



**Universidad de Valladolid**

Facultad de Ciencias

## **TRABAJO FIN DE GRADO**

Grado en Física

**Aplicaciones de la Variable Compleja a la Teoría Cuántica de Campos:  
Regularización por Funciones Zeta y Efecto Casimir**

*Autor: Alberto García Fonseca*

*Tutores: José María Muñoz Castañeda y Lucía Santamaría Sanz*

# Abstract

The aim of this Degree Thesis is to prove the existence of an infinite vacuum energy due to quantum fluctuations and how to get a finite result while applying some boundary conditions. First of all, scalar field will be quantized in order to show it can be seen as a set of harmonic oscillators, which may all be in ground state, contributing to a zero-point energy that diverges. In order to get a finite result by units of area, it will be used a classical and a zeta regularization for Dirichlet boundary conditions, the ones that Casimir originally used. That gives a discrete spectrum that can be computed analytically. In the final part, a zeta regularization will be used for Robin boundary conditions, where it will be necessary to use numerical methods to get the spectrum.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>4</b>
1.1. El vacío . . . . .	4
1.2. La energía del vacío . . . . .	4
1.3. Regularización y renormalización . . . . .	5
1.4. Estructura del trabajo . . . . .	5
<b>2. Cuantización del campo de Klein-Gordon</b>	<b>6</b>
2.1. Teoría clásica . . . . .	6
2.2. Campo de Klein-Gordon real . . . . .	7
2.2.1. Oscilador armónico cuántico simple . . . . .	9
2.2.2. Aplicación al campo de Klein-Gordon real . . . . .	10
2.3. Campo de Klein-Gordon complejo . . . . .	12
<b>3. Fluctuaciones cuánticas en backgrounds clásicos</b>	<b>14</b>
<b>4. Efecto Casimir escalar con condiciones Dirichlet</b>	<b>17</b>
4.1. Regularización clásica . . . . .	19
4.2. Regularización por funciones zeta . . . . .	21
4.3. Generalización en 3 dimensiones . . . . .	22
4.3.1. Efecto Casimir en la experiencia . . . . .	23
<b>5. Funciones zeta espectrales</b>	<b>24</b>
5.1. Aplicación al efecto Casimir . . . . .	25
<b>6. Efecto Casimir escalar con condiciones Robin</b>	<b>26</b>
<b>7. Conclusiones</b>	<b>31</b>
<b>Anexos</b>	<b>33</b>
<b>A. La cuestión del cero-modo</b>	<b>33</b>
<b>B. La derivada logarítmica</b>	<b>33</b>

# 1. Introducción

## 1.1. El vacío

Ya en la Antigua Grecia los filósofos debatían la existencia del vacío como teoría fundamental de la física junto con la materia compuesta de partículas indivisibles, los átomos. Así, algunos como Aristóteles, defendían la imposibilidad de este vacío, ya que cualquier material alrededor ocuparía su lugar al instante. La disputa continuó durante siglos, con diversos experimentos fallidos que intentaban crear un vacío artificial. No fue hasta el año 1643 cuando Torricelli consiguió un vacío parcial con su barómetro de mercurio. Años después, Guericke creó la primera bomba de aire, lo que marcaría el inicio del desarrollo de bombas de vacío hasta las de ultravacío usadas hoy en día. Fue a partir de esta invención cuando se empezaron a elaborar teorías intentando explicar el vacío. Primero se postuló como un espacio libre de gases, lo que se descartó al descubrir que todavía habría radiación. Esto hizo que surgiese la teoría del éter que supuestamente llenaba todo el espacio, sustituyendo al vacío. El experimento de Michelson-Morley refutó la existencia de este éter. Surgió entonces la pregunta de qué ocurriría si un sistema se llevaba hasta el cero absoluto, quitando toda la radiación. En 1900 Max Planck elaboró su teoría de la radiación, añadiendo más tarde un término incluso a temperatura cero. Este fue el nacimiento del concepto de energía del punto cero. Esta sería demostrada por primera vez en 1948 por Hendrik Casimir [4].

## 1.2. La energía del vacío

La mecánica clásica predice que un sistema en el punto cero tendrá una energía que se anula. Sin embargo, el principio de incertidumbre de Heisenberg impide que esto ocurra en mecánica cuántica, ya que un sistema no puede estar en completo reposo. En concreto, en teoría cuántica de campos el espacio se entiende como un conjunto de campos que fluctúan. Cada uno de ellos aporta su energía del punto cero, siendo esta infinita. En la actualidad hay muchos problemas sin resolver en relación con esta energía. Por ejemplo, se cree que es el motivo de la expansión del universo, por lo que debería estar relacionada con la constante cosmológica. Sin embargo, no hay explicación del porqué esta constante es  $10^{120}$  menor de lo que se esperaría teniendo en cuenta la energía del vacío.

Hay diversos fenómenos que han demostrado la existencia de esta energía, algunos de los más importantes son:

- **Efecto Lamb:** Es una diferencia de energía entre dos niveles de energía del átomo de hidrógeno que solo se puede explicar con la interacción de partículas cargadas con las fluctuaciones de vacío de los campos.
- **Estructura de constante fina:** Es la constante que determina la fuerza de interacción entre partículas cargadas. Sin embargo, no es realmente una constante. Las fluctuaciones de vacío apantallan la interacción, lo que se manifestará en mayor medida a bajas energías. A altas energías, el efecto de apantallamiento influye menos y la constante es mayor.
- **Efecto Casimir:** Es una fuerza atractiva que aparece entre dos placas metálicas neutras paralelas situadas en el vacío, y que se suele medir en el laboratorio para distancias

del orden de las décimas de micrómetro. Esta fuerza aparece como consecuencia de la cuantización del campo electromagnético entre las placas. Solo ciertas frecuencias de la energía del vacío estarán permitidas en el espacio entre placas, mientras que no hay restricciones en el exterior. Aparece entonces una diferencia de energía respecto a la que existiría si no hubiese placas, que hace que estas se acerquen. Este efecto será uno de los puntos principales del trabajo. Se verá como hacer los cálculos teóricos haciendo uso de diferentes condiciones de contorno, Dirichlet y Robin. Las primeras permiten modelizar el experimento clásico de las dos placas. Las condiciones de Robin son condiciones mixtas que tienen relación con impedancias en electromagnetismo o con la convección en problemas de transferencia de calor.

### 1.3. Regularización y renormalización

Para lidiar con el infinito de la energía del vacío se hace necesario un método que permita dar un valor finito. De esto precisamente trata el proceso de regularización y la posterior renormalización. La regularización es un método que consiste en introducir un parámetro que permita modificar la teoría para obtener un resultado que no diverja. Sin embargo el resultado dependerá del parámetro elegido, lo cuál no tiene sentido físico. Es aquí donde aparece el proceso de renormalización, que se encarga precisamente de eliminar el parámetro de forma que se obtenga un resultado finito válido para cualquier selección del parámetro de regularización. Hay diversos métodos de regularización, pero el más utilizado en el contexto de la energía del vacío es la regularización por funciones zeta, o análogamente, la regularización por núcleo del calor. Ambas serán tratadas en este trabajo.

### 1.4. Estructura del trabajo

La sección 2.1 es un breve repaso de la teoría lagrangiana y hamiltoniana. En las secciones 2.2 y 2.3 se hace una cuantización del campo escalar real y complejo. Para ello, se transforma el campo y su densidad de momento conjugada en operadores. Esto permite obtener una energía de vacío que diverge. La siguiente sección (3) permite cuantizar pequeñas fluctuaciones cuánticas surgidas del principio de indeterminación de Heisenberg. Estas fluctuaciones se estudiarán alrededor de soluciones clásicas, haciendo una analogía con los casos ya estudiados. En la sección 4 se presenta el método usado por Casimir para obtener una energía de vacío finita. Para ello, se utilizan las condiciones de contorno de Dirichlet y se realiza una regularización clásica y otra por medio de una función zeta generalizada. La sección 5 consiste en una breve introducción a las funciones zeta espectrales y su aplicación al efecto Casimir. Se culmina en la sección 6 con una regularización en un caso mucho más complejo, el que tiene condiciones de contorno Robin.

Conviene hacer dos precisiones antes de empezar:

- En todo el texto se trabajará con  $c = 1$ , pero se mantendrá  $\hbar$  para poder estudiar el orden de magnitud de la energía del vacío.
- Aunque solo se especifique en algunos casos, siempre que se hable de energía (o fuerza) de Casimir se trata de una energía (o fuerza) por unidad de superficie de las placas.

## 2. Cuantización del campo de Klein-Gordon

### 2.1. Teoría clásica

#### a) Formulación lagrangiana

Un campo está descrito en cada instante  $t$  por una amplitud  $\phi(\mathbf{x}, t)$  en cada punto del espacio  $\mathbf{x}$ . La dinámica de un sistema en este campo viene determinada por un lagrangiano, que puede escribirse como la integral de una densidad lagrangiana:

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (2.1)$$

La acción se define como la integral temporal de este lagrangiano:

$$S = \int dt L = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (2.2)$$

El principio de mínima acción afirma que un sistema evoluciona entre dos tiempos siguiendo el camino que hace que la acción sea un extremo mínimo:

$$\delta S = \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right] = \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] \delta \phi = 0 \quad (2.3)$$

donde se ha usado la condición de que los campos permanecen constantes en el infinito  $\delta \phi|_\Sigma = 0$ :

$$\int d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) = \int d^4x \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right] - \int d^4x \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \quad (2.4)$$

El primer término del lado derecho de la igualdad se anula, lo que se puede ver usando el teorema de Stokes y aplicando la condición recién mencionada:

$$\int_V d^4x \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right] = \int_\Sigma dA n_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right] \quad (2.5)$$

De esta manera se ha obtenido la ecuación de Euler-Lagrange para el campo  $\phi$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0 \quad (2.6)$$

#### b) Formulación hamiltoniana

Aunque la formulación lagrangiana es especialmente útil por ser explícitamente invariante Lorentz, la formulación hamiltoniana permite un paso más sencillo a la mecánica cuántica mediante la llamada segunda cuantización. En esta formulación se puede definir la densidad de momento como:

$$\Pi(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{x}, t)} \quad (2.7)$$

El hamiltoniano se escribe entonces como una integral de una densidad hamiltoniana  $\mathcal{H}$ :

$$H = \int d^3x \left[ \Pi(\mathbf{x}, t) \dot{\phi}(\mathbf{x}, t) - \mathcal{L} \right] \equiv \int d^3x \mathcal{H} \quad (2.8)$$

## 2.2. Campo de Klein-Gordon real

El campo de Klein-Gordon es un campo escalar libre. Si además el campo es real, su densidad lagrangiana vendrá determinada por la expresión:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left[ \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi - \mu^2 \phi^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \dot{\phi}^2 - (\nabla \phi)^2 - \mu^2 \phi^2 \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde  $\mu = m/\hbar$ . Utilizando la ecuación de Euler-Lagrange (2.6) se obtiene la ecuación de Klein-Gordon del campo  $\phi$ :

$$\left[ \square + \mu^2 \right] \phi = 0 \quad \text{o de otra forma} \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \mu^2 \right) \phi = 0 \quad (2.10)$$

Por conveniencia, se puede definir un operador  $\hat{L} = -\Delta + \mu^2$  de tal forma que la ecuación se escriba:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hat{L} \right) \phi = 0 \quad (2.11)$$

Usando la definición del hamiltoniano dada en la ecuación (2.8), se obtiene el hamiltoniano del campo de Klein-Gordon real:

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x \frac{1}{2} \left[ \dot{\phi}^2 + (\nabla \phi)^2 + \mu \phi^2 \right] \quad (2.12)$$

donde la densidad de momento conjugada del campo  $\phi$  es:

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi} \quad (2.13)$$

El siguiente paso es cuantizar el campo. Para hacerlo, hay que convertir  $\phi$  y  $\Pi$  en operadores y establecer las relaciones de conmutación canónicas. Se seguirán [1], [2]. Para un

sistema discreto con magnitudes conjugadas  $\hat{q}_i$  y  $\hat{p}_j$  estas relaciones son:

$$\begin{aligned} [\hat{q}_i, \hat{p}_j] &= i\hbar\delta_{ij} \\ [\hat{q}_i, \hat{q}_j] &= 0 = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] \end{aligned} \quad (2.14)$$

En un sistema continuo la generalización consiste en cambiar la delta de Kronecker por la delta de Dirac. Para tiempos iguales se tiene:

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \hat{\Pi}(\mathbf{y}, t)] &= i\hbar\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ [\hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \hat{\Pi}(\mathbf{y}, t)] &= [\hat{\phi}(\mathbf{y}, t), \hat{\Pi}(\mathbf{x}, t)] = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Ahora hay que buscar una posible solución para la ecuación de Klein-Gordon (2.10). Una buena opción es utilizar una descomposición del campo  $\phi$  en modos normales:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \sum_{\omega} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\omega t} \phi_{\omega}(\mathbf{x}) + c.c. \quad (2.16)$$

donde *c.c.* hace referencia al complejo conjugado. La descomposición en modos no es casual, ya que permite interpretar cada modo como un estado del campo cuántico de una partícula libre. De esta forma, la ecuación de Klein-Gordon (2.11) se convierte en:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hat{L} \right) \phi = \sum_{\omega} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\omega t} (-\omega^2 + \hat{L}) \phi_{\omega}(\mathbf{x}) + c.c. = 0 \quad (2.17)$$

Teniendo en cuenta la independencia lineal de las funciones  $\phi_{\omega}(\mathbf{x})$ , la ecuación anterior debe ser satisfecha para cada uno de los sumandos por separado:

$$[-\omega^2 + \hat{L}] \phi_{\omega}(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.18)$$

Reordenando esta ecuación, se puede ver que cada modo es una autofunción del operador  $\hat{L}$  con valor propio  $\omega^2$ :

$$\hat{L} \phi_{\omega}(\mathbf{x}) = \omega^2 \phi_{\omega}(\mathbf{x}) \quad (2.19)$$

En el caso que se está tratando, esta ecuación se escribe como:

$$(-\Delta + \mu^2) \phi_{\omega}(\mathbf{x}) = \omega^2 \phi_{\omega}(\mathbf{x}) \quad (2.20)$$

La solución son ondas planas, lo cuál es lógico pues es un campo libre:

$$\phi_{\omega}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} A_{\omega, \mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (2.21)$$

La suma es sobre aquellas  $\mathbf{k}$  que verifican:

$$\omega^2 = \mathbf{k}^2 + \mu^2 \quad (2.22)$$

En este caso, la expansión (2.16) se escribe:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \sum_{\omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\omega t} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} A_{\omega,\mathbf{k}} + \sum_{\omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i\omega t} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} B_{\omega,\mathbf{k}} \quad (2.23)$$

Todas las sumas son formales, ya que en general pueden ser integrales si el espacio no es compacto, o sumas discretas en caso contrario. En el caso de escribirse como integrales, la integración ha de hacerse utilizando un elemento de volumen  $d^3k/(2\pi)^3$ .

El primer sumatorio se realiza sobre los  $\omega$  tales que  $\omega^2$  pertenece al espectro de  $\hat{L}$  (2.19). El segundo sumatorio se realiza sobre las infinitas  $\mathbf{k}$  que satisfacen la relación de dispersión (2.22) para cada una de las infinitas  $\omega$ . Las reglas de conmutación canónicas entre campos y densidades de momento inducirán unas reglas de conmutación entre los coeficientes  $A_{\omega,\mathbf{k}}$  y  $B_{\omega,\mathbf{k}}$ . Para esclarecer las mismas es conveniente realizar un breve repaso del oscilador armónico cuántico simple.

### 2.2.1. Oscilador armónico cuántico simple

El hamiltoniano de un oscilador armónico simple se escribe como:

$$\hat{H}_{HO} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{\omega^2}{2} \hat{x}^2 \quad (2.24)$$

Para encontrar los autovalores del hamiltoniano, se hace uso de los operadores escalera, pudiendo reescribir así  $\hat{x}$  y  $\hat{p}$ :

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \frac{1}{\sqrt{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \\ \hat{p} &= i\sqrt{\frac{m\omega}{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \end{aligned} \quad (2.25)$$

La relación de conmutación de estos operadores escalera es:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (2.26)$$

De esta forma, se puede reescribir el hamiltoniano como:

$$\hat{H} = \hbar\omega \left( \hat{N} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.27)$$

donde  $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ .

Uno de los vectores propios es el que implica  $\hat{a} |0\rangle = 0$ . Su valor propio asociado es la energía del estado fundamental,  $\frac{1}{2}\hbar\omega$ . Usando los conmutadores que relacionan  $\hat{N}$  con los operadores escalera:

$$[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger \quad [\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a} \quad (2.28)$$

se obtienen los vectores propios:

$$|n\rangle \equiv (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle \quad (2.29)$$

Los autovalores del hamiltoniano se escriben entonces como  $(n + \frac{1}{2}) \hbar\omega$ .

### 2.2.2. Aplicación al campo de Klein-Gordon real

Se puede usar un método similar para buscar el espectro del hamiltoniano de Klein-Gordon real. Es por ello que se usa la segunda cuantización, en la que los campos clásicos promocionan a operadores, de tal forma que los coeficientes de la expansión clásica (2.23) pasan a ser operadores del espacio de Fock. En analogía con (2.25), se puede escribir el campo y su densidad de momento conjugada como operadores:

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\omega} \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2V\omega}} \left( \hat{a}_{\omega, \mathbf{k}} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + \hat{a}_{\omega, \mathbf{k}}^\dagger e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) \quad (2.30)$$

$$\hat{\Pi}(\mathbf{x}, t) = \dot{\hat{\phi}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\omega} \sum_{\mathbf{k}} -i \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2V}} \left( \hat{a}_{\omega, \mathbf{k}} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} - \hat{a}_{\omega, \mathbf{k}}^\dagger e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) \quad (2.31)$$

Utilizando las reglas de conmutación canónicas (2.15), se deducen las reglas de conmutación entre los operadores  $\hat{a}_{\omega', \mathbf{k}'}$  y  $\hat{a}_{\omega, \mathbf{k}}^\dagger$ :

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{\omega, \mathbf{k}}, \hat{a}_{\omega', \mathbf{k}'}^\dagger] &= \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \\ [\hat{a}_{\omega, \mathbf{k}}, \hat{a}_{\omega', \mathbf{k}'}] &= [\hat{a}_{\omega, \mathbf{k}}^\dagger, \hat{a}_{\omega', \mathbf{k}'}^\dagger] = 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

El siguiente paso es expresar el hamiltoniano (2.12) en función de los nuevos términos obtenidos:

$$\begin{aligned} \hat{H} = \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{2} \sum_{\omega, \omega'} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} & \left[ -\frac{\hbar\sqrt{\omega\omega'}}{2V} \left( \hat{a}_{\omega, \mathbf{k}} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} - \hat{a}_{\omega, \mathbf{k}}^\dagger e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) \left( \hat{a}_{\omega', \mathbf{k}'} e^{-i(\omega' t - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x})} - \hat{a}_{\omega', \mathbf{k}'}^\dagger e^{i(\omega' t - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x})} \right) \right. \\ & - \frac{\hbar\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'}{2V\sqrt{\omega\omega'}} \left( \hat{a}_{\omega, \mathbf{k}} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} - \hat{a}_{\omega, \mathbf{k}}^\dagger e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) \left( \hat{a}_{\omega', \mathbf{k}'} e^{-i(\omega' t - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x})} - \hat{a}_{\omega', \mathbf{k}'}^\dagger e^{i(\omega' t - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x})} \right) \\ & \left. + \frac{\hbar\mu^2}{2V\sqrt{\omega\omega'}} \left( \hat{a}_{\omega, \mathbf{k}} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + \hat{a}_{\omega, \mathbf{k}}^\dagger e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) \left( \hat{a}_{\omega', \mathbf{k}'} e^{-i(\omega' t - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x})} + \hat{a}_{\omega', \mathbf{k}'}^\dagger e^{i(\omega' t - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x})} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.33)$$

Integrando en  $d^3\mathbf{x}$  se obtienen  $V\delta^{(3)}(\mathbf{k} \pm \mathbf{k}')$ , y usando la relación (2.22) se obtiene  $\omega = \omega'$ . El hamiltoniano queda ahora:

$$\hat{H} = \sum_{\omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar}{4\omega} \left[ (-\omega^2 + \mathbf{k}^2 + \mu^2) (\hat{a}_{\omega,\mathbf{k}}\hat{a}_{\omega,-\mathbf{k}}e^{-2i\omega t} + \hat{a}_{\omega,\mathbf{k}}^{\dagger}\hat{a}_{\omega,-\mathbf{k}}^{\dagger}e^{2i\omega t}) \right. \\ \left. + (\omega^2 + \mathbf{k}^2 + \mu^2) (\hat{a}_{\omega,\mathbf{k}}\hat{a}_{\omega,\mathbf{k}}^{\dagger} + \hat{a}_{\omega,\mathbf{k}}^{\dagger}\hat{a}_{\omega,\mathbf{k}}) \right] \quad (2.34)$$

El primer término se hace cero al tener en cuenta la relación (2.22), por lo que queda finalmente:

$$\hat{H} = \sum_{\omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathbf{k}}) \quad (2.35)$$

Y usando las relaciones de conmutación (2.32):

$$\hat{H} = \sum_{\omega} \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega \left( \hat{a}_{\omega,\mathbf{k}}^{\dagger}\hat{a}_{\omega,\mathbf{k}} + \frac{1}{2} [\hat{a}_{\omega,\mathbf{k}}, \hat{a}_{\omega,\mathbf{k}}^{\dagger}] \right) \\ = \sum_{\omega} \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega \left( \hat{a}_{\omega,\mathbf{k}}^{\dagger}\hat{a}_{\omega,\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) \\ = \sum_{\omega} \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega \left( \hat{N}_{\omega,\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.36)$$

El hamiltoniano corresponde a un conjunto infinito de osciladores armónicos desacoplados. Esto se interpreta en teoría cuántica de campos y mediante la segunda cuantización como si cada oscilador correspondiese a una partícula en un estado definido, sin interactuar entre sí. El hecho de que pueda haber varias partículas en el mismo estado, es decir, con la misma frecuencia  $\omega$ , implica que estas siguen la estadística de Bose-Einstein. Además tendrán espín 0 por ser un campo escalar. Así pues, un campo cuántico sin autointeracción puede entenderse como una colectividad macrocanónica de partículas idénticas que no interactúan entre sí.

El estado fundamental del hamiltoniano de la teoría de campos cuánticos se denomina estado de vacío. En dicho estado, todos los osciladores armónicos se encuentran en el estado de mínima energía. Siguiendo la interpretación de la segunda cuantización, el estado de vacío corresponde a la situación de cero partículas, pues es autovector de todos los operadores número  $\hat{N}_{\omega,\mathbf{k}}$  con autovalor cero. No obstante, el principio de incertidumbre de Heisenberg permite pequeñas fluctuaciones cuánticas en breves lapsos de tiempo, lo que en teoría cuántica de campos se manifiesta en diagramas lazo, dando lugar a creación de pares partícula-antipartícula virtuales. Esto hace que haya una energía remanente aún con cero partículas reales. Dicha energía viene dada el valor esperado del hamiltoniano de teoría cuántica de campos en el estado de vacío, que se denominará  $|0\rangle$  en notación de Dirac:

$$E_0 = \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \frac{\hbar}{2} \sum_{\omega} \sum_{\mathbf{k}} \omega \quad (2.37)$$

Además, el hecho de que el sumatorio sea infinito hace que la energía del vacío resulte ser

un número también infinito. Este infinito se debe a no haber elegido una referencia sobre la que medir energías, ya que solo las diferencias de energía son observables. Para buscar esta referencia se hace uso de la regularización y renormalización, como se verá en siguientes apartados.

El sumatorio se hace sobre los  $\omega$  para los que  $\omega^2$  es autovalor de  $\hat{L}$  (2.19). Como el operador  $\hat{L}$  es lineal sobre  $\mathcal{L}^2$ , se puede interpretar como una matriz de un endomorfismo en dicho espacio vectorial. Con esta interpretación, y teniendo en cuenta que la traza de una matriz es la suma de sus autovalores, se puede reescribir esta energía como:

$$E_0 = \frac{\hbar}{2} \text{Tr} \left( \hat{L}^{1/2} \right) \quad (2.38)$$

lo cual será especialmente útil en regularización por funciones zeta.

### 2.3. Campo de Klein-Gordon complejo

El caso del campo de Klein-Gordon real corresponde al de una partícula sin carga, cuya antipartícula es ella misma. Si se quiere trabajar con una partícula cargada y su antipartícula, se ha de hacer uso del campo de Klein-Gordon complejo. La densidad lagrangiana en este caso es:

$$\mathcal{L} = \partial_\nu \phi^* \partial^\nu \phi - \mu^2 \phi^* \phi \quad (2.39)$$

Los campos  $\phi$  y  $\phi^*$  son independientes, por lo que se aplica la ecuación de Euler-Lagrange (2.6) para cada uno de ellos, obteniendo dos ecuaciones de Klein-Gordon:

$$\left[ \square + \mu^2 \right] \phi = 0 \quad \left[ \square + \mu^2 \right] \phi^* = 0 \quad (2.40)$$

o escrito con el operador  $\hat{L}$  anteriormente definido:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hat{L} \right) \phi = 0 \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hat{L} \right) \phi^* = 0 \quad (2.41)$$

Cada campo tendrá una densidad de momento:

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}^* \quad \Pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^*} = \dot{\phi} \quad (2.42)$$

Usando esto, las relaciones de conmutación (2.15) se convierten en:

$$\begin{aligned}
\left[ \hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \hat{\phi}^*(\mathbf{y}, t) \right] &= \left[ \hat{\phi}^*(\mathbf{x}, t), \hat{\phi}(\mathbf{y}, t) \right] = i\hbar\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
\left[ \hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \hat{\phi}(\mathbf{y}, t) \right] &= \left[ \hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \hat{\phi}^*(\mathbf{y}, t) \right] = \left[ \hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \hat{\phi}(\mathbf{y}, t) \right] \\
&= \left[ \hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \hat{\phi}^*(\mathbf{y}, t) \right] = \left[ \hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \hat{\phi}(\mathbf{y}, t) \right] = 0
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Análogamente a como se hizo en la sección anterior, el campo  $\phi$  y su adjunto también pueden expandirse en modos usando operadores escalar, convirtiéndose en operadores:

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\omega} \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2V\omega}} \left( \hat{a}_{\omega, \mathbf{k}} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + \hat{b}_{\omega, \mathbf{k}}^{\dagger} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) \tag{2.44}$$

$$\hat{\phi}^*(\mathbf{x}, t) = \sum_{\omega} \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2V\omega}} \left( \hat{b}_{\omega, \mathbf{k}} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + \hat{a}_{\omega, \mathbf{k}}^{\dagger} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) \tag{2.45}$$

Los únicos conmutadores no nulos entre estos operadores escalar son:

$$\left[ \hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\omega', \mathbf{k}'}^{\dagger} \right] = \left[ \hat{b}_{\omega, \mathbf{k}}, \hat{b}_{\omega', \mathbf{k}'}^{\dagger} \right] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \tag{2.46}$$

En general, cada modo del campo  $\hat{\phi}$  es un estado de una partícula de carga  $+q$ , mientras que cada modo del campo  $\hat{\phi}^*$  es un estado de su antipartícula de carga  $-q$ . Pero también hay casos de partículas neutras cuya antipartícula no es ella misma, sino otra partícula que solo difiere en el valor de la hipercarga fuerte. Este es el caso de  $K^0$  y su antipartícula  $\bar{K}^0$  [1].

El siguiente paso sería desarrollar el hamiltoniano igual que se hizo en la sección anterior. Sin embargo, siempre que no se requiera trabajar con cargas conservadas, conviene redefinir  $\phi$  y  $\phi^*$  en términos de dos nuevos campos reales independientes  $\phi_1$  y  $\phi_2$ :

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2) \quad \phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 - i\phi_2) \tag{2.47}$$

De esta forma, la densidad lagrangiana (2.39) se escribe ahora:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ \partial_{\nu} \phi_1 \partial^{\nu} \phi_1 - \mu^2 \phi_1^2 \right] + \frac{1}{2} \left[ \partial_{\nu} \phi_2 \partial^{\nu} \phi_2 - \mu^2 \phi_2^2 \right] = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \tag{2.48}$$

Está claro que el problema queda reducido ahora a la resolución de dos campos escalares reales. Esto implica que el procedimiento es completamente análogo al realizado en la sección previa. Cada uno de los campos  $\phi_1$  y  $\phi_2$  tendrá su densidad de momento y las relaciones de conmutación al promocionar a operadores:

$$\begin{aligned}
\left[ \hat{\phi}_i(\mathbf{x}, t), \hat{\phi}_j(\mathbf{y}, t) \right] &= \left[ \hat{\Pi}_i(\mathbf{x}, t), \hat{\Pi}_j(\mathbf{y}, t) \right] = 0 \quad \forall i, j, \mathbf{x}, \mathbf{y} \\
\left[ \hat{\phi}_i(\mathbf{x}, t), \hat{\Pi}_j(\mathbf{y}, t) \right] &= \delta_{i,j} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Al ser dos campos independientes, cada uno de ellos se podrá expandir en modos usando los operadores escalera de cada uno. Sin embargo, estos modos no son los estados de una partícula, sino una combinación lineal de estados de la partícula con carga y su antipartícula.

El hecho de que los campos  $\hat{\phi}_1$  y  $\hat{\phi}_2$  se expandan en modos independientes hace que el hamiltoniano total sea suma de dos hamiltonianos independientes:

$$\begin{aligned}
\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 &= \sum_{\omega} \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega \left( \hat{a}_{\omega,\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\omega,\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) + \sum_{\omega} \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega \left( \hat{b}_{\omega,\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{b}_{\omega,\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) \\
&= \sum_{\omega} \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega \left( \hat{a}_{\omega,\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\omega,\mathbf{k}} + \hat{b}_{\omega,\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{b}_{\omega,\mathbf{k}} + 1 \right) \\
&= \sum_{\omega} \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega \left( \hat{N}_{\omega,\mathbf{k}}(\hat{a}) + \hat{N}_{\omega,\mathbf{k}}(\hat{b}) + 1 \right)
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Es obvio que sigue habiendo el mismo problema con el infinito de la energía del vacío, siendo esta una suma infinita de  $\hbar\omega$ .

Es importante recordar que los campos  $\hat{\phi}_1$  y  $\hat{\phi}_2$  no describen partículas cargadas, y solo una combinación lineal de ambos es capaz de hacerlo, como son los campos complejos descritos (2.47). Es por ello, que siempre que se trabaja con conservación de cargas, se suelen usar directamente los campos complejos [1].

### 3. Fluctuaciones cuánticas en backgrounds clásicos

El desarrollo realizado para el campo libre puede generalizarse a campos sin autointeracción pero en interacción con campos clásicos. Por simplicidad, se trabajará en una dimensión temporal y una espacial. La acción de un campo escalar relativista cualquiera,  $\phi(x, t)$ , toma la forma:

$$S(\phi) = \int dx dt \left[ \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - U(\phi) \right] \tag{3.1}$$

siendo  $U(\phi)$  un potencial de autointeracción del mismo. La ecuación de movimiento del campo  $\phi$  se obtiene haciendo uso de la ecuación de Euler-Lagrange (2.6):

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi + \frac{\partial U(\phi)}{\partial \phi} = 0 \tag{3.2}$$

o simplificando la notación:

$$\left( \partial_t^2 - \partial_x^2 \right) \phi + U'(\phi) = 0 \tag{3.3}$$

Las ecuaciones de campo para el caso estático toman la forma:

$$-\phi'' + U'(\phi) = 0 \quad (3.4)$$

Si se supone  $\phi_c(x)$  como una solución que resuelve la ecuación, el siguiente paso es ver qué ocurre cuando aparecen pequeñas fluctuaciones cuánticas  $\eta(x, t)$ . Estas fluctuaciones son pequeños cambios de energía espontáneos permitidos por la indeterminación de Heisenberg  $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$ , sin que la conservación de energía sea violada. La interpretación de estos cambios de energía se basa en la creación de pares partícula-antipartícula virtuales.

Con estas fluctuaciones, el campo pasa a ser:

$$\phi(x, t) = \phi_c(x) + \eta(x, t) \quad (3.5)$$

Ahora la acción del campo se puede desarrollar hasta orden 2 en las fluctuaciones alrededor de  $\phi_c$ :

$$S(\phi_c + \eta) = S(\phi_c) + \delta S_{\phi_c}(\eta) + \frac{\delta^2 S_{\phi_c}(\eta^2)}{2} \quad (3.6)$$

donde:

$$\delta S_{\phi_c}(\eta) = \int dx dt \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \Big|_{\phi_c} \eta \quad (3.7)$$

se anula por el principio de mínima acción, ya que  $\phi_c$  es solución de las ecuaciones de campo. Aplicando la regla de la cadena al último término del desarrollo se llega a:

$$\delta^2 S_{\phi_c}(\eta^2) = \int dx dt \left( \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \phi^2} - \partial_\mu \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)^2} \right) \Big|_{\phi_c} \eta^2 \quad (3.8)$$

El resultado es entonces una acción que se descompone en dos, la acción de  $\phi_c$  y una nueva acción de la fluctuación  $\eta$ :

$$S(\phi) = S(\phi_c + \eta) = S(\phi_c) + \frac{1}{2} \int dx dt \left( \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta - U''(\phi_c) \eta^2 \right) \quad (3.9)$$

$S(\phi_c)$  es un valor fijo ya que  $\phi_c$  es solución. No influye en la dinámica de las fluctuaciones cuánticas alrededor de la solución clásica  $\phi_c$ . Esto hace que se pueda decir que la dinámica del campo viene dada por la acción de la fluctuación  $\eta$ . Además, como  $\phi_c$  tiene dependencia con  $x$ , se puede redefinir  $U''(\phi_c)$  como un potencial  $V_c(x)$  de tal forma que la acción de esta fluctuación quede:

$$S(\eta) = \frac{1}{2} \int dx dt \left( \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta - V_c(x) \eta^2 \right) \quad (3.10)$$

Pudiendo escribirse la densidad lagrangiana como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\dot{\eta}^2 - (\nabla\eta)^2 - V_c(x)\eta^2] \quad (3.11)$$

de donde se deduce la densidad de momento:

$$\Pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\eta}} = \dot{\eta} \quad (3.12)$$

Las relaciones de conmutación entre campos y densidades de momentos para mismo tiempo deberán ser las mismas que en (2.15), cambiando las  $\phi$  por  $\eta$ .

El hamiltoniano será ahora:

$$H = \frac{1}{2} \int dx [\dot{\eta}^2 + (\nabla\eta)^2 + V_c(x)\eta^2] \quad (3.13)$$

Las ecuaciones de campo para pequeñas fluctuaciones alrededor de una solución clásica estática son:

$$\left(\partial_t^2 - \partial_x^2 + V_c(x)\right)\eta = 0 \quad (3.14)$$

Se puede definir un operador  $\hat{L}_v = -\partial_x^2 + V_c(x)$  de tal forma que la ecuación se escriba ahora:

$$\left(\partial_t^2 + \hat{L}_v\right)\eta = 0 \quad (3.15)$$

Igual que se hizo en el caso del campo libre, se puede cuantizar el campo. Para ello, se hace una expansión en modos, cada uno de los cuales es un estado de una partícula en un background clásico.

$$\eta(x, t) = \sum_{\omega} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\omega t} \eta_{\omega}(x) + c.c. \quad (3.16)$$

Sustituyendo en la ecuación (3.15) se obtiene que cada  $\eta_{\omega}(x)$  verifica:

$$\hat{L}_v \eta_{\omega}(x) = \omega^2 \eta_{\omega}(x) \quad (3.17)$$

Esto prueba que las  $\omega$  de la expansión son autovalores del operador  $\hat{L}_v$ , por lo que la suma sobre  $\omega$  es en realidad una suma sobre el espectro de  $\hat{L}_v$ . En general, cada  $\eta_{\omega}$  será combinación de las autofunciones con autovalor  $\omega^2$ . El siguiente paso es introducir un índice  $\Lambda$  que recorra toda esta base de autofunciones de autovalor  $\omega^2$ , análogamente al momento  $\mathbf{k}$  en el caso libre ya tratado:

$$\eta_{\omega} = \sum_{\Lambda} A_{\omega, \Lambda} f_{\omega, \Lambda}(x) \quad (3.18)$$

En este caso genérico, la ecuación que rige la relación entre  $\omega$  y  $\Lambda$ , igual que en el caso libre era la ecuación (2.22), es:

$$\omega^2 f_{\omega,\Lambda}(x) = -\frac{\partial^2 f_{\omega,\Lambda}(x)}{\partial x^2} + V_c(x) f_{\omega,\Lambda}(x) \quad (3.19)$$

Ahora solo queda realizar la expansión (3.16) introduciendo estas  $\eta_\omega$ :

$$\eta(x, t) = \sum_\omega \sum_\Lambda \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\omega t} A_{\omega,\Lambda} f_{\omega,\Lambda}(x) + c.c. \quad (3.20)$$

El caso es análogo al caso libre, pudiendo escribir esta expansión en términos de operadores escalera  $\hat{a}_\Lambda$  y  $\hat{a}_\Lambda^\dagger$ :

$$\hat{\eta}(x, t) = \sum_\omega \sum_\Lambda \sqrt{\frac{\hbar}{2V\omega}} \left( \hat{a}_{\omega,\Lambda} f_{\omega,\Lambda}(x) e^{-i\omega t} + \hat{a}_{\omega,\Lambda}^\dagger f_{\omega,\Lambda}^*(x) e^{i\omega t} \right) \quad (3.21)$$

Para continuar se hará la suposición de que  $\hat{L}_v$  es no negativo, es decir, todos sus autovalores son  $\omega^2 > 0$ , lo que implica que todas las  $\omega$  son reales. El hecho de que  $\hat{L}_v$  sea no negativo hace que la solución clásica  $\phi_c$  no solo sea estática, sino también estable. A su vez se deduce que la base de autofunciones  $f_\Lambda(x)$  es completa y densa en  $\mathcal{L}^2$ , verificando lo mismo que hacían las ondas planas en la sección anterior. Concretamente, se podrá desarrollar el hamiltoniano de la misma manera, llegando a un hamiltoniano colección de osciladores armónicos:

$$\hat{H} = \sum_\omega \sum_\Lambda \hbar\omega \left( \hat{a}_{\omega,\Lambda}^\dagger \hat{a}_{\omega,\Lambda} + \frac{1}{2} \right) = \sum_\omega \sum_\Lambda \hbar\omega \left( \hat{N}_{\omega,\Lambda} + \frac{1}{2} \right) \quad (3.22)$$

De este hamiltoniano se demuestra que  $\hat{L}_v$  es no negativo, ya que si no fuese así, los autovalores  $\omega$  podrían tener parte imaginaria, haciendo que el hamiltoniano no fuese un operador hermítico. Como el hamiltoniano ha de ser un observable, este caso no se puede dar y  $\hat{L}_v$  es no negativo.

## 4. Efecto Casimir escalar con condiciones Dirichlet

El caso más simple de background clásico consiste en imponer el confinamiento de las fluctuaciones cuánticas de vacío entre dos placas planas, paralelas y macroscópicas. Dichas placas pueden modelarse de forma efectiva mediante condiciones de contorno sobre las fluctuaciones cuánticas de vacío entre placas. El primero en estudiar esto fue Hendrik Casimir para el caso del campo electromagnético. En su aproximación supuso dos placas metálicas conductoras ideales, infinitamente delgadas y de superficie infinita, colocadas paralelas y modeladas por condiciones de contorno Dirichlet [4]. Esto le permitió regularizar la energía del vacío, dando lugar a una energía por unidad de área. Para ello, midió la diferencia de energía de vacío entre el campo electromagnético cuantizado en presencia de estas placas y la del mismo campo en el espacio libre de Minkowski.

Es por ello que sería incorrecto ignorar la energía de vacío en presencia de barreras materiales, ya que las frecuencias de los osciladores del campo dependen de la separación entre ellas. Esto tiene una importante consecuencia, y es que la energía depende de la distancia

entre placas, una variable que se puede cambiar en el laboratorio, y medir estas diferencias de energía respecto al espacio libre de Minkowski. El valor de energía que calculó Casimir fue:

$$E(a) = -\frac{\pi^2 \hbar}{720 a^3} \quad (4.1)$$

donde  $a$  es la separación entre placas. La fuerza que aparece entre las placas resulta ser atractiva e igual a:

$$F(a) = -\frac{\partial E(a)}{\partial a} = -\frac{\pi^2 \hbar}{240 a^4} \quad (4.2)$$

El objetivo ahora es llegar a esta energía en el caso de una dimensión temporal y una espacial. Para empezar, se toma un campo escalar  $\phi(t, x)$  que satisface la ecuación de Klein-Gordon en dos dimensiones espacio-temporales:

$$\square_2 \phi(t, x) + \mu^2 \phi(t, x) = 0 \quad (4.3)$$

Por analogía con (2.20), se tiene:

$$\hat{L}_1 \phi_\omega(x) = \omega^2 \phi_\omega(x) \quad (4.4)$$

El siguiente paso es tomar unas condiciones de contorno en cada una de los límites. Esto hará que los modos que aparecen entre los puntos extremos sean discretos, y no infinitos como en el campo libre. En el caso tratado, se impondrán las condiciones de contorno de Dirichlet, siguiendo el modelo Bordag [3]. Si se tiene un punto límite en  $x = 0$  y otro en  $x = a$ , estas condiciones se escriben como:

$$\phi(t, 0) = \phi(t, a) = 0 \quad (4.5)$$

Primero hay que buscar el espectro de las oscilaciones para  $0 < x < a$ . Las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon con estas condiciones son del tipo:

$$\phi_n(t, x) = A(a, \omega_n) e^{-i\omega_n t} \sin(k_n x) + c.c. \quad (4.6)$$

donde  $A(a, \omega_n)$  es una constante y  $\omega_n$  y  $k_n$  vienen dados por:

$$\omega_n = (\mu^2 + k_n^2)^{1/2} \quad k_n = \frac{\pi n}{a}, \quad n = 1, 2, 3... \quad (4.7)$$

El hecho de que los valores de  $\omega_n$  sean discretos hace que la energía del vacío en este intervalo

sea también suma discreta de energías. Como ya se vió en primera instancia en (2.37), esta energía vendrá dada por:

$$E_0(a, \mu) = \frac{\hbar}{2} \sum_n \omega_n = \frac{\hbar}{2} \sum_n \left( \mu^2 + \frac{\pi^2 n^2}{a^2} \right)^{1/2} \quad (4.8)$$

siendo una suma infinita.

El segundo paso es obtener el espectro en el eje  $-\infty < x < \infty$ . Las soluciones en este caso ya han sido estudiadas anteriormente, viniendo dadas en su forma más general por:

$$\phi_k(t, x) = B(\omega_k) e^{i(\omega_k t - kx)} + c.c. \quad (4.9)$$

siendo  $B(\omega_k)$  una constante. Las frecuencias forman un continuo y vienen dadas por:

$$\omega_k = (\mu^2 + k^2)^{1/2} \quad (4.10)$$

La energía del vacío es en este caso:

$$E_{0M}(\mu) = \frac{\hbar}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \omega_k L = \frac{\hbar}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{dk}{2\pi} (\mu^2 + k^2)^{1/2} L \quad (4.11)$$

donde se ha reformulado el sumatorio (2.37) en una integral en una dimensión, para lo cuál hay que introducir  $dk/(2\pi)$ . Por otro lado,  $L$  es la longitud del eje, la cuál tiende a infinito. Está claro que esta energía es también infinita, pero no igual a la calculada entre los puntos límites. El siguiente paso consistirá en hacer que estas cantidades sean finitas. Con este propósito se usa el proceso de regularización. Este proceso consiste en modificar las fórmulas usando uno o varios parámetros de forma que desaparezca el infinito. Estos parámetros introducidos artificialmente luego no aparecen en el resultado final.

Hay muchas formas de regularizar el efecto Casimir, en este trabajo se detallarán dos: la regularización clásica y la regularización por funciones zeta.

## 4.1. Regularización clásica

El proceso de regularización más simple consiste en introducir exponenciales que decaigan de la forma  $\exp(-\delta k_n)$  y  $\exp(-\delta k)$  en los dos caso estudiados, siendo  $\delta > 0$  un parámetro. Después del proceso, la regularización se elimina haciendo  $\delta \rightarrow 0$ . Es de vital importancia que el resultado final no dependa de la función elegida para eliminar los infinitos, ya que el resultado no tendría significado físico. Se seguirá el procedimiento de Bordag [3].

Primero se aplica la regularización a la ecuación (4.8). Por simplicidad, se tomará el campo sin masa ( $\mu = 0$ ). Esta elección no es caprichosa, ya que si se tiene en cuenta la masa, aparece un término  $e^{-\mu a}$  en la energía de Casimir que hace que esta sea despreciable a corta distancia [3],[5],[9]. En estas condiciones, la energía del vacío en el intervalo entre placas es:

$$E_0(\delta, a) \equiv \frac{\hbar}{2} \sum_n \frac{\pi n}{a} \exp\left(-\delta \frac{\pi n}{a}\right) = \frac{\pi \hbar}{8a} \sinh^{-2}\left(\frac{\delta \pi}{2a}\right) \quad (4.12)$$

Esta es una cantidad finita, pero tiende a infinito cuando  $\delta$  tiende a cero. Desarrollando en serie de Laurent para  $\delta$  pequeño se obtiene:

$$E_0(\delta, a) = \frac{\hbar a}{2\pi\delta^2} - \frac{\pi \hbar}{24a} + o(\delta^2) \quad (4.13)$$

donde el término divergente tiene un polo de orden 2 en  $\delta = 0$ .

Ahora hay que regularizar la ecuación (4.11). Haciendo  $\mu = 0$  una vez más, se obtiene:

$$E_{0M}(\delta, L) \equiv \frac{\hbar}{2\pi} \int_0^\infty k \, dk \exp(-\delta k) L = \frac{\hbar L}{2\pi\delta^2} \quad (4.14)$$

Esta es la energía del vacío regularizada de un campo libre propagándose sin placas sobre todo el eje  $x$ , pero lo que interesa es el intervalo  $(0, a)$  sin imponer condiciones de contorno. La energía será entonces:

$$E_{0M}(\delta, L) = \frac{\hbar a}{2\pi\delta^2} \quad (4.15)$$

Ahora solo queda comparar este resultado con el obtenido imponiendo condiciones de contorno en la ecuación (4.13). El término recién calculado coincide con el primer término del desarrollo en serie de la energía entre puntos límites con condiciones Dirichlet. Como ya se ha comentado antes, para obtener resultados finitos uno ha de restar la energía infinita del vacío del intervalo tratado sin condiciones de contorno (4.15). Así se obtiene:

$$E_0(\delta, a) \equiv E_0(\delta, a) - E_{0M}(\delta, a) = -\frac{\pi \hbar}{24a} + o(\delta^2) \quad (4.16)$$

El último paso es eliminar el parámetro  $\delta$ , un proceso que se denomina renormalización. En este caso se obtiene finalmente la energía de Casimir:

$$E(a) = \lim_{\delta \rightarrow 0} E_0(\delta, a) = -\frac{\pi \hbar}{24a} \quad (4.17)$$

Este resultado es análogo al que obtuvo Casimir en su paper original para 3 dimensiones (4.1). La energía de Casimir aumenta a medida que los puntos límites se acercan. La fuerza entre los puntos viene dada por:

$$F(a) = -\frac{\partial E(a)}{\partial a} = -\frac{\pi \hbar}{24a^2} \quad (4.18)$$

También análoga a la de la ecuación (4.2).

## 4.2. Regularización por funciones zeta

La forma más comúnmente utilizada de regularización es la que implica el uso de funciones zeta. Su popularidad se debe a ser la única regularización que da un resultado adecuado al hacer un cálculo en un espacio-tiempo curvo. Este proceso consiste en modificar temporalmente la potencia a la que se eleva la frecuencia en la suma de modos (2.37) [3],[6]:

$$E_0(s) = \frac{M^{2(s+1/2)}}{2} \hbar \sum_{\omega} \omega^{-2s} \quad (4.19)$$

donde  $M^{2(s+1/2)}$  es un valor arbitrario con unidades de masa que se introduce para mantener las dimensiones de  $E_0$ . Desaparece al eliminar la regularización haciendo  $s \rightarrow -1/2$ . El nombre de este tipo de regularización se debe a que la energía del vacío se escribe:

$$E_0(s) = \frac{M^{2(s+1/2)}}{2} \hbar \zeta_{\hat{L}_1}(s) \quad (4.20)$$

la cual está expresada en términos de la función zeta generalizada del operador  $\hat{L}_1$ :

$$\zeta_{\hat{L}_1}(s) = \sum_{\omega} \frac{1}{\omega^{2s}} \quad (4.21)$$

con las  $\omega$  que resuelven la ecuación (2.20) y las condiciones de contorno de Dirichlet (4.5). La función es convergente para  $Re(s) > 1/2$  ya que se está trabajando en una dimensión espacial. El valor que interesa encontrar es el de la ecuación (4.20) cuando  $s \rightarrow -1/2$ , por lo que es necesario calcular  $\zeta_{\hat{L}_1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ . Esta función tiene un polo en  $s = -1/2$ , por lo que hay que elaborar un método para solventar este problema. El objetivo será llegar a expresar esta función zeta en términos de la función zeta de Riemann y usar la continuación analítica de esta. La función zeta de Riemann se define como:

$$\zeta_R(z) = \sum_n \frac{1}{n^z} \quad (4.22)$$

Con las condiciones de contorno mencionadas, las  $\omega$  vienen dadas por la relación (4.7). Si además se supone un campo sin masa, la función zeta (4.21) se escribe ahora como:

$$\zeta_{\hat{L}_1}(s) = \sum_n \frac{1}{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^{2s}} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{-2s} \sum_n \frac{1}{n^{2s}} \quad (4.23)$$

El último sumatorio no es otro que la función zeta de Riemann de  $2s$ , por lo que la relación entre funciones zeta queda:

$$\zeta_{\hat{L}_1}(s) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{-2s} \zeta_R(2s) \quad (4.24)$$

Sustituyendo en la energía del vacío (4.20) se obtiene:

$$E_0(s) = \frac{M^{2(s+1/2)}}{2} \hbar \left(\frac{\pi}{a}\right)^{-2s} \zeta_R(2s) \quad (4.25)$$

Para obtener el valor definitivo de la energía hay que eliminar el parámetro  $s$ :

$$E_0 = \lim_{s \rightarrow -1/2} E_0(s) = \frac{\hbar\pi}{2a} \zeta_R(-1) \quad (4.26)$$

Como el valor de  $\zeta_R(-1)$  está tabulado y es igual a  $-1/12$ , el resultado final de la energía de Casimir en una dimensión es, al igual que se obtuvo en (4.17):

$$E_0 = -\frac{\hbar\pi}{24a} \quad (4.27)$$

La fuerza entre placas se calcula de la misma forma que antes, por lo que el resultado también es el mismo que el de la ecuación (4.18).

### 4.3. Generalización en 3 dimensiones

Después de haber obtenido la energía y fuerza de Casimir en una dimensión espacial mediante dos métodos diferentes, uno puede interesarse por llevar estos resultados a tres dimensiones, de forma que se encuentren los valores que encontró el propio Casimir (4.1), (4.2). El colocar dos placas paralelas solo impone condiciones de contorno en una dirección espacial, que tendrá valores discretos de  $k$ , como en el caso unidimensional. Sin embargo, en las dos direcciones paralelas a las placas, no hay condiciones de contorno para los  $k$ , siendo entonces un continuo. Si se supone las placas colocadas perpendiculares al eje  $z$ , los valores de  $\omega$  vienen dados ahora por:

$$\omega_{k_x, k_y, n}^2 = k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 \quad k_x, k_y \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.28)$$

El operador que da los autovalores  $\omega^2$  es el del caso libre en tres dimensiones ya tratado en (2.20). Por ello, la función zeta (4.21) se escribe ahora como  $\zeta_{\hat{L}}(s)$  de la forma:

$$\zeta_{\hat{L}}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_y}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 \right]^{-s} \quad (4.29)$$

Siendo convergente para  $Re(s) > 3/2$ , pero pudiendo hacerse su continuación analítica a todo el plano complejo. Poniendo en forma polar ( $k_{xy}^2 = k_x^2 + k_y^2$ ):

$$\zeta_{\hat{L}}(s) = \int_0^{\infty} \frac{k_{xy} dk_{xy}}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ k_{xy}^2 + \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 \right]^{-s} \quad (4.30)$$

Como  $Re(s) > 3/2$ , la integral converge y se llega a la continuación analítica de la función zeta [7]:

$$\zeta_{\hat{L}}(s) = \frac{1}{4\pi(s-1)} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{2-2s} \sum_{n=1}^{\infty} n^{2-2s} = \frac{1}{4\pi(s-1)} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{2-2s} \zeta_R(2s-2) \quad (4.31)$$

El valor que interesa ahora es cuando  $s \rightarrow -1/2$ , teniendo en cuenta que  $\zeta_R(-3) = 1/120$  se obtiene la energía de Casimir:

$$E_0 = \lim_{s \rightarrow -1/2} \frac{M^{2(s+1/2)}}{2} \hbar \zeta_L(s) = -\frac{\hbar \pi^2}{1440a^3} \quad (4.32)$$

Y la fuerza de Casimir:

$$F_0 = -\frac{\partial E_0}{\partial a} = -\frac{\hbar \pi^2}{480a^4} \quad (4.33)$$

El resultado difiere del valor obtenido por Casimir en un factor 2, que es el número de polarizaciones del campo electromagnético. Estas dos posibles polarizaciones hacen que los modos se dupliquen, haciendo que la energía y la fuerza de Casimir lo hagan también, llegando al resultado original:

$$F_0 = -\frac{\hbar \pi^2}{240a^4} \quad (4.34)$$

#### 4.3.1. Efecto Casimir en la experiencia

Medir la fuerza de Casimir es un problema complicado ya que no es fácil mantener dos placas macroscópicas a distancias inferiores a  $1\mu m$ . Además pueden aparecer problemas debidos a las imperfecciones de los materiales, a las fuerzas electrostáticas residuales o a la dificultad de medir con precisión separaciones tan pequeñas. En la actualidad, los experimentos consisten en una gran esfera y una placa plana mucho más pequeña. El tamaño de la esfera hace que sea localmente aproximable a un plano, por lo que siempre habrá un plano paralelo a la placa. Además se aplican pequeños potenciales que contrarresten los potenciales residuales presentes en las placas. Las distancias típicas utilizadas en los experimentos oscilan entre  $1\mu m - 0,06\mu m$ . [8]

Se puede realizar un cálculo sencillo del orden de magnitud de las fuerzas medidas experimentalmente. Para ello hay que partir de la fuerza de Casimir. En el sistema de unidades utilizado:

$$-\frac{\hbar \pi^2}{240} = -1,30 \cdot 10^{-27} Nm^2 \quad (4.35)$$

Lo que hace que las fuerzas medidas en el laboratorio tomen el espectro de valores según la distancia:

- $F = -0,0013N$  para  $a = 1\mu m$
- $F = -100N$  para  $a = 0,06\mu m$

## 5. Funciones zeta espectrales

Las propiedades físicas de la energía del vacío vienen determinadas por el espectro de operadores diferenciales. Esto conduce al uso de las llamadas funciones espectrales. Siguiendo el procedimiento del libro de K. Kirsten [9], se supone la ecuación de autovalores de un sistema de la forma:

$$\hat{P}\phi_n(x) = \lambda_n\phi_n(x) \quad (5.1)$$

donde típicamente  $\hat{P}$  es un operador de Schrödinger, es decir, tiene la forma  $-\Delta + V(x)$ . Se puede definir la función zeta espectral  $\zeta_{\hat{P}}(s)$  asociada a  $\hat{P}$  como:

$$\zeta_{\hat{P}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s} \quad (5.2)$$

La suma es convergente para  $Re(s) > d/2$ , siendo  $d$  la dimensión del espacio. Sin embargo, se puede hacer su continuación analítica haciendo uso del llamado núcleo de calor  $K(t)$ :

$$\zeta_{\hat{P}}(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} K(t) \quad (5.3)$$

con:

$$K(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \quad (5.4)$$

Para valores reales positivos de  $\lambda_n$  la integral no da problemas con  $t \rightarrow \infty$ . Los únicos problemas podrían aparecer para  $t \rightarrow 0$ . Una expansión del núcleo de calor alrededor de este punto conduce a:

$$K(t) \sim \sum_{l=0,1/2,1,\dots}^{\infty} a_l t^{l-\frac{d}{2}} \quad (5.5)$$

donde los  $a_l$  son los denominados coeficientes del núcleo de calor. Estos coeficientes dependen explícitamente del operador  $\hat{P}$  y de las condiciones de contorno que se impongan. Además, los residuos de la función zeta vendrán dados por:

$$Res(\zeta_{\hat{P}}(s)) = \frac{a_{d/2-s}}{\Gamma(s)} \quad s = \frac{d}{2}, \frac{d-1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, -\frac{2n-1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad (5.6)$$

Y los valores en los enteros no negativos:

$$\zeta_{\hat{P}}(-m) = (-1)^m m! a_{d/2+m} \quad (5.7)$$

La función zeta espectral asociada al operador  $\hat{P}$  tiene polos en  $d/2, (d-1)/2, \dots, 1/2$  para  $d$  par, a los que se añaden polos en  $-(2n+1)/2, n \in \mathbb{N}_0$  si  $d$  es impar. Además,  $\zeta_{\hat{P}}(s)$  es

holomorfa en un entorno de  $s = 0$  por lo que, a partir de la ecuación de autovalores (5.1), se puede escribir:

$$\log \det \hat{P} = \sum_{n=1}^{\infty} \log \lambda_n = -\frac{d}{ds} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s} \Big|_{s=0} = -\frac{d}{ds} \zeta_{\hat{P}}(s) \Big|_{s=0} \quad (5.8)$$

Se llega entonces a una definición:

$$\log \det \hat{P} = -\zeta'_{\hat{P}}(0) \quad (5.9)$$

Además, esto permite definir la traza del operador  $\hat{P}$  como:

$$Tr(\hat{P}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \zeta_{\hat{P}}(-1) \quad (5.10)$$

El espectro no siempre se podrá computar explícitamente, en general solo se podrá hacer en variedades altamente simétricas, como en regiones separadas por planos paralelos.

## 5.1. Aplicación al efecto Casimir

Una vez visto la generalización de las funciones zeta espectrales, se puede pasar ahora a aplicarlo al efecto Casimir del campo escalar libre ya tratado. En este caso, el operador que da el espectro es  $\hat{L}$ , como se vio en la ecuación (2.20):

$$\hat{L}\phi_{\omega}(x) = \omega^2\phi_{\omega}(x) \quad (5.11)$$

La función zeta espectral del operador  $\hat{L}$  se define como:

$$\zeta_{\hat{L}}(s) = \sum_{\omega} \omega^{-2s} = Tr(\hat{L}^{-s}) \quad (5.12)$$

Y la energía del vacío puede escribirse:

$$E_0 = \frac{\hbar}{2} \sum_{\omega} \omega = \frac{\hbar}{2} \zeta_{\hat{L}}(-1/2) \quad (5.13)$$

donde  $\zeta_{\hat{L}}(-1/2)$  es la continuación analítica de la función zeta espectral como se ha visto en el caso general. Esta expresión solo es válida cuando  $\zeta_{\hat{L}}(-1/2)$  es regular en  $s = -1/2$ . Esto depende de las condiciones de contorno impuestas, ya que si la dimensión es impar, habrá un polo en  $-1/2$ . Esto impide dar un valor finito de la energía de Casimir, por lo que se puede hacer un desarrollo de la función zeta alrededor de este valor siempre que sea posible [6]:

$$\zeta\left(-\frac{1}{2} + \epsilon\right) = \frac{1}{\epsilon} Res \zeta\left(-\frac{1}{2}\right) + FP \zeta\left(-\frac{1}{2}\right) + o(\epsilon) \quad (5.14)$$

donde  $FP$  hace referencia a la parte finita en  $\epsilon = 0$ . Escribiendo ahora el desarrollo en la energía del vacío se llega a:

$$E_0\left(-\frac{1}{2} + \epsilon\right) = \frac{\hbar}{2\epsilon} \text{Res} \zeta\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar}{2} \left[ FP \zeta\left(-\frac{1}{2}\right) + \text{Res} \zeta\left(-\frac{1}{2}\right) \log(M^2) \right] + o(\epsilon) \quad (5.15)$$

De aquí se puede definir la energía de Casimir como:

$$E_{Cas} = \frac{\hbar}{2} \left[ FP \zeta\left(-\frac{1}{2}\right) + \text{Res} \zeta\left(-\frac{1}{2}\right) \log(M^2) \right] \quad (5.16)$$

Solo en el caso de campos masivos se puede quitar la dependencia con el parámetro de regularización. Sin embargo, se ha demostrado que la parte de la energía del vacío que depende de la distancia entre objetos es independiente de este parámetro, incluso para campos sin masa. Esto hace que el término con el parámetro desaparezca en el valor de la fuerza entre objetos, que es lo que se mide en el laboratorio.

## 6. Efecto Casimir escalar con condiciones Robin

En esta última sección se tratará de hacer el cálculo de la energía de Casimir de un campo escalar en una dimensión espacial con unas condiciones diferentes a las ya vistas de Dirichlet. Por lo mencionado anteriormente, se utilizará un campo escalar sin masa ( $\omega^2 = \mathbf{k}^2$ ), de forma que la ecuación de campo viene dada por:

$$\square \phi(\mathbf{x}, t) = \left(\partial_t^2 - \Delta\right) \phi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (6.1)$$

Y por analogía con (2.11), se puede definir el operador  $\hat{L}_R = -\Delta$  de forma que la ecuación se escriba ahora:

$$\left(\partial_t^2 + \hat{L}_R\right) \phi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (6.2)$$

También por analogía a (2.16), se puede expandir el campo, de forma que queda una ecuación de autovalores:

$$\hat{L}_R \phi_\omega(\mathbf{x}) = \mathbf{k}^2 \phi_\omega(\mathbf{x}) \quad (6.3)$$

Las soluciones son de la forma:

$$\phi_\omega(\mathbf{x}) = A e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + B e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (6.4)$$

El siguiente paso es introducir las condiciones de contorno a utilizar. Estas condiciones solo actuarán en una dirección del espacio ya que el modelo utilizado es el de dos placas paralelas infinitamente delgadas y homogéneas situadas en  $x = 0$  y  $x = a$ . Esto hace que los

valores de  $\mathbf{k}$  en esta dirección sean discretos (se llamarán  $k$ ), manteniéndose continuos en los otros dos ejes (se llamarán  $\vec{k}_{\parallel}$ ). Estas condiciones en su forma más simple son [5]:

$$\frac{d}{dx}\phi_{\omega}(0) = tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)\phi_{\omega}(0) \quad - \quad \frac{d}{dx}\phi_{\omega}(a) = tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)\phi_{\omega}(a) \quad \alpha \in [0, \pi] \quad (6.5)$$

donde  $a$  es la distancia entre placas. Sustituyendo con la expansión (6.4) se llega a:

$$\begin{aligned} ik(A - B) &= tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)(A + B) \\ -ik(Ae^{ika} - Be^{-ika}) &= tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)ik(Ae^{ika} + Be^{-ika}) \end{aligned} \quad (6.6)$$

Reordenando:

$$\begin{aligned} \left[ ik - tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right] A + \left[ -ik - tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right] B &= 0 \\ \left[ -ik - tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right] Ae^{ika} + \left[ +ik - tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right] Be^{-ika} &= 0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

Esto se puede reescribir en términos matriciales como  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$ :

$$\begin{pmatrix} ik - tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) & -ik - tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \left[ -ik - tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right] e^{ika} & \left[ ik - tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right] e^{-ika} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

Para que el sistema tenga soluciones no-triviales, hay que igualar el determinante de la matriz  $\mathbf{M}$  a cero:

$$\det \mathbf{M} = 2i \left[ -2k \cos(ka) tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin(ka) \left[ k^2 - tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right] \right] = 0 \quad (6.9)$$

La función que da el espectro de momentos en la dirección ortogonal a las placas es una función holomorfa:

$$f_R(k) = -2 \cos(ka) tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\sin(ka)}{k} \left( k^2 - tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) \quad (6.10)$$

Se ha dividido entre  $k$  porque, aunque existen cero-modos (Anexo A), no hay contribución de  $k = 0$  en los residuos de la función zeta [5]. Se puede reescribir para evitar posibles problemas en los cálculos numéricos al evaluar la tangente. Para ello se usa la relación:

$$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}} \quad (6.11)$$

Se llega entonces a:

$$f_R(k) = \frac{-2 \cos(ka) \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} + \frac{\sin(ka)}{k} (k^2(1 + \cos(\alpha)) - 1 + \cos(\alpha))}{1 + \cos(\alpha)} \quad (6.12)$$

Se puede simplificar más quitando el denominador ya que no afectará a la determinación del espectro:

$$f_R(k) = -2 \cos(ka) \sin(\alpha) + \frac{\sin(ka)}{k} [k^2 - 1 + (k^2 + 1) \cos(\alpha)] \quad (6.13)$$

Los ceros de esta función espectral determinan los autovalores del operador  $\hat{L}_R$ . Sin embargo, en este caso no se pueden calcular estos autovalores de forma analítica, por lo que habrá que hacer un desarrollo integral que permita hacer un cálculo numérico. Esto permitirá calcular la energía del vacío, la cuál se puede definir de forma análoga a como se hizo en la sección 4.3:

$$E_0 = \lim_{s \rightarrow -1/2} \frac{M^{2(s+1/2)}}{2} \hbar \zeta_{\hat{L}_R}(s) \quad (6.14)$$

donde la función zeta espectral de  $\hat{L}_R$  viene dada por:

$$\zeta_{\hat{L}_R}(s) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d^2 \vec{k}_{\parallel}}{(2\pi)^2} \sum_k (\vec{k}_{\parallel}^2 + k^2)^{-s} \quad (6.15)$$

Y por continuación analítica se llega a:

$$\zeta_{\hat{L}_R}(s) = \frac{1}{4\pi(s-1)} \sum_k (k^2)^{1-s} = \frac{1}{4\pi(s-1)} \zeta_{Robin}(s-1) \quad (6.16)$$

Sustituyendo  $s = -1/2$ , se llega a la expresión de la energía del vacío:

$$E_0 = -\frac{\hbar}{6\pi} \sum_k k^3 = -\frac{\hbar}{6\pi} \zeta_{Robin}(-3/2) \quad (6.17)$$

Pero como se ha visto en la sección anterior, la función  $\zeta_{Robin}(s)$  tendrá un polo en  $s = -3/2$  por ser dimensión impar. Esta divergencia puede eliminarse por diversos métodos. El más directo sería utilizar los coeficientes de la expansión asintótica del núcleo de calor, como ya se ha expuesto anteriormente. Sin embargo, dicho método no permite estudiar el significado físico de cada uno de los términos divergentes eliminados. Mediante la transformada de Mellín que relaciona la función zeta y el núcleo de calor, se puede utilizar una regularización por núcleo de calor. Dicha regularización permite una interpretación física muy clara de los términos divergentes. Usando esta transformación, la energía se puede escribir como:

$$E_0^t = -\frac{\hbar}{6\pi} \sum_k k^3 e^{-tk^2} \quad (6.18)$$

con  $t \rightarrow 0$ . Siguiendo ahora el procedimiento de [10] y [11], se puede hacer una expansión

asintótica en la distancia  $a$  entre placas, obteniendo la energía del vacío regularizada por unidad de área de las placas  $S$ :

$$\frac{E_0^{t,a}}{S} = -\frac{\hbar}{6\pi} \left[ \frac{c'_0}{t^2} a + \frac{c'_1}{t^{3/2}} + \frac{c'}{a^3} + o\left(\frac{t^{1/2}}{a^4}\right) \right] \quad (6.19)$$

O introduciendo la constante en los coeficientes:

$$\frac{E_0^{t,a}}{S} = \frac{c_0}{t^2} a + \frac{c_1}{t^{3/2}} + \frac{c}{a^3} + o\left(\frac{t^{1/2}}{a^4}\right) \quad (6.20)$$

Lo interesante de este método es que permite asignar un significado físico a cada término:

- $\frac{c_0}{t^2} a$  representa la densidad de energía entre las placas. Diverge ya que este espacio es infinito, pues las placas son también infinitas.  $c_0$  viene dado en el caso tratado por:

$$c_0 = -\frac{\hbar}{6\pi} \frac{1}{2\pi} \int dk k^3 e^{-tk^2} \quad (6.21)$$

- $\frac{c_1}{t^{3/2}}$  representa la energía superficial de las placas, es decir la energía de interacción consigo mismas. También diverge por ser las placas infinitas.
- $\frac{c}{a^3}$  es el primer término finito y permite definir la energía de Casimir:

$$E_0^a = \frac{c}{a^3} S \quad (6.22)$$

Como se ha mencionado antes, los  $k$  que satisfacen las condiciones de Robin no pueden calcularse analíticamente. Sin embargo, se puede escribir el sumatorio sobre estos  $k$  en forma integral usando el teorema de los residuos (Anexo B):

$$\sum_k k^3 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} dk k^3 \partial_k \log(f_R(k)) \quad (6.23)$$

donde  $f_R(k)$  es la función espectral espectral (6.10). El contorno  $\gamma$  es un semicírculo de radio infinito con diámetro en el eje imaginario y encerrando todo el eje real positivo. Es en dicho eje donde están contenidos los ceros de  $f_R(k)$  que generan polos simples de  $\partial_k \log(f_R(k))$ . El hecho de que estos ceros estén en el eje real se debe a que el operador  $\hat{L}_R$  es no-negativo, siendo todos su autovalores  $k^2$  positivos o cero, por lo que los  $k$  serán reales. Esto se demostró en el final de la sección 3 en el caso de las fluctuaciones cuánticas, pero el caso es análogo. Este desarrollo permite escribir la energía del vacío regularizada (6.18) como:

$$\frac{E_0^t}{S} = -\frac{\hbar}{6\pi} \sum_k k^3 e^{-tk^2} = -\frac{\hbar}{6\pi} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} dk k^3 e^{-tk^2} \partial_k \log(f_R(k)) \quad (6.24)$$

Ya se ha visto que esta expresión diverge para  $t \rightarrow 0$ . Para calcular la parte finita hay que eliminar los dos términos divergentes. Para ellos se sustrae la energía de un sistema idéntico pero con un tamaño fijo  $a_0 < a$ . De esta forma se obtiene:

$$\frac{c_R}{a^3} = \frac{a_0^3}{a^3 - a_0^3} \lim_{t \rightarrow 0} \left( c_0 (a - a_0) - \frac{1}{S} (E_0^t(a) - E_0^t(a_0)) \right) \quad (6.25)$$

Sustituyendo las energías y  $c_0$ :

$$\frac{c_R}{a^3} = \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{\hbar}{6\pi} \left[ \frac{a_0^3(a - a_0)}{2\pi(a^3 - a_0^3)} \oint_{\gamma} dk k^3 e^{-tk^2} - \frac{a_0^3}{2\pi i(a^3 - a_0^3)} \oint_{\gamma} dk k^3 e^{-tk^2} \partial_k \log \left( \frac{f_R(k)}{f_R^{a_0}(k)} \right) \right] \quad (6.26)$$

Sacando factor común:

$$\frac{c_R}{a^3} = \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{\hbar}{6\pi} \frac{a_0^3}{2\pi i(a^3 - a_0^3)} \oint_{\gamma} dk k^3 e^{-tk^2} \left[ (a - a_0) \frac{k - k^*}{|k - k^*|} - \partial_k \log \left( \frac{f_R(k)}{f_R^{a_0}(k)} \right) \right] \quad (6.27)$$

donde se ha introducido  $(k - k^*)/|k - k^*|$  para poder poner la  $i$  del denominador como factor común. La expresión (6.27) es finita y convergente, por lo que se puede eliminar el núcleo de calor. Por otro lado, ya se ha mencionado que se elige el contorno  $\gamma$  como el semicírculo infinito del lado derecho del plano limitado por el eje imaginario. La integral del semicírculo se anula, quedando una sola integral en el eje imaginario de  $k$ . Esto hace que se pueda escribir  $k$  como  $ik$  e integrar de  $-\infty$  a  $+\infty$ . Pero si además uno se da cuenta de que el integrando es invariante bajo paridad ( $F(ik) = F(-ik)$ ), se puede reducir a integrales entre 0 y  $+\infty$  tras tomar el límite en el que el radio del semicírculo se hace infinito:

$$\frac{c_R}{a^3} = -2 \frac{\hbar}{6\pi} \frac{a_0^3}{2\pi(a^3 - a_0^3)} \int_0^{\infty} dk k^3 \left[ (a - a_0) - \partial_k \log \left( \frac{f_R(ik)}{f_R^{a_0}(ik)} \right) \right] \quad (6.28)$$

Así, la energía de Casimir por unidad de área viene dada por:

$$\frac{E_0}{S} = \frac{-\hbar a_0^3}{6\pi^2(a^3 - a_0^3)} \int_0^{\infty} dk k^3 \left[ a - a_0 - \partial_k \log \left( \frac{f_R(ik)}{f_R^{a_0}(ik)} \right) \right] \quad (6.29)$$

El último paso antes de hacer cálculos numéricos es obtener  $f_R(ik)$ :

$$\begin{aligned} f_R(ik) &= -2 \cos(ika) \sin(\alpha) + \frac{\sin(ika)}{ik} \left[ -k^2 - 1 + (-k^2 + 1) \cos(\alpha) \right] \\ &= -2 \cosh(ka) \sin(\alpha) + \frac{\sinh(ka)}{k} \left[ -k^2 - 1 + (-k^2 + 1) \cos(\alpha) \right] \end{aligned} \quad (6.30)$$

Introduciendo en la ecuación (6.29), se puede hacer un cálculo numérico del coeficiente de Robin  $c_R = \frac{E_0}{S} a^3$  en función del ángulo  $\alpha$  (Figura 1). Se observa que siempre es negativo, por lo que la energía de Casimir también lo será y la fuerza entre placas será siempre atractiva, independientemente del valor de  $\alpha$ . Los dos mínimos se encuentran con  $\alpha = 0$  y  $\alpha = \pi$ . La energía que se calcula a partir del coeficiente  $c_R$  en estos dos mínimos es la misma que se obtiene con las condiciones de Neumann o las ya estudiadas de Dirichlet:

$$\frac{E_0}{S} = -\frac{\pi^2}{720 a^3} \quad (6.31)$$

El hecho de que esta energía sea mínima hace que la fuerza atractiva entre placas sea máxima.

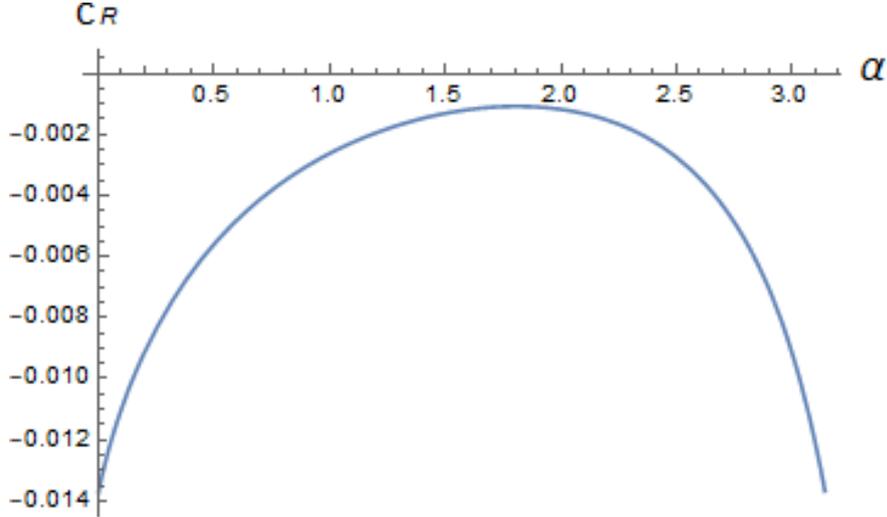


Figura 1: Coeficiente de Robin  $c_R$  en función del ángulo  $\alpha$  para  $a = 10$  y  $a_0 = 1$ .

## 7. Conclusiones

- En este trabajo se ha demostrado que la energía del vacío puede verse como una colección de infinitos osciladores armónicos en su estado fundamental, lo que permite expresar esta energía en términos de la traza de un operador de Schrödinger. Dicha energía es infinita ya que el operador tiene infinitos autovalores. Sin embargo, al aplicar condiciones de contorno, estos autovalores pasan a ser discretos en una dirección, permitiendo evaluar una diferencia de energía frente al caso sin estas condiciones. La diferencia de energía se traduce en una fuerza medible en un laboratorio, la fuerza de Casimir.
- Primero se ha calculado la energía con condiciones Dirichlet, las mismas que utilizó Casimir originalmente y que consisten en dos placas planas paralelas conductoras ideales, infinitamente delgadas y de superficie infinita. Se ha visto que es posible determinar analíticamente los autovalores del operador de Schrödinger asociado, haciendo fácil el cálculo de la energía por medio de la continuación analítica de su función zeta espectral. El resultado de derivar esta energía es una fuerza siempre atractiva, por unidad de área de las placas.
- Por último se ha realizado el mismo cálculo con condiciones Robin, donde no es posible obtener los autovalores del operador asociado de forma explícita. Para solventar este problema, la función zeta utilizada se ha puesto en términos de la derivada logarítmica de la función espectral, lo cuál permite evaluar la suma de autovalores. Una expansión

asintótica de la energía ha permitido obtener una expresión finita al sustraer los términos divergentes con un sistema idéntico pero de menor tamaño. Se ha computado esta expresión, permitiendo calcular el coeficiente de Robin  $c_R = \frac{E_0}{S} a^3$  en función del ángulo  $\alpha$  de las condiciones de contorno. El resultado es un coeficiente siempre negativo, lo que hace que también lo sea la energía. La fuerza entre placas en estas condiciones será siempre atractiva. Los valores mínimos de la energía se encuentra para  $\alpha = 0$  y  $\alpha = \pi$ , siendo el resultado el mismo que usando condiciones Dirichlet o Neuman. Esta energía mínima hace que la fuerza atractiva entre placas sea máxima en estos casos.

# Anexos

## A. La cuestión del cero-modo

En la solución general de la ecuación (6.3) tratada en el apartado 6:

$$\phi_\omega(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (\text{A.1})$$

los coeficientes  $A$  y  $B$  son constantes independientes ya que  $\forall k \neq 0$ ,  $e^{ikx}$  y  $e^{-ikx}$  son funciones linealmente independientes. Si se toma  $k = 0$ , los coeficientes dejan de ser linealmente independientes. Sin embargo, al estar en el intervalo finito  $[0, a]$ , la función  $\phi_\omega(x) = A + Bx$  resuelve la ecuación del cero-modo. Además es de norma  $\mathcal{L}^2$  finita por ser un intervalo finito. Metiendo esta solución en las ecuaciones de contorno de Robin (6.5) se llega a:

$$\begin{aligned} -B &= \tau A \\ B &= \tau(A + Ba) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

donde  $\tau = tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ . En forma matricial se escribe  $\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$ :

$$\begin{pmatrix} \tau & 1 \\ \tau & \tau(a-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Para tener soluciones no triviales se iguala el determinante de  $\mathbf{M}_0$  a cero:

$$\det \mathbf{M}_0 = \tau(\tau a - 2) \quad (\text{A.4})$$

Aquí se asume  $\tau \neq 2/a$ , así que la única otra opción que anula el determinante es cuando  $tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2n\pi$ . Como las condiciones imponen  $\alpha \in [0, \pi]$ , la única posibilidad es  $\alpha = 0$ . En tal caso,  $\tau = 0$  y sustituyendo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Lo cual implica que  $B = 0$  y  $A$  queda libre, dando lugar a un cero-modo constante  $\phi_\omega = A$ .

## B. La derivada logarítmica

La derivada logarítmica de una función  $f(z)$  se define como:

$$\frac{d}{dz} \log(f(z)) = \frac{f'(z)}{f(z)} \quad (\text{B.1})$$

Aunque por simplicidad se suele escribir como  $d \log(f)$ .

Si se supone ahora que  $f$  tiene un cero en  $z_0$  de orden  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), la función se podrá escribir como:

$$f(z) = a_n(z - z_0)^n + o((z - z_0)^{n+1}) \quad (\text{B.2})$$

Si se supone que tiene un polo en  $z_0$  de orden  $-n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), la función se podrá escribir como:

$$f(z) = a_n(z - z_0)^{-n} + o((z - z_0)^{-n+1}) \quad (\text{B.3})$$

Generalizando para ambos casos, la función se escribe:

$$f(z) = a_m(z - z_0)^m + o((z - z_0)^{m+1}) \quad m \in \mathbb{Z} \quad (\text{B.4})$$

Si se aplica ahora la derivada logarítmica a esta función se obtiene:

$$\frac{d}{dz} \log(f(z)) = \frac{m a_m (z - z_0)^{m-1} + o((z - z_0)^m)}{m a_m (z - z_0)^m + o((z - z_0)^{m+1})} = \frac{m}{z - z_0} + o((z - z_0)^0) \quad (\text{B.5})$$

Esto tiene tres consecuencias inmediatas y esenciales:

1. Los polos de la derivada logarítmica son los ceros y los polos de  $f(z)$ .
2. Los polos de la derivada logarítmica son simples.
3. El residuo de la derivada logarítmica en los polos es igual al orden del polo. Esto hace que la suma de residuos sea igual al orden de  $f(z)$

Sea  $G \subseteq \mathbb{C}$  una región finita y  $\partial G$  un borde que evita los ceros y polos de  $f$ . Usando el teorema de los residuos se puede escribir:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial G} dz d\log(f) = \sum_{a \in G} \text{res}_a(d\log(f)) = \sum_{a \in G} \text{ord}_a(f) \quad (\text{B.6})$$

donde  $a$  son los ceros y polos de  $f$ ,  $\text{res}$  hace referencia al residuo y  $\text{ord}$  al orden.

Se escoge ahora la función  $f$  con ceros  $z_n$  en  $G$ , pero sin polos, y una función  $g(z)$  sin ceros en  $G$ . Introduciendo en la integral:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial G} dz g(z) d\log(f) = \sum_{z_n \in G} \text{res}_{z_n}(g(z) d\log(f)) = \sum_{z_n \in G} m(z_n) g(z_n) \quad (\text{B.7})$$

donde  $m(z_n)$  es el orden del cero  $z_n$ . Así, si  $z_i$  es un cero simple,  $m(z_i) = 1$  y se suma una vez  $g(z_i)$ . Si  $z_j$  es un cero doble,  $m(z_j) = 2$  y se suma dos veces  $g(z_j)$ , y así progresivamente. Esto demuestra que el sumatorio de una función  $g(z)$  sobre los ceros de una función  $f(z)$  se puede poner en forma de integral usando la derivada logarítmica. Aplicándolo al caso tratado en

la sección 6, la función  $g(k)$  sería  $k^3$  y la función  $f(k)$  sería la función espectral  $f_R(k)$ . De esta forma se puede escribir:

$$\sum_k k^3 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} dk k^3 \partial_k \log(f_R(k)) \quad (\text{B.8})$$

donde tal y como se ha visto, el sumatorio se hace sobre las  $k$  que pertenecen al espectro de  $f_R(k)$ .

## Referencias

- [1] MANDL, F. y SHAW, G., *Quantum Field Theory*, Jhon Wiley & sons, segunda edición, Manchester (2010)
- [2] PESKIN, M.E. y SCHROEDER, D.V., *An Introduction to Quantum Field Theory*, CRC Press (1995)
- [3] BORDAG, M., KLIMCHITSKAYA, G.L., MOHIDEEN, U. y MOSTEPANENKO, V.M., *Advances in the Casimir Effect*, Oxford University Press, Nueva York (2009)
- [4] CASIMIR, H.B.G., *On the attraction between two perfectly conducting plates*, Proc. K. Ned. Akad. Wet. 51, 793, Eindhoven (1948)
- [5] MUÑOZ-CASTAÑEDA, J.M. , KIRSTEN, K. y BORDAG, M. , *QFT Over the Finite Line. Heat Kernel Coefficients, Spectral Zeta Functions and Selfadjoint Extensions*, Lett Math Phys 105, 523–549 (2015)
- [6] FUCCI, G., KIRSTEN, K. y MUÑOZ-CASTAÑEDA, J.M., *Casimir pistons with generalized boundary conditions: a step forward*, Anal.Math.Phys. 11, 70 (2021)
- [7] KIRSTEN, K., *Basic zeta functions and some applications in physics*, MSRI Publ.57:101-143 (2010)
- [8] KLIMCHITSKAYA, G. L. y MOSTEPANENKO, V.M., *Experiment and theory in the Casimir effect*, Contemporary Physics, 47:3, 131-144 (2006)
- [9] KIRSTEN, K., *Spectral functions in mathematics and physics*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton (2002)
- [10] MUÑOZ-CASTAÑEDA, J.M., *Efectos de Borde en Teoría Cuántica de Campos*, Zaragoza (2009)
- [11] ASOREY, M. y MUÑOZ-CASTAÑEDA, J.M., *Attractive and repulsive Casimir vacuum energy with general boundary conditions*, Nuclear Physics B, 874, 852-876 (2013)