



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Física

Cuantización geométrica e integral covariante

***Autor:** Pablo Veganzones Parellada*

***Tutor/es:** Mariano del Olmo Martínez, Manuel Gadella Urquiza
y Fernando Gómez Cubillo*

*Dedicado a Leonard Suskind, quien me enamoró de la física
con sus libros y charlas, de las que aún disfruto.*

Contenidos

Introducción	4
1 Introducción a la cuantización	7
1.1 Cuantización canónica	8
1.2 Segunda cuantización	13
1.3 Cuantización por integrales de camino	17
2 Aspectos matemáticos	19
2.1 Geometría diferencial	19
2.2 Geometría simpléctica y mecánica clásica	24
2.3 Variedades de Kähler	27
2.4 Espacio de Segal-Fock-Bargmann	30
3 Cuantización Geométrica	32
3.1 Esquema general	33
3.2 Fibrados lineales y precuantización	34
3.3 Polarizaciones y cuantización	40
4 Cuantización Integral Covariante	47
4.1 Cuantización por estados coherentes	47
4.2 Cuantización integral covariante	50
4.2.1 Cuantización de la circunferencia	52
4.2.2 Cuantización de la esfera	53
4.2.3 Cuantización afín y cosmología	55
4.2.4 Cuantización de Weyl-Heisenberg	57
Conclusiones	60
Referencias	63

Introducción

El objetivo de este Trabajo Fin de Grado en Física es analizar diversos métodos de cuantización y aplicarlos a sistemas físicos. Entendemos por cuantización un abanico de procedimientos para tomar una teoría clásica y convertirla en una teoría cuántica. El interés de estos procedimientos es conocido y en la actualidad motivado por la búsqueda de una gravedad cuántica. No solo eso, la cuantización nos puede ayudar a comprender el proceso inverso: ¿cómo surge la mecánica clásica a partir de la cuántica? En realidad, no hay muchos motivos para suponer que la mecánica clásica deba poder cuantizarse. En palabras de John Baez: *El mundo no fue creado por Dios el primer día y cuantizado el segundo* [Baez, 2018a]. Sin embargo, la historia se ha probado distinta. Sí se pueden obtener modelos cuánticos realistas por procedimientos de cuantización. De hecho, las teorías cuánticas más exitosas, como la electrodinámica cuántica o el átomo de hidrógeno, se obtuvieron con cuantización canónica. Es por esto que la línea de investigación ha sido la de dar el paso de la mecánica clásica a la mecánica cuántica. Podríamos pensar también que partir de una teoría clásica, que a fin de cuentas es más fácil de verificar experimentalmente, podemos guiarnos a la hora de hacer un modelo factible a escalas tan pequeñas como las que intervienen en la física cuántica.

Hace un siglo, en los años 20, se comenzaban a gestar la primeras teoría cuánticas, obtenidas por la célebre cuantización canónica. En el primer capítulo tendremos la oportunidad de examinar estos métodos de cuantización originarios a los que hoy en día juntamos bajo el término *cuantización canónica*. Comenzaremos por la cuantización de Heisenberg, Jordan y Born, también conocida como mecánica matricial porque las transiciones entre estados se representaban por matrices. La evolución de estas matrices venía dada precisamente por la ecuación para la evolución de un operador en la imagen de Heisenberg. Paralelamente, Dirac establecía la correspondencia entre el corchete de Poisson y el conmutador cuántico. Esta idea es la que subyace en el método que estudiaremos en el capítulo tres: la cuantización geométrica. Por otro lado, Schrödinger dibujaba su particular visión de la mecánica cuántica: la mecánica ondulatoria. Estudiaremos los postulados de esta cuantización y los compararemos con la de Heisenberg. Proseguiremos esta primera sección estudiando los postulados de von Neumann para la medida en mecánica cuántica y terminaremos con la cuantización de Weyl. Este último método esquiva el problema del orden y a pesar de su potencial, cayó en el olvido hasta la llegada de la cuantización por deformación en los años 50.

En la sección 1.2 examinaremos otro de los métodos esenciales: la segunda cuantización. Construiremos el espacio de Fock y extenderemos los operadores del espacio de Hilbert ordinario a este nuevo espacio. Es lo que llamaremos segunda cuantización de los operadores. También en el espacio de Fock, examinaremos la cuantización de Segal y veremos cómo se puede usar para cuantizar un campo escalar. En la última sección del capítulo, construimos la integral de camino de Feynman, que como veremos se puede usar para ob-

tener operadores de evolución en mecánica cuántica a partir del Lagrangiano de la teoría clásica.

Tras este repaso de las técnicas más reconocidas de cuantización, introducimos las herramientas matemáticas que nos servirán para abordar métodos de cuantización más avanzados. Comenzaremos repasando los conceptos fundamentales de la geometría diferencial: variedades, fibrados, k -formas, integración... Y las usaremos para construir la descripción geométrica de la mecánica clásica. Los desarrollos de este capítulo se pueden encontrar en el TFG de Matemáticas complementario a este, titulado *Geometría simpléctica, sistemas Hamiltonianos y sus aplicaciones en Física*. Veremos que el espacio de fases de una teoría clásica viene descrito por una variedad simpléctica y su energía por una función real sobre esta variedad, el Hamiltoniano. El Hamiltoniano junto con la forma simpléctica nos proporcionan las ecuaciones de evolución, una generalización de las conocidas ecuaciones de Hamilton. A partir de la forma simpléctica construiremos los corchetes de Poisson, con los que se puede dar la ecuación de evolución de un observable clásico. Esta ecuación es análoga a la ecuación para la evolución de un operador en la imagen de Heisenberg, lo que indica una fuerte conexión entre la mecánica clásica y la cuántica. Por último, usando la integración en variedades analizaremos el teorema de Liouville.

Proseguimos el capítulo dando unas pinceladas sobre variedades de Kähler, unas variedades complejas con una estructura simpléctica y Riemanniana. Estas variedades tan particulares nos serán útiles para trabajar en cuantización geométrica. Daremos algunos ejemplos, como \mathbb{C}^n o el disco unidad con elecciones apropiadas de potenciales Kählerianos, que nos dan la forma simpléctica y estructura Riemanniana. En particular, las usaremos en el siguiente capítulo para obtener la representación de Bargmann del espacio de Fock. Ya que en los libros introductorios de mecánica cuántica no se suele introducir la representación de Bargmann de la mecánica cuántica, en la última sección de este segundo capítulo tendremos la oportunidad de examinarla para su posterior uso.

Damos paso al capítulo tres, donde estudiaremos la cuantización geométrica. Este método parte de un espacio de fases clásico, descrito como una variedad simpléctica con un Hamiltoniano, y construye a partir de él un espacio de Hilbert. Dividiremos el proceso en dos pasos: la prequantización y la cuantización. En la prequantización definiremos un fibrado complejo sobre el espacio de fases, que nos permitirá trabajar con funciones complejas y productos escalares en la variedad. Cuantizaremos estas funciones recuperando la relación entre el corchete de Poisson y el conmutador. Aunque este proceso proporciona un espacio de Hilbert, resulta ser demasiado grande. La cuantización del espacio de fases de una partícula en \mathbb{R}^3 resulta ser \mathbb{R}^6 . Sobran la mitad de los grados de libertad. Dejamos de lado la etapa de prequantización y pasamos a la cuantización. Para ello se introducen las polarizaciones, una elección de direcciones en la variedad de forma que los operadores cuantizados sean constantes en estas direcciones. De este modo, reducimos los grados de libertad a la mitad. Analizaremos la cuantización geométrica de varios sistemas, por ejemplo, el espacio euclídeo, la esfera o una variedad de Kähler. Sin embargo, la cuantización geométrica no está libre de problemas. Lejos de ser un método práctico, la cuantización de los sistemas más simples requiere introducir varias capas de herramientas geométricas en

la variedad, algunas de las cuales quedan fuera del objetivo de este trabajo. Veremos que el problema de la cuantización no es para nada sencillo, entendiendo por qué es uno de los grandes retos abiertos de la física.

Ante la dificultad del problema de la cuantización, debemos buscar enfoques alternativos que nos permitan solventar las dificultades de otros métodos. Un ejemplo muy importante es la cuantización integral covariante, fundamentada en el análisis funcional y los grupos de Lie en vez de en la geometría diferencial. La idea que subyace está tomada de la cuantización por estados coherentes, en concreto de la resolución de la identidad. Introduciremos esta cuantización y la generalizaremos a la cuantización integral, que construye la resolución de la identidad con familia de operadores. Nos centraremos en concreto de la cuantización integral covariante, que a partir de una representación de un grupo de Lie sobre un espacio de Hilbert define esta familia de operadores. Como veremos, este procedimiento resulta más práctico, a la vez que perdemos las conexiones entre mecánica clásica y cuántica que nos daba la cuantización geométrica. Usaremos la cuantización integral covariante para cuantizar la circunferencia, la esfera, el grupo de Weyl-Heisenberg y el grupo afín en el semiplano, este último con aplicaciones en cosmología cuántica.

Finalizaremos el trabajo con unas conclusiones sobre los métodos de cuantización utilizados, examinando sus ventajas e inconvenientes, y mencionando otros posibles métodos de cuantización.

Capítulo 1

Introducción a la cuantización

Desde el advenimiento de la mecánica cuántica el entendimiento del mundo físico dio un giro inesperado. Propiciado por los avances tecnológicos y las investigaciones sobre la naturaleza de la materia y de la radiación, urgió la necesidad de fundar una nueva teoría que explicara los nuevos y fascinantes descubrimientos. Poco a poco la teoría se fue desarrollando a la par que se sucedían los descubrimientos experimentales gracias al avance tecnológico, culminando en el modelo estándar de la física de partículas, que aún (de cierta forma) tres de las cuatro fuerzas fundamentales. La esquiva fuerza gravitatoria se escapa sin embargo al modelo cuántico, lo que ha propiciado un largo interés en crear nuevas herramientas para cuantizar los sistemas clásicos.

Entendemos por **cuantización** el paso de una teoría clásica a una cuántica. ¿Por qué deberíamos buscar una teoría cuántica a partir de una clásica? Históricamente las teorías cuánticas más exitosas han provenido de su contrapartida clásica. Por ejemplo, la cuantización del campo electromagnético proporciona la teoría cuántica más precisa que se conoce, la electrodinámica cuántica, y no es casualidad que la teoría clásica del electromagnetismo sea también extremadamente precisa, pues es tras la cuantización de la teoría clásica donde se obtiene la cuántica. Además, es natural pedirle a una teoría cuántica que reproduzca la teoría clásica en ciertos límites, por lo que de alguna forma deben estar ambas contrapartidas relacionadas.

Si, por ejemplo, estamos en el contexto de la mecánica clásica y tenemos un espacio de fases $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ con coordenadas canónicas (q^i, p_i) y un observable $f(q^i, p_i)$ con valores en \mathbb{R} que queremos cuantizar, podemos intentar hacerlo mediante la correspondencia

$$f \mapsto Q_f,$$

siendo Q_f un operador autoadjunto en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$. El motivo de pedirle que sea autoadjunto es para poder aplicarle el teorema espectral y razón de que sea un espacio de Hilbert es que nos permite trabajar con un producto interno, con el que podremos definir medidas en el sistema físico a partir de los operadores (observables) que queremos medir (mediremos su espectro). Algunas condiciones que nos gustaría imponer a esta correspondencia, por aquello de facilitarnos la vida, son las siguientes:

(C1) Linealidad, es decir, $af + bg \mapsto aQ_f + bQ_g$ donde $f, g : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ y $a, b \in \mathbb{R}$.

(C2) La función constante $f \equiv 1$ se corresponde con el operador identidad \mathbb{I} .

(C3) La regla de von Neumann; si $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función para la que $Q_{\phi \circ f}$ y $\phi(Q_f)$ están bien definidas, entonces $Q_{\phi \circ f} = \phi(Q_f)$.

(C4) Los operadores correspondientes a las variables canónicas de posición y momento se corresponden con los operadores usuales

$$Q_{q^i} \psi = q^i \psi, \quad Q_{p_i} \psi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q^i} \psi, \quad \text{para cada } \psi \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

(C5) Correspondencia entre los corchetes de Poisson y el conmutador,

$$[Q_f, Q_g] = i\hbar Q_{\{f,g\}}.$$

La constante \hbar normalmente toma el valor de la constante de Plank reducida para que la teoría concuerde con los experimentos [Dirac, 1958, p.87]. Las funciones que cumplan estos axiomas se llaman funciones cuantizables. Sin embargo, es fácil ver que estas condiciones son inconsistentes. Por ejemplo, si consideramos las variables canónicas q , p y los operadores cuantizados $Q \equiv Q_q$, $P \equiv Q_p$, por la linealidad y la regla de von Neumann para $\phi(t) = t^2$, tendríamos

$$pq = \frac{(p+q)^2 - p^2 - q^2}{2} \Rightarrow Q_{pq} = \frac{(P+Q)^2 - P^2 - Q^2}{2} = \frac{PQ + QP}{2},$$

$$p^2q^2 = \frac{(p^2+q^2)^2 - p^4 - q^4}{2} \Rightarrow Q_{p^2q^2} = \frac{P^2Q^2 + Q^2P^2}{2},$$

y sin embargo no es cierto que

$$\frac{P^2Q^2 + Q^2P^2}{2} = \left(\frac{PQ + QP}{2} \right)^2.$$

Tenemos de hecho un problema con estos axiomas, y es que se puede probar que cualesquiera de los tres juntos producen contradicciones, e incluso en algunos casos solo dos de ellos [Ali y Engliš, 2005, pp. 3-5]. Existen diversas soluciones (parciales) a este problema y llevan a diferentes esquemas de cuantización, las más inmediatas pasan por reducir el espacio de funciones, abandonar directamente varios axiomas o exigir que algunos se cumplan solo en el límite clásico. A lo largo de este trabajo nos adentraremos en diferentes esquemas de cuantización, comenzando por la cuantización canónica, que introducimos a continuación.

1.1. Cuantización canónica

En 1900 Max Plank dio el pistoletazo de salida a la nueva teoría de los átomos y la luz. Los primeros años de la física cuántica (a veces llamado *old quantum theory*) vinieron de la mano de iconos de la física como Albert Einstein, Arnold Sommerfeld o Niels Bohr. Fue Bohr quien introdujo a lo largo de sus trabajos el *principio de correspondencia*, que establece que la cuántica debe corresponderse con la física clásica en el límite de números cuánticos

grandes¹. Esta filosofía sirvió de guía en los oscuros comienzos de la nueva teoría, de la que puede encontrarse una fantástica colección de artículos traducida en [Waerden, 2007].

En el artículo [Born y Jordan, 1925], Max Born y Pascual Jordan formalizan y generalizan la descripción matricial de la mecánica cuántica introducida en ese mismo año por Werner Heisenberg [Heisenberg, 1925]. En su artículo, Born y Jordan nos dicen que la posición y el momento deben ser descritos por matrices

$$q = q(nm)e^{i2\pi\nu(vm)t}, \quad p = p(nm)e^{i2\pi\nu(vm)t}, \quad (1.1)$$

siendo $\nu(nm)$ la frecuencia asociada a la transición entre los estados con números cuánticos n y m , y $q(nm)$ elementos de una matriz. Si se exige que la matriz sea hermítica tenemos (en coordenadas cartesianas) que

$$q(nm)q(mn) = |q(nm)|^2$$

describe la probabilidad de transición entre los estados n y m . A partir del Lagrangiano clásico, sustituyendolo por una matriz y aplicando el principio de acción estacionaria llegan a la relación de conmutación

$$\sum_k (p(nk)q(kn) - q(nk)p(kn)) = -i\hbar, \quad (1.2)$$

que es la generalización de la condición de cuantización de Heisenberg en el caso $p = m\dot{q}$,

$$\sum_k \nu(kn)|q(nk)|^2 = \frac{h}{8\pi^2m}.$$

Siguiendo [Fedak y Prentis, 2009; Waerden, 1973], la teoría de Born y Jordan se puede resumir en cinco postulados:

- (P1) q y p vienen descritas por (1.1).
- (P2) Las frecuencias guardan la relación $\nu(jk) + \nu(kl) + \nu(lj) = 0$.
- (P3) Se cumplen las ecuaciones de Hamilton para p y q con Hamiltoniano H .
- (P4) La energía del nivel n es $H(nn)$.
- (P5) Se cumple la relación de conmutación para la diagonal (1.2).

La evolución de una matriz g en esta descripción viene dada por la conocida imagen de Heisenberg,

$$\dot{g} = \frac{i}{\hbar}[H, g],$$

siendo $[H, g]$ el conmutador de la matriz g con el Hamiltoniano. Además, la energía de una transición debe cumplir la relación

$$H(nn) - H(mm) = h\nu(nm).$$

¹ Sobre la historia del principio de correspondencia de Bohr consultar [A. Bokulich y P. Bokulich, 2020].

Posteriormente Born y Jordan establecen las reglas de cuantización para un Hamiltoniano clásico compuesto por un monomio en p y q ,

$$H = p^s q^r \xrightarrow{\text{B-J}} \hat{H} = \frac{1}{s+1} \sum_{k=0}^s p^{s-k} q^r p^k, \quad (1.3)$$

que por linealidad se puede extender a un polinomio, y aplican esta cuantización para obtener los niveles de energía de los osciladores armónico y anarmónico cuánticos. Los tres físicos continuaron su trabajo ampliando los fundamentos de la mecánica matricial en [Born, Heisenberg *et al.*, 1926], introduciendo las relaciones de conmutación para los operadores de momento angular y calculando sus autovalores, deduciendo que solo podían ser múltiplos enteros o semienteros de \hbar . Wolfgang Pauli usó la nueva teoría cuántica para derivar el espectro del átomo de hidrógeno y estudiar las perturbaciones por campos eléctricos (efecto Stark) y magnéticos [Pauli, 1926].

Volviendo a 1925, Paul Dirac publica otro de los artículos fundacionales de la mecánica cuántica [Dirac, 1925]. En él establece por primera vez la relación entre los corchetes de Poisson y el conmutador (al que Dirac llama *corchete de Poisson cuántico*)

$$[x, y] \leftrightarrow i\hbar\{x, y\},$$

lo que nos da las relaciones de conmutación para los operadores de posición y momento

$$[P_r, P_s] = 0, \quad [Q_r, Q_s] = 0, \quad [Q_r, P_s] = i\hbar \delta_{rs}. \quad (1.4)$$

Dirac culmina su artículo deduciendo por este método la regla de Bohr para cuantizar estados estacionarios. Este vínculo entre los corchetes y el conmutador constituye una de las reglas fundamentales de lo que hoy conocemos como *cuantización canónica*. En su artículo del año siguiente [Dirac, 1926], Dirac define un conjunto de observables Q_i, P_i como *canónicos* si y solo si se puede deducir (1.4) de la relación entre los observables y las variables clásicas q_i, p_i (que se suponen canónicas).

Paralelamente, Erwin Schrödinger trabajaba en un formalismo alternativo de la mecánica cuántica, la *mecánica ondulatoria*,² impulsado por la tesis de Louis de Broglie [de Broglie, 1924]. Para Schrödinger el problema de la cuantización consistía en resolver el problema de autovalores de una ecuación, la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, que dedujo en [Schrödinger, 1926; Schrödinger, 2001, pp. 1-12] a partir del método variacional e inspirado por la teoría de Hamilton-Jacobi. En la segunda parte de su artículo [Schrödinger, 2001, pp. 13-40] aplica el nuevo formalismo para resolver los estados estacionarios y energías del oscilador armónico cuántico. Siguiendo [Waerden, 1973], la teoría de Schrödinger se puede resumir en cuatro postulados:

² Una colección de sus artículos traducidos puede encontrarse en [Schrödinger, 2001].

(Q1) Los estados estacionarios se describen por funciones de onda complejas $\psi(q)$ finitas para todo q .

(Q2) Las funciones de onda ψ satisfacen la ecuación

$$\hat{H}\psi = E\psi ,$$

en la que \hat{H} es el Hamiltoniano clásico cuantizado sustituyendo el momento p por el operador $-i\hbar\frac{\partial}{\partial q}$.

(Q3) Los autovalores E son las energías de los estados estacionarios.

(Q4) El postulado de Bohr, $E_m - E_n = h\nu_{mn}$.

La mecánica cuántica encontró en los espacios de Hilbert un hogar natural gracias a los trabajos que John von Neumann desarrolló entre 1927 y 1932, y que culminaron en su célebre obra *Fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica*, publicada por primera vez en 1932, [von Neumann, 2018]. En ella, von Neumann describe los estados de Schrödinger como vectores en un espacio de Hilbert complejo y separable (admite una base numerable), y las cantidades observables como operadores lineales hermíticos actuando en este espacio de Hilbert. El producto en este espacio nos permite medir probabilidades. Por ejemplo, la probabilidad de que una partícula con función ϕ esté en el volumen V es

$$\int_V \phi(q_1, \dots, q_k) \bar{\phi}(q_1, \dots, q_k) dV .$$

Establece unos postulados para la medida en cuántica, cuya lógica es distinta de la clásica. Por ejemplo, el resultado de una medida de observables depende del orden en que se midan, es decir, los observables no tienen por qué conmutar. En caso de que conmuten nos da el siguiente postulado:

(N1) La probabilidad de que en el estado ϕ los operadores R_1, \dots, R_l (que conmutan) tomen valores en los intervalos I_1, \dots, I_l es

$$\mathcal{P}(I_1, \dots, I_l) = \|E_1(I_1) \cdots E_l(I_l)\phi\|^2 ,$$

siendo $E_j(I_j)$ el proyector asociado al observable R_j ,

$$E_j(I_j) = \sum_{\lambda_n \in I_j} P_{\psi_n} .$$

En esta última igualdad ψ_n son los estados propios de R_j y λ_n los autovalores asociados.

En la cuantización de observables, von Neumann introduce la linealidad (C1) y la regla que lleva su nombre (C3).

(N2) Si los operadores R y S (que conmutan) corresponden a las cantidades clásicas \mathcal{R} y \mathcal{S} , entonces el operador $aR + bS$ corresponde al observable clásico $a\mathcal{R} + b\mathcal{S}$.

(N3) Si la cantidad \mathcal{R} tiene asociado el operador R y F es una función, entonces la cantidad $F(\mathcal{R})$ tiene asociado el operador $F(R)$.

Aunque los espacios de Hilbert fueron introducidos por von Neumann, la notación *Bra-Ket* para los vectores y el producto interno en este espacio fue introducida por Dirac en un sintético artículo de apenas 3 páginas [Dirac, 1939].

El formalismo de la mecánica cuántica vino acompañado de un creciente interés por la teoría de representación de grupos, que físicos matemáticos como Hermann Weyl o Eugene Wigner desarrollaron para conocer más sobre aquella joven y prometedora teoría.³ Desde esta perspectiva, Weyl dio su propio enfoque a la cuantización [Weyl, 1927; Scholz, 2006, pp. 461-469] que se resume a continuación.

Usando las matrices P y Q de Born y Jordan como generadores infinitesimales (elementos de un álgebra de Lie) se pueden construir los siguientes subgrupos uniparamétricos a partir de la aplicación exponencial,

$$U(t) = e^{tP} = 1 + tP + \frac{t^2}{2!}P^2 + \dots \quad \text{y} \quad W(s) = e^{sQ} = 1 + sQ + \frac{s^2}{2!}Q^2 + \dots \quad (0 \leq t, s).$$

Weyl comenzó con dos operadores hermíticos P y Q y les asoció la matrices anti-hermíticas iP e iQ con las que contruyó los correspondientes subgrupos uniparamétricos. La relación de conmutación ignorando un factor de fase

$$e^{isP} e^{itQ} = e^{icst} e^{itQ} e^{isP}$$

proporcionaba las relaciones de conmutación entre los generadores infinitesimales

$$PQ - QP = -ic1,$$

es decir, la relación de conmutación de Heisenberg para dos observables. Weyl generalizó este procedimiento a un número arbitrario de observables, relacionándolo con las representaciones proyectivas unitarias. A continuación estableció la forma de cuantizar observables clásicos vía la transformada de Fourier. El razonamiento es el siguiente, si tenemos una función $f(q, p)$ de las variables canónicas en \mathbb{R}^2 , podemos reconstruir la función a través de su transformada de Fourier $\xi(s, t)$:

$$f(q, p) = \int e^{i(tq+sp)} \xi(s, t) ds dt.$$

Si entonces sustituimos q y p por sus análogos cuánticos, obtenemos una cuantización de la función f ,

$$F := \int e^{i(tQ+sp)} \xi(s, t) ds dt.$$

En el caso de que f sea una función real, el operador F resulta hermítico. La cuantización de Weyl esquiva el problema del orden⁴ ya que la transformada inversa de Fourier nos

³ Consultar [Scholz, 2006] para un recuento histórico de la teoría de grupos en mecánica cuántica.

⁴ Por ejemplo, si $f(q, p) = p^2q$, ¿qué operador le correspondería: P^2Q , PQP o QP^2 ? Este problema fue evitado por Born y Jordan cuantizando los polinomios por la suma (1.3).

garantiza que la función $f \mapsto F$ es unívoca. Durante décadas, la cuantización de Weyl cayó en el olvido, seguramente porque su enfoque distaba mucho de la investigación de la época en mecánica cuántica⁵, hasta que en los años 60 con el creciente interés en la cuantización por deformación se revitalizó.

1.2. Segunda cuantización

Nos adentramos en el terreno de la teoría cuántica de campos, en la que la **segunda cuantización** sustituye a la cuantización canónica en la mecánica cuántica (en la que tenemos un número fijo de partículas). No es realmente una *segunda* cuantización de un sistema ya cuantizado, solo estamos cuantizando una vez, solo que históricamente se ha escogido ese término (principalmente gracias a Dirac) para distinguir la cuantización de un campo de la cuantización de un sistema con finitos grados de libertad. Sobre la historia de la segunda cuantización y la teoría cuántica de campos son recomendables las referencias [Kuhlmann, 2020; Scharf, 1995, pp. 1-6]. Al contrario de lo que la intuición nos podría llevar a creer (quizá por el orden en el que se suele enseñar), el desarrollo de la teoría cuántica de campos fue paralelo a la mecánica cuántica (1925-1930s), de la mano de Dirac, Jordan, Pauli, Heisenberg, Robert Oppenheimer y también de la mano de Vladimir Fock, quien introdujo lo que hoy conocemos como espacio de Fock en 1931 [Fock, 2019, pp. 191-220].

El espacio de Fock describe sistemas con un número arbitrario y variable de partículas⁶ (bosones, fermiones o ambos a la vez). Se construye a partir del espacio de Hilbert \mathcal{H} que describe el estado de una partícula teniendo en cuenta la consecuente simetrización o anti-simetrización de la función de onda. En el caso de un tipo de bosón, el espacio

$$S_n^+ \mathcal{H}_n = S_n^+(\mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}) \equiv \mathcal{H}^{(n)}$$

es el espacio de funciones de onda de n bosones idénticos, es decir, de funciones de onda de \mathcal{H}_n simetrizadas. El espacio de Fock que describe un número arbitrario de un tipo de bosón es entonces la suma directa de estos espacios,

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_n^+ \mathcal{H}_n,$$

siendo $S_0^+ \mathcal{H}_0$ el espacio que solo contiene al estado vacío Ω . Un estado del espacio de Fock es por tanto una sucesión de funciones de onda simétricas $\Phi = (\phi_0, \phi_1, \dots)$.

Dado un operador A en \mathcal{H} , podemos promocionarlo a un operador \mathcal{A} en el espacio de Fock, definiéndolo en cada espacio $\mathcal{H}^{(n)}$ como

$$\mathcal{A}|_{\mathcal{H}^{(n)}} = \underbrace{A \otimes I \otimes \dots \otimes I}_{n \text{ veces}} + I \otimes A \otimes \dots \otimes I + \dots + I \otimes \dots \otimes I \otimes A$$

⁵ Born llegó a decir que era demasiado matemática y que a los físicos de la época les sería difícil entenderla [Scholz, 2006, pp. 464].

⁶ Cuando introducimos la relatividad en mecánica cuántica y trabajamos a altas energías, la ecuación $E = mc^2$ descubierta por Einstein nos dice que se pueden crear nuevas partículas si la energía es suficiente, lo que nos obliga a considerar un número cambiante de partículas en teoría cuántica de campos.

siendo I la identidad. Llamaremos a \mathcal{A} la **segunda cuantización** de A . Por ejemplo, la segunda cuantización del operador I es el operador número N . Este operador tiene autofunciones $\psi \in \mathcal{H}^{(n)}$, a las que asigna el autovalor n : $N\psi = n\psi$.

Además de la segunda cuantización, existen otros procedimientos para obtener operadores en el espacio de Fock. Analizaremos brevemente el esquema de cuantización de Segal, basado en los operadores de aniquilación y creación. Definimos para cada $f \in \mathcal{H}$ los operadores $b^-(f)$ y $b^+(f)$ siguientes

$$\begin{aligned} b^-(f) : \mathcal{H}^{(n)} &\rightarrow \mathcal{H}^{(n-1)} & b^-(f)(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n) &= \langle f, \psi_1 \rangle \psi_2 \otimes \cdots \otimes \psi_n, \\ b^+(f) : \mathcal{H}^{(n)} &\rightarrow \mathcal{H}^{(n+1)} & b^+(f)(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n) &= f \otimes \psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n, \end{aligned}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno en \mathcal{H} . Estos operadores se extienden fácilmente al espacio de Fock \mathcal{F} . A partir de estos operadores se definen los operadores de creación y aniquilación

$$\begin{aligned} a^-(f) &= \sqrt{N+1} b^-(f), \\ a^+(f) &= S b^+(f) \sqrt{N+1}. \end{aligned}$$

Puesto que N es un operador positivo, la raíz cuadrada⁷ de N está bien definida. El operador S proyecta $b^+(f) \sqrt{N+1}$ sobre el espacio de Fock de bosones. En la definición de $a^-(f)$ no es necesario aplicar S porque el espacio de bosones ya es un subespacio invariante por $b^-(f)$. En base a estos operadores definimos la *cuantización de Segal* de $f \in \mathcal{H}$ como el operador en \mathcal{F} :⁸

$$\Phi(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^-(f) + a^+(f)).$$

La cuantización de dos estados $f, g \in \mathcal{H}$ cumple la relación de conmutación

$$\Phi(f)\Phi(g) - \Phi(g)\Phi(f) = i \operatorname{Im} \langle f, g \rangle.$$

Podemos usar la cuantización de Segal para obtener campos escalares que cumplan la ecuación de Klein-Gordon. Comenzamos con el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(H_m, d\mu)$ de funciones definidas sobre el hiperboloide de masa

$$H_m = \{x \in \mathbb{R}^{1,3} \mid x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = m^2\}$$

y de cuadrado integrable respecto a la medida

$$d\mu = \frac{d^3x}{\sqrt{m^2 + |x|^2}}.$$

⁷ La raíz de un operador positivo A es el operador B tal que $A = BB$.

⁸ En realidad está definido en un denso de \mathcal{F} .

Tomamos además la representación unitaria del grupo de Poincaré restringido sobre \mathcal{H}

$$U(a, \Lambda)\phi(p) = e^{ip \cdot a} \phi(\Lambda^{-1}p) .$$

Si definimos el operador E que para cada g en el espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ ⁹ nos da la transformada de Fourier

$$Eg = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^4} e^{ip \cdot x} g(x) d^4x ,$$

se puede demostrar¹⁰ que los campos ϕ_m que llevan una función g a $\phi_m(g) = \Phi(Eg)$ son campos bosónicos que cumplen la ecuación

$$\phi_m((\square + m^2)g) = 0 \quad \text{para todo } g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) .$$

Es decir, el campo ϕ_m visto como una distribución cumple la ecuación de Klein-Gordon

$$(\square + m^2)\phi_m = 0 .$$

Existe otro método para estudiar la segunda cuantización a partir de argumentos más cercanos a la física. Lo ilustraremos con el ejemplo más común: la segunda cuantización del campo de radiación. Dirac inició este estudio en su artículo *La teoría cuántica de la emisión y absorción de radiación* [Dirac, 1927], en el que cuantiza el campo electromagnético y obtiene los coeficientes de emisión y absorción de Einstein publicados en su artículo *Sobre la teoría cuántica de la radiación* [Waerden, 2007, pp. 63-77]. Cuantizaremos este campo a continuación siguiendo [Mandl y Shaw, 1993, Cap. 1].

Comenzamos reescribiendo el Hamiltoniano de la radiación

$$H = \frac{1}{2} \int (E^2 + B^2) d^3x \tag{1.5}$$

en una forma que nos resulte más fácil de cuantizar, desacoplando las variables para ver el campo como una serie de osciladores armónicos independientes. Si consideramos radiación en una caja de lado L de volumen $V = L^3$ de forma que el potencial vector $A(x, t)$ cumpla unas condiciones de frontera periódicas podemos desarrollarlo en serie de Fourier. Las funciones

$$\frac{1}{\sqrt{V}} \varepsilon_r(k) e^{ik \cdot x} , \quad r = 1, 2 ,$$

conforman un sistema ortonormal y completo, donde k es el vector de onda ($k = \frac{2\pi}{L}(i, j, k)$ por estar en una caja) y $\varepsilon_1(k)$, $\varepsilon_2(k)$ son dos vectores perpendiculares entre sí y también al vector k . Estos vectores ε_i son los vectores de polarización, que en nuestro caso corresponden a una polarización lineal.

⁹ Funciones g tal que $g \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ y $\sup (1 + |x|^2)^k |\partial^\alpha g(x)| < \infty$ para todo k y α .

¹⁰ La demostración, así como el desarrollo anterior, se puede consultar en [Reed y Simon, 2007, pp. 207-215].

Si expandimos A en serie de Fourier obtenemos

$$A(x, t) = \sum_k \sum_r \left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_k} \right)^{1/2} \varepsilon_r(k) [\alpha_r(k, t)e^{ik \cdot x} + \alpha_r^*(k, t)e^{-ik \cdot x}],$$

donde $\omega_k = c|k|$ y el factor numérico se ha escogido por conveniencia para más adelante. Ahora, en el gauge de Coulomb tenemos que A cumple la ecuación de onda

$$\square A = 0$$

y por tanto los coeficientes de Fourier satisfacen la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t^2} \alpha_r(k, t) = -\omega_k^2 \alpha_r(k, t),$$

que no es más que la ecuación de un oscilador armónico. Su solución toma la forma

$$\alpha_r(k, t) = \alpha_r(k) e^{-i\omega_k t},$$

donde $\alpha_r(k)$ es la amplitud del oscilador en $t = 0$. Con todo esto, podemos expresar (1.5) (integrando sobre el volumen) como

$$H = \sum_k \sum_r \hbar \omega_k \alpha_r^*(k) \alpha_r(k),$$

que no depende del tiempo ya que la dependencia temporal de α_r y α_r^* se cancelan.

Una vez tenemos el Hamiltoniano en términos de los modos normales procedemos a cuantizar cada oscilador. Introducimos las relaciones de conmutación para los operadores de creación y aniquilación (de fotones) análogas a las del oscilador armónico cuántico

$$[a_r(k), a_s^\dagger(k')] = \delta_{rs} \delta_{kk'},$$

$$[a_r(k), a_s(k')] = [a_r^\dagger(k), a_s^\dagger(k')] = 0,$$

y reescribimos el Hamiltoniano clásico sustituyendo las variables normales por estos operadores:¹¹

$$H = \sum_k \sum_r \hbar \omega_k a_r^\dagger(k) a_r(k).$$

El operador número $N_r(k) = a_r^\dagger(k) a_r(k)$ tiene autovalores $n_r(k) = 0, 1, 2, \dots$ y autofunciones

$$|n_r(k)\rangle = \frac{a_r^\dagger(k)^{n_r(k)}}{\sqrt{n_r(k)!}} |0\rangle,$$

siendo $|0\rangle$ el estado vacío. Las autofunciones del Hamiltoniano son por tanto

$$|\dots, n_r(k), \dots\rangle = \prod_{k_i} \prod_{r_i} |n_{r_i}(k_i)\rangle \quad (1.6)$$

¹¹ Hemos ignorado el término de $\frac{1}{2}$ en la energía del oscilador armónico cuántico que nos daría una energía del vacío infinita al cuantizar el campo electromagnético.

con energía

$$\sum_k \sum_r \hbar \omega_k n_r(k).$$

El operador $a_r(k)$ actuando sobre el estado (1.6) reduce únicamente el número de ocupación $n_r(k)$ del modo normal (k, r) en uno, reduciendo la energía del estado en $\hbar \omega_k$. De forma similar, podemos cuantizar el momento del campo de radiación,

$$P = \sum_k \sum_r \hbar k a_r^\dagger(k) a_r(k).$$

Los fotones, por ser bosones, siguen la estadística de Einstein-Bose: cualquier número de ocupación (para un modo fijo) es posible. Si quisiéramos cuantizar un campo de fermiones tendríamos que hacerlo con las reglas de anticonmutación, de forma que para cada modo solo pudiera haber cero o un estados. Con este ejemplo dejamos de lado la segunda cuantización, pudiendo continuarse su estudio a través de cualquier libro de teoría cuántica de campos.

1.3. Cuantización por integrales de camino

La investigación sobre el papel de la mecánica Lagrangiana en mecánica cuántica que dio lugar a la formulación de Feynman vio su origen en el artículo del prolífico Dirac [Dirac, 1933]. En 1942 Richard Feynman defendía su tesis doctoral [Feynman, 1942] en la que retomaba la investigación sobre el papel de los Lagrangianos en mecánica cuántica, estudio que continuó a lo largo de su carrera culminando en la formulación por integrales de camino de la mecánica cuántica y teoría cuántica de campos, que como veremos está íntimamente relacionada con la acción clásica [Feynman et al., 2010].

Describiremos la formulación por integrales de camino brevemente, siguiendo [Hall, 2013, cap. 20; Klauder, 2000, pp. 56-65]. Comenzamos por la fórmula de Trotter, que nos dice que si A y B son dos operadores autoadjuntos en el espacio de Hilbert \mathcal{H} que cumplen determinadas condiciones ($A + B$ está definido densamente y es esencialmente autoadjunto¹²) tenemos la convergencia en norma de los operadores,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|e^{it(A+B)}\psi - (e^{itA/N} e^{itB/N})^N \psi\| = 0 \quad (1.7)$$

para todo $\psi \in \mathcal{H}$. Aplicamos este teorema al Hamiltoniano

$$-\frac{1}{\hbar}H = \frac{\hbar}{2m}\Delta - \frac{1}{\hbar}V(X)$$

con $A = \frac{\hbar}{2m}\Delta$ y $B = -\frac{1}{\hbar}V(X)$. Suponiendo que el potencial $V(X)$ cumpla las hipótesis, por la fórmula de Trotter (1.7)

$$e^{-\frac{itH}{\hbar}}\psi = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\exp\left(\frac{it\hbar\Delta}{2mN}\right) \exp\left(-\frac{itV(X)\Delta}{N\hbar}\right) \right)^N \psi. \quad (1.8)$$

¹² Un operador en un espacio de Hilbert \mathcal{H} es esencialmente autoadjunto si la clausura de su grafo en $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ es el grafo de un operador autoadjunto en \mathcal{H} .

Usando el propagador de la ecuación de Schrödinger libre [Hall, 2013, p. 95] deducimos la fórmula para una solución general

$$e^{i\hbar\Delta/(2mN)}\psi(x_0) = \left(\frac{mN}{i\hbar}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(i\frac{mN}{2t\hbar}|x_1 - x_0|^2\right) \psi(x_1) dx_1,$$

que podemos aplicar a (1.8) para obtener

$$(e^{-itH/\hbar}\psi)(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} C \int_{\mathbb{R}^{Nn}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \varepsilon \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_j - x_{j-1}}{\varepsilon}\right)^2 - V(x_{j-1}) \right]\right\} \psi(x_N) dx_1 \cdots dx_N$$

siendo $\varepsilon = t/N$ un incremento temporal y $C = \left(\frac{mN}{i\hbar}\right)^{nN/2}$. Hasta aquí el argumento es perfectamente riguroso, sin embargo, si queremos evaluar el límite entramos en problemas. Podemos usar el siguiente argumento heurístico para darle un significado. En el límite, los puntos x_i de \mathbb{R}^n se pueden ver como puntos espaciados un tiempo ε de un camino $x : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$. La medida $\mathcal{D}x$ (relacionada con la medida de Wiener¹³) es una medida en el espacio de caminos los caminos de $[0, t]$ en \mathbb{R}^n . Tomando pues este “límite”,

$$(e^{-itH/\hbar}\psi)(x_0) = C' \int_{\text{caminos}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_0^t \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - V(x(s)) \right] ds\right\} \psi(x(t)) \mathcal{D}x,$$

donde la integral es en el espacio de caminos (continuos) con condición inicial $x(0) = x_0$ y C' es una constante. Observamos que la cantidad en el exponente es la acción clásica $S(x, 0, t) = \int_0^t (T - V) dt$ lo que nos da la célebre fórmula de la integral de camino de Feynman

$$(e^{-itH/\hbar}\psi)(x_0) = C' \int_{\substack{\text{caminos} \\ x(0)=x_0}} e^{iS(x,0,t)/\hbar} \psi(x(t)) \mathcal{D}x. \quad (1.9)$$

La integral de camino sugiere una fuerte conexión entre la mecánica Lagrangiana clásica y la mecánica cuántica que podemos aprovechar para cuantizar un sistema clásico.

El límite de la medida de Lebesgue a un espacio de dimensión infinita (el espacio de caminos) supone un problema matemático y por tanto parece razonable olvidarnos del desarrollo anterior y comenzar directamente postulando el lado derecho de (1.9).¹⁴ La formulación por integral de caminos de la mecánica cuántica se generaliza salvando ciertas dificultades matemáticas a la teoría cuántica de campos, donde se encuentra la mayor variedad de aplicaciones de esta técnica de cuantización. Para ver como se puede usar esta técnica para construir el propagador de una partícula libre y otros ejemplos consultar el libro de Feynman [Feynman et al., 2010, cap. 3].

¹³ La formulación por integrales de camino tiene su marco en la teoría de medidas estocásticas. Por ejemplo, la medida de Wiener está asociado al proceso estocástico de Wiener, que describe el movimiento Browniano [Wiener, 1923].

¹⁴ Esta formulación reconstruye el principio de acción estacionaria de Hamilton (en el caso de que la acción sea mínima) de la siguiente forma: si hacemos tender $\hbar \rightarrow 0$, el término que más contribuye a la integral es el camino que hace mínima la acción, por lo que en el límite clásico el camino que hace la acción estacionaria es el que sigue la partícula [Schwartz, 2013, p. 259]. Si en cambio $\hbar \neq 0$ el movimiento de la partícula está determinado por todos los caminos que ésta podría seguir, promediados con la integral.

Capítulo 2

Aspectos matemáticos

En este capítulo introduciremos algunos aspectos matemáticos relevantes para las cuantizaciones que llevaremos a cabo en los posteriores capítulos: cuantización geométrica y cuantización integral. En primer lugar, resumiremos las ideas esenciales de la descripción geométrica de la mecánica clásica para aplicarlo en el siguiente capítulo al problema de la cuantización. Nos interesaremos por la rama de la geometría llamada geometría simpléctica, que tiene origen en los corchetes de Poisson y de Lagrange del siglo XIX. La mecánica de Hamilton y Jacobi llegó al siglo XX, donde los trabajos pioneros de Vladimir Arnold, demostrando que los fluidos se podían describir como sistemas Hamiltonianos usando geometría simpléctica, relanzaron el interés por esta rama. De la mano de este interés por la geometría de la mecánica clásica surgió también el interés por la geometría de la mecánica cuántica, en particular la cuantización geométrica. En segundo lugar, introduciremos dos aspectos de variable compleja que necesitaremos para la cuantización: las variedades de Kähler y la representación de Segal-Fock-Bargmann de la mecánica cuántica.

La bibliografía recomendada para este capítulo es la siguiente. Sobre la teoría general de variedades diferenciables se recomienda el libro [Lee, 2013]. La relación entre mecánica clásica y geometría diferencial se recoge con multitud de ejemplos en estas referencias: [José y Saletan, 1998], [Arnold, 1989] y [Putz, 1993], este último con aplicaciones a la cuantización. Una introducción a las variedades de Kähler se puede consultar en [da Silva, 2000] y [Borthwick, 2000]. Por último, una introducción al espacio de Segal-Fock-Bargmann puede encontrarse en [Gazeau, 2009, cap. 2].

2.1. Geometría diferencial

Cuando queremos describir un sistema mecánico sobre el que actúan ligaduras, debemos abandonar la descripción de su espacio de configuración como todo el espacio \mathbb{R}^3 y restringirnos a una región que presumiblemente no será un espacio vectorial. Por ejemplo, un péndulo esférico de radio fijo está limitado a moverse en una esfera \mathbb{S}^2 . Es aquí donde surge la necesidad de introducir la geometría diferencial en mecánica clásica, el espacio de configuración del sistema pasa a ser una variedad diferenciable. Una variedad diferenciable es un conjunto de puntos dotado de una topología, esto es, una serie de subconjuntos llamados abiertos que nos permitirán hablar de entornos de puntos, continuidad, conexión, compacidad... Además, para poder hablar de variedad diferenciable necesitamos alguna forma de relacionar sus puntos con los de un espacio vectorial en el que las herramientas de cálculo sean conocidas, por ejemplo \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n . Las aplicaciones que nos relacionan estos puntos se llaman *cartas*, y van de un abierto de la variedad a un abierto del espacio

vectorial escogido. Si $q \in Q$ es un punto de nuestra variedad y φ una carta, las funciones x^i tal que $\varphi(q) = (x^1, \dots, x^n)$ se llaman coordenadas de q en la carta φ . Por ejemplo, unas coordenadas en \mathbb{S}^2 vienen dadas por las coordenadas esféricas

$$\varphi(q) = (\theta, \psi).$$

Estas coordenadas normalmente no están definidas de forma global en toda la variedad, por lo que para poder hablar propiamente de variedad *diferenciable* debemos imponer la siguiente condición a cualesquiera cartas φ_i y φ_j : $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ es una función diferenciable en nuestro espacio vectorial, por ejemplo en \mathbb{R}^n . Las cartas nos permiten pasar de funciones entre variedades a funciones en \mathbb{R}^n , donde las podemos diferenciar con las herramientas usuales del cálculo, para posteriormente volver a las funciones entre variedades usando las inversas de las cartas. Por ejemplo, una función entre variedades con cartas ϕ y ψ se dice diferenciable si su representación en coordenadas $\psi_i \circ F \circ \phi^{-1}$ es diferenciable como función en \mathbb{R}^n . En el caso de que la representación en coordenadas sea C^∞ y con inversa C^∞ , diremos que F es un difeomorfismo.

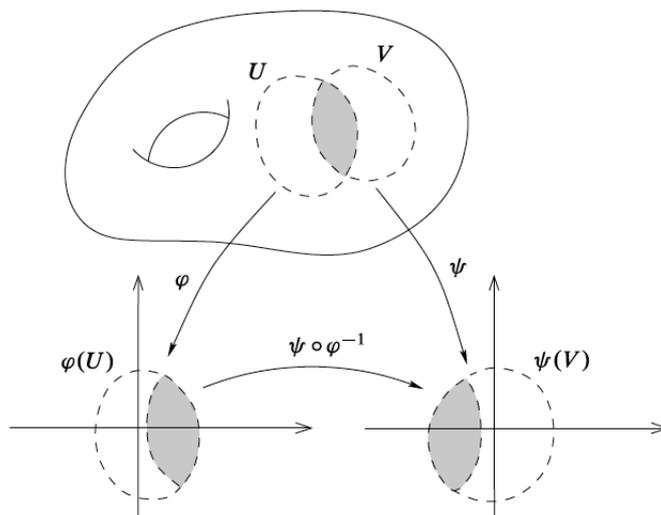


Figura 1: Cartas en una variedad. Imagen tomada de [Lee, 2013, p. 12].

Ya tenemos la forma de describir el espacio de configuración, ahora nos interesa poder hablar de velocidades, en concreto, de velocidad en cada punto del espacio de configuración. Aquí encontramos la primera diferencia notable con el caso de una partícula en todo el espacio: no todas las direcciones de velocidades están permitidas. Por ejemplo, una partícula moviéndose en un péndulo no puede moverse en la dirección del radio, la ligadura se lo impide. Si una variedad se puede describir con n coordenadas, podemos definir el espacio tangente en cada punto, $T_q Q$, como el espacio vectorial cuya base son las derivadas parciales en ese punto,

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \quad (2.1)$$

de forma que cualquier vector tangente se pueda escribir como

$$v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x^i} \equiv v_i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

(usando el convenio de sumación de Einstein). Así, los espacios tangentes a la esfera son aquellos planos perpendiculares al radio. Podemos definir la diferencial en un punto de una aplicación entre variedades $F : M \rightarrow N$ como la aplicación entre espacios tangentes $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ que viene dada en coordenadas por la matriz Jacobiana de F en coordenadas. Es decir, la diferencial toma un vector tangente en una variedad y lo envía a un vector tangente en otra variedad.

También nos gustaría poder describir el espacio de fases, que es el espacio natural en el que trabajar en mecánica Hamiltoniana. Para ello recurrimos a otro tipo de espacio tangente, el espacio *cotangente*, que en términos matemáticos podemos ver como el dual del espacio tangente. Denotaremos el espacio cotangente en el punto q por $T_q^* Q$. Si en el espacio tangente la base eran las parciales, en el espacio cotangente la base está formada por las diferenciales de las coordenadas,

$$dx^1, \dots, dx^n,$$

que no son más que los vectores duales de (2.1). Describiremos el momento de la partícula en un punto como

$$p = \sum_{i=1}^n p_i dx^i \equiv p_i dx^i.$$

Una vez que disponemos de los espacios en los que trabajar comenzamos a añadir sobre estos más herramientas. Cuando un sistema se mueva por este espacio de configuración cambiará su velocidad y podemos relacionar su movimiento con un campo vectorial sobre el espacio de configuración, esto es, tomamos un vector en cada espacio tangente en todos los puntos de la variedad. Definimos el fibrado cotangente de la variedad Q , denotado TQ , como la unión de los espacios tangentes en todos los puntos. Un campo vectorial es una aplicación

$$X : Q \rightarrow TQ$$

tal que cada punto q se envía en un vector de su espacio tangente $v_q \in T_q Q$. Esto es lo que se llama una *sección de un fibrado* y podemos generalizarlo como sigue.

A cada punto de una variedad le podemos asignar un espacio F , que llamaremos fibra. En el caso anterior, la fibra es un espacio vectorial que llamamos espacio tangente, pero puede ser algo más general, como un espacio de tensores o el espacio de números complejos \mathbb{C} . Llamaremos *fibrado* E con fibra F a un espacio que cumple:

1. Existe una función $\pi : E \rightarrow M$ sobreyectiva y continua.
2. Localmente se parece al producto cartesiano $M \times F$. Dicho de otra forma, para cada $q \in Q$ existe un entorno U en Q y una aplicación $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ biyectiva, continua y con inversa continua, que envía la fibra en q en $\{q\} \times F$.

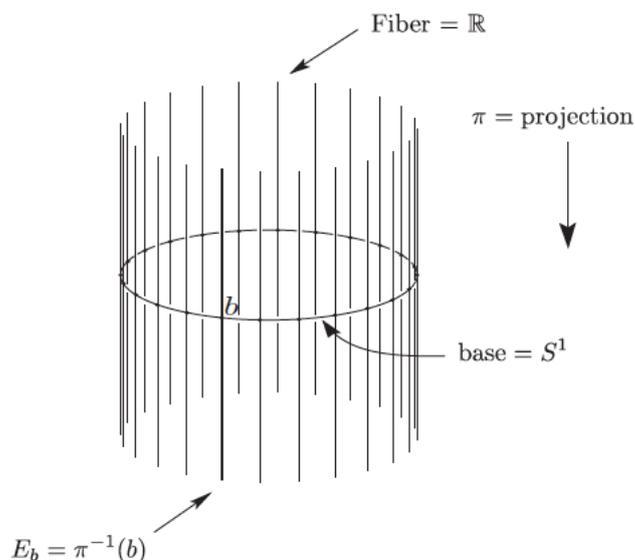


Figura 2: El cilindro visto como un fibrado. Imagen tomada de [Abraham, Marsden y Ratiu, 1988, p. 157].

La sección de un fibrado es, igual que antes, una aplicación X que a cada punto p de la variedad M le asigna un elemento de la fibra F en ese punto:

$$X : M \rightarrow E \quad \text{tal que} \quad X \circ \pi = I_M ,$$

siendo I_M la identidad en M . Denotaremos el **conjunto de secciones** de un fibrado E por $\Gamma(E)$. Además de los fibrados cotangentes, los fibrados que más nos van a interesar son los fibrados tensoriales, en concreto de tensores antisimétricos de cierto rango. Definimos una k -forma como una sección de un fibrado tensorial en el que la fibra es el espacio vectorial de tensores antisimétricos de rango k covariantes. Estos tensores se pueden escribir, usando la base del espacio cotangente y el producto exterior \wedge , como combinaciones lineales de

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} . \quad (2.2)$$

El producto exterior de tensores es simplemente una operación que toma dos tensores, de rango k y l , y forma una combinación lineal antisimétrica de sus productos tensoriales

$$\omega \wedge \nu = \frac{1}{k!l!} \text{Alt}(\omega \otimes \nu) ,$$

donde Alt es el antisimetrizador de un tensor. Por ejemplo, la 2-forma $dx \wedge dy$ es

$$dx \wedge dy = dx \otimes dy - dy \otimes dx . \quad (2.3)$$

Aunque no lo hemos mencionado antes, se supone que estos campos de tensores (y en general cualquier sección de un fibrado) es una aplicación suave, de forma que las componentes del campo tensorial son funciones infinitamente diferenciables. El ejemplo más

simple de campo tensorial son las 0-formas o funciones escalares C^∞ sobre Q , que denotamos $C^\infty(Q)$. Otro ejemplo, de 1-forma, es la diferencial de una función $f \in C^\infty(Q)$,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i. \quad (2.4)$$

Podemos establecer diversas operaciones sobre tensores, algunas de las que más nos van a interesar son:

1. **Multiplicación interior i .** Toma un campo vectorial X y lo evalúa en la primera componente del tensor T ,

$$i_X T(\cdot, \dots, \cdot) = T(X, \cdot, \dots, \cdot)$$

disminuyendo en uno el rango del tensor. Por ejemplo, si $V = x\partial/\partial x$ es un campo vectorial y $\theta = 2dx$ una 1-forma, la multiplicación interior tiene como resultado la función

$$i_V \theta = \theta(V) = 2dx \left(x \frac{\partial}{\partial x} \right) = 2x dx \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = 2x.$$

2. **Derivada exterior d .** Toma una k -forma

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}$$

y la envía en la $(k+1)$ -forma

$$d\omega = d\omega_{i_1 \dots i_n} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n},$$

siendo $d\omega_{i_1 \dots i_n}$ la diferencial de una función (2.4).

3. **Derivada de Lie \mathcal{L}_X .** Nos mide como cambia el campo tensorial a lo largo del flujo de un campo vectorial X .

El flujo de un campo vectorial es la aplicación que nos da para cada punto las curvas cuyo vector tangente coincide con los vectores del campo vectorial. La existencia y unicidad del flujo viene garantizada por los teoremas conocidos de ecuaciones diferenciales. Intuitivamente, podemos imaginarnos que el flujo nos dice como se movería una partícula arrastrada por el campo vectorial.

Las formas diferenciales nos dan un marco independiente de coordenadas en el que entender la integración en variedades. Comencemos por la integral de una 1-forma θ a lo largo de una curva $\gamma(t)$. La 1-forma nos da un covector en cada punto de la variedad, y aplicado al vector tangente a la curva nos da un escalar. Sumando estas contribuciones infinitesimales obtenemos la integral,

$$\int_{\gamma(t)} \theta \equiv \int \theta \cdot \gamma'(t) dt.$$

Esto es en el lenguaje de la geometría diferencial lo que solemos denotar por $\int_\gamma F \cdot dr$ cuando integramos el trabajo a lo largo de un camino γ . Las n -formas en una variedad de

dimensión n se llaman formas de volumen, porque se usan para definir integrales en un volumen V . Si V tiene coordenadas x^1, \dots, x^n definimos

$$\int_V f dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n = \int_{V'} f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \cdots dx^n,$$

siendo V' el volumen V expresado en coordenadas. De forma análoga, las integrales de 2-formas serán integrales en superficie. El teorema de Stokes tiene su generalización a las variedades (con borde), y nos relaciona una integral k -dimensional en la región D con una integral $(k - 1)$ -dimensional en el borde de la región, denotado ∂D ,

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega,$$

siendo $d\omega$ la derivada exterior de ω .

2.2. Geometría simpléctica y mecánica clásica

Como ya hemos mencionado, el espacio de configuración del sistema en mecánica clásica se describe por una variedad Q y su espacio de fases por el fibrado cotangente de esta variedad, $T^*Q \cong M$. La energía del sistema es una función diferenciable $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ que llamamos Hamiltoniano.¹⁵ Por ejemplo, consideramos una partícula moviéndose libremente en \mathbb{R}^n , con espacio de fases $T^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ y Hamiltoniano

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q),$$

siendo q y p las coordenadas de posición y momento en $T^*\mathbb{R}^n$. Si definimos el momento

$$p = m\dot{q} \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = \frac{p}{m}$$

y usamos la segunda ley de Newton

$$\dot{p} = -\nabla V,$$

vemos que la evolución del sistema viene dada por el flujo del campo vectorial

$$X_H = (\dot{q}, \dot{p}) = \left(\frac{p}{m}, -\nabla V \right),$$

llamado campo Hamiltoniano. El campo así es poco ilustrador, pero podemos reescribirlo de forma más simétrica como

$$X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right),$$

¹⁵ Para introducirse en la geometría simpléctica en mecánica Hamiltoniana se recomienda los libros [Arnold, 1989] y [Souriau, 1970]. Para un tratamiento matemático avanzado se puede consultar [Abraham y Marsden, 1987].

y vemos que el flujo de X_H es exactamente la solución de las ecuaciones de Hamilton. Para relacionar H y X_H independientemente de las coordenadas introducimos la 2-forma

$$\omega = \sum_i dq^i \wedge dp_i, \quad (2.5)$$

resultando en que X_H cumple

$$dH(\cdot) = \omega(X_H, \cdot) = i_{X_H} \omega.$$

El interés de este tensor ω es que lo podemos cambiar para alterar la dinámica del sistema. Sin embargo, antes de eso hay que ver qué propiedades nos gustaría conservar. Para que X_H esté bien definido es necesario que ω no sea degenerada, es decir, que la matriz sea invertible. Si queremos que el Hamiltoniano sea invariante por el flujo de X_H , es interesante que ω sea antisimétrica,

$$X_H(H) = dH(X_H) = \omega(X_H, X_H) = 0,$$

y por tanto queremos que el tensor sea una 2-forma. Por último, queremos pedir que ω sea invariante por el flujo de X_H para que las ecuaciones del movimiento no cambien con la evolución del sistema. Aplicando la fórmula “mágica” de Cartan tenemos

$$\mathcal{L}_{X_H} \omega = i_{X_H} d\omega + d(i_{X_H} \omega) = i_{X_H} d\omega + d(dH) = i_{X_H} d\omega + 0,$$

así que si pedimos que $d\omega = 0$ (ω cerrada) lo tendríamos. De este modo, sustituiremos la 2-forma dada antes por una 2-forma cerrada y no degenerada, también llamada *forma simpléctica*. Una variedad con esta forma se llamará variedad simpléctica. Las aplicaciones que conservan la forma simpléctica se llaman *transformaciones canónicas*. Estas son precisamente los cambios de coordenadas que conservan las ecuaciones de Hamilton.

Dado que la forma simpléctica es cerrada, el lema de Poincaré nos garantiza que, al menos localmente, existe una 1-forma θ tal que $-d\theta = \omega$. Llamaremos a esta 1-forma *potencial simpléctico*. En el caso de la 2-forma (2.5), un potencial simpléctico es simplemente

$$\theta = p_i dq^i. \quad (2.6)$$

El teorema de Darboux nos garantiza que localmente toda forma simpléctica es idéntica a (2.5) y por tanto localmente siempre existen coordenadas en las que el potencial simpléctico tiene la forma (2.6).

Ya hemos visto el ejemplo más sencillo de forma simpléctica, la que viene dada por (2.5) en cualquier fibrado cotangente. Veamos dos ejemplos más de variedades simplécticas.

Ejemplo 2.1. Un ejemplo de variedad simpléctica que no es un fibrado cotangente es la esfera unidad \mathbb{S}^2 en \mathbb{R}^3 con una estructura simpléctica dada por la forma de área

$$\omega = \sin \theta d\theta \wedge d\phi.$$

Si tomamos como Hamiltoniano la función de altura relativa al centro de la esfera

$$H(\theta, \phi) = \cos \theta,$$

podemos hallar el campo Hamiltoniano tomando un campo arbitrario

$$X_H = a \frac{\partial}{\partial \theta} + b \frac{\partial}{\partial \phi}$$

e imponiendo la condición $dH = i_{X_H} \omega$. Así, teniendo en cuenta (2.3)

$$-\sin \theta d\theta = a \sin \theta d\phi - b \sin \theta d\theta \quad \Rightarrow \quad a = 0, \quad b = 1, \quad \Rightarrow \quad X_H = \frac{\partial}{\partial \phi}.$$

El flujo Hamiltoniano es entonces la aplicación $\phi \mapsto \phi + t$, que rota un punto en la esfera en torno al eje vertical un ángulo t . \diamond

Ejemplo 2.2. El oscilador armónico n -dimensional tiene espacio de configuración \mathbb{R}^n y espacio de fases $T^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$. Si lo dotamos de la forma simpléctica (2.5)

$$\omega = dq^i \wedge dp_i,$$

y el Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2),$$

el campo Hamiltoniano $X_H = a^i \partial / \partial q^i + b_i \partial / \partial p_i$ es simplemente

$$dH = qdq + pdp = i_{X_H} \omega = adp - bdq \quad \Rightarrow \quad X_H = (p, -q)$$

y su flujo son rotaciones en cada plano (q^i, p_i) . \diamond

La forma simpléctica nos da otra de las estructuras fundamentales de la mecánica clásica: los corchetes de Poisson. Definimos el corchete de Poisson de dos funciones $f, g \in C^\infty(M)$ con valores en \mathbb{R} como

$$\{f, g\} \equiv \omega(X_f, X_g) \in C^\infty(M).$$

El corchete de las funciones coordenadas satisface las relaciones conocidas

$$\{q^i, q^j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q^i, p_j\} = \delta_{ij},$$

análogas a las que cumplen los conmutadores de los operadores de posición y momento en mecánica cuántica (como ya mencionamos, fue Dirac el primero en proponer esta conexión). La evolución de un observable en física clásica, una función sobre la variedad, viene dada en términos de los corchetes de Poisson por

$$\frac{d}{dt} f = \{f, H\},$$

que podemos ver como el análogo clásico de la ecuación para la evolución de operadores en la imagen de Heisenberg

$$\frac{d}{dt}F = -\frac{i}{\hbar}[F, H].$$

Otra conexión con la mecánica cuántica se puede observar a través del corchete de Lie. El corchete de Lie de dos campos vectoriales X e Y está dado por

$$[X, Y] = XY - YX,$$

y se cumple la siguiente relación, íntimamente relacionada con el esquema de la cuantización geométrica: la condición de conmutación de Dirac,

$$[X_f, X_g] = X_{\{f, g\}}.$$

Para cuantizar un sistema clásico y construir un espacio de Hilbert a partir de él, necesitamos algún tipo de producto escalar. Por suerte, hay una medida natural en las variedades simplécticas, la forma de volumen de Liouville. Una variedad simpléctica tiene siempre dimensión $2n$, así que podemos tomar

$$V_\omega = \frac{1}{n!}\omega^n$$

como una forma de volumen en la variedad (se demuestra que $\omega^n \neq 0$). El teorema de Gibbs-Liouville nos dice que el volumen del espacio de fases que ocupa un sistema es constante a lo largo de la evolución del sistema. Podemos interpretar este volumen como la información del sistema y concluir que la información no se pierde: si conocemos el estado de un sistema en un instante y las leyes de movimiento, podemos predecir tanto el pasado como el futuro del sistema.

2.3. Variedades de Kähler

Las variedades de Kähler¹⁶ son unas variedades diferenciables con una estructura muy rica que hace que su cuantización geométrica se comporte especialmente bien. Estas variedades son complejas, poseen una estructura simpléctica y también una estructura Riemanniana¹⁷ que juntas forman una estructura Hermítica. Todo espacio de Hilbert complejo es una variedad de Kähler, en concreto una plana y simplemente conexa (sin agujeros). Así, nos imaginaremos una variedad de Kähler como una generalización de los espacios de Hilbert a variedades con curvatura.

Una variedad compleja es una variedad diferenciable M con cartas $\varphi_i : M \rightarrow \mathbb{C}^n$ de forma que las funciones de cambio de carta $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ son funciones holomorfas (analíticas) con inversa holomorfa. Centrémonos ahora en una carta φ con coordenadas complejas (z_1, \dots, z_n) o alternativamente coordenadas reales $(x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)$. Podemos dotar a cada espacio tangente de M de una estructura compleja, es decir, una aplicación $J : T_p M \rightarrow T_p M$ tal que $J^2 = J \circ J = -\text{Id}$. Los espacios tangentes (complejos) se

¹⁶ Una introducción a las variedades de Kähler puede encontrarse en [Borthwick, 2000; Weil, 1958].

¹⁷ Una estructura Riemanniana es un campo de tensores simétricos y definidos positivos.

pueden ver como espacios vectoriales reales generados por los vectores $\partial/\partial x_j, \partial/\partial y_j$, así que podemos tomar la estructura compleja

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

en cada espacio tangente.

Los espacios tangentes complejos $T_p M \otimes \mathbb{C}$ serán simplemente los espacios vectoriales generados por combinaciones complejas de la base $\{\partial/\partial x_j, \partial/\partial y_j\}$. Podemos descomponer este espacio como suma directa de dos:

1. El espacio $T_{1,0}$, generado por combinaciones complejas de

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right),$$

los autovectores de autovalor i de J ,

2. y el espacio $T_{0,1}$, generado por las combinaciones complejas de los autovectores de autovalor $-i$,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$

De forma similar, definimos los vectores duales

$$dz_j = dx_j + i dy_j, \quad d\bar{z}_j = dx_j - i dy_j,$$

que nos permiten definir las (k, l) -formas como los campos de tensores antisimétricos

$$\sum_{|K|=k, |L|=l} b^{K,L} dz_K \wedge d\bar{z}_L,$$

con $b^{K,L}$ funciones complejas, K, L multi-índices ordenados

$$L = (L_1, \dots, L_l), \quad 1 \leq L_1 < \dots < L_l \leq n$$

y

$$dz_L = dz_{L_1} \wedge \dots \wedge dz_{L_l}.$$

Análogamente a la derivada exterior para k -formas, podemos definir los operadores de Dolbeault para (k, l) -formas

$$\partial(f dz_K \wedge d\bar{z}_L) = \sum_j \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j \wedge dz_K \wedge d\bar{z}_L,$$

$$\bar{\partial}(f dz_K \wedge d\bar{z}_L) = \sum_j \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \wedge dz_K \wedge d\bar{z}_L,$$

cuya suma en variedades complejas es la derivada exterior $d = \partial + \bar{\partial}$.

Una variedad de Kähler es una variedad compleja con estructura compleja J y con una métrica Riemanniana g compatible con la estructura compleja, $g(J\cdot, J\cdot) = g(\cdot, \cdot)$, tales que determinan una forma simpléctica en esta variedad:

$$\omega(\cdot, \cdot) = g(J\cdot, \cdot).$$

En general, ω será una 2-forma y en el caso de que además sea cerrada tendremos la variedad de Kähler. La métrica Riemanniana junto con la forma simpléctica determinan una estructura Hérmítica sobre la variedad

$$h = g + i\omega.$$

Si conocemos la forma simpléctica de la variedad de Kähler podemos recuperar las componentes g_{jk} de la métrica Riemanniana:

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_{j,k=1}^n g_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k.$$

En ocasiones existirá una función compleja K tal que

$$\omega = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} K,$$

que llamaremos potencial de Kähler.

Un ejemplo de variedad de Kähler es el propio \mathbb{C}^n con potencial Kähleriano

$$K = \log(|z|^2 + 1)$$

y forma simpléctica

$$\omega = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \log(|z|^2 + 1).$$

Esta forma se conoce como forma de Fubini-Study en \mathbb{C}^n .

Otro ejemplo de variedad de Kähler es el disco unidad en el plano complejo

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

equipado con el potencial Kähleriano

$$K(z, \bar{z}) = \log \left(\frac{1}{(1 - |z|^2)^2} \right),$$

que nos da la forma simpléctica

$$\omega = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \frac{1}{(1 - |z|^2)^2} = \frac{i}{2} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 - |z|^2)^2}$$

y métrica hiperbólica (de Poincaré)

$$g = \frac{dz d\bar{z}}{(1 - |z|^2)^2}.$$

2.4. Espacio de Segal-Fock-Bargmann

En cualquier introducción de mecánica cuántica encontramos la representación de posiciones y la representación de momentos del espacio de Hilbert de estados. En esta sección introduciremos otra representación alternativa del espacio de estados: la representación analítica o de Segal-Fock-Bargmann [Bargmann, 1961; Bargmann, 1962]. Igual que en la representación de posición la variable de las funciones es la posición de la partícula x y en la representación de momentos es el momento p , en la representación analítica la variable será un vector complejo z . Por simplicidad trataremos un caso unidimensional, en el que $x, p \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C}$. Para construir la representación analítica partimos de una función de onda en representación de posición $\psi(x)$ y le aplicamos la transformación integral

$$f(z) = \int_{\mathbb{R}} K(x, z) \psi(x) dx ,$$

siendo $K(x, z)$ el núcleo integral

$$K(x, z) = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \exp \left[\frac{1}{\hbar} \left(\frac{z^2}{2} - \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2}} x - z \right)^2 \right) \right] ,$$

siendo ω una constante. La transformación inversa es simplemente

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{C}} \bar{K}(x, z) f(z) d\mu(z) ,$$

siendo $d\mu(z)$ la medida Gaussiana en el plano complejo

$$d\mu(z) = \frac{e^{-|z|^2/\hbar}}{\pi\hbar} dx dy = \frac{i}{2\pi\hbar} e^{-|z|^2/\hbar} dz \wedge d\bar{z} .$$

Definimos entonces el espacio de Segal-Fock-Bargmann (o solo *espacio de Bargmann* por simplicidad) como el espacio de funciones analíticas en \mathbb{C} con norma finita

$$\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 d\mu(z) < \infty .$$

El núcleo integral K establece entonces una correspondencia entre $L^2(\mathbb{R})$ y el espacio de Bargmann por medio de las transformaciones anteriores. Podemos dar una descripción del oscilador armónico en esta representación, para ello tomamos la base ortonormal dada por las funciones

$$f_n(z) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{z}{\sqrt{\hbar}} \right)^n , \quad n = 0, 1, \dots$$

Los operadores de aniquilación y creación que nos envían f_n en f_{n-1} y f_{n+1} son en esta representación

$$\begin{aligned} a f(z) &= \sqrt{\hbar} \frac{d}{dz} f(z) \quad \rightarrow \quad a f_n(z) = \sqrt{n} f_{n-1}(z) \\ a^\dagger f(z) &= \frac{z}{\sqrt{\hbar}} f(z) \quad \rightarrow \quad a^\dagger f_{n+1}(z) = \sqrt{n+1} f_{n+1}(z) \end{aligned}$$

El Hamiltoniano del oscilador armónico en esta representación no será otro que

$$H = \hbar\omega \left(z \frac{d}{dz} + \frac{1}{2} \right) .$$

Esta representación nos será útil a la hora de cuantizar el oscilador armónico en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Cuantización Geométrica

El origen de lo que hoy llamamos cuantización geométrica puede encontrarse en los trabajos pioneros de Dirac, en los que estableció por primera vez la correspondencia entre los corchetes de Poisson y estudió la cuantización de superficies planas y curvas (ver [Dirac, 1964]). Poco a poco, fueron surgiendo numerosos y variados enfoques con los que abordar el problema de la cuantización: la cuantización por deformación, por estados coherentes, de Berezin-Toeplitz, cuantización geométrica...

La cuantización geométrica tiene origen en los trabajos de Kirillov, Souriau y Kostant sobre teoría de representación de grupos, en particular sobre órbitas coadjuntas de grupos de Lie [Kirillov, 1962; Kostant, 1965; Souriau, 1967]. El interés de este método fue creciendo en la segunda mitad del siglo XX con trabajos como los de Blattner, Gotay, Guillemin y Sternberg [Blattner, 1973; Gotay, 1980; Guillemin y Sternberg, 1982]. Históricamente, este método sirvió para unificar varios esquemas de cuantización muy específicos y sin relación aparente en un marco más amplio.

La cuantización geométrica es más interesante a nivel conceptual para entender la relación entre las estructuras geométricas de la mecánica clásica y la cuántica, que a nivel práctico como un procedimiento sistemático y eficiente de obtener sistemas cuánticos. Aunque la idea que soslaya es simple, enseguida surgen los primeros problemas y las matemáticas se van enrevesando. Es por ello que no se pretende dar en este trabajo un desarrollo riguroso de las matemáticas, sino usarlas como herramientas conceptuales para llevar a cabo la tarea de cuantización, analizando los motivos de cada paso, qué funciona y qué falla.

Existen numerosas referencias bibliográficas sobre la teoría general de la cuantización geométrica. A nivel introductorio se recomienda [Blau, 1992], [Lerman, 2012] y [Carosso, 2018]. Un desarrollo matemático más exhaustivo se puede consultar en [Hall, 2013, cap. 22, 23], [Echeverría-Enriquez *et al.*, 1999] y [Woodhouse, 2007], siendo este último la referencia estándar en la materia. La cuantización de variedades de Kähler es por sí solo un campo muy amplio, pudiendo encontrarse en algunas referencias [Borthwick, 2000], [Carosso, 2020]. Sobre la cuantización geométrica de la gravedad y algunos de sus obstáculos se puede consultar [McClain, 2020]. Finalmente, dos recursos online interesantes se pueden encontrar en [Baez, 2018a; Baez, 2018b].

3.1. Esquema general

La filosofía de la cuantización geométrica es muy sencilla: si hemos encontrado conexiones claras entre la mecánica clásica y la cuántica, y la mecánica clásica se describe de manera natural en variedades simplécticas, ¿por qué no intentar cuantizar las variedades simplécticas? Así, el punto de partida de la cuantización geométrica será una variedad simpléctica, que puede ser el espacio de fases del sistema a cuantizar. Lejos de ser un problema sencillo, la cuantización geométrica más elemental requiere las siguientes etapas:

1. El primer paso se llama *precuantización*, y consistirá en tomar un fibrado lineal Hermitico sobre la variedad, que nos permitirá definir funciones complejas sobre nuestra variedad simpléctica. Además, introduciremos una conexión, que nos permitirá *conectar* las diferentes fibras mediante la derivada covariante y así poder tomar derivadas en el fibrado. La existencia de estos fibrados lineales vendrá dada por la condición de Bohr-Sommerfeld, íntimamente relacionada con el esquema de cuantización que lleva su nombre y que remonta a los orígenes de la mecánica cuántica [Landau *et al.*, 1993, pp. 188-193].
2. El candidato a espacio de Hilbert (precuantizado) para el sistema cuántico será el espacio de secciones del fibrado de cuadrado integrable. Los observables cuantizados en este espacio de Hilbert vienen dado por la correspondencia

$$Q(f) = i\hbar\nabla_{X_f} + f ,$$

siendo ∇_{X_f} la derivada covariante en la dirección del campo Hamiltoniano X_f . Como cabría esperar, esta cuantización cumple

$$[Q(f), Q(g)] = i\hbar Q(\{f, g\}) . \tag{3.1}$$

3. Este espacio de Hilbert tiene dimensión $2n$, pero sabemos por la cuantización canónica que la dimensión debería ser la mitad. Ante esta tesitura se introducen las polarizaciones: una elección de subespacios tangentes complejos que nos permitirán definir el espacio de Hilbert cuántico como el espacio de secciones de cuadrado integrable constantes en la polarización. Las polarizaciones son en cierto sentido una generalización de un sistema de observables que conmutan. Lejos de ser un problema, tener que introducir las polarizaciones nos da mucha versatilidad, pudiendo obtener mediante diversas elecciones de polarizaciones distintas representaciones de nuestro espacio de Hilbert, por ejemplo la representación de posiciones, momentos o de Bargmann.
4. Sin embargo, una vez que introducimos las polarizaciones emergen problemas a la hora de cuantizar los observables clásicos en operadores lineales del espacio de Hilbert, ya que no se puede garantizar que todos cumplan la relación entre los corchetes de Poisson y el conmutador (3.1). Llegados a este punto requerimos el uso de herramientas matemáticas muy sutiles para dar sentido a este problema.

Aunque no se tiene una teoría satisfactoria para cuantizar variedades simplécticas, hay dos tipos de variedades en las que este procedimiento funciona especialmente bien:

1. Fibrados cotangentes.
2. Variedades de Kähler.

Por ser las que más aplicaciones prácticas tienen, son en las que centraremos nuestro estudio.

3.2. Fibrados lineales y precuantización

En esta sección comenzamos a desarrollar el proceso de precuantización, que como mencionamos en el esquema, es el primer paso para la cuantización de una variedad simpléctica. Para motivar la necesidad de introducir la derivada covariante veamos algunos problemas que surgen si intentamos cuantizar el sistema. Dada una función $f \in C^\infty(M)$, el campo Hamiltoniano X_f es un operador que satisface la relación entre el corchete de Poisson y el conmutador

$$[i\hbar X_f, i\hbar X_g] = (i\hbar)^2 X_{\{f,g\}} = i\hbar (i\hbar X_{\{f,g\}}),$$

así que podemos proponer la cuantización

$$Q_1(f) = i\hbar X_f.$$

Sin embargo, al cuantizar el sistema así no tenemos la propiedad deseable de que la cuantización de la función $f \equiv 1$ sea la identidad, por lo que podemos modificar la cuantización a

$$Q_2(f) = i\hbar X_f + f.$$

Haciendo esto perdemos la relación de conmutación así que debemos modificarlo de nuevo si queremos recuperarla. Si ω es la forma simpléctica y θ un potencial simpléctico tal que $\omega = d\theta$, el operador

$$Q(f) = i\hbar(X_f - \frac{i}{\hbar}\theta(X_f)) + f$$

cumple tanto $Q(1) = I$ como la relación de conmutación. El operador

$$\nabla_{X_f} \equiv X_f - \frac{i}{\hbar}\theta(X_f) \tag{3.2}$$

se denomina derivada covariante y el operador $Q(f)$ la precuantización de f .

Llegados a este punto nos damos cuenta que el potencial θ no es único, pues para cualquier función ϕ se tiene que $d(d\phi) = 0$. Podemos tomar otro potencial

$$\theta' = \theta + d\phi$$

y seguimos teniendo un potencial simpléctico $d\theta' = \omega$, es decir, el potencial simpléctico depende de la elección de un *gauge*. Al hacer esto la cuantización del observable se modifica en un sumando $d\phi(X_f)$. Lejos de ser un problema, poder cambiar de gauge nos vendrá bien al estudiar ejemplos concretos. Si postulamos que cualesquiera estados ψ y $e^{\frac{i\phi}{\hbar}}\psi$ son

el mismo, el operador cuantizado también se cambia por una fase $e^{\frac{i\phi}{\hbar}}$. Para verlo comenzamos desarrollando

$$Q(f)\left[e^{\frac{i\phi}{\hbar}}\psi\right] = \left(i\hbar\left(X_f - \frac{i}{\hbar}\theta'(X_f)\right) + f\right)\left[e^{\frac{i\phi}{\hbar}}\psi\right] = \left(i\hbar\left(X_f - \frac{i}{\hbar}\theta(X_f) - d\phi(X_f)\right) + f\right)\left[e^{\frac{i\phi}{\hbar}}\psi\right].$$

Teniendo en cuenta que X_f es una derivación, aplicamos la regla del producto y de la cadena

$$X_f\left[e^{\frac{i\phi}{\hbar}}\psi\right] = e^{\frac{i\phi}{\hbar}}X_f[\psi] + \frac{i}{\hbar}e^{\frac{i\phi}{\hbar}}\psi X_f[\phi]$$

y como por definición de diferencial $X_f(\phi) = d\phi(X_f)$, se concluye que

$$Q(f)\left[e^{\frac{i\phi}{\hbar}}\psi\right] = e^{\frac{i\phi}{\hbar}}Q(f)[\psi].$$

Así pues, de manera natural la construcción nos invita a considerar la acción del grupo de simetría $U(1) \cong \mathbb{S}^1$ actuando sobre el espacio de Hilbert.

A continuación comenzamos a introducir el aparato formal matemático de la precuantización. Puesto que el espacio de estados en mecánica cuántica es complejo, nos interesa cuantizar funciones complejas sobre la variedad simpléctica. Es aquí donde surge la necesidad de introducir los fibrados complejos lineales.

Definición 3.1. Sea $\pi : L \rightarrow M$ una proyección de una variedad L en nuestra variedad simpléctica M . Se dice que la terna (L, π, M) es un *fibrado lineal complejo* si:

1. Para cada $m \in M$, la fibra $L_m = \pi^{-1}(m)$ es isomorfa a \mathbb{C} .
2. Existe un recubrimiento de abiertos $\{U_i\}$ de M y secciones $s_i : U_i \rightarrow L$ tal que las aplicaciones

$$\begin{aligned} \phi_i : U_i \times \mathbb{C} &\rightarrow \pi^{-1}(U_i) \\ (m, z) &\mapsto z s_i(m) \end{aligned}$$

son difeomorfismos. A la familia $\{(U_i, \phi_i)\}$ se la denomina *trivialización* y cumple que $s_i(m) \neq 0$ para todo $m \in U_i$.

Dicho de otra forma, L se construye asignando a cada punto de la variedad M un espacio de números complejos. Así, una *sección* $s : M \rightarrow L$ representa una función que asigna a cada punto de la variedad un (y solo un) número complejo. Las secciones jugarán el papel de funciones complejas en el espacio de Hilbert.

Para construir el espacio de Hilbert nos interesa disponer de un producto interno, así que dotamos nuestro fibrado lineal de una *estructura Hermítica*.

Definición 3.2. Una estructura Hermítica sobre el fibrado lineal L es una elección de producto interno $h(\cdot, \cdot) : L_m \times L_m \rightarrow \mathbb{C}$ en cada fibra L_m de L , tal que para cada sección s de L , $h(s, s)$ sea una función suave en M .

Recordemos ahora que si ω es la forma simpléctica de nuestro espacio de fases, $\frac{\omega^n}{(2\pi\hbar)^n}$ define una forma de volumen (de Liouville) respecto a la que podemos integrar funciones en la variedad. Definiremos el **espacio de Hilbert precuántico** como la completación del conjunto de secciones de L de soporte compacto respecto al volumen de Liouville,

$$\int_M h(s_1, s_2) \frac{\omega^n}{(2\pi\hbar)^n}.$$

Es decir, el espacio de Hilbert precuántico está formado por las secciones de cuadrado integrable

$$\|s\| = \int_M h(s, s) \frac{\omega^n}{(2\pi\hbar)^n} < \infty.$$

Una vez que tenemos un espacio de Hilbert, buscamos cuantizar los observables clásicos para tener operadores en él. Introducimos para ello la *conexión*, la herramienta que nos permitirá tomar derivadas en el fibrado lineal.

Definición 3.3. Una conexión ∇ en el fibrado lineal L sobre M es una aplicación que asocia a cada campo vectorial X en M y sección s de L otra sección $\nabla_X(s)$ de L con las siguientes propiedades:

1. Para cualquier función $f \in C^\infty(M)$, campo X y sección s , se tiene $\nabla_{fX}(s) = f\nabla_X(s)$.
2. Para cualquier función $f \in C^\infty(M)$, campo X y sección s , se cumple la regla del producto $\nabla_X(fs) = X(f)s + f\nabla_X(s)$.

Dada una conexión, el operador ∇_X se llama derivada covariante en la dirección X . Una conexión se dice Hermítica si para cualquier campo vectorial X y secciones s_1 y s_2 se tiene la condición de compatibilidad

$$h(\nabla_X(s_1), s_2) + h(s_1, \nabla_X(s_2)) = X h(s_1, s_2).$$

Dada una estructura con conexión Hermítica, podemos escoger localmente una sección s_0 tal que $h(s_0, s_0)$, de forma que cualquier sección s se puede escribir localmente como $s = \varphi s_0$ para una única función compleja φ . Es por ello que usualmente abusaremos de notación para referirnos a la sección s como la función φ . Además, la relación

$$\nabla_X(s_0) = -\frac{i}{\hbar}\theta(X)s_0$$

permite definir la 1-forma θ , que como veremos se puede relacionar con la forma simpléctica de nuestra variedad. Con todo esto, expresaremos la derivada covariante de una sección de L como

$$\nabla_X(\varphi) = X(\varphi) - \frac{i}{\hbar}\theta(X)\varphi, \quad (3.3)$$

entendiendo que X actúa sobre φ como una derivación y $\theta(X)$ sobre φ como una multiplicación. Es justamente la derivada covariante (3.2) que obtuvimos por un argumento heurístico. La forma de curvatura de la conexión

$$\omega(X, Y) = \frac{i}{\hbar}(\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X, Y]}) \quad (3.4)$$

coincide con la derivada exterior de la 1-forma θ ,

$$\omega = d\theta .$$

Generalizando el análisis realizado al principio, postulamos la **precuantización de un observable** $f \in C^\infty(M)$ como el operador

$$Q(f) = i\hbar\nabla_{X_f} + f = i\hbar X_f + \theta(X_f) + f ,$$

que actúa sobre secciones s de L , o más bien sobre la función φ tal que $s = \varphi s_0$. Como las secciones son complejas este operador actúa como un operador real tanto en la parte real como imaginaria de φ . Podemos demostrar que si f es real entonces el operador $Q(f)$ es simétrico en el espacio de secciones de soporte compacto. Efectivamente, si ϕ_t es el flujo Hamiltoniano de X_f y φ_1, φ_2 dos secciones de soporte compacto, para t suficientemente pequeño todos los puntos del soporte de las secciones está en el dominio de ϕ_t , ya que ϕ_0 es la identidad. Además, por el teorema de Gibbs-Liouville deducimos que la forma de volumen $d\lambda = \omega^n / (2\pi\hbar)^n$ no cambia a lo largo del flujo Hamiltoniano. Derivando el producto escalar de φ_1 y φ_2 en $t = 0$ obtenemos

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_M h(\varphi_1, \varphi_2) \circ \phi_t d\lambda = \int_M h(\nabla_{X_f} \varphi_1, \varphi_2) + (\varphi_1, \nabla_{X_f} \varphi_2) d\lambda = 0 .$$

Por tanto ∇_{X_f} es antisimétrico y al multiplicarlo por $i\hbar$ resulta un operador simétrico. En el caso en que el flujo de X_f esté definido en todo t , podemos usar el teorema de Stone para construir $Q(f)$ como un operador autoadjunto en el espacio de Hilbert precuántico, es decir, será un observable cuántico. Notemos que en el caso de operadores acotados, simétrico implica autoadjunto.

El teorema de André Weil¹⁸ nos da una condición necesaria y suficiente para que exista un fibrado lineal con métrica Hermítica y conexión tal que la curvatura sea la forma simpléctica ω : que $[\frac{\omega}{2\pi\hbar}]$ sea una clase integral de cohomología. Veamos qué significa. La condición surge de considerar el transporte paralelo de una sección $s = \varphi s_0$ a lo largo de una curva cerrada γ ,

$$\varphi(t) = \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_\gamma \theta\right] \varphi(0) .$$

Aplicando el teorema de Stokes, pasamos a la integral de $d\theta = \omega$ en una superficie Σ_1 con borde γ ,

$$\varphi(t) = \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{\Sigma_1} \omega\right] \varphi(0) .$$

Considerando otra superficie Σ_2 con borde γ cuya unión con Σ_1 nos de una superficie cerrada Σ , llegamos a la condición

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{\Sigma_1} \omega\right] = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_{\Sigma_2} \omega\right] ,$$

¹⁸ Teorema de Weil: Sea (M, ω) una variedad simpléctica; la variedad es precuantizable si y solo si $[\omega/2\pi\hbar] \in H^2(M, \mathbb{Z})$, es decir, $[\omega/2\pi\hbar]$ es una clase integral de cohomología [Weil, 1958].

es decir,

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{\Sigma} \omega\right] = 1.$$

Lo que nos dice el teorema de Weil es que si se cumple la condición

$$\int_{\Sigma} \omega = 2\pi n \hbar \quad (3.5)$$

para cualquier superficie cerrada Σ entonces existe el fibrado Hermítico con conexión que necesitamos para la cuantización. Como vemos, la condición (3.5) recuerda a la condición de cuantización propuesta por Bohr y Sommerfeld en los comienzos de la cuántica,

$$\oint p_j dq^j = 2\pi \hbar n.$$

Antes de dar algunos ejemplos, vamos a mencionar una de las numerosas conexiones entre la cuantización geométrica y la integral de camino de Feynmann. El campo Hamiltoniano de f , X_f , genera un flujo $\phi_t : M \rightarrow M$. Este flujo se puede transformar de manera única, salvo una fase global, en una familia de automorfismos $\hat{\phi}_t : L \rightarrow L$ que preserve la estructura Hermítica y compatible con la conexión. Si introducimos el *Lagrangiano* de f

$$\mathcal{L}_f = \theta(X_f) - f = p_i \frac{\partial f}{\partial p_i} - f,$$

con θ la 1-forma en coordenadas canónicas, resulta que $\hat{\phi}_t$ toma la forma

$$\hat{\phi}_t(\varphi)(m) = \varphi(\phi_t(m)) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \mathcal{L}_f(\phi_{t'}(m)) dt'\right),$$

siendo $s = \varphi s_0$ una sección y m un punto de M . Vemos así que la evolución temporal de secciones de L (estados del espacio de Hilbert) viene dada por la exponencial de la acción clásica. El hecho de que el Lagrangiano se tome a lo largo de las líneas de flujo no debería importarnos, pues el flujo simplemente marca la evolución que sigue el sistema con Hamiltoniano f . Otro ejemplo de conexión con la integral de camino emerge como un límite de la construcción de los núcleos de Blattner-Kostant-Sternberg usados en cuantización geométrica y se puede encontrar en [Woodhouse, 2007, pp. 205-209].

Veamos algunos ejemplos de sistemas clásicos precuantizados y el motivo de por qué la precuantización por sí sola no es un método completamente satisfactorio de cuantización, requiriendo algunas modificaciones como la introducción de las polarizaciones.

Ejemplo 3.4. Comenzamos por el caso más sencillo: la cuantización canónica. En este caso el espacio de fases es simplemente $T^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ con forma simpléctica $\omega = dp_j \wedge dq^j$ y potencial simpléctico $\theta = p_j dq^j$. La condición de Weil se satisface trivialmente para $n = 0$ ya que ω es globalmente exacta, $\omega = d\theta$, y el borde de una superficie cerrada es vacío $\partial\Sigma = \emptyset$:

$$\int_{\Sigma} \omega = \int_{\partial\Sigma} \theta = 0.$$

La precuantización de un observable $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ es

$$\hat{f} = i\hbar X_f + \theta(X_f) + f = i\hbar \left[\frac{\partial f}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial q^j} \right] - p_j \frac{\partial f}{\partial p_j} + f, \quad (3.6)$$

en particular los operadores de posición y momento precuantizados resultan

$$\hat{q}^j = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_j} + q^j, \quad \hat{p}_j = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q^j}.$$

Los elementos del espacio de Hilbert son las secciones de L con cuadrado integrable respecto al producto interno

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{d^n q d^n p}{(2\pi\hbar)^n} \bar{s}(q, p) s(q, p),$$

es decir, las secciones dependen tanto de las variables q^j como p^j . Sin embargo, en el espacio de Hilbert que obtenemos por cuantización canónica los estados solo dependen de la posición o momento (pero no ambas a la vez) dependiendo de la representación escogida. En la próxima sección introduciremos las polarizaciones para reducir el número de variables de $2n$ a n . Otro problema que observamos en esta cuantización es que la exponencial de \hat{p}^j nos da el operador de traslación usual, pero la exponencial de \hat{q}^j no nos da la traslación en el momento por culpa del sumando q^j . El problema radica en que los operadores de posición y momento usuales actúan irreduciblemente en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$ mientras que nuestro espacio de secciones de cuadrado integrable es reducible bajo la acción de los operadores \hat{q}^j y \hat{p}_j . \diamond

Ejemplo 3.5. Seguimos con uno de los ejemplos más bonitos de (pre)cuantización geométrica: la cuantización de un sistema cuya variedad simpléctica es la esfera 2-dimensional. Veremos que la cuantización de este sistema es justamente el espín. Tomamos por tanto el sistema descrito por la esfera \mathbb{S}^2 con forma simpléctica

$$\omega = \sin \theta d\theta \wedge d\phi.$$

Como ω es la forma de superficie de una esfera de radio 1, su integral en cualquier superficie cerrada es el área de la esfera 4π . La condición de Weil (3.5) nos garantiza que para las formas simplécticas

$$\omega_n = \frac{n\hbar}{2} \omega$$

la variedad (\mathbb{S}^2, ω_n) se puede precuantizar, que es justamente la condición para la cuantización del espín de un fermión: $s = \frac{\hbar}{2}n$. El espacio de Hilbert precuántico lo componen entonces las funciones complejas sobre la esfera de cuadrado integrable $L^2(\mathbb{S}^2)$. Cuando introduzcamos las polarizaciones restringiremos este espacio de dimensión infinita a las secciones holomorfas para obtener unos espacios de dimensión finita, que serán representaciones espinoriales irreducibles del grupo $SU(2)$. \diamond

Ejemplo 3.6. El último ejemplo que vamos a tratar es la cuantización del oscilador armónico. Igual que en el ejemplo 3.4, consideramos $M = \mathbb{R}^2$ con forma canónica $\omega = dq \wedge dp$ y Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2),$$

que cumple trivialmente la condición de Weil para la existencia del fibrado lineal, que será el fibrado trivial $M \times \mathbb{C}$. La conexión Hermítica será

$$\nabla_X = X - \frac{i}{\hbar}\theta(X).$$

Si tomamos como potencial simpléctico local la 1-forma $\theta = \frac{1}{2}(qdp - pdq)$, los operadores de posición y momento cuantizados son

$$\hat{q} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{2}q, \quad \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q} + \frac{1}{2}p,$$

y el Hamiltoniano cuantizado

$$\hat{H} = -i\hbar \left(p \frac{\partial}{\partial q} - q \frac{\partial}{\partial p} \right).$$

Teniendo en cuenta que

$$q \frac{\partial}{\partial p} - p \frac{\partial}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial \phi}$$

es simplemente el momento angular, las autofunciones tienen la forma

$$\psi_n = f(r)e^{-in\phi},$$

donde f es una función arbitraria tal que $\int_0^\infty r|f(r)|^2 < \infty$. Nos encontramos aquí otro problema de la precuantización, el Hamiltoniano cuantizado del oscilador armónico no está acotado inferiormente, mientras que sabemos que físicamente solo son posibles valores de $n \geq 0$. \diamond

3.3. Polarizaciones y cuantización

Como hemos visto en la sección anterior, el espacio de Hilbert precuantizado no puede ser el espacio de estados cuántico ya que debería tener la misma dimensión que el espacio de configuración. La idea es restringir el espacio cuantizado añadiendo una estructura geométrica adicional, las polarizaciones, que marcarán unas direcciones privilegiadas en nuestra variedad y exigiremos que los estados cuantizados no cambien a lo largo de estas direcciones (para ello requerimos la derivada covariante). Estas direcciones vendrán marcadas por una distribución n -dimensional en el fibrado tangente de la variedad.

Definición 3.7. Una distribución de rango n en M es un subfibrado de TM de rango n , es decir, un fibrado vectorial tal que cada fibra es un subespacio de dimensión n del espacio tangente $T_m M$ y que varía suavemente con el punto m .

Una distribución \mathcal{P} se dice *involutiva* si cualesquiera secciones de \mathcal{P} cumplen que su corchete de Lie es también una sección de \mathcal{P} . Recordando que $\Gamma(\mathcal{P})$ denota el conjunto de secciones de \mathcal{P} , la condición de \mathcal{P} involutiva es

$$X, Y \in \Gamma(\mathcal{P}) \quad \Rightarrow \quad [X, Y] \in \Gamma(\mathcal{P}) . \quad (3.7)$$

Se dice que una distribución es integrable si localmente existe una subvariedad, llamada variedad integral, cuyo fibrado tangente sea la distribución. El teorema de Frobenius nos dice que una distribución es involutiva si y solo si es integrable [Lee, 2013, cap. 19].

Tomamos pues una distribución \mathcal{P} y probamos a restringir el espacio de funciones cuantizables considerando solo las funciones φ (secciones de L) que son constantes en la distribución:

$$\nabla_X \varphi = 0$$

para toda sección X de \mathcal{P} . Si escogemos una carta en la que el potencial θ cumpla $\theta(\varphi) = 0$, la condición anterior se traduce en

$$X(\varphi) = 0 .$$

Para que este sistema de ecuaciones diferenciales tenga solución y puedan existir funciones φ constantes con la polarización, debemos pedir que la distribución sea integrable y por tanto que sea involutiva (3.7). Recordando que la forma de curvatura es (3.4), la condición anterior implica que si φ es constante en la polarización entonces

$$\omega(X, Y)\varphi = 0$$

para todas las secciones X, Y de \mathcal{P} . La condición $\omega(X, Y) = 0$ en la polarización se denomina condición *Lagrangiana*.

Estas condiciones para polarizaciones reales son en general muy restrictivas, así que como nos interesan secciones complejas de L , podemos probar a tomar una distribución compleja, esto es, una distribución del fibrado tangente complejo $TM^{\mathbb{C}}$, en el que las fibras son los espacios tangentes complejos $T_m M \otimes \mathbb{C}$. Considerar directamente distribuciones complejas también nos será útil cuando cuanticemos variedades de Kähler. Resumiendo todo lo visto sobre polarizaciones y añadiendo alguna cuestión técnica:

Definición 3.8. Sea (M, ω) una variedad simpléctica. Una polarización \mathcal{P} sobre M es una distribución de $TM^{\mathbb{C}}$ tal que:

1. Es Lagrangiana: para cada $m \in M$, la dimensión compleja de \mathcal{P}_m es n y $\omega(X, Y) = 0$ para cualesquiera secciones de \mathcal{P} .
2. Es involutiva, $[X, Y] \in \mathcal{P}$.
3. La dimensión de $\mathcal{P}_m \cap \bar{\mathcal{P}}_m$ es constante para todo $m \in M$, siendo $\bar{\mathcal{P}}_m$ el conjugado complejo de \mathcal{P}_m .

Notemos que si \mathcal{P} es una polarización, entonces $\bar{\mathcal{P}}$ también es una polarización. Los estados cuantizados serán las secciones del fibrado lineal complejo cuya derivada covariante sea 0 en las direcciones de la polarización. Los operadores que actúen sobre este nuevo espacio deberán preservar la polarización, es decir, si actúan sobre un estado polarizado el resultado debe ser otro estado polarizado:

$$\nabla_X \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla_X(\hat{f}\varphi) = \left(X - \frac{i}{\hbar}\theta(X)\right)\left(i\hbar X_f + \theta(X_f) + f\right)\varphi = 0 \quad (3.8)$$

siendo $X \in \Gamma(\mathcal{P})$ una sección de \mathcal{P} y \hat{f} la cuantización del observable f . Desarrollando la expresión anterior resulta que (3.8) se cumple si y solo si $\nabla_{[X_f, X]}\varphi = 0$, y esto si y solo si $[X_f, X] \in \Gamma(\mathcal{P})$ para cualquier $X \in \Gamma(\mathcal{P})$. Intuitivamente, podemos decir que el flujo del campo Hamiltoniano (la evolución del sistema) debe conservar la polarización. Llamaremos al conjunto de observables clásicos que cumplen esta propiedad $C_{\mathcal{P}}^{\infty}(M)$. Los **observables cuantizados** serán así los observables precuantizados restringidos a la polarización. Ahora que sabemos cuantizar tanto estados como observables veamos algunos ejemplos de cuantización y cómo aún quedan problemas por resolver.

Ejemplo 3.9. Retomamos el ejemplo 3.4 de la cuantización del fibrado cotangente T^*Q con forma canónica $\omega = dp_j \wedge dx^j$ y potencial simpléctico $\theta = p_j dq^j$. Escogeremos por conveniencia una polarización real, es decir, tal que $\mathcal{P} = \bar{\mathcal{P}}$. En coordenadas locales, las derivadas parciales respecto de las variables de momento, $\partial/\partial p_j$ generan la llamada *polarización vertical* de T^*Q . Puesto que la generan n vectores, es de dimensión n . Además, puesto que

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial p_j}, \frac{\partial}{\partial p_k}\right) = 0,$$

la distribución es Lagrangiana en cada punto. Al ser real, la dimensión de $\mathcal{P}_m \cap \bar{\mathcal{P}}_m$ es constante. Finalmente, para ver que es involutiva notamos que el corchete de Lie

$$[X, Y] = (XY^j - YX^j)\frac{\partial}{\partial p_j}$$

de dos campos vectoriales de la forma $f_j \partial/\partial p_j$ es de nuevo una combinación lineal de los vectores $\partial/\partial p_j$. Los estados del sistema cuántico serán entonces las secciones φ de L tal que

$$\nabla_{\partial p_j} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial p_j} - \frac{i}{\hbar}\theta\left(\frac{\partial}{\partial p_j}\right)\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial p_j} = 0,$$

ya que θ no tiene término en dp_j . Es decir, los estados cuantizados serán las secciones que no dependen del momento, solo de la posición, y lo identificaremos con el espacio usual $L^2(Q)$. Notemos que debemos modificar la medida, integrando solo sobre q para que las integrales no diverjan. Este problema se soluciona con la introducción de las *medias formas* (*half-forms*)¹⁹, que modifica la medida de la integral para darnos el conocido producto

¹⁹ La introducción de las medias formas requiere un considerable bagaje matemático y no entraremos en ello. Vemos que uno de los problemas de la cuantización geométrica son los sucesivos “parches” matemáticos que hay que ir añadiendo para obtener los simples resultados de la cuantización canónica, que por supuesto son mucho más limitados.

interno

$$\int_Q |\varphi(q)|^2 dq$$

La condición para que un observable cualquiera $f \in C^\infty(M)$ preserve la polarización es que

$$\begin{aligned} \left[X_f, \frac{\partial}{\partial p_k} \right] \in \Gamma(\mathcal{P}) \quad \forall k &\Leftrightarrow \left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q^j} \right) \frac{\partial}{\partial p_j} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_j} \right) \frac{\partial}{\partial q^j} \in \Gamma(\mathcal{P}) \quad \forall k \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_k} = 0, \end{aligned}$$

es decir, que f sea como mucho lineal en p_j ,

$$f(q, p) = f^0(q) + f^j(q) p_j.$$

La cuantización de un observable f es igual a (3.6) eliminando el término $\partial/\partial p_j$, ya que los estados solo dependen de q . Hemos eliminado el término que sobraba, obteniendo la cuantización usual para los operadores de posición y momento en representación de posición,

$$\hat{q}^j = q^j, \quad \hat{p}_j = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q^j}.$$

La cuantización de un observable cualquiera actuando sobre un estado $\varphi(q)$ es

$$\hat{f}\varphi(q) = (f^0\varphi)(q) - i\hbar f^j \left(\frac{\partial}{\partial q^j} \varphi \right)(q).$$

Concluimos que el número de observables que preservan los estados tras incluir la polarización es limitado, en particular, la energía cinética $p^2/2m$ no la preserva. Dicho de otra forma, cuando la función de onda evoluciona deja de depender solo de la posición para depender también del momento.

Notemos que si en vez de haber tomado el potencial simpléctico $\theta = p_j dq^j$ hubiésemos tomado $\theta' = q^j dp_j$, hubiésemos obtenido la representación en momento de las funciones de onda $\varphi(p)$ y los operadores

$$\hat{q}^j = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_j}, \quad \hat{p}_j = p_j. \quad \diamond$$

Como ya mencionamos, los ejemplos más útiles de cuantización geométrica se aplica a variedades de Kähler. Ya hemos visto como determinadas polarizaciones nos dan la representación en posición y momento de la mecánica cuántica, y aún podemos dar otra más con la que obtenemos la representación holomorfa o de Bargmann. Con la cuantización holomorfa se puede construir el espacio de Fock de bosones y aplicarlo al oscilador armónico, obteniendo los operadores de creación y aniquilación.

Ejemplo 3.10. En este ejemplo obtendremos el espacio de Fock de bosones y la representación de Bargmann cuantizando una variedad de Kähler. Sea M una variedad de Kähler con métrica plana δ_{jk} y coordenadas canónicas q^j y p_j . La forma simpléctica y el potencial simpléctico se pueden escribir en términos del potencial Kähleriano $K = \frac{1}{2}\bar{z}_j z_j$ (entendiendo que se suma en el índice repetido j),

$$\omega = dp_j \wedge dq^j = \frac{i}{2} dz_j \wedge d\bar{z}_j = -i\partial\bar{\partial}K, \quad \theta = -i\partial K = -\frac{i}{2}\bar{z}_j dz_j.$$

Consideramos la polarización generada por las derivadas en las coordenadas antiholomorfas $\partial/\partial\bar{z}_j$. Vemos que $\theta(\partial/\partial\bar{z}_j) = 0$, así que la derivada covariante en el gauge θ a lo largo de un vector base de la polarización $X = \partial/\partial\bar{z}_j$ actuando sobre una sección φ de L es

$$\nabla_X \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}_j},$$

y será igual a 0 si y solo si la función φ es holomorfa $\varphi(z)$. Si cambiamos de gauge al dado por el potencial simpléctico

$$\theta' = \frac{1}{2}(p_j dq^j - q^j dp_j) = \theta + \frac{i}{2}dK,$$

vemos que las secciones polarizadas cambian por un factor de fase $\exp(i(iK/2)/\hbar)$ (recordemos la discusión vista en la sección anterior sobre los gauges),

$$\varphi'(z, \bar{z}) = \varphi(z) \exp\left(-\frac{z_j \bar{z}_j}{4\hbar}\right).$$

El espacio de Hilbert de secciones cuantizadas debe ser tal que su norma sea finita respecto a la medida de Liouville $d\lambda = \omega^n / (2\pi\hbar)^n$,

$$\int_{\mathbb{C}^n} \bar{\psi}'(z, \bar{z}) \varphi'(z, \bar{z}) d\lambda < \infty,$$

es decir, las funciones holomorfas $\varphi(z)$ cuya norma respecto al peso $\exp\left(-\frac{|z|^2}{4\hbar}\right)$ sea finita,

$$\int_{\mathbb{C}^n} \bar{\varphi}(z) \varphi(z) \exp\left(-\frac{|z|^2}{4\hbar}\right) d\lambda < \infty.$$

Vemos que este espacio de Hilbert es justamente el espacio de Bargmann visto en la sección 2.4 generalizado a varias dimensiones. En este caso no necesitamos reducir el dominio de integración ya que la métrica δ_{jk} es definida positiva y por tanto existen funciones para las que la integral converge, por ejemplo, los polinomios. Una función de este espacio, por ser holomorfa, se puede escribir como

$$\varphi(z) = \varphi^0 + \varphi^j z_j + \frac{1}{2!} \varphi^{jk} z_j z_k + \dots,$$

así que el espacio formado por las funciones simétricas en los coeficientes del desarrollo anterior no es más que el espacio de Fock de bosones $\mathcal{F} = \mathbb{C} \otimes S_1^+ \mathcal{H}_1 \otimes S_2^+ \mathcal{H}_2 \otimes \dots$ visto

en el primer capítulo.

El campo Hamiltoniano de un observable f viene dado por

$$X_f = 2i \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} \frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial f}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right),$$

y la condición para f que se pueda cuantizar es que $[X_f, \partial/\partial z_j] \in \Gamma(P)$, lo que nos lleva a que f debe contener un término $f^{jk} z_j \bar{z}_k$ y el resto términos lineales en z_j y \bar{z}_j . Tres ejemplos importantes son la cuantización de z_j , \bar{z}_j y $|z|^2/2$, que en el gauge θ' actúan sobre una sección $\varphi(z)$ como los operadores de creación, destrucción y Hamiltoniano del oscilador armónico (salvo el sumando $1/2$) en la representación de Bargmann:

$$Q(z_j)\varphi(z) = z_j\varphi(z), \quad Q(\bar{z}_j)\varphi = 2\hbar \frac{\partial}{\partial z_j} \varphi, \quad Q(|z|^2/2)\varphi = \hbar z_j \frac{\partial}{\partial z_j} \varphi.$$

Sin embargo, la cuantización no es plenamente satisfactoria: nos falta un sumando en la energía del oscilador. El término $1/2$ se consigue con la llamada *corrección metapléctica*. Brevemente, si X_j son n campo vectoriales que generan la polarización, tomamos la matriz A_{lk} tal que $[X_j, X_k] = A_{lk} X_l$ y definimos la cuantización de un observable f como

$$Q(f) = -i\hbar \nabla_{X_f} + f - \frac{i\hbar}{2} \text{tr}(A).$$

Esta modificación aplicada al operador $Q(|z|^2/2)$ nos da el Hamiltoniano conocido del oscilador armónico n -dimensional

$$\hat{H} = \hbar \left(z_j \frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{n}{2} \right).$$

El espectro de este operador recupera el espectro del oscilador armónico en cada coordenada z_j

$$\left\{ \hbar \left(m + \frac{1}{2} \right) \mid m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\},$$

que es discreto y no negativo. Mejoramos así el resultado del ejemplo 3.6, en el que obteníamos un espectro no acotado inferiormente. \diamond

Ejemplo 3.11. Retomamos el ejemplo 3.5 de la cuantización del “espín”. Esta vez consideraremos la esfera \mathbb{S}^2 como una variedad de Kähler cuyas coordenadas vienen dadas por la proyección estereográfica sobre \mathbb{R}^2 . No podemos dar unas coordenadas globales en toda la esfera, necesitaremos como mínimo dos cartas que la cubran entera salvo los polos norte y sur, respectivamente. La carta que cubre salvo el polo norte ($x_3 = 1$) es

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}, \quad \bar{z} = \frac{x_1 - ix_2}{1 - x_3},$$

siendo (x_1, x_2, x_3) un punto de la esfera visto como un objeto en \mathbb{R}^3 . Las coordenadas para la otra carta son las mismas con signo opuesto en el denominador. Atendiendo a la condición de Weil para la precuantización, la familia de formas simplécticas que la admiten son

$$\omega_{(n)} = i\hbar n \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 + \bar{z}z)^2},$$

con potencial Kähleriano $K = n\hbar \ln(1 + z\bar{z})$ y potencial simpléctico $\theta = -i\partial K = -in \frac{\bar{z}dz}{1+z\bar{z}}$. Si tomamos de nuevo la polarización generada por la derivada antiholomorfa $\partial/\partial\bar{z}$, las funciones de onda son $\varphi(z) \exp(-K/2\hbar)$ con $\varphi(z)$ holomorfa. El producto interno vuelve a ser

$$\frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1+z\bar{z})^2} \bar{\psi}(z)\varphi(z) e^{-K/\hbar} = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1+z\bar{z})^{n+2}} \bar{\psi}(z)\varphi(z) e^{-K/\hbar}.$$

Podemos probar a hacer un cambio de variable a coordenadas polares $z = Re^{i\alpha}$, $|z|^2 = R^2$, y tomar el producto interno de dos monomios z^m y $z^{m'}$,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{R dR \wedge d\alpha}{(1+R^2)^{n+2}} R^{m+m'} e^{i(m'-m)\alpha} = \delta_{mm'} \frac{\Gamma(1+m)\Gamma(1+n-m)}{\Gamma(n+2)}.$$

Resulta que la función gamma no está definida en los enteros no positivos, así que las funciones holomorfas que cuanticemos no pueden tener términos de orden mayor que n o tendríamos una singularidad en el numerador. Si normalizamos los estados $\{1, z, \dots, z^n\}$ obtenemos una base ortonormal de nuestro espacio de Hilbert que coincide con los estados de espín que se obtienen por cuantización de estados coherentes [Gazeau, 2009, cap. 6; Radcliffe, 1971]. Si definimos $j = n/2$, podemos dar la siguiente interpretación como el espín de una partícula siguiendo [Nair, 2016, p. 24]. Los operadores

$$J_+ = -n \frac{z}{1+|z|^2}, \quad J_- = -n \frac{\bar{z}}{1+|z|^2}, \quad J_3 = -\frac{n}{2} \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}$$

tienen cuantización

$$Q(J_+) = |z|^2 \partial_z - n z, \quad Q(J_-) = -\partial_{\bar{z}}, \quad Q(J_3) = z \partial_z - \frac{n}{2},$$

que son representaciones unitarias irreducibles del álgebra $\mathfrak{su}(2)$ con dimensión $n+1 = 2j+1$, siendo j el número cuántico de espín. \diamond

Capítulo 4

Cuantización Integral Covariante

Ante los problemas que presenta la cuantización geométrica, presentamos un enfoque distinto a la cuantización que es actualmente área de investigación: la cuantización integral, en concreto la cuantización integral covariante. Las bases de este método están en la cuantización por estados coherentes, con origen en los años 60 del siglo pasado con los trabajos de Klauder, Sudarshan y Glauber, este último mientras estudiaba los estados cuánticos de la radiación electromagnética y que le merecieron el premio Nobel en 2005. La cuantización integral surge entonces como una generalización de la cuantización por estados coherentes, sustituyendo estos por una familia de operadores más general. Si la cuantización integral se realiza en un grupo buscando la propiedad de covarianza surge entonces la cuantización integral covariante. Sentaremos las bases de estos métodos y daremos unos ejemplos introductorios, fundamentales para aplicaciones más avanzadas como la que se puede encontrar en [del Olmo y Gazeau, 2020] para cuantizar un espacio-tiempo Anti de Sitter 1+1 o en [Bergeron, Dapor *et al.*, 2014; Gazeau, 2016] con aplicaciones en cosmología cuántica.

Las referencias utilizadas para este capítulo se detallan a continuación. Para una introducción a los estados coherentes consultar la referencia [Gazeau, 2009]. Una introducción sencilla a la cuantización integral se puede ver en [Gouba, 2019] y otras más avanzadas en [Bergeron, Curado *et al.*, 2014; Gazeau y Heller, 2014]. Los ejemplos de cuantización de \mathbb{S}^1 y \mathbb{S}^2 se pueden consultar en [Gazeau y Heller, 2014]. El ejemplo de la cuantización integral aplicada a cosmología puede encontrarse en [Bergeron, Dapor *et al.*, 2014; Gazeau, 2014; Gazeau, 2016]. Finalmente, el ejemplo de cuantización del grupo de Weyl-Heisenberg puede encontrarse en [Bergeron y Gazeau, 2014; Gazeau, 2014].

4.1. Cuantización por estados coherentes

Para comprender la cuantización integral vamos a comenzar introduciendo brevemente los estados coherentes. Consideramos un espacio X sobre el que definimos el espacio de Hilbert \mathcal{H} de funciones $\phi : X \rightarrow \mathbb{C}$ de cuadrado integrable respecto a cierta medida $d\mu$,

$$\int_X |\phi(x)|^2 d\mu(x).$$

Para construir los estados coherentes deseamos imponer dos condiciones sobre nuestro espacio de Hilbert:

1. Para todo $\phi \in \mathcal{H}$ y $x \in X$, $\phi(x)$ está bien definido.

2. La aplicación que evalúa cada función en x

$$\delta_x(\phi) = \phi(x)$$

es continua para casi todo $x \in X$.

Por ejemplo, la primera condición se cumple si el espacio \mathcal{H} es de funciones continuas y la segunda si \mathcal{H} es de dimensión finita. Ahora bien, el teorema de representación de Riesz nos dice que cualquier funcional continuo ϕ tiene asociado un único vector v_ϕ tal que $\phi(v) = \langle v_\phi | v \rangle$, siendo $\langle \cdot | \cdot \rangle$ el producto interno en el espacio de Hilbert. Así, podemos asignar un único vector $p_x \in \mathcal{H}$ a nuestro funcional de evaluación (que funciona como una delta de Dirac),

$$\langle p_x | \phi \rangle = \phi(x) .$$

Definimos entonces los **estados coherentes** como los vectores p_x normalizados

$$|x\rangle \equiv \frac{|p_x\rangle}{N(x)^{1/2}} \quad \text{siendo} \quad N(x) = \langle p_x | p_x \rangle$$

(en notación Bra-Ket de Dirac). La propiedad más importante de los estados coherentes es que se pueden usar para construir una resolución de la identidad

$$I = \int_X N(x) |x\rangle \langle x| d\mu(x) .$$

Efectivamente, dado cualquier estado $|\phi\rangle$,

$$\int_X N(x) \langle \phi | x \rangle \langle x | \phi \rangle d\mu(x) = \int_X \frac{N(x)}{N(x)} \bar{\phi}(x) \phi(x) d\mu(x) = \int_X \bar{\phi}(x) \phi(x) d\mu(x) = \langle \phi | \phi \rangle .$$

El ejemplo más conocido de este tipo de estados coherentes son los autoestados del operador de posición $|x\rangle$ habituales, que actúan sobre un vector ket dándonos su representación de posición $\langle x | \phi \rangle = \phi(x)$, es decir, $|x\rangle$ es la delta de Dirac que evalúa ϕ en x . Como es bien conocido, los proyectores sobre estos estados cumplen la propiedad de resolución de la identidad.

Existen otras formas de construir estados coherentes. Por ejemplo, si tenemos una base ortonormal $\{\phi_n\}$ de \mathcal{H} que cumple

$$N(x) = \sum_n |\phi_n(x)|^2 < \infty ,$$

automáticamente se cumplen las condiciones 1 y 2 mencionadas. En esta base, se pueden definir los estados coherentes

$$|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{N(x)}} \sum_n \bar{\phi}_n(x) \phi_n(x) .$$

Podemos reescribir estos estados en términos de una base ortonormal $|e_n\rangle$ en correspondencia con las funciones ϕ_n ,

$$\phi_n(x) = \sqrt{N(x)} \langle x | e_n \rangle ,$$

como

$$|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{N(x)}} \sum_n \bar{\phi}_n(x) |e_n\rangle$$

Encontramos un ejemplo de estos estados coherentes en el espacio de Bargmann, donde la base ortonormal son los estados número $|n\rangle$ y las funciones ortonormales $\phi_n = \bar{z}^n / \sqrt{n!}$. Teniendo en cuenta que $N(x) = e^{|z|^2}$, los estados coherentes son

$$|z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

Como cabría esperar, se cumple la resolución de la identidad

$$\int_{\mathbb{C}} |z\rangle\langle z| \frac{d^2z}{\pi} = \sum_{mm'} |n\rangle\langle n'| \underbrace{\int_{\mathbb{C}} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \frac{\bar{z}^{n'}}{\sqrt{n'!}} e^{-|z|^2} \frac{d^2z}{\pi}}_{\delta_{nn'}} = \sum_n |n\rangle\langle n| = I.$$

Una vez que tenemos los estados coherentes podemos comenzar a cuantizar observables clásicos. Dada una función $f(x)$, le asignamos un operador A_f en \mathcal{H} mediante la resolución de la identidad

$$f \mapsto A_f = \int_X f(x) |x\rangle\langle x| d\nu(x), \quad (4.1)$$

redefiniendo la medida como $d\nu(x) = N(x)d\mu(x)$. Vemos que se cumplen la deseada propiedad de linealidad y que la cuantización de la constante 1 es la identidad I . Puesto que la propiedad que nos da la cuantización es la resolución de la identidad, podemos tomar un conjunto de vectores en el espacio de Hilbert que la cumplan para emprender la cuantización. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 4.1. Consideramos el plano \mathbb{R}^2 . Como es bien sabido, los vectores

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\pi/2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

forman una base de \mathbb{R}^2 que nos dan la resolución de la identidad

$$|0\rangle\langle 0| + |\pi/2\rangle\langle \pi/2| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sin embargo, esta no es la única forma de describir vectores en el plano. Podemos tomar un sistema de N generadores

$$\left| \frac{2\pi k}{N} \right\rangle = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \end{pmatrix}, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (4.2)$$

Con el peso $2/N$, se obtiene la resolución de la identidad

$$\frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left| \frac{2\pi k}{N} \right\rangle \left\langle \frac{2\pi k}{N} \right| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si tomamos el límite $N \rightarrow \infty$ y pasamos a una variable angular continua

$$|\theta\rangle = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \Rightarrow |\theta\rangle\langle\theta| = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Si integramos con el peso $1/\pi$ obtenemos correctamente la resolución de la identidad

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\theta\rangle\langle\theta| d\theta = \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} \int \cos^2 \theta d\theta & \int \cos \theta \sin \theta d\theta \\ \int \cos \theta \sin \theta d\theta & \int \sin^2 \theta d\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Describir el espacio de Hilbert en términos de estos estados coherentes nos permite cuantizar fácilmente observables mediante (4.1) con la medida $d\nu(\theta) = d\theta/\pi$. Por ejemplo, la cuantización de la función angular θ es la matriz

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \pi & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \pi \end{pmatrix},$$

con autovalores (resultados de una posible medida de θ) $\pi \pm 1/2$. ◇

4.2. Cuantización integral covariante

La cuantización integral mantiene la esencia de la cuantización por estados coherentes y va un paso más allá, reemplazando los proyectores $|x\rangle\langle x|$ por una familia $\{M(x) | x \in X\}$ de operadores acotados en un espacio de Hilbert \mathcal{H} que resuelven la identidad respecto a una medida $d\nu(x)$,

$$\int_X M(x) d\nu(x) = I.$$

Definimos entonces la cuantización de una función compleja $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ como la asignación

$$f \mapsto A_f = \int_X f(x) M(x) d\nu(x),$$

entendida como la forma bilineal B_f ²⁰ que asigna a dos estados ψ_1 y ψ_2 el escalar

$$B_f(\psi_1, \psi_2) = \int_X f(x) \langle \psi_1 | M(x) | \psi_2 \rangle,$$

que ha de estar definida por lo menos en un denso de \mathcal{H} .

Nos interesaremos principalmente por las familias de operadores semidefinidos positivos y con traza unidad, es decir, operadores de densidad, que denotaremos $\rho(x)$. En este caso, si f es real y acotada superior o inferiormente, podemos extender de forma única A_f a un operador autoadjunto en todo \mathcal{H} (en principio solo está definido en un denso). Es la llamada extensión de Friedrich [Reed y Simon, 2007, p. 177]. Aunque no entraremos en

²⁰ En realidad, sesquilineal, ya que si $a \in \mathbb{C}$ entonces $B_f(a\psi_1, \psi_2) = aB_f(\psi_1, \psi_2)$ y $B_f(\psi_1, a\psi_2) = \bar{a}B_f(\psi_1, \psi_2)$.

muchos detalles de *decuantización*, la vuelta al límite clásico se realiza a través del llamado símbolo covariante de Berezin

$$A_f \mapsto \check{f}(x) = \int_X f(x') \text{Tr}(\rho(x)\rho(x')) d\nu(x'). \quad (4.4)$$

La cuantización integral covariante se centra en familias de operadores construidas sobre un grupo de Lie G . Puesto que los grupos de Lie son variedades diferenciables (se pueden parametrizar localmente de forma continua), podemos definir una integración en G . De hecho, existe una medida invariante por la izquierda $d\mu(g)$, llamada *medida de Haar*. Una medida es invariante por la izquierda si la medida de cualquier conjunto es invariante bajo la traslación izquierda de todos los elementos del conjunto por un elemento $g \in G$. Si tenemos una representación unitaria e irreducible $g \mapsto U(g)$ de G en \mathcal{H} y un operador M en \mathcal{H} , podemos construir una familia de operadores por medio de la representación U :

$$M(g) \equiv U(g)MU^\dagger(g), \quad g \in G.$$

Definimos ahora otro operador

$$R \equiv \int_G M(g) d\mu(g)$$

y suponemos que está definido al menos en un denso de \mathcal{H} . Usando la invarianza por la izquierda de la medida vemos que se cumple

$$U(g_0)RU^\dagger(g_0) = \int_{g_0G} M(g_0g) d\mu(g_0g) = \int_G M(g_0g) d\mu(g) = R, \quad \forall g_0 \in G,$$

ya que $U(g_0)U(g) = U(g_0g)$ por ser una representación. Como la representación es unitaria deducimos que R conmuta con todos los operadores $U(g)$, y aplicando el lema de Schur concluimos que $R = cI$, siendo I la identidad y c la constante

$$c = \int_G \text{Tr}(\rho_0 M(g)) d\mu(g),$$

donde ρ_0 es un operador semidefinido positivo tal que la integral converge. Así, la familia $M(g)$ resuelve la identidad respecto a la medida $d\nu(g) = d\mu(g)/c$,

$$\int_G M(g) d\nu(g) = I.$$

Para entender este novedoso método de cuantización vamos a estudiar la cuantización integral covariante de algunos grupos.

4.2.1. Cuantización de la circunferencia

Para desarrollar una intuición sobre cómo funciona la cuantización integral covariante comenzamos por el ejemplo más sencillo que podíamos pensar: la circunferencia \mathbb{S}^1 . Visualizaremos \mathbb{S}^1 como el grupo de Lie de números complejos de módulo unidad con el producto. Será un espacio con medida

$$d\nu(x) = \frac{d\theta}{\pi}, \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Consideramos el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$ sobre el que actúa el grupo de rotaciones $SO(2)$ con la representación usual de matrices 2×2 . La matriz densidad más general que podemos escribir en \mathbb{R}^2 es

$$\rho_{r,\phi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{r}{2}\cos 2\phi & \frac{r}{2}\sin 2\phi \\ \frac{r}{2}\sin 2\phi & \frac{1}{2} - \frac{r}{2}\cos 2\phi \end{pmatrix},$$

en coordenadas polares $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \phi < \pi$ (consultar [Gazeau y Heller, 2014, p. 23]). Estas matrices tienen la propiedad de *covarianza*, es decir, dada una rotación

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \in SO(2)$$

de ángulo θ , se comprueba que

$$R(\theta)^{-1} \rho_{r,\phi} R(\theta) = \rho_{r,\phi+2\theta} \equiv \rho_{r,\phi}(\theta).$$

Si integramos respecto a la medida $d\nu$ obtenemos la resolución de la identidad

$$\int_0^{2\pi} \rho_{r,\phi}(\theta) \frac{d\theta}{\pi} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{r}{2}\cos 2(\phi + \theta) & \frac{r}{2}\sin 2(\phi + \theta) \\ \frac{r}{2}\sin 2(\phi + \theta) & \frac{1}{2} - \frac{r}{2}\cos 2(\phi + \theta) \end{pmatrix} \frac{d\theta}{\pi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ya que los términos con senos y cosenos tienen promedio 0.

Usando esta resolución de la identidad, un observable $f(\theta)$ sobre la circunferencia tiene asignado el observable cuantizado

$$f \mapsto A_f = \int_0^{2\pi} f(\theta) \rho_{r,\phi}(\theta) \frac{d\theta}{\pi} = \begin{pmatrix} \langle f \rangle + \frac{r}{2}C_c(f) & \frac{r}{2}C_s(f) \\ \frac{r}{2}C_s(f) & \langle f \rangle - \frac{r}{2}C_c(f) \end{pmatrix},$$

siendo $\langle f \rangle$ la media de f y C_c, C_s las funciones

$$\langle f \rangle = \int_0^{2\pi} \frac{f(\theta)}{2\pi} d\theta, \quad C_c(f) = \int_0^{2\pi} f(\theta - \phi) \cos 2\theta \frac{d\theta}{\pi}, \quad C_s(f) = \int_0^{2\pi} f(\theta - \phi) \sin 2\theta \frac{d\theta}{\pi}.$$

El ejemplo más sencillo de función que podemos pensar es la propia variable angular θ , cuyo operador cuantizado resulta

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \pi + \frac{r}{2}\cos 2\phi & \frac{r}{2}\sin 2\phi \\ \frac{r}{2}\sin 2\phi & \pi - \frac{r}{2}\cos 2\phi \end{pmatrix}.$$

Sus autovalores, es decir, los posibles resultados de una medida de este operador son $\pi \pm \frac{r}{2}$ y se corresponden a los autovectores $|\phi \mp \frac{\pi}{4}\rangle$ vistos en (4.3).

4.2.2. Cuantización de la esfera

El grupo $SU(2)$ es difeomorfo a la 3-esfera y por tanto es una variedad de dimensión 3, cuya medida de Haar es la medida de superficie en la 3-esfera. Este grupo es isomorfo a los cuaterniones unidad y nos será útil esta identificación a la hora de cuantizar. Damos por ello unas breves nociones sobre el grupo de cuaterniones \mathbb{H} . Es un grupo multiplicativo, isomorfo a $\mathbb{R}_+ \times SU(2)$ y a \mathbb{R}^4 . En la base usual de \mathbb{R}^4 , un cuaternión se puede escribir como una cuaterna $q = (q_0, q_1, q_2, q_3) \equiv (q_0, \vec{q})$ en la base usual de \mathbb{R}^4 . El isomorfismo con $\mathbb{R}_+ \times SU(2)$ viene dado por la identificación de la base usual de \mathbb{R}^4 con la matriz identidad y las matrices de Pauli

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow e_0, \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow e_1, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow e_2, \quad \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \leftrightarrow e_3. \quad (4.5)$$

La operación de grupo es la multiplicación

$$qq' = (q_0q'_0 - \vec{q} \cdot \vec{q}', q'_0\vec{q} + q_0\vec{q}' + \vec{q} \times \vec{q}') .$$

También nos vendrá bien la operación de conjugación $\bar{q} = (q_0, -\vec{q})$, la norma $\|q\|^2 = q\bar{q}$ y la inversión $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}$. Los cuaterniones unidad serán entonces aquellos con norma 1 y constituirán un subgrupo isomorfo a $SU(2)$.

El interés especial de los cuaterniones en física es que se pueden usar para rotar objetos en \mathbb{R}^3 de forma más eficiente que con matrices (se hacen menos operaciones). Esto se hace tomando un cuaternión unidad

$$\xi = \left(\cos \frac{\omega}{2}, \sin \frac{\omega}{2} \hat{n} \right) \in SU(2),$$

que actúa sobre un vector $(0, \vec{r}) \in \mathbb{R}^3$ rotándolo un ángulo ω perpendicular a un eje \hat{n} :

$$(0, \vec{r}') = \xi(0, \vec{r})\bar{\xi}.$$

Si tenemos por ejemplo un vector

$$\hat{n} = (\sin \theta \cos \phi, \cos \theta)$$

podemos verlo como el vector que apunta al polo norte, e_3 , rotado con el cuaternión

$$(0, \hat{n}) = \xi_n(0, e_3)\bar{\xi}_n, \quad \xi_n = \left(\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} u_\phi \right),$$

siendo $u_\theta = (-\sin \phi, \cos \phi, 0)$.

Volvamos a nuestra cuantización. Tomaremos como espacio de Hilbert $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$, sobre el que actúa la representación anterior del grupo $SU(2)$. La bola unidad $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^3$ se puede usar para parametrizar las funciones de densidad 2×2 tomando un vector $\vec{d} \in \mathbb{B}$ ($\|\vec{d}\| \leq 1$). Una matriz de densidad ρ se puede escribir

$$\rho = \frac{1}{2}(I - iD),$$

siendo D la matriz asociada al cuaternión $(0, \vec{d})$ mediante la correspondencia (4.5)

$$D = \begin{pmatrix} id^3 & id^1 - d^2 \\ id^1 + d^2 & -id^3 \end{pmatrix}.$$

Ahora, mediante la representación matricial de los cuaterniones ξ podemos definir la familia de matrices densidad

$$\rho(\xi) \equiv \xi \rho \bar{\xi} = \frac{1}{2}(I - i\xi D \bar{\xi})$$

En nuestro caso queremos construir una familia de operadores sobre la esfera \mathbb{S}^2 , así que nos limitaremos a restringir los cuaterniones ξ a los correspondientes a las rotaciones que llevan el vector e_3 a cualquier vector en la esfera \hat{n} . La integral para un vector $\vec{d} = (x, y, z)$ (con el que construimos ρ) es entonces

$$\int_{\mathbb{S}^2} \rho(\xi) \frac{\sin \theta d\theta d\phi}{2\pi} = \begin{pmatrix} 1 & x + iy \\ x - iy & 1 \end{pmatrix},$$

donde se ha usado la representación matricial de ξ

$$\xi = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & (-\cos \phi - i \sin \phi) \sin \frac{\theta}{2} \\ (\cos \phi - i \sin \phi) \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

Vemos pues, que para tener una resolución de la identidad debemos tomar $\vec{d} = (0, 0, d)$ con $0 \leq d \leq 1$. Con esta restricción ya tenemos la deseada resolución de la identidad

$$\int_{\mathbb{S}^2} \rho(\xi) \frac{\sin \theta d\theta d\phi}{2\pi} = I.$$

Ya podemos proceder a cuantizar funciones sobre \mathbb{S}^2 ,

$$f \mapsto A_f = \int_{\mathbb{S}^2} f(\theta, \phi) \rho(\xi) \frac{\sin \theta d\theta d\phi}{2\pi} = \begin{pmatrix} \langle f \rangle + dC_c(f) & dC_s(f) \\ d\bar{C}_s(f) & \langle f \rangle - dC_c(f) \end{pmatrix},$$

donde, de forma similar al ejemplo anterior, $\langle f \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} f(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi$,

$$C_c(f) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} f(\theta, \phi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi, \quad C_s(f) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} f(\theta, \phi) e^{i\phi} \sin^2 \theta d\theta d\phi.$$

Las variables ϕ y $\cos \theta$ son canónicas respecto a la forma simpléctica $\sin \theta d\theta \wedge d\phi$ (que nos da la medida en la esfera respecto a la que estamos integrando, salvo por el factor $\frac{1}{2\pi}$), así que podemos pensar que dichas funciones son las más simples que podemos cuantizar. Para la función coordenada ϕ ,

$$A_\phi = \pi \begin{pmatrix} 1 & -i\frac{d}{4} \\ i\frac{d}{4} & 1 \end{pmatrix} = \pi I + \frac{\pi d}{4} \sigma_2,$$

que tiene autovalores $\pi \pm \frac{\pi d}{4}$ con autovectores $(1, \pm i)$. Por otro lado, la cuantización de $\cos \theta$ resulta

$$A_{\cos \theta} = \frac{d}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{d}{3} \sigma_3,$$

con autovalores $\pm \frac{d}{3}$ y autovectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Notemos que las matrices σ_2 y σ_3 son las matrices de Pauli, así que el conmutador de estos operadores cuantizados se asemeja al conmutador de matrices de Pauli

$$[A_\phi, A_{\cos\theta}] = i \frac{\pi d^2}{6} \sigma_1.$$

Antes de finalizar, notemos que si por el contrario quisiéramos cuantizar el grupo $SU(2)$, efectuaríamos la integral de los operadores $\rho(\xi)$ respecto a la medida de Haar en dicho grupo, $dv = \frac{1}{\pi^2} \sin^2 \alpha \sin \theta d\alpha d\theta d\phi$. Obtendríamos así la resolución de la identidad

$$\int_{SU(2)} \rho(\xi) dv = I$$

sin más que hacer la integral en representación matricial de los cuaterniones [Gazeau, 2014, p. 8]

4.2.3. Cuantización afín y cosmología

Veamos otro ejemplo, introductorio dentro de lo que cabe, y con aplicaciones prácticas, en este caso a la cosmología. Damos un giro respecto a los ejemplos anteriores y pasamos de cuantizar variedades curvas a cuantizar el semiplano superior. Denotaremos por

$$\Pi_+ \equiv \{(p, q) \mid p \in \mathbb{R}, q > 0\}$$

al semiplano con la medida invariante por la izquierda $dq dp$. Visto como un grupo, la operación en el semiplano es la multiplicación

$$(q, p)(q_0, p_0) = \left(qq_0, \frac{p_0}{q} + p \right), \quad q > 0, p \in \mathbb{R}.$$

Denotaremos este grupo por $\text{Aff}_+(\mathbb{R})$, el grupo afín en la recta real. La representación unitaria, irreducible y de cuadrado integrable que usaremos para la cuantización viene dada por

$$U(q, p)\psi(x) = \frac{e^{ipx}}{\sqrt{q}} \psi\left(\frac{x}{q}\right)$$

sobre el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}_+^*, dx)$ de funciones de cuadrado integrable respecto a la medida usual (\mathbb{R}_+^* son los reales $x > 0$).

Para construir nuestra resolución de la identidad partimos de un vector de norma unidad (respecto a la norma $\int |\psi|^2 dx$) en $L^2(\mathbb{R}_+^*, dx) \cap L^2(\mathbb{R}_+^*, dx/x)$ y definimos a partir de él la familia de estados coherentes

$$|q, p\rangle = U(q, p)|\psi\rangle.$$

Puesto que la representación U es de cuadrado integrable, tenemos la resolución de la identidad²¹

$$\int_{\Pi_+} |q, p\rangle \langle q, p| \frac{dq dp}{2\pi c} = I,$$

²¹ El desarrollo matemático es complicado, usando propiedades de los polinomios de Laguerre. Aunque no entraremos en ello, puede consultarse en el artículo [Gazeau y Murenzi, 2016, p. 5].

siendo la constante $c = \int_0^\infty |\psi(x)|^2 \frac{dx}{x}$.

Ahora que disponemos de la resolución de la identidad podemos comenzar a cuantizar observables mediante la asignación

$$f \mapsto A_f = \int_{\Pi_+} f(q, p) |q, p\rangle \langle q, p| \frac{dq dp}{2\pi c}.$$

Comenzamos cuantizando las variables canónicas q y p , que nos darán la conocida cuantización canónica. El operador A_p es la derivación $P \equiv i \frac{\partial}{\partial x}$ y el operador A_q cumple la función del operador de multiplicación por x , que llamaremos Q , salvo por la aparición de una constante: $A_q = cQ$. Por otro lado, la cuantización de la energía cinética p^2 es

$$A_{p^2} = P^2 + \frac{k}{Q^2},$$

siendo k la constante $k = \int_0^\infty |\psi'(x)|^2 x \frac{dx}{c}$. La interpretación que podemos dar a esta energía cinética es que una partícula moviéndose en el semieje positivo nunca llega al origen, pues requeriría una energía infinita.

Podemos proceder a aplicar la cuantización afín a un modelo de cosmología cuántica, en el que nos encontramos una singularidad similar a la vista en la energía cinética. Tomamos un modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker lleno de fluido barotrópico (la presión solo depende de la densidad) con ecuación para la presión $p = w\rho$, siendo ρ la densidad del fluido y w el contenido de radiación. El Hamiltoniano de este modelo es

$$h(q, p) = \alpha(w)p^2 + 6k\ell q^{\beta(w)},$$

con $\alpha(w) = 3(1-w)^2/32$ y $\beta(w) = 2(3w+1)/(3(1-w))$. Supondremos que el universo es cerrado ($\ell = 1$) y que tiene un contenido de radiación $w = 1/3$. Tomando un vector unitario $\psi(x)$ sobre \mathbb{R}_+^* , tenemos el Hamiltoniano cuantizado

$$A_h = \frac{1}{24}P^2 + \frac{K(\psi)}{24Q^2} + 6M(\psi)Q^2,$$

donde K y M son constantes estrictamente positivas. Se demuestra que si $K(\psi) \geq \frac{3}{4}$, entonces el Hamiltoniano cuantizado es autoadjunto, dando una evolución unitaria²² del modelo cosmológico.

Si efectuamos una decuantización a través del símbolo covariante de Berezin (4.4) y restaurando algunas constantes, obtenemos el modelo semiclásico

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + c^2 a_P^2 (1-w)^2 A \frac{1}{V^2} + B \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho,$$

²² El teorema de Stone nos dice que si H es un operador autoadjunto, entonces los operadores $U(t) = e^{itH}$ parametrizados por t real son unitarios.

siendo a el factor de escala proporcional al volumen del universo $a \sim V^{1/3}$ y relacionado con el ritmo de expansión $\dot{V}/V \sim \dot{a}/a$. El término proporcional a $1/V^2$ no aparece en la ecuación clásica. Este potencial repulsivo proporcional a a^{-6} hace que en este modelo el universo sea compacto, compensando a la densidad del fluido $\rho \sim a^{-3(1-w)}$ cuando $a \rightarrow 0$, llegando a un equilibrio.²³

4.2.4. Cuantización de Weyl-Heisenberg

Finalizamos esta introducción a la cuantización integral covariante con un grupo muy conocido en física: el grupo de Weyl-Heisenberg G_{WH} .²⁴ Comenzamos para ello definiendo los operadores escalera sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} con base ortonormal $\{|e_n\rangle \mid n \geq 0\}$:

$$a|e_n\rangle = \sqrt{n}|e_{n-1}\rangle, \quad a|e_0\rangle = 0, \quad a^\dagger|e_n\rangle = \sqrt{n+1}|e_{n+1}\rangle.$$

El conjunto de operadores $\{a, a^\dagger, I\}$ genera el álgebra de Lie del grupo de Weyl-Heisenberg, caracterizado por la relación de conmutación

$$[a, a^\dagger] = I.$$

El teorema de Stone-von Neumann (ver [Hall, 2013, cap. 14]) nos garantiza que existe una única representación unitaria e irreducible del álgebra y grupo de Weyl-Heisenberg.

Usaremos como espacio de medida $X = G_{WH}/C \cong \mathbb{C}$, donde $C \cong \mathbb{R}$ es el centro del grupo, con la medida invariante d^2z/π . A cada $z \in \mathbb{C}$ le corresponde un operador unitario desplazamiento $D(z)$

$$z \mapsto D(z) = e^{za^\dagger - \bar{z}a},$$

que tiene las propiedades

$$D(-z) = D(z)^{-1} = D(z)^\dagger, \quad D(z)D(z') = e^{(z\bar{z}' - \bar{z}z')/2} D(z + z').$$

Para construir la resolución de la identidad tomamos un peso $w(z)$ tal que $w(0) = 1$ y definimos el operador acotado

$$M = \int_{\mathbb{C}} w(z) D(z) \frac{d^2z}{\pi}.$$

Con este operador parametrizamos la familia de operadores desplazados

$$M(z) = D(z)MD(z)^\dagger.$$

Teniendo en cuenta las propiedades anteriores, deducimos que

$$D(z)D(z')D(z)^\dagger = D(z)D(z')D(-z) = e^{(z\bar{z}' - \bar{z}z')/2} D(z + z')D(-z) = e^{z\bar{z}' - \bar{z}z'} D(z').$$

²³ Notemos que este modelo de universo compacto es puramente especulativo.

²⁴ El grupo de Weyl-Heisenberg es $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ con la operación $(c_1, t_1)(c_2, t_2) = (c_1 + c_2, t_1 + t_2 + \text{Re}(c_1) \cdot \text{Im}(c_2))$. La medida de Haar es la medida $d^2z dt$. El centro del grupo, los elementos que conmutan con todos, son los del tipo $(0, t)$ y por tanto el centro es \mathbb{R} .

Teniendo en cuenta que la delta de Dirac compleja se puede escribir como la *transformada de Fourier simpléctica*

$$\int_{\mathbb{C}} e^{z\bar{z}' - \bar{z}z'} \frac{d^2z'}{\pi} = \pi\delta^2(z),$$

podemos obtener nuestra resolución de la identidad

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}} M(z) \frac{d^2z}{\pi} &= \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2z}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2z'}{\pi} w(z') D(z) D(z') D(-z) = \\ &= \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2z}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2z'}{\pi} w(z') e^{z\bar{z}' - \bar{z}z'} D(z') = \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2z'}{\pi} w(z') \delta(z) D(z') = w(0) D(0) = I \end{aligned}$$

Ya que disponemos de la resolución de la identidad podemos cuantizar observables clásicos

$$f \mapsto A_f = \int_{\mathbb{C}} M(z) f(z) \frac{d^2z}{\pi}.$$

Una primera propiedad de esta cuantización, consecuencia del desarrollo anterior, es que la cuantización de la delta de Dirac es

$$A_{\pi\delta^2(z)} = M.$$

Otra propiedad es la llamada *covariancia*

$$A_{f(z-z_0)} = D(z_0) A_{f(z)} D(z_0)^\dagger.$$

Siempre que $w(z)$ sea derivable e integrable en 0, podemos usar la delta de Dirac para cuantizar fácilmente las funciones z y \bar{z}

$$A_z = -[w(z)\partial_{\bar{z}}D(z) + D(z)\partial_{\bar{z}}w(z)]_{z=0} = aw(0) - \partial_{\bar{z}}w(z)|_{z=0},$$

$$A_{\bar{z}} = [w(z)\partial_zD(z) + D(z)\partial_zw(z)]_{z=0} = a^\dagger w(0) + \partial_zw(z)|_{z=0},$$

donde hemos usado $\partial_{\bar{z}}D(z) = -(a - \frac{z}{2})D(z)$ y $\partial_zD(z) = (a^\dagger - \frac{\bar{z}}{2})D(z)$. De la cuantización de las funciones “posición” q y “momento” p ($z = (q + ip)/\sqrt{2}$)

$$q = \frac{\sqrt{2}}{2}(z + \bar{z}), \quad p = \frac{\sqrt{2}}{2i}(z - \bar{z}),$$

resultan los operadores (recordemos que $w(0) = 1$)

$$A_q = \frac{\sqrt{2}}{2} \left((a + a^\dagger) - \partial_{\bar{z}}w(z)|_0 + \partial_zw(z)|_0 \right),$$

$$A_p = \frac{\sqrt{2}}{2i} \left((a - a^\dagger) - \partial_{\bar{z}}w(z)|_0 - \partial_zw(z)|_0 \right),$$

De donde se obtienen las relaciones de conmutación canónicas

$$A_q A_p - A_p A_q = i[a, a^\dagger].$$

Notemos que si tomamos un peso w real tal que $w(z) = w(-z)$, obtenemos cuantización usual de z y \bar{z} , análoga a la obtenida en el ejemplo 3.10 con cuantización geométrica.

$$A_z = a, \quad A_{\hat{z}} = a^\dagger.$$

Volviendo al caso de un peso general, la energía del oscilador armónico clásico $|z|^2 = (p^2 + q^2)/2$ tiene asociado el operador cuántico

$$A_{|z|^2} = a^\dagger a + \partial_z w|_0 a - \partial_{\bar{z}}|_0 a^\dagger + \frac{1}{2} - \partial_z \partial_{\bar{z}} w|_0,$$

que en el caso de w real y par se reduce a

$$A_{|z|^2} = a^\dagger a + \frac{1}{2} - \partial_z \partial_{\bar{z}} w|_0.$$

Encontramos justamente la cuantización de la energía del oscilador armónico salvo una constante adicional. Este término adicional no debería importarnos, ya que si restamos a $A_{|z|^2}$ el mínimo de energía potencial $-\partial_z \partial_{\bar{z}} w|_0$ recuperamos el Hamiltoniano usual del oscilador armónico [Bergeron y Gazeau, 2014, p. 15].

Conclusiones

A lo largo de este trabajo hemos analizado diversos métodos de cuantización. En el primer capítulo se han recogido los métodos más conocidos y fiables para cuantizar un sistema clásico. Comenzamos hablando de cuantización canónica, el método por antonomasia que ha probado su eficacia durante más de un siglo. La cuantización canónica permitió cuantizar los primeros sistemas cuánticos, como el átomo de hidrógeno para obtener su espectro. La virtud de este método es también su punto débil: la sencillez. El método funciona muy bien con sistemas simples, pero yerra al considerar espacios de fases más complejos. De hecho, la cuantización canónica solo permite cuantizar espacios planos. Los espacios curvilíneos en los que se trabaja en relatividad general se escapan a este procedimiento de cuantización.

También vimos la segunda cuantización, que se puede considerar como la cuantización canónica aplicada a la teoría cuántica de campos. Este método de cuantización ha probado ser realmente exitoso en la cuantización del campo electromagnético. Sin embargo, el método más común para cuantizar en teoría cuántica de campos es por medio de la integral de camino de Feynman, que se ha usado para cuantizar las teorías de Yang-Mills. En el capítulo primero vimos cómo la integral de camino se puede usar para cuantizar una teoría clásica en mecánica cuántica, por medio de la descripción Lagrangiana de mecánica clásica. El mayor problema de la cuantización por integrales de camino es que aún no posee una teoría matemática rigurosa debido a la dificultad de trabajar con medidas estocásticas.

Vistos los problemas que tiene la cuantización canónica para cuantizar espacios curvos, se introduce la cuantización geométrica. El objetivo principal es tomar una variedad simpléctica arbitraria, que describe un espacio de fases, y construir a partir de ella un espacio de Hilbert. La mayor ventaja de esta cuantización es que se puede aplicar a gran variedad de sistemas. De hecho, la mayoría de sistemas clásicos se describen a través de variedades simplécticas, por lo que nos encontramos ante un método muy prometedor. Como ejemplos prácticos vistos en el trabajo, destacamos la cuantización de un espacio cotangente plano y la esfera.

Sin embargo, solo para cuantizar estos ejemplos sencillos requerimos un amplio y complicado abanico de herramientas de la geometría diferencial: fibrados, conexión, polarizaciones... y aún así no resultan completamente satisfactorios. Por ejemplo, en el fibrado cotangente solo hemos sido capaces de cuantizar polinomios lineales en el momento, dejando fuera la energía cinética. La cuantización de esta energía requiere la introducción de otro elemento geométrico: los núcleos de Blattner-Kostant-Sternberg. Como vemos, aunque la cuantización geométrica sea un método general requiere de mucha complejidad incluso para cuantizar el sistema más elemental. Por estos motivos no resulta un método eficaz y práctico. Esto no quiere decir que debamos desecharla, pues como herramienta teórica permite vislumbrar claramente la conexión entre la mecánica cuántica y la clásica. Así, por

ejemplo, obtenemos mediante cuantización geométrica la existencia de distintos gauges o la conexión con la integral de camino.

Ante las dificultades que presenta la cuantización geométrica, decidimos darle un cambio de enfoque al problema de la cuantización. Abandonamos la geometría diferencial para centrarnos en la cuantización integral, cimentada en las herramientas del análisis funcional. Comenzamos con la cuantización por estados coherentes, un método sencillo de cuantización que nos proporciona rápidamente operadores en un espacio de Hilbert. A diferencia de la cuantización geométrica, debemos escoger nosotros el espacio de Hilbert en vez de surgir de manera natural, lo que sería un punto negativo de esta cuantización. Usando la idea central de la cuantización por estados coherentes, la resolución de la identidad, obtenemos un nuevo método de cuantización que generaliza el anterior: la cuantización integral. En vez de construir la resolución de la identidad con estados coherentes usamos directamente una familia de operadores sobre el espacio de Hilbert.

A la pregunta de cómo se construye esta familia, entra para responder la cuantización integral covariante, que nos permite cuantizar funciones sobre un grupo de Lie que actúa sobre el espacio de Hilbert a través de una representación. La principal ventaja de este método es que nos permite de forma sistemática cuantizar espacios de Hilbert equipados con una representación, algo que no podíamos con la cuantización geométrica, donde cuantizábamos simplemente una variedad simpléctica. Vemos también que la cuantización integral, siendo un método más práctico que la cuantización geométrica, no establece relaciones tan claras entre la mecánica clásica y la cuántica.

Cabe mencionar que existen una gran variedad de métodos de cuantización que no hemos abordado en el trabajo. Por ejemplo, otro tipo de cuantización, en el que el uso de grupos de Lie es fundamental, es la denominada correspondencia de Stratonovich-Weyl, un caso particular de la cuantización de Moyal [Moyal, 1949], que utiliza la correspondencia de Weyl [Weyl, 1931] para desarrollar la mecánica cuántica como una teoría de funciones en el espacio de fases. Para ello se dota al álgebra de dichas funciones de un producto no-conmutativo (producto estrella o de Moyal) y los estados físicos son representados por funciones de Wigner [Wigner, 1932]. Debido a los problemas surgidos al tratar de aplicar la teoría a sistemas físicos con espín o a sistemas relativistas apareció la correspondencia de Stratonovich-Weyl [Carinena *et al.*, 1990; Gracia Bondía y Varilly, 1988; Gracia Bondía y Varilly, 1989], apoyada en las ideas de Stratonovich [Stratonovich, 1956]. Este método se aplica a sistemas físicos con un grupo de Lie de simetrías y se basa en la relación entre una órbita coadjunta (variedad simpléctica) y la representación proyectiva unitaria irreducible asociada (espacio de Hilbert soporte de dicha representación).

En [Ali y Engliš, 2005] se puede encontrar un resumen de muchos otros métodos. Hablamos por ejemplo de la cuantización de Borel, que construye medidas a partir de los operadores de proyección y que se puede ver como una generalización de la cuantización canónica. Otro ejemplo es la cuantización por deformación, que supone que la cuantización del corchete de Poisson es solo una aproximación al conmutador. Se construye entonces la cuantización aproximando el conmutador con una serie de potencias en \hbar . El motivo

de haber estudiado la cuantización geométrica en el trabajo ha sido su vinculación directa con el TFG de Matemáticas complementario a este, en el que se trataba la descripción geométrica de la mecánica clásica. También hemos decidido examinar la cuantización integral por ser un método reciente de investigación activa, que usa otras herramientas matemáticas para atacar el problema de la cuantización de forma más práctica. Así, a lo largo de este trabajo recorreremos métodos de cuantización desde el origen de la mecánica cuántica hasta nuestros días, pasando por los métodos más conocidos, como cuantización canónica, hasta métodos más originales como la cuantización geométrica e integral.

En conclusión, el problema de la cuantización es muy complejo y conviene atacarlo desde distintos ángulos. Ningún método está libre de inconvenientes y a día de hoy es uno de los grandes problemas abiertos de la física. Hasta que el problema se resuelva (si llega tal día) conviene hacer un análisis concreto de cada sistema y ver qué procedimiento de cuantización resulta más oportuno, atendiendo a éxitos y fracasos anteriores con sistemas similares. Y por supuesto, que métodos diferentes den el mismo resultado puede indicar que estamos caminando en la dirección correcta.

Referencias

- Abraham, R. & Marsden, J. E. (1987). *Foundations of Mechanics*. Reading: Addison-Wesley.
- Abraham, R., Marsden, J. E. & Ratiu, T. (1988). *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. New York: Springer-Verlag.
- Ali, S. T. & Engliš, M. (2005). Quantization Methods: A Guide for Physicists and Analysts. *Reviews in Mathematical Physics*, 17(04), 391-490. doi:10.1142/S0129055X05002376
- Arnold, V. I. (1989). *Mathematical methods of classical mechanics*. New York: Springer.
- Baez, J. (2018a). Geometric quantization. Consultado desde <https://johncarlosbaez.wordpress.com/2018/12/01/geometric-quantization-part-1/>
- Baez, J. (2018b). Geometric quantization. Consultado desde <https://math.ucr.edu/home/baez/quantization.html>
- Bargmann, V. (1961). On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform part I. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 14(3), 187-214. doi:<https://doi.org/10.1002/cpa.3160140303>
- Bargmann, V. (1962). Remarks on a Hilbert space of analytic functions. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 48(2), 199-204. doi:10.1073/pnas.48.2.199
- Bergeron, H., Curado, E. M. F., Gazeau, J. & Rodrigues, L. M. C. S. (2014). Quantizations from (P)OVM's. *Journal of Physics: Conference Series*, 512, 012032. doi:10.1088/1742-6596/512/1/012032
- Bergeron, H., Dapor, A., Gazeau, J. & Małkiewicz, P. (2014). Smooth big bounce from affine quantization. *Physical Review D*, 89(8), 083522. doi:10.1103/PhysRevD.89.083522
- Bergeron, H. & Gazeau, J. (2014). Integral quantizations with two basic examples. *Annals of Physics*, 344, 43-68. doi:<https://doi.org/10.1016/j.aop.2014.02.008>
- Blattner, R. J. (1973). Quantization and representation theory. En *Proc. Sympos. Pure Math* (Vol. 26, pp. 145-165).
- Blau, M. (1992). Symplectic geometry and geometric quantization. Consultado desde <http://www.blau.itp.unibe.ch/lecturesGQ.pdf>
- Bokulich, A. & Bokulich, P. (2020). Bohr's Correspondence Principle. En E. N. Zalta (Ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2020). Metaphysics Research Lab, Stanford University. Consultado desde <https://plato.stanford.edu/archives/fall2020/entries/bohr-correspondence/>
- Born, M., Heisenberg, W. & Jordan, P. (1926). Zur Quantenmechanik. II. *Zeitschrift für Physik*, 35(8), 557-615. doi:10.1007/BF01379806

- Born, M. & Jordan, P. (1925). Zur Quantenmechanik. *Zeitschrift für Physik*, 34(1), 858-888. doi:10.1007/BF01328531
- Borthwick, D. (2000). *First Summer School in Analysis and Mathematical Physics: quantization, the Segal-Bargmann transform, and semiclassical analysis*. Providence, R.I: American Mathematical Society.
- Camosso, S. (2020). Prequantization, geometric quantization, corrected geometric quantization. Consultado desde <http://arxiv.org/abs/2012.13703>
- Carinena, J. F., Garcia-Bondia, J. M. & Varilly, J. C. (1990). Relativistic quantum kinematics in the Moyal representation. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 23(6), 901-933. doi:10.1088/0305-4470/23/6/015
- Carosso, A. (2018). Geometric Quantization. Consultado desde <http://arxiv.org/abs/1801.02307>
- da Silva, A. C. (2000). *Lectures on symplectic geometry*. Berlin Heidelberg: Springer.
- de Broglie, L.-V. (1924). On the Theory of Quanta. Consultado desde https://aflb.minesparis.psl.eu/LDB-oeuvres/De_Broglie_Kracklauer.pdf
- del Olmo, M. A. & Gazeau, J. (2020). Covariant integral quantization of the unit disk. *Journal of Mathematical Physics*, 61(2). doi:10.1063/1.5128066
- Dirac, P. A. M. (1925). The fundamental equations of quantum mechanics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 109(752), 642-653. doi:10.1098/rspa.1925.0150
- Dirac, P. A. M. (1926). Quantum mechanics and a preliminary investigation of the hydrogen atom. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 110(755), 561-579. doi:10.1098/rspa.1926.0034
- Dirac, P. A. M. (1927). The quantum theory of the emission and absorption of radiation. 114, 243-265. doi:10.1098/rspa.1927.0039
- Dirac, P. A. M. (1933). The lagrangian in quantum mechanics. En *Feynman's Thesis? A New Approach to Quantum Theory* (pp. 111-119). doi:10.1142/9789812567635_0003
- Dirac, P. A. M. (1939). A new notation for quantum mechanics. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 35(3), 416-418. doi:10.1017/S0305004100021162
- Dirac, P. A. M. (1958). *The principles of Quantum Mechanics*. Oxford: Clarendon Press, Oxford University Press.
- Dirac, P. A. M. (1964). *Lectures on Quantum Mechanics*. Mineola, NY: Dover.
- Echeverria-Enriquez, A., Munoz-Lecanda, M. C., Roman-Roy, N. & Victoria-Monge, C. (1999). Mathematical Foundations of Geometric Quantization. *arXiv:math-ph/9904008*. Consultado desde <http://arxiv.org/abs/math-ph/9904008>
- Fedak, W. A. & Prentis, J. J. (2009). The 1925 Born and Jordan paper "On quantum mechanics". *American Journal of Physics*, 77(2), 128-139. doi:10.1119/1.3009634

- Feynman, R. P. (1942). *The Principle of Least Action in Quantum Mechanics* (Tesis doctoral, Université de Princeton).
- Feynman, R. P., Hibbs, A. R. & Styer, D. F. (2010). *Quantum mechanics and path integrals* (Emended ed). Mineola, N.Y: Dover Publications.
- Fock, V. (2019). *V.A. FOCK - SELECTED WORKS: quantum mechanics and quantum field theory*. CRC Press.
- Gazeau, J. (2009). *Coherent states in quantum physics*. Weinheim : Chichester: Wiley-VCH.
- Gazeau, J. (2014). Physical Examples of integral quantizations with Weyl-Heisenberg and affine groups. En *Proceedings of Third International Satellite Conference on Mathematical Methods in Physics — PoS(ICMP 2013)* (p. 003). doi:[10.22323/1.200.0003](https://doi.org/10.22323/1.200.0003)
- Gazeau, J. (2016). Covariant integral quantizations and their applications to quantum cosmology. *Acta Polytechnica*, 56(3), 173. doi:[10.14311/AP.2016.56.0173](https://doi.org/10.14311/AP.2016.56.0173)
- Gazeau, J. & Heller, B. (2014). Positive-Operator Valued Measure (POVM) Quantization. *Axioms*, 4(1), 1-29. doi:[10.3390/axioms4010001](https://doi.org/10.3390/axioms4010001)
- Gazeau, J. & Murenzi, R. (2016). Covariant affine integral quantization(s). *Journal of Mathematical Physics*, 57(5), 052102. doi:[10.1063/1.4949366](https://doi.org/10.1063/1.4949366)
- Gotay, M. J. (1980). Functorial geometric quantization and Van Hove's theorem. *International Journal of Theoretical Physics*, 19(2), 139-161. doi:[10.1007/BF00669766](https://doi.org/10.1007/BF00669766)
- Gouba, L. (2019). Beyond coherent state quantization. *Journal of Physics: Conference Series*, 1416, 012012. doi:[10.1088/1742-6596/1416/1/012012](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1416/1/012012)
- Gracia Bondía, J. & Varilly, J. (1988). *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 21, 879.
- Gracia Bondía, J. & Varilly, J. (1989). *Ann. Phys. (N.Y.)*, 190, 107.
- Guillemin, V. & Sternberg, S. (1982). Geometric quantization and multiplicities of group representations. *Inventiones mathematicae*, 67(3), 515-538. doi:[10.1007/BF01398934](https://doi.org/10.1007/BF01398934)
- Hall, B. C. (2013). *Quantum theory for mathematicians*. New York: Springer.
- Heisenberg, W. (1925). Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen. *Zeitschrift für Physik*, 33(1), 879-893. doi:[10.1007/BF01328377](https://doi.org/10.1007/BF01328377)
- José, J. V. & Saletan, E. J. (1998). *Classical Dynamics*. New York.
- Kirillov, A. A. (1962). Unitary representations of nilpotent Lie groups. *Russian Mathematical Surveys*, 17(4), 53-104. doi:[10.1070/RM1962v017n04ABEH004118](https://doi.org/10.1070/RM1962v017n04ABEH004118)
- Klauder, J. R. (2000). *Beyond conventional quantization*. Cambridge ; New York: Cambridge University Press.
- Kostant, B. (1965). Orbits, Symplectic Structures and Representation Theory. En A. Joseph, S. Kumar & M. Vergne (Eds.), *Collected Papers* (pp. 482-482). doi:[10.1007/b94535_20](https://doi.org/10.1007/b94535_20)

- Kuhlmann, M. (2020). History of Quantum Field Theory. En E. N. Zalta (Ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2020). Metaphysics Research Lab, Stanford University. Consultado desde <https://plato.stanford.edu/entries/quantum-field-theory/qft-history.html>
- Landau, L. D., Ortiz Fornaguera, R. & Lifshitz, E. M. (1993). *Mecánica cuántica no-relativista*. Barcelona: Reverté.
- Lee, J. (2013). *Introduction to smooth manifolds*. New York: Springer.
- Lerman, E. (2012). Geometric quantization; a crash course. *arXiv:1206.2334 [math]*. Consultado desde <http://arxiv.org/abs/1206.2334>
- Mandl, F. & Shaw, G. (1993). *Quantum field theory* (Rev. ed). Chichester ; New York: Wiley.
- McClain, T. (2020). Obstacles to the quantization of general relativity using symplectic structures. Consultado desde <http://arxiv.org/abs/2012.06877>
- Moyal, J. E. (1949). Quantum mechanics as a statistical theory. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 45(1), 99-124. doi:10.1017/S0305004100000487
- Nair, V. P. (2016). Elements of Geometric Quantization and Applications to Fields and Fluids. Consultado desde <http://arxiv.org/abs/1606.06407>
- Pauli, W. (1926). Über das Wasserstoffspektrum vom Standpunkt der neuen Quantenmechanik. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and nuclei*, 36(5), 336-363. doi:10.1007/BF01450175
- Puta, M. (1993). *Hamiltonian Mechanical Systems and Geometric Quantization*. Dordrecht: Springer.
- Radcliffe, J. M. (1971). Some properties of coherent spin states. *Journal of Physics A: General Physics*, 4(3), 313-323. doi:10.1088/0305-4470/4/3/009
- Reed, M. & Simon, B. (2007). *Fourier analysis, self-adjointness*. New York, NY: Acad. Press.
- Scharf, G. (1995). *Finite Quantum Electrodynamics: the Causal Approach*. Mineola, New York: Dover Publications.
- Scholz, E. (2006). Introducing groups into quantum theory (1926–1930). *Historia Mathematica*, 33(4), 440-490. doi:<https://doi.org/10.1016/j.hm.2005.11.007>
- Schrödinger, E. (1926). Quantisierung als Eigenwertproblem. *Annalen der Physik*, 384(4), 361-376. doi:<https://doi.org/10.1002/andp.19263840404>
- Schrödinger, E. (2001). *Collected papers on wave mechanics: together with his Four lectures on wave mechanics* (Third (augmented) edition, New York 1982) (J. F. Shearer & W. M. Deans, Trad.). Providence, Rhode Island: AMS Chelsea Publishing, American Mathematical Society.
- Schwartz, D. M. (2013). *Quantum Field Theory and the Standard Model*. New York: Cambridge University Press.

- Souriau, J.-M. (1967). Quantification géométrique. Applications. *Annales de l'I.H.P. Physique théorique*, 6(4), 311-341. Consultado desde http://www.numdam.org/item/AIHPA_1967__6_4_311_0/
- Souriau, J.-M. (1970). *Structure des systèmes dynamiques*. California: Jacques Gabay. Consultado desde http://www.jmsouriau.com/structure_des_systemes_dynamiques.htm
- Stratonovich, R. (1956). On Distributions in Representation Space. *Soviet Physics Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 31, 1012-1020.
- von Neumann, J. (2018). *Mathematical foundations of quantum mechanics* (New edition). Princeton: Princeton University Press.
- Waerden, B. L. v. d. (1973). From Matrix Mechanics and Wave Mechanics to Unified Quantum Mechanics. En J. Mehra (Ed.), *The Physicist's Conception of Nature* (pp. 276-293). doi:[10.1007/978-94-010-2602-4_12](https://doi.org/10.1007/978-94-010-2602-4_12)
- Waerden, B. L. v. d. (2007). *Sources of quantum mechanics*. Mineola, N.Y.: Dover.
- Weil, A. (1958). Introduction à L'Étude des Variétés Kähleriennes. *Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago VI (Hermann, Paris)*, 44.
- Weyl, H. (1927). Quantenmechanik und Gruppentheorie. *Zeitschrift für Physik*, 46(1), 1-46. doi:[10.1007/BF02055756](https://doi.org/10.1007/BF02055756)
- Weyl, H. (1931). *The theory of groups and quantum mechanics*. New York: Dover.
- Wiener, N. (1923). Differential-Space. *Journal of Mathematics and Physics*, 2(1-4), 131-174. doi:<https://doi.org/10.1002/sapm192321131>
- Wigner, E. (1932). On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium. *Physical Review*, 40(5), 749-759. doi:[10.1103/PhysRev.40.749](https://doi.org/10.1103/PhysRev.40.749)
- Woodhouse, N. M. J. (2007). *Geometric quantization* (2. ed.). Oxford: Clarendon Press [u.a.]