



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO DE FIN DE GRADO

GRADO EN FÍSICA

SISTEMAS DINÁMICOS EN MODELOS DE ENERGÍA OSCURA

Autor:

Juan Carlos Benito Núñez

Tutor:

Diego Sáez-Chillón Gómez

Resumen

Sistemas Dinámicos en Modelos de Energía Oscura

por Juan Carlos Benito Núñez

El presente trabajo trata sobre los diferentes modelos que intentan explicar el origen de la energía oscura, su comportamiento y el papel que juega en la expansión del universo. Primeramente, se estructura el contenido en una introducción, para después pasar a los siguientes apartados, en los que se describen los conceptos fundamentales para entender todo el contenido. A continuación, se introducirán los diferentes modelos que describen la energía oscura, y se distinguirán las diferencias entre los mismos. Finalmente, se aplicará el análisis de sistemas dinámicos a algunos de ellos, para analizar sus puntos críticos, su condición de estabilidad y el significado físico que presentan, obteniendo así las conclusiones pertinentes en relación a este estudio.

Índice general

1. Introducción	1
2. Nociones fundamentales sobre Cosmología	3
2.1. Métrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)	3
2.2. Ecuaciones de Friedmann-Lemaître	4
2.3. Tiempo de Hubble	6
2.4. Distancia luminosa y Candelas estándar	6
2.5. Problema del Horizonte	7
3. Sistemas Dinámicos	9
3.1. Introducción a los Sistemas Dinámicos	9
3.1.1. Autovalores reales y diferentes	10
3.1.2. Autovalores complejos	11
3.1.3. Autovalores reales e iguales	11
3.2. Aplicaciones y ejemplos de Sistemas Dinámicos	12
4. Expansión Acelerada del Universo	15
5. Análisis de Modelos de Energía Oscura con Sistemas Dinámicos	17
5.1. Campos escalares	17
5.1.1. Quintaesencia	17
5.1.2. Campo de Taquiones	20
5.1.3. Energía Oscura Fantasma	22
5.2. Modelos Interactivos de Energía Oscura	24
5.2.1. Fluidos perfectos acoplados	24
5.3. Campos no escalares	25
5.3.1. Campos vectoriales	25
5.3.2. Campos espinoriales	26
5.3.3. Gas de Chaplygin	26
5.4. Modelos más allá de la Relatividad General	26
6. Conclusiones finales	27

Capítulo 1

Introducción

En 1998, los científicos *Saul Perlmutter*, *Brian P. Schmidt* y *Adam G. Riess* descubrieron que el Universo se expande de forma acelerada, a partir de las observaciones que realizaron de supernovas lejanas (tipo Ia). Por este hecho, los tres astrónomos recibieron conjuntamente el premio Nobel de Física en 2011. Este descubrimiento es uno de los más importantes de los últimos años, pues incluso a día de hoy se sigue trabajando profundamente en el tema, así como en la causa que provoca esta expansión acelerada y que trae de cabeza a cosmólogos de universidades, laboratorios y centros de investigación de todo el mundo desde entonces.

Ya desde 1929, año en el que *Edwin Hubble* estudió el corrimiento al rojo de galaxias que se encontraban más allá de lo que él llamó "grupo local", se sabe que el Universo sufre una expansión. En esos años *Hubble*, junto a su compañero *Humason*, postuló su famosa *Ley de Hubble* conocida actualmente como *Ley de Hubble-Lemaître*, en la que se explica el hecho de que cuanto más lejos se encuentra una galaxia, mayor es la velocidad aparente con la que se aleja de nosotros. También en 1964, *Penzias* y *Wilson* encontraron en los laboratorios Bell de Nueva Jersey, la radiación del fondo cósmico de microondas o por sus siglas en inglés (CMB), que interpretaron como una prueba que apoyaba la Teoría del Big Bang. Por este descubrimiento recibieron el Nobel de Física en 1978. Esta serie de avances y observaciones, junto a la Teoría de la Relatividad General (RG) de *Einstein* (1915), sentaron las bases de lo que conocemos por Cosmología moderna hoy en día.

En acuerdo con la Relatividad General, si el Universo estuviera constituido únicamente por materia ordinaria y radiación, este sufriría una expansión desacelerada y no acelerada como ya hemos dicho en el párrafo anterior. A partir de este punto, surgen dos líneas de pensamiento: la primera es suponer que la RG no es válida a una escala de distancias cosmológicas, y por tanto, es necesario hallar otra teoría de gravedad que sí sea válida. La segunda opción, es considerar que la RG es correcta, pero que en el Universo debe existir un 75 % de la densidad de energía total que ejerza una presión negativa para que sea posible una expansión acelerada (esta última se entenderá mejor con la información presente en el Capítulo 2).

La constante cosmológica (Λ), fue introducida por *Einstein* en las ecuaciones de campo de la Relatividad General, con el objetivo de que estas mismas ecuaciones describieran un Universo estático y finito. Tras las observaciones realizadas por *Hubble*, se constató que el Universo no era estático, y por tanto, la idea de la constante cosmológica cayó en el olvido. No fue hasta 1968, cuando *Zeldóvich* se percató de que Λ se correspondía matemáticamente con el tensor energía-momento del vacío, con lo cual, la idea de la constante cosmológica cobró fuerza de nuevo, ya que no podía ser pasada por alto. Según la Teoría Cuántica de Campos, el vacío está constituido por pares de partículas virtuales, de manera que el vacío tiene asociada una densidad de energía. Experimentalmente se ha hallado que Λ es 120 órdenes de magnitud más pequeña de lo que la teoría predice (S. Carroll, 1992 [7]). Esta discrepancia se conoce como *Problema de la constante cosmológica* y ha recibido el nombre de la "peor predicción en la historia de la Física". A pesar de este problema, en la actualidad no se duda de la existencia de una densidad de energía de vacío, ya que es necesaria para que la teoría concuerde con lo que se observa de manera

experimental (expansión acelerada).

El contenido del trabajo se estructura de esta manera: en el Capítulo 2, se presentan los conceptos e ideas que son esenciales para el buen entendimiento del trabajo, así como los distintos parámetros que se utilizan a nivel observacional, parámetro de escala (a), parámetro de *Hubble* (H) o el 'redshift' (desplazamiento al rojo de la radiación electromagnética que nos llega), entre otros. Después, en el Capítulo 3, se explicará en qué consisten los *sistemas dinámicos*, sus aplicaciones y algunos ejemplos. Seguimos con el Capítulo 4, en el que se trata brevemente la historia de la Cosmología moderna desde el siglo XX hasta nuestros días. A continuación, en el Capítulo 5, se introducen algunos de los distintos modelos de energía oscura, se habla sobre las premisas de las que parte cada uno y las consecuencias que surgen de ellos. Por último en el Capítulo 6, se discuten las conclusiones que se obtienen de ellos.

Capítulo 2

Nociones fundamentales sobre Cosmología

En este capítulo se presentan y definen los conceptos clave que serán usados más adelante, tales como la métrica FLRW o el parámetro de escala (a), entre otros.

2.1. Métrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)

A partir de las observaciones que se hacen del Universo, podemos decir que a grandes escalas es homogéneo e isótropo, es decir, si tomamos un punto en él, este será invariante bajo traslaciones (homogéneo) e invariante bajo rotaciones (isótropo), en acuerdo con el **Principio Cosmológico**. La métrica FLRW cumple estas dos simetrías y matemáticamente, nos proporciona la forma en que nos movemos por el espacio-tiempo. La métrica es la siguiente, en unidades en las que $c = 1$ (velocidad de la luz):

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right] \quad (2.1)$$

Con r , θ y ϕ como coordenadas espaciales, t es el tiempo cosmológico y $a(t)$ es el parámetro de escala que describe la expansión. El parámetro k tiene que ver con la curvatura del espacio en 3 dimensiones: si $k = -1$, tendremos un espacio abierto o hiperbólico, si $k = 0$, tendremos un espacio plano y, por último, si $k = 1$, tendremos un espacio cerrado o esférico. Se indicarán los parámetros actuales con un subíndice 0 en ellos.

En lugar del parámetro de escala a , se utiliza normalmente el 'redshift' (z), que es más manejable (es adimensional) y cuya definición se da a continuación:

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{a_0}{a(t)} = 1 + z \quad (2.2)$$

La longitud de onda actual (λ_0), que nos llega, es mayor a la longitud de onda inicial (λ) emitida por la fuente, por efecto de la expansión en el Universo y de esta forma podemos definir el valor de z , que será siempre mayor que 0. Esto hace de z un parámetro muy útil a la hora de medir distancias y de compararlo con el tiempo cosmológico t , siendo proporcional a este.

Otro parámetro importante es el parámetro de *Hubble*, se define de la manera siguiente:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.3)$$

Donde \dot{a} denota la derivada del parámetro de escala a , respecto del tiempo cosmológico t . El parámetro de *Hubble* está relacionado con la velocidad a la que se alejan las galaxias lejanas de nosotros, siendo proporcional a la distancia a la que se encuentran. Todo ello se resume en la **Ley de Hubble-Lemaître**:

$$v \simeq Hd \quad (2.4)$$

Con v la velocidad a la que aparentan alejarse las galaxias lejanas y d la distancia a la que se encuentran. Esta relación ha sido verificada con gran precisión en las últimas décadas gracias a los numerosos avances observacionales.

2.2. Ecuaciones de Friedmann-Lemaître

A continuación estudiamos la dinámica del parámetro de escala $a(t)$. Con lo cual, aplicamos a la métrica FLRW, las ecuaciones de campo de *Einstein*:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (2.5)$$

Donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de *Ricci*, R es el escalar de *Ricci*, $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico, G es la constante de gravitación universal y $T_{\mu\nu}$ es el tensor energía-momento. Este último tensor lo podemos entender como el de un fluido perfecto (L. Amendola, 2010 [4]), para estar de acuerdo con las observaciones:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu} \quad (2.6)$$

Siendo U_μ la cuadrivelocidad del fluido, ρ es la densidad de energía del fluido y p es la presión que ejerce el mismo, todo ello en el sistema de referencia del fluido. Aplicando las ecuaciones (2.1) y (2.6) a las ecuaciones de campo (2.5), obtenemos dos ecuaciones. La primera se conoce como ecuación de *Friedmann*:

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_i - \frac{k}{2a^2} \quad (2.7)$$

Donde i se refiere a todos los tipos de energía presentes en el Universo (ρ_r radiación, ρ_m materia bariónica y materia oscura y ρ_Λ energía oscura). Esta ecuación da cuenta de que la evolución de \dot{a} debe depender de todas las densidades de energía que existen, así como de la curvatura espacial k . La segunda ecuación es la ecuación de evolución:

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -4\pi G \sum_i \rho_i - \frac{k}{2a^2} \quad (2.8)$$

Dado un tiempo cosmológico cualquiera t , se usa la ecuación de *Friedmann*, para obtener una densidad de energía crítica (ρ_c) que nos proporcione un $k = 0$, es decir, un universo plano, lo que es congruente con las observaciones. Así se obtiene de (2.7):

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (2.9)$$

A partir de esta densidad crítica se define un nuevo parámetro conocido como parámetro de densidad total:

$$\Omega_{total} = \frac{\rho_{total}}{\rho_c} \quad (2.10)$$

Con él, es posible relacionar la curvatura que presenta el Universo, según el valor que tome:

$$\begin{aligned}
\Omega_{total} > 1 &\leftrightarrow k = +1 \\
\Omega_{total} = 1 &\leftrightarrow k = 0 \\
\Omega_{total} < 1 &\leftrightarrow k = -1
\end{aligned}
\tag{2.11}$$

Es importante también la fracción de densidad de energía crítica para cada una de las componentes ρ_i :

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c} \tag{2.12}$$

De las componentes (00) y (ii) en las ecuaciones (2.5), obtenemos la ecuación de *Friedmann* (2.7) y la siguiente:

$$3H^2 + 2\dot{H} = -8\pi G\rho - \frac{k}{2a^2} \tag{2.13}$$

Donde \dot{H} es la derivada de H respecto de t . Eliminando ahora el término $\frac{k}{2a^2}$ en ambas ecuaciones, multiplicando por a^2 la ecuación (2.7) y derivando esta última respecto de t , tenemos:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \tag{2.14}$$

Esta ecuación se conoce como *ecuación de continuidad* (L. Amendola, 2010 [4]), muy importante, ya que nos proporciona el comportamiento de ρ si conocemos cómo se relaciona con p . La ecuación (2.14), se puede obtener también de la siguiente relación $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, que es la derivada covariante del tensor energía-momento que aparece en las ecuaciones de campo de *Einstein*.

Además de estas relaciones, necesitamos dar una ecuación de estado para conocer cómo se relacionan ρ y p .

$$p = w\rho \tag{2.15}$$

Siendo por ejemplo, para la materia $w = 0$, porque no ejerce presión o para la radiación $w = 1/3$ tal y como se deduce de la mecánica estadística.

Siempre que supongamos w constante, podremos resolver (2.14) y obtener:

$$\rho(a)_i \propto \frac{1}{a(t)^{3(1+w_i)}} \tag{2.16}$$

O en términos de z :

$$\rho(z)_i \propto 1 + z^{3(1+w_i)} \tag{2.17}$$

La constante cosmológica, que se puede entender como una componente de la densidad de energía total, aparece en las ecuaciones de campo de *Einstein* dentro del tensor energía-momento:

$$T^{\mu\nu} = -\frac{\Lambda}{8\pi G} g^{\mu\nu} \tag{2.18}$$

Lo cual, corresponde a un fluido perfecto con:

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} \quad (2.19)$$

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda$$

Utilizando la ecuación (2.14), vemos que ρ_Λ queda constante, con el valor que aparece anteriormente ($w = -1$).

2.3. Tiempo de Hubble

Como ya hemos mencionado, las observaciones del fondo cósmico de microondas constatan con gran precisión

que el Universo es esencialmente plano, es decir, $k = 0$. En el caso de que sea plano y w sea una constante, podemos utilizar la ecuación (2.16) y la ecuación de *Friedmann* (2.7), obteniendo:

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{(2/3)(1+w)} \quad (2.20)$$

Esto es cierto siempre y cuando $w \neq -1$, en ese caso $a(t) \propto e^{Ht}$. En la ecuación anterior, vemos que los Universos gobernados por materia y radiación, comenzaron con $a = 0$, es decir, comenzaron en una singularidad correspondiente al *Big Bang*, de acuerdo con el **Teorema de Hawking-Penrose**, que expresa la existencia de una singularidad siempre que la materia cumpla unas condiciones de energía. Es posible calcular la edad del Universo, conociendo la definición del parámetro de *Hubble* y usando la ecuación (2.20).

$$t_0 = \int_0^1 \frac{da}{aH(a)} = \frac{t_0}{a_0^{3(1+w)/2}} = \frac{2}{3(1+w)H} \quad (2.21)$$

Es útil aproximar este resultado por $t_0 \simeq H_0^{-1}$, es por ello que a H_0^{-1} se conoce como **tiempo de Hubble** y proporciona una buena estimación de la edad del universo.

2.4. Distancia luminosa y Candelas estándar

Es posible conocer la distancia luminosa de un objeto (d_L) en pársecs (pc), conociendo su luminosidad intrínseca L y el flujo de energía F (L. Amendola, 2010 [4]):

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}} = (1+z)r(z) \quad (2.22)$$

Siendo $r(z)$ la distancia comóvil a un objeto con 'redshift' z , para un universo plano ($k = 0$).

$$r(z) = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (2.23)$$

$H(z)$ depende en general de la densidad crítica de materia no relativista Ω_M y de la relativista, Ω_R , así como del modelo cosmológico que estemos considerando. También la distancia luminosa está relacionada con μ que es la diferencia entre la magnitud aparente m y absoluta M , que se define como la magnitud aparente m que presentaría el objeto, si nos encontrásemos a una distancia de 10 pc (pársecs).

$$\mu(z) \equiv m - M = 5 \log_{10}(d_L/10pc) = 5 \log_{10}[(1+z)r(z)/pc] - 5 \quad (2.24)$$

Las **candelas estándar** son objetos con magnitud absoluta M bien conocida. Gracias a las medidas que realizamos de la magnitud aparente m , podemos conocer $r(z)$ y descartar modelos cosmológicos en función de los valores que tome $r(z)$ en cada caso.

2.5. Problema del Horizonte

El problema del horizonte, también llamado problema de la causalidad, se basa en el hecho de que la información no puede viajar más rápido que la luz, de forma que dos regiones en el espacio separadas por una distancia mayor que la velocidad de la luz (c) multiplicada por la edad del universo, no pueden estar causalmente relacionadas.

Dicho de otra manera, en el Universo la temperatura media es de $2,725 K$, de acuerdo con las anisotropías que se observan (Figura 2.1) en el fondo cósmico de microondas (CMB), sea cual sea la dirección en que miremos (estas anisotropías en la temperatura son muy pequeñas, del orden de 10^{-5}). De ello podemos inferir, que esta es la temperatura de equilibrio, pero para que regiones muy alejadas alcancen la misma temperatura, es necesario que en algún momento hayan tenido contacto entre ellas. Sin embargo, en el tiempo de existencia del Universo ($13.700 m.a.$), la radiación que parte de una de ellas no ha llegado todavía a la otra, lo cual no tiene sentido. También se puede entender con la homogeneidad e isotropía que se observan a grandes escalas en regiones que no han podido estar conectadas en ningún instante.

Esta contradicción intenta resolverse con la llamada **Teoría de Inflación Cósmica**, que detalla las características que presentaba el Universo primigenio, en el momento del *Big Bang*, para resolver así el problema de la homogeneidad desde el principio.

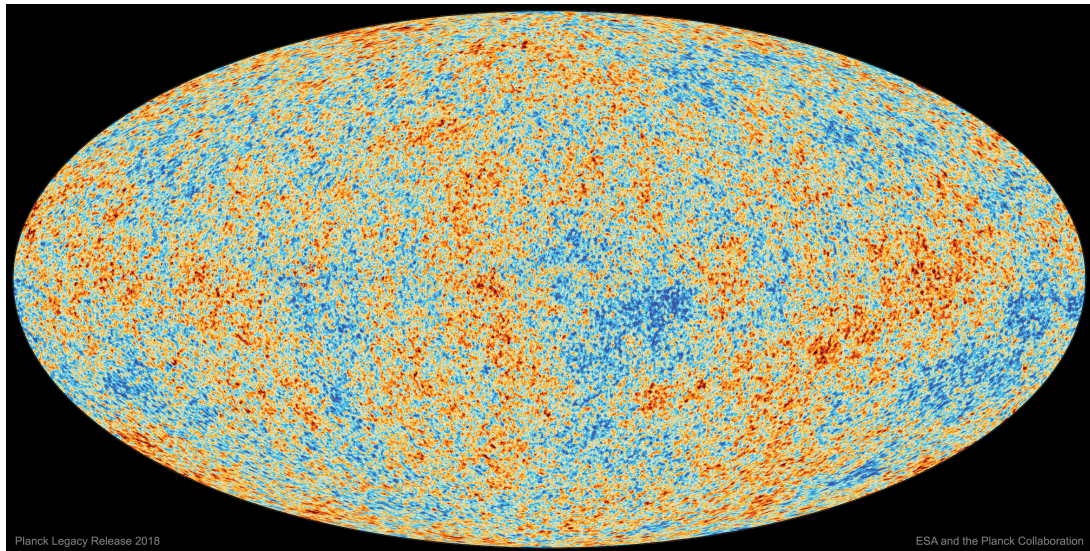


Figura 2.1: Fondo Cósmico de Microondas en el que se observan las anisotropías (Misión Planck 2013).

Capítulo 3

Sistemas Dinámicos

En este capítulo introduciremos el concepto de sistemas dinámicos, sus puntos críticos y el concepto de estabilidad. Después veremos algunas aplicaciones de dicho concepto y, por último, estudiaremos detenidamente algún ejemplo físico.

3.1. Introducción a los Sistemas Dinámicos

En la mayoría de los casos, no es fácil hallar una solución general para sistemas de ecuaciones diferenciales, aunque muchas veces es suficiente con conocer cómo será el comportamiento de las soluciones asintóticamente, según vaya evolucionando el sistema con una cierta variable independiente.

Nos centraremos en analizar sistemas dinámicos autónomos no lineales de dos ecuaciones (bidimensionales). Son grupos de dos ecuaciones diferenciales en los que no aparece la variable independiente (t), de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y)\end{aligned}\tag{3.1}$$

Siendo x e y las variables dependientes. Como son autónomos, es posible proyectar en un espacio de fases XY las curvas $x(t)$ e $y(t)$, obteniendo las trayectorias de fase. La ecuación diferencial que nos proporciona estas trayectorias es la siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{P}\tag{3.2}$$

Al resolverla, obtenemos una integral primera que describe el espacio de fases, cumpliendo con las condiciones que requiere el **Teorema de Existencia y Unicidad**. Supongamos ahora, que el sistema (3.1) presenta un punto crítico en $(0, 0)$, es decir, $P(0, 0) = Q(0, 0) = 0$. Seguidamente, aproximamos las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ mediante sus expansiones de Taylor a primer orden en torno a dicho punto, resultando:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\tag{3.3}$$

Donde tenemos que:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dP}{dx} & \frac{dP}{dy} \\ \frac{dQ}{dx} & \frac{dQ}{dy} \end{pmatrix}_{(x,y)=(0,0)} \quad (3.4)$$

A continuación, estudiamos las soluciones del sistema linealizado (3.3) que serán exponenciales descritas por los autovalores y autovectores que diagonalizan la matriz A .

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(trA \pm \sqrt{\Delta}), \text{ donde } \Delta = (trA)^2 - 4detA \quad (3.5)$$

Según sean los autovalores, el punto crítico será estable, inestable o asintóticamente estable. Todo este procedimiento, nos permite conocer **localmente**, cerca del punto, las trayectorias de fases del sistema y construir así, el diagrama de fases.

La condición de estabilidad del punto crítico, dependerá de cómo sean los autovalores de la matriz A , de forma que podemos distinguir los siguientes casos:

3.1.1. Autovalores reales y diferentes

En este caso tenemos que $\Delta > 0$ y $\lambda_1 > \lambda_2$ y los autovectores asociados serán:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Entonces, la solución del sistema vendrá dada por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} e^{(\lambda_1 t)} + C_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} e^{(\lambda_2 t)} \quad (3.7)$$

También tendremos diferentes casos en función del signo de los autovalores:

Negativos: $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

En este caso (x, y) tenderán al punto crítico $(0, 0)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} y = 0 \quad (3.8)$$

Con lo que el punto es **asintóticamente estable** y las trayectorias se verán en el diagrama de fases como entrando hacia dicho punto en concreto.

Positivos: $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$

Ahora todas las trayectorias escapan del punto crítico:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x = \infty, \lim_{t \rightarrow \infty} y = \infty \quad (3.9)$$

El punto es entonces un **nodo inestable** y las trayectorias aparecen en el diagrama de fases como saliendo del punto en cuestión.

Signos opuestos: $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$

En este caso, todas las trayectorias escapan del punto crítico, excepto aquella que cumpla con $C_1 = 0$. Esta entra en el punto que se conoce entonces como **Punto de silla**.

3.1.2. Autovalores complejos

En este caso $\Delta < 0$, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$ y la solución del sistema general es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \left(C_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cos \omega t + C_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \sin \omega t \right) \quad (3.10)$$

Son soluciones periódicas gobernadas por una exponencial. Podremos distinguir dos casos dependiendo de si los autovalores son complejos o imaginarios puros.

Parte real distinta de cero $\alpha \neq 0$

Las trayectorias en el diagrama de fases entrarán o se alejarán del punto crítico, según sea el signo de la parte real α (si es negativo o positivo, respectivamente). El punto se conoce como **foco o punto espiral**.

Autovalores imaginarios puros $\alpha = 0$

En este caso las soluciones serán periódicas alrededor del punto crítico, que se conoce como **centro o vórtice**. Es importante tener en cuenta que un centro en el sistema lineal (3.3) puede no serlo en el sistema completo y pasar a ser un foco. Para saberlo se deben estudiar las simetrías que presente el sistema o utilizar las llamadas **funciones de Liapunov**. Las soluciones tendrán la forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cos \omega t + C_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \sin \omega t \quad (3.11)$$

3.1.3. Autovalores reales e iguales

En este caso $\Delta = 0 \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$, lo que es equivalente a decir que:

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} = 0 \quad (3.12)$$

Igual que en los apartados anteriores, distinguiremos dos casos distintos:

1º Caso: $a_{12} = a_{21} = 0$

En este caso $a_{11} = a_{22} = a$ y las ecuaciones estarán desacopladas (no se mezclan las variables dependientes en las ecuaciones)

$$\dot{x} = ax, \quad \dot{y} = ay \quad (3.13)$$

Que tienen las soluciones siguientes:

$$x = C_1 e^{at}, \quad y = C_2 e^{at} \quad (3.14)$$

En el diagrama de fases aparecen como líneas rectas salientes ($a > 0$) o entrantes ($a < 0$). A este punto se le conoce como **punto estrella o nodo propio**.

2º Caso: $a_{11} \neq 0$ y $a_{22} \neq 0$ (resto de los casos)

En estos casos, no hay autovalores suficientes y por tanto la segunda solución del sistema lineal será de la forma $te^{\lambda t}$, que habrá que testar en el sistema concreto. Las soluciones serán entonces:

$$x = [C_1x_1 + C_2(x_1t + x_2)]e^{\lambda t} \quad (3.15)$$

$$y = [C_1y_1 + C_2(y_1t + y_2)]e^{\lambda t} \quad (3.16)$$

Si $\lambda < 0$, todas las soluciones tenderán hacia el origen que será asintóticamente estable. Es conocido como **nodo degenerado**.

3.2. Aplicaciones y ejemplos de Sistemas Dinámicos

En esta sección vamos a ver las aplicaciones que tienen los sistemas dinámicos y algunos ejemplos aplicados a problemas mecánicos, estudiando su comportamiento y dando una interpretación física de lo que ocurre.

Normalmente no podemos conocer las soluciones exactas de sistemas de ecuaciones diferenciales, es decir, no podemos conocer cómo va a ser su evolución y su comportamiento a lo largo del tiempo (variable independiente). En su lugar y con la ayuda de los sistemas dinámicos, es posible conocer los puntos críticos que tendrá el sistema. De esta manera, analizando su estabilidad, nos podremos hacer una idea del punto al que tenderá el sistema y de cuales se alejará, todo ello en el diagrama de fases, según sean estables o inestables, respectivamente. Todos los diagramas de fases se han realizado usando el programa *Mathematica*.

Los sistemas dinámicos no solo tienen aplicación en el ámbito de la Física, sino que también pueden aplicarse en otros ámbitos como en la Biología, *Ecuaciones de Lotka-Volterra*, que modelizan la evolución de las poblaciones de un número de presas y un número de depredadores a lo largo del tiempo, donde el punto estable en el diagrama de fases, es aquel en el que coinciden ambas poblaciones.

Veamos un ejemplo mecánico, por ejemplo el oscilador armónico ideal (sin pérdidas), descrito por la siguiente ecuación:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (3.17)$$

Siendo x la amplitud de oscilación, m , es la masa del oscilador y k , la constante elástica del mismo. Tomando $m = 1 \text{ kg}$ y $k = 1 \text{ N/m}$ simplificamos la ecuación del movimiento a:

$$\ddot{x} + x = 0 \quad (3.18)$$

Introduciendo una nueva variable $y = \dot{x}$, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\dot{x} = y \quad (3.19)$$

$$\dot{y} = -x \quad (3.20)$$

El punto crítico es $(0, 0)$, ya que, $P(0, 0) = Q(0, 0) = 0$. La matriz A , para linealizar el sistema, será la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Y los autovalores serán:

$$\lambda_{1,2} = \pm i \quad (3.22)$$

Lo cual ya nos indica que ese punto es un **centro** y la solución alrededor de dicho punto es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \cos t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \sin t \quad (3.23)$$

Con ello ya podemos construir el diagrama de fases (variable x en eje de abscisas y variable y en eje de ordenadas):

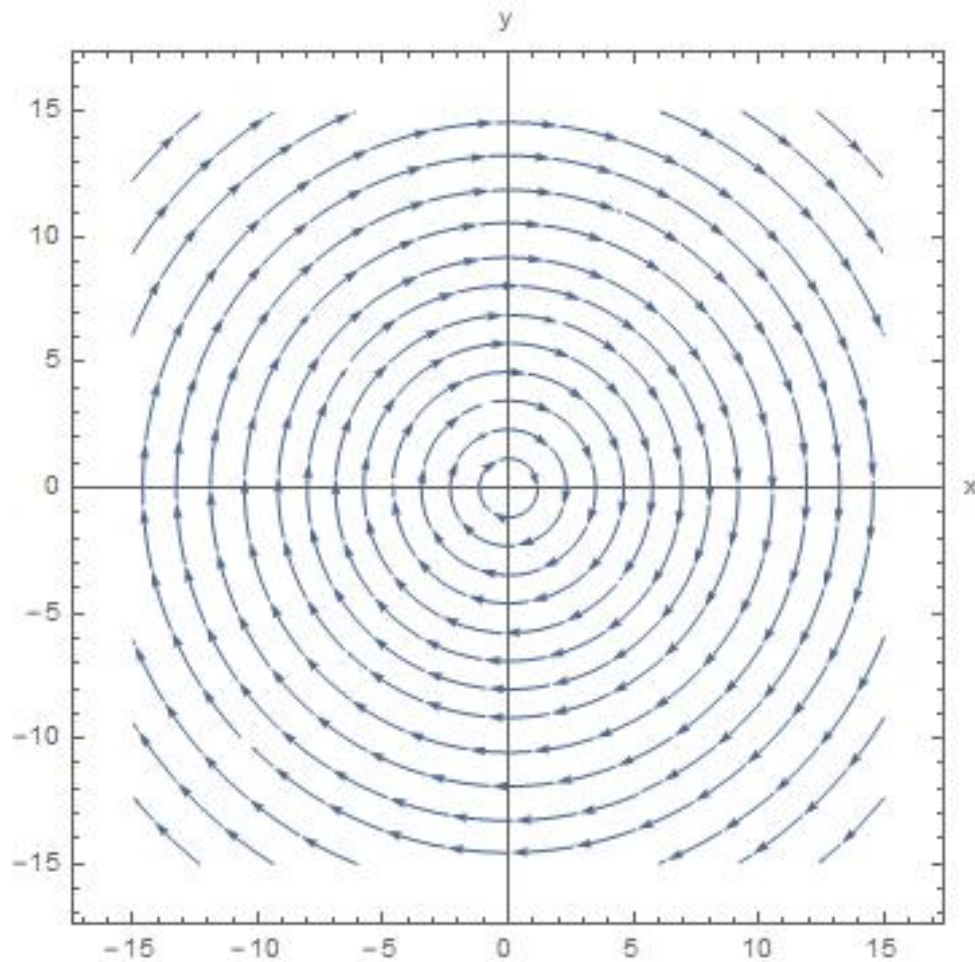


Figura 3.1: Diagrama de fases del oscilador armónico ideal

Otro ejemplo que vamos a ver es el oscilador armónico pero ahora será amortiguado y la ecuación de movimiento será la siguiente:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad (3.24)$$

Donde x es la amplitud de oscilación nuevamente, m es la masa del oscilador, b es el coeficiente de amortiguación y k la constante elástica. Reescalamos haciendo que $m = b = k = 1$ y obtenemos:

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = 0 \quad (3.25)$$

Introducimos la variable $y = \dot{x}$ de nuevo y tenemos:

$$\dot{x} = y \quad (3.26)$$

$$\dot{y} = -y - x \quad (3.27)$$

Tiene un punto crítico en $(0, 0)$, porque $P(0, 0) = Q(0, 0) = 0$, con lo que la matriz A será:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Los autovalores son:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3.29)$$

Son complejos con $\alpha \neq 0$, con lo cual el punto crítico ahora será un **foco** (asintóticamente estable) y la solución alrededor de dicho punto es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{-\frac{1}{2}t} \left(C_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) \quad (3.30)$$

El diagrama de fases tendrá esta forma (variable x en eje de abscisas y variable y en eje de ordenadas):

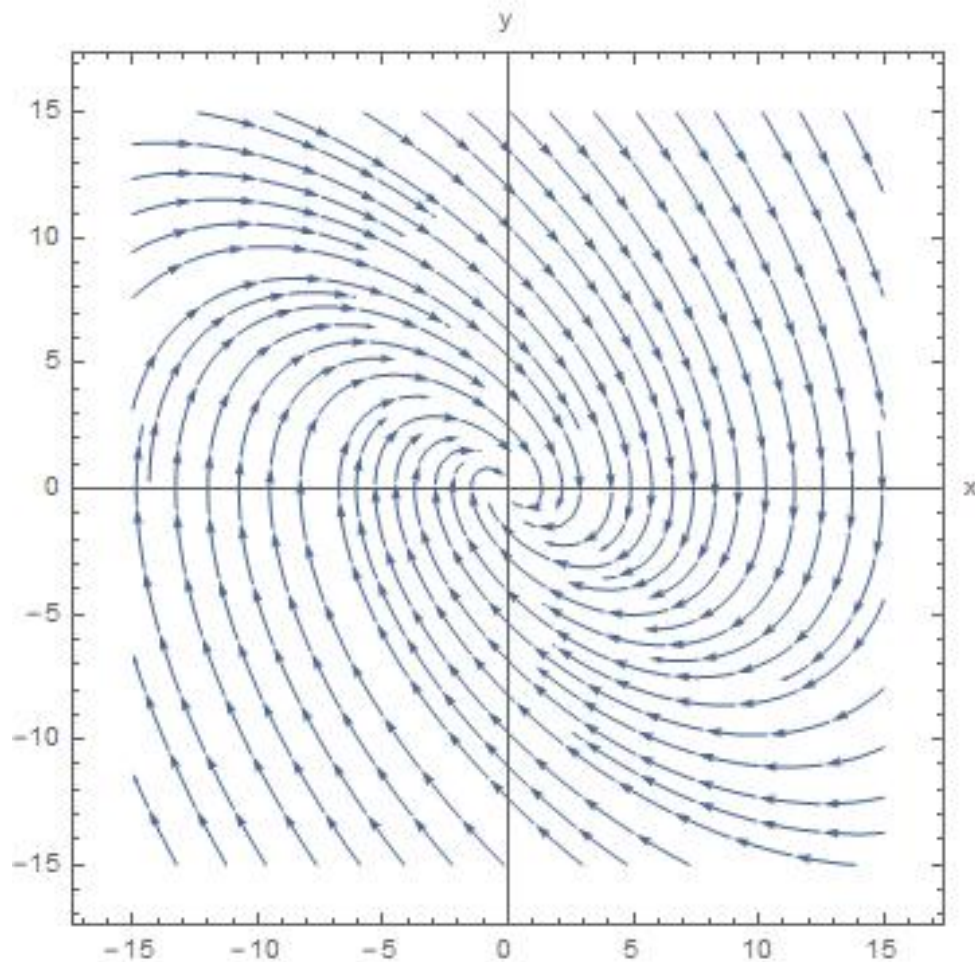


Figura 3.2: Diagrama de fases del oscilador armónico amortiguado

Capítulo 4

Expansión Acelerada del Universo

En este capítulo nos centraremos en las pruebas que evidencian que efectivamente, el Universo está sufriendo una expansión acelerada. Desde las **Supernovas Ia** hasta la **Estructura a grandes escalas (LSS)**, pasando por las **Oscilaciones Acústicas de Bariones (BAO)** y el análisis de las anisotropías de temperatura en el **Fondo Cósmico de Microondas (CMB)** (E. J. Copeland, 2006 [3]).

En el año 1964, los científicos *Penzias y Wilson*, hallaron la existencia de unas ondas electromagnéticas muy extrañas, que aparecían como un ruido inevitable en sus monitores. No estaban recibiendo otra cosa más que la expresión del hoy famoso e importante *Fondo Cósmico de Microondas (CMB)*, que fue interpretado como una prueba fehaciente de la **Teoría del Big Bang**. Observaciones y proyectos posteriores (*COBE 1992, WMAP 2003 y Planck 2013*) lograron determinar las anisotropías de la temperatura en el fondo cósmico, cada vez con mayor resolución. Estas anisotropías son clave para entender el papel que juega la energía oscura en la expansión, es decir, nos sirven para conocer la proporción o parámetro de densidad (Ω_Λ), según lo dicho en la Sección 2.2, de la misma en relación con las demás componentes.

En 1998, *Perlmutter, Schmidt y Riess* estudiaron unos fenómenos que se producen en galaxias lejanas y que son denominados como *Supernovas Tipo Ia*, que funcionan muy bien como candelas estándar (Sección 2.4). Estos fenómenos se producen en cada galaxia una vez cada 1000 años, sin embargo y afortunadamente, el Universo es lo suficientemente grande para que se den con relativa frecuencia (Figura 4.1). Gracias a este estudio se determinó que el universo se encuentra en expansión acelerada y que dicha expansión había comenzado 6000 millones de años antes del presente. Todo ello derivó en el conocido **Modelo Λ CDM** ($w \approx -1$), que supone la solución más sencilla capaz de dar explicación a esta expansión acelerada y a la estructura a gran escala que posee el Universo. El parámetro de *Hubble*, que el mismo *Hubble* consideró constante, evoluciona con el tiempo al igual que el parámetro de escala, con un valor actual de :

$$H_0 \simeq 70 \text{ km/s/Mpc} \quad (4.1)$$

Las *Oscilaciones Acústicas de Bariones (BAO)* son las vibraciones que se producían en el ardiente plasma primigenio, que comprendía fotones, bariones, electrones y materia oscura (E. J. Copeland, 2006 [3]). Este fenómeno se prolongó durante cientos de miles de años hasta la *época de la recombinación*, unos 400.000 años después del *Big Bang*. Fue en ese momento, en el que se formaron los átomos y la radiación pudo escapar del plasma, en cuanto que el Universo se expandió y se enfrió lo suficiente para permitirlo. De esta manera, estas vibraciones en el plasma quedaron 'congeladas' en ciertas regiones en las que la densidad de materia bariónica era mayor que en las zonas circundantes, haciendo posible la formación de las primeras galaxias por efecto de la fuerza gravitatoria.

Esto se corrobora y se complementa con la observación de *Estructuras a grandes escalas* y con todo lo dicho anteriormente, determinando en qué zonas y a qué *redshifts* se encuentran estos cúmulos primigenios de galaxias. Con lo que es posible saber las componentes energéticas y su comportamiento, en función del grado de coincidencia con los resultados experimentales y las observaciones (Figura 4.2).

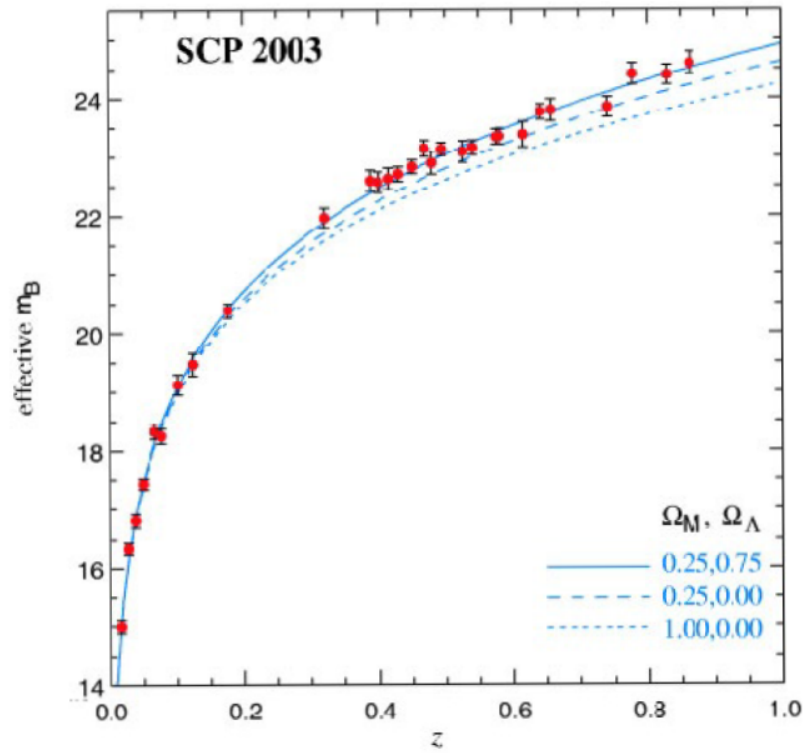


Figura 4.1: Magnitud aparente de SN Ia según su redshift (Supernova Cosmology Project)

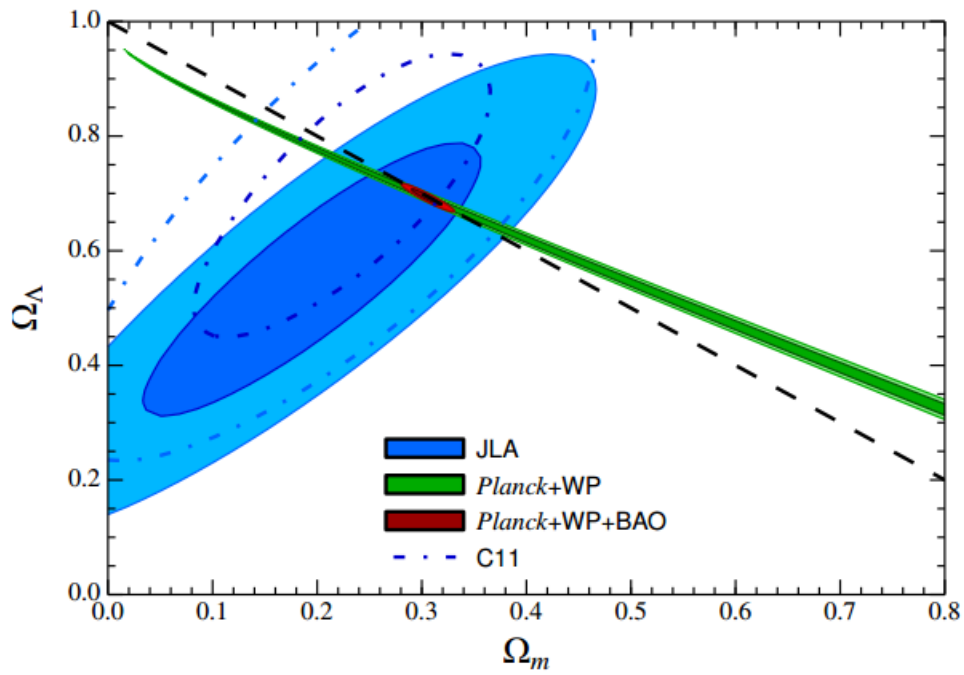


Figura 4.2: Parámetros de densidad de materia Ω_m y de energía oscura Ω_Λ

Capítulo 5

Análisis de Modelos de Energía Oscura con Sistemas Dinámicos

A continuación, estudiaremos diferentes modelos que tratan de dar explicación al comportamiento que tiene la *energía oscura* y sus consecuencias en el destino del Universo. Distinguiremos entre campos escalares (campos escalares canónicos con un potencial de autointeracción), modelos de interacción, campos no escalares y modelos que están más allá de la Relatividad General.

5.1. Campos escalares

En esta sección analizaremos los modelos de quintaesencia, campo de taquiones y energía oscura fantasma. Partiendo de la acción que rige nuestro sistema a considerar, para después definir las variables y parámetros más apropiados para entender el estudio. Finalmente, con la ayuda de los sistemas dinámicos, obtendremos el diagrama de fases y los puntos críticos del sistema.

5.1.1. Quintaesencia

Comencemos considerando el siguiente campo escalar (ϕ), que se corresponderá con la energía oscura, acoplado débilmente a la gravedad. La acción asociada a nuestro sistema físico es (S. Bahamonde, 2018 [1]):

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2\kappa^2} + L_m + L_\phi \right) \quad (5.1)$$

Donde R es el escalar de *Ricci*, g es la aceleración gravitatoria, κ es $\sqrt{8\pi G}$, L_m es el lagrangiano asociado a la materia y L_ϕ es el *Lagrangiano canónico de un campo escalar* ϕ , que se define de la siguiente manera:

$$L_\phi = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \quad (5.2)$$

Siendo $V(\phi)$ un potencial de autointeracción (energía potencial) dependiente de ϕ y positivo, para que sea físicamente aceptable. La variación respecto a $g_{\mu\nu}$ (tensor métrico) da como resultado las siguientes ecuaciones gravitacionales de campo (de las que se obtienen las *Ecuaciones de Friedmann* como vimos en la Sección 2.2):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa^2 (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(\phi)}) \quad (5.3)$$

Donde $T_{\mu\nu}$ se refiere al tensor energía-momento de la materia y $T_{\mu\nu}^{(\phi)}$ al tensor energía-momento del campo escalar ϕ , y se define así:

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial\phi^2 - g_{\mu\nu} V(\phi) \quad (5.4)$$

Introducimos ahora los parámetros w y w_ϕ que hacen referencia a las ecuaciones de estado que presenta la materia y el campo escalar, respectivamente:

$$\begin{aligned} p &= w\rho \\ p_\phi &= w_\phi \rho_\phi \end{aligned} \quad (5.5)$$

Las *ecuaciones de Friedmann* que se deducen de las ecuaciones de campo (5.3), son las siguientes:

$$\begin{aligned} 3H^2 &= \kappa^2 \left(\rho + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \right) \\ 2\dot{H} + 3H^2 &= -\kappa^2 \left(w\rho + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V \right) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Y la ecuación de del campo ϕ es entonces (equivalente a la ecuación de continuidad):

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi = 0 \quad (5.7)$$

Donde V_ϕ es la derivada de V respecto de ϕ , $\ddot{\phi}$ es la derivada de $\dot{\phi}$ respecto del tiempo cosmológico t dos veces y $\dot{\phi}$ es la derivada de ϕ respecto del tiempo cosmológico t . Ahora damos la definición de las variables que vamos a utilizar en nuestro estudio:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\kappa \dot{\phi}}{\sqrt{6}H} \\ y &= \frac{\kappa \sqrt{V}}{\sqrt{3}H} \end{aligned} \quad (5.8)$$

V es el potencial de autointeracción que suponemos definido positivo (5.2) y H es el parámetro de *Hubble*. Conociendo las nuevas variables x e y , es posible relacionarlas con un parámetro que conecte la densidad y la presión totales en el sistema completo (w_{eff}):

$$w_{eff} \equiv \frac{p_{total}}{\rho_{total}} = x^2 - y^2 + w(1 - x^2 - y^2) \quad (5.9)$$

Utilizando la definición de x e y , obtenemos las siguientes ecuaciones del sistema dinámico:

$$x' = -\frac{3}{2} \left[2x + (w-1)x^3 + x(w+1)(y^2-1) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \lambda y^2 \right] \quad (5.10)$$

$$y' = -\frac{3}{2} y \left[(w-1)x^2 + (w+1)(y^2-1) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \lambda x \right] \quad (5.11)$$

Con λ un parámetro nuevo ($\lambda = \frac{-V_\phi}{\kappa V}$) y x' e y' denotando las derivadas de x e y respecto de un parámetro η (número e-foldings). Dicho parámetro se define como $\eta = \log a$ donde a es el *parámetro de escala*. Si asumimos ahora que el potencial de autointeracción $V(\phi)$ es de tipo exponencial:

P	x	y	Existencia	Estabilidad
O	0	0	$\forall \lambda, w$	Punto de silla
A ₊	+1	0	$\forall \lambda, w$	Inestable si $\lambda \geq -\sqrt{6}$. Punto de silla si $\lambda < -\sqrt{6}$
A ₋	-1	0	$\forall \lambda, w$	Inestable si $\lambda \leq \sqrt{6}$. Punto de silla si $\lambda > \sqrt{6}$
B	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{1+w}{\lambda}$	$\sqrt{\frac{3(1-w^2)}{2\lambda^2}}$	$\lambda^2 \geq 3(1+w)$	Estable si $3(w+1) < \lambda^2 < \frac{24(w+1)^2}{9w+7}$. Foco si $\lambda^2 \geq \frac{24(w+1)^2}{9w+7}$
C	$\frac{\lambda}{\sqrt{6}}$	$\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{6}}$	$\lambda^2 < 6$	Estable si $\lambda^2 < 3(1+w)$. Punto de silla si $3(1+w) \leq \lambda^2 < 6$

Tabla 5.1: Puntos críticos con las condiciones para su existencia y su estabilidad.

$$V(\phi) = V_0 e^{-\lambda\kappa\phi} \quad (5.12)$$

Con V_0 una constante positiva y λ es el parámetro que introducimos en las ecuaciones (5.10) y (5.11).

A cada punto crítico (Tabla 5.1), se le asocia un valor para el parámetro w_{eff} , lo cual es de suma importancia, ya que este parámetro nos indica si la expansión será acelerada o no. Será acelerada si $w_{eff} < -1/3$ y si $w_{eff} \geq -1/3$, la expansión no será acelerada. Con todo lo anterior el diagrama de fases se muestra en la Figura 5.1, para los valores $\lambda = 1$ y $w = 0$ (Todos los diagramas de fase han sido realizados con el programa *Mathematica*).

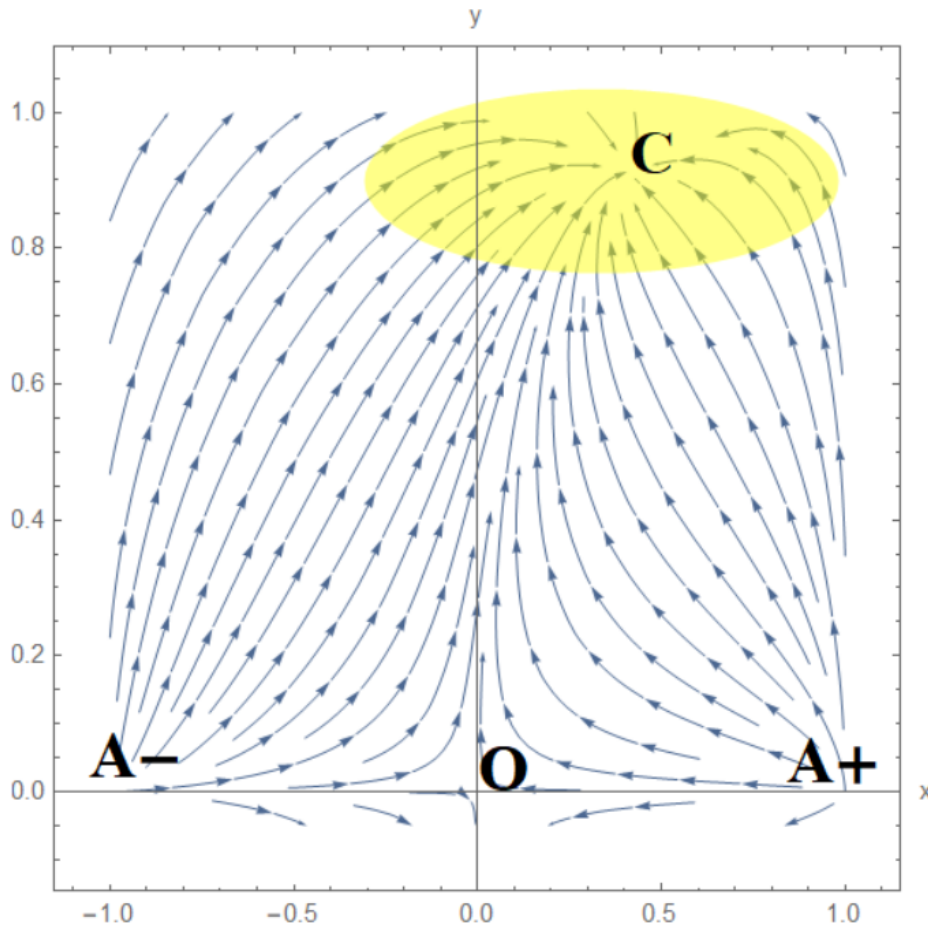


Figura 5.1: Diagrama de fases del modelo Quintaesencia

En el eje de abscisas se representa la variable x y en el eje de ordenadas, la variable y , además están señalados los puntos críticos que se obtienen de las ecuaciones (5.10) y (5.11), excepto el punto B, ya

que hemos tomado $\lambda = 1$ y $w = 0$. El área que está sombreado en amarillo, denota la zona del espacio de fases que se corresponde con la expansión acelerada ($w_{eff} < -1/3$).

5.1.2. Campo de Taquiones

Los *taquiones* son partículas predichas por algunas de las *teorías de cuerdas*, capaces de moverse a velocidades mayores que la de la luz. Se pueden aplicar campos escalares taquiónicos para tratar y modelizar el comportamiento de la energía oscura, pero a diferencia de la quintaesencia, no son campos escalares canónicos (S. Bahamonde, 2018 [1]). Se definen mediante el *Lagrangiano Dirac-Born-Infeld (DBI)*:

$$L_{Taquiones} = V(\phi)\sqrt{1 + \partial\phi^2} \quad (5.13)$$

Donde $V(\phi)$ es una función general llamada *potencial de campo escalar*, que no se corresponde con la energía potencial y $\partial\phi^2 = g^{\mu\nu}\partial\phi_\mu\partial\phi_\nu$. Para que el Lagrangiano sea aceptable debemos asumir que $1 + \partial\phi^2 > 0$ y las unidades de ϕ se toman de manera que $\partial\phi^2$ sea adimensional.

Las *ecuaciones de Friedmann* se derivan de lo anterior:

$$3H^2 = \kappa^2 \left(\rho + \frac{V}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} \right) \quad (5.14)$$

$$2\dot{H} = \kappa^2 \left(-(w+1)\rho - \frac{\dot{\phi}^2 V}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} \right)$$

La ecuación del campo ϕ es:

$$\frac{\ddot{\phi}}{1 - \dot{\phi}^2} + 3H\dot{\phi} + \frac{V_\phi}{V} = 0 \quad (5.15)$$

Definimos las nuevas variables x e y apropiadamente:

$$x = \dot{\phi} \quad (5.16)$$

$$y = \frac{\kappa\sqrt{V}}{\sqrt{3}H}$$

Siendo V es el potencial de campo escalar, H es el parámetro de *Hubble* y $\dot{\phi}$ es la derivada del campo escalar ϕ , respecto del tiempo cosmológico t . Además, vemos que la definición que damos de la variable y tiene la misma forma que dábamos en el apartado anterior.

Usando (5.14), obtenemos las siguientes ecuaciones para nuestro sistema:

$$x' = (x^2 - 1)(3x - \sqrt{3}\lambda y) \quad (5.17)$$

$$y' = -\frac{1}{2}y \left[\frac{3y^2(w - x^2 + 1)}{\sqrt{1 - x^2}} - 3(w + 1) + \sqrt{3}\lambda xy \right] \quad (5.18)$$

$$\lambda' = \sqrt{3} \left(\Gamma - \frac{3}{2} \right) xy \lambda^2 \quad (5.19)$$

Siendo λ un parámetro nuevo (diferente al que aparece en la sección anterior $\lambda = -V_\phi/\kappa V^{3/2}$), w es el mismo parámetro, referido a la ecuación de estado de la materia ($p = w\rho$) y $\Gamma = VV_{\phi\phi}/V_\phi^2$. Para un valor

de λ constante, $V(\phi)$ será igual a $\frac{M^2}{\phi^2}$, donde M es una constante con unidades de masa y se relaciona con λ así ($V_{\phi\phi}$ se corresponde con la derivada segunda de V respecto de ϕ):

$$M = \frac{2}{\kappa\lambda} \quad (5.20)$$

Al igual que en el apartado anterior, hallamos los puntos críticos y sus características, colocándolos en una tabla (Tabla 5.2). El valor de y_B es el siguiente:

P	x	y	Existencia	Estabilidad
O	0	0	$\forall \lambda, w$	Punto de silla
A_+	+1	0	$\forall \lambda, w$	Inestable
A_-	-1	0	$\forall \lambda, w$	Inestable
B	$y_B\lambda/\sqrt{3}$	y_B	$\forall \lambda, w$	Estable

Tabla 5.2: Puntos críticos con las condiciones para su existencia y su estabilidad.

$$y_B = \left(\frac{\sqrt{\lambda^4 + 36} - \lambda^2}{6} \right)^{1/2} \quad (5.21)$$

Conocidos los puntos críticos, podemos construir el diagrama de fases (Figura 5.2), obtenido a partir de las ecuaciones (5.17) y (5.18), con $\lambda = 1$ y $w = 0$:

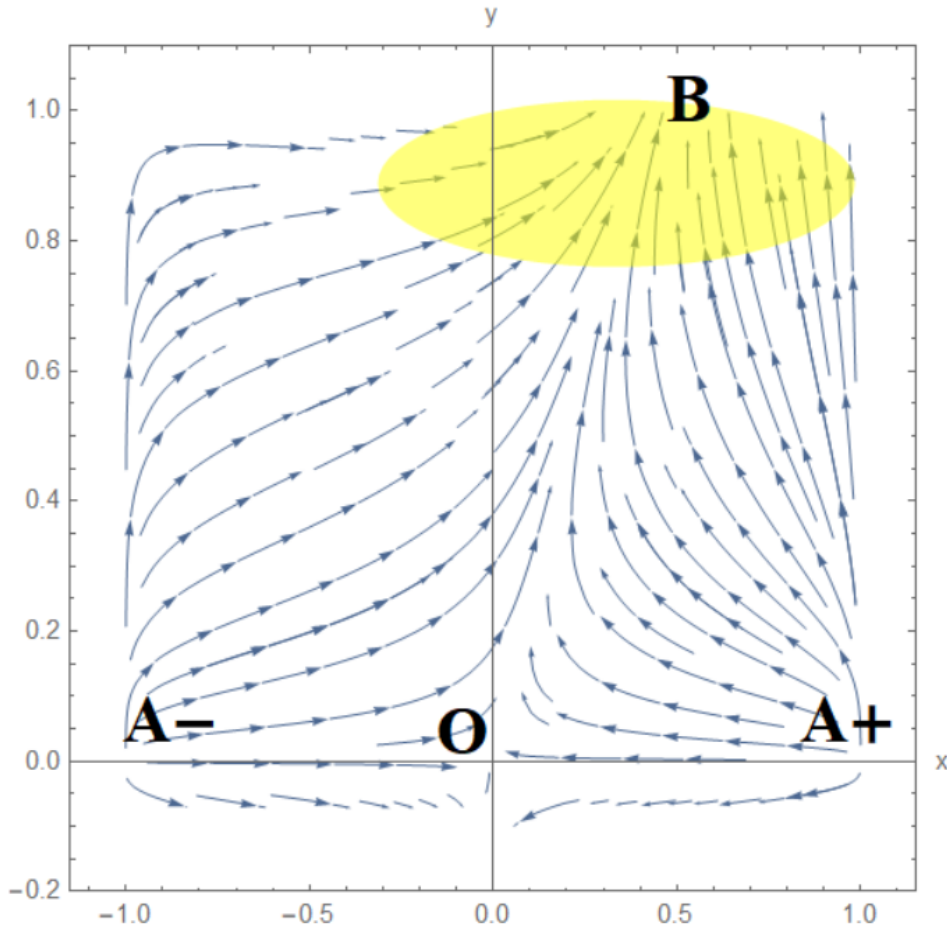


Figura 5.2: Diagrama de fases del modelo Campo de Taquiones

En el eje de abscisas se representa la variable x y en el de ordenadas, la variable y . Por el diagrama sabemos que el punto B es estable y se corresponde, al igual que el punto C en el apartado anterior, con una expansión acelerada, señalada con el sombreado amarillo. Dicho punto existe siempre sin importar los valores que tomen los parámetros λ y w .

5.1.3. Energía Oscura Fantasma

Al igual que el modelo anterior, no es un campo escalar canónico y es matemáticamente el más sencillo de los que conforman este grupo. El Lagrangiano de este modelo es el siguiente:

$$L_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (5.22)$$

Es casi igual al Lagrangiano canónico de la Quintaesencia (5.2), solo cambia el signo del término cinético y $V(\phi)$ vuelve a ser un potencial de autointeracción. Se denomina *campo fantasma*, porque w_ϕ toma valores menores que -1 (5.5) y a esta zona se la conoce como *régimen fantasma* (S. Bahamonde, 2018 [1]).

Las ecuaciones de Friedmann son las siguientes:

$$3H^2 = \kappa^2 \left(\rho - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V \right) \quad (5.23)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = \kappa^2 \left(-w\rho + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V \right)$$

Y la ecuación del campo ϕ resulta ser:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - V_\phi = 0 \quad (5.24)$$

Definimos nuevamente las variables x e y que resultan más apropiadas para nuestro estudio:

$$x = \frac{\kappa\dot{\phi}}{\sqrt{6}H} \quad (5.25)$$

$$y = \frac{\kappa\sqrt{V}}{\sqrt{3}H}$$

Siendo V es el potencial de campo escalar, H es el parámetro de *Hubble* y $\dot{\phi}$ es la derivada del campo escalar ϕ , respecto del tiempo cosmológico t . Igual que en la sección anterior, vemos que la definición que damos de la variable y tiene la misma forma que dábamos en el apartado anterior.

A partir de (5.23), obtenemos las ecuaciones de nuestro sistema dinámico:

$$x' = \frac{1}{2} \left[3(w-1)x^3 - 3x(w[y^2 - 1] + y^2 + 1) - \sqrt{6}\lambda y^2 \right] \quad (5.26)$$

$$y' = -\frac{1}{2}y \left[-3(w-1)x^2 + 3(w+1)(y^2 - 1) + \sqrt{6}\lambda x \right] \quad (5.27)$$

Donde λ es el mismo parámetro que aparece en el modelo de Quintaesencia y w es el mismo parámetro (referido a la ecuación de estado de la materia, $p = w\rho$). Obtenemos los puntos críticos y sus características, según aparecen en la Tabla 5.3.

P	x	y	Existencia	Estabilidad
O	0	0	$\forall \lambda, w$	Punto de silla
C	$-\lambda/\sqrt{6}$	$\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{6}}$	$\forall \lambda, w$	Estable

Tabla 5.3: Puntos críticos con las condiciones para su existencia y su estabilidad.

Tenemos dos puntos críticos, O y C . Como viene siendo habitual, el punto O corresponde con un punto de silla y C con un punto estable. En el punto C , el parámetro $w_{eff} = -1 - \lambda^2/3$, es decir, sea cual sea el valor que tome λ , siempre se cumple que $w_{eff} < -1$, lo cual nos indica, como ya comentamos en apartados anteriores, que ese punto se corresponde con una expansión acelerada.

Construimos el diagrama de fases usando las ecuaciones (5.26) y (5.27), y fijamos los valores de los parámetros $\lambda = 1$ y $w = 0$ (Figura 5.3).

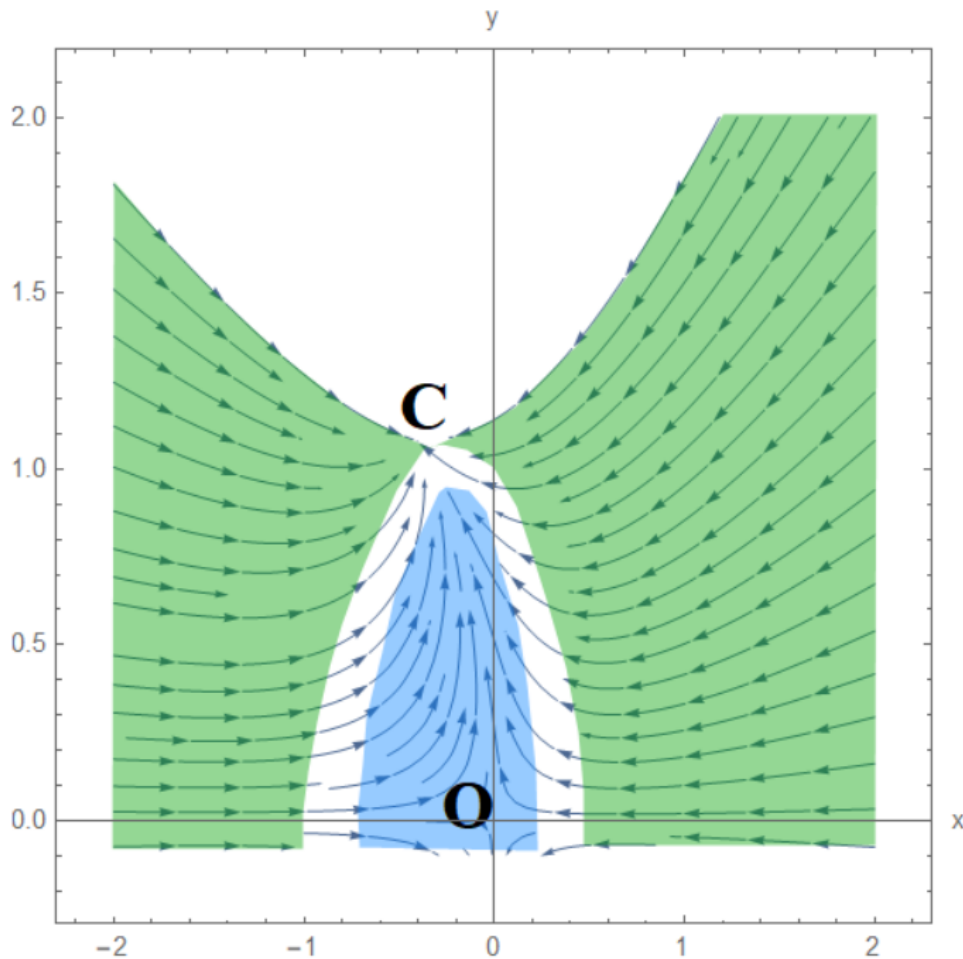


Figura 5.3: Diagrama de fases para el modelo Energía Oscura Fantasma

En el eje de abscisas se representa la variable x y en el de ordenadas, la variable y . La zona sombreada en verde, corresponde con un Universo dominado por energía oscura fantasma ($w_{eff} < -1$), con lo que se encuentra en expansión acelerada. En blanco tenemos la zona donde se da una expansión acelerada estándar ($-1 < w_{eff} < -1/3$), y en el sombreado azul tenemos una expansión no acelerada ($w_{eff} > -1/3$).

5.2. Modelos Interactivos de Energía Oscura

En esta sección estudiaremos un modelo en el que la energía oscura interactúa con la materia oscura, aunque existen varios de este tipo. Introduciremos las variables y las ecuaciones del sistema dinámico, para hallar sus puntos críticos y su diagrama de fases (S. Bahamonde, 2018 [1]).

5.2.1. Fluidos perfectos acoplados

Asumimos que cada componente que constituye el Universo (radiación, materia (bariónica más materia oscura) y energía oscura), puede ser descrito por un tensor energía-momento de un fluido perfecto, considerando siempre distancias cosmológicas. Introducimos la magnitud Q , que representa el intercambio energético que se produce entre la materia y la energía oscura. El signo de esta magnitud determina el sentido del intercambio: si $Q < 0$, la energía oscura transfiere energía hacia la materia; y si $Q > 0$, es la materia la que transmite energía a la energía oscura. La ecuación de estado que presenta esta última es $p_{de} = w_{de}\rho_{de}$, como ya es habitual.

La ecuación de Friedmann es:

$$3H^2 = \kappa^2(\rho_m + \rho_{de} + \rho_r) \quad (5.28)$$

Y las ecuaciones de continuidad para cada una de las componentes:

$$\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0 \quad (5.29)$$

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = -Q \quad (5.30)$$

$$\dot{\rho}_{de} + 3H(\rho_{de} + p_{de}) = Q \quad (5.31)$$

Definimos las siguientes variables:

$$x = \frac{\kappa^2\rho_m}{3H^2}, \quad y = \frac{\kappa^2\rho_{de}}{3H^2}, \quad \sigma = \frac{\kappa^2\rho_r}{3H^2}, \quad q = \frac{\kappa^2Q}{3H^2} \quad (5.32)$$

Aunque ρ_m y ρ_{de} puedan tomar valores negativos, asumiremos que ρ_r siempre es positiva ($\rho_r > 0$), ya que no consideramos que la radiación interactúe. Usando estas variables, obtenemos las ecuaciones del sistema dinámico, que serán (obtenidas a partir de (5.28)):

$$x' = -x[-3w_{de}y + x + y - 1] - q \quad (5.33)$$

$$y' = -y[-3w_{de}(y - 1) + x + y - 1] + q \quad (5.34)$$

Igual que en las secciones anteriores, x' e y' son las derivadas de x e y respecto de la variable $\eta = \log a$, siendo a el parámetro de escala. Los puntos críticos se muestran en la Tabla 5.4.

P	x	y	Estabilidad
O	0	0	Punto de silla si $w_{de} > \beta + 1/3$. Inestable si $w_{de} < \beta + 1/3$
A	1	0	Estable si $w_{de} > \beta$. Punto de silla si $w_{de} < \beta$
B	β/w_{de}	$1 - \beta/w_{de}$	Estable si $w_{de} < \beta$. Punto de silla si $\beta < w_{de} < \beta + 1/3$. Inestable si $w_{de} > \beta + 1/3$

Tabla 5.4: Puntos críticos con las condiciones para su estabilidad.

Donde β se refiere a una constante con las dimensiones apropiadas (coeficiente de acoplamiento) y con ella, podemos definir nuevamente Q y q :

$$Q = 3\beta H\rho_{de}, \quad q = 3\beta y \quad (5.35)$$

Finalmente, utilizamos las ecuaciones (5.33) y (5.34) para obtener el diagrama de fases, con $\beta = -0.3$ y $w_{de} = -1$ (Figura 5.4).

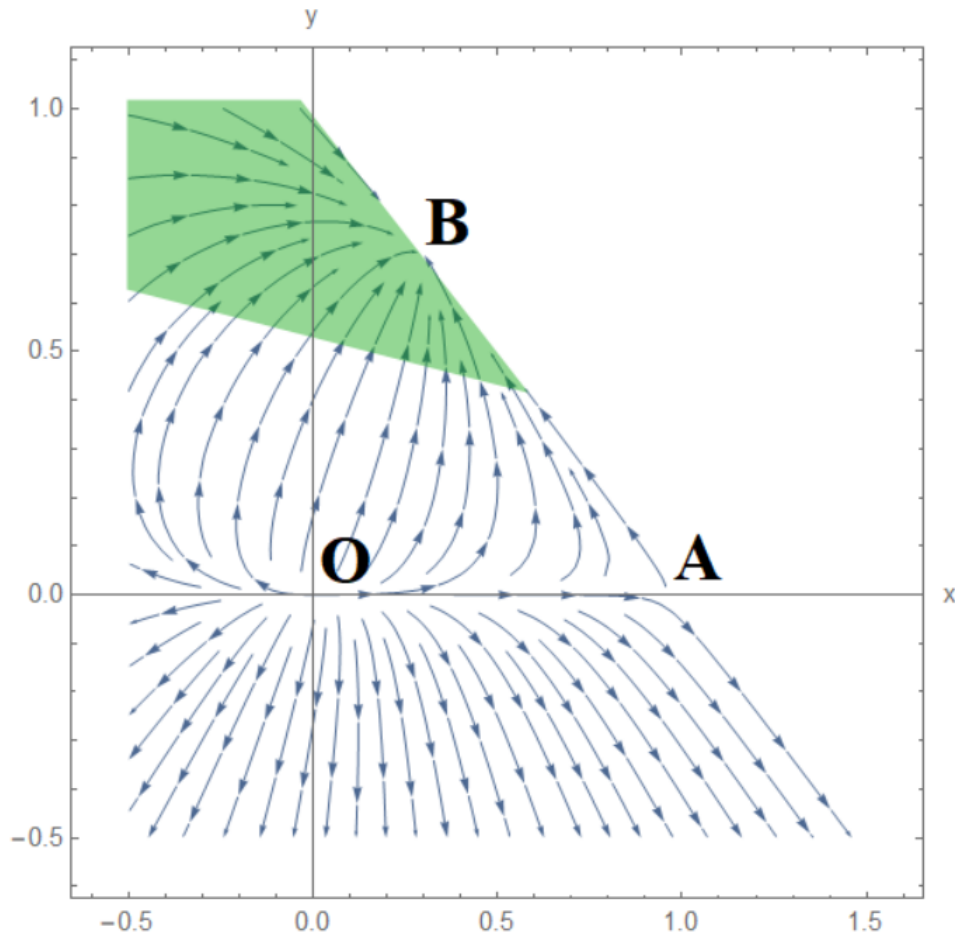


Figura 5.4: Diagrama de fases para el modelo de Fluidos perfectos acoplados

Como va siendo habitual en el eje de abscisas se representa la variable x y en el eje de ordenadas, la variable y . La zona del espacio de fases que cumple con $x + y > 1$, se corresponde con $\rho_r < 0$, que hemos asumido que ha de ser positivo, por tanto, esa zona no aparece representada. El sombreado verde aparece en la zona del espacio de fases relacionada con la expansión acelerada, donde se encuentra el punto B . El punto O es un punto inestable y el punto A es un punto de silla, teniendo en cuenta los valores de los parámetros β y w_{de} que hemos fijado.

5.3. Campos no escalares

En esta sección veremos que existen más formas de tratar los modelos de energía oscura, a parte de utilizar los campos escalares. Aunque son menos utilizados, ya que los campos escalares son más fáciles de manejar matemáticamente y sus predicciones siguen siendo acertadas y precisas (S. Bahamonde, 2018 [1]).

5.3.1. Campos vectoriales

Estos campos aparecen en el *modelo estándar de partículas* no solo para describir la interacción electromagnética, sino también, para describir las fuerzas nucleares. Por tanto, se pueden postular nuevos

campos vectoriales capaces de modificar la dinámica a gran escala del Universo y a la vez, ser invisibles para escalas del orden de las distancias que aparecen en el Sistema Solar.

Sin embargo, esto supone un grave problema, porque al introducir un campo vectorial en el espacio, estamos rompiendo la isotropía del espacio (cualquier vector define una dirección privilegiada). Esto choca de pleno con el *principio cosmológico* (2.1) y para evitarlo, algunos autores consideraron una tríada de campos vectoriales que eran invariantes bajo rotaciones tridimensionales (transformaciones SO_3).

Además, estos modelos nos permiten por ejemplo estudiar el comportamiento fantasma ($w_{eff} < -1$) sin considerar el *Big Rip*, del cual se hablará en el Capítulo 6. También se vio que los vectores *tipo espacio* admiten soluciones escalares y que los vectores *tipo tiempo* evitan fácilmente las anisotropías.

5.3.2. Campos espinoriales

Los campos espinoriales son usados principalmente para describir el estado cuántico de los fermiones, y se usan con menos frecuencia que los campos vectoriales en su aplicación a modelos de energía oscura. Existe una clase de espinores que se ha considerado como un modelo alternativo a la materia y energía oscuras. Estos espinores son conocidos como *ELKO*.

Los modelos que hacen uso de estos espinores describen interesantes fenómenos que se dieron en el Universo temprano y en el reciente. Además pueden acoplarse directamente a la gravedad, lo que los hace invisibles a la radiación, por ello se los conoce también como *espinores oscuros*. También aparece el comportamiento fantasma en tales modelos, introduciendo las partículas que conforman la materia oscura en el campo *ELKO*.

5.3.3. Gas de Chaplygin

También existen modelos que surgen al margen de la física de partículas. El modelo del *Gas de Chaplygin* es de los más conocidos. Consiste en suponer un fluido perfecto que cumpla la inusual ecuación de estado:

$$p = -\frac{A}{\rho^\alpha} \quad (5.36)$$

Donde A es una constante con las dimensiones adecuadas y α es un parámetro. Originalmente se consideró que el valor de α era 1, pero generalizaciones posteriores tuvieron en cuenta que $\alpha \neq 1$. Este modelo trata de unificar la materia oscura y la energía oscura, además en este modelo no se fija el signo de la interacción, haciendo posible el intercambio de energía en ambos sentidos (entre la materia oscura y la energía oscura).

5.4. Modelos más allá de la Relatividad General

Hasta ahora hemos considerado en todos los modelos, que la gravedad se rige por la Relatividad General, pero existen algunos modelos que se basan en teorías alternativas para describirla (S. Bahamonde, 2018 [1]). Solo mencionaremos algunas de ellas, ya que su complejidad está fuera de lo que se pretende en este estudio, aunque es bueno considerarlas como otra vía para resolver los problemas que brotan de la energía oscura.

Teorías como la *Quintaesencia modificada*, que parten de una gravedad modificada, en las que la acción del sistema es descrita por funciones complicadas del escalar de *Ricci* ($f(R)$); teorías de *supergravedad* relacionadas con la *teoría M*; *teoría de cuerdas* o la *teoría de Brans-Dicke* que es una de las más estudiadas en este grupo.

Capítulo 6

Conclusiones finales

Finalmente, en este último capítulo comentaremos las conclusiones que se derivan de los principales modelos que hemos tratado, a saber: Quintaesencia, Campo de Taquiones, Energía oscura fantasma y Fluidos perfectos acoplados.

Comenzamos por el modelo Quintaesencia. En este modelo, para los valores que tomamos $\lambda = 1$ y $w = 0$, obtenemos cuatro puntos críticos: O , A_{\pm} y C . El punto O representa una situación en la que la materia domina sobre las demás componentes ($\Omega_m = 1$), tratándose siempre de un punto de silla. Además, este punto siempre existe independientemente de los valores de λ y w . Los puntos A_{\pm} se caracterizan por indicar una dominancia de la energía cinética del campo escalar ϕ ($\Omega_{\phi} = 1$), la ecuación de estado se reduce a $p_{\phi} = \rho_{\phi}$, es decir, $w_{\phi} = 1$, lo cual corresponde con un fluido rígido, por tanto estos puntos no son físicamente aceptables. Por último, el punto C , se corresponde con la solución cosmológica en la que el Universo está completamente dominado por el campo escalar ϕ ($\Omega_{\phi} = 1, \Omega_m = 0$) y donde la expansión es acelerada.

Siguiendo con el modelo de Campo de Taquiones, los puntos críticos que obtenemos son: O , A_{\pm} y B , que obtenemos para los valores de $\lambda = 1$ y $w = 0$. El punto O , representa nuevamente un Universo dominado por materia ($\Omega_m = 1$), donde el campo ϕ se desvanece. En este punto $w = -1$, lo cual corresponde con una situación en la que el campo ϕ se congela y actúa como si fuera una constante cosmológica. Los puntos A_{\pm} se corresponden con atractores pasados, siendo siempre, puntos inestables como era de esperar. En estos puntos, el campo ϕ se comporta como si fuese materia, ya que no ejerce presión alguna y hay que tener especial cuidado con estos puntos porque son singulares en el sistema dinámico que aparece en el modelo (5.18). El punto B es estable correspondiéndose con un atractor futuro, donde el campo ϕ domina completamente ($\Omega_{\phi} = 1$), dando como resultado una expansión acelerada. Además, la existencia de este punto está garantizada sean cuales sean λ y w .

Para el modelo de Energía oscura fantasma, tenemos únicamente dos puntos críticos: O y C . El punto O se corresponde otra vez con un punto de silla, en el que el Universo se encuentra dominado por materia ($\Omega_m = 1$). En el punto C se da una dominancia del campo ϕ y es estable siempre. El valor de w_{eff} es igual a $-1 - \lambda^2/3$, o lo que es lo mismo $w_{eff} \leq -1$ sea cual sea el valor que tome λ , encontrándose en lo que ya llamamos *régimen fantasma*. Este punto se identifica con el *Big Rip*, una singularidad diferente del *Big Bang* en la que se produce un 'desgarro' de la materia que ninguna de las fuerzas atractivas es capaz de vencer (**Teoría de la Expansión Eterna**). Las observaciones actuales hacen suponer cierto el margen en el que $w_{eff} < -1$, lo que convierte a este modelo en uno de los más aceptados a la hora de predecir el destino de nuestro Universo.

Para acabar, tenemos el modelo de los Fluidos perfectos acoplados, obteniendo tres puntos críticos: O , A y B . El punto O es inestable teniendo en cuenta que $\beta = -0.3$ y $w_{de} = -1$ y se corresponde con un Universo dominado por la radiación, ya que en este caso ($w_{eff} = 1/3$) el punto A es un punto de silla y se corresponde con un Universo dominado por la materia ($w_{eff} = 0$). El punto B se identifica como un

punto estable, donde ocurre una expansión acelerada. Este modelo generaliza el *Modelo Λ CDM*, ya que la solución de constante cosmológica es un caso particular de este modelo, tomando β y w_{de} los valores de 0 y -1 , respectivamente. La situación actual ($\Omega_{de} \approx 0.7$ y $\Omega_m \approx 0.3$) se consigue con los valores de β y w_{de} que hemos fijado anteriormente y el diagrama de fases correspondiente aparece en la Figura 5.4.

Bibliografía

- [1] S. BAHAMONDE, C.G. BÖHMER, S. CARLONI, EDMUND J. COPELAND, W. FANG y N. TAMANINI, '*Dynamical systems applied to cosmology: dark energy and modified gravity*', 2018. <https://arxiv.org/abs/1712.03107>
- [2] D. HUTERER y D. L. SHAFER, '*Dark energy two decades after: Observables, probes and consistency tests*', 2018. <https://arxiv.org/abs/1709.01091>
- [3] EDMUND J. COPELAND, M. SAMI y S. TSUJIKAWA, '*Dynamics of dark energy*', 2006 <https://arxiv.org/abs/hep-th/0603057v3>
- [4] L. AMENDOLA y S. TSUJIKAWA, '*Dark energy: Theory and Observations*', Universidad de Cambridge, 2010
- [5] J. A. FRIEMAN, M. S. TURNER y D. HUTERER, '*Dark Energy and Accelerating Universe*', 2008 <https://arxiv.org/abs/0803.0982v1>
- [6] M. TRODDEN y SEAN M. CARROLL, '*TASI Lectures: Introduction to Cosmology*', 2004 <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0401547v1>
- [7] SEAN M. CARROLL y WILLIAM H. PRESS, '*The Cosmological Constant*', 1992 <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1992ARA%26A..30..499C/abstractvspace>