



Universidad de Valladolid  
Facultad de Ciencias

## **TRABAJO FIN DE GRADO**

Grado en Física

# **Situaciones Paradójicas en Relatividad**

*Autor: Nicolás Duque Miguel*

*Tutor: Mariano Santander Navarro*

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Algunos resultados en relatividad especial</b>	<b>3</b>
2.1. La métrica del espacio de Minkowski . . . . .	3
2.2. Simultaneidad en relatividad . . . . .	3
2.3. Movimiento a aceleración propia constante . . . . .	4
2.4. El principio de equivalencia . . . . .	6
2.5. Dinámica relativista . . . . .	7
<b>3. La paradoja de los gemelos</b>	<b>10</b>
3.1. A velocidad constante . . . . .	10
3.2. A aceleración propia constante . . . . .	12
<b>4. La pértiga y el granero</b>	<b>15</b>
4.1. Análisis con diagramas . . . . .	16
4.2. Versión mejorada . . . . .	18
<b>5. La paradoja del submarino</b>	<b>20</b>
5.1. En el sistema “quieto” . . . . .	20
5.2. En el sistema “móvil” . . . . .	22
<b>6. El péndulo simple en relatividad</b>	<b>26</b>
6.1. El método “ingenuo” . . . . .	26
6.2. Con el principio de equivalencia . . . . .	30
<b>7. Conclusiones</b>	<b>39</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>40</b>

## 1. Introducción

La teoría de la relatividad especial puede resultar difícil de comprender en su totalidad para los estudiantes de física. Un entendimiento completo de muchas situaciones físicas suele requerir analizarlas desde varios puntos de vista, y las sutilezas de la relatividad especial hacen que a veces se obtengan resultados contradictorios si no se tiene cuidado. Por ello algunas de estas situaciones han sido mal llamadas “paradojas”. Además, rara vez en los cursos de relatividad especial se analizan el tipo de problemas vistos en mecánica clásica. Para proporcionar un entendimiento más completo de esta teoría, y mostrar cómo cambian los problemas clásicos cuando se consideran efectos relativistas, se estudian en este trabajo cuatro casos muy ilustrativos del tipo de cosas que hay que tener en cuenta para resolver problemas correctamente en relatividad. Estos casos se analizan a conciencia desde varios puntos de vista, mostrando que los resultados siempre concuerdan, y se presentan en orden de dificultad conceptual para facilitar su lectura: cinemática en sistemas inerciales, cinemática en sistemas no inerciales, dinámica en sistemas inerciales y, finalmente, dinámica en sistemas no inerciales.

El primer ejemplo analizado es la conocida paradoja de los gemelos, propuesta por primera vez por Paul Langevin en 1911 (ver [4]). Luego veremos un caso similar típicamente llamado paradoja de la pértiga y el granero. En tercer lugar, estudiaremos una paradoja mucho más reciente, presentada por James Supplee en 1989 (ver [5]), a menudo conocida como paradoja del submarino. Por último, resolveremos el problema típico del péndulo simple, inspirándonos en el trabajo realizado por Richard Price en [6].

## 2. Algunos resultados en relatividad especial

En esta sección se recopilan aquellos hechos y fórmulas de la relatividad especial que necesitaremos en nuestra empresa. Los más conocidos o complicados se dejarán sin demostrar, pero la deducción de todas las fórmulas que no demostraremos puede encontrarse en las referencias [1] y [2].

### 2.1. La métrica del espacio de Minkowski

Los sucesos en relatividad especial tienen lugar en un espacio-tiempo de cuatro dimensiones, con una métrica asociada. Esta métrica, para un observador inercial, tiene el siguiente aspecto:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - \frac{1}{c^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Aquí  $t$  es el tiempo medido por el observador inercial,  $x, y, z$  son las coordenadas cartesianas de ese observador, y  $s$  sería la separación espacio-temporal entre dos sucesos por un cierto camino, que se obtiene integrando  $ds$  por ese camino. Si el camino es género tiempo, esta separación coincidirá con el tiempo propio  $\tau$  que mediría otro observador a lo largo de dicho camino. El tensor  $\eta_{\mu\nu}$  es el tensor métrico, y la constante  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío. De ahora en adelante, usaremos un sistema de unidades en el que  $c = 1$ , es decir, mediremos los tiempos en segundos y las distancias en segundos-luz (sl). Además la mayoría de veces trabajaremos en una dimensión espacial, con lo que la métrica de Minkowski quedaría:

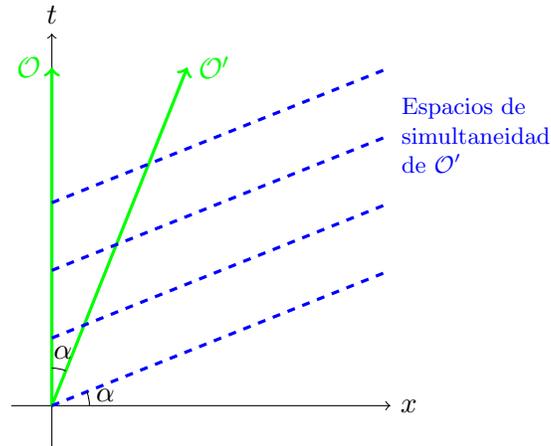
$$ds^2 = dt^2 - dx^2 \tag{2.1}$$

### 2.2. Simultaneidad en relatividad

La relación de simultaneidad entre dos sucesos no es absoluta, sino que depende del observador. Consideremos dos observadores inerciales en una dimensión,  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{O}'$ , cuyos sistemas de coordenadas serán  $(x, t)$  y  $(x', t')$ . Estas coordenadas están relacionadas por las transformaciones de Lorentz. Si  $\mathcal{O}'$  se aleja de  $\mathcal{O}$  con velocidad  $v$ , estas transformaciones son:

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} t - \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} x, \quad x' = -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} t + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} x \tag{2.2}$$

Los espacios de simultaneidad de  $\mathcal{O}$  son las rectas  $t = cte$ , mientras que los de  $\mathcal{O}'$  corresponden a  $t' = cte$ , que lleva a  $t = vx + cte$ . Recordemos que la trayectoria de  $\mathcal{O}'$  sería  $x = vt$ . Es decir, la “pendiente” de las rectas de simultaneidad de  $\mathcal{O}'$  es la inversa de la “pendiente” de su trayectoria. O lo que es lo mismo, el “ángulo” que hace la línea de universo de  $\mathcal{O}'$  con el eje  $t$  es el mismo que el que forman sus rectas de simultaneidad con el eje  $x$ :



Ponemos algunos de estos términos entre comillas porque realmente nos estamos refiriendo a las nociones de pendiente y ángulo euclídeos, y la geometría del espacio-tiempo no es euclídea. Es interesante mencionar además que estas dos direcciones son ortogonales para la métrica de Minkowski:  $(t, vt) \cdot (vx, x) = tvx - vtx = 0$ .

### 2.3. Movimiento a aceleración propia constante

La aceleración propia de un observador es la que marca un acelerómetro que se mueva con el observador. Con esta definición, es posible tener un movimiento a aceleración propia constante. Dicho movimiento (en una dimensión) sería descrito por un observador inercial por la siguiente trayectoria (ver [1] para más detalles):

$$x(t) = \sqrt{\frac{1}{a^2} + t^2} - \frac{1}{a}, \quad (2.3)$$

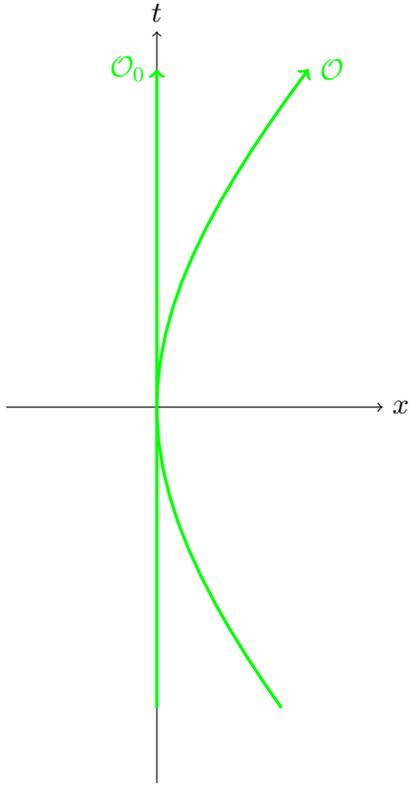
donde  $a$  es la aceleración propia (recordamos que estamos usando un sistema de unidades en el que  $c = 1$ , por si algún lector cuestiona la consistencia dimensional de las ecuaciones). Similarmente, la métrica para tal observador

sería:

$$ds^2 = e^{2a\tilde{x}} (d\tilde{t}^2 - d\tilde{x}^2), \quad (2.4)$$

donde  $\tilde{x}$  y  $\tilde{t}$  son las coordenadas de radar para ese observador, que se relacionan con las del observador inercial de la siguiente manera:

$$t = \left(x + \frac{1}{a}\right) \tanh a\tilde{t}, \quad e^{a\tilde{x}} = \frac{at}{\sinh a\tilde{t}} \quad (2.5)$$



En la figura de la izquierda se ve el esquema que estamos planteando. El observador  $\mathcal{O}_0$  es inercial, mientras que  $\mathcal{O}$  se mueve con aceleración propia constante, según la trayectoria dada por (2.3). En  $t = x = 0$  los dos observadores se cruzan. El observador  $\mathcal{O}$  puede perfectamente describir los sucesos desde su punto de vista aunque no sea inercial, pero debe usar una métrica diferente. Los espacios de simultaneidad de  $\mathcal{O}$  en cada punto de su trayectoria son rectas cuya pendiente es la inversa de la pendiente de la recta tangente a la trayectoria.

Es posible, por supuesto, que un observador acelerado describa el espacio-tiempo en unas coordenadas distintas a las de radar. Un ejemplo serían las

coordenadas de Möller, dadas por las siguientes relaciones:

$$t = \left( \tilde{x} + \frac{1}{a} \right) \sinh a\tilde{t}, \quad x = \left( \tilde{x} + \frac{1}{a} \right) \cosh a\tilde{t} - \frac{1}{a} \quad (2.6)$$

Y con métrica:

$$ds^2 = (1 + a\tilde{x})^2 d\tilde{t}^2 - d\tilde{x}^2 \quad (2.7)$$

Para  $\tilde{x}$  pequeños, las coordenadas de radar y las de Möller son esencialmente las mismas. Esto puede verse fácilmente haciendo desarrollos de Taylor tanto en las expresiones de las coordenadas como en las de la métrica. Cabe destacar que  $x$  es la dirección en la que el observador acelerado se mueve con respecto al inercial. Si estamos analizando un problema bidimensional, con coordenadas  $x$  e  $y$ , y hay un objeto u observador acelerando en la dirección  $y$ , habrá por supuesto que cambiar la  $x$  por  $y$  y la  $\tilde{x}$  por  $\tilde{y}$  en las fórmulas anteriores.

#### 2.4. El principio de equivalencia

Este principio es esencial para los dos últimos problemas. El **principio de equivalencia** establece la equivalencia local entre lo que ve un observador en un campo gravitatorio  $g$  “hacia abajo” y lo que vería un observador moviéndose con aceleración propia  $g$  “hacia arriba”. Si el campo gravitatorio es uniforme, entonces la equivalencia no es local, sino global. La consecuencia más directa de este principio es que la métrica para un observador en reposo en un campo gravitatorio uniforme, es precisamente la dada por (2.4) ó (2.7), con  $a = g$ . Del mismo modo, la métrica correspondiente a un observador en caída libre en un campo gravitatorio, sería la misma que en (2.1). Lo cual corresponde, por supuesto, con que el acelerómetro de tal observador marcaría 0 permanentemente, en contraste con el observador en reposo en el campo gravitatorio, cuyo acelerómetro marcaría siempre  $g$  hacia arriba. Para analizar entonces los problemas que involucren un campo gravitatorio (que supondremos uniforme), nos olvidaremos de la fuerza gravitatoria y en su lugar imaginaremos que todo el sistema está acelerando hacia arriba. Gracias a esto podemos analizar problemas con gravedad sin salirnos de la relatividad especial.

### 2.5. Dinámica relativista

Algunos de los problemas que veremos involucran fuerzas y nos obligan a salirnos de la cinemática y entrar en la dinámica relativista. La ecuación de Newton sigue siendo válida en relatividad, con la siguiente forma, para un observador inercial:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

donde no debemos olvidar que  $\vec{p}$  es el momento relativista,  $\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}$ . Aquí  $m_0$  es la masa en reposo o propia de la partícula que estamos analizando. ¿Y qué es  $\gamma$ ? Por conveniencia definiremos  $\gamma$  como  $\gamma = \frac{dt}{d\tau}$ . Para un observador inercial, este es el conocido factor Lorentz  $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ . Pero con nuestra definición, todo el razonamiento siguiente sirve también para sistemas de referencia no inerciales. La expresión de  $\gamma$  puede siempre deducirse de la métrica, como haremos más adelante. La ecuación de Newton así presentada, sin embargo, es altamente inconveniente en relatividad. Es mucho más útil expresarla en términos del tiempo propio, multiplicando por  $\gamma$  a ambos lados:

$$\gamma \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{d\tau}$$

Nos gustaría que el término izquierdo fuese la parte espacial de un cuadrivector  $K^\mu$  en el espacio-tiempo. Cuál sería la parte temporal es obvio, ya que al lado derecho tenemos la parte espacial del cuádrimomento. La parte temporal de este último es la energía, por lo que la parte temporal de nuestra cuádrifuerza será la derivada de la energía con respecto al tiempo propio. En notación covariante:

$$K^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau}$$

La componente temporal de la cuádrifuerza,  $K^t = \frac{dp^t}{d\tau} = \frac{dE}{d\tau}$ , puede expresarse también como  $K^t = \gamma \vec{F} \cdot \vec{v}$ . Ahora bien, como el cuádrimomento sí es igual a una constante por la cuádrivelocidad, cuya definición recordemos es  $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt}$ , podemos ahora escribir un verdadero análogo relativista de la ecuación de Newton:

$$K^\mu = m_0 \frac{du^\mu}{d\tau} \tag{2.8}$$

Esta ecuación es válida para observadores inerciales. Claro, para dos observadores inerciales distintos, las cuadrifuerzas no serán las mismas, sino que estarán relacionadas por las transformaciones de Lorentz:

$$K^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} K^{\mu} \quad (2.9)$$

La matriz  $\Lambda^{\mu'}_{\mu}$  es la matriz de Lorentz, cuyas componentes en una dimensión espacial serían los coeficientes de  $t$  y  $x$  en (2.2). ¿Y cómo va la cosa para observadores no inerciales? Para esos hay que introducir el concepto de **derivada covariante**, que mide por así decirlo el “cambio absoluto” de una cantidad a lo largo de una curva (que será la trayectoria de la partícula), descartando el “cambio extra” que pueda parecer tener esa cantidad debido a que la está midiendo un observador no inercial. La derivada covariante de un cuadvivector  $\xi^{\mu}$  a lo largo de una trayectoria  $x^{\mu}(\tau)$  tiene esta expresión:

$$\frac{D\xi^{\mu}}{D\tau} = \frac{d\xi^{\mu}}{d\tau} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \xi^{\alpha} \frac{dx^{\beta}}{d\tau}, \quad (2.10)$$

donde  $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$  son los símbolos de Christoffel de la métrica. Estos símbolos a su vez tienen la expresión:

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \left( \frac{\partial \eta_{\alpha\nu}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial \eta_{\nu\beta}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial \eta_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} \right) \quad (2.11)$$

En esta expresión se ve claramente que la derivada covariante coincide con la derivada ordinaria para un observador inercial. Obviamente, para un escalar, la derivada covariante **debe** coincidir también con la derivada ordinaria, ya que los escalares son percibidos de la misma manera por todos los observadores. ¿Cómo sería entonces la derivada covariante de un covector  $w_{\mu}$ ? Parece razonable que la derivada covariante tiene que seguir la regla del producto de las derivadas normales. Además,  $\xi^{\mu} w_{\mu}$  es un escalar. Podemos entonces plantear la relación:

$$\frac{D(\xi^{\mu} w_{\mu})}{D\tau} = \frac{d(\xi^{\mu} w_{\mu})}{d\tau}$$

De aquí es fácil desarrollar usando la regla del producto y ver que necesariamente:

$$\frac{Dw_\mu}{D\tau} = \frac{dw_\mu}{d\tau} - \Gamma^\beta_{\alpha\mu} w_\beta \frac{dx^\alpha}{d\tau} \quad (2.12)$$

Con esta nueva herramienta, la ecuación del movimiento más general para un observador cualquiera es:

$$m_0 \frac{Du^\mu}{D\tau} = K^\mu \quad (2.13)$$

Claro, ahora si queremos transformar la cuadrifuerza entre dos observadores arbitrarios, no vale con usar la matriz de Lorentz, hay que utilizar la regla de transformación general:

$$K^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} K^\mu \quad (2.14)$$

### 3. La paradoja de los gemelos

Empezamos con un clásico. El escenario es el siguiente: uno de dos gemelos emprende un viaje espacial, mientras el otro se queda en la tierra. El gemelo que se va viaja hasta una estrella cercana y vuelve. Ignoramos todo tipo de efectos gravitatorios, centrándonos solo en lo que ocurre según la relatividad especial. De acuerdo con ésta, el tiempo pasa más despacio para observadores en movimiento, por lo que el gemelo que se ha movido volverá siendo más joven que su hermano. No obstante, según la relatividad, todos los sistemas de referencia son equivalentes, por lo que podemos analizar el problema desde la perspectiva del gemelo que viaja. En ese caso, el que se ha movido es el gemelo que está en la tierra, y por tanto el tiempo ha pasado más lento para él y será más joven. Está claro que las dos conclusiones obtenidas no pueden ser ciertas al mismo tiempo. ¿Quién tiene razón?

La resolución es inmediata si se es muy cuidadoso con los postulados de la relatividad especial. Todos los sistemas de referencia **no** son equivalentes. Lo que son equivalentes son los sistemas de referencia **inerciales**, y está claro que el gemelo que viaja tiene que acelerar, como mínimo para dar la vuelta al llegar a la estrella. Por tanto, el análisis que habíamos hecho desde la perspectiva del gemelo que viaja es incorrecto, y es él el que vuelve más joven. Uno podría preguntar: ¿y acaso no acelera el gemelo que está en la tierra, desde la perspectiva del que viaja? ¡Sí! Pero hay que clarificar lo que entendemos por observador inercial. Un observador es inercial si su aceleración **propia** es nula. Es decir, si un acelerómetro que lleva el observador en el bolsillo marca permanentemente cero. Éste es el caso para el gemelo que está en la tierra (si ignoramos la gravedad), por lo que es inercial, pero no para el gemelo que viaja.

Con esto podríamos irnos a casa y olvidarnos de esta no-paradoja, pero un tratamiento más intensivo aclarará bastante las cosas. Al fin y al cabo, la relatividad especial nos permite analizar el problema desde el punto de vista del viajero, aunque no sea un observador inercial.

#### 3.1. A velocidad constante

Llamaremos  $\mathcal{O}_1$  al gemelo que se queda en la tierra y  $\mathcal{O}_2$  al que se va. Supongamos, por simplicidad, que la estrella se encuentra a 4 sl, y que la nave en la que va  $\mathcal{O}_2$  viaja a 0,8 sl/s. En ese caso, el gemelo tardará 5 segundos en llegar a la estrella, medido por  $\mathcal{O}_1$ . Supongamos, aunque esto sea poco realista, que el viajero cambia de sentido instantáneamente, pasando a viajar a

0,8 sl/s en el sentido contrario, tardando otros 5 segundos en volver a la tierra. Una posible pregunta sería: si admitimos que puede cambiar de sentido instantáneamente, ¿acaso no viaja siempre a velocidad constante, pasando a ser un observador inercial? Sí y no. No existe un observador inercial cuya línea de universo sea la del viajero. En su lugar, habrá que considerar dos sistemas de referencia distintos, que sí son inerciales: el del viajero durante el viaje de ida y durante el viaje de vuelta. Esta sencilla distinción nos permite analizar el problema usando matemáticas muy simples pero manteniendo la esencia del problema.

Para calcular el tiempo transcurrido para el gemelo que viaja (en el viaje de ida), usamos la métrica del espacio de Minkowski, ecuación (2.1):

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= ds^2 = dt^2 - dx^2 \\ d\tau &= \sqrt{dt^2 - dx^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} dt \\ \tau &= \int_0^5 \sqrt{1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{1 - 0,8^2} \cdot 5 = 3 \text{ s} \end{aligned}$$

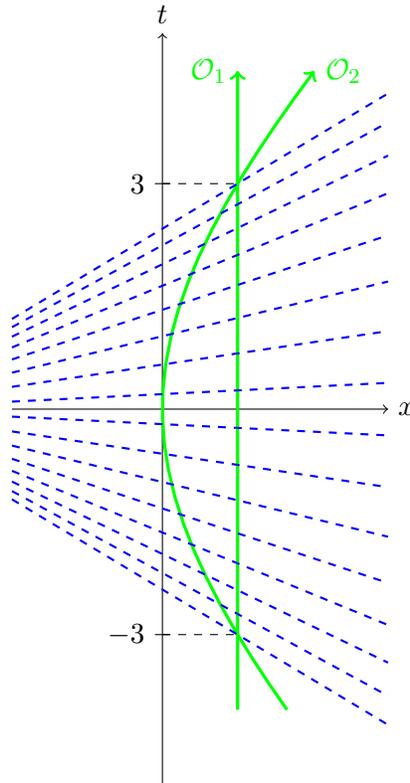
Similarmente, el viajero medirá otros 3 segundos transcurridos a la vuelta, para un total de 6 segundos, en comparación con los 10 segundos que mide  $\mathcal{O}_1$ . ¿Cómo se analiza el problema desde el punto de vista de  $\mathcal{O}_2$ ? Pues con la misma métrica, claro, pues  $\mathcal{O}_2$  se mueve a velocidad constante durante el primer tramo. Desde el punto de vista del viajero, el otro gemelo se aleja de él a 0,8 sl/s durante 3 segundos a la ida. Haciendo las cuentas, el resultado es que esos 3 segundos corresponden a 1,8 segundos para el que está en la tierra. ¿Qué está pasando? Lo que sucede es que esos 1,8 segundos es el tiempo que mide  $\mathcal{O}_1$  desde el comienzo del viaje hasta un suceso de su vida que es simultáneo con la llegada del otro gemelo a la estrella, pero simultáneo desde el punto de vista del **otro gemelo**. Esto es porque los cálculos los hemos hecho desde el punto de vista de ese otro gemelo. En ese sentido la simplificación de que el viajero cambie de sentido instantáneamente introduce una pequeña dificultad conceptual: hay sucesos de la vida de  $\mathcal{O}_1$  que no son simultáneos con **ningún** suceso de la vida de  $\mathcal{O}_2$ . Es mucho más fácil entenderlo con un gráfico:



La integral resultante es inmediata:

$$\begin{aligned} \tau &= \int_{-3}^3 \sqrt{\frac{16}{16+t^2}} dt = 4 \int_{-3}^3 \frac{dt}{4\sqrt{1+(\frac{t}{4})^2}} = \\ &= 4 \sinh^{-1} \left( \frac{t}{4} \right) \Big|_{-3}^3 = 8 \sinh^{-1} \left( \frac{3}{4} \right) = 8 \log 2 \approx 5,55 \text{ s} \end{aligned}$$

Además, en esta situación más realista todos los sucesos de la vida de  $\mathcal{O}_1$  son simultáneos con algún suceso de la vida de  $\mathcal{O}_2$ . El esquema planteado ahora es por tanto el siguiente:



Vamos a ver cómo se haría el cálculo desde el punto de vista del viajero, usando las coordenadas de radar con su métrica asociada. La ecuación que describe el movimiento de  $\mathcal{O}_1$  en nuestro sistema de referencia inercial es  $x(t) = 1$ . Sustituyendo en la ecuación (2.5), y recordando que  $1/a = 4$ ,

tenemos:

$$t = 5 \tanh \frac{\tilde{t}}{4} \longrightarrow \tilde{t} = 4 \tanh^{-1} \left( \frac{t}{5} \right)$$

$$t = -3 \rightarrow \tilde{t} = -4 \tanh^{-1} \left( \frac{3}{5} \right) \equiv \tilde{t}_1$$

$$t = 3 \rightarrow \tilde{t} = 4 \tanh^{-1} \left( \frac{3}{5} \right) \equiv \tilde{t}_2$$

$\tilde{t}_1$  y  $\tilde{t}_2$  son los tiempos de partida y de llegada según el viajero. Vemos que el tiempo total es  $8 \tanh^{-1}(3/5) = 8 \log 2$  s, como debe ser. Sustituyendo la expresión de  $t$  en función de  $\tilde{t}$  en la segunda parte de (2.5) se tiene:

$$e^{\tilde{x}/4} = \frac{5 \tanh(\tilde{t}/4)}{4 \sinh(\tilde{t}/4)} = \frac{5}{4} \frac{1}{\cosh(\tilde{t}/4)}$$

$$\frac{\tilde{x}}{4} = \log \frac{5}{4} - \log \left( \cosh \frac{\tilde{t}}{4} \right)$$

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = -\tanh \frac{\tilde{t}}{4}$$

Finalmente sustituimos en la expresión de la métrica (2.4), e integramos:

$$\tau = \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} e^{\tilde{x}/4} \sqrt{1 - \left( \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} \right)^2} d\tilde{t} = 5 \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \frac{1}{4 \cosh(\tilde{t}/4)} \sqrt{1 - \tanh^2 \left( \frac{\tilde{t}}{4} \right)} d\tilde{t}$$

$$= 5 \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \frac{d\tilde{t}}{4 \cosh^2(\tilde{t}/4)} = 5 \tanh \frac{\tilde{t}}{4} \Big|_{-4 \tanh^{-1}(3/5)}^{4 \tanh^{-1}(3/5)} = 5 \cdot \left( \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \right) = 6 \text{ s}$$

Ahora está todo mucho más claro: haciendo las cuentas desde ambos puntos de vista, se obtiene siempre el mismo resultado para el tiempo que mide cada gemelo, como no puede ser de otra manera.

## 4. La pértiga y el granero

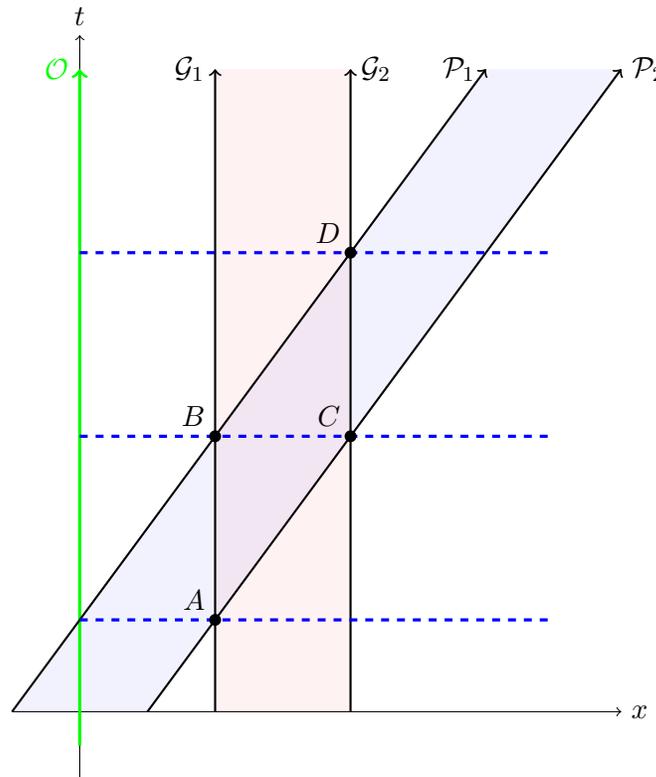
Es un dicho común en relatividad que lo que le pasa al tiempo le pasa al espacio y viceversa. No hemos dedicado antes una sección aparte a la dilatación temporal y otra a la contracción de las longitudes de las que tanto se habla en relatividad, porque estos dos fenómenos son dos caras de la misma moneda, y esa moneda es la métrica de Minkowski. La paradoja de la pértiga y el granero es simplemente una versión dual de la paradoja de los gemelos, en la que el desacuerdo se plantea en términos de longitudes en vez de tiempos. Por ello, nos conformamos en esta sección con un análisis cualitativo, ya que los cálculos pertinentes serían formalmente idénticos a los de la sección anterior, pero para las longitudes propias.

El planteamiento es el siguiente: tenemos una pértiga y un granero (con una puerta delantera y otra trasera), tales que cuando los dos están en reposo relativo la pértiga es más larga que el granero. Entonces, consideramos una situación en la que la pértiga se está moviendo a velocidades relativistas hacia el granero, de modo que su longitud para un observador en reposo con respecto a éste se verá contraída. Si la velocidad es lo bastante grande, la pértiga cabrá dentro del granero. En el instante en el que la pértiga se encuentra completamente dentro del granero, cerramos las dos puertas (no hay problema por asumir que las cerramos instantáneamente y al mismo tiempo), y las volvemos a abrir inmediatamente. La pértiga entonces sale tras atravesar el granero. ¿Cómo se ve la situación desde el punto de vista de un observador que se mueva con la pértiga? Pues para ese observador el que aparece contraído es el granero, de modo que la pértiga nunca podría caber dentro de él. Tenemos entonces una aparente contradicción: para un observador, la pértiga queda atrapada momentáneamente en el granero, mientras que para el otro esto no ocurre, y no queda claro si la pértiga llega a atravesar el granero.

En primer lugar, debe estar claro, clarísimo e indudable que la pértiga acaba atravesando el granero. Hemos concluido esto en un sistema de referencia inercial y, como indica el principio de relatividad, **debe** ser cierto en el resto de sistemas inerciales. Aparte de eso, el error es el mismo que con la paradoja de los gemelos: no tener en cuenta la simultaneidad. En concreto, los sucesos “la puerta delantera se cierra” y “la puerta trasera se cierra” son simultáneos para el observador en reposo con respecto al granero, pero **no son simultáneos** para el que se mueve con la pértiga. Debido a esto, si la pértiga llega a estar atrapada en el granero o no, es, en efecto, una cuestión relativa.

### 4.1. Análisis con diagramas

Veamos que aspecto tiene la situación para un observador en reposo con respecto al granero. A los dos extremos del granero los llamaremos  $\mathcal{G}_1$  y  $\mathcal{G}_2$ , mientras que los dos extremos de la pértiga serán  $\mathcal{P}_1$  y  $\mathcal{P}_2$ . La pértiga y el granero recorren entonces unas “sábanas de universo” que se entrecruzan. En el diagrama siguiente, la longitud de la pértiga en movimiento para el observador  $\mathcal{O}$  es igual a la del granero:

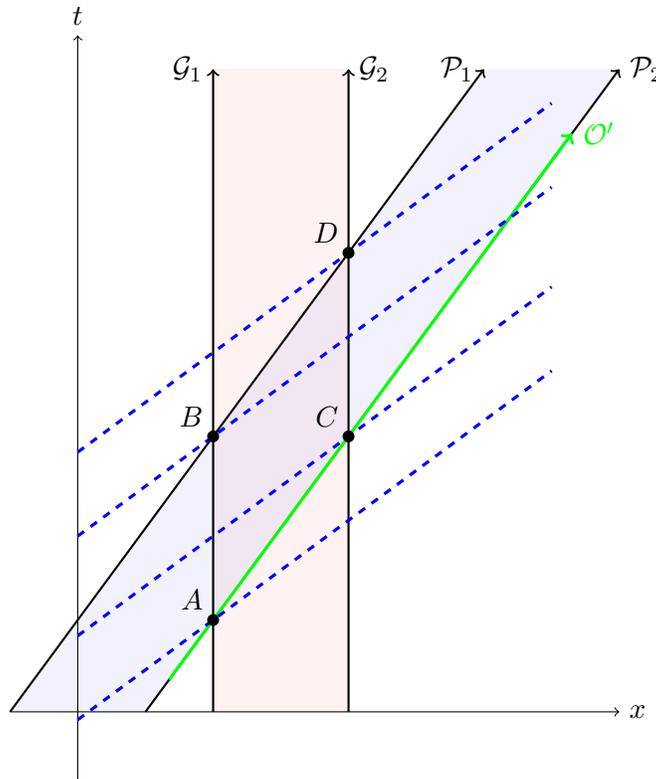


Los sucesos relevantes son:

- $A$ : El extremo delantero de la pértiga entra en el granero.
- $B$ : El extremo trasero de la pértiga entra en el granero. Cerramos la puerta delantera del granero y la abrimos justo después.
- $C$ : El extremo delantero de la pértiga ha llegado al final del granero. Cerramos y abrimos la puerta trasera del granero.
- $D$ : El extremo trasero de la pértiga sale del granero.

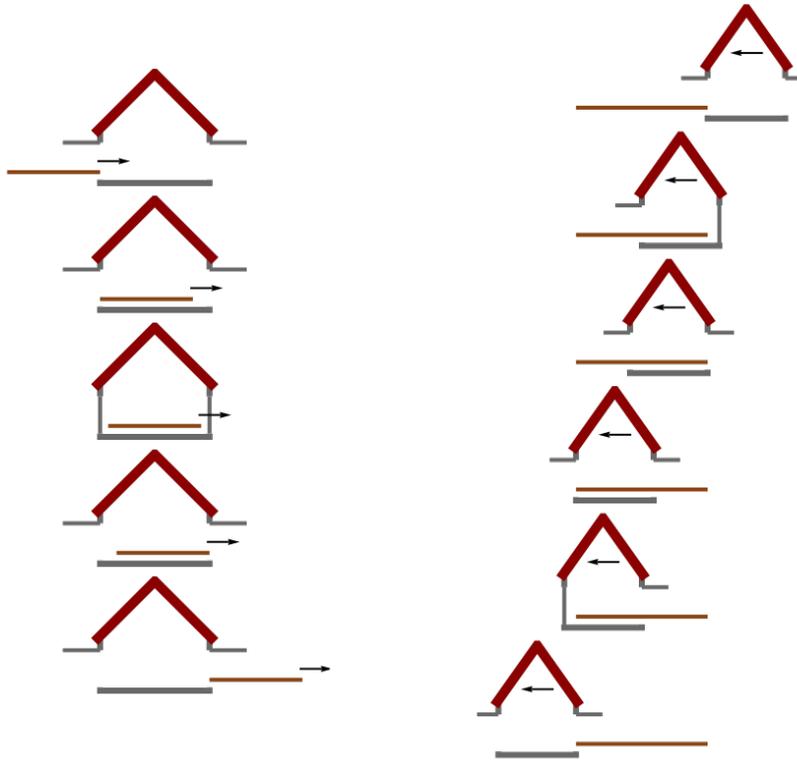
Volvemos a destacar aquí que **no hay ningún problema** por hacer que las puertas se abran y se cierren instantáneamente. Si se plantea el problema con unas puertas bidimensionales que tardan en abrirse y cerrarse, y además se deja un cierto tiempo entre la apertura y el cierre de cada puerta, las conclusiones a las que se llega son exactamente las mismas. Debido a esto, es preferible no complicar innecesariamente el problema y quedarnos con este modelo simplificado.

Analizando ahora como un observador  $\mathcal{O}'$  montado en el extremo delantero de la pértiga ve la situación quedará claro que no hay paradoja en absoluto:



Para  $\mathcal{O}'$ , la pértiga entra en el granero y llega al final, momento en el que la puerta trasera del granero se cierra. Y esto ocurre **antes** de que el extremo trasero de la pértiga entre en el granero y se cierre la puerta delantera. La no-simultaneidad de estos dos sucesos es lo que resuelve la aparente paradoja. Cabe destacar que en ningún momento hemos tenido que hacer referencia a la contracción de las longitudes o a la dilatación de los tiempos para resolver el problema. Esto es porque estos dos fenómenos vienen “incluidos”

en la métrica. Al usar los diagramas de Minkowski y tener en cuenta que los espacios de simultaneidad son ortogonales a la trayectoria del observador, ya estamos considerando estos dos efectos. En la figura siguiente se muestra a la perfección lo que ocurre desde los dos puntos de vista. A la izquierda, desde el punto de vista del granero, la pértiga contraída llega a estar contenida totalmente dentro de él. A la derecha, desde el punto de vista de la pértiga, el granero contraído se mueve hacia ella, pero nunca llega a encerrarla.



#### 4.2. Versión mejorada

Hay una pregunta obvia que el lector puede estar haciéndose: ¿qué pasa si no abrimos las puertas después de cerrarlas? Desde el punto de vista del granero, la pértiga se quedaría atrapada y tendría que parar su movimiento, dejando de estar contraída. Dado que ahora su longitud sería mayor que la del granero, la pértiga tendría que doblarse o partirse. La otra opción es que la pértiga sea más rígida que el granero, en cuyo caso se romperían las puertas, pero aquí nos quedaremos con el primer caso. De nuevo, apelando

al principio de relatividad, sabemos que la pértiga acabará rota y dentro del granero también en el sistema de referencia de la pértiga. La pregunta aquí es: si en ese sistema la pértiga siempre era más larga que el granero, ¿cómo hemos llegado a atraparla dentro?

La solución recae de nuevo en la simultaneidad. En el sistema de referencia del granero, todas las partes de la pértiga desaceleran al mismo tiempo (instantáneamente). Sin embargo, en el sistema de referencia de la pértiga, la parte delantera desacelera primero, al llegar a la puerta trasera del granero. La parte trasera de la pértiga “no se entera” de que esto ha ocurrido y sigue moviéndose hacia delante, por lo que la pértiga se comprime hasta caber dentro del granero, después de lo cual podrá doblarse o romperse. Siendo un poco más precisos, cuando la pértiga choca contra la puerta trasera del granero, los esfuerzos se transmiten por la pértiga como una onda viajando a velocidad finita (obviamente menor que la velocidad de la luz). Un estudio cuantitativo detallado de este caso requeriría, por tanto, una teoría relativista de cómo los materiales experimentan esfuerzos y tensiones. Tales consideraciones van más allá del objetivo de este trabajo, y al final mencionaremos algunas otras paradojas en la literatura que exploran ese camino.

## 5. La paradoja del submarino

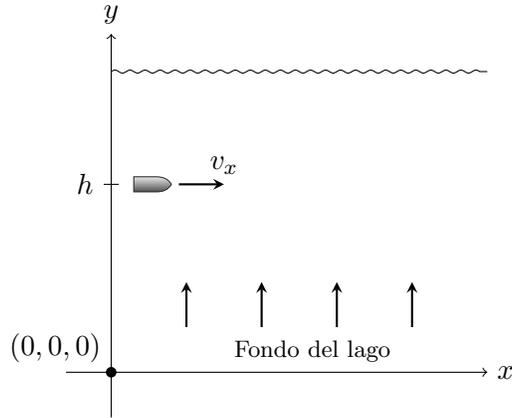
Entramos en terreno un poco más moderno. También más interesante. Consideremos una bala (o un submarino, pero la bala quizás es más fácil de imaginar en este problema) en un lago, tal que la densidad de la bala es igual a la densidad del agua,  $\rho_0$ . De acuerdo con el principio de Arquímedes, la bala está en equilibrio y no flota ni se hunde. Ahora disparamos la bala, que pasa a moverse con una cierta velocidad horizontal  $v$  que supondremos constante (ignorando la viscosidad del agua). La pregunta es: ¿la bala se hunde o flota?

Desde el punto de vista del lago, la masa relativista ( $E/c^2$ ) de la bala aumentará por un factor  $\gamma$ , y su longitud se contraerá por un factor  $1/\gamma$ , siendo el resultado total que su densidad será  $\rho_0\gamma^2 > \rho_0$ . Como la bala es más densa que el agua, se hundirá. Sin embargo, desde el punto de vista de la bala, es el agua del lago la que se está moviendo, por lo que siguiendo el mismo razonamiento su densidad será  $\rho_0\gamma^2$ , que ahora es mayor que la de la bala, por lo que la bala flotará. Se llega de nuevo a lo que parece ser una paradoja.

Esta paradoja es sustancialmente diferente de las demás. Para empezar, entramos en terreno dinámico. Para este problema tendremos que analizar las fuerzas que intervienen sobre la bala. Para seguir, incluimos en este problema un campo gravitatorio (que supondremos uniforme), que no es sabio considerar como una “fuerza corriente” en relatividad.

### 5.1. En el sistema “quieto”

Para sortear esta última dificultad, invocamos el principio de equivalencia. Consideraremos un sistema de referencia inercial, de coordenadas  $(t, x, y)$ , y para ese sistema el lago se está moviendo hacia arriba con una aceleración (propia)  $g$ . Este sistema le elegimos tal que la velocidad del lago en el momento  $t = 0$  sea nula (y por tanto también será nula la velocidad vertical inicial de la bala). De este modo nos ahorramos el tener que considerar la fuerza gravitatoria. Por simplicidad consideraremos un lago rectangular (y bidimensional), tal que la esquina inferior izquierda del lago en  $t = 0$  coincide con el centro de nuestro sistema de referencia. La siguiente figura muestra la situación para  $t = 0$ :



La trayectoria del fondo del lago vendrá dada por (2.3), pero dado que la aceleración de la gravedad es muy pequeña (la de la tierra es del orden de  $10^{-8}$  sl/s<sup>2</sup>), podemos usar la aproximación newtoniana:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \quad (5.1)$$

Además, la velocidad horizontal de la bala será muy grande, mucho más que la velocidad vertical que pueda adquirir. Por ello consideraremos que  $v \approx v_x$  y  $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v_x^2 + v_y^2)} \approx 1/\sqrt{1 - v_x^2}$ . La única fuerza actuando sobre la bala es el empuje, que será igual a la masa del agua desplazada por  $g$ . Si  $V_0$  y  $m_0$  son, respectivamente, el volumen y la masa en reposo de la bala, el empuje será:

$$F_y = \frac{V_0}{\gamma} \rho_0 g = \frac{m_0 g}{\gamma},$$

dando lugar a una cuadrifuerza que puede integrarse directamente:

$$K^y = m_0 g = m_0 \frac{du^y}{d\tau} \longrightarrow u^y = g\tau = \frac{dy}{d\tau}$$

Por otro lado, sabemos que  $\frac{dt}{d\tau} = \gamma$ , y que  $\frac{dx}{d\tau} = u^x = \gamma v_x = cte$ . Integrando estos resultados llegamos por fin a la descripción paramétrica de la

trayectoria de la bala:

$$\begin{cases} t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v_x^2}} \\ x = \frac{v_x \tau}{\sqrt{1 - v_x^2}} \\ y = h + \frac{1}{2} g \tau^2 \end{cases} \quad (5.2)$$

Si juntamos la primera y tercera ecuación tenemos:

$$y = h + \frac{1}{2} g (1 - v_x^2) t^2 \quad (5.3)$$

Comparando con la ecuación del fondo del lago (5.1), vemos que la bala se hunde con aceleración relativa  $g v_x^2$  (conviene recordar que en estas unidades la velocidad de la luz es 1, por lo que  $v_x$  siempre será menor que 1). ¿Cuándo chocará la bala con el fondo? Solo tenemos que igualar la  $y$  en las ecuaciones (5.1) y (5.3):

$$\frac{1}{2} g t^2 = h + \frac{1}{2} g (1 - v_x^2) t^2 = h + \frac{1}{2} g t^2 - \frac{1}{2} g v_x^2 t^2,$$

que lleva a:

$$t = \frac{1}{v_x} \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (5.4)$$

La distancia recorrida horizontalmente cuando impacta será:

$$x = v_x t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (5.5)$$

## 5.2. En el sistema “móvil”

La paradoja surgía del análisis desde el punto de vista de la bala, porque ahora la densidad del agua era mayor. Realmente, no hace falta complicarse y analizarlo desde el sistema de referencia no inercial de la bala, sino que vale con analizarlo desde un sistema de referencia inercial que se mueva horizon-

talmente con la misma velocidad que la bala. Este sistema, de coordenadas  $(t', x', y')$ , lo elegimos tal que el punto  $(t', x', y') = (0, 0, 0)$  coincida con el punto  $(t, x, y) = (0, 0, 0)$ . Como este sistema solo se mueve horizontalmente con respecto al primero, las coordenadas  $y$  e  $y'$  serán iguales. La relación entre las otras coordenadas viene dada por (2.2)(de nuevo aproximando  $v$  por  $v_x$ ), sin más que cambiar  $v$  por  $-v$  para obtener las transformaciones inversas. Por ejemplo, la ecuación del fondo del lago sería:

$$y' = \frac{1}{2}g[\gamma(t' + v_x x')]^2 \quad (5.6)$$

Un punto concreto del fondo del lago **no** tendrá  $x' = cte$ , sino  $x = cte$ . Para ver cuál sería en este sistema la aceleración de ese punto, escribamos la transformación de Lorentz inversa en  $x$ :

$$x = \gamma(v_x t' + x') \longrightarrow x' = \frac{x}{\gamma} - v_x t'$$

Juntando este resultado con la ecuación (5.6) queda:

$$y' = \frac{1}{2}g(\gamma t'(1 - v_x^2) + x v_x)^2 = \frac{1}{2}g\left(\frac{t'}{\gamma} + x v_x\right)^2$$

Vemos que el coeficiente que acompaña a  $\frac{1}{2}t'^2$  es  $g/\gamma^2 \equiv g'$ , que es lo que deberemos considerar como aceleración del lago en este sistema de referencia. Si el lector no se encuentra cómodo con esta consideración, siga leyendo. Como ahora la densidad del agua es  $\gamma^2 \rho_0$ , pero el volumen de la bala no está contraído, el empuje será:

$$F_{y'} = \gamma^2 \rho_0 V_0 g' = m_0 g$$

Y la cuadrifuerza en  $y'$  será  $\gamma' F_{y'}$ , es decir, en la expresión de  $\gamma$  tenemos que poner la velocidad de la bala en el nuevo sistema de referencia. Despreciando la velocidad vertical, asumiremos que  $\gamma' = 1$ , por lo que:

$$K^{y'} = m_0 g = m_0 \frac{du^{y'}}{d\tau} \quad (5.7)$$

¿Debería sorprendernos este resultado? Pues claro que no. Podríamos haberlo obtenido haciendo las transformaciones de Lorentz de la cuadrifuerza  $K^y$ .

Dado que el movimiento de este sistema es solo horizontal, la coordenada  $y' = y$  “va por su cuenta”, así que las cuadrifuerzas tienen que ser iguales. Esto nos asegura que era correcto haber puesto  $g'$  en la fórmula de la fuerza. Ahora además tenemos que  $\frac{dt'}{d\tau} = \gamma' = 1$  y  $x' = 0$  (pues este sistema se mueve horizontalmente a la misma velocidad que la bala). Juntando todo nos queda la descripción paramétrica del movimiento en nuestro nuevo sistema:

$$\begin{cases} t' = \tau \\ x' = 0 \\ y' = h + \frac{1}{2}g\tau^2 \end{cases} \quad (5.8)$$

De nuevo, hemos hecho esto para aclarar lo que ocurre con el empuje en ambos sistemas: podríamos haber obtenido (5.8) mediante las transformaciones de Lorentz de (5.2). De estas ecuaciones vemos que:

$$y' = h + \frac{1}{2}gt'^2, \quad (5.9)$$

que también podríamos haber obtenido de (5.3) con las transformaciones de Lorentz. Comparando con la ecuación (5.6) a  $x' = 0$ , vemos que la bala se hunde ahora con aceleración relativa  $g(\gamma^2 - 1)$ . Igualando (5.6) a  $x' = 0$  y (5.9), se obtiene el tiempo del impacto como:

$$t' = \sqrt{\frac{2h}{g(\gamma^2 - 1)}} = \frac{1}{\gamma v_x} \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (5.10)$$

Por supuesto, estos valores de  $x'$  y  $t'$  son las transformaciones de Lorentz de los valores de  $x$  y  $t$  dados en (5.5) y (5.4), respectivamente. Conclusión: en ambos sistemas de referencia la bala se hunde, los dos están de acuerdo en lo que ocurre. Quizás la forma más clara de entender dónde estaba el error en el razonamiento inicial es ver que según la ecuación (5.7),

$$\frac{du^{y'}}{d\tau} = \frac{dv_{y'}}{dt} = g$$

Es decir, la aceleración de la bala es  $g$ , mientras que la del lago era  $g/\gamma^2$ , que es menor, por lo que puede dar la impresión de que la bala flota en este sistema de referencia. La solución está en que ahora el fondo del lago no es

plano, sino curvo, tal como muestra la ecuación (5.6).

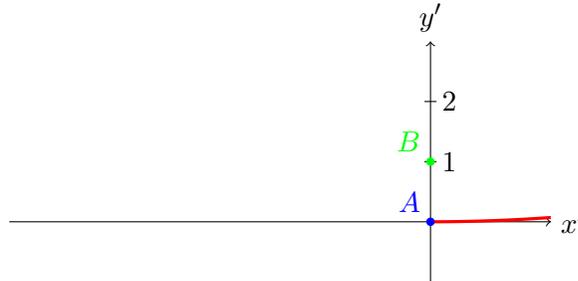
Vamos a representar este comportamiento. Para ello, consideraremos que la velocidad horizontal de la bala es  $v_x = 0,8$  sl/s y la aceleración de la gravedad es  $g = 0,02$  sl/s<sup>2</sup>. El factor  $\gamma$  sería igual a  $5/3$ . Finalmente, supongamos que tenemos el lago más profundo del universo, de 2 sl de profundidad, con la bala partiendo de  $h = 1$  sl. Las ecuaciones relevantes son:

$$y' = \frac{1}{36}(0,8x' + t')^2 \quad (\text{fondo del lago})$$

$$x = 0 \longrightarrow x' = -0,8t' \quad (\text{esquina inferior izquierda del lago})$$

$$x' = 0, \quad y' = 1 + 0,01t'^2 \quad (\text{bala})$$

En estas condiciones la bala se hundirá en 7,5 s en este sistema de referencia. La siguiente animación muestra el proceso. El fondo del lago está en rojo, el punto  $A$  es la esquina inferior izquierda del lago y el punto  $B$  es la bala, que “sube” más deprisa que  $A$  a pesar de que acaba chocando con el fondo:



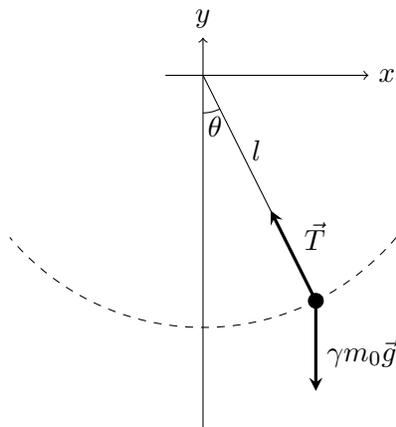
Esto nos enseña una lección muy importante: el principio de equivalencia no es nada trivial. La única razón por la que el fondo del lago se curva es que está moviéndose hacia arriba. Si este no fuera el caso, y su ecuación en el primer sistema fuese  $y = 0$ , entonces para el otro sistema sería  $y' = 0$ , también plano. La curvatura es introducida exclusivamente gracias al principio de equivalencia.

## 6. El péndulo simple en relatividad

Estamos listos para introducir el siguiente nivel de dificultad. En el problema anterior, no llegamos a analizar la dinámica desde el sistema no inercial de la bala (o del lago acelerando hacia arriba), pues sencillamente no nos hacía falta. Ahora, sin embargo, vamos a estudiar el péndulo simple, y por supuesto nos interesa ver la descripción del movimiento en un sistema de referencia no inercial: el de un observador estacionario en el campo gravitatorio de la tierra. Nuestro péndulo consistirá de una masa (propia)  $m_0$  sujeta por una cuerda de longitud  $l$ , que hace un ángulo  $\theta$  con la vertical. La amplitud de las oscilaciones será  $\theta_{max}$ .

### 6.1. El método “ingenuo”

Como paso previo, vamos a ver cómo resolvería el problema un observador “ingenuo”, estacionario en el campo gravitatorio de la tierra pero considerándose a sí mismo como inercial, tratando a la gravedad como una fuerza corriente (sin usar el principio de equivalencia), y aplicando **literalmente** los mismos procedimientos que usaría en mecánica clásica. La única consideración “extra” que hay que hacer, es que la fuerza de la gravedad tira de la masa relativista de los objetos, no de la masa propia. Algo que es razonable pues la gravedad afecta a los fotones. Esta es la situación que estamos planteando:



Las relaciones entre  $x$ ,  $y$ , y  $\theta$  son las usuales:

$$x = l \sin \theta, \quad y = -l \cos \theta$$

El movimiento es en la dirección tangencial, siendo la gravedad la única fuerza con componente en esta dirección. Esta fuerza será (negativa porque se opone al crecimiento de  $\theta$ ):

$$F_\theta = -\gamma m_0 g \sin \theta$$

La cuadrifuerza será

$$K^\theta = -\gamma^2 m_0 g \sin \theta = m_0 \frac{du^\theta}{d\tau}, \quad u^\theta = \gamma v_\theta = \gamma l \frac{d\theta}{dt} = l \frac{d\theta}{d\tau}$$

Por tanto,

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \gamma^2 \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

La ecuación se parece a la del péndulo simple clásico, con un factor  $\gamma^2$  extra. Queremos expresar ese factor en términos de  $\theta$ :

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - v_\theta^2}, \quad v_\theta = l \frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{\gamma} \frac{d\theta}{d\tau}$$

Juntando las dos ecuaciones podemos despejar  $\gamma^2$ :

$$\gamma^2 = 1 + l^2 \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2$$

Por último, haremos la aproximación de ángulos pequeños,  $\sin \theta \approx \theta$ . Con todo esto la ecuación del movimiento queda:

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \left[ 1 + l^2 \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 \right] \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (6.1)$$

Por muy intimidante que parezca esta ecuación, es posible encontrar expresiones explícitas de  $t$  y  $\tau$  en función de  $\theta$ . El primer paso para ello es cambiar de función incógnita de la siguiente manera:

$$v = \frac{d\theta}{d\tau}, \quad \frac{d^2\theta}{d\tau^2} = \frac{dv}{d\tau} = \frac{dv}{d\theta} \frac{d\theta}{d\tau} = v \frac{dv}{d\theta}$$

Nuestra nueva función  $v$  es la velocidad a la que cambia el ángulo, que naturalmente será 0 cuando el ángulo es máximo. La ecuación diferencial queda

$$v \frac{dv}{d\theta} + (1 + l^2 v^2) \frac{g}{l} \theta = 0,$$

que es separable, y podemos integrar directamente:

$$\begin{aligned} \int_0^v \frac{v dv}{1 + l^2 v^2} &= -\frac{g}{l} \int_{\theta_{max}}^{\theta} \theta d\theta \\ \frac{1}{2l^2} \log(1 + l^2 v^2) &= \frac{g}{2l} (\theta_{max}^2 - \theta^2) \\ v^2 &= \frac{e^{gl(\theta_{max}^2 - \theta^2)} - 1}{l^2} = \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 \end{aligned}$$

Y ahora despejamos el diferencial del tiempo propio  $d\tau$ :

$$d\tau = \frac{l d\theta}{\sqrt{e^{gl(\theta_{max}^2 - \theta^2)} - 1}} \quad (6.2)$$

Si empezamos a medir el tiempo propio en el momento en el que el ángulo es cero, la expresión final quedaría:

$$\tau = \int_0^{\theta} \frac{l d\theta}{\sqrt{e^{gl(\theta_{max}^2 - \theta^2)} - 1}} \quad (6.3)$$

Partiendo de (6.2), también podemos obtener la expresión del tiempo que mediría el observador estacionario en el campo gravitatorio de la tierra:

$$\begin{aligned} d\tau &= \frac{dt}{\gamma} = dt \sqrt{1 - l^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2} = \sqrt{dt^2 - l^2 d\theta^2} \\ d\tau^2 &= dt^2 - l^2 d\theta^2 = \frac{l^2 d\theta^2}{e^{gl(\theta_{max}^2 - \theta^2)} - 1} \end{aligned}$$

Despejando:

$$\left(\frac{dt}{d\theta}\right)^2 = l^2 \left[1 + \frac{1}{e^{gl(\theta_{max}^2 - \theta^2)} - 1}\right] = \frac{l^2}{1 - e^{gl(\theta^2 - \theta_{max}^2)}}$$

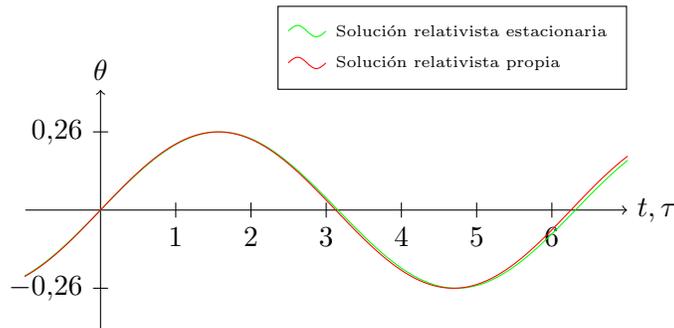
Por lo que, de la misma manera que antes:

$$t = \int_0^\theta \frac{l d\theta}{\sqrt{1 - e^{gl(\theta^2 - \theta_{max}^2)}}} \quad (6.4)$$

Por supuesto, ninguna de las dos soluciones obtenidas puede ponerse en términos de funciones elementales. Un estudio a fondo de esta última fórmula revela los siguientes hechos:

- Una aproximación de Taylor de orden dos (pero no de orden uno) en torno a  $\theta = \theta_{max}$  recupera exactamente la expresión clásica.
- Una aproximación de orden dos en torno a  $\theta = 0$  es generalmente menos precisa, y no recupera la expresión clásica.
- Estas dos aproximaciones son casi indistinguibles de la expresión exacta para valores razonables del campo gravitatorio y la longitud del péndulo, y un  $\theta_{max}$  pequeño.

Para los valores más grandes de los parámetros que son razonables, por ejemplo  $l = 0,75$  sl y  $g = 0,75$  sl/s<sup>2</sup>, junto con un ángulo máximo de  $\theta_{max} = 15^\circ \approx 0,26$  rad, se puede apreciar una diferencia entre la solución para el tiempo propio y la solución para el tiempo estacionario:

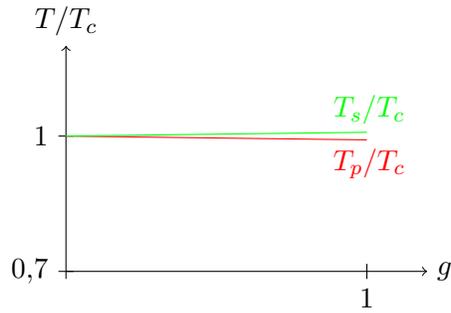


La solución clásica sería una función seno que iría “entre medias” de estas dos, y no ha sido representada por claridad visual. Podemos estudiar también el periodo para el observador estacionario  $T_s$ , y el periodo propio del péndulo

$T_p$ . Sus expresiones son las siguientes:

$$T_s = 4 \int_0^{\theta_{max}} \frac{l d\theta}{\sqrt{1 - e^{gl(\theta^2 - \theta_{max}^2)}}}, \quad T_p = 4 \int_0^{\theta_{max}} \frac{l d\theta}{\sqrt{e^{gl(\theta_{max}^2 - \theta^2)} - 1}} \quad (6.5)$$

Podemos representar estas expresiones divididas por el valor del periodo clásico,  $T_c = 2\pi\sqrt{l/g}$ , para distintos valores de  $g$ , considerando de nuevo  $\theta_{max} = 0,26$  rad y ahora  $l = 1$  sl:



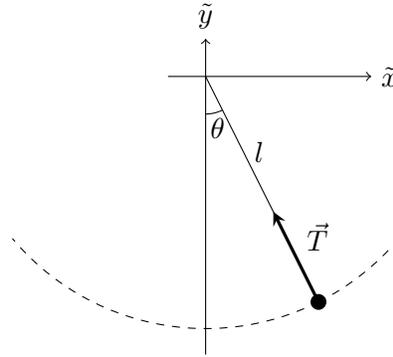
Veremos en la siguiente sección por qué no tiene sentido considerar casos en los que  $gl \geq 1$  (más allá de que no podemos esperar que este método ingenio de buenos resultados para campos altos).

## 6.2. Con el principio de equivalencia

Está claro que el análisis riguroso del péndulo debe hacerse con el principio de equivalencia. Al contrario que con el submarino, en esta sección no haremos referencia a ningún observador inercial. En su lugar, resolveremos el problema considerando exclusivamente un sistema de referencia no inercial, de coordenadas  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$ , con la métrica dada por (2.7). Esto es:

$$ds^2 = (1 + g\tilde{y})^2 d\tilde{t}^2 - d\tilde{x}^2 - d\tilde{y}^2 \quad (6.6)$$

Notemos que hemos cambiado la  $\tilde{x}$  por  $\tilde{y}$  para considerar la  $\tilde{y}$  como la coordenada vertical. Planteamos entonces el siguiente esquema:



La **única** fuerza actuando sobre el péndulo es la tensión. ¿Cuál es ahora la relación entre  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$  y  $\theta$ ? La elección obvia es la siguiente:

$$\tilde{x} = l \sin \theta, \quad \tilde{y} = -l \cos \theta \quad (6.7)$$

No obstante, debe quedar claro que esta **no** es la única elección “razonable”. Pensémoslo por un momento: si las relaciones (6.7) son correctas siendo  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$  coordenadas de Möller, no serán exactamente correctas para las coordenadas de radar. No es evidente tampoco qué coordenadas tendríamos que elegir para que las relaciones fueran exactamente esas. Para valores pequeños de la longitud del péndulo y el campo gravitatorio, las coordenadas más habituales para describir observadores acelerados son prácticamente iguales, y por tanto estas relaciones serían correctas sin ninguna duda. Pero para valores más altos de los parámetros hay discrepancia entre los distintos juegos de coordenadas, por lo que debe quedar claro que las relaciones elegidas son eso, una elección. Como último detalle antes de meternos de lleno en el problema, podemos observar que en el punto más bajo del péndulo  $\tilde{y} = -l$ , y en la métrica habría un término con  $(1 - gl)^2$ . Por tanto, ¡si  $gl = 1$  la métrica es singular! La razón es esencialmente que un observador acelerado no puede describir todo el espacio de Minkowski, sino solo una “cuña”. Por tanto no tendrá sentido analizar soluciones con  $gl \geq 1$ .

Terminados los preliminares, planteemos las ecuaciones del movimiento. Estamos en un sistema de referencia no inercial, así que tendremos que utilizar la ecuación general (2.13). La única fuerza que actúa es la tensión, por lo

que las ecuaciones serían:

$$m_0 \frac{Du^{\tilde{x}}}{D\tau} = \gamma T_{\tilde{x}} = -\gamma T \sin \theta$$

$$m_0 \frac{Du^{\tilde{y}}}{D\tau} = \gamma T_{\tilde{y}} = \gamma T \cos \theta$$

Claro, no sabemos lo que vale la tensión. Necesitaríamos una ecuación extra. Esta ecuación sería la condición de que la tensión sea la fuerza centrípeta, para la cual tendríamos que hacer un cambio a coordenadas polares. Hacer eso sería trabajar innecesariamente, pues si trabajamos directamente en coordenadas polares, la ecuación del movimiento queda mucho más sencilla y solo necesitamos una. Dado que la tensión no tiene componente en la dirección del movimiento (la que en coordenadas polares será la dirección  $\theta$ ), la ecuación del movimiento sería:

$$m_0 \frac{Du^\theta}{D\tau} = 0$$

Desarrollar esta ecuación es un cálculo realizable. Largo, pero sin mayor complicación. Los símbolos de Christoffel en las coordenadas  $\tilde{t}$ ,  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$ , de Möller, son conocidos y fáciles de encontrar. Habría que pasarlos a coordenadas polares (las ecuaciones de transformación de estos símbolos son bastante complicadas). O bien pasar la métrica a coordenadas polares y luego sacar los símbolos de Christoffel utilizando (2.11) (este camino es probablemente más sencillo). Ambos procedimientos son largos y tediosos, pero no queda duda de que pueden hacerse sin problemas. Para ahorrarnos cálculos, sin embargo, vamos a seguir un procedimiento de menor resistencia. Este procedimiento consiste en observar que la componente temporal de la cuadri fuerza,  $K^{\tilde{t}} = \gamma \vec{T} \cdot \vec{v}$ , es nula, pues la tensión es siempre perpendicular a la velocidad. Esto significa que

$$m_0 \frac{Du^{\tilde{t}}}{D\tau} = 0,$$

es decir, la componente contravariante de la cuadriaceleración  $a^{\tilde{t}} = \frac{Du^{\tilde{t}}}{D\tau}$  es 0. Sería extremadamente útil si también fuera 0 la derivada normal de  $u^{\tilde{t}}$ , ya que tendríamos una constante del movimiento. Lamentablemente, esto no ocurre. Ahora bien, la componente covariante  $a_{\tilde{t}} = \frac{Du_{\tilde{t}}}{D\tau}$  también será 0.

Lo siguiente que sería obvio comprobar es si la derivada ordinaria de  $u_{\tilde{t}}$  es también 0. En este caso, la respuesta es positiva. Vamos a comprobarlo.

Para ello, usamos la fórmula (2.12) para desarrollar la derivada covariante de  $u_{\tilde{t}}$ :

$$a_{\tilde{t}} = 0 = \frac{du_{\tilde{t}}}{d\tau} - \Gamma^{\tilde{\beta}}_{\tilde{\alpha}\tilde{t}} u_{\tilde{\beta}} \frac{dx^{\tilde{\alpha}}}{d\tau}$$

Resulta que la mayoría de símbolos de Christoffel de esta métrica son nulos. Teniendo en cuenta que  $\frac{dx^{\tilde{\alpha}}}{d\tau} = u^{\tilde{\alpha}}$ , y quedándonos solo con los símbolos no nulos, la ecuación anterior queda:

$$\frac{du_{\tilde{t}}}{d\tau} - \Gamma^{\tilde{t}}_{\tilde{x}\tilde{t}} u_{\tilde{t}} u^{\tilde{x}} - \Gamma^{\tilde{x}}_{\tilde{t}\tilde{t}} u_{\tilde{x}} u^{\tilde{t}} = 0$$

Vamos a ponerlo todo en términos de las componentes contravariantes:

$$\begin{aligned} u_{\tilde{x}} &= \eta_{\tilde{x}\tilde{\alpha}} u^{\tilde{\alpha}} = \eta_{\tilde{x}\tilde{x}} u^{\tilde{x}} = -u^{\tilde{x}} \\ u_{\tilde{t}} &= \eta_{\tilde{t}\tilde{\alpha}} u^{\tilde{\alpha}} = \eta_{\tilde{t}\tilde{t}} u^{\tilde{t}} = (1 + g\tilde{y})^2 u^{\tilde{t}} \end{aligned}$$

Sacando factor común queda:

$$\frac{du_{\tilde{t}}}{d\tau} + u^{\tilde{t}} u^{\tilde{x}} \left[ \Gamma^{\tilde{x}}_{\tilde{t}\tilde{t}} - (1 + g\tilde{y})^2 \Gamma^{\tilde{t}}_{\tilde{x}\tilde{t}} \right] = 0$$

Podemos calcular a mano esos dos símbolos de Christoffel o buscarlos en algún libro. En cualquier caso, resultan ser:

$$\begin{aligned} \Gamma^{\tilde{x}}_{\tilde{t}\tilde{t}} &= g(1 + g\tilde{y}) \\ \Gamma^{\tilde{t}}_{\tilde{x}\tilde{t}} &= \frac{g}{1 + g\tilde{y}} \end{aligned}$$

Por lo que resulta que el término que acompañaba a  $u^{\tilde{t}} u^{\tilde{x}}$  se anula, y nos queda:

$$\frac{du_{\tilde{t}}}{d\tau} = 0 \longrightarrow u_{\tilde{t}} = cte \quad (6.8)$$

Este procedimiento **no** funciona para  $u^{\tilde{t}}$ , ya que los símbolos de Christoffel

en la expresión resultante no se cancelan. Tenemos entonces nuestra constante del movimiento. ¿Cuál es la forma más obvia de aprovecharla? Bueno, sabemos que el módulo de la cuadrivelocidad,  $\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$ , vale siempre 1 para cualquier observador. Desarrollando la expresión teniendo en cuenta cómo es la métrica en nuestro sistema de coordenadas, tenemos:

$$1 = (1 + g\tilde{y})^2 (u^{\tilde{t}})^2 - (u^{\tilde{x}})^2 - (u^{\tilde{y}})^2$$

También hemos visto que  $u^{\tilde{t}} = u_{\tilde{t}}/(1 + g\tilde{y})^2$ . Sustituyendo en la expresión anterior llegamos a

$$1 = \frac{(u_{\tilde{t}})^2}{(1 + g\tilde{y})^2} - (u^{\tilde{x}})^2 - (u^{\tilde{y}})^2,$$

o bien:

$$(1 + g\tilde{y})^2 \left[ 1 + \left( \frac{d\tilde{x}}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{d\tilde{y}}{d\tau} \right)^2 \right] = cte$$

Esta ecuación tiene toda la pinta de ecuación de conservación de la energía. En efecto, la cantidad  $u_{\tilde{t}}$  es constante esencialmente porque la fuerza es normal a la trayectoria, es decir, no realiza trabajo. Así pues, podríamos considerar a  $u_{\tilde{t}}$  como una especie de energía mecánica conservada. Teniendo en cuenta (6.7), se llega a:

$$(1 - gl \cos \theta)^2 \left[ 1 + l^2 \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 \right] = cte = (1 - gl \cos \theta_{max})^2 \quad (6.9)$$

La última parte es porque cuando el ángulo es máximo la velocidad de variación de  $\theta$  será nula. De aquí podemos obtener directamente el tiempo propio en función del ángulo como hicimos en el apartado anterior:

$$\tau = \int_0^\theta \frac{l d\theta}{\sqrt{(1 - gl \cos \theta_{max})^2 / (1 - gl \cos \theta)^2 - 1}} \quad (6.10)$$

Podemos obtener también la expresión del tiempo  $\tilde{t}$ . Para ello, usamos la

métrica:

$$d\tau = \sqrt{(1 + g\tilde{y})^2 d\tilde{t}^2 - d\tilde{x}^2 - d\tilde{y}^2} = \sqrt{(1 + g\tilde{y})^2 d\tilde{t}^2 - l^2 d\theta^2}$$

Con esto y (6.9), se puede llegar tras un cálculo un poco engorroso a la siguiente expresión:

$$\tilde{t} = \int_0^\theta \frac{l(1 - gl \cos \theta_{max}) d\theta}{(1 - gl \cos \theta) \sqrt{(1 - gl \cos \theta_{max})^2 - (1 - gl \cos \theta)^2}} \quad (6.11)$$

Estas expresiones tienen la ventaja de que no presuponen ángulos pequeños, son válidas para cualquier amplitud. Esto significa que si queremos compararlas con las obtenidas en el apartado anterior tendremos que hacerlo para un  $\theta_{max}$  pequeño. Pero antes, veamos que pasa si en la fórmula anterior consideramos campos y longitudes muy pequeños,  $gl \ll 1$ . Usaremos la aproximación  $(1 - \xi)^2 \approx 1 - 2\xi$ . Entonces,

$$\begin{aligned} (1 - gl \cos \theta_{max})^2 - (1 - gl \cos \theta)^2 &\approx \\ &\approx 1 - 2gl \cos \theta_{max} - 1 + 2gl \cos \theta = 2gl(\cos \theta - \cos \theta_{max}), \end{aligned}$$

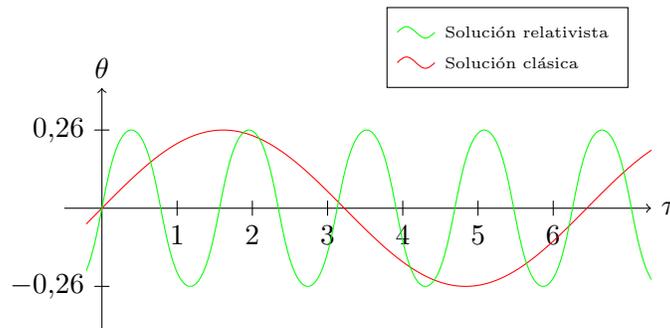
y llegamos a:

$$\begin{aligned} \tilde{t} &\approx \int_0^\theta \frac{l(1 - gl \cos \theta_{max}) d\theta}{(1 - gl \cos \theta) \sqrt{2gl} \sqrt{(\cos \theta - \cos \theta_{max})}} = \\ &= \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^\theta \frac{1 - gl \cos \theta_{max}}{1 - gl \cos \theta} \frac{d\theta}{\sqrt{(\cos \theta - \cos \theta_{max})}} \approx \\ &\approx \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{(\cos \theta - \cos \theta_{max})}} \end{aligned}$$

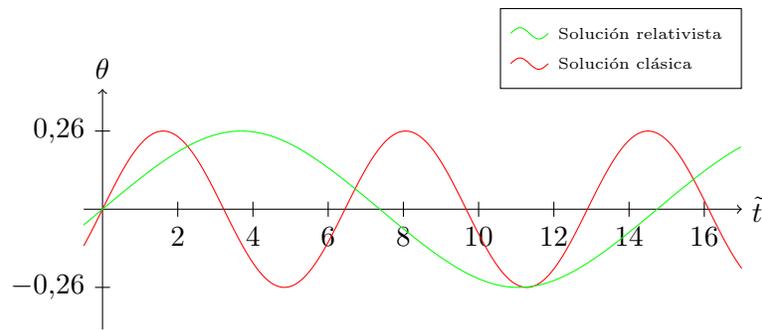
Esta es, exactamente, la expresión para el tiempo en función del ángulo para el péndulo simple clásico, que se obtiene precisamente de la conservación de la energía.

Las soluciones obtenidas sí que difieren sustancialmente de la solución clásica para campos grandes, y son dignas de ser representadas. Empezamos con el

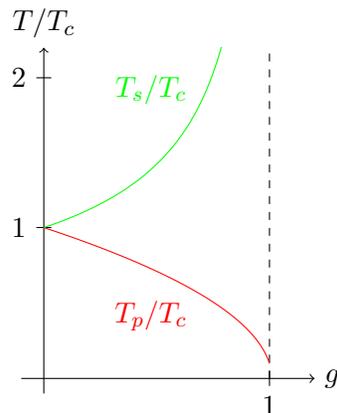
tiempo propio para  $\theta_{max} = 15^\circ$ ,  $l = 1$  sl y  $g = 0,95$  sl/s<sup>2</sup> (valores altos):



Para el tiempo coordinado con  $g = 0,75$  sl/s<sup>2</sup> y el resto de parámetros igual que antes obtenemos:



Al igual que antes, podemos representar el periodo propio del péndulo y el periodo medido por el observador estacionario, divididos por el periodo clásico. La siguiente gráfica es de nuevo para  $l = 1$  sl y  $\theta_{max} = 15^\circ$ :



Las diferencias son ahora mucho más grandes que lo que obtuvimos en el apartado anterior, teniendo  $T_s$  una asíntota vertical en  $g = 1 \text{ sl/s}^2$ .

Pasemos ahora a estudiar las soluciones no oscilatorias del péndulo. Para ello recordamos cómo se obtienen en el péndulo simple clásico, a partir de la conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = cte \rightarrow \frac{1}{2}l \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - gl \cos \theta = cte \equiv E_c$$

De aquí obtenemos la velocidad angular:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{l} \sqrt{2(E_c + gl \cos \theta)}, \quad (6.12)$$

e integrando obtendríamos el tiempo en función del ángulo. Si el péndulo no está dando vueltas, entonces habrá un ángulo máximo, en el cual  $v = 0$ , por lo que podemos escribir  $E_c(\theta_{max}) = -gl \cos \theta_{max}$ . Para que el péndulo dé vueltas,  $E_c$  debe ser mayor que el valor máximo de  $E_c(\theta_{max})$ , es decir, debe cumplirse  $E_c > gl$ . El caso  $E_c = gl$  es el caso límite entre ambas situaciones y correspondería a un péndulo oscilando con un ángulo máximo de  $180^\circ$ . Con una energía ligeramente mayor el péndulo empieza a dar vueltas.

Podemos replicar este procedimiento si atendemos a la ecuación (6.9). Ahí también expresábamos la “energía” conservada en términos del ángulo máximo, pero podríamos también haber considerado

$$(1 - gl \cos \theta)^2 \left[ 1 + l^2 \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 \right] = cte \equiv E_r^2,$$

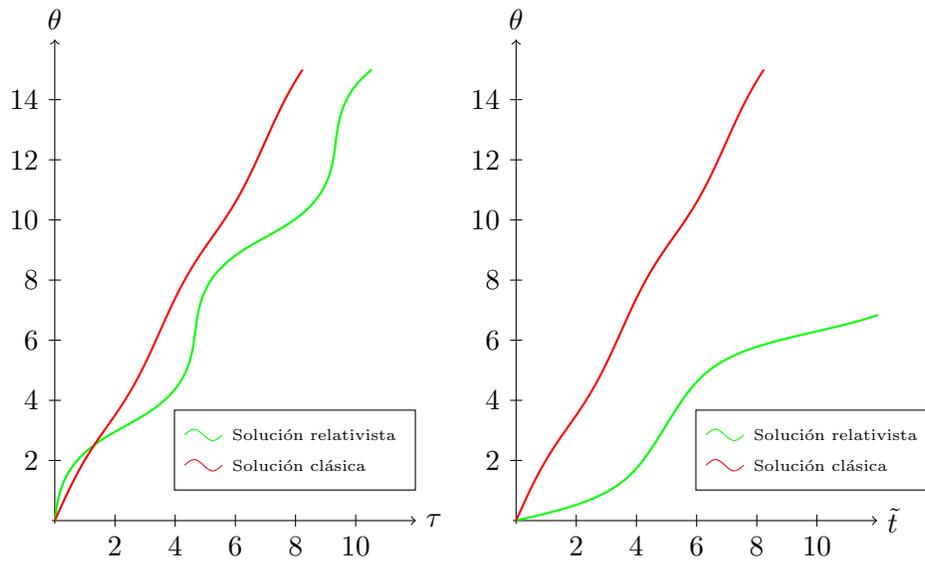
donde para que el péndulo de vueltas debe cumplirse  $E_r > 1 + gl$ . Esta consideración nos hubiese llevado a

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{1}{l} \sqrt{\left( \frac{E_r}{1 - gl \cos \theta} \right)^2 - 1} \quad (6.13)$$

Comparando esta ecuación con (6.12) para campos pequeños (donde deben coincidir), obtenemos la relación entre  $E_r$  y  $E_c$ :

$$E_r^2 = 2E_c + 1$$

Esta relación es necesaria para poder comparar las soluciones clásicas con las relativistas. Integrando la ecuación (6.13) obtenemos la solución relativista para el tiempo propio, y siguiendo el mismo procedimiento que antes se obtiene la solución para el tiempo coordenado. Con  $l = 1$  sl,  $g = 0,75$  sl/s<sup>2</sup> y una energía relativista  $E_r = 2 > 1 + gl$ , correspondiente a una energía clásica  $E_c = 3/2$ , las soluciones tienen el siguiente aspecto:



Con esto concluye nuestro análisis del péndulo simple relativista.

## 7. Conclusiones

Hemos visto algunas de las “paradojas” más comunes e interesantes, concluyendo que cuando se analizan las cosas con cuidado se obtienen resultados consistentes desde todos los puntos de vista. Hemos observado una marcada diferencia entre los problemas que se podían resolver solo con cinemática y los que necesitaban de la dinámica, siendo estos últimos de mayor dificultad conceptual. Podríamos hablar, de hecho, de un siguiente nivel de dificultad, que son paradojas en las que es necesario hablar de tensiones, esfuerzos y elasticidad (en el estudio del péndulo simple la tensión era simplemente una fuerza de ligadura, por lo que no hemos tenido que lidiar realmente con ella), como la conocida paradoja de Bell, o la paradoja de Ehrenfest. Como ya mencionamos en el problema de la pértiga y el granero, el estudio detallado de tales paradojas requeriría de una teoría relativista de los materiales, lo cual va más allá del objetivo de este trabajo.

Hemos visto también cómo un campo gravitatorio uniforme se puede tener en cuenta sin salirnos de la relatividad especial a través del principio de equivalencia, y cómo este principio lleva a conclusiones nada triviales, como el cambio de curvatura del suelo para observadores moviéndose con cierta velocidad relativa. También se ha ilustrado como tratar un problema típico como lo es el péndulo simple en relatividad, aunque en el análisis no se tuvieron en cuenta los posibles esfuerzos que experimentaría una cuerda real. En resumen, el presente trabajo da cuenta del tipo de dificultades que surgen al poner en práctica los conocimientos aprendidos en los cursos básicos e intermedios de relatividad especial, y de cómo sortearlas.

## Bibliografía

- [1] Mariano Santander. *Notas de Gravitación y Cosmología*. Universidad de Valladolid, Facultad de ciencias. 2019.
- [2] David J. Raymond. *Notas de dinámica relativista*. URL: [http://kestrel.nmt.edu/~raymond/classes/ph321/notes/rel\\_dyn/rel\\_dyn.pdf](http://kestrel.nmt.edu/~raymond/classes/ph321/notes/rel_dyn/rel_dyn.pdf).
- [3] Luis Joaquín Boya y Mariano Santander. *Paradojas Relativistas*. 2005.
- [4] Paul Langevin. *The evolution of space and time*. 1911.
- [5] James M. Suplee. *Relativistic buoyancy*. 1989.
- [6] Richard H. Price. *Projectiles, pendula, and special relativity*. 2005.
- [7] Richard H. Price. *Normal forces in stationary spacetimes*. 2004.