar con los números de índice n : 2, 3, 4, 5, 7, 8, 16, 19, 29, 47, 59, 163, 257, 421, ...

Observamos que, tal y como sucedía para la sucesión de números de Lucas, un número de Pell-Lucas $(1/2)p_n$ es primo si y sólo si n es primo o una potencia de 2.

Estas sucesiones además de usarse para aproximar $\sqrt{2}$, como dijimos al principio, tienen otras **aplicaciones**.

Los números de Pell se pueden usar para encontrar números cuadrados triangulares, para construir aproximaciones enteras al triángulo isósceles recto y para resolver ciertos problemas de enumeración combinatoria. (Más información en [22]).

Indaguemos un poco más en alguno de estos usos.

- La aproximación racional a la raíz de 2, tiene su relación con la ecuación de Pell. Si dos números enteros grandes x e y forman una solución a la ecuación de Pell $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, entonces su proporción x/y facilita una aproximación cercana a raíz de 2. Cuando reuníamos las aproximaciones, observamos que el denominador de cada fracción era un número Pell y el numerador un número de Pell-Lucas dividido entre 2, es decir, las aproximaciones tienen la forma

$$\frac{p_n/2}{P_n} = \frac{P_{n-1} + P_n}{P_n}.$$

El numerador es también la suma de un número de Pell y su predecesor. Aquí vemos una relación más entre los números de Pell y los números de Pell-Lucas.

Históricamente, en la antigüedad ya era conocida la aproximación

$$\sqrt{2} \approx \frac{577}{408}$$

por los matemáticos indios en el siglo III o IV a.C. Los matemáticos griegos del siglo V a.C. también conocían esta sucesión de aproximaciones. De hecho, Platón se refiere a los numeradores como diámetros racionales.

Estas aproximaciones también derivan de la expansión de fracción continua de $\sqrt{2}$. Si recordamos, con el concepto de fracción continua tenemos:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}$$

De hecho, existe una expresión similar para el número de plata $\delta_P = 1 + \sqrt{2}$; y más en general, todas las proporciones metálicas o números metálicos tienen una cierta relación con las fracciones continuas.

Por definición, una *proporción metálica* para un cierto n , cumple:

$$\frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2} = n + \frac{1}{n + \frac{1}{n + \frac{1}{n + \dots}}}$$

Siendo la proporción áurea ($n = 1$), la proporción de plata ($n = 2$) y la proporción de bronce ($n = 3$) ejemplos de proporciones metálicas.

- Si un triángulo rectángulo tiene longitudes de lado enteras a, b, c y que necesariamente satisfacen el teorema de Pitágoras $a^2 + b^2 = c^2$, entonces (a, b, c) se conoce como *terna de Pitágoras*.

Los números de Pell se pueden usar para formar ternas pitagóricas en los que a y b están separados sólo por una unidad, correspondientes a triángulos rectángulos que son casi isósceles como los de la figura.

Cada una de estas ternas tiene la forma

$$(2P_n P_{n+1}, P_{n+1}^2 - P_n^2, P_{n+1}^2 + P_n^2),$$

o lo que es lo mismo,

$$(2P_n P_{n+1}, P_{n+1}^2 - P_n^2, P_{2n+1}).$$

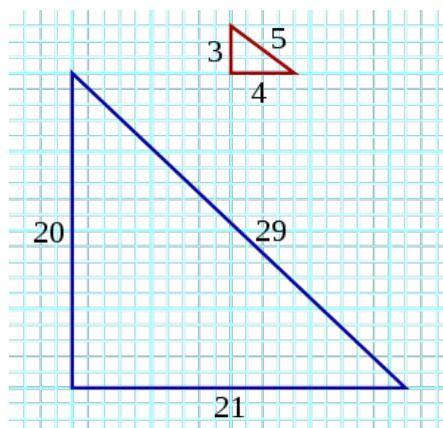


Figura 3.1: Ternas pitagóricas con números de Pell

3.4.2. Sucesión de Jacobsthal y su compañera Jacobsthal-Lucas

Los *números de Jacobsthal* son también un tipo específico de sucesión de Lucas para los parámetros $P = 1$ y $Q = -2$. Se definen entonces por una relación de recurrencia similar a las que hemos visto hasta ahora, siendo una sucesión lineal entera recurrente.

Por definición, los números de Jacobsthal y los de su sucesión compañera, los números de Jacobsthal-Lucas, satisfacen la misma relación de recurrencia y la única diferencia entre ellos son sus valores iniciales que son distintos.

Definición 3.27. Sucesión recursiva de Jacobsthal

Para todo $n \geq 0$ y sea $J_n = U_n(1, -2)$ el n -ésimo número de Jacobsthal, recursivamente tenemos:

1. $J_0 = 0, J_1 = 1$ (Condiciones iniciales)
2. $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}, \forall n \geq 2$ (Relación de recurrencia)

Definición 3.28. Sucesión recursiva de Jacobsthal-Lucas

Para todo $n \geq 0$ y sea $j_n = V_n(1, -2)$ el n -ésimo número de Jacobsthal-Lucas, se define de forma recurrente la sucesión:

1. $j_0 = 2, j_1 = 1$ (Condiciones iniciales)
2. $j_n = j_{n-1} + 2j_{n-2}, \forall n \geq 2$ (Relación de recurrencia)

Así pues, los primeros números de Jacobsthal son: 0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, 683, 1365, 2731, 5461, 10923, 21845, 43691, 87381, 174763, 349525, ...

Y por su parte, los primeros números de Jacobsthal-Lucas son: 2, 1, 5, 7, 17, 31, 65, 127, 257, 511, 1025, 2047, 4097, 8191, 16385, 32767, 65537, 131071, 262145, 524287, 1048577, ...

Tanto unos como otros llevan el nombre del matemático alemán Ernst Jacobsthal².

Usando las **formas de Binet**, es otra manera de definir estos números y que nos permite calcular directamente cualquier n-ésimo término en concreto de las sucesiones. Estas fórmulas son,

$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}, \quad j_n = 2^n + (-1)^n.$$

Con raíces características 2, -1 y discriminante $D = 1^2 - 4(-2) = 9$ ($\sqrt{D} = 3$).

Por supuesto, entre sus **otras propiedades** también tenemos formas matriciales, identidades, funciones generadoras. Veamos aquellas que tienen algo nuevo que aportarnos.

Para los números de Jacobsthal hay numerosas fórmulas, algunas definidas de forma recursiva como:

$$J_{n+1} = 2J_n + (-1)^n, \quad J_{n+1} = 2^n - J_n.$$

Análogamente, un número de Jacobsthal-Lucas también satisface la igualdad:

$$j_{n+1} = 2j_n - 3(-1)^n.$$

Los números de Jacobsthal se pueden extender a índices negativos usando

$$J_{-n} = (-1)^{n+1} J_n / 2^n.$$

Hay incluso identidades en las que intervienen estos números con índices negativos,

$$2^n (J_{-n} + J_n) = 3J_n^2.$$

La suma de los recíprocos o inversos de los números de Jacobsthal, es decir la suma de los $\frac{1}{J_n}$ es aproximadamente 2.7186, un poco más grande que el número e .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_n} = 2.7186 \approx e$$

La función generadora de estas sucesiones se puede saber inmediatamente por las que hemos dado en general para las sucesiones de Lucas. Aunque en particular, la función generadora de los números de Jacobsthal se puede escribir como

$$\sum_{k \geq 0} J_k X^k = \frac{X}{1 - X - 2X^2} = \frac{X}{(1 + X)(1 - 2X)}.$$

Más sobre propiedades básicas de los números de Jacobsthal y Jacobsthal-Lucas en [16, p.40-43] y [7, p.28].

²Este matemático alemán nacido en Berlín (1882 - 1965) escribió artículos en campos tan diversos como álgebra, análisis, teoría de funciones y teoría de números. Sus estudios de matemáticas los llevó a cabo en la Universidad de Berlín, donde tuvo como profesores a Frobenius, Schwarz y Schur. Entre sus aportaciones, a parte de los números de Jacobsthal, se encuentra una curiosa demostración sobre los números primos con la forma $p = 4n + 1$, que se pueden escribir como una suma de dos números cuadrados. También mostró que es posible encontrar una solución $p = x^2 + y^2$, donde x e y se pueden expresar con sumas simples de símbolos de Legendre, conocidas como sumas de Jacobsthal.

Por último, añadimos como curiosidad que, los números de Mersenne y los números de Fermat intervienen en el mundo de los números primos. No vamos a hablar mucho más sobre ellos, ya que habiendo visto varias sucesiones de Lucas específicas, sabemos de sobra cuáles son sus definiciones recursivas, formas de Binet, matrices y demás propiedades con sólo considerar que sus parámetros son $(P, Q) = (3, 2)$.

Un **primo de Mersenne** es un número primo que es uno menos que una potencia de dos, es decir, es un número primo de la forma $\mathcal{M}_n = 2^n - 1$ para algún número entero n .

Una definición equivalente es que son los números primos de la forma $\mathcal{M}_p = 2^p - 1$ para algún primo p . Los números de la forma $\mathcal{M}_n = 2^n - 1$ sin el requisito de primalidad pueden denominarse números de Mersenne simplemente. Ya se estudiaban en la antigüedad debido a su estrecha conexión con los *números perfectos*³.

Por su parte, un **número de Fermat** es un número entero positivo de la forma $\mathcal{F}_n = 2^{2^n} + 1$ donde n es un número entero no negativo, es decir, en realidad son un caso particular que está incluido en las sucesiones de Lucas de la forma $2^k + 1$, de ahí que en la tabla 3.2 aparezcan mencionados entre paréntesis.

Dos características sobre ellos son las siguientes:

- Si $2^k + 1$ es primo y $k > 0$, se puede demostrar que k debe ser una potencia de dos. En otras palabras, todo número primo de la forma $2^k + 1$ (distinto de $2 = 2^0 + 1$) es un número de Fermat, y dichos números primos se denominan números primos de Fermat.
- Cada número de Fermat compuesto (no primo) es un pseudoprimo fuerte de base 2.

Vistos estos datos, no nos van a faltar entre las aplicaciones de las sucesiones generales de Lucas, algunos ejemplos de tests de primalidad, de pseudoprimos, etc.

3.5. Aplicaciones y ejemplos

Cuando hemos estudiado sucesiones específicas de Lucas, ya hemos ido viendo ciertas situaciones particulares o ejemplos en los que intervenían dichas sucesiones. Así que, para terminar, simplemente añadiremos algún dato que nos pueda quedar por mencionar de las sucesiones de Lucas, pero que no investigaremos a fondo.

Las sucesiones de Lucas se utilizan en tests probabilísticos de pseudoprimos de Lucas, que forman parte del test de primalidad de Baillie-PSW de uso bastante común.

Las sucesiones de Lucas se utilizan en algunos métodos de tests de primalidad, incluidos el test de Lucas-Lehmer-Riesel y los métodos $N + 1$ e híbridos $N - 1/N + 1$, como los de Brillhart-Lehmer-Selfridge.

En criptografía, existe un criptosistema de clave pública llamado LUC que está basado en sucesiones de Lucas y que implementa sistemas análogos a aquellos de ElGamal (LUCELG), Diffie-Hellman (LUCDIF) o el sistema RSA (LUCRSA). En este criptosistema LUC, el cifrado del mensaje se calcula como un término de alguna sucesión de Lucas, en vez de utilizar la exponenciación modular, logaritmos, etc. como se hacía en otros criptosistemas como el RSA. Aunque aún está por demostrar las ventajas de seguridad de este método frente al uso de aquellos que se basan en la exponenciación modular.

³Un *número perfecto* es un número entero positivo que es igual a la suma de sus divisores positivos, excluyendo en dicha suma al propio número.

Por supuesto, estas sucesiones siguen interviniendo en otros ambientes más sencillos como los que ya veníamos viendo en los dos capítulos anteriores.

Resumiendo, las sucesiones de Lucas aparecen en múltiples ocasiones y diferentes ámbitos del mundo científico, incluso en la naturaleza. Es más, no sólo los números de Fibonacci y de Lucas presentan sorprendentes estructuras en espiral, también los números de Pell están presentes en la llamada espiral de plata.

Cerramos entonces este capítulo habiendo adquirido conocimientos un poco más generales sobre sucesiones enteras recurrentes, en particular, sobre las sucesiones de Lucas.

Hasta ahora, debemos destacar que las sucesiones lineales enteras recurrentes que hemos visto eran todas de orden 2. En el siguiente capítulo nos esperan sucesiones algo más complejas, las de orden 3.

Capítulo 4

Sucesiones lineales enteras recurrentes de orden 3 o superior

Aunque pueda parecer largo el título de este capítulo, es bastante descriptivo. Vamos a seguir estudiando sucesiones que son lineales, con coeficientes enteros y que vienen definidas por una relación de recurrencia (recurrentes) de orden 3. Es decir, remarcamos que, en realidad, es esta recurrencia quien es de orden 3. De hecho, esto ya lo vimos en la definición 1.2 con el concepto de *homogénea (y no homogénea) de orden k* .

En estos casos, para que la ecuación característica asociada a la relación de recurrencia quede bien definida, se dan tres términos iniciales (en vez de dos, como veníamos haciendo en las de orden 2) y, a partir de ellos, cada término adicional de la sucesión se define en función de los términos anteriores. Dicho de forma más sencilla, orden 3 se refiere a que cada elemento de la sucesión depende de los tres anteriores.

Comenzaremos precisamente con estos conceptos y otros nuevos aspectos algo generales sobre las sucesiones de orden 3, para posteriormente adquirir una mayor comprensión de sucesiones particulares como las de Perrin, Padovan y Tribonacci. Por supuesto, hay muchas más sucesiones recurrentes aparte de éstas e incluso de orden superior, algunas de las cuales mencionaremos al final de este capítulo.

4.1. Conceptos previos

Tenemos una relación de recurrencia (con coeficientes constantes) de orden k ,

$$C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \dots + C_k a_{n-k} = K$$

donde $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}$ constantes con $C_0 \neq 0, C_k \neq 0$ y donde $n \geq k$. Esta recurrencia es homogénea si $K = 0$ y no homogénea si $K \neq 0$.

Independientemente de si es homogénea o no, suponemos que $C_0 = 1$ (podemos suponerlo, ya que si C_0 es otro valor, basta con dividir toda la expresión entre $C_0 \neq 0$).

Sea $k = 3$, se considera la **sucesión (general) recurrente de orden 3** $(w_n)_{n \geq 0}$, definida por:

1. w_0, w_1, w_2 arbitrarios fijos (Condiciones iniciales)
2. $w_n = aw_{n-3} + bw_{n-2} + cw_{n-1}$, (Relación de recurrencia)
 $a \neq 0, b, c$ constantes, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

En concreto, entre estas sucesiones recursivas de orden 3, podemos destacar un par de casos especiales:

- $u_0 = u_1 = 0, u_2 = 1, \quad u_n = au_{n-3} + bu_{n-2} + cu_{n-1}.$
- $v_0 = 3, v_1 = c, v_2 = 2b + c^2, \quad v_n = av_{n-3} + bv_{n-2} + cv_{n-1}.$

Por ejemplo, cuando hablemos de la sucesión de Perrin vamos a estar ante este último caso, considerando una situación sencilla en la $a = b = 1$ y $c = 0$.

Después estudiaremos la sucesión de Padovan, que tiene exactamente la misma relación de recurrencia que la de Perrin, sólo que con valores iniciales diferentes.

Es más, la sucesión de Perrin y la de Padovan tienen el mismo tipo de relación que tenían las sucesiones de Fibonacci y de Lucas, sólo que ésta vez trabajando con ecuaciones de grado 3.

Finalmente, otra sucesión que aparece en nuestro estudio es la de Tribonacci, que también es uno de estos casos especiales. Se trata del primer caso para valores $a = b = c = 1$.

En [18] y [19, p.86-89] se puede consultar más información sobre estas sucesiones generales recurrentes de orden 3. Encontramos propiedades algebraicas y aritméticas sobre los $w_n, u_n, v_n \dots$ entre ellas, algunas equivalentes a las formas de Binet.

Sean α, β, γ las raíces de la ecuación característica resultante de la relación de recurrencia correspondiente. Si procedemos como en otras ocasiones, obtenemos, por ejemplo que:

- Para la ecuación característica $x^3 - cx^2 - a = 0$ (casos con $b = 0$), entonces:

$$w_n = p\alpha^n + q\beta^n + r\gamma^n \Leftrightarrow \alpha \neq \beta \neq \gamma,$$

donde $p = \frac{-1}{(\alpha-\gamma)(\beta-\alpha)}, q = \frac{-1}{(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)}, r = \frac{-1}{(\gamma-\beta)(\alpha-\gamma)}.$

- Sea la sucesión (v_n) como la hemos definido antes, los términos v_n se pueden calcular explícitamente como

$$v_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n.$$

Para que sea más comprensible, expliquemos con un ejemplo el razonamiento seguido para el último resultado, que es el más sencillo.

Ejemplo 4.1. Tenemos la relación de recurrencia $v_n = v_{n-3} + v_{n-2}$ (o lo que es lo mismo $v_{n+3} = v_n + v_{n+1}$) con condiciones iniciales $v_0 = 3, v_1 = 0, v_2 = 2$.

La ecuación característica de esta sucesión es

$$x^3 - x - 1 = 0.$$

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ las tres raíces de esta ecuación (que podemos calcular p.ej. con MAPLE), sabemos que $(\alpha^n), (\beta^n), (\gamma^n)$ cumplen la relación de recurrencia. Es más, por linealidad

$$v_n = p\alpha^n + q\beta^n + r\gamma^n$$

también cumple la recurrencia.

Por tanto, se calculan estos p, q, r con las condiciones iniciales:

$$3 = p + q + r$$

$$0 = p\alpha + q\beta + r\gamma$$

$$2 = p\alpha^2 + q\beta^2 + r\gamma^2$$

Al resolver el sistema, tenemos que $p = q = r = 1$. Luego, $v_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$.

En este ejemplo, nos aparecía la ecuación

$$x^3 - x - 1 = 0.$$

Una de sus soluciones, la única raíz que es real y no compleja, es el número $\psi = 1,324717958\dots$ que se conoce como **número plástico**. Un número bastante curioso que, además, se puede expresar con raíces cúbicas,

$$\psi = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \dots}}}}} = 1,324717958\dots$$

El número plástico fue introducido por el arquitecto y monje benedictino Dom Hans Van der Laan en 1928 como una proporción ideal en la escala geométrica para objetos espaciales (3 dimensiones). Así como lo era el número áureo en dos dimensiones. De hecho, hay estructuras arquitectónicas que han seguido esta proporción tridimensional.

Tanto el número plástico, como el número de oro, son *números mórficos*.

Definición 4.2. Un *número mórfico* es un número real $r > 1$ para el que existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que

$$r + 1 = r^n \quad \text{y} \quad r - 1 = r^{-m}.$$

O dicho de otra forma, un número mórfico es aquel que satisface las dos ecuaciones:

$$x^n - x - 1 = 0 \quad \text{y} \quad x^{m+1} - x^m - 1 = 0 \quad (x^{-m} - x + 1 = 0).$$

Como tenemos que

$$x^5 - x^4 - 1 = (x^3 - x - 1)(x^2 - x + 1),$$

y ψ era una solución de $x^3 - x - 1 = 0$, entonces el número plástico también satisface $x^5 - x^4 - 1 = 0$ ($x^{-4} = x - 1$), siendo así un número mórfico con $n = 3$ y $m = 4$.

En el caso del número de oro, es también un número mórfico para los valores $n = 2$ y $m = 1$.

El resto de la familia de las proporciones metálicas, bien es verdad que siempre son soluciones positivas de ecuaciones del tipo $x^2 - bx - c = 0$ con $b, c \in \mathbb{N}$, pero sólo el número de oro que cumple $x^2 - x - 1 = 0$ ($b = c = 1$) es un número mórfico, junto con el número plástico que cumple $x^3 - x - 1 = 0$. De hecho, van a ser los únicos números mórficos.

Tenemos el número plástico como solución para el trinomio mencionado, sin embargo, si generalizamos la ecuación a una de grado mayor n , la solución positiva real de dicha ecuación se conoce también como número plástico. Es decir, en realidad todas las soluciones reales de las ecuaciones del tipo $x^n - x - 1 = 0$ forman la *familia de números plásticos*, siendo la proporción áurea $\varphi = 1,618\dots$ y el número plástico de Laan $\psi = 1,324\dots$ los únicos números de la familia que son mórficos.

En [1, 37, 43] se habla precisamente sobre estos números plásticos, incluyendo el siguiente teorema.

Teorema 4.3. Sólo existen dos números mórficos, los llamados la divina proporción y el número plástico de Van der Laan.

Demostración. Sabemos que un número mórfico es un cero de $x^n - x - 1$ y $x^m - x^{m-1} - 1$ donde $n, m \geq 2$ (la segunda puede ser escrita $x^{m+1} - x^m - 1 = 0$ como antes, cuestión de notación).

Para $n = m = 2$ es trivial, las ecuaciones a resolver son exactamente las mismas y los ceros obtenidos son exactamente la divina proporción y su raíz complementaria.

Contemplamos entonces el caso $n, m \geq 3$, para que exista una solución que cumpla ambas ecuaciones, los polinomios deben tener un factor en común si los factorizamos.

Aquí vamos a aplicar el resultado descubierto por Selmer: $x^n - x - 1, n \geq 3$ es irreducible (no tiene ningún factor polinómico excepto el 1 y él mismo).

Usaremos también el lema: $x^m - x^{m-1} - 1, m \geq 3$ o es irreducible o es el producto de un polinomio irreducible y $x^2 - x + 1$. (Resultados ya demostrados y contrastados en [1]).

Como el primer polinomio $x^n - x - 1$ es irreducible, esto nos reduce la situación, y el factor que divide tanto al primer polinomio como al segundo, tiene que ser el propio primer polinomio. Se aplica en esta ocasión el otro lema. Para que el segundo polinomio no sea irreducible y tenga de factor al primero, ocurre:

$$x^m - x^{m-1} - 1 = (x^n - x - 1)(x^2 - x + 1).$$

Se comprueba con ordenador que esta igualdad se verifica solamente para $n = 3$ y $m = 5$, es decir, cuando la solución es el número plástico de Van der Laan. \square

4.2. Sucesión de Perrin

Esta sucesión fue ya mencionada implícitamente por Édouard Lucas en 1876. De hecho, la sucesión de Perrin es equivalente, cualitativamente hablando, a la sucesión de números de Lucas sólo que de orden 3. Comenzamos por ella sabiendo que su forma de Binet va a ser la más sencilla, tal y como hemos adelantado en la sección anterior.

Recibe el nombre de sucesión de Perrin por François Olivier Raoul Perrin¹, quien habló explícitamente y por primera vez de dicha sucesión en 1899.

Los términos que componen esta sucesión son los llamados *números de Perrin* que se pueden determinar mediante la siguiente definición recursiva.

Definición 4.4. Sucesión recursiva de Perrin

Para todo $n \geq 0$ y sea E_n el n -ésimo número de Perrin, tenemos:

1. $E_0 = 3, E_1 = 0, E_2 = 2,$ (Condiciones iniciales)
2. $E_n = E_{n-2} + E_{n-3}, \quad \forall n \geq 3$ (Relación de recurrencia)

Así pues, la sucesión de números de Perrin empieza con los términos mostrados en la siguiente tabla:

$E_0 = 3$	$E_6 = 5$	$E_{12} = 29$	$E_{18} = 158$	$E_{24} = 853$
$E_1 = 0$	$E_7 = 7$	$E_{13} = 39$	$E_{19} = 209$	$E_{25} = 1130$
$E_2 = 2$	$E_8 = 10$	$E_{14} = 51$	$E_{20} = 277$	$E_{26} = 1497$
$E_3 = 3$	$E_9 = 12$	$E_{15} = 68$	$E_{21} = 367$	$E_{27} = 1983$
$E_4 = 2$	$E_{10} = 17$	$E_{16} = 90$	$E_{22} = 486$	$E_{28} = 2627$
$E_5 = 5$	$E_{11} = 22$	$E_{17} = 119$	$E_{23} = 644$	$E_{29} = 3480$

Tabla 4.1: Números de Perrin

¹Ingeniero francés (1841 – 1910), cuya mayor aportación al mundo de las matemáticas fueron los números de Perrin. Continuaron con un tratamiento más extenso de esta sucesión Adams y Shanks en 1982.

Términos que se pueden encontrar, junto a más información sobre la sucesión, en la enciclopedia OEIS: <https://oeis.org/A001608>.

Pasemos a las propiedades de los números de Perrin.

Como en sucesiones anteriores, si queremos saber directamente un número concreto de la sucesión de Perrin, podemos hacer uso de la equivalente a la forma de Binet, que expresa los números de Perrin como potencias de las raíces que son soluciones de la ecuación característica asociada a su relación de recurrencia.

Es decir, sean α, β, γ , las tres raíces de la ecuación

$$x^3 - x - 1 = 0,$$

donde α es una raíz real (el número plástico) y las otras dos son raíces conjugadas complejas β y $\gamma = \bar{\beta}$.

La expresión **análoga a la forma de Binet** para la sucesión de Perrin es

$$E_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n, \quad \forall n \geq 0$$

Dado que las magnitudes² de las raíces complejas β y γ son menores que 1, por tanto, las potencias de estas raíces se acercan a 0 para n grande. Luego, para n grande, la fórmula se reduce a

$$E_n \approx \alpha^n$$

Pudiéndose utilizar para calcular rápidamente los valores de la sucesión de Perrin para n grandes.

Tenemos también que la proporción de términos sucesivos en la secuencia de Perrin se aproxima a $\alpha = \psi = 1,324\dots$, el número plástico, es decir se cumple el siguiente **límite**.

Propiedad 4.5. Sea E_n el n -ésimo número de Perrin, se verifica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_{n+1}}{E_n} = \psi.$$

Demostración. Recordemos que las propiedades de este estilo se demostraban de manera trivial con las formas de Binet (o equivalentes) y operando correctamente con las raíces, como hicimos, por ejemplo, para Fibonacci. □

Observamos pues, que el número plástico tiene la misma relación con la sucesión de Perrin que la proporción áurea con la sucesión de Lucas. Conexiones similares hemos visto y vamos a ver entre ψ y la sucesión de Padovan, entre la proporción áurea y los números de Fibonacci, y entre la proporción de plata y los números de Pell.

Tenemos los números de Perrin ya definidos de manera recursiva, a través de la forma de Binet (o su análoga) y sólo nos quedaría definirlos a través de su **forma matricial**, que es

$$\begin{bmatrix} E_n \\ E_{n+1} \\ E_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

²La magnitud de estas raíces complejas se pueden calcular fácilmente con MAPLE (obteniendo el módulo). Más adelante, con la sucesión de Padovan, nos centraremos un poco más en la obtención de dichas raíces.

En esta ocasión, también hay lo que llamamos **fórmulas de multiplicación**, es decir, que hay expresiones para los términos E_{kn} que se obtienen a partir de la forma análoga de Binet, sabiendo que

$$E_{n-1} = \alpha^{n-1} + \beta^{n-1} + \gamma^{n-1},$$

$$E_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n,$$

$$E_{n+1} = \alpha^{n+1} + \beta^{n+1} + \gamma^{n+1}.$$

Las fórmulas de multiplicación van a depender de estos términos mencionados. Por ejemplo, en concreto para E_{2n} ,

$$23E_{2n} = -6E_{n-1}^2 + 7E_n^2 - 2E_{n+1}^2 - 4E_{n-1}E_n + 18E_{n-1}E_{n+1} + 6E_nE_{n+1}$$

donde el número 23 hace referencia al valor del discriminante³ del polinomio de orden 3 de la sucesión.

Otra de las fórmulas conocidas de esta sucesión, es la **función generadora** de Perrin.

Propiedad 4.6. Sea $(E_n)_{n \geq 0}$ la sucesión de Perrin, se cumple

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n X^n = \frac{3 - X^2}{1 - X^2 - X^3}, \quad \text{función generadora.}$$

Estos sumatorios de funciones generadoras nos han aparecido en repetidas ocasiones para otras sucesiones. Deberían de ser ya familiares para el lector, además que son útiles para llevar a cabo otras demostraciones.

En [26], por ejemplo, se da una solución explícita para la relación de recurrencia de la sucesión de Perrin a partir de funciones generadoras.

Encontramos, en este mismo artículo, más fórmulas con sumatorios y números combinatorios para las sucesiones de Perrin, que además nos sirven de apoyo para la prueba del siguiente resultado.

Lema 4.7. Sea p un número primo, entonces $p \mid E_p$.

Cuidado, porque lo contrario no es cierto: para algunos números compuestos n , puede ser que n divida a E_n , sin ser, por tanto, este número un número primo. Los n que cumplen esta propiedad, se denominan *pseudoprimos* de Perrin.

Estos resultados tienen su relevancia en varios estudios, puesto que el trabajar con **primos y pseudoprimos de Perrin** tiene sus beneficios y aplicaciones.

Como test de primalidad, la sucesión de Perrin es mucho más fuerte que la típica sucesión de Lucas de segundo orden.

Por ejemplo, el pseudoprimo más pequeño en la sucesión de Perrin, donde tenemos ecuación característica $x^3 - x - 1$, es el 27664033=(3037)(9109). Lo encontramos en [A018187](#).

Es un número bastante más grande que el pseudoprimo más pequeño en la sucesión de Fibonacci, donde teníamos ecuación característica $x^2 - x - 1$.

4.3. Sucesión de Padovan

La sucesión de Padovan es una sucesión con propiedades similares a los números de Fibonacci y que lleva el nombre de Richard Padovan.

³Sea una ecuación de tercer grado $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$, a, b, c, d contantes. El *discriminante* es $D = 18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2$. En nuestro caso $a = 1, b = 0, c = d = -1$ y, por tanto, $D = -23$.

Sin embargo, Padovan⁴ atribuyó su descubrimiento al holandés Hans van der Laan. Esta sucesión es, entonces, relativamente reciente. Su aparición es posterior a la sucesión de Perrin, y su estudio fue ampliado por Ian Stewart en 1996.

Hablemos entonces de esta sucesión y sus correspondientes valores, los *números de Padovan* D_n . Es bastante común que aparezcan también como los P_n , aunque nosotros nos hemos decantado por esta otra notación para que no haya confusión con los números de Pell. Los números de Padovan quedan definidos con la siguiente relación de recurrencia de orden 3.

Definición 4.8. Sucesión recursiva de Padovan

Para todo $n \geq 0$ y sea D_n el n -ésimo número de Padovan, se define de forma recurrente la sucesión:

1. $D_0 = D_1 = D_2 = 1$, (Condiciones iniciales)
2. $D_n = D_{n-2} + D_{n-3}$, $\forall n \geq 3$ (Relación de recurrencia)

Esta definición no es unánime. A veces la sucesión de Padovan aparece con otras condiciones iniciales ($D_0 = 1, D_1 = D_2 = 0$), y por tanto, sus primeros términos en este caso son: 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16...

Mientras que nosotros nos hemos decantado por esta otra definición, puesto que en realidad, lo único que estamos haciendo es comenzar la sucesión un poco más adelante, evitando valores un poco más prescindibles. Luego, los primeros valores de la sucesión de Padovan que estamos considerando, son los que se muestran en la siguiente tabla.

$D_0 = 1$	$D_6 = 4$	$D_{12} = 21$	$D_{18} = 114$	$D_{24} = 616$
$D_1 = 1$	$D_7 = 5$	$D_{13} = 28$	$D_{19} = 151$	$D_{25} = 816$
$D_2 = 1$	$D_8 = 7$	$D_{14} = 37$	$D_{20} = 200$	$D_{26} = 1081$
$D_3 = 2$	$D_9 = 9$	$D_{15} = 49$	$D_{21} = 265$	$D_{27} = 1432$
$D_4 = 2$	$D_{10} = 12$	$D_{16} = 65$	$D_{22} = 351$	$D_{28} = 1897$
$D_5 = 3$	$D_{11} = 16$	$D_{17} = 86$	$D_{23} = 465$	$D_{29} = 2513$

Tabla 4.2: Números de Padovan

De todas formas, independientemente de la definición escogida, se cumplen una serie de identidades y propiedades que vamos a enumerar a continuación.

Eso sí, en caso de utilizar otra definición, es decir, una que incluya más términos iniciales como la que aparece en la OEIS en <https://oeis.org/A000931>, habría que hacer algunos pequeños ajustes o compensaciones en algunas de nuestras fórmulas (en los índices sobre todo). Nosotros las hemos redactado adaptándolas a la definición 4.8. La misma utilizada por Ian Stewart y la que aparece en el enlace web [MathWorld](#) (en la bibliografía).

Comencemos por definir los números de la sucesión de Padovan en términos de potencias de las raíces de la ecuación

$$x^3 - x - 1 = 0.$$

⁴Arquitecto, autor, traductor y conferenciante nacido en 1935 (85 años en la actualidad). Ha practicado arquitectura en varios países europeos y ha ejercido de profesor en el Reino Unido. Quedó fascinado con las obras de Hans van der Laan (1904 - 1991), que revisó debido a su conocimiento del idioma holandés y con quién mantuvo el contacto en persona y por correspondencia. Disponemos de sus traducciones al inglés y de un libro que escribí sobre van der Laan en 1994, "*Dom Hans van der Laan: modern primitive*". Con su trabajo, se le considera el descubridor de la sucesión de los números de Padovan. También es autor de otros libros científicos sobre matemáticas, arquitectura, filosofía de los sistemas arquitectónicos y proporción arquitectónica.

Misma ecuación que vimos para la sucesión de Perrin y que tenía 3 raíces, una raíz real α (número plástico) y dos raíces conjugadas complejas β y $\gamma = \bar{\beta}$.

La sucesión de Padovan se puede expresar mediante la fórmula equivalente a Binet:

$$D_n = p\alpha^{exp} + q\beta^{exp} + r\gamma^{exp}, \quad \forall n \geq 0$$

donde p, q y r son constantes y exp es un exponente que puede ser justamente $exp = n$, como en otras ocasiones, o no. Para ajustar este exp , todo depende de en qué término comienza la sucesión de Padovan. En nuestro caso queremos que los primeros términos sean 1,1,2,2,3,4,5,7,9...

También queremos saber quiénes son estos p, q, r . Para ello, se procederá primero a calcular las raíces características de nuestra ecuación de orden 3.

De hecho, en algunos textos como en [35], han realizado ya estos cálculos y se obtienen resultados como estos:

$$\alpha = \frac{s_1 + s_2}{6}, \quad \beta = \frac{-(s_1 + s_2) + i\sqrt{3}(s_1 - s_2)}{12}, \quad \gamma = \bar{\beta}.$$

con $s_1 = \sqrt[3]{108 + 12\sqrt{69}}$ y $s_2 = \sqrt[3]{108 - 12\sqrt{69}}$.

Finalmente, sabiendo estos valores de α, β, γ . Se procede a resolver un sistema para calcular la constantes p, q, r . Se ajustan los exponentes exp para que la sucesión comience donde queremos, y obtenemos que se cumple la siguiente fórmula **análoga a la forma de Binet**:

$$D_n = \frac{\alpha^{n+4}}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{\beta^{n+4}}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + \frac{\gamma^{n+4}}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}.$$

Hagamos una serie de comprobaciones para verificar que esto es cierto.

Demostración. En realidad, si nuestro polinomio característico es

$$p(x) = x^3 - x - 1 = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma),$$

lo que se tiene en los denominadores de las constantes p, q, r son las derivadas evaluadas en α, β y γ , ya que si

$$p'(x) = 3x^2 - 1 = (x - \beta)(x - \gamma) + (x - \alpha)(x - \gamma) + (x - \alpha)(x - \beta),$$

entonces

$$\begin{aligned} p'(\alpha) &= 3\alpha^2 - 1 = (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma), \\ p'(\beta) &= 3\beta^2 - 1 = (\beta - \alpha)(\beta - \gamma), \\ p'(\gamma) &= 3\gamma^2 - 1 = (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta). \end{aligned}$$

Y la fórmula que queremos comprobar es equivalente a

$$D_n = \frac{\alpha^{n+4}}{p'(\alpha)} + \frac{\beta^{n+4}}{p'(\beta)} + \frac{\gamma^{n+4}}{p'(\gamma)}.$$

Con lo cual nuestro resultado es coherente, y bastará con comprobar en MAPLE que

$$\frac{\alpha^{n+4}}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{\beta^{n+4}}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + \frac{\gamma^{n+4}}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$$

da exactamente los números de Padovan D_0, D_1, D_2 para $n = 0, 1, 2$. Si se cumple para estos 3 valores, por ser de orden 3, podemos darla por válida.

Con $f_{solve}()$ se calculan las raíces características. Después, guardados estos resultados en tres variables y definida la función f con la fórmula que queremos comprobar, evaluamos esta función con un bucle for para distintos valores de n (p.ej de 0 a 16).

Así obtenemos los primeros 16 términos, que efectivamente son 1,1,1,2,2,3,4,5,7,9... con un ínfimo error de decimales.

→ Para más detalles, ver el último capítulo / apartado de nuestro trabajo, que incluye programación con MAPLE (programa 1).

El que $exp = n + 4$ es debido a que así subsanamos el desplazamiento que tenemos en nuestra definición de Padovan al empezar cuatro índices más adelante. \square

Nota: Hay que tener en cuenta entonces, que nosotros hemos substituido n por $n + 4$ y que esta fórmula no es exactamente la que aparece en [35] u otras fuentes, en las que $exp = n$. Una forma de Binet que corresponde a una definición de la sucesión de Padovan que comienza antes, con 0,0,1,0,1,1,1,2,2,3,4,5,7,9...

Dado que las magnitudes de las raíces complejas β y $\bar{\beta}$ son menores que 1 (con MAPLE y la función $abs()$ se calcula rápidamente su módulo), las potencias de estas raíces se acercan a 0 para n grandes y $D_n - p\alpha^n$ tiende a cero ($D_n \approx p\alpha^n$).

A su vez, tanto en [37, p.826] como en [5], se muestra que la razón entre términos consecutivos en la sucesión de Padovan se aproxima al número plástico ψ , cumpliéndose, también en esta ocasión, el **límite**:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_{n+1}}{D_n} = \psi.$$

Nos queda definir los números de Padovan por matrices. Pudiéndose definir a partir de la misma matriz generadora que nos apareció anteriormente en la forma matricial para la sucesión de Perrin.

$$\text{Sea } \mathbf{Q}^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \text{ la matriz generadora.}$$

Los números de Padovan se pueden escribir con esta **matriz**, tal que

$$\begin{bmatrix} D_{n-5} & D_{n-3} & D_{n-4} \\ D_{n-4} & D_{n-2} & D_{n-3} \\ D_{n-3} & D_{n-1} & D_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \mathbf{Q}^n, \quad \forall n \geq 5.$$

Observamos que en esta fórmula quedan unos términos de Padovan con unos subíndices un tanto peculiares (no tenemos directamente los $D_n, D_{n+1}...$) y además, esta forma matricial sólo se puede usar para $n \geq 5$. Sin embargo, esto no es ningún problema, siempre podemos hacer las correspondientes modificaciones para subsanar este desplazamiento.

Una forma matricial igualmente válida y concorde con nuestra definición de la sucesión de Padovan es

$$\begin{bmatrix} D_{n-1} & D_{n+1} & D_n \\ D_n & D_{n+2} & D_{n+1} \\ D_{n+1} & D_{n+3} & D_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{n+4} = \mathbf{Q}^{n+4}, \quad \forall n \geq 1.$$

Al igual que para otras sucesiones, tenemos otras curiosas identidades.

Una de las más importantes y que se puede demostrar fácilmente por inducción es la siguiente.

Propiedad 4.9. La sucesión de Padovan satisface:

$$D_n^2 - D_{n+1}D_{n-1} = D_{-n-7}.$$

Luego, también es de utilidad saber que si tenemos índices negativos podemos seguir trabajando con ellos, con la siguiente relación.

Propiedad 4.10. Sea $n > 0$, es cierto que

$$D_{-n} = D_{-n+3} - D_{-n+1}.$$

No nos faltan tampoco propiedades con sumatorios, números combinatorios... dejamos aquí, por simple curiosidad, un par de ellas que aparecen en [28]. Como la suma de los primeros n términos de la sucesión de Padovan que es 2 menos que D_{n+5} , es decir,

Propiedad 4.11. Para los números de Padovan D_n , se verifica que

$$\sum_{k=0}^n D_k = D_{n+5} - 2, \quad \sum_{n=2m+k} \binom{m}{k} = D_{n-2}.$$

Por supuesto, entre las expresiones con sumatorios, en [5] encontramos también la función generadora de la sucesión de Padovan.

Propiedad 4.12. Cuando $|X| < \frac{1}{\psi}$, tenemos la serie convergente,

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_n X^n = \frac{1+X}{1-X^2-X^3}, \quad \text{función generadora.}$$

Esto se puede usar para probar identidades que involucran productos de la secuencia de Padovan con términos geométricos, como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_n}{r^n} = \frac{r^2(r+1)}{r^3-r-1}.$$

Como la sucesión de Padovan es semejante a la sucesión de Fibonacci, al igual que ésta última, tiene muchas **aplicaciones**. Veamos algunas.

- En el área de la combinatoria, hay claros ejemplos. Mencionamos aquí un par de ellos, pero existen más.

- ▷ D_n es el número de formas de escribir $n+2$ como una suma ordenada en la que cada término es 2 o 3, es decir, el número de composiciones de $n+2$ en las que cada sumando es 2 o 3. Por ejemplo, para $n=6$ hay $D_6=4$ formas de escribir $8=n+2$ como una suma ordenada de 2 y 3:

$$2+2+2+2, \quad 2+3+3, \quad 3+2+3, \quad 3+3+2.$$

- ▷ D_n también es el número de formas de escribir n como una suma ordenada palindrómica en la que ningún término es 2. Por ejemplo, para $n=6$ hay $D_6=4$ maneras de escribir $n=6$ como una suma ordenada palindrómica en la que ningún término es 2:

$$6, \quad 3+3, \quad 1+4+1, \quad 1+1+1+1+1+1.$$

- De manera similar a los números de Fibonacci, que se pueden generalizar a un conjunto de polinomios llamados polinomios de Fibonacci, los números de Padovan se pueden generalizar para producir los polinomios de Padovan.

- Si se observan las diagonales en el triángulo de Pascal o de Tartaglia, éstas generan precisamente la sucesión de Padovan cuando sumamos los números diagonales como en la imagen.

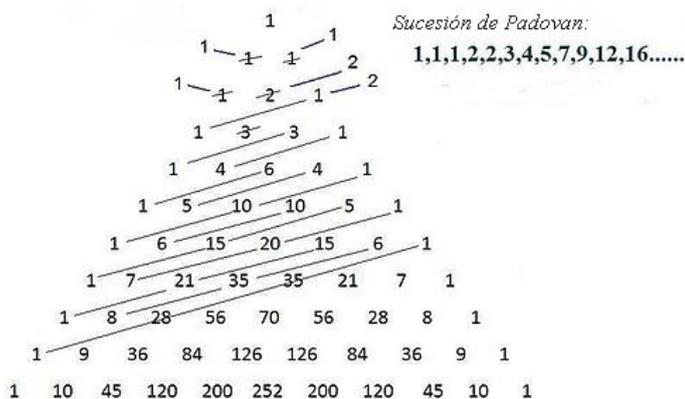


Figura 4.1: Padovan y el triángulo de Pascal

- Se puede formar una espiral basándose en la conexión de las esquinas de un conjunto de cuboides tridimensionales. Esta es la espiral cuboide de Padovan, donde los lados sucesivos de dicha espiral tienen longitudes que son los números de Padovan multiplicados por $\sqrt{2}$. Por otro lado, está la espiral que se forma por la relación de los números de Padovan con el número plástico, característica que también presentan los números de Perrin y que vamos a ver a continuación.

4.3.1. Relación entre las sucesiones de Perrin y Padovan

Como hemos ido observando, las sucesiones de Padovan y de Perrin son sucesiones compañeras, es decir, con la misma relación de recurrencia, pero condiciones iniciales diferentes. En concreto, se comportan como las sucesiones de Fibonacci (Padovan) y de Lucas (Perrin). Por ello, a parte de las características que ya hemos ido mencionado, comparten algunas propiedades.

Igual que los números de Fibonacci y los de Lucas intervenían en la construcción de la espiral áurea, existe una espiral no tan conocida formada por triángulos equiláteros como la de la imagen.

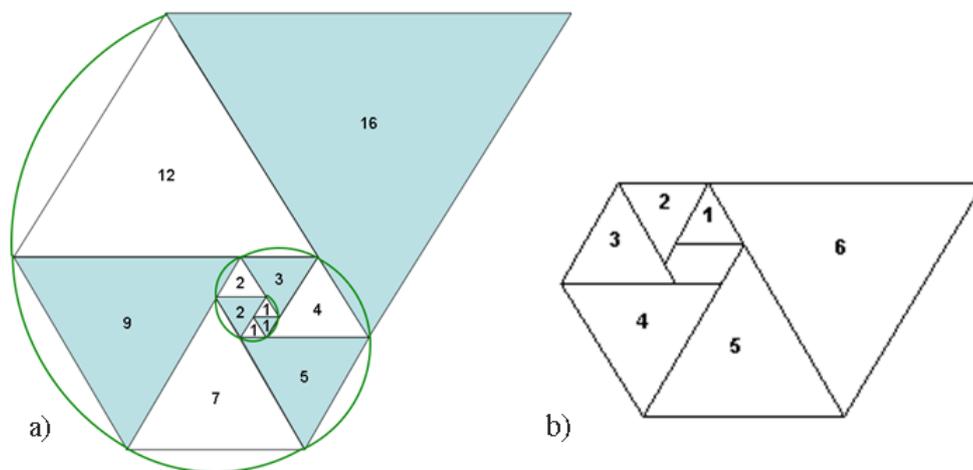


Figura 4.2: Espiral de triángulos equiláteros

Si nos fijamos en la figura a), la longitud de estos lados son números de Padovan (pueden ser de Perrin), números que cumplen la relación de recurrencia $w_n = w_{n-2} + w_{n-3}$, así como también cumplen la recurrencia $w_n = w_{n-1} + w_{n-5}$, dado que cada triángulo comparte un lado con otros dos. Así, la figura b) nos aporta una prueba visual clara de que ambas sucesiones no sólo tienen en común la relación de recurrencia de su definición, sino también la otra relación descrita. Las recurrencias que pueden cumplir son infinitas de hecho, basta con reemplazar repetidamente w_m por $w_{m-2} + w_{m-3}$ para descubrir recurrencias adicionales.

De todos modos, la relación de recurrencia $w_n = w_{n-1} + w_{n-5}$ la podemos ver también como una consecuencia del hecho de que el polinomio característico de ambas sucesiones, $x^3 - x - 1$, divide a un polinomio característico de una sucesión recurrente de orden 5. Algo que ya vimos cuando hablamos de su raíz real, el número plástico, y teníamos que

$$x^5 - x^4 - 1 = (x^3 - x - 1)(x^2 - x + 1).$$

Teniendo en cuenta precisamente las relaciones de recurrencia, y con una sencilla demostración por el principio de inducción, existe una relación que nos permite obtener la sucesión de Perrin a partir de la sucesión de Padovan. Se cumple la siguiente fórmula:

$$\boxed{E_n = D_{n+1} + D_{n-10}}$$

Vistas las formas matriciales de ambas sucesiones, ya sabemos que ambas utilizan la misma matriz elevada a la n . Entonces, podemos expresarlas en una matriz conjunta y que se podría comprobar fácilmente por el Principio de Inducción.

Teorema 4.13. Para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$ tenemos,

$$\begin{bmatrix} D_{n-3} & E_n \\ D_{n-2} & E_{n+1} \\ D_{n-1} & E_{n+2} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^n \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A partir de este resultado matricial, podemos obtener relaciones entre los números de Padovan y los números de Perrin, como por ejemplo, la siguiente proposición.

Proposición 4.14. Para todo m, n enteros tales que $5 \leq m < n$, se cumple la relación:

$$E_n = D_{m-5} \cdot E_{n-m} + D_{m-3} \cdot E_{n-m+1} + D_{m-4} \cdot E_{n-m+2}.$$

Demostración. Aplicando propiedades de las matrices,

$$\mathbf{Q}^n \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^m \left(\mathbf{Q}^{n-m} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right)$$

Por definición de la matriz \mathbf{Q} , su relación con la matriz de Padovan, y por el teorema anterior,

$$\begin{bmatrix} D_{n-3} & E_n \\ D_{n-2} & E_{n+1} \\ D_{n-1} & E_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{m-5} & D_{m-3} & D_{m-4} \\ D_{m-4} & D_{m-2} & D_{m-3} \\ D_{m-3} & D_{m-1} & D_{m-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{n-m-3} & E_{n-m} \\ D_{n-m-2} & E_{n-m+1} \\ D_{n-m-1} & E_{n-m+2} \end{bmatrix}$$

Multiplicando las matrices e igualando los términos correspondientes obtenemos varias relaciones, entre ellas la que queríamos demostrar. \square

Información sobre estos resultados y las formas matriciales se encuentran en [41]. Además, aprovechando la falta de unanimidad en la definición de la sucesión de Padovan, en el artículo utilizan esto a su favor para definirla de tal forma que comience unos términos antes, quedando así la matriz de Padovan y este último teorema que hemos dado, con una notación más bonita, donde los subíndices son siempre positivos para $n \geq 1$ y con una matriz conjunta más uniforme (en el sentido que, tanto números de Padovan como números de Perrin, tienen los mismos subíndices).

Hemos visto también la relevancia de los números primos. En concreto, cuando hablábamos de ellos hemos mencionado los números de Fermat, y es que podemos encontrar resultados que establecen cuáles son los números de la sucesión de Padovan y de la de Perrin que son además números de Fermat.

Teorema 4.15.

- a) Los únicos números de Fermat en la sucesión de Padovan son $D_5 = 3$ y $D_7 = 5$.
- b) Los únicos números de Fermat en la sucesión de Perrin son $E_0 = E_3 = 3$, $E_5 = E_6 = 5$ y $E_{10} = 17$.

Demostración. Recordemos los números de Fermat tenían la forma $2^{2^m} + 1$. Luego en esta demostración primero se trata de resolver las ecuaciones diofánticas:

$$D_n = 2^m + 1, \quad E_n = 2^m + 1.$$

Se resuelven rápidamente por computación.

Finalmente, mediante acotaciones y recurriendo a algunos resultados (entre ellos la forma análoga de Binet para Padovan y Perrin) se acaba determinando cuáles de estas soluciones son los únicos números que son de Fermat. Procedimiento completo en [35].

Nota: No debería sorprendernos que si en a) son números de Fermat el 3 y el 5, también en b) lo sean todos los términos de la sucesión de Perrin que toman esos valores. □

Vistas las sucesiones de Padovan y de Perrin, que son de las más estudiadas y conocidas de orden 3, nos preguntamos por ejemplos de sucesiones más complejas o de orden superior.

Ya la sucesión de Padovan presenta características similares a la de Fibonacci. Luego, una cuestión interesante es ver si una sucesión tan conocida como la de Fibonacci se puede extender a sucesiones de orden superior del estilo a la que teníamos de orden 2. Efectivamente, surgen sucesiones como la de Tribonacci, Tetranacci...

4.4. Sucesiones de Tribonacci, Tetranacci y de orden n

Definición 4.16. Una **sucesión de Fibonacci de orden n** es una sucesión entera en la que cada elemento de la sucesión es la suma de los n elementos anteriores (con la excepción de los n primeros elementos que se fijan).

Por tanto, la sucesión de números de Fibonacci habitual es una sucesión de Fibonacci de orden 2.

Los siguientes casos que se han investigado más a fondo son los de Tribonacci y Tetranacci, para $n = 3$ y $n = 4$ respectivamente.

En esta ocasión, la sucesión de Tribonacci no recibe el nombre por su descubridor, sino que *tri-* indica el orden 3 y *-bonacci* haciendo referencia a Fibonacci. Esta denominación fue sugerida por Feinberg⁵ en 1963 para una sucesión que ya había sido descrita formalmente por primera vez mucho antes, en 1914 por Agronomof.

Esta sucesión de orden 3, como la de Padovan y la de Perrin, comienza entonces con tres términos predeterminados y cada término posterior es la suma de los tres términos anteriores, es decir, tenemos:

Definición 4.17. Sucesión recursiva de Tribonacci

Para todo $n \geq 0$ y sea T_n el n -ésimo número de Tribonacci, se define de forma recurrente la sucesión:

1. $T_0 = T_1 = 0, T_2 = 1,$ (Condiciones iniciales)
2. $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}, \forall n \geq 3$ (Relación de recurrencia)

Por tanto, los primeros números de Tribonacci son:

$T_0 = 0$	$T_6 = 7$	$T_{12} = 274$	$T_{18} = 10609$	$T_{24} = 410744$
$T_1 = 0$	$T_7 = 13$	$T_{13} = 504$	$T_{19} = 19513$	$T_{25} = 755476$
$T_2 = 1$	$T_8 = 24$	$T_{14} = 927$	$T_{20} = 35890$	$T_{26} = 1389537$
$T_3 = 1$	$T_9 = 44$	$T_{15} = 1705$	$T_{21} = 66012$	$T_{27} = 2555757$
$T_4 = 2$	$T_{10} = 81$	$T_{16} = 3136$	$T_{22} = 121415$	$T_{28} = 4700770$
$T_5 = 4$	$T_{11} = 149$	$T_{17} = 5768$	$T_{23} = 223317$	$T_{29} = 8646064$

Tabla 4.3: Números de Tribonacci

Términos que se pueden encontrar, junto a más información de esta sucesión, en la enciclopedia OEIS con el enlace: <https://oeis.org/A000073>

Como sucedía con Padovan, en algunos textos y entre ellos en el artículo [10] de Feinberg, la definición no es exactamente ésta y los números de Tribonacci empiezan más adelante a partir de los valores 1,1,2,4,7... tenemos cuidado con esto.

Para la sucesión de Tribonacci hay una **forma de Binet**, que nos permite expresar los T_n con una expresión exacta y así obtener directa y explícitamente su valor.

$$T_n = \frac{\alpha^n}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{\beta^n}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + \frac{\gamma^n}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)},$$

donde α, β, γ son las tres raíces del polinomio característico $x^3 - x^2 - x - 1$.

De forma concisa y general, tienen una forma de Binet del tipo:

$$T_n = p\alpha^n + q\beta^n + r\gamma^n,$$

con p, q, r constantes.

(Damos por calculado el valor de estas constantes. Se hallan como veces anteriores.)

⁵Mark Feinberg, un estudiante de 14 años, fue ganador del estado de Pennsylvania con su proyecto de Tribonacci en la Junior Academy of Science. Su trabajo se publicó y tuvo un gran impacto, aunque no fue el único que estudió esta sucesión. Hubo ya un primer uso no intencional de Tribonacci en “El origen de las especies” de Charles R. Darwin. En concreto, aparece en el ejemplo que ilustra el crecimiento de la población de elefantes.

Estas fórmulas se encuentran en [42], y se pueden comprobar también fácilmente. Se procede como hicimos recientemente para Padovan, es decir, primero calculamos las raíces del polinomio, que en este caso son:

$$\alpha = \frac{1}{3} \left(\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} + 1 \right),$$

$$\beta = \frac{1}{6} \left(2 - \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} - \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} + \sqrt{3}i \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} - \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} \right) \text{ y } \gamma = \bar{\beta},$$

con valores aproximados

$$\alpha = 1,8393, \quad \beta = -0,4196 + i0,6063, \quad \gamma = -0,4196 - i0,6063.$$

Y simplemente teniendo cuidado con los índices n (se reajustan según la definición de Tribonacci que se esté usando) vemos que esta forma de Binet nos da los valores de la sucesión esperados para $n = 0, 1, 2, \dots$

Por ejemplo, esta fórmula aparece igualmente en [6], pero con índices / exponentes distintos. A mayores, incluye cómo son estas formas de Binet para casos más generalizados de Tribonacci, con una relación de recurrencia del tipo:

$$t_n = at_{n-1} + bt_{n-2} + ct_{n-3}, \quad n \geq 3$$

con a, b, c constantes fijas.

Tenemos también que el cociente o la razón de términos consecutivos en la sucesión de Tribonacci se aproxima a $\varphi_3 = 1,839\dots$, es decir, se cumple el siguiente **límite**.

Propiedad 4.18. Sea T_n el n -ésimo número de Tribonacci, se verifica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_{n+1}}{T_n} = 1,83928675521416\dots = \varphi_3$$

Dicha proporción es conocida como la *constante de Tribonacci*, cuyo valor exacto es

$$\varphi_3 = \frac{1 + \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}}{3} \approx 1,839286755214161$$

Además, es una de las raíces del polinomio $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$, y por tanto, satisface de igual manera la ecuación $x + x^{-3} = 2$.

Los números de Tribonacci se implementan a veces a través de la **función generadora**.

Propiedad 4.19. Sea $(T_n)_{n \geq 0}$ la sucesión de Tribonacci, se cumple

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n X^n = \frac{X^2}{1 - X - X^2 - X^3}, \quad \text{función generadora.}$$

Demostración. No es más que usar la definición recursiva cuando corresponde.

Denotamos por $g(X) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n X^n$ a la función generadora. Se tiene que

$$\begin{aligned} (1 - X - X^2 - X^3)g(X) &= (1 - X - X^2 - X^3) \sum_{n=0}^{\infty} T_n X^n \\ &= T_0 + (T_1 - T_0)X + (T_2 - T_1 - T_0)X^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (T_n - T_{n-1} - T_{n-2} - T_{n-3})X^n. \end{aligned}$$

Ya que por definición $T_0 = T_1 = 0$ y $T_n - T_{n-1} - T_{n-2} - T_{n-3} = 0$ para todo $n \geq 3$, entonces $(1 - X - X^2 - X^3)g(X) = T_2 X^2$ con $T_2 = 1$.

Luego, despejando de aquí, $g(X)$ es $X^2/(1 - X - X^2 - X^3)$. □

En esta ocasión no hemos dado una forma matricial exacta, aunque sí que se puede hacer uso de la definición recursiva para expresar, por ejemplo, que

$$\begin{bmatrix} T_{n+1} \\ T_n \\ T_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_n \\ T_{n-1} \\ T_{n-2} \end{bmatrix}$$

En algunas fuentes y en la OEIS, se expresan también algunos términos, en este caso el T_{n+2} y el T_{n-1} , como el primer número de arriba a la izquierda de la matriz resultante de elevar a la n determinadas matrices 3×3 formadas por 0's y 1's. Aún así, no hemos encontrado un consenso respecto a la forma matricial como otras veces.

Por último, en cuanto a las **aplicaciones** de esta sucesión, interviene en muchos ámbitos, puesto que ya aparecía en algunos problemas de la naturaleza que proponía Darwin.

Esta sucesión también crea una espiral que se construye a partir de rectángulos cuyo alto y ancho son dos números consecutivos de Tribonacci, llamados los “rectángulos plateados”.

En [21, Cap.46] encontramos algunos ejemplos más y vemos su similitud con aquellos que mencionamos para la sucesión de Fibonacci de orden 2. Por ejemplo,

- En combinatoria, en el ejemplo 1.39 teníamos que un entero n se podía descomponer de F_{n+1} formas diferentes, utilizando sumas de 1's y 2's. Si ahora suponemos que se pueden utilizar sumandos de 1's, 2's y 3's, es cierto que el número de composiciones que se pueden hacer de un entero $n \geq 1$ con sumas de este tipo es T_{n+2} .
- En teoría de grafos, se habla de árboles enraizados que siguen la estructura recursiva de T_n .

(Si queda alguna duda sobre estas aplicaciones consultar el libro de Koshy mencionado).

Por supuesto, los números primos siguen teniendo un papel esencial. Existen estudios, como [9], que contienen resultados curiosos como el siguiente:

- Sea p un número primo con $p \neq 11, 19$. Entonces, $p \mid T_p$ si y sólo si $p = x^2 + 11y^2$ para $x, y \in \mathbb{Z}$.

Ahora, estudiamos la sucesión de Tetranacci. Denominada así también por Feinberg, con *Tetra-* que indica el orden 4 y *-nacci* haciendo referencia a Fibonacci.

Definición 4.20. Sucesión recursiva de Tetranacci

Para todo $n \geq 0$ y sea \mathcal{T}_n el n -ésimo número de Tetranacci, se define de forma recurrente la sucesión:

1. $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 = 0, \mathcal{T}_3 = 1,$ (Condiciones iniciales)
2. $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}_{n-1} + \mathcal{T}_{n-2} + \mathcal{T}_{n-3} + \mathcal{T}_{n-4}, \quad \forall n \geq 4$ (Relación de recurrencia)

Por tanto, los números de tetranacci comienzan con cuatro términos predeterminados, cada término posterior es la suma de los cuatro términos anteriores.

Los primeros números de tetranacci son los siguientes.

$\mathcal{T}_0 = 0$	$\mathcal{T}_6 = 4$	$\mathcal{T}_{12} = 208$	$\mathcal{T}_{18} = 10671$	$\mathcal{T}_{24} = 547337$
$\mathcal{T}_1 = 0$	$\mathcal{T}_7 = 8$	$\mathcal{T}_{13} = 401$	$\mathcal{T}_{19} = 20569$	$\mathcal{T}_{25} = 1055026$
$\mathcal{T}_2 = 0$	$\mathcal{T}_8 = 15$	$\mathcal{T}_{14} = 773$	$\mathcal{T}_{20} = 39648$	$\mathcal{T}_{26} = 2033628$
$\mathcal{T}_3 = 1$	$\mathcal{T}_9 = 29$	$\mathcal{T}_{15} = 1490$	$\mathcal{T}_{21} = 76424$	$\mathcal{T}_{27} = 3919944$
$\mathcal{T}_4 = 1$	$\mathcal{T}_{10} = 56$	$\mathcal{T}_{16} = 2872$	$\mathcal{T}_{22} = 147312$	$\mathcal{T}_{28} = 7555935$
$\mathcal{T}_5 = 2$	$\mathcal{T}_{11} = 108$	$\mathcal{T}_{17} = 5536$	$\mathcal{T}_{23} = 283953$	$\mathcal{T}_{29} = 14564533$

Tabla 4.4: Números de Tetranacci

Encontramos dicha sucesión en: <https://oeis.org/A000078>

A parte de esta definición recurrente, una expresión exacta para el n -ésimo número de Tetranacci es la **forma de Binet**, que para $n \geq 0$ nos da explícitamente que

$$\mathcal{T}_n = \frac{\alpha^n}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)} + \frac{\beta^n}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)(\beta - \delta)} + \frac{\gamma^n}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)(\gamma - \delta)} + \frac{\delta^n}{(\delta - \alpha)(\delta - \beta)(\delta - \gamma)},$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son las cuatro raíces características del polinomio $x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$ asociado a la relación de recurrencia de Tetranacci.

Estamos entonces ante una fórmula que, escrita de forma concisa es

$$\mathcal{T}_n = p\alpha^n + q\beta^n + r\gamma^n + s\delta^n$$

con p, q, r, s constantes.

Además, el cociente de términos consecutivos de la sucesión de Tetranacci se aproxima a una de estas cuatro raíces. En concreto, tenemos el siguiente **límite**.

Propiedad 4.21. Sea \mathcal{T}_n el n -ésimo número de Tetranacci, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{T}_{n+1}}{\mathcal{T}_n} = 1,927561975482925\dots = \varphi_4$$

El valor de esta razón, es conocido también como la *constante de Tetranacci*, cuyo valor exacto en términos de radicales es

$$\varphi_4 = \left(r_1 + \frac{1}{4}\right) + \sqrt{\left(r_1 + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{2r_2}{r_1} \left(r_1 + \frac{1}{4}\right) + \frac{7}{24r_1} + \frac{1}{6}} \approx 1,927561975482925$$

dónde

$$r_1 = \sqrt{r_2 + \frac{11}{48}}, \quad r_2 = \frac{\sqrt[3]{3\sqrt{1689} - 65} - \sqrt[3]{3\sqrt{1689} + 65}}{12\sqrt[3]{2}}.$$

Luego, el límite está tendiendo a la raíz real positiva del polinomio $x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0$, y también cumple la ecuación $x + x^{-4} = 2$.

Los números de Tetranacci tienen su correspondiente **función generadora**.

Propiedad 4.22. Sea $(\mathcal{T}_n)_{n \geq 0}$ la sucesión de Tetranacci, es cierto que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{T}_n X^n = \frac{X^3}{1 - X - X^2 - X^3 - X^4}, \quad \text{función generadora.}$$

Para terminar con estas sucesiones de Fibonacci de orden n , mencionamos que también se han calculado los números de pentanacci, hexanacci y heptanacci, que son los siguientes (con su correspondiente enlace en la OEIS).

- Números de Pentanacci: <https://oeis.org/A001591>
0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 4, 8, 16, 31, 61, 120, 236, 464, 912, 1793, 3525, 6930, 13624 ...
- Números de Hexanacci: <https://oeis.org/A001592>
0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 63, 125, 248, 492, 976, 1936, 3840, 7617, 15109 ...
- Números de Heptanacci: <https://oeis.org/A122189>
0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 127, 253, 504, 1004, 2000, 3984, 7936, 15808 ...
- Números de Octanacci: <https://oeis.org/A079262>
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 255, 509, 1016, 2028, 4048, 8080, 16128 ...
- Números de Enneanacci: <https://oeis.org/A104144>
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 511, 1021, 2040, 4076, 8144, 16272 ...

Si nos fijamos, en nuestras definiciones recurrentes, los n términos que necesitamos fijar son: 0 los $n - 1$ primeros y 1 la última condición inicial fijada.

Calculándose el resto de números de la sucesión como suma de los n anteriores.

Sin embargo, no siempre los vamos a encontrar definidos así, en algunas fuentes optan por omitir términos innecesarios y empezar más adelante la sucesión, para así evitar tantos ceros.

En todas ellas, tenemos que existe el **límite** del cociente entre términos consecutivos. Este límite siempre es una raíz de la ecuación $x + x^{-n} = 2$, equivalente a la ecuación característica asociada a la relación de recurrencia de la sucesión de n -nacci.

Dicha raíz se denota por φ_n , llamada *constante n -nacci* y valor hacia el que tiende el límite.

Por supuesto, no todas las sucesiones de orden 3 o superior son sucesiones como la de Fibonacci o como la de Lucas (en el caso de Perrin). Hay muchas más sucesiones enteras recurrentes que las que hemos visto en este trabajo, por ello, cerramos este capítulo con unas últimas sucesiones adicionales.

4.5. Sucesión adicional: Narayana

La sucesión de las vacas de Narayana⁶, o simplemente sucesión de Narayana es una sucesión de enteros que ya apareció en el siglo XIV cuando Narayana Pandit o Pandita⁷ estudió el crecimiento

⁶Se denomina así para distinguirla bien de los números de Narayana, que son totalmente diferentes (no los términos de esta sucesión). Forman una matriz triangular de números naturales, llamada triángulo de Narayana, y son conocidos en combinatoria y problemas de conteo. Deben además su nombre a otro matemático canadiense T. V. Narayana (1930-1987).

⁷Matemático de la India (1340 - 1400 aprox.) Su obra más famosa es "*Ganita Kaumudi*" del año 1356, que anticipó muchos desarrollos en combinatoria y trata mayormente sobre aritmética, con cierta influencia de otro matemático, Bhaskara II. Como muchos otros escritores aritméticos indios, estudió algoritmos multiplicativos, pero diferenciándose con su aportación de siete métodos para elevar al cuadrado. Destacando, además, los últimos dos capítulos de su obra, siendo uno dedicado a las secuencias numéricas y el otro contiene una discusión detallada de los cuadrados mágicos y figuras similares. Poco más se sabe sobre él, salvo las contribuciones de dichos escritos al álgebra (incluye investigaciones sobre la ecuación de Pell $nx^2 + 1 = y^2$, soluciones de ecuaciones indeterminadas de orden superior, operaciones matemáticas con cero, varias reglas geométricas, métodos de factorización de enteros...)

y la multiplicación de las vacas, con un problema similar al problema de los conejos de Fibonacci: *A partir de su cuarto año de vida, cada vaca tiene un becerro/a cada año ¿Cuántas vacas tengo según pase el tiempo?* La sucesión de Narayana responde al número de vacas presentes cada año.

Este problema de Narayana, por tanto, es modelado de la siguiente manera recurrente.

Definición 4.23. Sucesión recursiva de Narayana

Para todo $n \geq 0$ y sea N_n el n -ésimo número de Narayana, queda definida la sucesión como sigue,

1. $N_0 = N_1 = N_2 = 1$, (Condiciones iniciales)
2. $N_n = N_{n-1} + N_{n-3}$, $\forall n \geq 3$ (Relación de recurrencia)

Es una sucesión con las mismas condiciones iniciales que teníamos para Padovan, pero con una relación de recurrencia en las que interviene el término N_{n-1} en vez de N_{n-2} .

Con esta definición, los 30 primeros términos de la sucesión de las vacas de Narayana son los que aparecen en la siguiente tabla.

$N_0 = 1$	$N_6 = 6$	$N_{12} = 60$	$N_{18} = 595$	$N_{24} = 5896$
$N_1 = 1$	$N_7 = 9$	$N_{13} = 88$	$N_{19} = 872$	$N_{25} = 8641$
$N_2 = 1$	$N_8 = 13$	$N_{14} = 129$	$N_{20} = 1278$	$N_{26} = 12664$
$N_3 = 2$	$N_9 = 19$	$N_{15} = 189$	$N_{21} = 1873$	$N_{27} = 18560$
$N_4 = 3$	$N_{10} = 28$	$N_{16} = 277$	$N_{22} = 2745$	$N_{28} = 27201$
$N_5 = 4$	$N_{11} = 41$	$N_{17} = 406$	$N_{23} = 4023$	$N_{29} = 39865$

Tabla 4.5: Núm. sucesión de las vacas de Narayana

Sucesión con enlace en la OEIS: <https://oeis.org/A000930>

Veamos ahora de forma concisa, las definiciones y características más relevantes de esta sucesión.

Forma de Binet:

$$N_n = \frac{\alpha^{n+2}}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{\beta^{n+2}}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + \frac{\gamma^{n+2}}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}, \quad n \geq 0,$$

donde α, β, γ son las raíces características de la ecuación $x^3 - x^2 - 1 = 0$ asociada a la relación de recurrencia de Narayana.

Además, el cociente de términos consecutivos se acerca a la *razón superdorada*. Se dice que dos cantidades a y b están en la proporción superdorada si el cociente del número mayor dividido por el menor es igual a

$$\Psi = \frac{1 + \sqrt[3]{\frac{29+3\sqrt{93}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{29-3\sqrt{93}}{2}}}{3}$$

Siendo este número justamente la única solución real de nuestra ecuación $x^3 = x^2 + 1$.

Forma matricial:

$$\begin{bmatrix} N_n & N_{n-2} & N_{n-1} \\ N_{n-1} & N_{n-3} & N_{n-2} \\ N_{n-2} & N_{n-4} & N_{n-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \mathbf{A}^n, \quad n \geq 4.$$

Función generadora:

$$\sum_{n=0}^{\infty} N_n X^n = \frac{1}{1 - X - X^3}.$$

A parte de esta sucesión, existe también una generalización de la sucesión de Narayana. Con las k -Narayana sucesiones (veáse [33]), vamos además a comprender mejor la sucesión de las vacas de Narayana y la información que acabamos de dar.

Definición 4.24. Sucesión recursiva de k -Narayana

Para todo $n \geq 0$, y sea $N_n^{(k)}$ el n -ésimo número de k -Narayana, con $k \neq 0$ entero. Se define

1. $N_0^{(k)} = 1, N_1^{(k)} = k, N_2^{(k)} = k^2,$ (Condiciones iniciales)
2. $N_n^{(k)} = kN_{n-1}^{(k)} + N_{n-3}^{(k)}, \quad \forall n \geq 3$ (Relación de recurrencia)

Siendo así, de manera genérica, los primeros términos de una sucesión de k -Narayana:

$$1, k, k^2, k^3 + 1, k^4 + 2k, k^5 + 3k^2, k^6 + 4k^3 + 1, k^7 + 5k^4 + 3k, \dots$$

A continuación, nombramos las sucesiones $(N_n^{(k)})_{n \geq 0}$ de k -Narayana más conocidas, acompañadas de su correspondiente enlace en la OEIS. Tenemos los casos particulares:

- Para $k = 1, (N_n^{(1)})_{n \geq 0} = (N_n)_{n \geq 0}$ es la sucesión de Narayana por excelencia (ya vista - [A000930](#)).
- Para $k = 2, (N_n^{(2)})_{n \geq 0}$ <https://oeis.org/A008998>.
- Para $k = 3, (N_n^{(3)})_{n \geq 0}$ <https://oeis.org/A052541>.
- Para $k = -1, (N_n^{(-1)})_{n \geq 0}$ <https://oeis.org/A050935>.

La **forma de Binet** para estas sucesiones sigue siendo la misma, sólo que con las correspondientes raíces características de cada sucesión, es decir,

$$N_n^{(k)} = \frac{\alpha_k^{n+2}}{(\alpha_k - \beta_k)(\alpha_k - \gamma_k)} + \frac{\beta_k^{n+2}}{(\beta_k - \alpha_k)(\beta_k - \gamma_k)} + \frac{\gamma_k^{n+2}}{(\gamma_k - \alpha_k)(\gamma_k - \beta_k)}, \quad n \geq 0,$$

donde $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ son las raíces características de la ecuación $x^3 - kx^2 - 1 = 0$ correspondiente a la sucesión de k -Narayana.

Por otro lado, disponemos también de la **forma matricial** que define a estas sucesiones en función del valor de k .

Para $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$, tenemos la matriz generadora de k -Narayana,

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz elevada a la n , nos genera los números de las sucesiones de k -Narayana tal que

$$\begin{bmatrix} N_n^{(k)} & N_{n-2}^{(k)} & N_{n-1}^{(k)} \\ N_{n-1}^{(k)} & N_{n-3}^{(k)} & N_{n-2}^{(k)} \\ N_{n-2}^{(k)} & N_{n-4}^{(k)} & N_{n-3}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n = (\mathbf{A}_k)^n, \quad n \geq 4.$$

Y por último, las sucesiones de k -Narayana también tienen todas una **función generadora** que es

$$\sum_{n=0}^{\infty} N_n^{(k)} X^n = \frac{1}{1 - kX - X^3}, \quad k \in \mathbb{Z}, k \neq 0.$$

Damos por finalizadas las sucesiones enteras recurrentes para dar paso a las sucesiones enteras *meta-recurrentes*. Concluimos así nuestro trabajo, con una labor un poco más de investigación, debido a que estas sucesiones son menos conocidas y aún a día de hoy plantean interrogantes.

Capítulo 5

Sucesiones enteras meta-recurrentes

Este tipo de sucesiones surgieron por primera vez en 1979 cuando D. R. Hofstadter publicó su libro “*Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid*” [15]. Este libro y su autor serán los principales protagonistas de este capítulo e incluso se podría decir que del trabajo, ya que fue la motivación que nos llevó a estudiar sucesiones enteras y a adentrarnos en un campo en el que todavía hay muchas preguntas abiertas y datos interesantes por descubrir.

Primero, comenzaremos por introducir el concepto de sucesiones meta-recurrentes, un concepto bastante reciente y novedoso. Sorprende que su aparición fuera en un libro de carácter divulgativo y que tuviera tal impacto, debido al carácter errático y fascinante de estas sucesiones. Ciertamente, algunas con un comportamiento más predecible que otras.

Después, iremos viendo uno por uno los tres ejemplos más destacables, mientras exponemos las propiedades y los enigmas que plantean. Menos en detalle y para cerrar, se encuentran más sucesiones que dejamos por simple curiosidad.

5.1. Introducción y conceptos previos

Nos adentramos en el tema de las sucesiones meta-recurrentes acompañados de Hofstadter y a través de su libro “*Gödel, Escher, Bach*” [15], comúnmente denominado por las siglas *GEB*. Nos referiremos así a él a partir de ahora.

Este libro publicado en 1979 por Douglas Hofstadter, sobre el que iremos descubriendo más cosas en este capítulo, es un libro curioso para lectores curiosos¹. Su forma de distintas narrativas entrelazadas (alterna diálogos y capítulos) le otorgó al autor un Premio Pulitzer de ámbito general y no-ficción, un gran mérito para un libro con cierto carácter científico y matemático.

Es verdad que no sólo expone conceptos fundamentales para las matemáticas, la simetría y la inteligencia. Se exploran también temas comunes, a través de las vidas y obras del lógico Gödel, del artista Escher y el compositor Bach, por ejemplo.

No se trata de las relaciones entre las matemáticas, el arte y la música, sino más bien sobre cómo la cognición emerge de mecanismos neurológicos ocultos.

¹El término *lectores curiosos* hace referencia al escritor, lógico-matemático y fotógrafo Lewis Carroll (1832-1898), más conocido por ser el autor de “*Alicia en el País de las Maravillas*”. El libro de Hofstadter tiene cierta relación con este escritor, puesto que utiliza algunos recursos y personajes imaginarios (como Aquiles y la tortuga), que ya usaba Carroll. Es más, *GEB* es vendido bajo el eslogan “Una fuga metafórica de mentes y máquinas siguiendo el espíritu de Lewis Carroll”.

Dicho con otras palabras, se defiende la idea de que las neuronas individuales en el cerebro se coordinan para crear un sentido unificado de mente coherente, como en una colonia de hormigas.

Así es este libro; lleno de acertijos, metaficción, combinación de palabras, autorreferencias - recursividad, acrósticos... una obra que a través de la ilustración, de metáforas y el análisis defiende los distintos temas. Incluso el propio título ya juega con las siglas *GEB:EGB*, lo que hace aún más sorprendente que un libro que está completamente basado en juegos de palabras, haya sido traducido a varios idiomas².

Uno de estos temas tratados es también la informática. En *GEB* se incluyen discusiones sobre los principios básicos de la lógica, las declaraciones autorreferentes, los sistemas ("sin tipo") e incluso la programación. Hofstadter crea además BlooP y FlooP, dos sencillos lenguajes de programación. Es decir, los libros³ de Hofstadter han ejercido una poderosa influencia en las arquitecturas de los modelos computacionales.

Sin embargo, como ha dicho Hofstadter en alguna ocasión, para nosotros los ordenadores no serán más que una herramienta para explorar la esencia de lo que nos tiene realmente fascinados: la creatividad y la belleza. Una creatividad y novedad que para nosotros reside en las nuevas sucesiones que presentamos a continuación y que encontramos en las páginas de *GEB* [15, p.135 - 139] dedicadas a las sucesiones de números enteros.

Por primera vez, vemos relaciones de recurrencia que tienen la siguiente forma.

Definición 5.1. Se llaman sucesiones de *meta-Fibonacci* o *meta-recurrentes*, aquellas sucesiones con relaciones de recurrencia anidadas, es decir, una recurrencia donde el argumento (índice) que define los términos depende de valores previos de la sucesión.

Hofstadter tuvo tal impacto con sus sucesiones meta-recurrentes, que incluso se dice que una *sucesión de Hofstadter* es, en general, un miembro de una familia de sucesiones enteras relacionadas y definidas por relaciones de recurrencia no lineales.

En [11], aparece una manera más formal y generalizada para referirnos a estas sucesiones. Tenemos también la siguiente definición.

Definición 5.2. Una sucesión de *meta-Fibonacci (generalizada)* es una sucesión de enteros que satisface una relación de recurrencia similar o del tipo:

$$M(n) = \sum_{i=1}^k a_i M(n - M(n - i))$$

para k entero positivo y unos $a_i \in \mathbb{Z}$ fijos.

En este capítulo, por lo general vamos a utilizar más esta notación del tipo $M(n)$, en vez de M_n para el n -ésimo término de una sucesión meta-recurrente. Al tener relaciones de recurrencia anidadas, van a ser más comprensibles de este modo. Así no tendremos que escribir, por ejemplo: $M_n = a_1 M_{n-M_{n-1}} + a_2 M_{n-M_{n-2}} + \dots + a_k M_{n-M_{n-k}}$.

²El propio Hofstadter confiesa que no entraba en sus planes traducir su libro, ya que habría que trabajar con juegos de palabras que dependen incluso de la estructura, como por ejemplo, el diálogo del cangrejo, que dice casi exactamente lo mismo hacia adelante que hacia atrás. Sin embargo, está muy complacido con el resultado, como apasionado de los idiomas que es. Hofstadter es políglota, y además del inglés (lengua materna), habla con fluidez francés e italiano (idioma que habla en casa con sus hijos). Ha estudiado también (en orden descendente de nivel de fluidez alcanzado) alemán, ruso, español, sueco, mandarín, holandés, polaco e hindi.

³Es conocido también por su libro "*I Am a Strange Loop*" publicado en 2007, bastante premiado y donde examina el término *bucle extraño*, un concepto acuñado por él. Además es columnista en el Scientific American ocupándose de la antigua columna "Mathematical Games", que él renombró como "Metamagical Themas" (anagrama).

Antes de comenzar con casos particulares de estas sucesiones, es conveniente comentar algunas **propiedades** que tienen en común todas las sucesiones con una relación de recurrencia meta-recurrente:

- Al tener relaciones de recurrencia anidadas, las sucesiones de meta-Fibonacci y las soluciones vinculadas a ellas, son muy sensibles a la selección de condiciones iniciales.
- Es importante y muy probable la característica de *slowness* o el que una sucesión meta-recurrente sea *lenta* (*slow*). Propiedad global que se refiere a las sucesiones meta-recurrentes cuyos términos consecutivos van aumentando 0 o 1, con un crecimiento lento. Son muy apropiadas para emplear demostraciones por inducción.
- Tener una función generadora es otra propiedad global más que probable, sobre todo para sucesiones con soluciones cuasi-periódicas.
- Hay sucesiones más enigmáticas o caóticas, para las que al menos se pueden conjeturar propiedades globales basadas en análisis y aproximaciones a otras sucesiones, estudiando similitud, período...

Muchas de estas propiedades se comentaron en la conferencia de Alkan y Aybar de 2019 [3], donde se plantearon también los principales **problemas** que se presentan cuando estudiamos dichas sucesiones:

- Conseguir clasificar soluciones de una relación de recurrencia anidada es extremadamente difícil, ya que muchas veces pequeños cambios cuando fijamos las condiciones iniciales puede hacer que ocurra un cambio inesperado. Luego, encontrar patrones o clasificar, para así encontrar similitudes de comportamiento, es realmente complicado la mayoría de las veces.
- Por tanto, por el mismo motivo, es bastante complejo observar cierta conexión o parecido entre diferentes relaciones de meta-recurrencia.
- Sus demostraciones, aunque se lleven a cabo por inducción, tienen hipótesis inductivas muy enrevesadas y son extremadamente resistentes a cualquier intento de demostración, debido a las componentes anidadas. No hay forma fácil de generalizar las hipótesis para diferentes tipos de recurrencias y, en muchas ocasiones, cada recurrencia necesita o tiene sus propias condiciones adicionales.
- Estamos frente a un campo todavía bastante inexplorado en lo que se refiere a conocer características de comportamiento de sucesiones meta-recurrentes y relaciones de recurrencia no lineales.
- Establecer la conexión entre relaciones de meta-recurrencia y soluciones puede ser un problema.
- Conseguir generalizaciones que engloven similitudes de comportamiento, por tanto, es arduo.
- Encontrar fórmulas o soluciones explícitas (como la forma de Binet) es también todo un desafío.

Todo esto (el que sean tan enigmáticas y a la vez con posibles patrones), hace que estas sucesiones sean potencialmente útiles para aplicaciones en criptografía, por ejemplo.

Profundicemos, viendo algunas sucesiones meta-recurrentes en concreto.

5.2. G-sucesión de Hofstadter (y H-sucesión)

La primera sucesión meta-recurrente más sencilla que nos encontramos, es también la que nos introduce primero Douglas Hofstadter⁴ en su libro *GEB* en 1979.

La sucesión G de Hofstadter se define de la siguiente manera:

Definición 5.3. G-sucesión meta-recursiva de Hofstadter

Para todo $n \geq 0$ y sea $G_n = G(n)$ el n-ésimo número G, definimos:

1. $G(0) = 0$, (Condición inicial)
2. $G(n) = n - G(G(n - 1))$, $\forall n > 0$ (Relación de meta-recurrencia)

Siendo los primeros términos de esta sucesión:

$G_0 = 0$	$G_6 = 4$	$G_{12} = 8$	$G_{18} = 11$	$G_{24} = 15$
$G_1 = 1$	$G_7 = 4$	$G_{13} = 8$	$G_{19} = 12$	$G_{25} = 16$
$G_2 = 1$	$G_8 = 5$	$G_{14} = 9$	$G_{20} = 12$	$G_{26} = 16$
$G_3 = 2$	$G_9 = 6$	$G_{15} = 9$	$G_{21} = 13$	$G_{27} = 17$
$G_4 = 3$	$G_{10} = 6$	$G_{16} = 10$	$G_{22} = 14$	$G_{28} = 17$
$G_5 = 3$	$G_{11} = 7$	$G_{17} = 11$	$G_{23} = 14$	$G_{29} = 18$

Tabla 5.1: Números G

En la OEIS con enlace: <https://oeis.org/A005206>

Si observamos los términos, la diferencia entre valores consecutivos es siempre 0 o 1, con lo cual una propiedad básica de esta sucesión, es su *crecimiento lento*. Lo demostraremos.

Su relación de recurrencia se puede escribir de una forma más simple,

$$G(n) = n - G(\lfloor n\varphi^{-1} \rfloor)$$

con $G(0) = 0$ y $G(1) = 1$ condiciones iniciales.

φ es la proporción áurea y $\lfloor x \rfloor$ es la función suelo que representa la parte entera de un número x .

Esto incluye, entonces la siguiente forma explícita para los $G(n)$:

$$G(n) = \lfloor (n + 1)\varphi \rfloor - n - 1 = \lfloor (n + 1)/\varphi \rfloor = \lfloor (n + 1)\varphi^{-1} \rfloor$$

donde si $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ es el número áureo, $\varphi^{-1} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Resultado que vamos a demostrar a continuación, tal y como hicieron Granville y Rasson en [13]. Pero primero, unos lemas previos.

⁴Estadounidense nacido en febrero de 1945 (76 años en la actualidad) e hijo del físico R.Hofstadter, ganador de un premio Nobel. Es una persona muy polifacética, estudia ciencia cognitiva, filosofía de la mente, física y literatura. Sus investigaciones incluyen conceptos como el sentido del yo en relación con el mundo externo, la conciencia, creación de analogías, arte y creación, traducción literaria y descubrimientos en matemáticas y física. Se graduó con Distinción en matemáticas por la Universidad de Stanford y recibió su Ph.D. en física en la de Oregon, donde su estudio lo llevó a descubrir el fractal conocido como mariposa de Hofstadter. También existe la llamada ley de Hofstadter. Resumiendo, se le puede considerar que tiene conocimientos tanto en el mundo científico como en el de las humanidades y artes.

Lema 5.4. Si $n > 0$, entonces $(n\varphi^{-1} - \lfloor n\varphi^{-1} \rfloor) + (n(\varphi^{-1})^2 - \lfloor n(\varphi^{-1})^2 \rfloor) = 1$.

Demostración. Primero de todo, tenemos que $\lfloor n(\varphi^{-1})^2 \rfloor = \lfloor n(1 - \varphi^{-1}) \rfloor = \lfloor n - n\varphi^{-1} \rfloor$. Hemos obtenido esta expresión para el sumando que nos parecía el más complicado del lema. Aplicando que $(\varphi^{-1})^2 = 1 - \varphi^{-1}$, algo que operando es obvio.

Para cada n (y como n es entero, pero φ^{-1} no) tenemos $n\varphi^{-1} = \lfloor n\varphi^{-1} \rfloor + \partial$, donde $0 < \partial < 1$ son los decimales. Estamos teniendo en cuenta que $\partial > 0$, ya que $n\varphi^{-1} \neq \lfloor n\varphi^{-1} \rfloor$ para $n \neq 0$. Luego,

$$\begin{aligned} \lfloor n(\varphi^{-1})^2 \rfloor &= \lfloor n - n\varphi^{-1} \rfloor = \lfloor n - (\lfloor n\varphi^{-1} \rfloor + \partial) \rfloor \\ &= \lfloor n - \lfloor n\varphi^{-1} \rfloor - \partial + 1 \rfloor - 1 = n - \lfloor n\varphi^{-1} \rfloor + \lfloor 1 - \partial \rfloor - 1. \end{aligned}$$

Hemos podido extraer $n - \lfloor n\varphi^{-1} \rfloor$ porque es una cifra entera. Además, si $0 < \partial < 1$ nos queda, $\lfloor n(\varphi^{-1})^2 \rfloor = n - \lfloor n\varphi^{-1} \rfloor - 1$.

Entonces, sustituyendo esto en lo que queremos demostrar y sabiendo que $\varphi^{-1} + (\varphi^{-1})^2 = 1$, obtenemos,

$$\begin{aligned} (n\varphi^{-1} - \lfloor n\varphi^{-1} \rfloor) + (n(\varphi^{-1})^2 - \lfloor n(\varphi^{-1})^2 \rfloor) &= n(\varphi^{-1} + (\varphi^{-1})^2) - (\lfloor n\varphi^{-1} \rfloor + \lfloor n(\varphi^{-1})^2 \rfloor) \\ &= n - (\lfloor n\varphi^{-1} \rfloor + \lfloor n(\varphi^{-1})^2 \rfloor) \\ &= n - (\lfloor n\varphi^{-1} \rfloor + (n - \lfloor n\varphi^{-1} \rfloor - 1)) = 1 \end{aligned}$$

□

Lema 5.5. Sea $0 \leq \partial < 1$ y con $\partial + \varphi^{-1} \neq 1$, entonces $\lfloor (1 + \varphi^{-1})(1 - \partial) \rfloor + \lfloor \partial + \varphi^{-1} \rfloor = 1$.

Demostración.

Si $0 \leq \partial < 1 - \varphi^{-1}$ entonces

$\lfloor \partial + \varphi^{-1} \rfloor = 0$ y

$1 = \lfloor (1 + \varphi^{-1})(1 - \varphi^{-1}) \rfloor \leq \lfloor (1 + \varphi^{-1})(1 - \partial) \rfloor \leq \lfloor (1 + \varphi^{-1}) \rfloor = 1$. Luego, $\lfloor (1 + \varphi^{-1})(1 - \partial) \rfloor = 1$.

Entonces, $\lfloor (1 + \varphi^{-1})(1 - \partial) \rfloor + \lfloor \partial + \varphi^{-1} \rfloor = 1 + 0 = 1$.

Si $1 - \varphi^{-1} < \partial < 1$ entonces

$\lfloor \partial + \varphi^{-1} \rfloor = 1$ y

$0 \leq \lfloor (1 + \varphi^{-1})(1 - \partial) \rfloor \leq \lfloor (1 + \varphi^{-1})(1 - (1 - \varphi^{-1})) \rfloor = 1$. Si consideramos que $\partial + \varphi^{-1} \neq 1$, en realidad sólo podemos tener que $0 \leq \lfloor (1 + \varphi^{-1})(1 - \partial) \rfloor < \lfloor (1 + \varphi^{-1})(1 - (1 - \varphi^{-1})) \rfloor = 1$. Luego, $\lfloor (1 + \varphi^{-1})(1 - \partial) \rfloor = 0$.

Entonces, $\lfloor (1 + \varphi^{-1})(1 - \partial) \rfloor + \lfloor \partial + \varphi^{-1} \rfloor = 0 + 1 = 1$. □

Finalmente, ya podemos demostrar uno de los resultados más importantes sobre la G-sucesión.

Teorema 5.6. Sea la G-sucesión, una función $G : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida como en 5.3. Entonces,

$$G(n) = \lfloor (n + 1)\varphi^{-1} \rfloor.$$

Demostración. Lo primero de todo, se comprueba la existencia de G y que está bien definida para todo n . Basta con probar que $0 \leq G(n) \leq n$.

El resultado es cierto para $n = 0$ y $G(0) = 0$.

Si es cierto para $0, 1, \dots, n$, estamos estableciendo como hipótesis que $0 \leq G(n) \leq n$, luego también se debe verificar $0 \leq G(G(n)) \leq G(n) \leq n$.

Tenemos que para $n + 1$, $G(n + 1) = (n + 1) - G(G(n))$. Y aplicando aquí la hipótesis, se cumple que $1 \leq G(n + 1) \leq n + 1$.

Ahora, sea otra función $f(n) = \lfloor (n+1)\varphi^{-1} \rfloor$. Es suficiente con probar que f queda definida como,

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f(n) &= n - f(f(n-1)), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Y que, por tanto, es justamente $f(n) = G(n) = \lfloor (n+1)\varphi^{-1} \rfloor$.

$f(0) = 0$ es trivial.

Veamos que se cumple $f(n) = n - f(f(n-1))$, verificando que para $n \geq 1$,

$$\lfloor (n+1)\varphi^{-1} \rfloor = n - \lfloor (\lfloor (n-1+1)\varphi^{-1} \rfloor + 1)\varphi^{-1} \rfloor = n - \lfloor (\lfloor n\varphi^{-1} \rfloor + 1)\varphi^{-1} \rfloor. \quad (5.1)$$

Sea $n \geq 1$, y suponiendo que $\partial = n\varphi^{-1} - \lfloor n\varphi^{-1} \rfloor$, con $0 \leq \partial < 1$. Para que esto ocurra, se debe dar que $\partial \neq 1 + \varphi^{-1}$ (recordemos que n es entero), es decir, estamos en las condiciones del lema 5.5. Entonces, desarrollando la segunda parte de la igualdad (5.1) que queremos verificar, veamos a qué equivale exactamente $\lfloor (\lfloor n\varphi^{-1} \rfloor + 1)\varphi^{-1} \rfloor$. Utilizando lo dicho sobre ∂ :

$$\lfloor (\lfloor n\varphi^{-1} \rfloor + 1)\varphi^{-1} \rfloor = \lfloor ((n\varphi^{-1} - \partial) + 1)\varphi^{-1} \rfloor = \lfloor n(\varphi^{-1})^2 - \partial\varphi^{-1} + \varphi^{-1} \rfloor.$$

Recordemos ahora que el lema 5.4 nos decía que

$$(n\varphi^{-1} - \lfloor n\varphi^{-1} \rfloor) + (n(\varphi^{-1})^2 - \lfloor n(\varphi^{-1})^2 \rfloor) = 1, \text{ es decir,}$$

$$\partial + (n(\varphi^{-1})^2 - \lfloor n(\varphi^{-1})^2 \rfloor) = 1.$$

Tenemos así que $n(\varphi^{-1})^2$ es: $n(\varphi^{-1})^2 = \lfloor n(\varphi^{-1})^2 \rfloor + 1 - \partial$. Aplicando esto a la expresión que estábamos desarrollando...

$$\begin{aligned} \lfloor (\lfloor n\varphi^{-1} \rfloor + 1)\varphi^{-1} \rfloor &= \lfloor n(\varphi^{-1})^2 - \partial\varphi^{-1} + \varphi^{-1} \rfloor \\ &= \lfloor (\lfloor n(\varphi^{-1})^2 \rfloor + 1 - \partial) - \partial\varphi^{-1} + \varphi^{-1} \rfloor \\ &= \lfloor n(\varphi^{-1})^2 \rfloor + \lfloor 1 - \partial - \partial\varphi^{-1} + \varphi^{-1} \rfloor \\ &= \lfloor n(\varphi^{-1})^2 \rfloor + \lfloor (1 - \partial)(1 + \varphi^{-1}) \rfloor \\ &= (n(\varphi^{-1})^2 - 1 + \partial) + \lfloor (1 - \partial)(1 + \varphi^{-1}) \rfloor. \end{aligned}$$

Por otro lado, fijando ahora nuestra atención en la primera parte de la igualdad (5.1) que queremos demostrar, y aplicando lo que sabemos para ∂ ,

$$\begin{aligned} \lfloor (n+1)\varphi^{-1} \rfloor &= \lfloor n\varphi^{-1} + \varphi^{-1} \rfloor \\ &= \lfloor (\lfloor n\varphi^{-1} \rfloor + \partial) + \varphi^{-1} \rfloor \\ &= \lfloor n\varphi^{-1} \rfloor + \lfloor \partial + \varphi^{-1} \rfloor = (n\varphi^{-1} - \partial) + \lfloor \partial + \varphi^{-1} \rfloor. \end{aligned}$$

Finalmente, ya podemos comprobar que es cierta la igualdad (5.1), o lo que es lo mismo,

$$\lfloor (n+1)\varphi^{-1} \rfloor + \lfloor (\lfloor n\varphi^{-1} \rfloor + 1)\varphi^{-1} \rfloor - n = 0.$$

Operando, y aplicando que $(\varphi^{-1})^2 = 1 - \varphi^{-1}$ junto con el lema 5.5,

$$\begin{aligned} \lfloor (n+1)\varphi^{-1} \rfloor + \lfloor (\lfloor n\varphi^{-1} \rfloor + 1)\varphi^{-1} \rfloor - n &= \\ &= [n\varphi^{-1} - \partial + \lfloor \partial + \varphi^{-1} \rfloor] + [n(\varphi^{-1})^2 - 1 + \partial + \lfloor (1 - \partial)(1 + \varphi^{-1}) \rfloor] - n \\ &= n((\varphi^{-1})^2 + \varphi^{-1} - 1) + \lfloor \partial + \varphi^{-1} \rfloor - 1 + \lfloor (1 - \partial)(1 + \varphi^{-1}) \rfloor \\ &= n \cdot 0 - 1 + (\lfloor \partial + \varphi^{-1} \rfloor + \lfloor (1 - \partial)(1 + \varphi^{-1}) \rfloor) = 0 - 1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

□

La G-sucesión tiene otras muchas propiedades que ya han sido investigadas y de demostración más rápida que esta anterior. En [25], en una sección dedicada a la función G, aparecen recogidas las siguientes.

Propiedad 5.7. Sea la G-sucesión una función $G : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida con las ecuaciones que aparecen en la definición 5.3 y con valores iniciales $G(0) = 0, G(1) = G(2) = 1, G(3) = 2, G(4) = G(5) = 3$. Se establecen algunas propiedades básicas de G:

1. $0 \leq G(n) \leq n, \quad \forall n.$
2. $G(n) = G(n-1) \Rightarrow G(n+1) = G(n) + 1, \quad \forall n \neq 0.$
3. $G(n+1) - G(n) \in \{0, 1\}, \quad \forall n.$
4. $0 \leq G(m) - G(n) \leq m - n, \quad \forall n, m \text{ con } n \leq m.$
5. $G(n) = 0 \Leftrightarrow n = 0, \quad \forall n.$
6. $G(n) < n, \quad \forall n > 1.$

Demostración.

1. Por la propia definición de G.

Es obvio que tiene que ser $G(0) = 0$ para $n = 0$. Y para un n en general, se trata de probar su existencia. De hecho, ya hemos visto en resultados anteriores que existe. En particular, $G_n \in [0, n]$. Y para la unicidad, lo mismo, podemos suponer que tenemos una función f que satisface $f(0) = 0$ y que $0 \leq f(n) \leq n$ para cada n . Por inducción fuerte, se acaba llegando a que tiene que ser $f(n) = g(n)$, para todo n y donde f, g son funciones que satisfacen nuestras ecuaciones de la definición.

2. $G(n+1) - G(n) = (n+1) - G(G(n)) - n + G(G(n-1))$ por tal y como están definidas $G(n+1)$ y $G(n)$. Operando:
 $G(n+1) - G(n) = 1 - G(G(n)) + G(G(n-1))$. Luego, si por hipótesis $G(n) = G(n-1)$, es obvio que la expresión anterior es igual a 1 y queda demostrado.

3. Por inducción fuerte.

Tenemos que $G(1) - G(0) = 1 - 0 = 1$.

$\forall k \leq n-1$ y con $n \neq 0$ podemos suponer $G(k+1) - G(k) \in \{0, 1\}$. Reutilizando la misma notación que antes y con la hipótesis de inducción $k = n-1, G(n) - G(n-1) \in \{0, 1\}$, llegamos a que:

- Si es 0, por el resultado anterior 2.
- Si es 1, usamos hipótesis de inducción donde $k = G(n-1)$ y $k+1 = G(n)$.

Luego, $G(G(n)) - G(G(n-1)) \in \{0, 1\}$.

4. Se puede deducir por reiteración del resultado previo. Es decir,

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \cancel{G(n+1)} - G(n) \leq 1 \\
 0 &\leq \cancel{G(n+2)} - \cancel{G(n+1)} \leq 1 \\
 0 &\leq G(n+3) - \cancel{G(n+2)} \leq 1 \\
 &+ \quad \vdots \\
 0 &\leq G(m) - G(m-1) \leq 1 \\
 0 &\leq G(m) - G(n) \leq m - n
 \end{aligned}$$

5. Para todo $n \geq 1, 0 \leq G(n) - G(1) = G(n) - 1$, pues $G(1) = 1$.

Luego, tenemos $G(n) \geq 1, \forall n \geq 1$. Y por definición $G(0) = 0$.

$G(n) = 0 \Leftrightarrow n = 0$ es trivial.

6. Para todo $n \geq 2$, $G(n) - G(2) \leq n - 2$, y $G(2) = 1$. Luego,

$$G(n) - 1 \leq n - 2 \Rightarrow G(n) \leq n - 1.$$

□

Finalmente, tenemos una última propiedad en cuanto a interpretación gráfica (información en [25, 32]). Una interpretación de $G(n)$ en términos de contar etiquetas en un árbol infinito con vértices etiquetados.

De nuevo en este trabajo, nos aparecen grafos con forma de árbol.

Tenemos un árbol que (comenzando desde el nodo conveniente) lo denotamos como \mathcal{G} y lo definimos recursivamente. En concreto, \mathcal{G} tiene un vértice *raíz* donde el subárbol de la izquierda, también llamado *hijo izquierdo*, es directamente una copia de \mathcal{G} . Mientras que el *hijo derecho* de esta raíz, a su vez tiene un único subárbol que también es una copia de \mathcal{G} . Es decir, estamos en la situación de la figura.

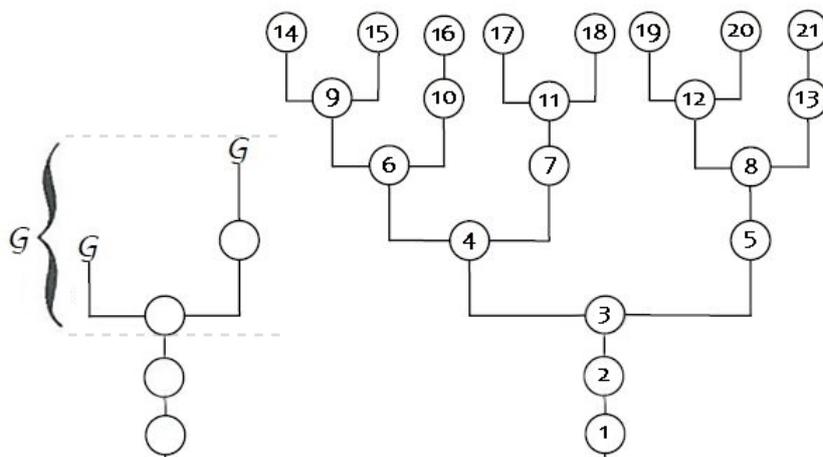


Figura 5.1: Interpretación en árbol de la G-sucesión

El criterio que se sigue para etiquetar este árbol es: se comienza por el primer vértice raíz que se numera con 1 y después se etiquetan el resto de vértices en orden creciente de su altura respecto a dicha raíz. Todos los vértices dentro de una altura específica se numeran en orden creciente de izquierda a derecha. En nuestro gráfico de ejemplo se ha etiquetado hasta la altura 6 (el primer vértice raíz cuenta como altura 0).

Con este grafo de árbol, se están representando los valores de la G-sucesión, puesto que para cada n etiquetado, encontramos su valor $G(n)$ en el vértice que está justamente debajo, es decir, dicho con otras palabras, $G(n)$ es justo la etiqueta que numera al *padre* del vértice n .

Luego, los $G(n)$ de este árbol satisfacen la relación de recurrencia de la definición 5.3 y el árbol se puede ir construyendo así progresivamente nodo por nodo, vértice a vértice. Además, curiosamente los etiquetados más a la derecha son justamente números de Fibonacci F_n , mientras que los situados más a la izquierda son términos de la forma $F_n + 1$.

No es la primera vez que observamos que la G-sucesión está muy ligada a los números de Fibonacci, también hemos visto la fórmula explícita que definía los $G(n)$ y en la que intervenía el número de oro y φ^{-1} .

Ya Hofstadter representaba a sus sucesiones así, explicándolas con diagramas y árboles⁵. De hecho, investigó la función G tratando de calcular sus valores rápido y considerando la disposición de los valores que ya conocía en un árbol. Para su sorpresa, ese árbol tenía o seguía esa extremadamente ordenada descripción recursiva-geométrica.

En *GEB*, seguido de la G sucesión, se introduce la H-sucesión. Una sucesión similar que también se puede representar con un grafo de tipo árbol.

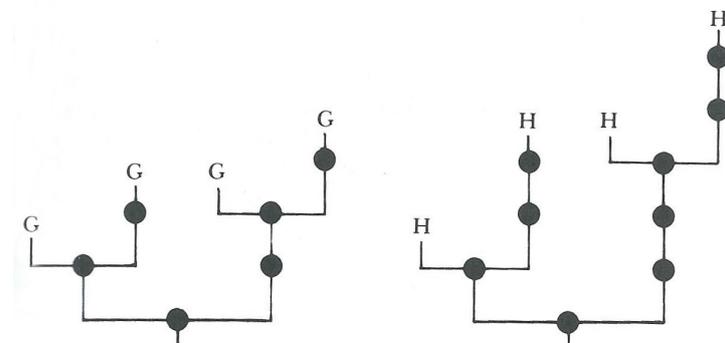


Figura 5.2: Interpretación en árbol de la H-sucesión

La sucesión H de Hofstadter se define de la siguiente manera.

Definición 5.8. H-sucesión meta-recursiva de Hofstadter

Para todo $n \geq 0$ y sea $H_n = H(n)$ el n-ésimo número H, se tiene que

1. $H(0) = 0$, (Condición inicial)
2. $H(n) = n - H(H(H(n - 1)))$, $\forall n > 0$ (Relación de meta-recurrencia)

Luego, los primeros términos de esta sucesión son:

0, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 9, 10, 10, 11, 12, 13, 14, ...

Con enlace en la OEIS: <https://oeis.org/A005374>

5.3. Q-sucesión de Hofstadter

También en 1979 y con el libro *GEB* de Hofstadter, surge una sucesión caótica con comportamiento errático. Esta sucesión es la Q-sucesión de Hofstadter, un ejemplo de recursión en la teoría de números que aún a día de hoy es un pequeño misterio.

En las sucesiones recurrentes y hasta este capítulo, cuando definíamos la sucesión, cada nuevo valor era la suma de los (dos) anteriores, como sucedía en Fibonacci.

Ahora, en vez de eso, los dos valores anteriores, no se suman, sino que nos dicen cuantos puestos hacia atrás tenemos que contar o desplazarnos (desde los puntos suspensivos) para obtener los números que se tienen que sumar y así saber el siguiente número de la sucesión. O sea, se procede como en el siguiente esquema que aparece en *GEB*.

⁵La escritura de Hofstadter se caracteriza precisamente por una intensa interacción entre la forma y el contenido, poniendo un gran esfuerzo en hacer que las ideas sean claras y visuales. También en su enseñanza, Hofstadter enfatiza lo concreto, usando constantemente ejemplos y analogías, y evita lo abstracto. Por ejemplo, es típico de los cursos que imparte su seminario "Teoría de grupos y teoría de Galois visualizada", en el que las ideas matemáticas abstractas se expresan de la manera más concreta posible.

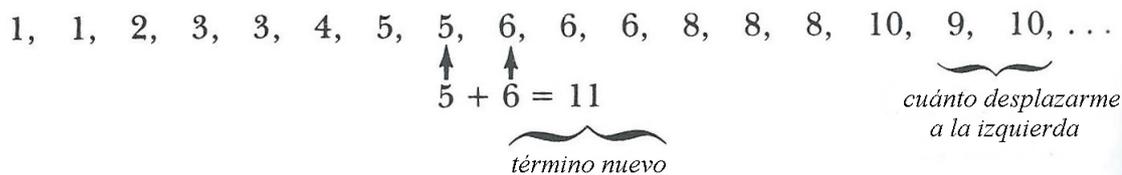


Figura 5.3: Construcción de la Q-sucesión

Formalmente, consideramos la siguiente definición recursiva de la sucesión Q.

Definición 5.9. Q-sucesión meta-recursiva de Hofstadter

Para todo $n \geq 0$ y sea $Q_n = Q(n)$ el n-ésimo número Q, tenemos:

1. $Q(1) = Q(2) = 1$, (Condiciones iniciales)
2. $Q(n) = Q(n - Q(n - 1)) + Q(n - Q(n - 2))$, $\forall n > 2$ (Relación de meta-recurrencia)

Entonces, los primeros términos de la sucesión son:

$Q_1 = 1$	$Q_7 = 5$	$Q_{13} = 8$	$Q_{19} = 11$	$Q_{25} = 14$
$Q_2 = 1$	$Q_8 = 5$	$Q_{14} = 8$	$Q_{20} = 12$	$Q_{26} = 14$
$Q_3 = 2$	$Q_9 = 6$	$Q_{15} = 10$	$Q_{21} = 12$	$Q_{27} = 16$
$Q_4 = 3$	$Q_{10} = 6$	$Q_{16} = 9$	$Q_{22} = 12$	$Q_{28} = 16$
$Q_5 = 3$	$Q_{11} = 6$	$Q_{17} = 10$	$Q_{23} = 12$	$Q_{29} = 16$
$Q_6 = 4$	$Q_{12} = 8$	$Q_{18} = 11$	$Q_{24} = 16$	$Q_{30} = 16$

Tabla 5.2: Números Q

El propio Hofstadter se comunicó con Sloane antes de publicar su libro, en 1977, para comunicarle el descubrimiento de la Q-sucesión y con ello el nacimiento de las sucesiones meta-recurrentes. Desde entonces, podemos encontrarla en la enciclopedia OEIS con enlace:

<https://oeis.org/A005185>

Finalmente, con la presentación de la sucesión Q en el libro de Hofstadter, es la primera mención conocida de una sucesión meta-recurrente en la literatura, donde los índices de los términos que se suman en la definición de la sucesión dependen de la Q-sucesión misma.

Desde entonces, a estos términos los llamamos “números Q” o “Q-números”, nombre adjudicado por el propio Hofstadter, y se utilizan expresiones del tipo: el número Q de 6 es 4.

Por lo que podemos observar del esquema y en la tabla 5.2, el primer elemento de la sucesión $Q(1)$, nunca es uno de los dos términos que se agregan para producir un elemento posterior y está involucrado sólo dentro de un índice, en el cálculo de $Q(3)$.

Además, se observa también que la sucesión tiene un cierto comportamiento errático, por decirlo suavemente. Cuanto más te alejas o avanzas en la sucesión, menos sentido parece tener.

Al principio tiene un crecimiento lento, con un incremento de 0 o 1 entre término y término, para luego después descubrir, por ejemplo, que el 12-ésimo Q-número tiene un incremento de 2 con respecto al 11-ésimo. Poco después, vuelve a fallar la monotonía (nos fijamos en la otra anomalía entre el término 15 y 16 de la tabla 5.2).

Estamos frente a uno de los casos peculiares donde algo que parece definirse de manera natural, nos lleva a un comportamiento extremadamente enigmático (como un puzzle - puzzling): un caos producido de forma ordenada.

Para entendernos, como diría Hofstadter con su metáfora de la naturaleza. La situación es exactamente igual que cuando observamos las leyes de la naturaleza. Ésta se presenta para nosotros como una serie de fenómenos que en su mayoría se aprecian como aleatorios y caóticos, hasta que alguien es capaz de seleccionar los eventos significativos y que nos proporcionan información como para extraer conclusiones de esas particularidades o circunstancias aparentemente irrelevantes. Hasta el punto de llegar a ser idealizadas, y sólo entonces nos muestran su verdadera estructura en todo su esplendor.

Por ello, nos preguntamos si este aparente caos, concibe alguna sutil o ligera regularidad. Por definición, hay cierto patrón o regularidad, pero es más interesante saber si hay otra forma de caracterizar esta sucesión y con suerte, de manera no recursiva.

Actualmente no hay análisis rigurosos ni predicciones detalladas del comportamiento bastante errático de Q . Sin embargo, se ha demostrado que el comportamiento caótico de los números Q muestra algunos signos de orden:

- Los Q -números exhiben un período aproximado de duplicación, auto-similitud y escalado. Estas propiedades se comparten con alguna sucesión relacionada que veremos en la última sección (estudio realizado por Pinn).
- Si el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} (Q(n)/n)$ existe, entonces debe de ser $1/2$ (probado por Golomb).

La mayoría de estos hallazgos, como hemos dicho, son observaciones empíricas, ya que hasta ahora no se ha probado de manera rigurosa nada acerca de la sucesión Q . De hecho, se desconoce específicamente si la sucesión está bien definida para todos los n , es decir, nadie ha sido capaz de probar rigurosamente que $Q(n)$ existe para todo n y por el momento está atada a la siguiente condición o propiedad.

Propiedad 5.10. Sea $n > 1$, una conjetura básica de Q (al menos por el momento) es

$$Q(n-1) < n \quad (\text{y } Q(n-2) < n).$$

Si en alguna ocasión se da que $Q(n-1) \geq n$ para algún n , entonces evaluar $Q(n)$ requeriría saber un número $Q(k)$ con $k \leq 0$. Como la sucesión Q sólo está definida para índices positivos, se dice que la sucesión *muere* si se llega a ese punto.

Tras la aparición en *GEB* de la Q -sucesión y las otras sucesiones meta-recurrentes, ha habido mucho trabajo de investigación en torno a sucesiones de Hofstadter de crecimiento lento. Dentro de este ámbito, el ejemplo más famoso o conocido es quizás la sucesión de Hofstadter-Conway.

5.4. Sucesión de los 10,000 \$ de Hofstadter-Conway

La aparición de esta sucesión es curiosa. Surgió por primera vez en 1988 durante una charla divulgativa en Bell Labs, cuando John Horton Conway⁶ ofreció un premio de 10,000 \$ a quien fuera capaz de demostrar un resultado particular sobre la convergencia y el comportamiento asintótico de dicha sucesión.

⁶John Conway, quien murió recientemente (1937-2020), fue un matemático inglés con aportaciones en la teoría de grupos finitos, teoría de nudos, teoría de números, teoría de juegos combinatorios y en codificación. También profesor en la Universidad de Princeton y creador de juegos, como *the Game of Life*, contribuyendo a las matemáticas recreativas.

Así fue como recibió el sobrenombre de la sucesión de los 10,000 \$ o sucesión de Hofstadter-Conway. Unos años antes de que Conway lanzara el reto alrededor de dicha sucesión, aproximadamente en 1986, Hofstadter y David Newman habían encontrado y planteado ya su estructura; que definimos a continuación.

Definición 5.11. Sucesión meta-recursiva de los 10,000\$ (Hofstadter-Conway)

Para todo $n \geq 0$ y sea $C_n = C(n)$ el n -ésimo número de Hofstadter-Conway, se define la siguiente sucesión:

1. $C(1) = C(2) = 1,$ (Condiciones iniciales)
2. $C(n) = C(C(n - 1)) + C(n - C(n - 1)), \quad \forall n > 2$ (Relación de meta-recurrencia)

Luego, los primeros términos de esta sucesión son los siguientes.

$C_1 = 1$	$C_7 = 4$	$C_{13} = 8$	$C_{19} = 11$	$C_{25} = 15$
$C_2 = 1$	$C_8 = 4$	$C_{14} = 8$	$C_{20} = 12$	$C_{26} = 15$
$C_3 = 2$	$C_9 = 5$	$C_{15} = 8$	$C_{21} = 12$	$C_{27} = 15$
$C_4 = 2$	$C_{10} = 6$	$C_{16} = 8$	$C_{22} = 13$	$C_{28} = 16$
$C_5 = 3$	$C_{11} = 7$	$C_{17} = 9$	$C_{23} = 14$	$C_{29} = 16$
$C_6 = 4$	$C_{12} = 7$	$C_{18} = 10$	$C_{24} = 14$	$C_{30} = 16$

Tabla 5.3: Números de Hofstadter-Conway

Sucesión en la OEIS con enlace: <https://oeis.org/A004001>

Lo que Conway probó para esta sucesión, es que se cumple el siguiente límite.

Propiedad 5.12. Cuando $n \rightarrow \infty$, tenemos que

$$\frac{C(n)}{n} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

Se ofreció 10,000 \$ a la persona que fuera capaz de encontrar la última n exacta para la que $|\frac{C(n)}{n} - \frac{1}{2}| > 1/20$. O lo que es lo mismo, buscar un n tal que

$$\left| \frac{C(j)}{j} - \frac{1}{2} \right| < 1/20, \quad \forall j > n.$$

El premio fue posteriormente reducido a 1,000 \$ y quedó todo en una anécdota. De hecho, se trataba de un problema que no era tan complicado y no tardó mucho en cobrarse, siendo el afortunado Collin Mallows⁷.

Es más, la respuesta ha llegado a ser incluso más sencilla de lo que Mallows y el propio Conway pensaban: $n = 1489$.

(La historia sobre esta sucesión está narrada en un artículo de Sloane [38], quien estaba presente en dicha conferencia y mantuvo contacto con Mallows).

A raíz de estos estudios que se hicieron, se sabe también lo siguiente.

⁷Estadístico inglés nacido en 1930 (90 años en la actualidad). A parte de destacar por sus aportaciones en el campo de las sucesiones (veremos que aparece más veces en este capítulo), es conocido por un procedimiento de diagnóstico / modelo de regresión llamado “ Mallows’ C_p ”, ampliamente utilizado en análisis de regresión.

Propiedad 5.13. Para todo n , se cumple

$$C(n) \geq \frac{n}{2},$$

dándose la igualdad si y sólo si $n \neq 1$ y n es una potencia de 2.

Además, tenemos la certeza que $C(n)$ es una sucesión bien definida y que existe para para todo n , puesto que es monótona creciente y siempre con un incremento entre término y término de 0 o 1 (de crecimiento lento).

Estas y otras propiedades básicas de la sucesión de Conway, aparecen en el artículo [23]. Reunimos algunas de ellas a continuación.

Propiedad 5.14. Sea $C : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una función definida como en 5.11 y que representa la sucesión de Conway de los 10,000 \$. Se establecen algunas propiedades básicas de C .

1. $C(n) \leq n, \quad \forall n.$
2. $C(n+1) - C(n) \in \{0, 1\}, \quad \forall n.$
3. $C(2^n) = 2^{n-1}, \quad \forall n \geq 1.$
4. $C(n) = 2^k$, con $k > 0$ y para exactamente $k + 1$ valores de n .
5. $C(2n) \leq 2C(n), \quad \forall n.$

Demostración. - Comentarios.

1. y 2. La sucesión C de Conway está bien definida. Basta con demostraciones como las realizadas para las propiedades básicas de la G -sucesión.

3. 4. y 5. Se pueden probar por inducción. De todos modos, si teníamos que $C(n) = n/2$ si y sólo si n es una potencia de 2, entonces que se cumpla 3. no quiere decir más que

$$C(2^n) = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}.$$

□

5.5. Otras sucesiones

Después de la invención y la aparición de la Q -sucesión en la literatura, vamos a ver que surgen muchas sucesiones de meta-Fibonacci que han sido estudiadas por diversos autores. Klaus Pinn, por ejemplo, ha estudiado varios tipos de estas sucesiones meta-recurrentes que tienen una naturaleza impredecible y concluye que hay algunas evidencias de que las diferentes sucesiones estudiadas comparten una clase universal. Una de sus sucesiones es la que vamos a ver a continuación.

5.5.1. La prima caótica de la sucesión de Conway y otros parientes

En 1998, Klaus Pinn lleva a cabo su estudio [31] sobre la siguiente sucesión.

Definición 5.15. Prima caótica de la sucesión de Hofstadter-Conway

Para todo $n > 0$ y sea $K_n = K(n)$ el n -ésimo número de la sucesión prima caótica de la sucesión de Conway.

Se define la sucesión que viene dada por:

1. $K(1) = K(2) = 1$, (Condiciones iniciales)
2. $K(n) = K(K(n-1)) + K(n-1-K(n-2))$, $\forall n > 2$ (Relación de meta-recurrencia)

Sus términos son:

1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 9...

Podemos encontrarlos en la OEIS con el enlace: <https://oeis.org/A055748>

Como vemos, la definición de esta sucesión tiene alguna similitud con aquella que dimos para la sucesión de Hofstadter-Conway. Sin embargo, en contraposición al comportamiento regular y predecible que tenían los $C(n)$, los K-números presentan patrones caóticos. Es decir, las propiedades de la K-sucesión son, al contrario de lo que cabría esperar, más similares a las propiedades que presenta la Q-sucesión caótica de Hofstadter y no mantienen semejanza con las de Conway.

Se refleja su comportamiento en la siguiente gráfica generada por MAPLE.

→ Ver el último anexo de nuestro trabajo, programa 2.

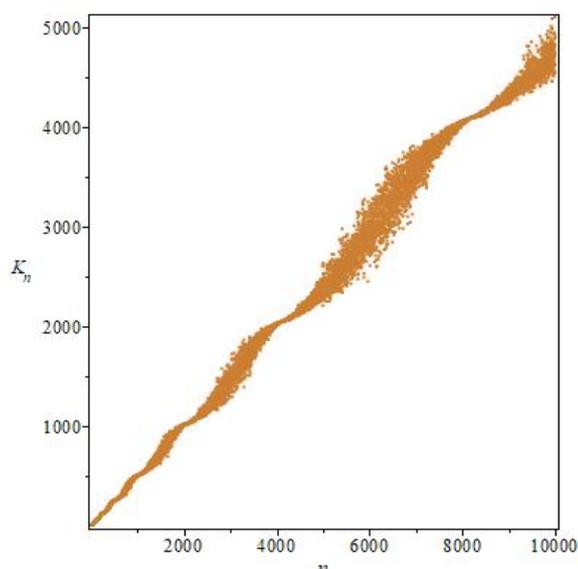


Figura 5.4: MAPLE: Suc. prima caótica de Conway

Es cierto que esta prima caótica, en comparación con la sucesión Q de Hofstadter, al menos muestra un mayor orden estructural, con una duplicación exacta del período⁸ y se tiene que las regiones caóticas de K están separadas por regiones con un comportamiento uniforme predecible.

Sorprende que después de casi 50 años de la introducción de las sucesiones meta-recurrentes y de la aparición de la caótica Q-sucesión, ésta última siga siendo un enigma. Es por esto que tendemos a buscar sucesiones similares o que se comporten parecido, como la prima de Conway, para poder extraer conclusiones y avanzar en nuestro estudio. Y por este mismo motivo, aparece también un pariente de la Q-sucesión de Hofstadter de crecimiento lento.

Recientemente, Nathan Fox en su artículo [12] del 2017 descubrió una nueva sucesión relacionada con la caótica Q-sucesión.

⁸Cuando una función es *periódica*, coloquialmente hablando, se produce una cierta repetición cada *período* T . Luego, vamos a entender por duplicación exacta del período, cuando se produce una similitud en el comportamiento de la función cada cierto período y según avanzamos, dicho período se va duplicando o multiplicando por 2. Se comprende mejor con la gráfica, donde su forma se va repitiendo cada vez, en franjas de n el doble de grandes.

Definición 5.16. Pariente lento de la Q-sucesión de Hofstadter

Para todo $n > 0$ y sea $S_n = S(n)$ el n -ésimo número de nuestra sucesión pariente *slow* de Hofstadter. Consideramos la sucesión definida por:

$$1. S(1) = 1, S(2) = 2, S(3) = 3, S(4) = 4, S(5) = 5, \quad (\text{Condiciones iniciales})$$

$$2. S(n) = S(n - S(n - 1)) + S(n - S(n - 2)) + S(n - S(n - 3)), \quad \forall n > 5$$

Entonces, los primeros términos de esta sucesión son:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 9, 10, 11, 12, 12, 13, 14, 15, 15, 16, 17, 17, 18, 18, 19...

Sucesión que podemos encontrar en: <https://oeis.org/A278055>

Si nos fijamos en la relación de meta-recurrencia de su definición, se ha añadido un tercer término o sumando a la Q-sucesión de Hofstadter.

Esta nueva sucesión, con sus condiciones iniciales bien predefinidas / fijadas y que generalizan aquellas condiciones iniciales que había para Hofstadter, genera una sucesión cuyos términos (a diferencia de la Q) todos incrementan de forma monótona, es decir con un incremento de 0 o 1 entre término y término.

Resumiendo, su propiedad más importante es su crecimiento lento, que expresado matemáticamente, nos viene a decir que $S(n + 1) - S(n) \in \{0, 1\}$, $\forall n$.

Gráficamente, veremos también qué aspecto presentan algunas sucesiones lentas. Como las que vienen a continuación.

5.5.2. Sucesiones casadas de Hofstadter

No todas las sucesiones que nos quedan por ver son de tan nueva aparición. Por ejemplo, el libro *GEB* de Hofstadter está lleno de ejemplos de sucesiones meta-recurrentes, a parte de los que hemos nombrado ya.

Unas de estas sucesiones sobre las que se sabe de su existencia desde 1979, son las sucesiones casadas de Hofstadter que involucran a un par de funciones recursivas que están unidas o casadas con la definición:

Definición 5.17. Sucesiones meta-recursivas casadas

Para $n \geq 0$, denotamos por $Ma(n)$ y $Mu(n)$ el n -ésimo término de las sucesiones definidas por:

$$1. Mu(0) = 1, \quad Ma(0) = 0, \quad (\text{Condiciones iniciales})$$

2. (Sistema de recurrencias)

$$\begin{cases} Mu(n) = n - Ma(Mu(n - 1)), \\ Ma(n) = n - Mu(Ma(n - 1)), \end{cases} \quad \forall n > 0.$$

Siendo Ma y Mu las funciones casadas (*married*).

Luego, los primeros términos de estas sucesiones son:

Mu : 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 9, 10, 11, 11, 12, 13, ...

Ma : 0, 0, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 9, 9, 10, 11, 11, 12, 12, ...

Con enlaces en la OEIS:

Mu : <https://oeis.org/A005378>

Ma : <https://oeis.org/A005379>

Hemos usado la notación Ma y Mu por marido y mujer. Ya Hofstadter las definió como las sucesiones masculina (*male*) y femenina (*female*), con notación M y F . No hemos utilizado esta misma notación para evitar confusiones con otras sucesiones anteriores como la de Fibonacci.

Estas dos sucesiones son elegantes a la par que simples. En su definición, se llaman la una a la otra y a sí mismas, digamos que se retroalimentan.

Es esta simplicidad la que ha facilitado que se hayan hecho estudios, como el [44], con varias propiedades y resultados sobre ellas.

Por ejemplo, por inducción se demuestra la siguiente propiedad.

Propiedad 5.18. Sean las sucesiones casadas de Hofstadter las funciones $Ma, Mu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definidas como previamente. Se establece que,

$$\begin{aligned} 0 < Mu(n) &\leq n + 1, & \forall n. \\ 0 \leq Ma(n) &\leq n, & \forall n. \end{aligned}$$

Esto asegura que ambas sucesiones están bien definidas para todo $n \geq 0$.

Son, además, de crecimiento lento. Basta con observar la gráfica.

→ Ver anexo de programas en MAPLE, programa 5.

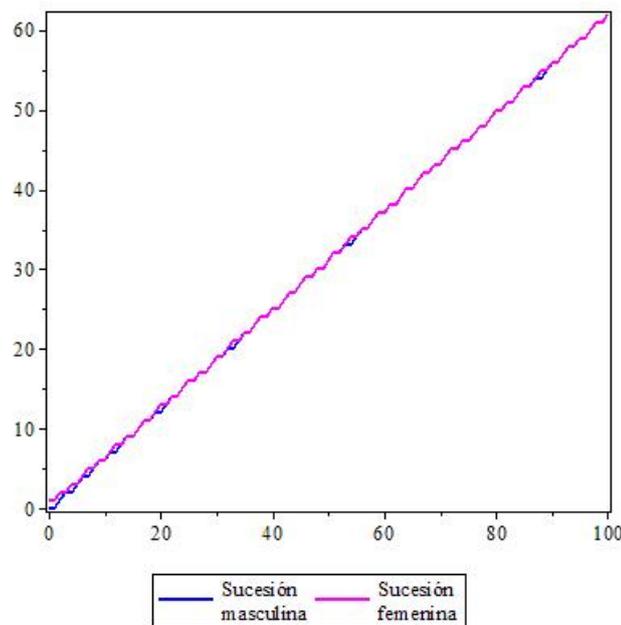


Figura 5.5: MAPLE: Sucesiones casadas

Luego, al contrario que la Q-sucesión, como no tienen un comportamiento tan caótico, se ha llegado incluso a encontrar soluciones que nos recuerdan a aquella fórmula dada para la G-sucesión. (Consultar [44] para ver las soluciones con demostración).

Teorema 5.19. Para todo $n \geq 0$ es cierto que

$$\begin{aligned} Mu(n) &= \lfloor (n + 1)\varphi^{-1} \rfloor + \varepsilon_1(n), \\ Ma(n) &= \lfloor (n + 1)\varphi^{-1} \rfloor - \varepsilon_2(n), \end{aligned}$$

donde $\varphi^{-1} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. Sea F_k el k -ésimo número de Fibonacci para $k \geq 1$, $\varepsilon_1(n)$ y $\varepsilon_2(n)$ son:

$$\varepsilon_1(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = F_{2k} - 1, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases} \quad \varepsilon_2(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = F_{2k+1} - 1, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

A raíz de estas sucesiones casadas, han surgido posteriormente más del estilo. Por ejemplo, existen también sucesiones en las que se retroalimentan/influyen no dos, sino incluso tres sucesiones a la hora de establecer sus definiciones. Más que una relación de pareja se establece una relación de familia entre ellas.

Utilizamos una notación genérica en su definición para que sea menos confusa.

Definición 5.20. Sucesiones meta-recursivas padres-hijo(s)

Para $n \geq 0$, denotamos por $a(n), b(n)$ y $c(n)$ el n -ésimo término de las sucesiones establecidas mediante las siguientes condiciones iniciales y sistema de recurrencias.

1. $a(0) = 1, \quad b(0) = c(0) = 0,$ (Condiciones iniciales)
2. (Sistema de recurrencias)

$$\begin{cases} b(n) = n - c(b(n-1)), & \forall n > 0 \\ a(n) = n - b(a(n-1)), & \forall n > 0 \\ c(n) = n - a(c(n-1)), & \forall n > 0 \end{cases}$$

5.5.3. Sucesión caótica con forma de corazón (de Hofstadter)

Como hemos ido viendo, es notable que, tanto la sucesión caótica Q, como la sucesión de los 10,000 \$ tuvieron y tienen mucho impacto en el ámbito de las sucesiones meta-recurrentes.

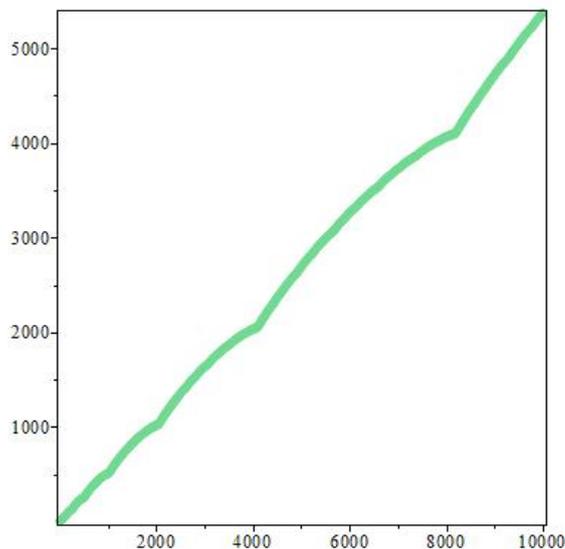
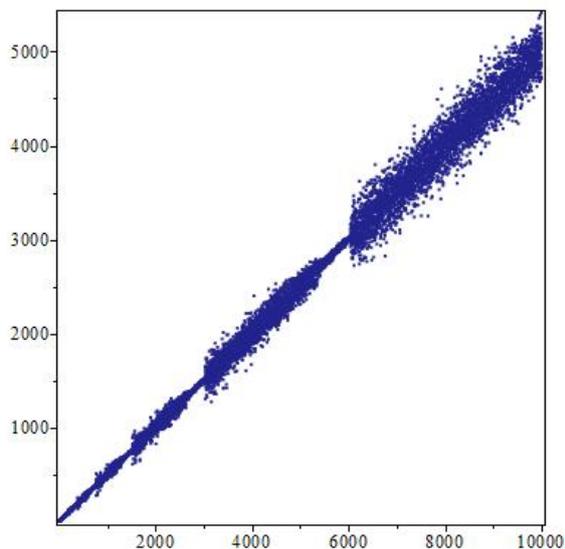


Figura 5.6: MAPLE: Q-sucesión de Hofstadter

Figura 5.7: MAPLE: Sucesión de Conway

→ Consultar anexo de programas en MAPLE, programas 2 y 3.

Al estudiar sus gráficas por separado, es bastante apreciable el comportamiento errático y caótico, pero a la vez estructurado, de la Q-sucesión (figura a la izq.).

Mientras que, por su parte, la sucesión de Conway presenta una estructura peculiar, con curvitas y que en algunas fuentes denominan como apariencia de fractal (figura a la derecha).

Así fue cómo surgió la sucesión caótica con forma de corazón, en un intento de combinación de ambas gráficas. Estudio realizado recientemente en el 2017 (ver [4]).

En este estudio se da la siguiente definición.

Definición 5.21. Sucesión caótica con forma de corazón de Hofstadter

Sea $Q(n)$ el n -ésimo número de la Q sucesión y sea $C(n)$ el n -ésimo término de la sucesión de Conway, los $h(n)$ de la sucesión de corazón son:

$$h(n) = C(n) - Q(n), \quad \forall n.$$

Para esta sucesión, se ha considerado la diferencia entre la Q-sucesión y la sucesión de Conway. Recordemos que el límite de la sucesión Q parece rondar los $n/2$, mientras que la sucesión de Conway nunca es menor que $n/2$ ($C(n) \geq n/2$), por esta razón restamos a la sucesión de Conway la Q.

Nos percatamos enseguida de su comportamiento caótico con sólo echar un vistazo a sus primeros términos:

0, 0, 0, -1, 0, 0, -1, -1, -1, 0, 1, -1, 0, 0, -2, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 1, 2, -2

Términos y más información en el enlace de la OEIS: <https://oeis.org/A284019>

También resulta evidente por qué recibe el sobrenombre “con forma de corazón”, aparte de caótica. Como resultado de esta diferencia / combinación se obtiene una sucesión con la siguiente gráfica; en la cual es curioso observar el proceso de aparición de formas de corazón erráticas según va habiendo un número creciente de generaciones.

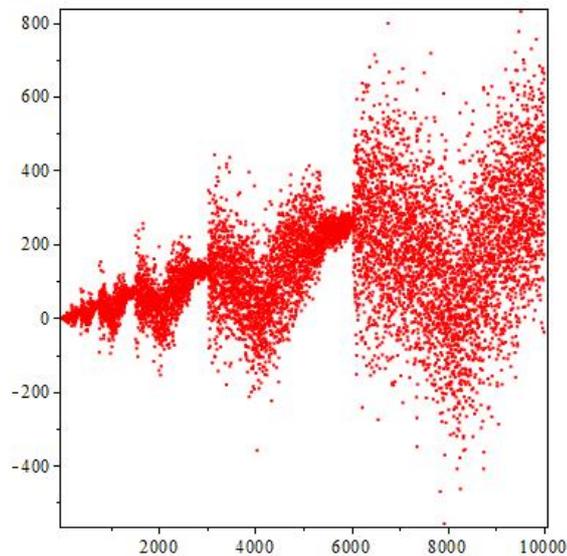


Figura 5.8: MAPLE: Sucesión con forma de corazón

→ Encontramos el programa que genera esta gráfica en el anexo de MAPLE, programa 4.

Esta sucesión, nos ha aportado una perspectiva diferente y gráfica sobre sucesiones de meta-Fibonacci conocidas, sugiriéndonos que aún tenemos muchas cosas sorprendentes por descubrir de estas sucesiones y las relaciones entre ellas.

5.5.4. Sucesión de Golomb

Sucesión que recibe el nombre por Solomon W. Golomb⁹. Aunque en algunas fuentes también es llamada sucesión de Silverman.

Quizás nos suene el nombre de este matemático por ser también el inventor de la llamada codificación de Golomb, la Regla de Golomb (en astronomía y encriptación de datos), así como el método de generación de Lempel-Golomb.

En cuanto a sucesiones se refiere, destaca también su identificación pionera de las características de las secuencias pseudoaleatorias o pseudo-ruidosas. Estudio que tuvo amplias repercusiones, entre ellas, su aplicación a muchos teléfonos inalámbricos y móviles en la actualidad.

Por su parte, la sucesión de Golomb surgió en 1966 cuando fue publicada en el “*American Mathematical Monthly*”. Con esta publicación, Golomb buscaba una fórmula asintótica para la sucesión (la veremos).

Una primera definición de esta sucesión (la dada por Golomb), nos indica que cada entero positivo n aparece $g(n)$ veces en la sucesión.

Definición 5.22. Para todo $n > 0$ y sea $g_n = g(n)$ el n -ésimo número de Golomb. Tenemos la sucesión de Golomb no decreciente, definida por:

1. $g(1) = 1$, (Condición inicial)
2. $g(n) = \#\{s \text{ tal que } g(s) = n\} = m$, $\forall n > 1$,
donde m es el número de veces que ocurre que un término $g_s = n$ en la sucesión.

Además, la condición de sucesión no decreciente es necesaria, y se exige para todo $n > 1$ que,

3. $g(n - 1) \leq g(n)$, siendo $g(n)$ el número natural más pequeño compatible con todo esto.

Por otro lado, varios años más tarde y posterior a los descubrimientos de Hofstadter y Golomb, Colin Mallows dio una relación de recurrencia explícita que describe la sucesión de Golomb. En consecuencia, es considerada una sucesión meta-recurrente.

Definición 5.23. Sucesión meta-recursiva de Golomb

Para todo $n > 0$ y sea $g_n = g(n)$ el n -ésimo número de Golomb. Se define,

1. $g(1) = 1$, (Condición inicial)
2. $g(n) = g(n - g(g(n - 1))) + 1$, $\forall n > 1$

Con estas definiciones, queda claro que sus primeros términos son: 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 10...

Términos que coinciden con los expuestos en la información que nos proporciona la OEIS.

Enlace: <https://oeis.org/A001462>

⁹Solomon Wolf Golomb (1932 - 2016) fue un matemático, ingeniero y profesor de ingeniería eléctrica estadounidense en la Universidad del Sur de California, mejor conocido por sus trabajos sobre juegos matemáticos. Entre sus aportaciones a las matemáticas recreativas se encuentran: Rep-tiles, inventó Cheskers, describió de forma rigurosa poliomínos, pentominós (base / inspiración del Tetris)...

Tras doctorarse en matemáticas por la Universidad de Harvard, se especializó en problemas de análisis combinatorio, teoría de números, teoría de codificación y comunicaciones (militares, espaciales, industriales y de consumo). También era un columnista habitual en el Boletín de la Sociedad de la Información del IEEE y colaborador frecuente de la columna Mathematical Games.

Si observamos, se ha fijado primero $g_1 = 1$. Por lo tanto, 1 ocurre exactamente una vez en esta sucesión.

Después, para $n > 1$, se tiene un $g_2 > 1$. En concreto, $g_2 = 2$. 2 ocurre exactamente 2 veces en esta sucesión.

Como $g_3 = 2$, 3 ocurre exactamente $g_3 = 2$ veces en la sucesión.

Tenemos $g_4 = g_5 = 3$, luego
4 ocurre exactamente 3 veces.
5 ocurre exactamente 3 veces.

Y así con el resto de términos,

$g_6 = g_7 = g_8 = 4$,
 $g_9 = g_{10} = g_{11} = 5$,
...

De la propia definición que dimos, destaca por tanto,

Propiedad 5.24. Sea $g(n)$ el n -ésimo número de Golomb. Entonces, n aparece exactamente $g(n) = m$ veces en la sucesión. Además, la sucesión de Golomb es una sucesión que se fija y que se describe a sí misma, decimos que es **autogenerada**.

En inglés, se utilizan los términos *self-generating* y *self-describing*. De hecho, la sucesión de Golomb no es la única con una propiedad de estas características. Al contrario, se abre ante nosotros otro tipo de sucesiones: las autogeneradas. Un posible tema de estudio, pero que nosotros no llegamos a cubrir en esta memoria.

Además, se introduce el siguiente concepto.

Definición 5.25. Hablamos de racha (“run”) cuando hay más de un resultado idéntico consecutivo, un grupo. Por tanto, una *sucesión de rachas* es aquella sucesión cuyos términos cuentan los valores idénticos consecutivos, recopilando las longitudes de las rachas.

Es decir, en el caso de la sucesión de Golomb:

El primer término es 1 ¿y cuántos 1’s seguidos tenemos en la sucesión? **1**.

El siguiente número diferente en la sucesión es el 2. Con ese, ¿cuántos 2’s consecutivos hay? **2**.

Pasamos a la siguiente racha de números, es decir, el siguiente término diferente que tenemos en la sucesión es el $g_4 = 3$ ¿Cuántos 3’s consecutivos hay en la sucesión? **2**.

Siguiente racha, ahora tenemos términos con valor 4 ¿Cuántos 4’s? **3**.

Siguiente: ¿Cuántos 5’s? **3**.

Nos fijamos en el grupo o racha de 6 ¿Cuántos 6’s? **4**.

...

Resumiendo, con un razonamiento similar al realizado anteriormente y prestando atención a los números en negrita, éstos son los términos o valores que componen la sucesión de rachas asociada a la sucesión de Golomb, que es: 1, 2, 2, 3, 3, 4, ...

¡LA PROPIA SUCESIÓN DE GOLOMB!

Esto es, lo expresado en la siguiente propiedad.

Propiedad 5.26. Sea $g(n) = g_n$ el n -ésimo número de Golomb, entonces la sucesión de rachas de $(g_n)_{n \geq 1}$ es precisamente ella misma, la sucesión $(g_n)_{n \geq 1}$.

Estamos ante una propiedad o descripción reversible (donde a su vez se cumple la viceversa), es decir,

1. Los términos de $(g_n)_{n \geq 1}$ son generados por las rachas.
2. Las rachas de $(g_n)_{n \geq 1}$ son generadas por los propios términos de $(g_n)_{n \geq 1}$.

Entre las otras propiedades de la sucesión de Golomb, recordemos que estamos ante una sucesión de números enteros no decrecientes. Es más, sus términos son justamente crecientes con un incremento de 0 o 1. Luego, de nuevo, se ha realizado el estudio de una sucesión *lenta*.

→ A partir del programa 6 (ver anexo de prog. en MAPLE), se tiene la siguiente gráfica de crecimiento lento.

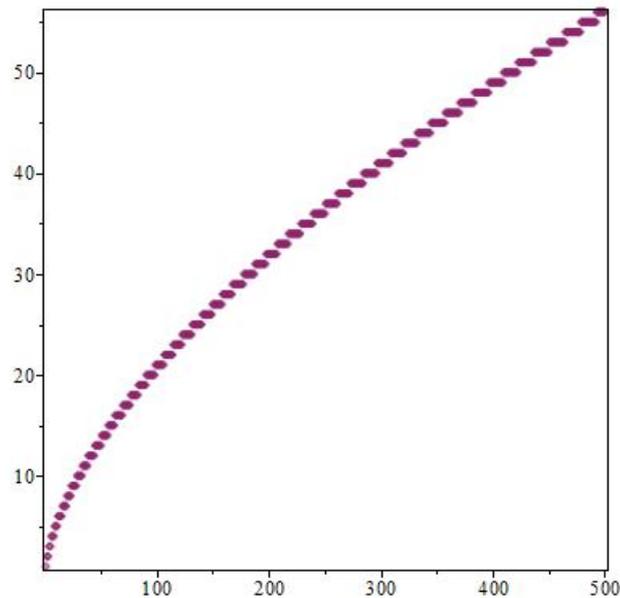


Figura 5.9: MAPLE: Sucesión de Golomb

Por último, otra curiosidad sobre la sucesión de Golomb, mencionada por Sloane en [38], es que su n -ésimo término es el entero más cercano (y converge) a

$$\varphi^{2-\varphi} n^{\varphi-1}, \quad \text{con } \varphi = (1 + \sqrt{5})/2.$$

De nuevo, nos encontramos con el número de oro.

Y tal y como se mencionó al principio de la sección, ahora tenemos una expresión asintótica para la sucesión de Golomb, que se puede expresar también como

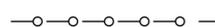
$$g(n) = \varphi^{2-\varphi} n^{\varphi-1} + E(n)$$

donde $E(n)$ es el error que se comete con esta aproximación.

Para más detalles, consultar [30] donde se da una prueba para la estimación de este error $E(n) = g(n) - \varphi^{2-\varphi} n^{\varphi-1}$. Algunas posibles estimaciones de $E(n)$ son:

$$E(n) = o(n^{\varphi-1}),$$

$$E(n) = O(n^{\varphi-1}/\log(n)).$$



Entre todos los enigmas que hemos planteado en este capítulo, sobre todo sigue siendo de interés la teoría que apoyaba Klaus Pinn sobre la existencia de una clase universal para diversas sucesiones meta-recurrentes.

Altug Alkan sugiere lo mismo en su artículo [2], donde encontramos propuesta una generalización de la Q-sucesión de Hofstadter y se investiga, en particular, algunos miembros escogidos de esta generalización. Es decir, las sucesiones que encontramos en este artículo nos llevan a congelar que existen propiedades globales que nos permiten clasificar soluciones impredecibles, como las de la Q-sucesión, y su generalización.

Por este motivo, han aparecido en concreto tantos ejemplos de sucesiones meta-recurrentes *lentas* (de demostración más fácil y con mucho que aportar).

A continuación, reunimos algunas más, con su correspondiente relación de recurrencia y enlace a la OEIS.

- Tanny: <https://oeis.org/A006949>
 $a(n) = a(n - 1 - a(n - 1)) + a(n - 2 - a(n - 2))$, con $a(0) = a(1) = a(2) = 1$.
- Conolly: <https://oeis.org/A046699>
 $a(n) = a(n - a(n - 1)) + a(n - 1 - a(n - 2))$, con $a(1) = a(2) = 1$.
- V-sucesión: <https://oeis.org/A063882>
 $a(n) = a(n - a(n - 1)) + a(n - a(n - 4))$, con $a(1) = a(2) = a(3) = a(4) = 1$.
- Mallows: <https://oeis.org/A005229>
 $a(n) = a(a(n - 2)) + a(n - a(n - 2))$, con $a(1) = a(2) = 1$.
- Otras: [A005350](#), [A005707](#), [A070864](#).

Aquí finalizamos nuestro trabajo sobre sucesiones enteras, donde Hofstadter ha sido el motivo y la motivación por el que este trabajo ha sido posible. Un científico al que le impulsa la búsqueda de la belleza, tanto dentro como fuera de su trabajo profesional: buscando explicaciones bonitas y curiosas, tipos de letra hermosos, patrones sonoros en la poesía, patrones matemáticos... Entre ellos, los que presentan las sucesiones de enteros, una búsqueda de patrones que sigue presente hoy en día.

Programas en MAPLE utilizados

En este anexo aparecen algunas indicaciones sobre los programas y comandos de MAPLE que hemos usado a lo largo del trabajo, y que consideramos oportuno dejar reflejados.

Programa 1. Para comprobar / demostrar formas de Binet, podemos realizar los siguientes pasos. Nuestro ejemplo es con la sucesión de Padovan, pero se procede equivalentemente para Perrin, Tribonacci, Tetranacci... todas aquellas sucesiones (del capítulo 3 sobre todo) que se quiera verificar su forma de Binet. Basta con poner el correspondiente polinomio característico y resolver.

```
> fsolve(x^3-x-1 = 0, complex);
```

```
      -0.662358978622373 - 0.5622795120623013 I ,  
      -0.662358978622373 + 0.5622795120623013 I ,  
      1.324717957244746
```

```
> alfa := 1.32471795724475:
```

```
betaa := -.662358978622373+.562279512062301*I:
```

```
gama := -.662358978622373-.562279512062301*I:
```

Ya tenemos las raíces características guardadas en variables. Con ellas podremos hacer la correspondiente verificación.

A veces, también nos es útil saber módulos y hacernos una idea de la magnitud de estas raíces (para cálculo de límites). Con *abs()* si el número es real calcula el valor absoluto, si es complejo calcula el módulo.

```
> abs(alfa); abs(betaa); abs(gama);
```

```
      1.324717957  
      0.8688369618  
      0.8688369618
```

```
> f := n -> alfa^n/((alfa-betaa)*(alfa-gama))+  
betaa^n/((betaa-alfa)*(betaa-gama))+  
gama^n/((gama-alfa)*(gama-betaa));
```

```
> for j from 0 to 16 do j, round(f(j)) end do;
```

```
      0, 0  
      1, 0  
      2, 1  
      3, 0  
      4, 1  
      5, 1
```

```

6, 1
7, 2
8, 2
9, 3
10, 4
11, 5
12, 7
13, 9
14, 12
15, 16
16, 21
> f(2); f(3); f(5);

1.000000000 + 0. I
-3 10^{-10} + 0. I
0.9999999992 + 0. I

```

Si cambiamos $n=n+4$, tenemos nuestra definición de Padovan (empezamos más adelante).

Hemos usado *round()* para hacer redondeo y que no nos muestre ese pequeño margen de error que hay. Si mostramos los términos tal cual, obtenemos respuestas del estilo de esas tres últimas.

Programa 2. La representación gráfica de sucesiones también es esencial para nuestro estudio. A continuación, programamos dos sucesiones caóticas que han aparecido en nuestro trabajo. Comencemos por la Q-sucesión caótica de Hofstadter, una de las sucesiones meta-recurrentes de más relevancia.

```

> Q := proc (n::posint)
local QQ, q1, q2, k;
if n = 1 then return [1];
else QQ := [1, 1];
for k from 3 to n do
    q1 := QQ[k-1];
    q2 := QQ[k-2];
    QQ := [op(QQ), QQ[k-q1]+QQ[k-q2]];
end do; end if;
QQ;
end proc;

```

Comprobamos que funciona según lo esperado y que el programa nos devuelve los n primeros términos que le pedimos de la sucesión.

```
> Q(0); Q(1); Q(2); Q(30);
```

Error, invalid **input**: Q expects its 1st argument, n, to be of type posint, but received 0.

```

[1]
[1, 1]
[1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 8, 8, 10, 9, 10, 11, 11, 12,
12, 12, 12, 16, 14, 14, 16, 16, 16, 16]

```

Luego, podremos representar correctamente la sucesión en una gráfica. Ésta y otras figuras, se encuentran a lo largo del capítulo de sucesiones meta-recurrentes.

La gráfica es generada por los siguientes comandos:

```
> Qn := Q(10000);
> eje_n := [seq(j, j = 1 .. 10000)];
> plot(eje_n, Qn, axes = boxed, style = point, symbol = point,
      color = navy);
```

Se procede análogamente para la representación gráfica de otras sucesiones. En particular, la la prima caótica de Conway estudiada por Klaus Pinn, muestra unas propiedades muy similares a esta Q -sucesión que acabamos de ver. Su programa sería exactamente igual, sólo que cambiando la relación de recurrencia y poniendo dentro del bucle *for()* lo siguiente:

```
> caot1 := K[k-1];
  caot2 := K[k-2];
  K := [op(K), K[caot1] + K[k-1-caot2]];
```

Con gráfica:

```
> Kn := Kcaot(10000); #nombre del procedimiento
> eje_n := [seq(j, j = 1 .. 10000)];
> plot(eje_n, Kn, axes = boxed, style = point, symbol = point,
      color = gold, labels = [n, K_n]);
```

Programa 3. Otra sucesión principal en esta memoria es la sucesión de los 10,000 \$ o sucesión de Hofstadter-Conway. Por ello, mostramos su programa completo, a pesar de ser similar al anterior.

```
> C := proc (n::posint)
local conw, c1, c2, k;
if n = 1 then return [1];
else conw := [1, 1];
for k from 3 to n do
    c1 := conw[k-1];
    c2 := conw[k-2];
    conw := [op(conw), conw[c1]+conw[k-c1]];
end do; end if;
conw;
end proc;
```

Después de comprobar que este procedimiento funciona correctamente, elaboramos la gráfica con:

```
> Cn := C(10000);
> eje_n := [seq(j, j = 1 .. 10000)];
> plot(eje_n, Cn, axes = boxed, style = point, color = aquamarine);
```

Programa 4. Tras haber programado la Q -sucesión y la sucesión de Conway en los dos programas anteriores, comprobamos que restando, nos da la sucesión caótica con forma de corazón (heart).

```
> C(30)-Q(30);
```

```
[0, 0, 0, -1, 0, 0, -1, -1, -1, 0, 1, -1, 0, 0, -2, -1, -1, -1,
 0, 0, 0, 1, 2, -2, 1, 1, -1, 0, 0, 0]
```

Efectivamente, obtenemos lo que queríamos y está funcionando correctamente. Así que podemos proceder con la gráfica.

```

> Hn := C(10000)-Q(10000);
> eje_n := [seq(j, j = 1 .. 10000)];
> plot(eje_n, Hn, axes = boxed, style = point, symbol = point,
      color = red);

```

Programa 5. A lo largo de esta memoria, son varias las sucesiones meta-recurrentes lentas las que nos encontramos. Entre ellas, es buena idea mostrar en concreto el código de las sucesiones casadas, ya que pueden surgir varios inconvenientes durante su programación.

Son sucesiones cuyas condiciones iniciales comienzan en el término 0, y por defecto MAPLE no reconoce la posición 0 en listas y arrays (comienzan en la posición 1). Veremos cómo evitar que MAPLE nos ponga trabas con esto.

Además, nos vemos obligados a utilizar la opción *remember*. En caso contrario MAPLE colapsa ante tanta recursión con algunas relaciones de recurrencia complejas.

Por último, aprovechamos la ocasión para representar dos sucesiones distintas en una misma gráfica.

```

> MU := proc (n) option remember;
      n-MA(procname(n-1)) end proc;
> MA := proc (n) option remember;
      n-MU(procname(n-1)) end proc;
#Ahora ya nos deja definir las condiciones iniciales.
#Antes no, con problemas en 0.
> MU(0) := 1; MA(0) := 0;

```

En estos procedimientos no hemos usado listas, pero tiene fácil solución. Generamos las listas necesarias para la creación de nuestra gráfica.

```

> listaMA := [seq(MA(n), n = 0 .. 100)];
> listaMU := [seq(MU(n), n = 0 .. 100)];
> eje_n := [seq(j, j = 0 .. 100)];

```

Lo más sencillo para obtener la gráfica conjunta deseada es utilizar el comando *display*, que permite mostrar varias funciones en un mismo despliegue sin importar que tengan estructuras diferentes o no.

```

> m1 := plot(eje_n, listaMA, axes = boxed, color = blue);
> m2 := plot(eje_n, listaMU, axes = boxed, color = magenta);
> plots[display]([m1, m2]);

```

Programa 6. De nuevo, si queremos representar una sucesión, tendremos que programarla y utilizar la función *plot()*. Sin embargo, esta vez para programar la sucesión de Golomb, se tienen menos condiciones iniciales y una relación de recurrencia mucho más simple. Esto nos permite solventar el problema en menos líneas y más sencillas, lo que nos puede aclarar los otros códigos creados hasta el momento, por si quedara alguna duda.

```

> golomb := proc ()
local listag, k;
  listag := [1];
  for k from 2 to 1000 do
    listag := [op(listag), listag[k-listag[listag[k-1]]]+1];
  end do;

```

```
listag;  
end proc;
```

```
> g := golomb(); #guardo la lista de Golomb  
                #(1000 valores pedidos en el bucle).  
> g[1 .. 30];   #primeros 30 valores.
```

Para representar estos números, necesito coordenadas, es decir, valores en el eje X y en el eje Y. Trabajamos con los pares $(n, g(n))$.

```
> coord := [seq(h, h = 1 .. 10)];  
> for j to 10 do  
    coord[j] := [j, g[j]]  
end do;  
> coord;
```

```
[[1, 1], [2, 2], [3, 2], [4, 3], [5, 3],  
 [6, 4], [7, 4], [8, 4], [9, 5], [10, 5]]
```

Por eso, cuando hacemos la representación gráfica, en todos nuestros programas hemos trabajado con una lista de apoyo (una lista “plana” para el eje X), que va de 1 (ó 0) a n .

```
> apoyoX := [seq(h, h = 1 .. 500)]; #llamada eje_n en otras ocasiones.  
> plot(apoyoX, g, axes = boxed, style = point, color = maroon);
```

Bibliografía

- [1] J. Aarts, R. Fokkink y G. Kruijtzter, MORPHIC NUMBERS, NAW 5/2 no.2 (2001).
- [2] A. Alkan, ON A GENERALIZATION OF HOFSTADTER'S Q-SEQUENCE: A FAMILY OF CHAOTIC GENERATIONAL STRUCTURES, Wiley - Hindawi Complexity Volume 2018 (2018) article id. 8517125.
- [3] A. Alkan y O. O. Aybar, ON FAMILIES OF SOLUTIONS FOR META-FIBONACCI RECURSIONS RELATED TO HOFSTADTER-CONWAY \$10000 SEQUENCE, 5th International Interdisciplinary Chaos Symposium on Chaos and Complex Systems - slides (12-5-2019).
- [4] A. Alkan, N. Fox y O.O. Aybar, ON HOFSTADTER HEART SEQUENCES, Wiley - Hindawi Complexity Volume 2017 (2017) article id. 2614163.
- [5] C. Ballantine y M. Merca, PADOVAN NUMBERS AS SUMS OVER PARTITIONS INTO ODD PARTS, Journal of Inequalities and Applications - a SpringerOpen Journal 2016:1 (2016).
- [6] José Luis Cereceda, BINET'S FORMULA FOR GENERALIZED TRIBONACCI NUMBERS, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 46:8 (Madrid, 2015) pags. 1235 - 1243.
- [7] C.K. Cook y M.R. Bacon, SOME IDENTITIES FOR JACOBSTHAL AND JACOB-LUCAS NUMBERS SATISFYING HIGHER ORDER RECURRENCE RELATIONS, Annales Mathematicae et Informaticae 41 (2013) pags. 27 - 39.
- [8] William H. Cornish, POWERS OF MATRICES AND RECURRENCE RELATIONS, A collection of manuscripts related to the Fibonacci sequence - Fibonacci Assoc., Santa Clara, Calif. (1980) pags. 217 - 223.
- [9] T. Evink y P.A. Helminck, TRIBONACCI NUMBERS AND PRIMES OF THE FORM $p = x^2 + 11y^2$, Math. Slovaca 69 (2018) pags. 521 - 532.
- [10] Mark Feinberg, FIBONACCI - TRIBONACCI, Fibonacci Quarterly Journal 1 (1963) pags. 71 - 74.
- [11] Nathan Fox, LINEAR RECURRENT SUBSEQUENCES OF GENERALIZED META-FIBONACCI SEQUENCES, J. Difference Equ. Appl. 22 no.7 (2016) pags. 1019 - 1026.
- [12] Nathan Fox, A SLOW RELATIVE OF HOFSTADTER'S Q-SEQUENCE, Journal of Integer Sequences 20 (2017) art. 17.7.3.
- [13] V. Granville y J.P. Rasson, A STRANGE RECURSIVE RELATION, Journal of Number Theory 30 (1988) pags. 238 - 241.
- [14] Ralph P. Grimaldi, FIBONACCI AND CATALAN NUMBERS - AN INTRODUCTION, Editorial Wiley (New Jersey, 2012).

- [15] Douglas R. Hofstadter, GÖDEL, ESCHER, BACH: AN ETERNAL GOLDEN BRAID, Basic Books Inc. (New York, 1999).
- [16] A.F. Horadam, JACOBSTHAL REPRESENTATION NUMBERS, Fibonacci Quarterly 34, no.1 (1996) pags. 40 - 54.
- [17] A.F. Horadam, PELL IDENTITIES, Fibonacci Quarterly 9, no.3 (1971) pags. 245 - 252, 263.
- [18] Stanislav Jakubec y Karol Nemoga, ON A CONJECTURE CONCERNING SEQUENCES OF THE THIRD ORDER, Math. Slovaca 36, no.1 (1986) pags. 85 - 89.
- [19] Dov Jarden, RECURRING SEQUENCES, Riveon Lematematika (Jerusalem - Israel, 1966).
- [20] M. Kamiya, T. Ohya y K. Motose , COMPANION LUCAS SEQUENCES, Bull. Grad. Sch. Sci. Tech. Hirosaki Univ. 1 (Hirosaki - Japón, 2007) pags. 5 - 21.
- [21] Thomas Koshy, FIBONACCI AND LUCAS NUMBERS WITH APPLICATIONS, Editorial Wiley (New York, 2001).
- [22] Thomas Koshy, PELL AND PELL-LUCAS NUMBERS WITH APPLICATIONS, Editorial Springer (New York, 2014).
- [23] T. Kubo y R. Vakil, ON CONWAY'S RECURSIVE SEQUENCE, Discrete Mathematics 152 (1996) pags. 225 - 252.
- [24] Harris Kwong, AN ALTERNATE PROOF OF SURY'S FIBONACCI-LUCAS RELATION, Mathematical Association of America - The American Mathematical Monthly 121, no.6 (New York, June 2014) pag. 514.
- [25] Pierre Letouzey, HOFSTADTER'S PROBLEM FOR CURIOUS READERS, Université Paris Diderot - INRIA Paris-Rocquencourt (2015) pag. 29.
- [26] I.E. Leonard y A.C.F. Liu, A FAMILIAR RECURRENCE OCCURS AGAIN, Mathematical Association of America - The American Mathematical Monthly 119, no.4 (Washington DC, 2012) pags. 333 - 336.
- [27] J.E. Marcos Naveira, COMBINATORIA ENUMERATIVA - APUNTES COMPLEMENTARIOS DE MATEMÁTICA DISCRETA, (Universidad de Valladolid, 2020). Descarga en [PDF](#).
- [28] J.E. Marcos Naveira, NÚMEROS DE FIBONACCI Y SUS FÓRMULAS, conferencia (Valladolid, 19-10-2010).
- [29] R. Melham, SUMS INVOLVING FIBONACCI AND PELL NUMBERS, EMS Publishing House - Portugaliae Mathematica 56 (Zürich, 1999) fasc. 3.
- [30] Y.F.S. Pétermann, ON GOLOMB'S SELF DESCRIBING SEQUENCE, Journal of Number Theory 53 (1995) pags. 13 - 24.
- [31] Klaus Pinn, A CHAOTIC COUSIN OF CONWAY'S RECURSIVE SEQUENCE, Experimental Mathematics 9 (1998) pags. 55 - 66.
- [32] Mustazee Rahman, A COMBINATORIAL INTERPRETATION OF HOFSTADTER'S G-SEQUENCE, Atl. Electron. J. Math. (2012) pags. 16 - 21.
- [33] J.L. Ramírez y V.F. Sirvent, A NOTE ON THE K-NARAYANA SEQUENCE, Annales Mathematicae et Informaticae 45 (2015) pags. 91 - 105.

- [34] Paulo Ribenboim, MY NUMBERS, MY FRIENDS - POPULAR LECTURES ON NUMBER THEORY, Editorial Springer (New York, 2000).
- [35] S.E. Rihane, C.A. Adegbindin y A. Togbé, FERMAT PADOVAN AND PERRIN NUMBERS, Journal of Integer Sequences 23 (Canadá, 2020) art. 20.6.2.
- [36] E.L. Roettger y H.C. Williams, SOME ARITHMETIC PROPERTIES OF CERTAIN SEQUENCES, Journal of Integer Sequences 18 (Canadá, 2015) art. 15.6.2.
- [37] A.G. Shannon, P.G. Anderson y A.F. Horadam, PROPERTIES OF CORDONNIER PERRIN AND VAN DER LAAN NUMBERS, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 37:7 (2006) pags. 825 - 831.
- [38] N.J.A. Sloane, MY FAVORITE INTEGER SEQUENCES, Sequences and their applications - Springer Ser. Discrete Math. Theor. Comput. Sci. (Londres, 1999) pags. 103 - 130.
- [39] N.J.A. Sloane, THE ON-LINE ENCYCLOPEDIA OF INTEGER SEQUENCES, Annales Mathematicae et Informaticae 41 (USA, 2013) pags. 219 - 234.
- [40] N.J.A. Sloane, A HANDBOOK OF INTEGER SEQUENCES, Academic Press (New York, 1973).
- [41] K. Sokhuma, MATRICES FORMULA FOR PADOVAN AND PERRIN SEQUENCES, Applied Mathematical Sciences 7, no.142 (Bulgaria, 2013) pags. 7093 - 7096.
- [42] W.R. Spickerman, BINET'S FORMULA FOR THE TRIBONACCI SEQUENCE, Fibonacci Quarterly 20 (1982) pags. 118 - 120.
- [43] V.W. de Spinadel y A. Redondo Buitrago, TOWARDS VAN DER LAAN'S PLASTIC NUMBER IN THE PLANE, Journal for Geometry and Graphics 13, no.2 (2009) pags. 163 - 175.
- [44] Thomas Stoll, ON HOFSTADTER'S MARRIED FUNCTIONS, Fibonacci Quarterly 46/47 (2008) pags. 62 - 67.
- [45] Zhi-Hong Sun, CONGRUENCES FOR FIBONACCI NUMBERS, Huaiyin Teachers College (China, 24-02-2009).

Algunas direcciones de internet con contenido específico sobre la materia:

- <https://oeis.org/>
- <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/>
- https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio
- https://en.wikipedia.org/wiki/Lucas_sequence
- https://en.wikipedia.org/wiki/Hofstadter_sequence
- <https://en.wikipedia.org/wiki/>
- mathpages.com (Perrin's sequence)
- <https://mathworld.wolfram.com/PadovanSequence.html>
- <https://mathworld.wolfram.com/TribonacciNumber.html>
- <https://mathworld.wolfram.com/TetranacciNumber.html>
- <http://jeux-et-mathematiques.davalan.org/mots/suites/hof/index-en.html>

