

# Oscilaciones de placas: soluciones de la ecuación biarmónica

Trabajo de Fin de Grado en Física

Autor:

**David Miguélez Caballero**

8 de julio de 2021



---

**Universidad de Valladolid**

Departamento de Física Teórica, Atómica y Óptica

Tutor:

Luis Miguel Nieto Calzada



*AGRADECIMIENTOS*

*En primer lugar, me gustaría agradecer a toda la gente que ha creído en mi todo el apoyo que me han dado. En especial, quisiera darles las gracias a toda mi familia y amigos por toda la ayuda que me han prestado en los momentos más difíciles durante estos últimos cuatro años de estudio.*

*Por último, quisiera también darle las gracias a mi tutor, Luis Miguel Nieto Calzada, por todo su esfuerzo, dedicación y consejos sin los cuales no habría sido capaz de sacar este trabajo adelante.*

Valladolid, 28 de junio de 2021





# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>1</b>
<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>1. Deducción de la ec. para vibraciones de placas</b>	<b>5</b>
1.1. Definiciones previas . . . . .	5
1.1.1. Vector de desplazamiento . . . . .	5
1.1.2. Deformaciones unitarias y deformaciones de cizalla . . . . .	5
1.1.3. Tensor de esfuerzos . . . . .	7
1.1.4. Ley de Hooke generalizada . . . . .	8
1.1.5. Coordenadas de Euler y de Lagrange . . . . .	10
1.2. Ecuaciones constitutivas de los medios elásticos . . . . .	10
1.2.1. Conservación de la masa . . . . .	11
1.2.2. Ecuaciones del movimiento. Segunda ley de Newton . . . . .	12
1.3. Ecuación fundamental por la teoría de Kirchhoff . . . . .	13
1.3.1. Aproximaciones de la teoría . . . . .	13
1.3.2. Vector de desplazamiento en placas . . . . .	14
1.3.3. Deducción de la ecuación . . . . .	14
1.3.4. Posibles variaciones para la ecuación . . . . .	15
<b>2. Condiciones de contorno y geometría de la placa</b>	<b>17</b>
2.1. Condiciones de contorno . . . . .	17
2.1.1. Momento de flexión normal, momento de torsión, fuerza efectiva de corte y fuerza de cizalla . . . . .	17
2.1.2. Posibles condiciones de contorno . . . . .	18

2.2. Posibles geometrías . . . . .	20
2.2.1. Placas rectangulares . . . . .	21
2.2.2. Placas circulares . . . . .	21
2.2.3. Placas elípticas . . . . .	22
<b>3. Soluciones exactas en oscilaciones libres</b>	<b>25</b>
3.1. Método general de resolución . . . . .	25
3.2. Resolución en coordenadas polares . . . . .	26
3.2.1. Condiciones de contorno con borde exterior e interior sujetos . . . . .	28
3.2.2. Condiciones de contorno con borde exterior sobre muelle elástico torsional . . . . .	32
3.3. Resolución en coordenadas cartesianas . . . . .	34
3.3.1. Placa rectangular con bordes apoyados en $x = 0, a$ y bordes apoyados sobre muelle elástico lineal en $y = 0, b$ . . . . .	36
3.3.2. Placa rectangular con bordes $x = 0, a$ apoyados, borde $y = 0$ sujeto y borde $y = b$ unido a un muelle elástico lineal . . . . .	39
<b>4. Soluciones aproximadas por Rayleigh-Ritz</b>	<b>43</b>
4.1. Explicación del método . . . . .	43
4.2. Aplicación del método para placas de Kirchhoff . . . . .	44
4.3. Aplicación del método a placas rectangulares sujetas . . . . .	45
<b>A. Simetría del tensor de esfuerzos</b>	<b>49</b>
<b>B. Ortogonalidad de las oscilaciones libres</b>	<b>51</b>
<b>C. Propiedades de las funciones de Bessel</b>	<b>53</b>
C.1. Definición de las funciones de Bessel . . . . .	53
C.2. Propiedades de las funciones de Bessel . . . . .	55
<b>D. Lista de las ecuaciones trascendentes usadas en la Sección 3.3</b>	<b>57</b>
<b>Conclusiones</b>	<b>59</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>61</b>

# Índice de figuras

1.	Esquema de algunas de las figuras obtenidas por Chladni. . . . .	3
1.1.	Desplazamiento de un punto $M(x, y, z)$ de un sólido sometido a deformación hasta el punto $M'(x, y, z)$ . . . . .	6
1.2.	Elemento diferencial de volumen de un cuerpo proyectado sobre los planos $x-y$ , $z-x$ , $z-y$ , antes de deformarlo. . . . .	6
1.3.	Esquema de la proyección del elemento diferencial de volumen de un sólido antes y después de verse sometido a una deformación. . . . .	7
1.4.	Esquema de los distintos esfuerzos que actúan sobre un cuerpo con forma de cubo. . . . .	8
1.5.	Elemento diferencial de volumen de un sólido antes y después de ser sometido a una deformación. . . . .	11
1.6.	Cuerpo arbitrario sobre el que actúan fuerzas que lo deforman. . . . .	12
1.7.	Esquema deformaciones de una placa según la teoría de Kirchhoff. . . . .	14
2.1.	Esquema de esfuerzos en un sólido con forma de prisma triangular. . . . .	18
2.2.	Esquema de esfuerzos sobre una placa rectangular. . . . .	19
2.3.	Esquema de las fuerzas que actúan sobre dos elementos $dy$ del borde de una placa. . . . .	20
2.4.	Esquema de momentos que actúan sobre un elemento de una placa circular. . . . .	21
2.5.	Sistema de coordenadas elípticas. . . . .	22
3.1.	Resolución gráfica de los valores permitidos para $ka$ en los dos casos indicados. . . . .	29
3.2.	Animación correspondiente al modo modo $n = 1$ , $k = 4,61$ , para $a = 1$ . . . . .	30
3.3.	Animación del modo $n = 0$ , $k' = 6,06$ , de la placa circular con muelle torsional. . . . .	33
3.4.	Animación del modo $n = 1$ , $k' = 7,60$ , de la placa circular con muelle torsional. . . . .	34
3.5.	Placa rectangular con esquina centrada en origen. . . . .	36
3.6.	Animación del modo $n = 1$ , $k = 6,01$ . . . . .	38

3.7. Animación del modo $n = 2, k = 6,83$ . . . . .	39
3.8. Animación del modo $n = 1, k = 5,75$ . . . . .	41
3.9. Animación del modo $n = 2, k = 6,46$ . . . . .	41
4.1. Animación del modo $\phi'_2 + \phi'_3$ . . . . .	47
4.2. Animación del modo $\phi'_2 - \phi'_3$ . . . . .	47

# Resumen

A lo largo del presente trabajo, analizaremos el comportamiento de las oscilaciones de placas metálicas bajo la teoría de Kirchhoff, que es capaz de explicar el fenómeno de los patrones de Chladni. Para ello, primero deduciremos la ecuación fundamental que modela estas oscilaciones y presentaremos las posibles condiciones de contorno que puede poseer la placa.

Una vez presentada toda esta teoría, procederemos a la resolución analítica en diversos casos que impliquen simetría polar y cartesiana.

Finalmente, implementaremos el método de Ritz-Rayleigh para la búsqueda de soluciones aproximadas en el caso en el que analicemos una placa cuadrada con todos sus bordes fijos.

# Abstract

Throughout the present work, we will study the behaviour of oscillating metal plates by using the Kirchhoff plate theory, which allows us to explain the phenomenon of Chladni patterns. For this purpose, we will derive the fundamental equation that describes these oscillations and we will introduce several possible boundary conditions for this problem.

Once we had introduced all this theory, we will try to find analytical solutions in cases that imply either polar or cartesian symmetry.

Finally, we will implement the Ritz-Rayleigh method in order to find approximated solutions for a fully clamped square plate.



# Introducción

El comienzo del estudio de las vibraciones de placas lo podemos situar a comienzos del siglo XIX, época en la que el físico y músico Ernst Chladni consiguió excitar los modos de vibración de una placa metálica usando únicamente un arco de violín. Cuando excitaba las placas depositando previamente arena sobre ella, los granos empezaban a formar patrones con formas bastante características, como estrellas o círculos, algunas de las cuales se muestran en un grabado clásico de la época tomado de [1].

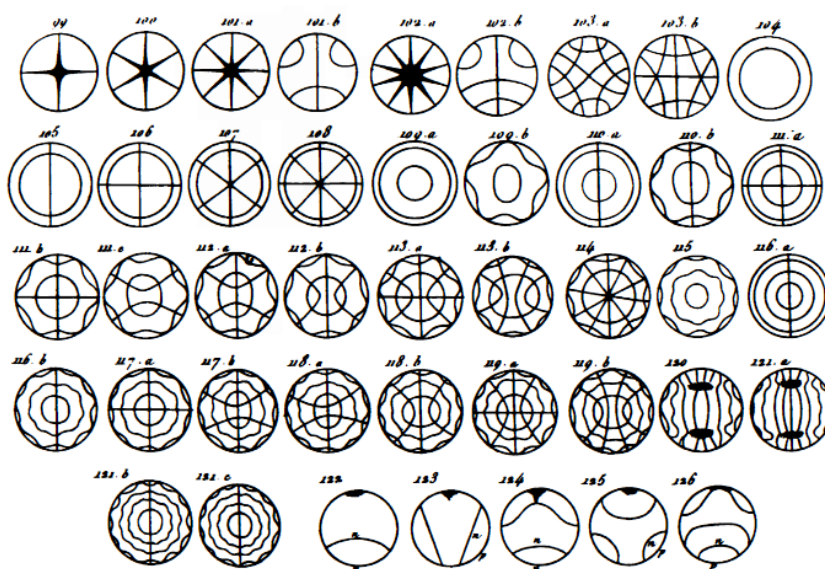


Figura 1: Esquema de algunas de las figuras obtenidas por Chladni.

En 1808, Chladni mostró en la Academia Francesa de Ciencias sus hallazgos y los resultados de estos experimentos. Los patrones formados en las placas maravillaron a los científicos que presenciaron las demostraciones de Chladni. Tanto fue así que el mismo Napoleón acudió a presenciar una demostración de este curioso fenómeno.

Poco después de esto, en 1809, Napoleón ofreció una medalla de un kilogramo de oro a cualquier persona que fuese capaz de explicar la teoría que se escondía detrás de este fenómeno físico dejando el plazo abierto dos años para reclamar el premio. En 1811, solo la matemática y física autodidacta Sophie Germain intentó ofrecer una explicación.

Germain se inspiró en los trabajos sobre mecánica clásica de Lagrange y en los artículos sobre elasticidad de Euler. Aunque no se la otorgó el premio debido al corto plazo que tuvo para

preparar su teoría, Lagrange, que era parte del jurado, corrigió parte de los cálculos de Sophie Germain para concluir que la ecuación que describía las oscilaciones de la placa debía tener la forma

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k^2 \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 y^2} \right) = 0.$$

Al no haber más candidatos, el plazo se extendió durante dos años más. En estos dos años, Germain volvió a presentarse demostrando matemáticamente algunos de los patrones a partir de la ecuación, pero siguió sin recibir el premio al no poder derivar satisfactoriamente la ecuación que modelaba las vibraciones de las placas a partir de principios físicos.

Finalmente, después de que se volviese a prorrogar el plazo, en 1815, volvió a presentar una nueva teoría con la que finalmente sí consiguió obtener el premio [2].

Décadas más tarde, Kirchhoff corrigió en un artículo [3] la teoría de Sophie Germain para concluir que la forma de la ecuación que siguen las oscilaciones de una placa metálica no es la señalada anteriormente si no que debía tener la forma<sup>1</sup>

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \kappa \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 y^2} \right) = 0,$$

dónde puede verse que la sutil diferencia es en un factor 2 en el término que contiene las derivadas parciales cruzadas.

En 1907, la Academia de Ciencias de París propuso otro concurso relacionado con la búsqueda de soluciones para la ecuación deducida por Kirchhoff. Ante este anuncio, Ritz idea un método de resolución aproximado que consigue reproducir con éxito los patrones de las figuras de Chladni. Años más tarde, debido a la extremada utilidad de este método se empezó a implementar en diversos problemas. En el capítulo 4 analizaremos en detalle este procedimiento y desarrollaremos un ejemplo para ilustrar su uso [4].

---

<sup>1</sup>Algunas de las técnicas de resolución que propuso Kirchhoff en el artículo de la entrada [3] de la bibliografía, como el método de separación de variables, serán también usados en el presente trabajo a la hora de buscar soluciones exactas al problema.



# Capítulo 1

## Deducción de la ecuación para vibraciones de placas

A lo largo de este capítulo deduciremos la ecuación que describe el estado de vibración de una placa metálica según la Teoría de Kirchhoff. Existen varios métodos para abordar este problema, como el uso de cálculo variacional o el planteamiento de la segunda ley de Newton. En este caso nosotros optaremos por el segundo método, pero antes hemos de definir varias magnitudes físicas y presentar las aproximaciones que implica el uso de la teoría de Kirchhoff.

### 1.1. Definiciones previas

En este apartado vamos a introducir algunos conceptos físicos que vamos a necesitar para ir deduciendo las ecuaciones que rigen las vibraciones más sencillas de una placa, que debido a las características del material, son diferentes a la ecuación que rige las oscilaciones de una membrana (la ecuación de ondas en dos dimensiones). Seguiremos básicamente la notación utilizada en [5].

#### 1.1.1. Vector de desplazamiento

Consideremos un cuerpo elástico sometido a una deformación. En estas condiciones ocurrirá que un punto del cuerpo cuya posición inicial es  $M(x, y, z)$  se desplazará hasta un punto  $M'$  debido a la acción de la deformación, como se ilustra en la Figura 1.1. Llamaremos vector de desplazamiento al vector  $\vec{d} = \overrightarrow{MM'} = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$ . Es importante observar que para una deformación arbitraria este vector tiene tres componentes (una por cada proyección en cada eje) que a su vez dependen de las tres coordenadas del espacio.

#### 1.1.2. Deformaciones unitarias y deformaciones de cizalla

Consideremos un paralelepípedo infinitesimal tal que la longitud de sus lados sea  $dx$ ,  $dy$  y  $dz$  como el que podemos ver en la Figura 1.2.

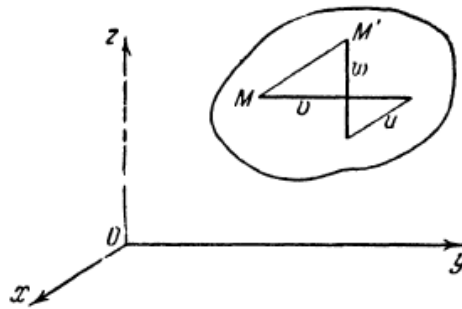


Figura 1.1: Desplazamiento de un punto  $M(x, y, z)$  de un sólido sometido a deformación hasta el punto  $M'(x, y, z)$ .

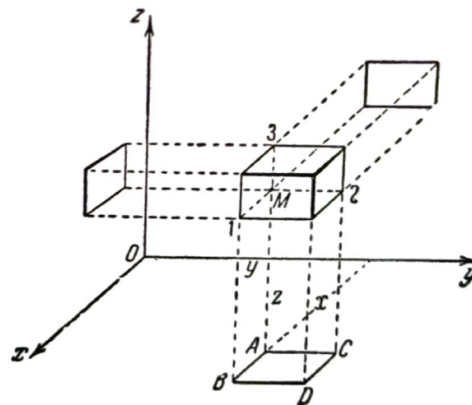


Figura 1.2: Elemento diferencial de volumen de un cuerpo proyectado sobre los planos  $x-y$ ,  $z-x$ ,  $z-y$ , antes de deformarlo.

Ahora sometamos a este sólido a una pequeña deformación y proyectemos su estado final en el plano  $xy$  como se puede apreciar en la Figura 1.3. Fijémonos en los puntos  $A$  y  $B$  (separados por una distancia  $dx$ ): si el desplazamiento de  $A$  a lo largo del eje  $x$  es  $u$  entonces el desplazamiento de  $B$  a lo largo de este eje es  $u + \delta u = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ , es decir, sustituimos el incremento  $\delta u$  por una aproximación en primer orden. Este mismo procedimiento se puede aplicar a los puntos  $A$  y  $C$ . En este caso, si el desplazamiento de  $A$  en el eje  $y$  es  $v$ , el desplazamiento de  $C$  en este eje será  $v + \frac{\partial v}{\partial y} dy$ .

Ahora definimos la *elongación unitaria a lo largo del eje  $x$*  como el cociente entre la variación de la longitud de la proyección del segmento  $AB$  sobre el eje  $x$  y su longitud inicial antes de ser sometido a una deformación. Es decir, si el segmento tenía una longitud inicial  $dx$  y ha sufrido una elongación  $\delta u = \delta(dx) = \frac{\partial u}{\partial x} dx$  la elongación unitaria en el eje  $x$  sería en este caso la magnitud

$$\epsilon_{xx} = \frac{\delta(dx)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Si procediésemos de forma similar con el segmento  $AC$  para definir la elongación unitaria a lo largo del eje  $y$ ,  $\epsilon_{yy}$ , y usásemos una proyección sobre el plano  $x-z$  o  $y-z$  para encontrar como se modifica un segmento paralelo al eje  $z$  bajo una deformación y así hallar  $\epsilon_{zz}$ , encontraríamos

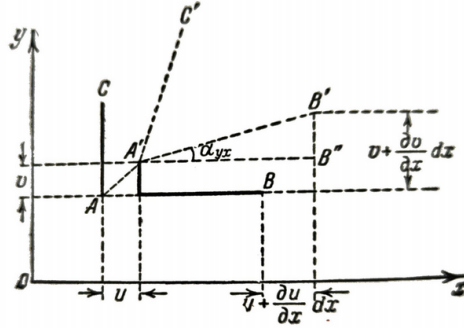


Figura 1.3: Esquema de la proyección del elemento diferencial de volumen de un sólido antes y después de verse sometido a una deformación.

que las deformaciones unitarias quedan como

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Ahora intentemos hallar las deformaciones angulares. En el caso del ángulo  $\alpha_{yx}$  (el ángulo que forman los segmentos  $AB$  y  $A'B'$ ), de la Figura 1.3 es fácil ver que

$$\alpha_{yx} \simeq \tan \alpha_{yx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} \simeq \frac{\partial v}{\partial x}.$$

De forma similar se puede obtener que el ángulo que forman los segmentos  $AC$  y  $A'C'$  es de forma aproximada  $\alpha_{xy} \simeq \frac{\partial u}{\partial y}$ . Finalmente, si definimos la *deformación de cizalla*  $\epsilon_{xy}$  como la mitad de la distorsión del ángulo  $BAC$ , entonces

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2}(\alpha_{xy} + \alpha_{yx}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Procediendo de igual forma para las proyecciones en los planos  $y-x$  y  $x-z$  tendríamos finalmente que las deformaciones de cizalla restantes serían:

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \epsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right).$$

Con estas definiciones podemos construir el llamado “tensor de deformaciones” del siguiente modo

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

### 1.1.3. Tensor de esfuerzos

Podemos definir el “*esfuerzo*” como la fuerza por unidad de superficie que actúa sobre un cuerpo. Dependiendo de si las fuerzas aplicadas son normales o tangentes a la superficie que delimita el medio elástico, los esfuerzos se denominarán normales o cortantes respectivamente

[6, 7]. Teniendo en cuenta la definición anterior, si consideramos un sólido elástico con forma de cubo podemos construir una matriz de dimensión  $3 \times 3$ , que denominaremos “tensor de esfuerzos”, cuyas componentes son los esfuerzos que podemos apreciar en la Figura 1.4 tomada de la referencia [6], de modo que el tensor de esfuerzos toma la forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

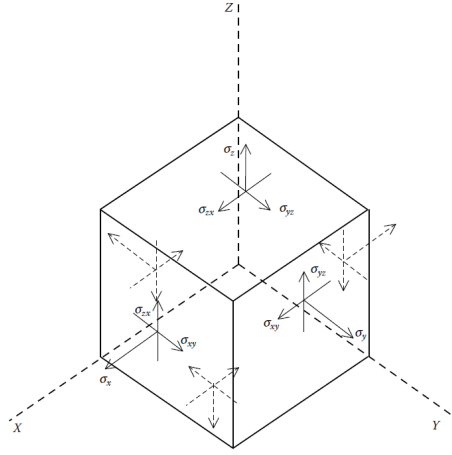


Figura 1.4: Esquema de los distintos esfuerzos que actúan sobre un cuerpo con forma de cubo.

Como podemos ver en la Figura 1.4 los esfuerzos  $\sigma_{kk}$  son normales a un plano con  $k = cte$ . En cuanto a los  $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$  se puede apreciar que son perpendiculares a los esfuerzos  $\sigma_{kk}$  y que además son paralelos a la dirección  $i$ . Dejaremos para el Apéndice A la demostración de que esta matriz es simétrica, usando para ello la conservación del momento angular del sistema.

#### 1.1.4. Ley de Hooke generalizada

Si las deformaciones a las que se somete un sólido son adiabáticas (ni se gana ni se pierde energía en forma de calor) e isotermas y el sólido es lineal, entonces se cumple la ley de Hooke [7, 8]. Esta ley relaciona las componentes del tensor de esfuerzos  $\boldsymbol{\sigma}$  dado en (1.2) con las componentes del tensor de deformaciones del sólido  $\boldsymbol{\epsilon}$  dado en (1.1) de la siguiente forma<sup>1</sup>

$$\epsilon_i = s_{ij}\sigma_j, \quad (1.3)$$

donde  $s_{ij}$  son las componentes de un tensor  $\mathbf{s}$ .

En verdad, la ley de Hooke se escribe como

$$\sigma_{km} = c_{kmij}\epsilon_{ij}, \quad (1.4)$$

<sup>1</sup>En este apartado se está adoptando la siguiente notación:

$$\sigma_1 = \sigma_{xx}, \quad \sigma_2 = \sigma_{yy}, \quad \sigma_3 = \sigma_{zz}, \quad \sigma_4 = \sigma_{xz}, \quad \sigma_5 = \sigma_{yz}, \quad \sigma_6 = \sigma_{xy},$$

y de la misma forma con las componentes del tensor  $\boldsymbol{\epsilon}$ .

es decir, los esfuerzos y deformaciones unitarias estarían relacionados por un tensor  $\mathbf{C}$  de 81 componentes  $c_{kmij}$ , pero debido a la simetría de los tensores de esfuerzos y deformaciones es posible organizar las componentes de estos dos tensores en forma de vector de seis componentes, de tal forma que la ley de Hooke quede como muestra la ecuación (1.3).

Analicemos ahora la ley de Hooke para el caso en el que el medio sea completamente isótropo, es decir, las propiedades elásticas son independientes de si rotamos el sistema de referencia. Para ello, haremos uso de las propiedades del tensor  $\mathbf{C}$  para determinar qué forma toma y así poder obtener también el tensor  $\mathbf{s}$ . Reescribamos  $\mathbf{C}$  en un sistema de referencia  $x'_i$ :

$$C_{pqrs} = a_{ip}a_{jp}a_{lq}a_{ls}C'_{ijkl}, \quad \text{donde} \quad a_{mn} = \cos(x'_m, x_n).$$

Como el sólido es completamente isótropo entonces  $C'_{ijkl} = C_{ijkl}$  y por lo tanto

$$C_{pqrs} = a_{ip}a_{jp}a_{lq}a_{ls}C_{ijkl},$$

y es sencillo demostrar que esta relación sólo se puede satisfacer si

$$C_{pqrs} = \lambda\delta_{pq}\delta_{rs} + \mu\delta_{pr}\delta_{qs} + k\delta_{ps}\delta_{qr}, \quad (1.5)$$

donde  $k$ ,  $\lambda$  y  $\mu$  son constantes. Ahora bien, como  $\boldsymbol{\sigma}$  y  $\boldsymbol{\epsilon}$  son simétricos entonces de (1.4) se puede observar que  $\mathbf{C}$  cumple que  $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}$ . Imponiendo estas condiciones en (1.5) se obtiene

$$(k - \mu)(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) = 0.$$

Esto se cumple solo cuando  $\mu = k$ , lo cual nos permite escribir (1.4) como

$$\sigma_{ij} = (\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}))\epsilon_{kl} = \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk} + 2\mu\epsilon_{ij}. \quad (1.6)$$

Si en esta última ecuación ponemos  $i = j = k$  entonces

$$\epsilon_{kk} = \frac{\sigma_{kk}}{3\lambda + 2\mu},$$

lo que nos permite escribir (1.6) como

$$\epsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2\mu} - \frac{\lambda\delta_{ij}\sigma_{kk}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}.$$

Ahora introducimos dos nuevas constantes, el *módulo de Poisson*  $\nu$  y el *módulo de Young*  $E$  definidos a través de las relaciones

$$\frac{1 + \nu}{E} = \frac{1}{2\mu}, \quad \frac{\nu}{E} = \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}. \quad (1.7)$$

Con estas definiciones la ley de Hooke (1.3) queda finalmente como

$$\epsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk}. \quad (1.8)$$

De esta última ecuación se obtiene que el tensor de esfuerzos  $\mathbf{s}$  es

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu}{E} \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

### 1.1.5. Coordenadas de Euler y de Lagrange

A la hora de describir las deformaciones de un cuerpo o el movimiento de un líquido existen dos posibles descripciones para expresar estas deformaciones y flujos: la de Euler y la de Lagrange.

En primer lugar supongamos que la posición de una partícula que ocupaba una posición inicial  $\vec{R}(X, Y, Z)$  en  $t = 0$  es trasladada a una posición

$$\vec{r} = (x(X, Y, Z, t), y(X, Y, Z, t), z(X, Y, Z, t)), \quad (1.10)$$

donde suponemos en todo momento que las tres funciones  $x$ ,  $y$  y  $z$  son funciones continuas y con derivadas parciales continuas con respecto de sus variables independientes. Decimos que usamos la descripción lagrangiana del problema si hacemos uso del vector  $\vec{r}$  en la descripción de la deformación del sistema.

Si por el contrario usamos el vector

$$\vec{R} = (X(x, y, z, t), Y(x, y, z, t), Z(x, y, z, t)) \quad (1.11)$$

en las ecuaciones que describen el sistema decimos que estamos usando la descripción euleriana, es decir, en la descripción euleriana usamos las coordenadas  $x$ ,  $y$  y  $z$  como variables independientes mientras que en la lagrangiana las variables independientes son  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ .

Por último, podemos destacar que ambas representaciones se relacionan con el vector de desplazamiento de la siguiente forma [6, 8]:

$$\vec{d} = \vec{r} - \vec{R}. \quad (1.12)$$

## 1.2. Ecuaciones constitutivas de los medios continuos elásticos

A lo largo de esta sección veremos qué consecuencias tiene la ley de conservación de la masa en medios continuos y efectuaremos la deducción de las ecuaciones del movimiento a partir de las leyes de Newton. A partir de estas ecuaciones del movimiento podremos hallar la ecuación que rige el movimiento de una placa según la teoría de Kirchhoff.

### 1.2.1. Conservación de la masa

Supongamos un sólido que sufre una deformación, tal y como se representa en la Figura 1.5, de modo que a un tiempo  $t$  ocupa un volumen  $V$ . Bajo estas condiciones la masa del sólido será

$$m = \int_V \rho(\vec{r}, t) dV,$$

donde  $\rho(\vec{r}, t)$  es la densidad del sólido expresada en términos de las coordenadas de Lagrange.

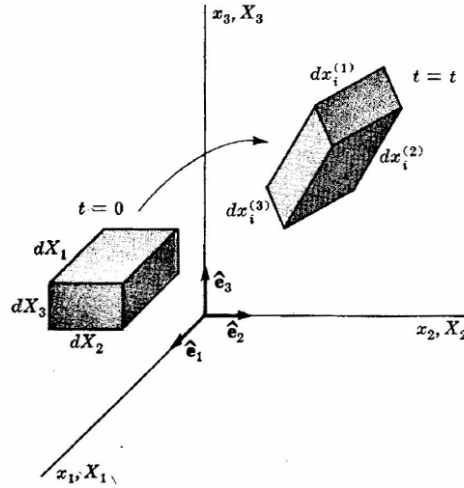


Figura 1.5: Elemento diferencial de volumen de un sólido antes y después de ser sometido a una deformación.

Como la masa de un cuerpo se conserva en todo momento en una deformación, tenemos que:

$$m = \int_V \rho(\vec{r}, t) dV = \int_{V_0} \rho_0(\vec{R}, 0) dV_0.$$

Por otro lado sabemos que<sup>2</sup>

$$dV = dx_1 dx_2 dx_3 = \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{X_1} \frac{\partial x_j}{\partial X_2} \frac{\partial x_k}{\partial X_3} dX_1 dX_2 dX_3 = J dV_0,$$

donde  $J$  es el jacobiano del cambio de coordenadas de las coordenadas de Lagrange a las de Euler y  $dV_0$  es un elemento diferencial de volumen del sólido antes de ser sometido a deformación [8].

Usando las ecuaciones anteriores obtenemos que:

$$m = \int_{V_0} \rho_0(\vec{R}, 0) dV_0 = \int_V \rho(\vec{r}(\vec{R}, t), t) dV = \int_{V_0} \rho(\vec{R}, t) J dV_0. \quad (1.13)$$

Puesto que  $V_0$  es arbitrario  $V$  también lo será, por tanto:

$$\rho_0 = \rho J.$$

Finalmente, como el volumen  $V$  es arbitrario, el producto  $\rho J$  es independiente del tiempo, es decir

$$\frac{d(\rho J)}{dt} = 0. \quad (1.14)$$

Esta ecuación es llamada *forma diferencial lagrangiana de la ecuación de continuidad*.

<sup>2</sup>En esta fórmula la notación que usamos es  $x_1 = x, x_2 = y, \dots$

### 1.2.2. Ecuaciones del movimiento. Segunda ley de Newton

Supongamos un cuerpo con un volumen  $V$  arbitrario en un instante  $t$  del cual conocemos las fuerzas por unidad de masa que actúan sobre él, tal y como se muestra en la Figura 1.6.

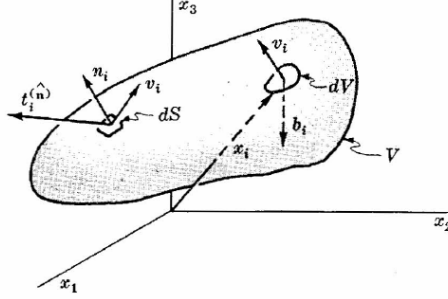


Figura 1.6: Cuerpo arbitrario sobre el que actúan fuerzas que lo deforman.

Si asumimos que las fuerzas que actúan sobre la superficie del sólido son  $t_i = \sigma_{ij}n_j$  (donde  $n_j$  son las componentes de un vector unitario normal a la superficie del cuerpo en cuestión) entonces podemos escribir la segunda ley de Newton como

$$\int_S t_i dS + \int_V \rho b_i dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho \dot{d}_i dV.$$

donde el primer sumando del término izquierdo de la ecuación anterior corresponde a las fuerzas que actúan sobre la superficie del sólido, el segundo a las fuerzas que actúan sobre el volumen y el término derecho de la ecuación a la variación temporal del momento lineal del cuerpo. En esta ecuación  $b_i$  es la componente  $i$ -ésima de la fuerza por unidad de masa que actúa sobre el cuerpo.

Usando el teorema de la divergencia de Gauss en el primer término de la suma de la parte izquierda de la ecuación anterior obtenemos:

$$\int_V \left( \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i \right) dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho \dot{d}_i dV. \quad (1.15)$$

Ahora centremos la atención en como introducir la derivada temporal del término derecho de la ecuación usando para ello las ecuaciones (1.3), (1.13) y (1.14):

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \dot{d}_i dV = \frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho \dot{d}_i J dV_0 = \int_{V_0} \left( \dot{d}_i \frac{d\rho J}{dt} + \rho J \ddot{d}_i \right) dV_0 = \int_V \rho \ddot{d}_i dV.$$

Con el desarrollo anterior obtenemos:

$$\int_V \left( \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i - \rho \ddot{d}_i \right) dV = 0.$$

Como el volumen  $V$  es arbitrario entonces las ecuaciones de movimiento finales para un sólido elástico serán:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i - \rho \ddot{d}_i = 0. \quad (1.16)$$



### 1.3. Deducción de la ecuación fundamental para vibraciones de placas en el marco de la teoría de Kirchhoff

En este apartado deduciremos la ecuación que usaremos para describir el estado de vibración de las placas que estudiaremos a lo largo del presente trabajo. Empezamos exponiendo las simplificaciones que hemos de realizar así como analizar qué forma toma el vector  $\vec{d} = \vec{r} - \vec{R}$  bajo ciertas aproximaciones.

#### 1.3.1. Aproximaciones de la teoría

De ahora en adelante asumiremos que nuestras placas presentan las siguientes características tomadas de las referencias [5, 7, 9]:

1. La placa está fabricada de un material lineal e isótropo.
2. El espesor  $h$  de la placa es muy pequeño comparado con el resto de dimensiones.
3. Los efectos correspondientes a posibles momentos de inercia debidos a posibles rotaciones se consideran despreciables.
4. La componente  $z$  del vector  $\vec{d}$  (es decir,  $w$ ) se considera muy pequeña con respecto a  $h$ . Además consideramos que  $w = w(x, y, t)$ .
5. Consideramos que los puntos del plano medio de la placa se mueven solo en el eje  $z$ .
6. Consideramos despreciables tanto  $\sigma_{zz}$  como  $\epsilon_{zz}$ .
7. Los segmentos normales al plano medio de la placa sin deformar permanecen invariantes en longitud y normales al plano medio (hipótesis de Kirchhoff).
8. Todas las posibles fuerzas que actúan de forma paralela en las superficies de la placa se consideran despreciables, es decir,

$$\sigma_{xz}(x, y, z = \pm h/2) = \sigma_{yz}(x, y, z = \pm h/2) = 0.$$

Fijémonos en la condición 6, si recordamos (1.8) para un material isótropo vemos que es imposible anular  $\epsilon_{zz}$  y  $\sigma_{zz}$  a la vez. Por este motivo no podemos usar la ley de Hooke tridimensional, en su lugar, vamos a postular una ley de Hooke “bidimensional” en la que suprimimos todos los términos que dependan de la componente  $z$  y que nos servirá para hallar los esfuerzos  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  y  $\sigma_{xy}$ . Esta ley adopta la forma:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}, \quad (1.17)$$

o si invertimos la matriz anterior llegamos a:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

### 1.3.2. Vector de desplazamiento en placas

Veamos como podemos expresar las componentes  $u$  y  $v$  del vector  $\vec{d}$  en función de la componente  $w$  con las aproximaciones expuestas en el apartado anterior.

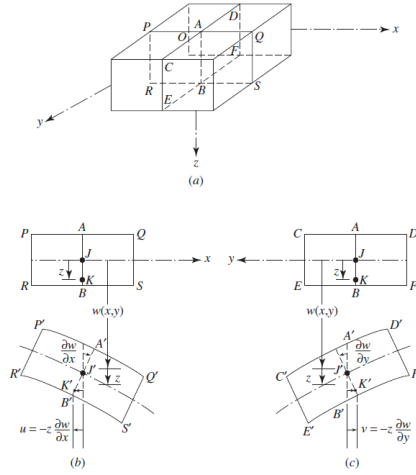


Figura 1.7: Esquema deformaciones de una placa según la teoría de Kirchhoff.

Fijémonos ahora en la parte (b) de la Figura 1.7. Por las aproximación número 7 de la página anterior, el segmento  $AB$  se convierte en el segmento  $A'B'$  después de la deformación, manteniéndose perpendicular al plano medio de la placa. Si llamamos  $\alpha$  al ángulo que forma  $AB$  con  $A'B'$  y tenemos en cuenta la aproximación 5, entonces tenemos que [5, 9]:

$$u = -z \sin \alpha \approx -z \tan \alpha = -z \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Razonando de forma similar con la parte (c) de la Figura 1.7, obtenemos:

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Teniendo en cuenta las dos relaciones anteriores llegamos a que

$$\epsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \epsilon_{yy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \epsilon_{xy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (1.19)$$

### 1.3.3. Deducción de la ecuación

Para obtener la ecuación que rige las oscilaciones de una placa metálica vamos a partir de las ecuaciones (1.16), que en nuestro caso, al considerar movimiento solo en el eje  $z$ , despreciar  $\sigma_{zz}$

y considerar que actúa una carga  $q'(x, y)$  en el eje  $z$ , quedarán como [5]:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0, \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0, \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + q'(x, y) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (1.22)$$

Sin más que operar, de las dos primeras ecuaciones del sistema anterior y de (1.18) y (1.19) se obtiene:

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1 - \nu^2} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w(x, y), \quad \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1 - \nu^2} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w(x, y).$$

Si integramos las dos expresiones anteriores respecto a  $z$  teniendo en cuenta la aproximación 8 del apartado 1.3.1, llegamos a

$$\sigma_{xz} = \frac{E(z^2 - \frac{h^2}{4})}{2(1 - \nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w(x, y), \quad \sigma_{yz} = \frac{E(z^2 - \frac{h^2}{4})}{2(1 - \nu^2)} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w(x, y),$$

e introduciendo estas expresiones en (1.22) tenemos

$$\frac{E(z^2 - \frac{h^2}{4})}{2(1 - \nu^2)} \nabla^4 w(x, y) + q'(x, y) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Integrando esta última ecuación respecto de  $z$  entre  $\frac{h}{2}$  y  $-\frac{h}{2}$  se halla lo siguiente:

$$\frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \nabla^4 w(x, y) + h \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = h q'(x, y).$$

Finalmente, si denotamos  $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$  y  $q(x, y) = h q'(x, y)$ , podemos reescribir la ecuación anterior como:

$$D \nabla^4 w(x, y) + h \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, y), \quad (1.23)$$

que es esencialmente la ecuación llamada biarmónica, pero con un término adicional no homogéneo  $q(x, y)$ .

#### 1.3.4. Posibles variaciones para la ecuación

En la sección anterior mostramos la deducción de la ecuación (1.23) con las aproximaciones presentadas en el apartado 1.3.1, pero podemos prescindir de algunas de estas aproximaciones. Veamos algunas de las modificaciones que sufre la ecuación biarmónica (1.23) si relajamos algunas de nuestras restricciones.

- **Inclusión de términos elásticos lineales:** si suponemos que la placa puede tener efectos elásticos de tal forma que está sometida a una fuerza externa adicional  $kw$ , entonces simplemente (1.23) pasa a ser

$$D \nabla^4 w(x, y) + h \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k w = q(x, y), \quad (1.24)$$

donde aparece un término adicional al de la fuerza  $q(x, y)$  ya contemplado antes.

- **Efecto de los términos de inercia:** si eliminamos la aproximación 3 y consideramos que la placa posee un momento de inercia  $I$ , entonces es posible demostrar que la ecuación que describe las vibraciones de la placa pasa a ser [11, 12]:

$$D \nabla^4 w(x, y) + h \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, y) + I \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 w, \quad (1.25)$$

es decir, que surge un término adicional que depende del momento de inercia y de la derivada temporal del laplaciano de nuestra función incógnita,  $\nabla^2 w$ , lo que complica bastante la ecuación diferencial resultante.

- **Dependencia de  $D$  con  $x$  e  $y$ :** si en la deducción realizada en el apartado 1.3.3 suponemos que  $D = D(x, y)$ , entonces se llega a [7]

$$\nabla^2 \left( D \nabla^2 w \right) - (1 - \nu) \diamond^4(D, w) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, y), \quad (1.26)$$

donde el operador  $\diamond^4$  es:

$$\diamond^4(D, w) = \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Obviamente la ecuación diferencial resultante es terrorífica.

- **Efectos debidos a la temperatura:** podemos analizar los posibles efectos debidos a una variación de la temperatura de la placa con la altura, que sea antisimétrica respecto su plano medio, es decir,  $\Delta T(x, y, z) = -\Delta T(x, y, -z)$ . Considerando esto, las relaciones (1.18) se reescriben como

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy} - (1 + \nu) \alpha \Delta T), \quad (1.27)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_{yy} + \nu \epsilon_{xx} - (1 + \nu) \alpha \Delta T), \quad (1.28)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E \epsilon_{xy}}{2(1 + \nu)}, \quad (1.29)$$

y teniendo en cuenta estas nuevas relaciones en el desarrollo realizado en el apartado 1.3.3 se obtiene [13]:

$$D \nabla^4 w(x, y) + h \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \nabla^2 M_T = q(x, y), \quad (1.30)$$

donde la magnitud  $M_T$  es

$$M_T = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E \alpha}{1 - \nu} z \Delta T dz.$$

## Capítulo 2

# Condiciones de contorno y geometría de la placa

En este capítulo hablaremos de las posibles geometrías que puede tomar la placa así como de las posibles condiciones de contorno que podemos aplicar en sus bordes. Todo esto cobrará una importancia vital a la hora de buscar soluciones a la ecuación (1.23).

### 2.1. Condiciones de contorno

Antes de presentar las posibles condiciones de contorno que puede tener la placa en sus bordes hagamos un par de definiciones previas que nos servirán para poder hallar las condiciones de contorno para cualquier posible geometría que tenga la placa.

#### 2.1.1. Momento de flexión normal, momento de torsión, fuerza efectiva de corte y fuerza de cizalla

Llamamos *momento de flexión normal*  $M_{nn}$  y *momento de torsión*  $M_{ns}$  a las magnitudes<sup>1</sup>

$$M_{nn} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{nn} z dz, \quad M_{ns} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ns} z dz. \quad (2.1)$$

Por otro lado, definimos las *fuerzas de cizalla*  $Q_x$  y  $Q_y$  como:

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{zy} dz. \quad (2.2)$$

De las referencias [7, 9] obtenemos las siguientes relaciones entre las magnitudes implicadas:

$$\sigma_{nn} = \sigma_{xx} \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 + \sigma_{yy} \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 + \sigma_{xy} \left( \frac{dx}{ds} \right) \left( \frac{dy}{ds} \right), \quad (2.3)$$

$$\sigma_{ns} = \sigma_{xx} \left( \frac{dx}{ds} \right) \left( \frac{dy}{ds} \right) + \sigma_{yy} \left( \frac{dx}{ds} \right) \left( \frac{dy}{ds} \right) + \sigma_{xy} \left( \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 - \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 \right). \quad (2.4)$$

---

<sup>1</sup>Recuérdese que  $\sigma_{nn}$  es un esfuerzo aplicado en la dirección  $n$  normal a la cara del sólido, mientras que  $\sigma_{ns}$  es un esfuerzo aplicado en una dirección  $\vec{s}$  paralela a la superficie del cuerpo y perpendicular a  $\vec{n}$ .

Ahora, fijándonos en la Figura 2.1 es fácil ver que

$$\frac{dy}{ds} = \cos \theta, \quad \frac{dx}{ds} = \sin \theta.$$

Teniendo en cuenta todo lo anterior y las ecuaciones (2.1) obtenemos que los momentos de torsión son, en general,

$$M_{nn} = M_{xx} \cos^2 \theta + M_{yy} \sin^2 \theta + M_{xy} \sin 2\theta, \quad (2.5)$$

$$M_{ns} = M_{xy} \cos 2\theta - \frac{1}{2} (M_{xx} - M_{yy}) \sin 2\theta. \quad (2.6)$$

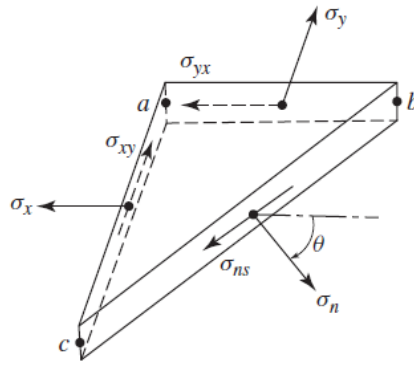


Figura 2.1: Esquema de esfuerzos en un sólido con forma de prisma triangular.

Por otra parte, llamamos *fuerza de cizalla*  $Q_n$  a la magnitud [9]

$$Q_n = Q_x \left( \frac{dy}{ds} \right) + Q_y \left( \frac{dx}{ds} \right) = Q_x \cos \theta + Q_y \sin \theta, \quad (2.7)$$

y por último, definimos *fuerza efectiva de cizalla* de la siguiente manera:

$$V_n = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}. \quad (2.8)$$

Ahora es posible reescribir las ecuaciones (2.1) y (2.8) para una placa con geometría arbitraria si tenemos en cuenta todas las relaciones del capítulo anterior y las presentadas antes [10]:

$$M_{nn} = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right), \quad V_n = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial n^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial s^2 \partial n} \right). \quad (2.9)$$

Hemos denotado  $\frac{\partial}{\partial n} = \vec{n} \cdot \vec{\nabla}$ ,  $\frac{\partial}{\partial s} = \vec{s} \cdot \vec{\nabla}$ , con  $\vec{n}$  y  $\vec{s}$  los vectores normal y tangente a la placa.

### 2.1.2. Posibles condiciones de contorno

Algunas de las condiciones de contorno aplicables a los bordes de una placa son:

1. **Bordes sujetos:** si los bordes de la placa están sujetos, entonces los puntos que definen este contorno se mantienen en una posición fija. Además, bajo estas condiciones podemos

asumir que el ángulo de inclinación del plano medio de la placa en su contorno es también nulo. Todo esto se traduce en las ecuaciones:

$$w|_C = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n}|_C = 0. \quad (2.10)$$

2. **Bordes apoyados:** en el caso en el contorno de la placa esté apoyado pero no sujeto, tendremos que el momento de flexión normal se tiene que anular, ya que no existe ningún esfuerzo que actúe sobre los bordes. A parte de esto, consideramos que los bordes no se desvían verticalmente. Estas afirmaciones se traducen en las siguientes ecuaciones [9]

$$w|_C = 0, \quad M_{nn}|_C = 0. \quad (2.11)$$

3. **Bordes libres:** consideremos por simplificar una placa rectangular como la que podemos ver en la Figura 2.2, en la que hemos de entender que  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  y  $x_3 = z$ . Si, por ejemplo, el borde  $x = 0$  se encuentra libre es lógico suponer, como primera aproximación, que todos los momentos y las fuerzas que actúan sobre él se anulan:

$$M_{xx}|_{x=0} = 0, \quad M_{xy}|_{x=0} = 0, \quad Q_x|_{x=0} = 0.$$

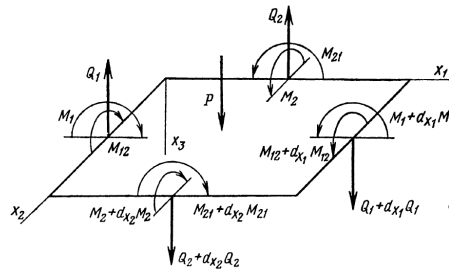


Figura 2.2: Esquema de esfuerzos sobre una placa rectangular.

Estas condiciones fueron obtenidas por primera vez por Poisson. A pesar de que tenemos tres condiciones en vez de dos como en los casos anteriores, Kirchhoff demostró que estas tres condiciones no pueden ser independientes [14]. Para demostrar esta afirmación consideremos dos elementos consecutivos de longitud  $dy$  en el borde  $x = 0$  como los que podemos ver en la Figura 2.3. Debido al esfuerzo  $\sigma_{xy}$ , actúa un momento total  $M_{xy}dy$  sobre el elemento  $cgfd$  mientras que en lado  $ecdf$  actúa un momento total

$$\left( M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy \right) dy.$$

Estos momentos pueden ser reemplazados por fuerzas

$$M_{xy} \quad \text{y} \quad M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy,$$

que actúan sobre los dos elementos de borde de la placa, tal y como podemos ver en la Figura 2.3 (b). Si ahora sumamos todas las fuerzas que actúan en la región que separa ambas regiones (línea  $cd$  de la Figura 2.3 (c)) vemos que todas las fuerzas se anulan excepto

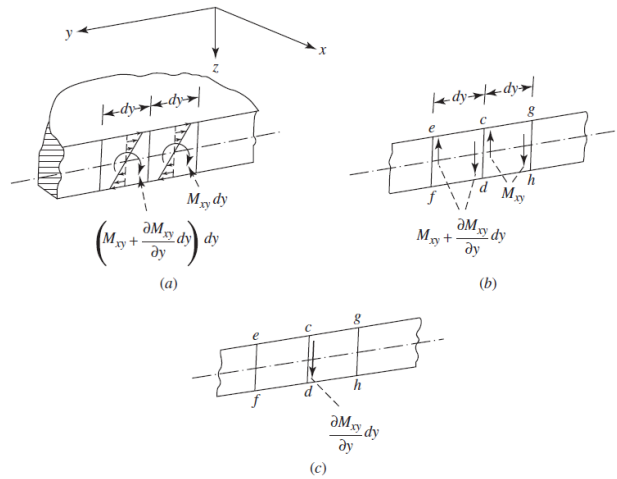


Figura 2.3: Esquema de las fuerzas que actúan sobre dos elementos  $dy$  del borde de una placa.

una:  $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy$ . Por último, si consideramos que en el borde de la placa  $Q_x = \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$ , entonces obtenemos:

$$V_x = \left( Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \Big|_{x=0} = 0.$$

Generalizando este resultado para una placa con una geometría arbitraria obtenemos que las condiciones de contorno finales son:

$$M_{nn}|_C = 0, \quad V_n|_C = 0. \quad (2.12)$$

4. **Borde descansando sobre muelle elástico lineal:** si consideramos que los bordes de la placa descansan sobre un muelle con fuerza restauradora  $F = -kw$  entonces podemos poner las condiciones de contorno como

$$M_{nn}|_C = 0, \quad V_n|_C = -kw|_C. \quad (2.13)$$

5. **Borde descansando sobre muelle elástico torsional:** si en vez de un muelle lineal consideramos que el contorno de la placa está apoyado sobre un muelle que ofrece un momento restaurador  $M = k \frac{\partial w}{\partial n}$ , entonces tendremos las siguientes condiciones en la frontera de la placa [9]:

$$M_{nn}|_C = k' \frac{\partial w}{\partial n}, \quad V_n|_C = 0. \quad (2.14)$$

## 2.2. Posibles geometrías

En el Capítulo 1 dedujimos la ecuación (1.23) usando en todo momento un sistema cartesiano, pero, de forma general, la placa bajo estudio puede ser circular o elíptica o poseer geometrías más complicadas. En estos casos, es muy conveniente el uso de un sistema de coordenadas adaptado a estas geometrías, lo cual conlleva un cambio en la forma de la ecuación. Examinemos algunas de las posibles formas de la placa.



### 2.2.1. Placas rectangulares

Esta geometría es la más sencilla que nos podemos encontrar en una placa. La ecuación (1.23) queda en este caso como

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + h \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, y). \quad (2.15)$$

En cuanto a las magnitudes  $M_{nn}$  y  $V_n$  necesarias para poder describir las condiciones de contorno, es posible escribirlas como podemos apreciar en la Tabla 2.1 si tenemos en cuenta las ecuaciones (2.9) (en función, eso sí de si los bordes son paralelos al eje  $x$  o al eje  $y$ ).

	Borde $\parallel x$	Borde $\parallel y$
$M_{nn}$	$-D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$	$-D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$
$V_n$	$-D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right)$	$-D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \right)$

Tabla 2.1: Momentos de torsión y fuerzas efectivas en los bordes de una placa rectangular.

### 2.2.2. Placas circulares

En el caso en el que la placa en cuestión tenga forma circular, o sea un sector circular, será recomendable el uso de coordenadas polares, caracterizadas por las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, & r^2 = x^2 + y^2, \\ y = r \sin \varphi, & \varphi = \arctan(y/x). \end{cases}$$

Con este cambio de coordenadas, la ecuación (1.23) adopta la forma

$$D \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) w + h \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(r, \varphi). \quad (2.16)$$

En cuanto a  $V_n$  y  $M_{nn}$  (las cuales podemos observar cómo actúan sobre un elemento de la placa fijándonos en la Figura 2.4), tenemos que sus expresiones vienen dadas por las ecuaciones que podemos ver en la Tabla 2.2 [15].

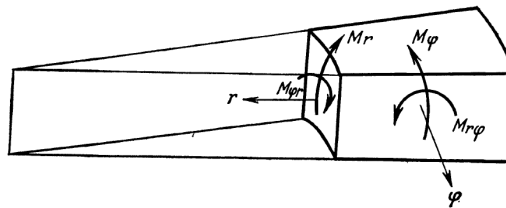


Figura 2.4: Esquema de momentos que actúan sobre un elemento de una placa circular.

	Borde $\perp \varphi$	Borde $\perp r$
$\frac{M_{nn}}{-D}$	$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right)$	$\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$
$\frac{V_n}{-D}$	$\frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w + \frac{1-\nu}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)$	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \nabla^2 w + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)$

Tabla 2.2: Momentos de torsión y fuerzas efectivas (divididos por  $-D$ ) en los bordes de una placa circular.

### 2.2.3. Placas elípticas

Si la placa tuviera forma elíptica será recomendable el uso de las coordenadas elípticas  $(\xi, \eta)$ , que están relacionadas las coordenadas cartesianas  $(x, y)$  de la siguiente forma:

$$x + iy = c \cosh(\xi + i\eta), \quad (2.17)$$

donde  $2c$  es la distancia interfocal de la elipse. Podemos ver un esquema que ilustra cómo es este nuevo sistema en la Figura 2.5.

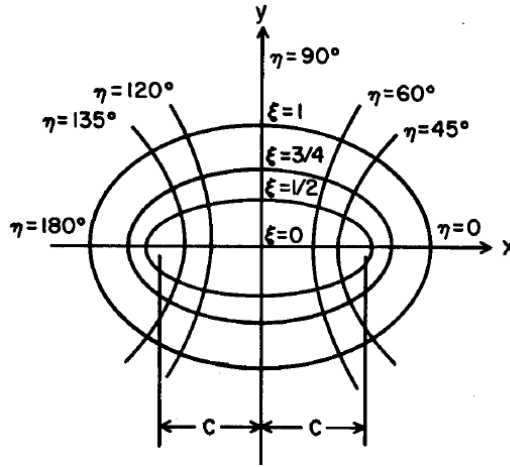


Figura 2.5: Sistema de coordenadas elípticas.

Separando en (2.17) la parte real y la parte imaginaria se obtiene lo siguiente:

$$x = c \cosh \xi \cos \eta, \quad y = c \sinh \xi \sin \eta. \quad (2.18)$$

En este sistema de coordenadas, la ecuación (1.23) toma la forma:

$$\left( \frac{2}{c^2(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)} \right)^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) w + h \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(\eta, \xi). \quad (2.19)$$

En cuanto a los momentos y fuerzas de cizalla, en este caso adoptan las siguientes expresiones

[15]:

$$\begin{aligned}
M_{\xi\xi} &= \frac{-2D/c^2}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \frac{(1-\nu) \sinh 2\xi}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{(1-\nu) \sin 2\eta}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right]. \\
M_{\eta\eta} &= \frac{-2D/c^2}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} \left[ \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{(1-\nu) \sinh 2\xi}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{(1-\nu) \sin 2\eta}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right]. \\
M_{\eta\xi} &= \frac{2D(1-\nu)/c^2}{(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2} \left[ \frac{\partial w}{\partial \xi} \sin 2\eta + \frac{\partial w}{\partial \eta} \sinh 2\xi - \frac{\partial^2 w}{\partial \eta \partial \xi} (\cosh 2\xi - \cos 2\eta) \right]. \\
Q_{\xi\xi} &= \frac{2\sqrt{2}D/c^3}{(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^{5/2}} \left[ 2 \sinh 2\xi \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) - (\cosh 2\xi - \cos 2\eta) \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) \right]. \\
Q_{\eta\eta} &= \frac{2\sqrt{2}D/c^3}{(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^{5/2}} \left[ 2 \sin 2\eta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) - (\cosh 2\xi - \cos 2\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) \right].
\end{aligned}$$



## Capítulo 3

# Soluciones exactas de la ecuación biarmónica en oscilaciones libres de placas

A lo largo de este capítulo buscaremos soluciones analíticas para oscilaciones libres de placas, es decir, la ecuación a resolver será (1.23) con el término  $q(x, y) = 0$ :

$$D \nabla^4 w + h \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (3.1)$$

Para poder abordar este problema deberemos de aplicar el *método de separación de variables* para así factorizar la parte temporal de la espacial y poder analizar ésta última en distintas geometrías y con diferentes condiciones de contorno. A lo largo del capítulo vamos a suponer que tanto  $D$  como la densidad  $\rho$  son constantes.

### 3.1. Método general de resolución

Como hemos mencionado anteriormente primero vamos a aplicar el método de separación de variables para separar la parte espacial de la temporal en la solución. Como es bien conocido, para ello vamos a proponer una solución que tome la forma

$$w(\vec{r}, t) = W(\vec{r})T(t). \quad (3.2)$$

Introduciendo este *ansatz* en (3.1) obtenemos

$$\frac{D \nabla^4 W}{\rho h W} = \frac{-1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2}. \quad (3.3)$$

Como el termino izquierdo de la ecuación anterior depende solo de las coordenadas espaciales y el derecho solo depende del tiempo, podemos igualar ambos términos a una constante que llamaremos  $\omega^2$ , de modo que:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = -\omega^2 T.$$

Si queremos que la parte temporal no diverja a tiempos grandes, entonces la constante  $\omega^2$  tiene que ser positiva, de tal modo que la solución final para la parte temporal será [16]

$$T(t) = A \sin(\omega t + \phi_0). \quad (3.4)$$

En cuanto a la parte espacial, si definimos una nueva constante  $k^4$  como

$$k^4 = \frac{\omega^2 \rho h}{D}, \quad (3.5)$$

entonces la ecuación diferencial a resolver será

$$(\nabla^4 - k^4)W(\vec{r}) = 0. \quad (3.6)$$

Para abordar la resolución de (3.6) escribamos esta ecuación en forma factorizada como

$$(\nabla^2 + k^2)(\nabla^2 - k^2)W(\vec{r}) = (\nabla^2 - k^2)(\nabla^2 + k^2)W(\vec{r}) = 0$$

y consideremos dos funciones  $W_1(\vec{r})$  y  $W_2(\vec{r})$  que cumplen, respectivamente,

$$(\nabla^2 + k^2)W_1(\vec{r}) = 0, \quad (\nabla^2 - k^2)W_2(\vec{r}) = 0. \quad (3.7)$$

Si ahora definimos dos funciones  $\beta_1(\vec{r})$  y  $\beta_2(\vec{r})$  como

$$(\nabla^2 - k^2)W(\vec{r}) = \beta_1(\vec{r}), \quad (\nabla^2 + k^2)W(\vec{r}) = \beta_2(\vec{r}),$$

entonces para que estas nuevas funciones cumplan (3.6) tiene que ocurrir que

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k^2)\beta_1 &= 0 \Rightarrow \beta_1 = A_1 W_1, \\ (\nabla^2 - k^2)\beta_2 &= 0 \Rightarrow \beta_2 = A_2 W_2, \end{aligned}$$

donde  $A_1$  y  $A_2$  son constantes arbitrarias. De estas dos últimas ecuaciones deducimos que

$$2k^2 W = A_2 W_2 - A_1 W_1, \quad (3.8)$$

es decir, podemos poner la solución a (3.6) como combinación lineal de  $W_1$  y  $W_2$  [17]. Por lo tanto, debido a este hecho, el procedimiento a seguir a continuación será resolver las ecuaciones (3.7) usando separación de variables y, posteriormente aplicar las condiciones de contorno necesarias a una suma de  $W_1$  y  $W_2$ . Dejaremos para el anexo B la demostración de la ortogonalidad de las soluciones de (3.6).

## 3.2. Resolución en coordenadas polares

Usando coordenadas polares las ecuaciones (3.7) toman la forma

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W_1}{\partial \varphi^2} + k^2 W_1 = 0, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial^2 W_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W_2}{\partial \varphi^2} - k^2 W_2 = 0. \quad (3.10)$$

Para resolver (3.9) y (3.10) usemos de nuevo el método de separación de variables, es decir

$$W_1(r, \varphi) = R_1(r)\Theta_1(\varphi), \quad W_2(r, \varphi) = R_2(r)\Theta_2(\varphi). \quad (3.11)$$

Con esta suposición, las ecuaciones (3.9) y (3.10) adoptan la forma

$$r^2 \left( \left( \frac{dR_1^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_1}{dr} \right) \frac{1}{R_1} + k^2 \right) = -\frac{1}{\Theta_1} \frac{d^2\Theta_1}{d\varphi^2}, \quad (3.12)$$

$$r^2 \left( \left( \frac{dR_2^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dR_2}{dr} \right) \frac{1}{R_2} - k^2 \right) = -\frac{1}{\Theta_2} \frac{d^2\Theta_2}{d\varphi^2}. \quad (3.13)$$

De nuevo nos encontramos que la parte izquierda y la derecha dependen sólo de una variable en ambas ecuaciones, por tanto podemos igualar (3.12) a  $\alpha_1^2$  y (3.13) a  $\alpha_2^2$ . Haciendo esto y fijándonos en la dependencia angular tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Theta_1}{d\varphi^2} + \alpha_1^2\Theta_1 &= 0, \\ \frac{d^2\Theta_2}{d\varphi^2} + \alpha_2^2\Theta_2 &= 0. \end{aligned}$$

Si ahora queremos que las dos soluciones sean periódicas respecto a  $\varphi$ , es decir  $\Theta_1(0) = \Theta_1(2\pi)$  y  $\Theta_2(0) = \Theta_2(2\pi)$ , necesariamente  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}$ . Por este motivo, de ahora en adelante pondremos  $\alpha_1 = n_1$ ,  $\alpha_2 = n_2$ , de forma que las soluciones para  $\Theta_1$  y  $\Theta_2$  serán

$$\Theta_1(\varphi) = C_{n_1} \sin(n_1\varphi + \epsilon_1), \quad \Theta_2(\varphi) = C_{n_2} \sin(n_2\varphi + \epsilon_2).$$

Con estas consideraciones podemos escribir (3.12) y (3.13) como

$$\frac{dR_1^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_1}{dr} + \left( k^2 - \frac{n_1^2}{r^2} \right) R_1 = 0, \quad (3.14)$$

$$\frac{dR_2^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_2}{dr} - \left( k^2 + \frac{n_2^2}{r^2} \right) R_2 = 0. \quad (3.15)$$

Si ahora en estas dos últimas ecuaciones hacemos el cambio de variable  $\varrho = kr$  obtenemos:

$$\frac{dR_1^2}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dR_1}{d\varrho} + \left( 1 - \frac{n_1^2}{\varrho^2} \right) R_1 = 0, \quad (3.16)$$

$$\frac{dR_2^2}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dR_2}{d\varrho} - \left( 1 + \frac{n_2^2}{\varrho^2} \right) R_2 = 0. \quad (3.17)$$

En esta forma tanto (3.16) como (3.17) son fáciles de reconocer ya que son distintos tipos de ecuaciones de Bessel, cuyas soluciones respectivamente son<sup>1</sup> [17]:

$$R_1(r) = A_{n_1} J_{n_1}(kr) + B_{n_1} N_{n_1}(kr), \quad \forall n_1 \in \mathbb{N}, \quad (3.18)$$

$$R_2(r) = C_{n_2} K_{n_2}(kr) + D_{n_2} I_{n_2}(kr), \quad \forall n_2 \in \mathbb{N}, \quad (3.19)$$

<sup>1</sup>Se deja para el Anexo B la definición de estas funciones así como la exposición de algunas de sus propiedades.

donde  $J_n(kr)$  y  $N_n(kr)$  son las funciones de Bessel de primera y segunda especie, respectivamente, y  $K_n(kr)$  y  $I_n(kr)$  son las funciones de Bessel modificadas de primera y segunda especie.

Teniendo en cuenta todo el desarrollo realizado en este capítulo, la solución final para cada valor posible de  $n_1 = n_2 = n \in \mathbb{N}$  será:

$$w_n(r, \varphi, t) = \sin(\omega t + \phi_n) \sin(n\varphi + \epsilon_n) [A_n J_n(kr) + B_n N_n(kr) + C_n I_n(kr) + D_n K_n(kr)], \quad (3.20)$$

donde hemos tenido en cuenta que las constantes arbitrarias que han ido apareciendo dependen del número natural  $n$ . Tampoco hay que olvidar que  $\omega$  y  $k$  están relacionados entre si por la ecuación (3.5).

De ahora en adelante, para analizar vibraciones en placas con simetría circular tendremos que aplicar en cada caso las correspondientes condiciones de contorno en (3.20).

### 3.2.1. Condiciones de contorno con borde exterior e interior sujetos

Para poder abordar este problema primero supongamos que estamos tratando una corona circular de radio  $a$  con un agujero circular centrado en el origen de radio  $b < a$ . En este caso, las condiciones de contorno serán

$$w(r, \varphi, t)|_{r=a} = w(r, \varphi, t)|_{r=b} = \frac{\partial w(r, \varphi, t)}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{\partial w(r, \varphi, t)}{\partial r} \Big|_{r=b} = 0. \quad (3.21)$$

Aplicando (3.21) en (3.20) y teniendo en cuenta las propiedades (C.23) se obtiene

$$\begin{cases} A_n J_n(ak) + B_n N_n(ak) + C_n I_n(ak) + D_n K_n(ak) = 0, \\ A_n \left[ \frac{n}{a} J_n(ka) - k J_{n+1}(ka) \right] + B_n \left[ \frac{n}{a} N_n(ka) - k N_{n+1}(ka) \right] \\ \quad + C_n \left[ \frac{n}{a} I_n(ka) + k I_{n+1}(ka) \right] + D_n \left[ \frac{n}{a} K_n(ka) - k K_{n+1}(ka) \right] = 0, \\ A_n J_n(bk) + B_n N_n(bk) + C_n I_n(bk) + D_n K_n(bk) = 0, \\ A_n \left[ \frac{n}{b} J_n(kb) - k J_{n+1}(kb) \right] + B_n \left[ \frac{n}{b} N_n(kb) - k N_{n+1}(kb) \right] \\ \quad + C_n \left[ \frac{n}{b} I_n(kb) + k I_{n+1}(kb) \right] + D_n \left[ \frac{n}{b} K_n(kb) - k K_{n+1}(kb) \right] = 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

Para obtener soluciones en las constantes  $A_n, B_n, C_n$  y  $D_n$  que no sean triviales es necesario que el determinante de (3.22) se anule.

El resultado que se obtiene es bastante complicado, así que nos vamos a centrar en un caso extremo que es más sencillo de analizar: una placa sin agujero con el borde exterior sujeto, para lo cual debemos de hacer el límite cuando  $b$  tiende a cero en el determinante del sistema anteriormente mencionado. Debido a que las funciones  $N_n(x)$  y  $K_n(x)$  divergen cuando  $x$  tiende a cero, debemos multiplicar primero el citado determinante por  $b$  y posteriormente realizar el límite. Realizando el cálculo con un programa de cálculo simbólico como *Mathematica* obtenemos que las condiciones para que el determinante de (3.22) se anule son las que se indican en la Tabla 3.1.



$n = 0$	$-\frac{2K_1(ka) + \pi N_1(ka)}{2K_0(ka) + \pi N_0(ka)} = \frac{I_1(ka) + J_1(ka)}{I_0(ka) - J_0(ka)}$
$n \neq 0$	$\frac{J_n(ak)}{J_{n+1}(ak)} = -\frac{I_n(ak)}{I_{n+1}(ak)}$

Tabla 3.1: Ecuaciones trascendentes que permiten hallar las frecuencias propias de oscilación de una placa circular con borde exterior y centro sujetos.

La resolución de las ecuaciones de la Tabla 3.1 por métodos numéricos nos proporciona los posibles valores permitidos para  $ka$  y, por tanto, las frecuencias fundamentales de vibración para cada  $n$ . En la Figura 3.1 podemos ver las representaciones gráficas de la parte izquierda y derecha de las ecuaciones de la Tabla 3.1 para los casos  $n = 0$  y  $n = 2$ .

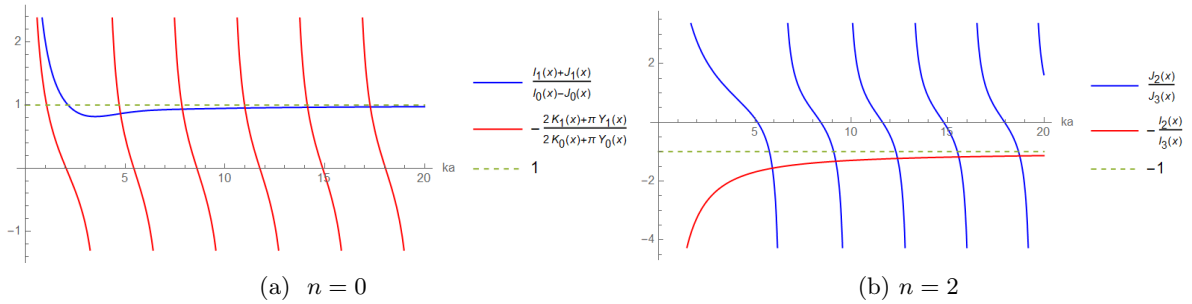


Figura 3.1: Resolución gráfica de los valores permitidos para  $ka$  en los dos casos indicados.

Como ya hemos mencionado, las intersecciones entre las ramas rojas y azules representadas en cada gráfica nos dan los posibles valores para  $ka$ . Con ayuda del comando “*FindRoot*” del programa *Mathematica* podemos construir una tabla para algunos de los valores de  $ka$  para distintos  $n$ , lo que se muestra en la Tabla 3.2.

	$(ka)_1$	$(ka)_2$	$(ka)_3$	$(ka)_4$
$n = 0$	4,77	7,87	11,01	14,15
$n = 1$	4,61	7,80	10,95	14,11
$n = 2$	5,91	9,19	12,40	15,58

Tabla 3.2: Valores permitidos para  $ka$  y diversos valores de  $n$ .

Si nos fijamos en la Figura 3.1 podemos apreciar que aparentemente para valores grandes de  $ka$  las funciones

$$\frac{-J_n(ka)}{J_{n+1}(ka)} \quad \text{y} \quad \frac{I_1(ka) + J_1(ka)}{I_0(ka) - J_0(ka)}$$

tienden a  $-1$  y a  $1$ , respectivamente. Para asegurarnos de que esto es lo que realmente ocurre podemos usar el comando “*Limit*” de *Mathematica* para analizar el límite de estas dos funciones. Haciendo esto se ve que:

$$\lim_{(ka) \rightarrow \infty} \frac{I_1(ka) + J_1(ka)}{I_0(ka) - J_0(ka)} = 1, \quad \lim_{(ka) \rightarrow \infty} \frac{-I_n(ak)}{I_{n+1}(ak)} = -1.$$

Por tanto, para valores grandes de  $ka$  podemos reescribir la Tabla 3.1 y dar otra equivalente con resultados válidos para  $ka \gg 1$ , que se ofrece en la Tabla 3.3.

$n = 0$	$-2K_1(ka) - \pi N_1(ka) = 2K_0(ka) + \pi N_0(ka)$
$n \neq 0$	$J_n(ka) = J_{n+1}(ka)$

Tabla 3.3: Ecuaciones trascendentes aproximadas, válidas para  $ka \gg 1$ , que permiten hallar las frecuencias propias de una placa circular con borde exterior y centro sujetos.

En la Figura 3.2 se muestra una animación correspondiente al caso  $a = 1$ , con  $n = 1$  y  $k = 4,61$ , tomados de la Tabla 3.2.

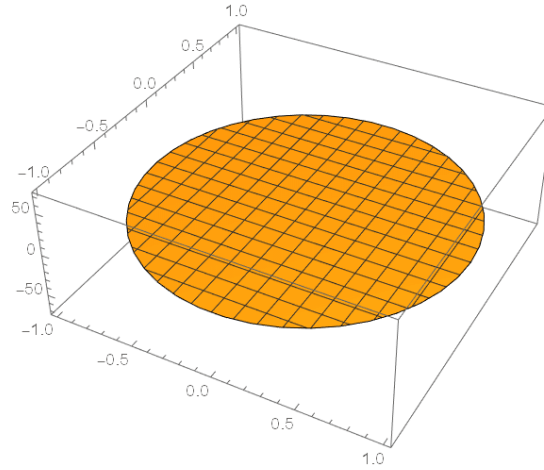


Figura 3.2: Animación correspondiente al modo modo  $n = 1$ ,  $k = 4,61$ , para  $a = 1$ .

### Comparación con placa sin agujero con borde sujeto

Consideremos ahora no una corona circular, como antes, sino una placa circular de radio  $a$  que no contenga ningún agujero en su interior. Bajo estas condiciones, debido a que las funciones  $N_n(kr)$  y  $K_n(kr)$  divergen en el origen [19, 18, 20], para tener una solución físicamente aceptable debemos anular en (3.20) las constantes  $B_n$  y  $D_n$ . Si ahora imponemos además las condiciones

$$w(r, \varphi, t)|_{r=a} = \frac{\partial w(r, \varphi, t)}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0 \quad (3.23)$$

en la ecuación

$$w_n(r, \varphi, t) = \sin(\omega(k)t + \phi_n) \sin(n\varphi + \epsilon_n) (A_n J_n(kr) + C_n I_n(kr)), \quad (3.24)$$

obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A_n J_n(ka) + C_n I_n(ka) = 0, \\ A_n \left[ \frac{n}{a} J_n(ka) - k J_{n+1}(ka) \right] + C_n \left[ \frac{n}{a} I_n(ka) - k I_{n+1}(ka) \right] = 0. \end{cases} \quad (3.25)$$

De nuevo, para obtener soluciones no triviales del sistema anterior (3.25) hemos de anular el determinante de las constantes  $A_n$  y  $C_n$ , con lo que obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{J_n(ka)}{J_{n+1}(ka)} = -\frac{I_n(ka)}{I_{n+1}(ka)}. \quad (3.26)$$

Como podemos apreciar, esta es la misma ecuación que obtuvimos para el caso  $n \neq 0$  en el apartado anterior, por tanto, podemos concluir que las frecuencias de vibración en ambos casos van a ser iguales.

Ahora analicemos si las soluciones propuestas para este caso particular son además compatibles con las condiciones de centro sujeto. Si imponemos  $w(r, \varphi, t)|_{r=0} = 0$  en (3.24) se obtiene

$$A_n J_n(0) + C_n I_n(0) = 0. \quad (3.27)$$

Si  $n$  es distinto de cero tanto  $J_n(0)$  como  $I_n(0)$  se anulan, por tanto (3.24) es compatible con la condición impuesta.

Ahora impongamos la condición  $\frac{\partial w(r, \varphi, t)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0$ . Haciendo estas derivadas y usando (C.23) obtenemos

$$A_n \left[ \frac{n}{a} J_n(0) - k J_{n+1}(0) \right] + C_n \left[ \frac{n}{a} I_n(0) - k I_{n+1}(0) \right] = 0. \quad (3.28)$$

Como para  $n$  distinto de cero siempre ocurre que  $J_n(0) = I_n(0) = 0$  y para el caso en el que  $n$  sea cero (3.28) se escribe como

$$A_n k J_1(0) + C_n k I_1(0) = 0,$$

entonces podemos concluir que los términos entre paréntesis de (3.28) siempre se anulan, lo cual implica que la solución (3.24) es compatible con  $\frac{\partial w(r, \varphi, t)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0$  para todos los posibles valores de  $n$ .

Todo este desarrollo nos lleva a concluir que para  $n \neq 0$  la ecuación (3.24) nos sirve como solución tanto como para el caso en el que el dentro de la placa esté sujeto con su radio exterior esté sujeto como para el caso en el que sólo el borde exterior esté sujeto. Es más, si consideramos las raíces  $m$ -ésimas  $(ka)_m$  de (3.26) y la primera de las ecuaciones (3.25) entonces podemos reescribir la solución como [7, 15]

$$w_n(r, \varphi, t) = C_{n,m} \sin(\omega(k_m) t + \phi_n) \sin(n\varphi + \epsilon_n) \left( \frac{-I_n((ka)_m)}{J_n((ka)_m)} J_n(kr) + I_n(kr) \right). \quad (3.29)$$

En verdad, la solución más general viene dada por una combinación lineal de soluciones, es decir

$$w(r, \varphi, t) = \sum_{m,n} C_{n,m} \sin(\omega_{n,m} t + \phi_n) \sin(n\varphi + \epsilon_n) \left( \frac{-I_n((ka)_m)}{J_n((ka)_{n,m})} J_n(k_{n,m} r) + I_n(k_{n,m} r) \right). \quad (3.30)$$

Donde  $\omega_{n,m}$  representa la frecuencia asociada a la  $m$ -ésima raíz de la ecuación trascendente para el índice  $n$ . Para determinar los coeficientes  $C_{n,m}$  y  $\phi_n$  en (3.30) necesitamos aplicar condiciones de contorno adicionales a las expuestas anteriormente como por ejemplo la amplitud de la vibración de la placa en un determinado instante de tiempo o su velocidad.

En cuanto al caso  $n = 0$ , merece un análisis un poco más cuidadoso. Si aplicamos las condiciones de contorno expuestas anteriormente en  $r = 0$  y  $r = a$  obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A_0 + C_0 = 0, \\ A_0 J_0(ka) + C_0 I_0(ka) = 0, \\ A_0 J_1(ka) + C_0 I_1(ka) = 0. \end{cases} \quad (3.31)$$

Según podemos observar este sistema de ecuaciones está formado por las ecuaciones (3.25) más otra ecuación. Para que este sistema genere soluciones no triviales tiene que ocurrir que

$$J_0(ka) = I_0(ka), \quad J_1(ka) = I_1(ka), \quad (3.32)$$

lo cual no es compatible con las soluciones que se pueden hallar a través de la primera ecuación de la Tabla 3.1, lo que nos indica que la solución (3.24) no es compatible en  $n = 0$  con las frecuencias de vibración halladas.

Un caso similar a este en el que se analiza una placa con su borde exterior libre y su centro anclado se puede encontrar en la referencia [21] de la bibliografía.

### 3.2.2. Condiciones de contorno con borde exterior sobre muelle elástico torsional

En este caso vamos a aplicar las condiciones de contorno (2.14) del apartado 2.1.2, es decir, imponemos lo siguiente:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) = \frac{\kappa}{D} \frac{\partial w}{\partial r}, \\ \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\nu - 3}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{2 - \nu}{r^2} \frac{\partial w^3}{\partial r \partial \varphi^2} = 0. \end{cases} \quad (3.33)$$

Introduciendo la solución (3.24) en (3.33) y con ayuda de *Mathematica* obtenemos

$$\begin{cases} A_n \left( Dk(\nu - 1)aJ_{n-1}(ka) - (Dn(1+n)(\nu - 1) + (Dk^2 + \kappa)a^2) J_n(ka) \right) \\ + C_n \left( Dk(\nu - 1)aI_{n-1}(ka) + (-Dn(1+n)(\nu - 1) + (Dk^2 - \kappa)a^2) I_n(ka) \right) = 0, \\ A_n \left( -ka(n^2(\nu - 3) + k^2a^2)J_{n-1}(ka) + n(n(-5 + n(\nu - 3) + \nu) + k^2a^2)J_n(ka) \right) \\ + C_n \left( ka(-n^2(\nu - 3) + k^2a^2)I_{n-1}(ka) + n(n(-5 + n(\nu - 3) + \nu) - k^2a^2)I_n(ka) \right) = 0. \end{cases} \quad (3.34)$$

De nuevo, para obtener soluciones diferentes de la trivial hemos de anular el determinante de (3.34), de lo cual, haciendo previamente los cambios  $\kappa \rightarrow \alpha D$ ,  $k' \rightarrow k/a$  y  $\alpha \rightarrow \alpha/(a^2)$ ,

obtenemos la siguiente ecuación trascendente

$$\begin{aligned}
 & I_{n-1}(k') \left\{ J_n(k') \left[ k'^2(\alpha + 2n(\nu + n - 1)) + k'^4 + n^2(-(\alpha + 6)\nu + 3\alpha + \nu^2 - (\nu - 3)) \right. \right. \\
 & \left. \left. (\nu - 1)n^2 + 5 \right] - 2k'^3(\nu - 1)J_{n-1}(k') \right\} + I_n(k') \left\{ J_{n-1}(k') \left[ k'^2(\alpha + 2n(\nu + n - 1)) \right. \right. \\
 & \left. \left. - k'^4 + n^2((\alpha + 6)\nu - 3\alpha - \nu^2 + (\nu - 3)(\nu - 1)n^2 - 5) \right] - 2kn(\alpha + 2(n + 2)n)J_n(k') \right\} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Las soluciones de (3.35) nos proporcionan las posibles frecuencias de vibración. En la nube de *Wolfram* hemos colocado [este enlace](#) donde podemos encontrar una representación gráfica de la ecuación (3.35). En el enlace podemos asignar y modificar el valor de las constantes definidas a lo largo de todo el desarrollo y cuyos puntos de corte proporcionan las posibles frecuencias de vibración para este caso.

Como ejemplo, en la Tabla 3.4 tenemos los primeros valores permitidos de  $k'$  para  $n = 0, 1, 2$  habiendo fijado las constantes  $\alpha$  y  $\nu$  con valores 5 y 0,3 respectivamente.

	$k'_1$	$k'_2$	$k'_3$
$n = 0$	1,38	6,06	9,30
$n = 1$	4,09	7,60	10,84
$n = 2$	5,40	8,97	18,67

Tabla 3.4: Frecuencias de vibración permitidas para el caso  $\alpha = 5$ ,  $\nu = 0,3$ .

Una vez elegida una frecuencia de las admisibles, para encontrar la relación entre las constantes  $A_n$  y  $C_n$  para cada modo de vibración es necesario introducir el valor de las constantes que caracterizan la placa así como el valor de  $k$  y de  $n$  en cualquiera de las ecuaciones (3.34).

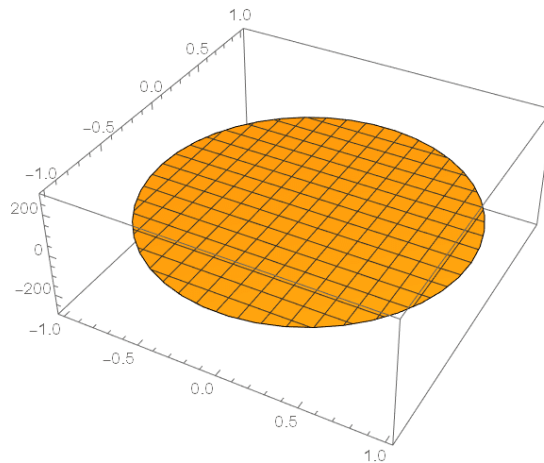


Figura 3.3: Animación del modo  $n = 0$ ,  $k' = 6,06$ , de la placa circular con muelle torsional.

En las Figuras 3.3 y 3.4 podemos encontrar las animaciones correspondientes a  $k'_2$  para los

casos  $n = 0$  y  $n = 1$  con  $a = 1$ ,  $\rho = 1$ ,  $\kappa = 5$  y  $D = 1$ , es decir, con los valores con los que se construyó la Tabla 3.4.

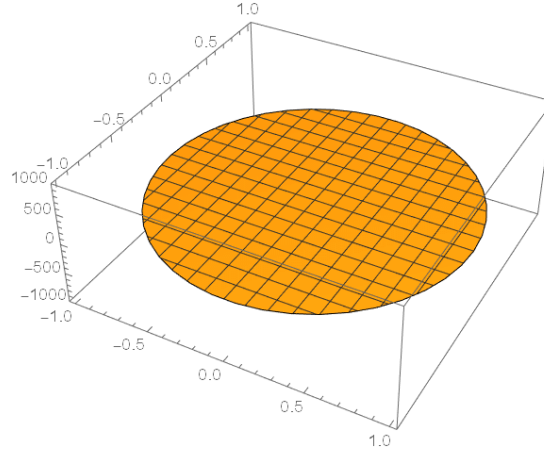


Figura 3.4: Animación del modo  $n = 1$ ,  $k' = 7,60$ , de la placa circular con muelle torsional.

A partir de estas animaciones podemos observar que, al contrario del caso  $n = 0$ , para el caso  $n = 1$  nos encontramos con una recta nodal en  $\varphi = 0$  en la que los puntos de la placa no oscilan. Si representásemos un modo de vibración, por ejemplo, con  $n = 3$  nos encontraríamos con tres rectas nodales en vez de una.

Un caso similar a este en el que las condiciones de contorno aplicadas son

$$\left\{ \begin{array}{l} w|_{r=a} = 0, \\ \left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=a} = -\kappa \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \Big|_{r=a}, \end{array} \right. \quad (3.36)$$

se puede encontrar en la referencia [22] de la bibliografía.

### 3.3. Resolución en coordenadas cartesianas

En este caso, las ecuaciones (3.7) quedan de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} + k^2 W_1 = 0, \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_2}{\partial y^2} - k^2 W_1 = 0. \quad (3.38)$$

Usemos de nuevo el método de separación de variables y propongamos como solución

$$W_1 = X_1(x)Y_1(y) \quad y \quad W_2 = X_2(x)Y_2(y).$$

Realizando esta operación se obtiene:

$$\frac{1}{x} \frac{d^2 X_1}{dx^2} + \frac{1}{y} \frac{d^2 Y_1}{dy^2} + k^2 = 0, \quad (3.39)$$

$$\frac{1}{x} \frac{d^2 X_2}{dx^2} + \frac{1}{y} \frac{d^2 Y_2}{dy^2} - k^2 = 0. \quad (3.40)$$

Ahora que cada sumando de tanto (3.39) como de (3.40) depende solo de una variable podemos concluir que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} \frac{d^2 X_1}{dx^2} = a_1^2, \quad \frac{1}{y} \frac{d^2 Y_1}{dy^2} = a_2^2, \\ \frac{1}{x} \frac{d^2 X_2}{dx^2} = -a_3^2, \quad \frac{1}{y} \frac{d^2 Y_2}{dy^2} = -a_4^2. \end{array} \right. \quad (3.41)$$

donde  $a_\ell$  son cuatro constantes que deben satisfacer lo siguiente

$$k^2 = a_1^2 + a_2^2 = a_3^2 + a_4^2. \quad (3.42)$$

Resolviendo cada ecuación de (3.41) y teniendo en cuenta que la solución para  $W$  es una suma de  $W_1$  y  $W_2$  entonces tenemos que la solución final será [7, 12, 9, 11, 23]:

$$\begin{aligned} w(x, y, t) = & \sin(\omega t + \phi_0)(A_1 \sin(a_1 x) \sin(a_2 y) + A_2 \sin(a_1 x) \cos(a_2 y)) \\ & + A_3 \cos(a_1 x) \sin(a_2 y) + A_4 \cos(a_1 x) \cos(a_2 y) + A_5 \sinh(a_3 x) \sinh(a_4 y) \\ & + A_6 \sinh(a_3 x) \cosh(a_4 y) + A_7 \cosh(a_3 x) \sinh(a_4 y) + A_8 \cosh(a_3 x) \cosh(a_4 y). \end{aligned} \quad (3.43)$$

### Formas alternativas para buscar soluciones

Una forma alternativa para buscar soluciones en coordenadas cartesianas es aplicar directamente en (3.6) el método de separación de variables. Proponiendo una solución  $w = X(x)Y(y)$  obtenemos

$$\frac{1}{X} \frac{d^4 X}{dx^4} + \frac{2}{XY} \frac{d^2 X}{dx^2} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^4 Y}{dy^4} - k^4 = 0, \quad (3.44)$$

y para que las funciones  $X(x)$  e  $Y(y)$  puedan separarse en (3.44) tiene que ocurrir que

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = -\alpha^2 X \quad \text{obien} \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta^2 Y, \quad (3.45)$$

donde  $\alpha$  y/o  $\beta$  serán constantes a determinar. Por simplicidad, vamos a escoger la primera de las opciones dadas en la ecuación (3.45), cuya solución será

$$X(x) = A \sin(\alpha x + \delta). \quad (3.46)$$

Ahora, si introducimos (3.46) en (3.44) obtenemos [9, 12, 24]

$$\frac{d^4 Y}{dy^4} - 2\alpha \frac{d^2 Y}{dy^2} - (k^4 - \alpha^4)Y = 0. \quad (3.47)$$

Ahora bien, como (3.47) es una ecuación diferencial ordinaria, solo hemos de hallar las raíces de su polinomio característico para obtener sus soluciones. En este caso las raíces son (suponiendo  $k^4 > \alpha^4$ ):

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \sqrt{\alpha^2 + k^2}, & \mu_2 &= -\sqrt{\alpha^2 + k^2}, \\ \mu_3 &= i\sqrt{k^2 - \alpha^2}, & \mu_4 &= -i\sqrt{k^2 - \alpha^2}.\end{aligned}\tag{3.48}$$

Así pues, la solución para  $w$  será finalmente:

$$w(x, y, t) = \sin(\omega t + \phi) \sin(\alpha x + \delta) [A_1 \sin(\nu_1 y) + A_2 \cos(\nu_1 y) + A_3 \sinh(\nu_2 y) + A_4 \cosh(\nu_2 y)],\tag{3.49}$$

donde

$$\nu_1 = \sqrt{k^2 - \alpha^2} \quad \nu_2 = \sqrt{k^2 + \alpha^2}.\tag{3.50}$$

Por otro lado, tenemos también la posibilidad de que  $k^4 < \alpha_n^4$ , en cuyo caso las soluciones finales quedan como:

$$\begin{aligned}w(x, y, t) &= \sin(\omega t + \phi) \sin(\alpha x + \delta) [A_1 \sinh(\nu_3 y) + A_2 \cosh(\nu_3 y) \\ &\quad + A_3 \sinh(\nu_2 y) + A_4 \cosh(\nu_2 y)],\end{aligned}\tag{3.51}$$

donde

$$\nu_3 = \sqrt{\alpha^2 - k^2} \quad \nu_2 = \sqrt{k^2 + \alpha^2}.\tag{3.52}$$

Como podemos apreciar, las soluciones (3.49) y (3.51) son un caso particular de las soluciones (3.43). Las soluciones de la forma (3.49) y (3.51) son llamadas *soluciones de Lévy* y, usualmente, se utilizan en los casos en los que se analizan placas rectangulares con dos bordes apoyados [25, 26].

### 3.3.1. Placa rectangular con bordes apoyados en $x = 0, a$ y bordes apoyados sobre muelle elástico lineal en $y = 0, b$

Supongamos una placa con un vértice centrado en el origen de lados  $a$  y  $b$  como la que podemos ver en la Figura 3.5. Para esta sección, usaremos las soluciones (3.49), (3.51) ya que las soluciones más generales que proporciona la ecuación (3.43) no se pueden poner, de forma

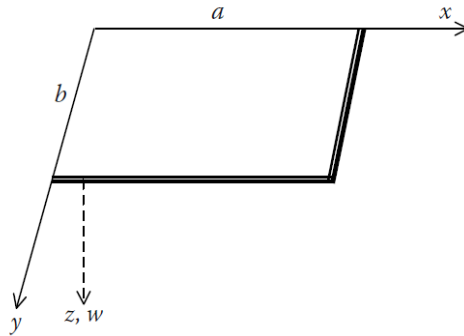


Figura 3.5: Placa rectangular con esquina centrada en origen.



general de la forma  $w(x, y) = X(x)Y(y)$ , lo cual impide que podamos aplicar de forma eficiente las condiciones de contorno correspondientes al problema. Teniendo en cuenta toda la teoría expuesta en el Capítulo 2 las condiciones de contorno para este caso serán:

$$\begin{cases} W|_{x=0, x=a} = 0, & \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=0, x=a} = 0, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \Big|_{y=0, b} = 0, & \left( \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial y \partial x^2} \right) \Big|_{y=0, b} = \frac{\kappa}{D} W \Big|_{y=0, b}. \end{cases} \quad (3.53)$$

Si ahora aplicamos las condiciones de contorno para  $x = 0, a$  en (3.49) o en (3.51) entonces obtenemos que se tiene que cumplir que

$$\sin(\delta) = 0, \quad \sin(\delta + \alpha a) = 0, \quad (3.54)$$

lo cual sucede si y solo si

$$\delta_m = m\pi, \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a}, \quad n, m \in \mathbb{N}. \quad (3.55)$$

Usualmente ignoraremos  $\delta_m$  ya que  $\sin(\alpha_n x + \delta_m) = (-1)^m \sin(\alpha_n x)$ , es decir, sólo puede causar que la solución para cada modo de vibración cambie de signo. Ahora para hallar la forma de la dependencia de la ecuación con la variable  $y$  tenemos que distinguir dos casos según  $k^2$  sea mayor o menor que  $\alpha_n^2$ .

### Solución para $k^2 > \alpha_n^2$

Utilizaremos el procedimiento ya usado en apartados anteriores y hallaremos el sistema de ecuaciones correspondiente al problema aplicando las condiciones de contorno correspondientes a  $y = 0, b$  haciendo uso para ello de la solución (3.49). Con esto y llamando  $z$  a  $\kappa/D$  obtenemos:

$$\begin{cases} (-\nu\alpha_n^2 - \nu_1^2)A_2 + (-\nu\alpha_n^2 + \nu_2^2)A_4 = 0, \\ (-\nu\alpha_n^2 - \nu_1^2)(\sin(b\nu_1)A_1 + \cos(b\nu_1)A_2) + (-\nu\alpha_n^2 + \nu_2^2)(\sinh(b\nu_2)A_3 + \cosh(b\nu_2)A_4) = 0, \\ ((\nu - 2)\nu_1\alpha_n^2 - \nu_1^3)A_1 - zA_2 + (\nu_2^3 + (\nu - 2)\nu_2\alpha_n^2)A_3 - zA_4 = 0, \\ \left( z \left( -(\sin(b\nu_1)) \right) - \nu_1 (\cos(b\nu_1)) (\nu_1^2 - (\nu - 2)\alpha_n^2) \right) A_1 + \left( \nu_1 (\sin(b\nu_1)) (\nu_1^2 - (\nu - 2)\alpha_n^2) \right. \\ \quad \left. - z (\cos(b\nu_1)) A_2 + (\nu_2 (\cosh(b\nu_2)) (\nu_2^2 + (\nu - 2)\alpha_n^2) - z (\sinh(b\nu_2))) \right) A_3 + \\ \quad \left( \nu_2 (\sinh(b\nu_2)) (\nu_2^2 + (\nu - 2)\alpha_n^2) - z (\cosh(b\nu_2)) \right) A_4 = 0. \end{cases} \quad (3.56)$$

Como ejemplo, podemos encontrar en la Tabla 3.5 algunos de los posibles valores para  $k$  para el caso en el que tengamos una placa cuadrada con  $a = b = \kappa = D = 1$  y  $\nu = 0,3$ .

Además de estas raíces podemos, apreciar del sistema (3.56) que cuando  $k = n\pi/a$  ( $\nu_1 = 0$ ) el coeficiente que acompaña a  $A_1$  se anula en todas las ecuaciones haciendo que el conjunto de ecuaciones se convierta en un sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas, el cual se puede comprobar que solamente tiene la solución trivial. Todo esto nos indica que las raíces  $k = n\pi/a$  son incompatibles con la solución (3.49).

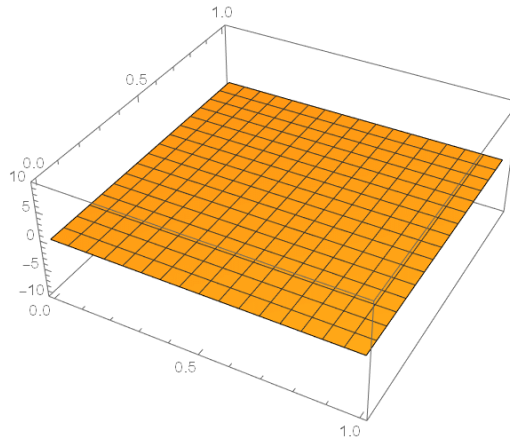
	$k_1$	$k_2$	$k_3$
$n = 1$	4,01	6,06	8,67
$n = 2$	6,83	8,41	10,54
$n = 3$	9,80	11,04	12,83

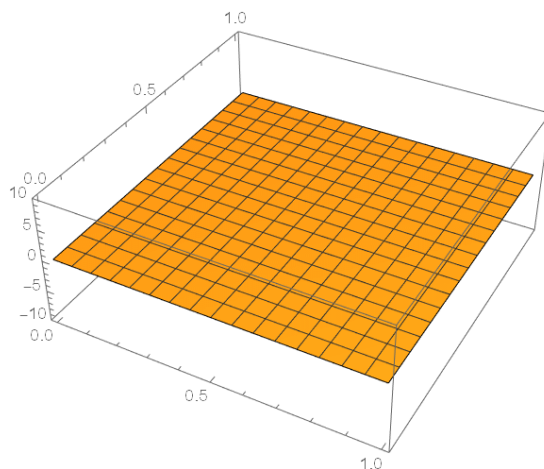
Tabla 3.5: Valores permitidos de para el caso  $a = b = \kappa = 1$  y  $\nu = 0,3$ .**Solución para  $k^2 < \alpha_n^2$** 

En este caso solo tenemos que aplicar el mismo procedimiento que en el apartado anterior pero esta vez usando la solución (3.51). El sistema de ecuaciones esta vez es:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nu_3^2 - \nu\alpha_n^2)A_2 + (\nu_2^2 - \nu\alpha_n^2)A_4 = 0, \\ (\nu_3^3 + (\nu - 2)\nu_3\alpha_n^2)A_1 - zA_2 + (\nu_2^3 + (\nu - 2)\nu_2\alpha_n^2)A_3 - zA_4 = 0, \\ (\sinh(b\nu_3))(\nu_3^2 - \nu\alpha_n^2)A_1 + (\cosh(b\nu_3))(\nu_3^2 - \nu\alpha_n^2)A_2 + (\sinh(b\nu_2))(\nu_2^2 - \nu\alpha_n^2)A_3 \\ \quad + (\cosh(b\nu_2))(\nu_2^2 - \nu\alpha_n^2)A_4 = 0, \\ (\nu_3(\cosh(b\nu_3))(\nu_3^2 + (\nu - 2)\alpha_n^2) - z(\sinh(b\nu_3)))A_1 + (\nu_3(\sinh(b\nu_3))(\nu_3^2 + (\nu - 2)\alpha_n^2) \\ \quad - z(\cosh(b\nu_3)))A_2 + (\nu_2(\cosh(b\nu_2))(\nu_2^2 + (\nu - 2)\alpha_n^2) - z(\sinh(b\nu_2)))A_3 + (\nu_2(\sinh(b\nu_2)) \\ \quad (\nu_2^2 + (\nu - 2)\alpha_n^2) - z(\cosh(b\nu_2)))A_4 = 0. \end{array} \right. \quad (3.57)$$

Haciendo el determinante del sistema de ecuaciones anterior obtenemos el resultado que se muestra en la ecuación (D.2) del Apéndice D. En el caso en el que sustituycamos en la ecuación anterior los valores con los que construimos la Tabla 3.5 solo se obtiene una raíz en  $k = n\pi/a$ . Por los mismos motivos que en el apartado anterior no consideramos estas raíces al no ser compatibles con (3.51). Podemos realizar un par de animaciones fijando  $\frac{\rho h}{D} = 1$  para ilustrar el comportamiento de las soluciones. Se muestran en las Figuras 3.6 y 3.7.

Figura 3.6: Animación del modo  $n = 1$ ,  $k = 6,01$ .

Figura 3.7: Animación del modo  $n = 2$ ,  $k = 6,83$ .

### 3.3.2. Placa rectangular con bordes $x = 0, a$ apoyados, borde $y = 0$ sujeto y borde $y = b$ unido a un muelle elástico lineal

Supongamos de nuevo una placa como la de la Figura 3.5. Siguiendo la teoría expuesta en el Capítulo 2 tenemos que las condiciones de contorno para este caso son:

$$\left\{ \begin{array}{l} W|_{x=0, x=a} = 0, \quad \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=0, x=a} = 0, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \Big|_{y=b} = 0, \quad \left( \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial y \partial x^2} \right) \Big|_{y=b} = \frac{\kappa}{D} W|_{y=b}, \\ W|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0. \end{array} \right. \quad (3.58)$$

Como las condiciones en  $x = 0, a$  son las mismas que en el apartado anterior entonces volveremos a tener que

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a}.$$

Al igual que en el apartado 3.3.1, tendremos que aplicar las condiciones (3.58) tanto en (3.48) como en (3.51).

**Solución para  $k^2 > \alpha_n^2$** 

El sistema de ecuaciones que tenemos para este caso es

$$\left\{ \begin{array}{l} -(\sin(b\nu_1))(\nu_1^2 + \nu\alpha_n^2)A_1 - (\cos(b\nu_1))(\nu_1^2 + \nu\alpha_n^2)A_2 + (\sinh(b\nu_2))(\nu_2^2 - \nu\alpha_n^2)A_3 \\ \quad + (\cosh(b\nu_2))(\nu_2^2 - \nu\alpha_n^2)A_4 = 0, \\ (\nu_1^3(-\cos(b\nu_1)) + (\nu - 2)\nu_1\alpha_n^2(\cos(b\nu_1)) - z(\sin(b\nu_1)))A_1 + (\nu_1^3(\sin(b\nu_1)) - (\nu - 2)\nu_1\alpha_n^2(\sin(b\nu_1)) \\ \quad - z(\cos(b\nu_1)))A_2 + (\nu_2^3(\cosh(b\nu_2)) + (\nu - 2)\nu_2\alpha_n^2(\cosh(b\nu_2)) - z(\sinh(b\nu_2)))A_3 \\ \quad + (\nu_2^3(\sinh(b\nu_2)) + (\nu - 2)\nu_2\alpha_n^2(\sinh(b\nu_2)) - z(\cosh(b\nu_2)))A_4 = 0, \\ A_2 + A_4 = 0, \\ \nu_1 A_1 + \nu_2 A_2 = 0. \end{array} \right. \quad (3.59)$$

El determinante del sistema anterior será entonces el que se indica en (D.3). Al hallar las raíces de (D.3) vemos que al igual que en casos anteriores hay una raíz en  $k = \frac{n\pi}{a}$ , es decir, cuando  $\nu_1 = 0$ . De nuevo esta raíz no nos sirve ya que el sistema de ecuaciones presentado se reduce a un sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas que es incompatible.

Si hacemos de nuevo  $a = b = \kappa = D = 1$  y  $\nu = 0,3$  entonces tenemos que los valores permitidos para  $k$  son los que se indican en la Tabla 3.6.

	$k_1$	$k_2$	$k_3$
$n = 1$	3,58	5,75	8,51
$n = 2$	6,46	7,94	10,16
$n = 3$	9,52	10,58	12,36

Tabla 3.6: Valores permitidos de para el caso  $a = b = \kappa = 1$  y  $\nu = 0,3$ .

**Solución para  $k^2 < \alpha_n^2$** 

El sistema de ecuaciones para este caso es

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sinh(b\nu_3))(\nu_3^2 - \nu\alpha_n^2)A_1 + (\cosh(b\nu_3))(\nu_3^2 - \nu\alpha_n^2)A_2 + (\sinh(b\nu_2))(\nu_2^2 - \nu\alpha_n^2)A_3 \\ \quad + (\cosh(b\nu_2))(\nu_2^2 - \nu\alpha_n^2)A_4 = 0, \\ (\nu_3^3(\cosh(b\nu_3)) + (\nu - 2)\nu_3\alpha_n^2(\cosh(b\nu_3)) - z(\sinh(b\nu_3)))A_1 + (\nu_3^3(\sinh(b\nu_3)) \\ \quad + (\nu - 2)\nu_3\alpha_n^2(\sinh(b\nu_3)) - z(\cosh(b\nu_3)))A_2 + (\nu_2^3(\cosh(b\nu_2)) + (\nu - 2)\nu_2\alpha_n^2(\cosh(b\nu_2)) \\ \quad - z(\sinh(b\nu_2)))A_3 + (\nu_2^3(\sinh(b\nu_2)) + (\nu - 2)\nu_2\alpha_n^2(\sinh(b\nu_2)) - z(\cosh(b\nu_2)))A_4 = 0, \\ A_2 + A_4 = 0, \\ \nu_3 A_1 + \nu_2 A_3 = 0. \end{array} \right. \quad (3.60)$$

Las soluciones no triviales de este sistema se obtienen de la ecuación trascendente que se muestra en (D.4). Al igual que en casos anteriores,  $k = n\pi/a$  es solución de (D.4) pero no

proporciona ninguna solución. En este caso para los valores  $a = b = \kappa = D = 1$  y  $\nu = 0,3$ , la ecuación (D.4) no nos proporciona ninguna solución. En las animaciones que se presentan en la Figuras 3.8 y 3.9 podemos ver el comportamiento de las soluciones  $k = 5,75$  ( $n = 1$ ) y  $k = 6,46$  ( $n = 2$ ).

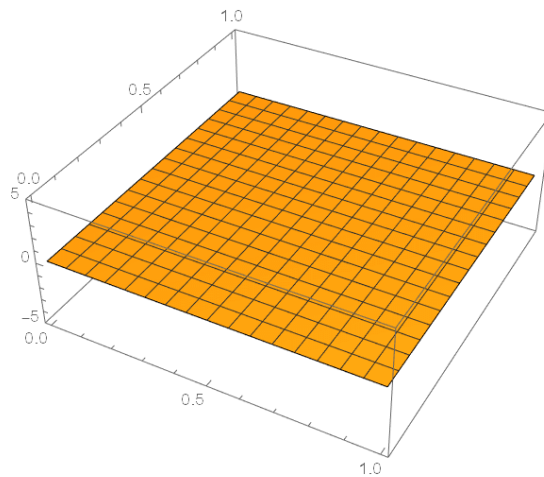


Figura 3.8: Animación del modo  $n = 1$ ,  $k = 5,75$ .

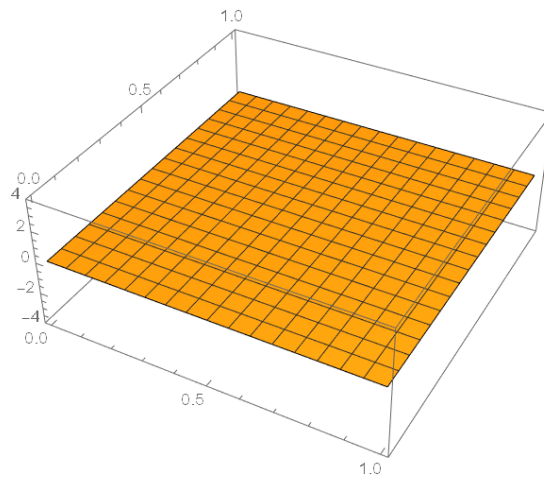


Figura 3.9: Animación del modo  $n = 2$ ,  $k = 6,46$ .



## Capítulo 4

# Soluciones aproximadas: el método de Rayleigh-Ritz

A lo largo del presente capítulo presentaremos el método de Rayleigh-Ritz. Con este procedimiento, podremos obtener soluciones aproximadas al problema, así como valores para las posibles frecuencias de vibración. Para la implementación de este método, escogeremos como solución una combinación lineal de funciones que cumplan las condiciones de contorno del problema cuyos coeficientes se encuentran, en un principio, indeterminados. A través de las aproximaciones basadas en la energía del sistema conseguiremos determinar tanto el valor numérico de estos coeficientes, como el valor de las posibles frecuencias de vibración. Aunque es usual el uso del método de Rayleigh-Ritz en problemas de mecánica clásica, su utilidad es aplicable a campos como la mecánica cuántica. Así pues, podemos citar como ejemplo la referencia bibliográfica [28] en la que se implementa este método para analizar el comportamiento de un oscilador cuántico anarmónico.

### 4.1. Explicación del método

Supongamos una solución  $w(r, t)$  del sistema que sea combinación lineal de funciones que satisfagan las condiciones de contorno del problema a tratar, es decir,

$$w(r, t) = \sum_j^n c_j \phi_j(r, t). \quad (4.1)$$

La relación (4.1) implica que la acción del sistema dependerá únicamente de los coeficientes  $c_j$ . Dicho de otra forma,<sup>1</sup>

$$S(c_1, c_2, c_3, c_4, \dots) = \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt. \quad (4.2)$$

---

<sup>1</sup>Recordemos que en mecánica lagrangiana la acción  $S$  viene dada por la integral temporal del lagrangiano  $L$ , que, a su vez, viene dado por la diferencia entre la energía cinética  $T$  y la energía potencial  $U$  del sistema físico que estamos tratando.

Ahora recordemos uno de los pilares básicos de la mecánica clásica, el *principio de Hamilton* (o *principio de acción estacionaria*).

**Principio de Hamilton:** *El movimiento de un sistema entre dos instantes  $t_1$  y  $t_2$  es aquel que hace a la cantidad  $S$  estacionaria [29, 30].*

Si aplicamos este principio a nuestro caso teniendo en cuenta la dependencia de  $S$  con las constantes  $c_j$  entonces,

$$\delta S(c_1, c_2, c_3, c_4, \dots) = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i^n \left( \frac{\partial L}{\partial c_i} \right) \delta c_i dt = 0. \quad (4.3)$$

Como  $t_1$  y  $t_2$  son arbitrarios, de la ecuación (4.3) se deduce que las ecuaciones que tiene que satisfacer nuestro sistema son

$$\frac{\partial L}{\partial c_i} = \frac{\partial(T - V)}{\partial c_i} = 0. \quad (4.4)$$

Las ecuaciones (4.4) serán las que nos impongan qué valores toman los coeficientes y, en el caso en el que tratemos un problema vibratorio, también nos proporcionarán los posibles valores de las frecuencias de vibración del sistema a tratar. Es notable la sencillez de este método, esto se debe mayormente a que, para analizar cada sistema físico, sólo necesitamos construir el lagrangiano  $L$  y proponer funciones  $\phi_i(r, t)$ . En el siguiente apartado, veremos un pequeño ejemplo de aplicación para así ilustrar el uso de este procedimiento [31, 32, 33, 4, 34].

## 4.2. Aplicación del método para placas de Kirchhoff

El primer paso que hemos de seguir es definir las energías potencial y cinética de nuestro sistema. Sabemos que un sólido elástico que cumple la ley de Hooke tiene como energía potencial la cantidad [8]

$$V = \frac{1}{2} \int_V c_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV. \quad (4.5)$$

Sustituyendo las relaciones (1.18) en (4.5) obtenemos:

$$V = \frac{E}{2(1-\nu)} \int \left( \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + 2(1-\nu)\epsilon_{xy}^2 + 2\nu\epsilon_{xx}\epsilon_{yy} \right) dV. \quad (4.6)$$

Ahora, introduciendo las relaciones (1.19) en (4.6) e integrando el resultado entre  $\frac{h}{2}$  y  $-\frac{h}{2}$  respecto de la variable  $z$ , logramos transformar la fórmula (4.5) en la expresión

$$V = \frac{D}{2} \int \int \left( (\nabla^2 w)^2 + 2(1-\nu) \left( \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right) dx dy. \quad (4.7)$$

En cuanto a la energía cinética, suponiendo que la parte temporal de la solución sea una función oscilante tipo seno o coseno la podremos escribir como (suponiendo también que la placa tiene densidad constante)[7, 4]

$$T = \frac{\rho h \omega^2}{2} \int \int w^2 dx dy. \quad (4.8)$$



Finalmente, suponiendo que la solución del sistema se puede escribir como vemos en la ecuación (4.1) y aplicando las ecuaciones (4.4) llegamos al siguiente resultado [7, 35]:

$$\sum_{j=1}^n (A_{ij} - lB_{ij}) C_j = 0 \quad \left( l = \frac{\rho h \omega^2}{D} \right). \quad (4.9)$$

donde

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int \int \left( \phi_i^{xx} \phi_j^{xx} + \phi_i^{yy} \phi_j^{yy} + \nu(\phi_i^{xx} \phi_j^{yy} + \phi_i^{yy} \phi_j^{xx}) + 2(1 - \nu) \phi_i^{xy} \phi_j^{xy} \right) dx dy, \\ B_{ij} &= \int \int \phi_i \phi_j dx dy. \end{aligned} \quad (4.10)$$

De las ecuaciones (4.9) y (4.11) vemos que, si las funciones  $\phi_i$  escogidas son ortonormales respecto al producto interior

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \int \int \phi_i \phi_j dx dy, \quad (4.11)$$

entonces la matriz  $\mathbf{B}$  se convertirá en la matriz identidad y el problema se reducirá a una búsqueda de autovalores y autovectores de  $\mathbf{A}$ .

Como veremos más tarde, el procedimiento más sencillo suele ser buscar funciones  $\phi_i$  que cumplan las condiciones de contorno del problema y, después, aplicar un método de ortonormalización como, por ejemplo, el proceso de Gram-Schmidt.

### 4.3. Aplicación del método a placas rectangulares sujetas

Consideremos una placa rectangular como la de la Figura 3.5. Una forma para escoger las funciones  $\phi_i$  suele ser escribirlas de la siguiente forma:

$$\phi_i = f \cdot p, \quad (4.12)$$

donde  $p$  son los posibles monomios que resultan de hacer el desarrollo de  $(x + y)^n$  y  $f$  viene dado por la fórmula

$$f = x^p y^q (a - x)^r (b - y)^s, \quad (4.13)$$

en la cual,  $p$ ,  $q$ ,  $r$  y  $s$  toman valores 0, 1 o 2 en función de si los bordes se encuentran libres, apoyados y sujetos respectivamente [36].

En este análisis, vamos a considerar una placa cuadrada de lados  $a = b = 1$ , con módulo de Poisson igual a 0,5 y, además, vamos a usar como funciones  $\phi_i$

$$\begin{cases} \phi_1(x, y) = x^2 y^2 (1 - x)^2 (1 - y)^2, \\ \phi_2(x, y) = x^2 y^2 (1 - x)^2 (1 - y)^2 x, \\ \phi_3(x, y) = x^2 y^2 (1 - x)^2 (1 - y)^2 y, \\ \phi_4(x, y) = x^2 y^2 (1 - x)^2 (1 - y)^2 xy, \\ \phi_5(x, y) = x^2 y^2 (1 - x)^2 (1 - y)^2 x^2, \\ \phi_6(x, y) = x^2 y^2 (1 - x)^2 (1 - y)^2 y^2. \end{cases} \quad (4.14)$$

Como podemos apreciar en (4.14), hemos escogido como funciones  $p$  a los monomios

$$x, y, xy, x^2 \text{ y } y^2.$$

A partir estas funciones y con ayuda del comando “*Orthogonalize*” de *Mathematica*, construimos las siguientes funciones ortonormales:

$$\begin{cases} \phi'_1(x, y) = 630(x-1)^2x^2(y-1)^2y^2, \\ \phi'_2(x, y) = 630\sqrt{11}(x-1)^2x^2(2x-1)(y-1)^2y^2, \\ \phi'_3(x, y) = 630\sqrt{11}(x-1)^2x^2(y-1)^2y^2(2y-1), \\ \phi'_4(x, y) = 6930(x-1)^2x^2(2x-1)(y-1)^2y^2(2y-1), \\ \phi'_5(x, y) = 126\sqrt{65}(x-1)^2x^2(22(x-1)x+5)(y-1)^2y^2, \\ \phi'_6(x, y) = 126\sqrt{65}(x-1)^2x^2(y-1)^2y^2(22(y-1)y+5). \end{cases} \quad (4.15)$$

Aplicando la definición de la matriz  $\mathbf{A}$  y despreciando elementos de matriz menores de  $10^{-3}$  tenemos que la forma que toma es :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1296 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5520 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5520 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11792 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 19036,8 & 187,2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 187,2 & 19036,8 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

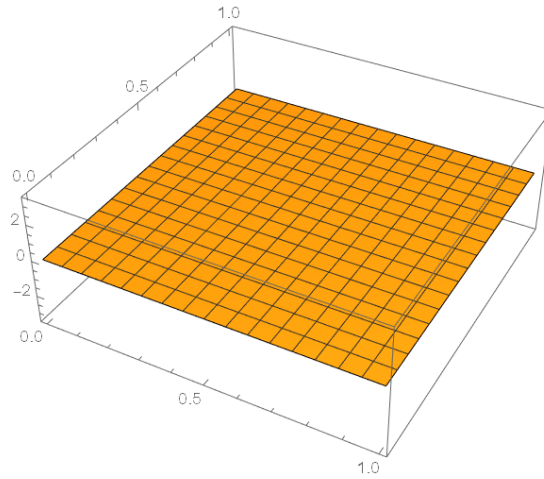
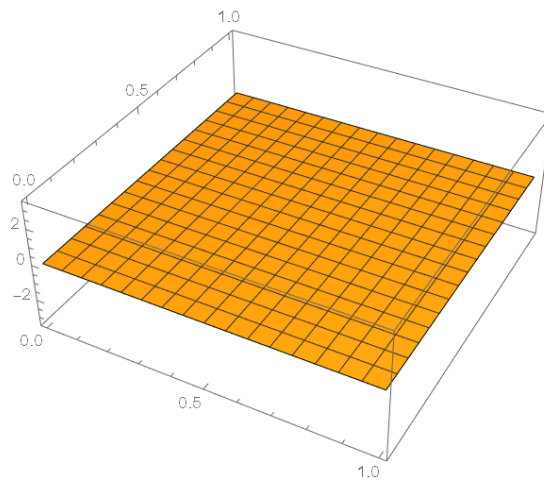
Por otro lado, los autovalores y autofunciones de la matriz anterior que caracterizan las soluciones del sistema están dados por la Tabla 4.1.

$l_1 = 19224$	$\phi'_5 + \phi'_6$
$l_2 = 18849$	$\phi'_5 - \phi'_6$
$l_3 = 11792$	$\phi'_4$
$l_4 = 5520$	$\phi'_2 + \phi'_3$
$l_5 = 5520$	$\phi'_2 - \phi'_3$
$l_6 = 1296$	$\phi'_1$

Tabla 4.1: Autovalores y autofunciones solución para el problema.

Las funciones de la Tabla 4.1 comprenden únicamente la parte espacial de la solución. Para obtener la solución completa solo hay que multiplicar estas funciones por una función oscilante como, por ejemplo,  $\sin(\omega t)$ . En las Figuras 4.1 y 4.2 podemos apreciar las animaciones correspondientes a dos de los modos de vibración hallados con este método.

Como comentario final, hemos de destacar que las soluciones obtenidas por este método no van a ser, de forma general, soluciones exactas de la ecuación biarmónica, esto es solo un método aproximado. Esta afirmación se puede comprobar introduciendo cualquiera de las autofunciones de la Tabla 4.1 en la ecuación (3.1).

Figura 4.1: Animación del modo  $\phi'_2 + \phi'_3$ .Figura 4.2: Animación del modo  $\phi'_2 - \phi'_3$ .



## Apéndice A

# Demostración de la simetría del tensor de esfuerzos mediante la conservación del momento angular

Denominamos momento angular en un sólido respecto a un origen dado al vector cuyas componentes son:<sup>1</sup>

$$L_i(t) = \int_V \epsilon_{ijk} x_j \rho \dot{d}_k dV. \quad (\text{A.1})$$

Según el *principio de conservación del momento angular*, la variación de momento angular por unidad de tiempo (respecto a cualquier origen) en un sólido es igual al momento total creado por las fuerzas superficiales y másicas que actúan sobre el cuerpo. Imponiendo este principio a un cuerpo como el de la Figura 1.6 tenemos que:

$$\int_S \epsilon_{ijk} x_j t_k dS + \int_V \epsilon_{ijk} x_j \rho b_k dV = \frac{d}{dt} \int_V \epsilon_{ijk} x_j \rho \dot{d}_k dV. \quad (\text{A.2})$$

Si en (A.2) hacemos la sustitución

$$t_k = \sigma_{hk} n_h,$$

y usamos la relación (1.16) (usando previamente el teorema de Gauss en el primer sumando de (A.2)) tendremos que

$$\int_V \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV = 0.$$

Finalmente, como  $V$  es arbitrario obtenemos [8]:

$$\epsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0 \Rightarrow \sigma_{jk} = \sigma_{kj}. \quad (\text{A.3})$$

---

<sup>1</sup>En esta ecuación  $\epsilon_{ijk}$  es el tensor de Levi-Civita.



## Apéndice B

# Ortogonalidad de las soluciones para las oscilaciones libres de placas

Consideremos dos funciones  $W_1$  y  $W_2$  tales que

$$D\nabla^4 W_1 - \omega_1^2 \rho h W_1 = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$D\nabla^4 W_2 - \omega_2^2 \rho h W_2 = 0. \quad (\text{B.2})$$

Es decir, estas dos funciones se corresponden con dos modos de vibración, los cuales son solución de la ecuación (3.6). Si ahora multiplicamos (B.1) por  $W_2$  y (B.2) por  $W_1$  e integramos la diferencia de las dos ecuaciones sobre el dominio de la placa tenemos que

$$\int_A \left[ DW_2 \nabla^4 W_1 - DW_1 \nabla^4 W_2 - (\omega_1^2 - \omega_2^2) \rho h W_1 W_2 \right] dA = 0. \quad (\text{B.3})$$

Ahora reescribimos  $\nabla^4 W$  como

$$\nabla^4 W = \nabla \cdot (\nabla (\nabla \cdot \nabla W)),$$

y aplicamos el teorema de la divergencia de Gauss, con lo que es posible demostrar que (B.3) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} D \oint_C \left[ W_1 \hat{n} \cdot \nabla (\nabla^2 W_2) - W_2 \hat{n} \cdot \nabla (\nabla^2 W_1) + \nabla^2 W_1 \hat{n} \cdot \nabla W_2 - \nabla^2 W_2 \hat{n} \cdot \nabla W_1 \right] ds \\ - (\omega_1^2 - \omega_2^2) \int_A \rho h W_1 W_2 dA = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

donde  $C$  es el contorno de la placa.

De la fórmula (B.4) podemos deducir que la condición para que dos soluciones de (3.6) sean ortogonales es que el primer sumando se anule, es decir:

$$\oint_C \left[ W_1 \hat{n} \cdot \nabla (\nabla^2 W_2) - W_2 \hat{n} \cdot \nabla (\nabla^2 W_1) + \nabla^2 W_1 \hat{n} \cdot \nabla W_2 - \nabla^2 W_2 \hat{n} \cdot \nabla W_1 \right] ds = 0. \quad (\text{B.5})$$

Se puede comprobar que esta condición se cumple para las condiciones de contorno 1, 2 y 3 [12].





## Apéndice C

# Propiedades de las funciones de Bessel

### C.1. Definición de las funciones de Bessel

Empecemos introduciendo brevemente cual es el origen de las funciones de Bessel. Las funciones de Bessel surgen de la resolución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy(x)}{dx} \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y(x) = 0. \quad (\text{C.1})$$

Al proponer una solución en serie de potencias de tipo

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+\alpha}, \quad (\text{C.2})$$

se puede probar que la solución final de (C.1) es

$$y(x) = AJ_{\nu}(x) + BJ_{-\nu}(x), \quad (\text{C.3})$$

donde la función  $J_{\nu}(x)$  (función de Bessel de primera especie) viene dada por

$$J_{\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{m! \Gamma(\nu + m + 1)}. \quad (\text{C.4})$$

Si  $\nu$  es entero entonces tenemos que

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+n}}{2^{2m+n} m! (n+m)!}. \quad (\text{C.5})$$

Cuando ocurre esto, como  $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ , entonces (C.3) queda como

$$y(x) = (A + B(-1)^n) J_n(x). \quad (\text{C.6})$$

Es decir, pasamos a tener sólo una constante indeterminada en vez de dos. Para evitar este problema, reescribimos (C.3) de la siguiente manera:

$$y(x) = CJ_\nu(x) + DN_\nu(x). \quad (\text{C.7})$$

donde  $N_\nu(x)$  es la función de Neumann que se define a través de la fórmula:

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}. \quad (\text{C.8})$$

Ahora, cuando  $\nu$  es entero, la ecuación (C.8) presenta una indeterminación del tipo 0/0, la cual se puede resolver con la regla de L'Hopital, con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} N_n(x) &= \frac{2}{\pi} J_n(x) \left( \ln \frac{x}{2} + C \right) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \frac{x^{-n+2m}}{2} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{n+2m}}{m!(m+n)!} \left( \sum_{k=1}^{n+m} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

### Funciones de Bessel modificadas

Si en vez de la ecuación diferencial (C.1), tenemos

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy(x)}{dx} - \left( 1 + \frac{\nu^2}{x^2} \right) y(x) = 0, \quad (\text{C.10})$$

entonces, como realmente esta nueva ecuación diferencial es equivalente a hacer el cambio  $x \rightarrow ix$  tendremos que las funciones  $J_\nu(ix)$  son solución de (C.10). Sabiendo esto y que una función proporcional a esta también es solución de (C.10), entonces podemos definir a  $I_\nu(x)$  (función de Bessel modificada) a través de la relación

$$I_\nu(x) = e^{-\frac{\nu\pi i}{2}} J_\nu(ix), \quad (\text{C.11})$$

cuya expansión en serie de potencias es

$$I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2m+\nu}}{m! \Gamma(\nu + m + 1)}. \quad (\text{C.12})$$

A partir de estas funciones, se define  $K_\nu(x)$  como

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \nu\pi}. \quad (\text{C.13})$$

De nuevo, cuando  $\nu$  es entero tenemos que aplicar la regla de L'Hopital para resolver la indeterminación en (C.13), lo cual nos proporciona el siguiente resultado [16, 18, 20]:

$$K_n(x) = \frac{(-1)^n}{2} \frac{\partial (I_{-n}(x) - I_n(x))}{\partial n}. \quad (\text{C.14})$$

## C.2. Propiedades de las funciones de Bessel

En este apartado expondremos algunas de las propiedades de las funciones definidas en C.1 que nos servirán a la hora de buscar soluciones para placas con simetría polar

### Comportamiento en el origen

Consideremos los primeros términos del desarrollo en serie de potencias de  $J_n(x)$ , es decir,

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!} - \frac{x^{n+2}}{2^{2+n}(n+1)!} + \dots \quad (\text{C.15})$$

Tendiendo en cuenta este desarrollo podemos inferir que

$$J_0(0) = 1, \quad (\text{C.16})$$

$$J_n(0) = 0, \quad n \neq 0. \quad (\text{C.17})$$

En cuanto a  $N_n(x)$ , vemos que, como su expansión (C.9) contiene un logaritmo, va a diverger siempre en el origen.

Si consideramos la definición de  $I_n(x)$  realizada en (C.11), y las igualdades (C.16) entonces tenemos que

$$I_0(0) = J_0(0) = 1, \quad (\text{C.18})$$

$$I_n(0) = e^{-in\pi/2} J_n(0) = 0, \quad n \neq 0. \quad (\text{C.19})$$

Por último, si desarrollásemos la expresión (C.14) veríamos  $K_n(x)$  diverge siempre en cero.

### Fórmulas de recurrencia para sus derivadas

Consideremos por un momento el desarrollo en serie de potencias que nos proporciona la ecuación (C.5), realizando su derivada respecto a  $x$  se obtiene que

$$\begin{aligned} J'_n(x) &= \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^m (n+2m)x^{2m+n-1}}{2^{2m+n} m!(n+m)!} = \frac{n}{x} J_n(x) + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+n-1}}{2^{2m+n-1} (m-1)!(n+m)!} = \\ &= \frac{n}{x} J_n(x) - \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+n+1}}{2^{2m+n+1} (m)!(n+m+1)!} \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

lo cual, implica la fórmula de recurrencia

$$J'_n(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x). \quad (\text{C.21})$$

De forma análoga, también es posible probar las siguientes fórmulas [27, 16]:

$$\begin{aligned} N'_n(x) &= \frac{n}{x} N_n(x) - N_{n+1}(x), \\ I'_n(x) &= \frac{n}{x} I_n(x) + I_{n+1}(x), \\ K'_n(x) &= \frac{n}{x} K_n(x) - K_{n+1}(x). \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Finalmente, en el caso en el la función tenga  $kx$  como argumento se puede demostrar, haciendo uso de la regla de la cadena, que las ecuaciones (C.22) y (C.21) quedan como

$$\begin{aligned} J'_n(kx) &= \frac{n}{x} J_n(kx) - k J_{n+1}(kx) \\ N'_n(kx) &= \frac{n}{x} N_n(kx) - k N_{n+1}(kx) \\ I'_n(kx) &= \frac{n}{x} I_n(x) + k I_{n+1}(x) \\ K'_n(kx) &= \frac{n}{x} K_n(kx) - k K_{n+1}(x) \end{aligned} \tag{C.23}$$

## Apéndice D

# Lista de las ecuaciones trascendentes usadas en la Sección 3.3

En este Apéndice expondremos las ecuaciones trascendentes usadas en la Sección 3.3. Estas expresiones nos proporcionan los valores permitidos para las frecuencias de vibración en los análisis realizados en las Secciones 3.3.1 y 3.3.2. Recordemos que estas fórmulas provienen de aplicar en las ecuaciones (3.51) y (3.49) las condiciones de contorno correspondientes en cada análisis, lo cual nos llevaba a sistemas de ecuaciones lineales en los cuales imponemos que su determinante debe de ser igual a cero para, así, obtener soluciones para el problema distintas de la trivial.

### Ecuación proveniente del determinante del sistema (3.56)

$$\begin{aligned} & \left( \nu_2^4 (z^2 + \nu_1^6) + 2z^2 \nu_1^2 \nu_2^2 + z^2 \nu_1^4 - \nu_1^4 \nu_2^6 \right) (\sin(b\nu_1)) (\sinh(b\nu_2)) + 2\nu_1^5 \nu_2^5 (\cos(b\nu_1)) \\ & \cosh(b\nu_2) + (\nu - 2)^2 \nu^2 \alpha_n^8 \left( 2\nu_1 \nu_2 (\cos(b\nu_1)) + (\nu_1^2 - \nu_2^2) (\sin(b\nu_1)) (\sinh(b\nu_2)) \right. \\ & \cosh(b\nu_2) - 2\nu_1 \nu_2) + \alpha_n^4 \left( \nu^2 \nu_1^6 (\sin(b\nu_1)) (\sinh(b\nu_2)) - \nu^2 \nu_2^6 \sinh(b\nu_2) (\sin(b\nu_1)) + \right. \\ & (\nu - 2)(3\nu + 2) \nu_2^2 \nu_1^4 (\sin(b\nu_1)) (\sinh(b\nu_2)) + (\nu(4 - 3\nu) + 4) \nu_2^4 \nu_1^2 (\sin(b\nu_1)) (\sinh(b\nu_2)) \\ & - 2(\nu - 2) \nu \nu_2 \nu_1^5 \left( (\cos(b\nu_1)) (\cosh(b\nu_2)) - 1 \right) - 8\nu_2^3 \nu_1^3 \left( (\cos(b\nu_1)) (\cosh(b\nu_2)) - 1 \right) - 2 \\ & \left. (\nu - 2) \nu \nu_2^5 \nu_1 \left( (\cos(b\nu_1)) (\cosh(b\nu_2)) - 1 \right) \right) - 2\nu - 2\nu \alpha_n^6 \left( \left( \nu \nu_1^4 + 2(\nu - 2) \nu_2^2 \nu_1^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. \nu \nu_2^4 \right) \sin(b\nu_1) \sinh(b\nu_2) + 2\nu_2 \left( \nu_1^3 - \nu_1 \nu_2^2 \right) (\cos(b\nu_1)) (\cosh(b\nu_2)) - 2\nu_2 \nu_1^3 + 2\nu_2^3 \nu_1 \right) \\ & + 2\nu_1^2 \nu_2^2 \alpha_n^2 \left( 2\nu_1 \nu_2 - \left( \nu \nu_1^4 + 2(\nu - 2) \nu_2^2 \nu_1^2 + \nu \nu_2^4 \right) (\sin(b\nu_1)) (\sinh(b\nu_2)) \right. \\ & \left. \left( \nu_2^2 - \nu_1^2 \right) (\cos(b\nu_1)) (\cosh(b\nu_2)) + 2\nu_1 \nu_2 \left( \nu_1^2 - \nu_2^2 \right) \right) - 2\nu_1^5 \nu_2^5 = 0. \end{aligned} \tag{D.1}$$

**Ecuación proveniente del determinante del sistema (3.57)**

$$\begin{aligned}
& - \left( 2\nu_3^5 \nu_2^5 (\cosh(b\nu_3)) (\cosh(b\nu_2)) \right) + (\nu - 2)^2 \nu^2 \alpha_n^8 \left( (\nu_3^2 + \nu_2^2) (\sinh(b\nu_3)) (\sinh(b\nu_2)) \right. \\
& - 2\nu_3 \nu_2 (\cosh(b\nu_3)) (\cosh(b\nu_2)) \left. \right) + \alpha_n^4 \left( \nu^2 \nu_3^6 \sinh(b\nu_2) (\sinh(b\nu_3)) + \right. \\
& \nu^2 \nu_2^6 (\sinh(b\nu_3)) (\sinh(b\nu_2)) + (\nu(4 - 3\nu) + 4) \nu_2^2 \nu_3^4 \sinh(b\nu_2) (\sinh(b\nu_3)) + \\
& (\nu(4 - 3\nu) + 4) \nu_2^4 \nu_3^2 (\sinh(b\nu_3)) (\sinh(b\nu_2)) + 2(\nu - 2) \nu \nu_2 \nu_3^5 (\cosh(b\nu_3) \\
& \cosh(b\nu_2) - 1) - 8\nu_2^3 \nu_3^3 \left( (\cosh(b\nu_3)) (\cosh(b\nu_2)) - 1 \right) + 2(\nu - 2) \nu \nu_2^5 \nu_3 \\
& (\cosh(b\nu_3)) (\cosh(b\nu_2)) - 1 \left. \right) + 2(\nu - 2) \nu \alpha_n^6 \left( \nu \nu_3^4 - 2(\nu - 2) \nu_2^2 \nu_3^2 + \nu \nu_2^4 \right. \\
& \sinh(b\nu_3) (\sinh(b\nu_2)) - 2\nu_3 \nu_2 \left( \nu_3^2 + \nu_2^2 \right) (\cosh(b\nu_3)) (\cosh(b\nu_2)) + 2\nu_3 \nu_2 \left( \nu_3^2 + \nu_2^2 \right) \left. \right) + 2\nu_3 \nu_2 \\
& + 2\nu_3^2 \nu_2^2 \alpha_n^2 \left( 2\nu_3 \nu_2 - \left( \nu \nu_3^4 - 2(\nu - 2) \nu_2^2 \nu_3^2 + \nu \nu_2^4 \right) (\sinh(b\nu_3)) (\sinh(b\nu_2)) \right. \\
& \left. \left( \nu_3^2 + \nu_2^2 \right) (\cosh(b\nu_3)) (\cosh(b\nu_2)) - 2\nu_3 \nu_2 \left( \nu_3^2 + \nu_2^2 \right) \right) + \left( \nu_2^4 \nu_3^6 + \nu_3^4 \left( \nu_2^6 - z^2 \right) \right. \\
& \left. + 2\nu_2^2 \nu_3^2 z^2 - \nu_2^4 z^2 \right) \sinh(b\nu_3) \sinh(b\nu_2) + 2\nu_3^5 \nu_2^5 = 0.
\end{aligned} \tag{D.2}$$

**Ecuación proveniente del determinante del sistema (3.59)**

$$\begin{aligned}
& (\nu - 2) \nu \alpha_n^4 \left( (\nu_1^2 - \nu_2^2) (\sin(b\nu_1)) (\sinh(b\nu_2)) + 2\nu_1 \nu_2 (\cos(b\nu_1)) (\cosh(b\nu_2)) - 2\nu_1 \nu_2 \right) + \\
& \alpha_n^2 \left( 2\nu_1 \nu_2 (\nu_2^2 - \nu_1^2) (\cos(b\nu_1)) - \left( \nu \nu_1^4 + 2(\nu - 2) \nu_2^2 \nu_1^2 + \nu \nu_2^4 \right) (\sin(b\nu_1)) (\sinh(b\nu_2)) \right. \\
& \left. \cosh(b\nu_2) + 2\nu_2 (\nu_1^3 - \nu_1 \nu_2^2) \right) - \nu_1 (\cos(b\nu_1)) \left( (\nu_1^2 + \nu_2^2) z (\sinh(b\nu_2)) - 2\nu_1^2 \nu_2^3 (\cosh(b\nu_2)) \right) \\
& (+\nu_2) (\sin(b\nu_1)) \left( \nu_2 (\nu_1^2 - \nu_2^2) \nu_1^2 (\sinh(b\nu_2)) + (\nu_1^2 + \nu_2^2) z (\cosh(b\nu_2)) \right) + \nu_1 \nu_2 (\nu_1^4 + \nu_2^4) = 0.
\end{aligned} \tag{D.3}$$

**Ecuación proveniente del determinante del sistema (3.60)**

$$\begin{aligned}
& - \nu - 2\nu \alpha_n^4 \left( (\nu_3^2 + \nu_2^2) (\sinh(b\nu_3)) (\sinh(b\nu_2)) - 2\nu_3 \nu_2 (\cosh(b\nu_3)) (\cosh(b\nu_2)) \right. \\
& \left. + 2\nu_3 \nu_2 \right) + \alpha_n^2 \left( 2\nu_3 \nu_2 - \left( \nu \nu_3^4 - 2(\nu - 2) \nu_2^2 \nu_3^2 + \nu \nu_2^4 \right) (\sinh(b\nu_3)) (\sinh(b\nu_2)) \right. \\
& \left. \left( \nu_3^2 + \nu_2^2 \right) (\cosh(b\nu_3)) (\cosh(b\nu_2)) - 2\nu_3 \nu_2 \left( \nu_3^2 + \nu_2^2 \right) \right) + \nu_2 \cosh(b\nu_2) \left( \nu_2^2 - \nu_3^2 \right. \\
& \left. z \sinh(b\nu_3) - 2\nu_3^3 \nu_2^2 (\cosh(b\nu_3)) \right) + \nu_3 \sinh(b\nu_2) \left( \nu_3 \left( \nu_3^2 + \nu_2^2 \right) \nu_2^2 \sinh(b\nu_3) + \right. \\
& \left. \left( \nu_3^2 - \nu_2^2 \right) z (\cosh(b\nu_3)) \right) + \nu_3 \nu_2 \left( \nu_3^4 + \nu_2^4 \right) = 0.
\end{aligned} \tag{D.4}$$

# Conclusiones

A lo largo del presente trabajo hemos analizado en detalle las soluciones de la ecuación biarmónica tanto exactas como aproximadas. Hemos de señalar que, en el caso de las soluciones exactas a priori no hay nada que nos asegure que todas las soluciones encontradas cubran el conjunto de todas las soluciones existentes, aunque los procedimientos usados son muy frecuentes de encontrar en otros problemas físicos, como por ejemplo a la hora de resolver una ecuación de ondas o la ecuación de difusión del calor.

En cuanto al método de Ritz-Rayleigh, se ha expuesto un ejemplo de aplicación, pero este procedimiento es aplicable a multitud de sistemas físicos debido a su baja complejidad y los buenos resultados que puede llegar a ofrecer.

Cabe a destacar que todos los resultados expuestos son fundamentales a la hora de explicar las aparición de las figuras de Chladni que mencionábamos en la introducción . La explicación de este fenómeno se debe fundamentalmente a la deposición de los granos de arena en los puntos que no vibraban de la placa, es decir, en las líneas nodales de los modos normales que se encuentren en vibración. En el caso en el que tengamos simetría polar, vimos que algunas de estas líneas eran rectas que pasaban diametralmente por el centro de la placa. En cuanto a las placas rectangulares o cuadradas el análisis de la posición de estas líneas se vuelve más complejo, pero en situaciones en las que, por ejemplo, las condiciones de contorno en cada borde sean las mismas las rectas nodales pueden pasar diagonalmente de un vértice a otro de la placa.

Para finalizar, podemos resaltar la utilidad de las funciones de Bessel , cuyas propiedades nos han sido de gran ayuda a la hora de analizar las oscilaciones de las placas con simetría polar. Este tipo de funciones siempre suelen aparecer en problemas físicos con simetría polar, por ejemplo al modelar las vibraciones de un parche con una ecuación de ondas.





# Bibliografía

- [1] P. H. Tuan, J. C. Tung, H. C. Liang, P. Y. Chiang, K. F. Huang and Y. F. Chen, *Resolving the Formation of Modern Chladni Figures*, EPL **111**, 64004 (2015).
- [2] A. Dalmédico, *Sophie Germain*, Sci. Amer. **265**, 116-123 (1991).
- [3] G. Kirchhoff, *Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe*, J. für die Reine und Angew. Math. **1850**, 51-88 (1850).
- [4] V. Jovanovic, S. Koshkin, *The Ritz Method for Boundary Problems with Essential Conditions as Constraints*, Adv. Math. Phys. **2016**, 7058017 (2016).
- [5] M. Filonenko-Borodich, *Theory of Elasticity*, Noordhoff (1962).
- [6] H. Leipholz, *Theory of Elasticity*, Noordhoff International Publishing (1974).
- [7] S. Chakraverty, *Vibration of Plates*, CRC Press (2009).
- [8] G. Mase, *Mecánica del medio continuo*, Mc. Graw-Hill-Schaum (1977).
- [9] S. S. Rao, *Vibration of Continuous Systems*, John Wiley and Sons (2007).
- [10] C. Y. Wang, C. M. Wang, *Structural Vibration: Exact Solutions for Strings, Membranes, Beams, and Plates*, CRC Press (2014).
- [11] J. Guyader, *Vibration in Continuous Media*, ISTE (2006).
- [12] P. Hagedorn, A. DasGupta, *Vibrations and Waves in Continuous Mechanical Systems*, John Wiley and Sons (2007).
- [13] K. Bhaskar, T. K. Varadan, *Plates: Theories and applications*, John Wiley and Sons (2014).
- [14] Y. A. Amenzade, *Theory of Elasticity*, MIR (1979).
- [15] A. W. Leissa, *Vibration of Plates*, NASA (1969).
- [16] B. G. Korenev, *Bessel Functions and their Applications*, Taylor and Francis (2002).
- [17] P. J. T. Filippi, *Vibrations and Acoustic Radiation of Thin Structures*, John Wiley and Sons (2008).

- [18] M. Gadella, L. M. Nieto, *Métodos Matemáticos Avanzados para Ciencias e Ingenierías*, Secretariado de Publicaciones Universidad de Valladolid (2000).
- [19] F. Bowman, *Introduction to Bessel Functions*, Dover (1958).
- [20] R. E. Relton, *Applied Bessel Functions*, Dover (1965).
- [21] R. V. Southwell, *On the free transverse vibrations of a uniform circular disc clamped at its centre; and on the effects of rotation*, Proc. R. Soc. A **101**, 133–153. (1922).
- [22] C. L. Kantham, *Bending and Vibration of Elastically Restrained Circular Plates*, J. Franklin Inst. **265**, 483–491 (1958).
- [23] J. S. Wu, *Analytical and Numerical Methods for Vibration Analyses*, Wiley (2013).
- [24] J. N. Reddy, *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*, CRC Press (2007).
- [25] D. J. Gorman, *Free Vibration Analysis of Rectangular Plates*, Elsevier (1982).
- [26] Y. Xianga, Y. B. Zhaob, G. W. Weib, *Levy Solutions for Vibration of Multi-span Rectangular Plates*, Int. J. Mech. Sci. **44**, 1195–1218 (2002).
- [27] A. Gray, G. B. Mathews, *A Treatise of Bessel Functions and Their Applications to Physics*, Dover (1966).
- [28] P. Kosciak, A. Okopinska, *The optimized Rayleigh-Ritz scheme for determining the quantum-mechanical spectrum*, J. Phys. A: Math. Theor. **40**, 10851–10869 (2007).
- [29] J. Taylor, *Classical Mechanics*, University Science Books (2005).
- [30] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley (1980).
- [31] M. Gander, G. Wanner, *From Euler, Ritz, and Galerkin to Modern Computing*, SIAM Rev. **54**, 627–666 (2012).
- [32] S. Braun, *Encyclopedia of Vibration*, Academic Press (2001).
- [33] D. W. Schilitt, *Hamilton's principle and approximate solutions to problems in classical mechanics*, Am. J. Phys. **45**, 205–207 (1977).
- [34] W. Ritz, *Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik*, J. für die Reine und Angew. Math. **135**, 1–61 (1909).
- [35] C. Rajalingham, R. B. Bhat, G. D. Xistris, *Vibration of Rectangular Plates Using Plate Characteristic Functions as Shape Functions in the Rayleigh-Ritz Method*, J. Sound Vib. **193**, 497–509 (1996).
- [36] S. Chakraverty, K. Pradhan, *Vibration of Functionally Graded Beams and Plates*, Elsevier (2016).