

Universidad de Valladolid



Grado en Física

Trabajo de Fin de Grado

ESTUDIO NUMÉRICO DEL  
FENÓMENO DE LA  
TRANSMISIÓN  
ELECTROMAGNÉTICA  
EXTRAORDINARIA

AUTOR:

Sonsoles Berenguela Pérez Jiménez

TUTORES:

Ismael Barba García  
Ana Cristina López Cabeceira



# Resumen

En 1998 el grupo dirigido por T. W. Ebbesen descubre que a través de una lámina metálica, perforada con una distribución periódica de agujeros más pequeños que la longitud de onda de la luz incidente, se produce una transmisión superior a lo que correspondería según la teoría clásica. A este fenómeno lo denominan Transmisión Óptica Extraordinaria (EOT por sus siglas en inglés). Posteriormente, este efecto ha sido extendido a otros rangos de frecuencia como los terahercios, y se conoce actualmente como Transmisión Extraordinaria.

El presente trabajo pretende abordar el estudio de dicho fenómeno desde un marco teórico, así como reproducirlo experimentalmente en un simulador electromagnético y obtener sus características.

En el Capítulo 1 de este TFG se presentan la motivación y los objetivos de este trabajo. El Capítulo 2 se centra en las teorías existentes acerca de este fenómeno; desde la fallida teoría clásica de Bethe a las explicaciones más satisfactorias del mismo: los plasmones y una nueva perspectiva desde el punto de vista de teoría de circuitos. Antes de pasar a las simulaciones encontramos un breve capítulo con los fundamentos del programa CST usado en las simulaciones, así como los métodos de interpretación de los resultados. Dichos resultados se exponen en el Capítulo 4 y, finalmente, en el Capítulo 5 se destacan las principales conclusiones obtenidas.

# Abstract

In 1998 T. W. Ebbesen's group discovers that through a metallic film, perforated with a periodic distribution of holes smaller than wavelength of the incident light, a transmission greater than what is predicted by the classic theory occurs. To this phenomenon they gave the name of Extraordinary Optical Transmission (EOT). This effect has subsequently also been found in terahertz-wave frequencies, and is nowadays known simply as Extraordinary Transmission.

The present text aims to address the study of the said phenomenon both theoretically and experimentally, the latter by means of an electromagnetic simulator, in order to obtain its characteristics.

In Chapter 1 of this TFG the motivation behind this study is presented, along with the objectives of this work. Chapter 2 focuses on the existent theories behind this phenomenon; from Bethe's failed classic theory to the most satisfactory explanations known to date: plasmons and a circuit theory perspective. Before jumping to the result section, a brief chapter is found with the fundamental aspects of the program CST used in the simulations; also, the methods used to interpret the results are discussed. Those results are presented in Chapter 4. Finally, Chapter 5 contains the principal conclusions reached.

# Índice

<b>Índice</b>	<b>iii</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación .....	1
1.2. Metamateriales.....	4
1.3. Objetivos .....	5
<b>2. Fundamento teórico</b>	<b>7</b>
2.1. Introducción .....	7
2.2. Teoría de la Difracción .....	10
2.2.1. Teoría de Bethe .....	15
2.2.2. Guías de onda .....	16
2.3. Transmisión Extraordinaria .....	20
2.3.1. Plasmones .....	23
2.3.2. Teoría de circuitos .....	26
<b>3. Metodología</b>	<b>31</b>
3.1. CST .....	31
3.2. Interpretación de resultados .....	33
3.2.1. Parámetros de scattering.....	33
<b>4. Resultados</b>	<b>35</b>
4.1. Transmisión Óptica Extraordinaria.....	36
4.2. Transmisión Electromagnética Extraordinaria.....	37
<b>5. Conclusiones</b>	<b>43</b>
<hr/>	
<b>Bibliografía</b>	<b>45</b>
<b>A. Anexos</b>	<b>50</b>
A.1 Guía de ondas circular.....	50
A.2 Plasmones .....	57

# Lista de acrónimos

- EOT. Extraordinary Optical Transmission.
- EET. Extraordinary Electromagnetic Transmission.
- ET. Extraordinary Transmission.
- EBG. Electromagnetic Band-Gap.
- GO. Guía de ondas.
- Onda EM. Onda Electromagnética.
- Modo TE. Modo transversal eléctrico.
- Modo TM. Modo transversal magnético.
- TEM. Modo transversal electromagnético.
- UV. Ultravioleta.
- SP. Plasmón superficial (en inglés *surface plasmon*).
- CST - MWS. Computer Simulation Technology - Microwave Studio.
- FIT. Teoría de integración finita ( *Finite Integration Technique*, en inglés).
- ETM. *Extraordinary Transmission Metamaterial*.

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

El fenómeno del paso de la luz a través de una apertura es un problema típico de difracción. De hecho, fue de los primeros que se estudiaron, debido en parte a lo cotidiano que resulta: todos podemos observar diariamente el paso de la luz a través de las rendijas de nuestra persiana, examinar el paso de los rayos del sol a través de un papel enrollado formando un tubo, o mirar a través de las verjas que protegen una una tienda ya cerrada. Pese a la simpleza de estas ideas, el problema no deja de ser el mismo: el paso de la luz a través de un agujero o ranura. En estos casos que hemos mencionado es evidente que el tamaño de la apertura es mayor al de la longitud de onda de la luz, que va desde los 380nm para los violetas hasta los 750nm para los rojos. Estos problemas de difracción a través de agujeros pequeños, pero no más que la longitud de onda incidente, los estudian Fresnel y Fraunhofer, y vendrán más detallados al comienzo de la Sección 2.



Figura 1.1: Ejemplos cotidianos de difracción a través de apertura.

No obstante, una pregunta natural que surge es el qué pasaría cuando el tamaño de la apertura es menor a el de la propia longitud de onda de la luz que la atraviesa. Esta cuestión se la plantea y responde, en el año 1944, Hans Bethe en un artículo titulado *Theory of Diffraction by Small Holes*[1], en el cual llegaría a la conclusión de que la transmisión de la luz a través de un sistema de dichas características

decae muy rápidamente con la longitud de onda, dando lugar a una transmisión prácticamente nula para agujeros de tamaño sub-lambda.

Probablemente debido al poco interés que un sistema como el estudiado por Bethe suscita, el asunto fue abandonado por los científicos de la época, que no profundizaron mucho más en su investigación. La sorpresa llegaría medio siglo después, en 1998, cuando el equipo de Ebbesen[2] descubre que un sistema periódico de aperturas de tamaño sub-lambda daba lugar a una transmisión varios órdenes de magnitud mayores de lo esperado; es decir, una estructura formada por una red periódica de agujeros sub-lambda produce una “transmisión extraordinaria” de la luz.

Nace así lo que se denominaría la *Transmisión Óptica Extraordinaria* (EOT por sus siglas en inglés), donde la palabra óptica aparece debido al rango de frecuencia en el que se descubrió inicialmente el fenómeno, y que fue un resultado totalmente inesperado según la teoría de Bethe, que pasaría a ser conocida como la teoría clásica.

Como veremos en secciones posteriores, este fenómeno no es exclusivo del rango óptico, por lo que hablaremos generalmente de *Transmisión Electromagnética Extraordinaria* (EET por sus siglas en inglés), o simplemente de *Transmisión Extraordinaria* (ET).

La Figura 1.2 muestra una simulación computacional de transmisión extraordinaria para una placa de cobre de grosor 0,5mm, en la que se han perforado cada 4mm agujeros de 0,6mm de radio. Se puede observar el pronunciado pico de transmisión “extraordinaria” característico de este fenómeno cerca de los 75GHz. Más adelante se estudiará qué papel juegan estos parámetros en el espectro de transmisión, pero puede adelantarse que el periodo de los agujeros tiene relación directa con la posición del pico.

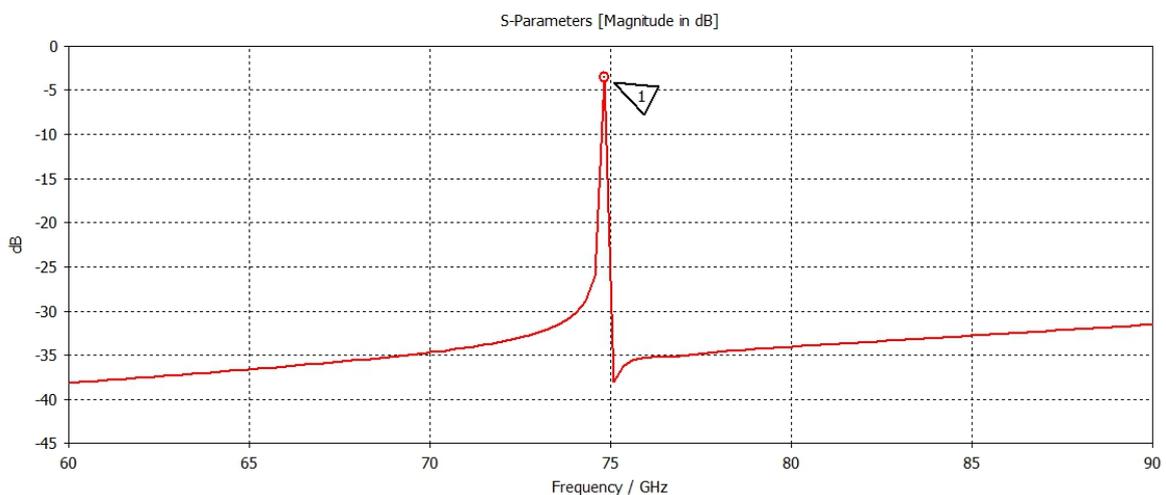


Figura 1.2: ET para un sistema de radio 0,6mm, grosor 0,5mm y periodicidad 4mm.

Cuando se publicó este artículo, las teorías existentes no eran capaces de explicar las todas las características de este fenómeno. Una de las teorías que más fuerza cogió fue la teoría de los plasmones superficiales[3], que en el rango de frecuencias ópticas daba explicaciones satisfactorias. No obstante, como se mencionaba en el párrafo anterior, este fenómeno se ha encontrado fuera del rango óptico. Equipos de investigación como los de Pendry, Medina o Beruete siguen investigando, y fueron de los primeros en reportar el fenómeno a frecuencias que corresponderían a agujeros del tamaño milimétrico[4, 5], mucho más útil en cuanto a aplicaciones prácticas, pues actualmente se disponen de buenos medios para fabricar con esta precisión. Además, el equipo de Medina ha sido precursor de una nueva teoría para explicar el fenómeno en estos otros rangos. La necesidad de nuevas teorías según la frecuencia a la que se trabaje se debe a que los plasmones, que se mencionaban al principio de este párrafo, no pueden aparecer en cualquier superficie, ya que necesitan ciertas condiciones para existir.

En cuanto a aplicaciones, alguno de los equipos mencionado anteriormente, como el de Beruete, trabaja en aplicar el fenómeno en lentes metálicas que permitan obtener índices de refracción negativos[6, 7]. También se está estudiando el efecto de apilamientos con agujeros sub-lambda, que da lugar a la obtención de un *Electromagnetic Band-Gap* (EBG), que son estructuras que pueden bloquear ondas electromagnéticas de bandas de una cierta frecuencia. Estos podrían usarse como filtros. Otra de las aplicaciones más prometedoras entra en el terreno de los metamateriales. En la Sección 1.2 que sigue se comenta de manera breve qué son y cuál puede ser el interés de los mismos.

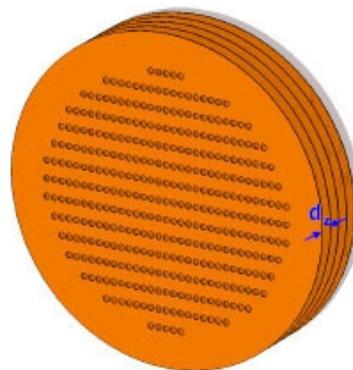


Figura 1.3: Apilamiento con agujeros sub-lambda.

Recapitulando, hemos comenzado diciendo que el paso de la luz a través de una apertura constituye un problema típico de difracción. Por ello, como punto de partida de este trabajo, la Sección 2 comenzará con un pequeño repaso a la Teoría de Difracción, de gran importancia en ramas de la Física como la Óptica. Todo ello se verá de manera superficial, para que sirva de precedente, pues como se verá en el apartado 2.2 de la Sección 2, nuestro fenómeno requiere de otras teorías algo más complejas para explicarse, algunas de ellas, no obstante, basadas en modelos de difracción.

## 1.2. Metamateriales

Una de las aplicaciones encontradas para la ET se encuentra su uso como metamaterial.

Un metamaterial es un material creado artificialmente, con una estructura interna que hace que su respuesta a las ondas electromagnéticas sea diferente a la esperada debido a sus propiedades. Por ello, construir metamateriales abre la posibilidad de elegir a la carta las propiedades de los mismos, con un control sobre éstas nunca visto.

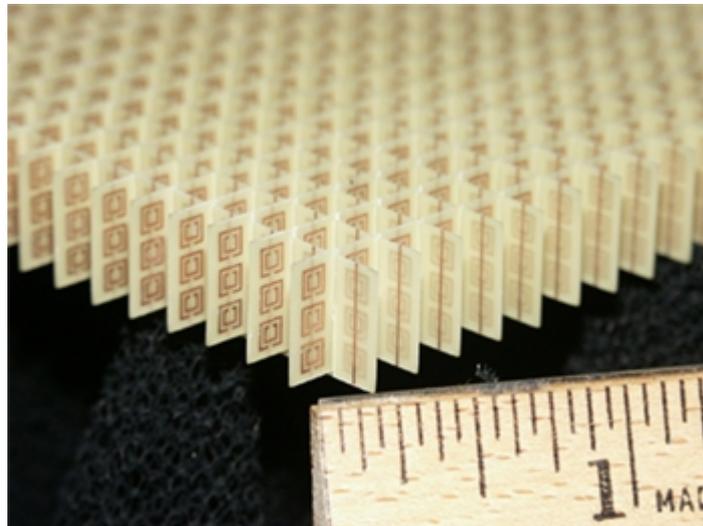


Figura 1.2.1: Metamaterial de índice negativo.

Así, uno de los principales campos de estudio abierto a raíz de este descubrimiento fue su aplicación para la consecución de materiales con índice de refracción negativo, que podrían dar lugar a la construcción de lentes planas, entre otras cosas. Además, ya se empieza a buscar la aplicación de este fenómeno para la construcción de “capas de la invisibilidad”[8]. La primera “capa de la invisibilidad” fue creada en 2008 por Pendry[9]. La idea de la misma consiste en hacer que los rayos de luz se curven de una manera tal que formen un contenedor alrededor de un objeto, lo que lo hace de manera efectiva invisible. Esta idea se demostró posible para frecuencias de microondas, y ha estimulado mucho trabajo en el campo de los metamateriales.

### 1.3. Objetivos

El objetivo principal de este trabajo es llevar a cabo un estudio del fenómeno de la Transmisión Electromagnética Extraordinaria, analizando los mecanismos físicos que la producen, y realizando la simulación de una estructura capaz de generarla para dos bandas de frecuencia distintas.

Este texto se puede dividir principalmente en tres partes: la primera pretende abordar un estudio de carácter teórico sobre las teorías existentes acerca del fenómeno presentado. Esto se hará de manera superficial, pues no es pretensión del texto exponer de la manera más rigurosa las mismas, sino familiarizarse con ellas y comprender el mecanismo que lo provoca. En la segunda parte se realizará un estudio de simulación para estructuras y frecuencias, con el fin de comprobar lo expuesto en la primera parte y caracterizar el fenómeno. Combinando ambas partes se extraerán conclusiones en la última sección del trabajo.

Así, el Capítulo 2 (Fundamento teórico) recoge en primer lugar un breve resumen de la teoría general de la difracción, que se usa como introducción al problema del paso de la luz a través de una apertura. Este problema puede estudiarse analizando los campos electromagnéticos, que constituye la teoría clásica de Bethe, o de manera alternativa mediante guías de onda. La segunda parte de este capítulo estudia el fenómeno de la Transmisión Extraordinaria, y se centra en algunas de las teorías que sirven para explicarlo según el rango de frecuencias en el que se trabaje.

Antes de saltar al proceso de diseño, encontramos un breve capítulo que contiene un resumen de las herramientas usadas para la simulación, así como una pequeña descripción para interpretar la información que se obtendrá. Esto es lo que conforma el Capítulo 3.

Esto da paso al siguiente capítulo, centrado en los resultados experimentales.

El Capítulo 4 recoge las distintas simulaciones realizadas. En todas ellas se usará la misma estructura, que consiste en una placa metálica infinita perforada con agujeros circulares distribuidos periódicamente. En ella se variarán los siguientes parámetros: frecuencia, diámetro del agujero, grosor de la placa y distancia entre agujeros. Después se compararán las gráficas obtenidas para ver cuál es el efecto de la variación de estos parámetros.

Finalmente, en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones obtenidas a lo largo de este estudio.



# Capítulo 2

## Fundamento teórico

### 2.1. Introducción

La Difracción se define como el fenómeno de desviación de ondas alrededor de las esquinas de un obstáculo o a través de una abertura, y ocurre cuando una onda se encuentra con un obstáculo o rendija.

La primera referencia al fenómeno de la difracción aparece en los trabajos de Leonardo Da Vinci (1452-1519)[10]. No obstante, fue en un libro publicado póstumamente en 1665[11] de Francesco Maria Grimaldi donde se describe por primera vez lo que él denominó difracción, estudiando el intrincado patrón de sombras constituido por regiones brillantes y oscuras que un cuerpo opaco entre medias de una pantalla y una fuente crea. Un ejemplo de este extraño patrón, que no era explicable con la teoría corpuscular de la época, se puede ver en la Figura 1.1:



Figura 2.1: Difracción de electrones por cristales de óxido de zinc. [12]

No fue hasta 1818 cuando Fresnel demostró que la difracción podía ser explicada combinando[13] el principio de interferencia con la construcción de Huygens, que data de 1678[14], según la cual cada punto de un frente de ondas se comporta como el centro de un foco secundario de ondas esféricas, y cuya

envolvente forma el frente de ondas en un instante posterior (Figura 1.2). Suponiendo que estas ondas secundarias interfieren mutuamente se obtiene lo que se conoce como Principio de Huygens-Fresnel.

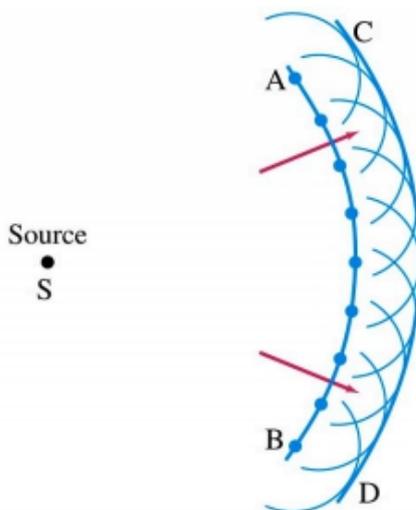


Figura 2.2: Esquemática del Principio de Huygens

El Principio de Huygens-Fresnel establece así que “*cada punto de un frente de ondas sin obstáculos, en un instante dado, sirve como fuente de ondículas<sup>1</sup> esféricas secundarias, con la misma frecuencia que la de la onda primaria. La amplitud del frente de ondas en cualquier punto más allá es la superposición de todas estas ondículas*” (considerando sus amplitudes y fases relativas).

En la Figura 2.3 observamos una serie de imágenes que contienen unas rendijas cuya apertura se corresponde con un tamaño  $AB$ . Si suponemos que cada punto de la onda incidente actúa como una fuente coherente de ondas secundarias, la diferencia máxima de camino óptico será  $\Lambda_{\max} = |AP - BP|$ , que corresponde a una fuente puntual en cada extremo de la apertura. Por trigonometría, notemos que la diferencia de camino óptico siempre es menor o igual que  $AB$ . Cuando  $\lambda > AB$ , como en la Figura 2.3(b), entonces  $\lambda > \Lambda_{\max}$ , y como las ondas estaban inicialmente en fase, interfieren constructivamente en  $P$ . Este caso se aprecia también en la primera imagen de la Figura 2.4. Así, si la longitud de onda es grande comparada con la apertura, las ondas se extenderán a ángulos grandes más allá de la obstrucción.

Por otro lado, cuando  $\lambda < AB$ , el área donde  $\lambda > \Lambda_{\max}$  está limitado a una pequeña región extendida directamente delante de la apertura, y es solo ahí donde las ondículas interferirán constructivamente (ver la segunda imagen de la Figura 2.4). Más allá de esta zona algunas ondículas pueden interferir destructivamente, y comienza la sombra. Recordemos que de hecho, la sombra geométrica ideal corresponde a  $\lambda \rightarrow 0$ .

---

<sup>1</sup>Ondícula (wavelet): oscilación ondulatoria con una amplitud que empieza en cero, aumenta, y vuelve a decrecer a cero. Típicamente visualizada como una oscilación breve.

---

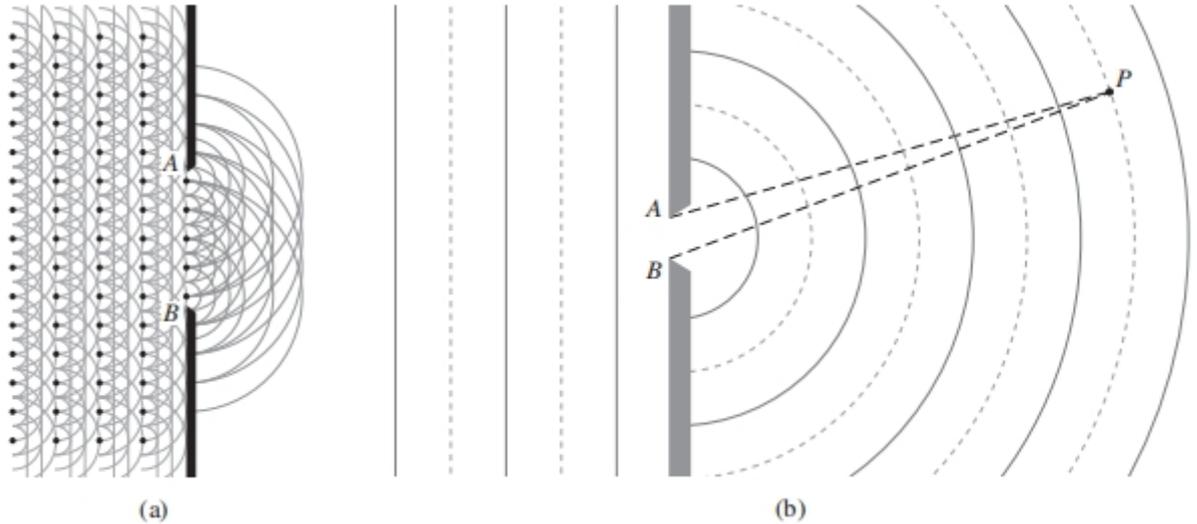


Figura 2.3: Difracción a través de una apertura. (a) Ondículas de Huygens. (b) Representación clásica de ondas. [15]

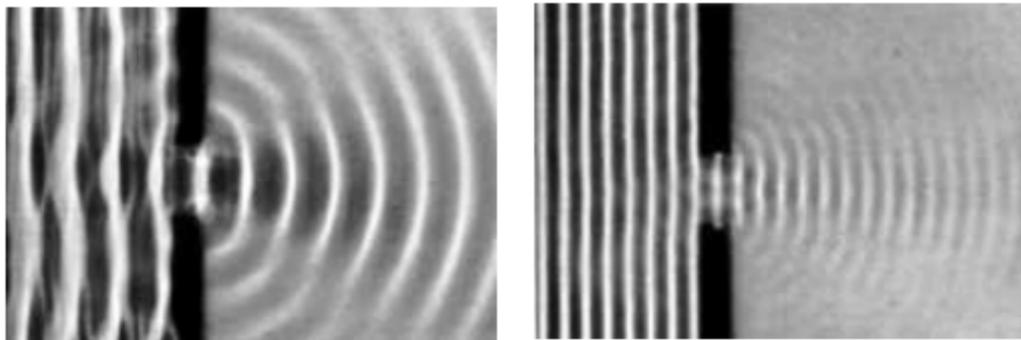


Figura 2.4: Difracción vista desde una cuba de ondas para una  $\lambda$  mayor o menor que el tamaño de la apertura, respectivamente. [16]

Desde entonces, este tema ha sido tratado por numerosos autores (cf. [17] para un desarrollo histórico). Las soluciones rigurosas al problema de la difracción son escasas. La primera de éstas fue dada a finales de 1896 por A. Sommerfeld en un artículo en el que trataba el tema de la difracción de una onda plana por una pantalla semiinfinita perfectamente conductora [18]. Posteriormente, se han encontrado soluciones rigurosas para un pequeño número de problemas de difracción (generalmente para situaciones bidimensionales), pero debido a su complejidad matemática se necesitan métodos aproximados para la mayoría de los casos de interés. La teoría de Kirchhoff [19], que es una teoría escalar basada directamente en la solución de la ecuación de onda diferencial, es otra de las formas clásicas de resolución. No obstante, esta teoría no es válida para el problema que estudió Bethe [1], esto es, la difracción de la radiación electromagnética a través de

---

un agujero pequeño comparado con la longitud de onda, pues involucra a los campos electromagnéticos, que son vectoriales, y la teoría de Kirchhoff no tiene en cuenta este carácter vectorial.

Este fenómeno, estudiado exhaustivamente desde su aparición, dio lugar a un resultado sorprendente. En 1998, el equipo de Ebbesen publicó un artículo[2] con el descubrimiento de que una placa metálica, perforada con una distribución periódica de agujeros circulares de tamaño menor al de la longitud de onda del fotón incidente, daba lugar a un espectro de emisión distinto de cero, en contradicción con la teoría clásica, en concreto la de Hans Bethe, que en 1944 había publicado un artículo[1] en el que deducía que la intensidad de luz de longitud de onda  $\lambda$  transmitida que atraviesa un agujero circular de radio  $r$ , con  $r < \lambda$ , era proporcional a  $(r/\lambda)^4$ . Según esta teoría, conocida como la teoría clásica, la transmisión para un agujero tal que  $r < \lambda$  debería ser prácticamente nula, pero los resultados mostraban que la lámina metálica prácticamente se volvía transparente a la luz que incidía sobre ellos, llegando incluso a transmitir más luz de la que correspondería por su área.

Desde entonces, el experimento se ha ampliado a otros rangos de frecuencia, como los gigahercios[4, 5, 20], así como a otro tipo de placas, como las dieléctricas[21, 22].

## 2.2. Teoría de la Difracción

El cálculo de la radiación emergente de un sistema de difracción es el objetivo de todas las teorías de difracción. La difracción por una abertura circular suele ser más frecuente, fuera del ámbito académico, que la difracción por una rendija, ya que la mayor parte de las lentes, así como la pupila del ojo, tienen sección circular. En este capítulo se pretende exponer de manera general un caso particular de dicha teoría y explicar su relevancia para el presente trabajo.

Los primeros trabajos referidos a la difracción fueron publicados por Grimaldi en 1665. El Principio de Huygens-Fresnel se publicó unos 150 años después, dando explicación a algunos casos sencillos. Al poco tiempo, Kirchhoff establecería las bases matemáticas de dicho principio, demostrando que éste se podía considerar como una forma aproximada de un cierto teorema integral. Aun así, la teoría de Kirchhoff es en sí una aproximación válida para longitudes de onda pequeñas comparadas con las dimensiones de la apertura de difracción. Los problemas de difracción son complejos y existen pocas soluciones exactas que además puedan ser usadas para problemas de interés. La primera solución rigurosa fue la de Sommerfeld en 1896, para una placa perfectamente conductora e infinitamente fina, aunque opaca. La solución a este problema, pese a ser uno de condiciones algo irreales, proporcionó mucha información útil de los procesos fundamentales involucrados.

Puede ser interesante, antes de comenzar con el problema que nos ocupa, es decir, el de aperturas de tamaño menor al de la longitud de onda, saber qué

---

---

ocurre en el caso contrario, es decir, el de aperturas de tamaño mayor, que es normalmente más común. Vamos a separar los dos casos posibles a considerar: Difracción de Fraunhofer[23] (o de campo lejano) o de Fresnel[24] (o de campo cercano).

En la Figura 2.5 puede verse una sucesión de patrones de difracción para una rendija, colocado por distancias crecientes de abajo hacia arriba; la correspondiente a Fresnel es la de última de todas, y la primera de ellas representa Fraunhofer. La banda gris corresponde a la anchura de la rendija.

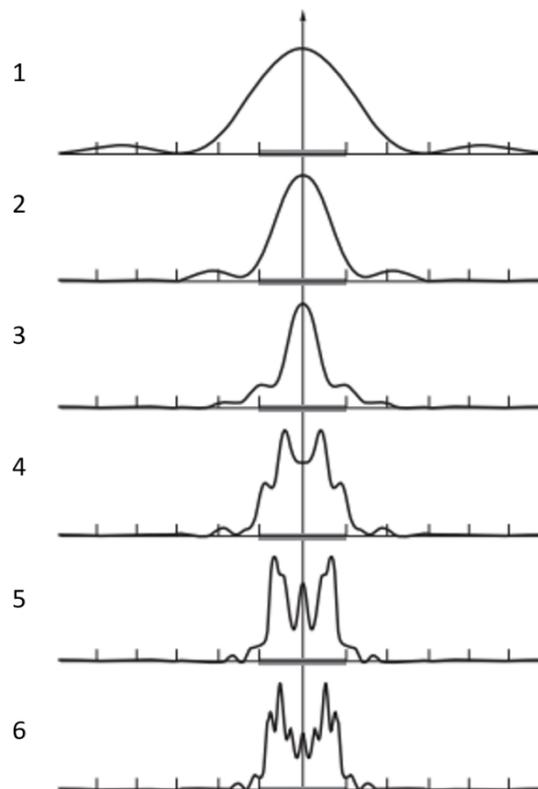


Figura 2.5: Patrones de difracción para distancias cada vez mayores. Fresnel se corresponde con la gráfica inferior(6); Fraunhofer, con la superior(1). [25]

## Difracción de Fraunhofer por una abertura circular

Un montaje típico para estudiar este caso consta de una placa en la cual hay perforado un agujero circular. Sobre este sistema inciden ondas planas. Vamos a omitir el desarrollo matemático debido a su complejidad, que involucra a funciones de Bessel, pues sólo queremos los aspectos más superficiales. Este problema fue resuelto por primera vez por George Biddell Airy[26] en 1834. La figura de difracción que se genera (llamada disco de Airy), que puede verse en la imagen de la izquierda de la Figura 2.1.3, está formada por un disco central brillante, rodeado por anillos concéntricos que son alternadamente brillantes y oscuros. El anillo oscuro que rodea al disco central se corresponde con el primer cero de la función de Bessel de orden uno.

---

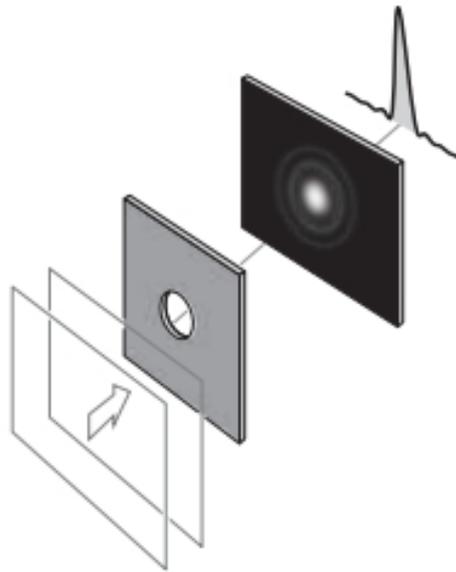


Figura 2.6: Difracción de Fraunhofer por una apertura circular; patrón de Airy.

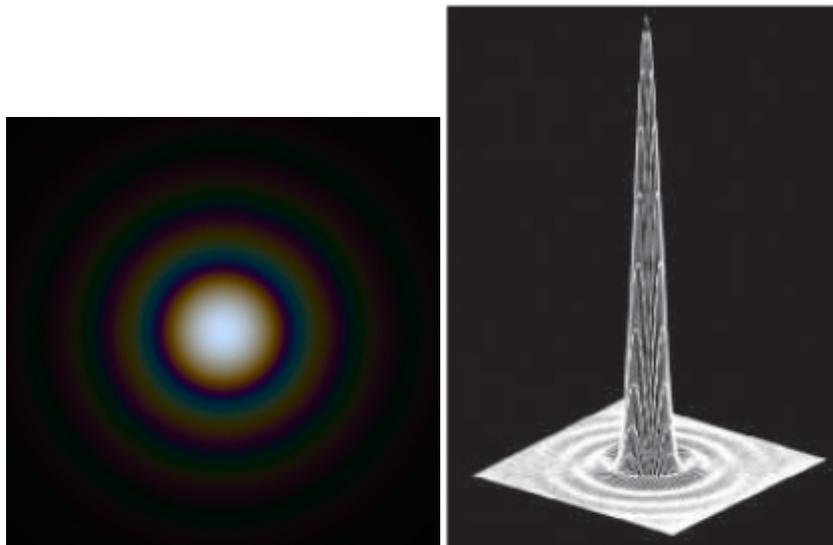


Figura 2.7: A la izquierda: disco de Airy generado por simulación. A la derecha: irradiancia resultante de una difracción de Fraunhofer por una apertura circular. [27]

La intensidad es máxima en el centro del disco, y disminuye hasta cero en el primer mínimo, cuyo semiángulo  $\alpha$  está dado por

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{1,22\lambda}{D} \quad (2.1)$$

Siendo D el diámetro de la abertura.

---

---

En la Figura 2.1.4 se aprecia la relación que indica la fórmula anterior, esto es, la variación inversamente proporcional del semiángulo del disco central con diámetro. Así, cuanto menor sea la abertura mayor será la figura de difracción.

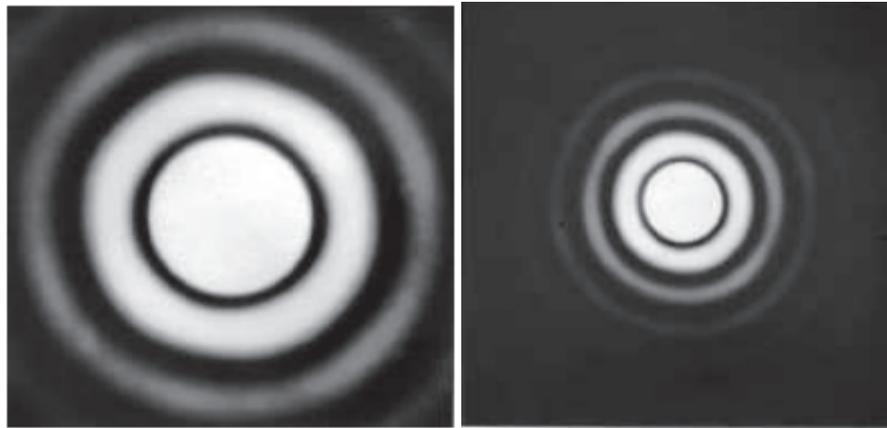


Figura 2.8: Variación del patrón para distintos diámetros de la abertura.

Se encuentra que aproximadamente el 84% de la energía transmitida por la abertura se encuentra dentro en el disco central, y el 91% dentro de los límites del segundo anillo oscuro[24].

### **Difracción de Fresnel por una abertura circular**

Este es el caso en el cual la distancia a la pantalla es tan pequeña, o la abertura tan grande, que los rayos no pueden suponerse paralelos (a diferencia de la difracción de Fraunhofer, en la que sí se puede). De nuevo, un estudio matemático riguroso está fuera de los objetivos de este trabajo, pero mediante una aproximación propuesta por Fresnel es posible explicar las características principales de la figura de difracción. Esta aproximación[29] consiste en dividir la superficie de onda en zonas pequeñas, pero finitas, y utilizar éstas en lugar de las zonas infinitesimales de la teoría exacta. Es importante notar que Fresnel introduce un factor  $K(\theta)$  muy relevante, conocido como oblicuidad o factor de inclinación, con el objetivo de describir la direccionalidad de las emisiones secundarias. Esto explica también por qué las ondas se transmiten hacia delante y no hacia atrás, puesto que no tienen por qué tener la misma intensidad en ambas direcciones, algo que el Principio de Huygens no explicaba. Siguiendo el razonamiento de Fresnel se llega a que aumentando el tamaño de la abertura disminuye la luz que llega, y es posible tener un centro oscuro en la figura de difracción de Fresnel, en contraste con la figura de difracción de Fraunhofer, en la que el centro siempre es brillante.

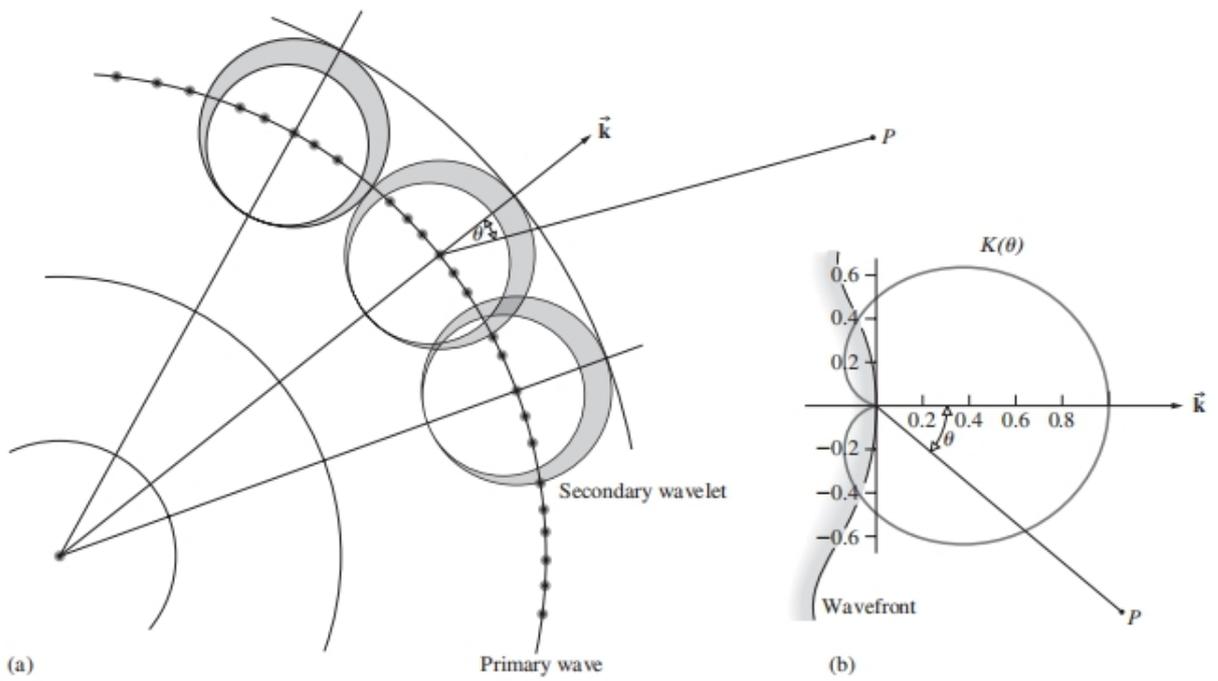


Figura 2.9:(a)Ondas secundarias. (b)Factor de oblicuidad  $K(\theta)$ .

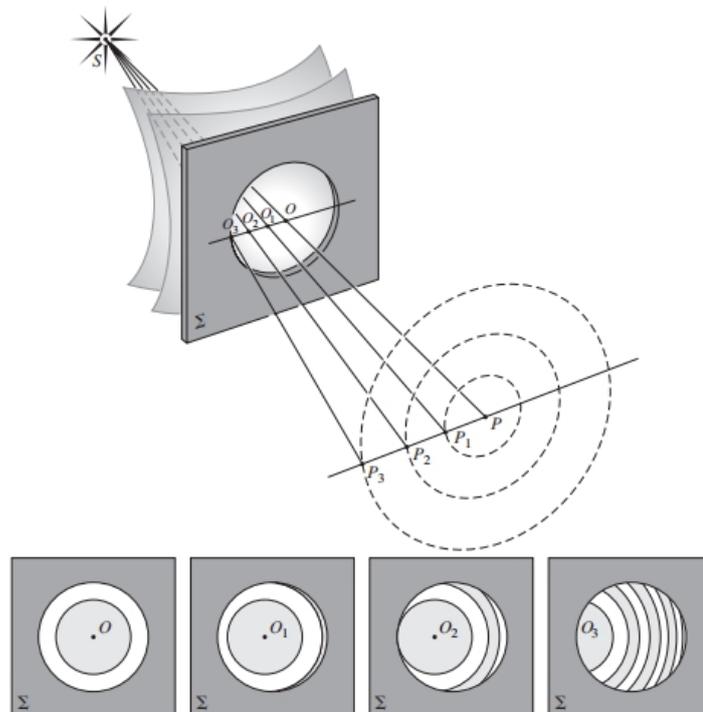


Figura 2.10: Zonas en una apertura circular

---

### 2.2.1. Teoría de Bethe

En 1944 Hans Bethe publica un artículo en la revista *The Physical Review* en el que trata de manera teórica el problema de la difracción de la radiación electromagnética a través de un agujero pequeño comparado con la longitud de onda (ver Figura 2.2.1.1). En dicho artículo se encuentra una solución completa, que satisface las ecuaciones de Maxwell y las condiciones de contorno, para un agujero circular en una pantalla conductora perfecta. Las ideas básicas de la teoría se comentan a continuación, basadas en la referencia [30].

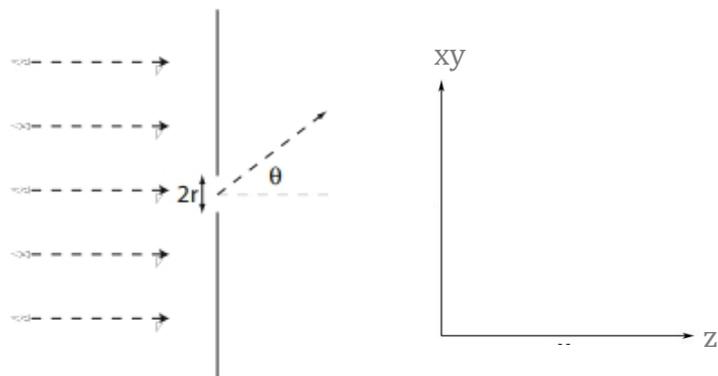


Figura 2.11: Transmisión de la luz a través de una apertura circular de radio  $r$  en una pantalla opaca de grosor infinitesimal.

Comenzamos por considerar un problema más simple. Una lámina conductora y fina en el plano  $x$ - $y$  tiene un agujero circular de radio  $r$ . Supongamos que a grandes distancias, en la dirección de  $z$  negativa, existe un campo eléctrico uniforme con magnitud  $E_0$  en la misma dirección, esto es, perpendicular a la lámina, pero es cero para la dirección de  $z$  positiva. Entonces el campo más cercano al agujero puede dividirse en dos términos: uno para el campo que habría si no hubiese agujero, y otro término que existe porque hay un agujero. A distancias lo suficientemente grandes, el segundo término puede aproximarse como el de un dipolo eléctrico  $p$ , que por simetría debe estar en la dirección  $z$ , y por linealidad debe ser proporcional a  $E_0$ . Por análisis dimensional, debe ser  $p \propto E_0 r^3$ . (La constante adimensional de proporcionalidad resulta ser  $1/3\pi$ , pero no es relevante para nuestro propósito).

Un análisis similar se puede hacer para el campo magnético en la dirección  $x$ , apareciendo un dipolo magnético en el agujero, que análogamente sería  $m \propto H_0 r^3$  (La constante de proporcionalidad es  $2/3\pi$ ).

Se considera ahora una onda electromagnética con longitud de onda  $\lambda$  que viene desde la dirección de  $z$  negativa. Si  $\lambda$  es grande comparada con  $r$ , entonces los resultados electrostático y magnetostático de arriba son válidos. Por lo tanto tenemos radiación dipolar proveniente del agujero, con amplitud proporcional a  $r^3$  y potencia  $P$  proporcional a  $r^6$ . La potencia  $P_0$  incidente en el agujero es proporcional a  $r^2$ , por lo que la fracción de potencia transmitida  $T=P/P_0$  es proporcional a  $r^4$ . Por análisis dimensional, debemos tener en consecuencia  $T \propto (r/\lambda)^4$ , donde la constante de proporcionalidad es adimensional. Esto tiene sentido, pues la energía radiada por un dipolo es proporcional a  $\omega^4$ .

Así, la conclusión más relevante, para nuestro estudio, a la que Bethe llega es que la transmisión es proporcional a  $(r/\lambda)^4$ , siendo  $r$  el radio del agujero y  $\lambda$  la longitud de onda. Si el agujero es mucho más pequeño que la longitud de onda, se esperaría una transmisión prácticamente nula. En el artículo de Ebbesen[11], que se discutirá posteriormente, la eficiencia de transmisión esperada para un agujero de  $0,15\mu\text{m}$  de diámetro y para una longitud de onda de  $0,6\mu\text{m}$  era del orden de  $10^{-3}$ , que son varios órdenes de magnitud por debajo de lo que este equipo obtuvo experimentalmente.

### 2.2.2. Guías de onda y transmisión ordinaria

En 1893 Joseph John Thomson sugiere la posibilidad de propagar ondas dentro de cavidades metálicas, y un año después Lodge lo verifica experimentalmente construyendo la primera guía de ondas. Las guías de onda (GO) son conductores metálicos huecos, de sección constante, los cuales reflejan las ondas EM en sus paredes, generando una onda EM que transporta energía a lo largo de la guía. Una GO ideal, cuyas paredes sean conductores perfectos, no tendrá pérdidas. Adicionalmente, se trata del método más eficiente para el transporte de energía para frecuencias a partir de los 103MHz[30].

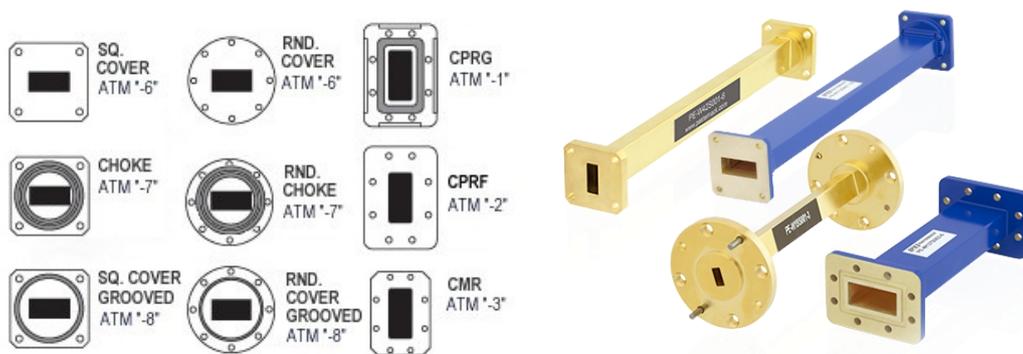


Figura 2.12: Guía de ondas de diferentes secciones. A la izquierda, el estándar americano. [31]

---

De este modo, las guías de onda nos ofrecen una explicación alternativa, desde el punto de vista electromagnético, del comportamiento de una abertura.

Por el espacio de una GO se propagan lo que se denominan modos. Estos modos son soluciones a las ecuaciones de Maxwell que cumplen las condiciones de contorno impuestas por la guía. Existen infinitos modos de propagación, y cada uno de ellos tiene una frecuencia de corte tal que por encima de la misma se produce la propagación “ordinaria”, y por debajo se tienen modos “evanescentes”, esto es, no propagantes. En esta sección nos limitamos a exponer las fórmulas. El cálculo detallado se puede consultar en el Apéndice A.1.

Así, para que se pueda producir la transmisión, la frecuencia debe superar una frecuencia de corte, única para cada modo, que depende de la geometría y otros parámetros del sistema. En nuestro estudio, las placas a considerar contienen siempre colecciones periódicas de agujeros circulares.

A continuación se va a exponer cómo calcular la frecuencia de corte para el sistema que es objeto de nuestro interés. Esta frecuencia de corte es la de un único agujero, y nos da a partir de qué frecuencia se produce la transmisión ordinaria. Se puede calcular como la de una guía de onda circular.

Vamos a buscar las soluciones para la ecuación de ondas correspondiente a una GO sin pérdidas. Para ello, suponemos:

1. Medios ideales: dieléctricos sin pérdidas y conductores perfectos.
2. Guía uniforme: ni las propiedades ni la geometría del medio varían en la dirección de propagación (dirección  $z$  en nuestro caso).
3. Trabajamos con ondas que no son planas, en régimen armónico estacionario.

Suponiendo que la propagación es a lo largo del eje  $z$ , tenemos que según la existencia de  $E_z$  y  $H_z$ , los modos se pueden clasificar en cuatro tipos[32]:

- Transversales electromagnéticos (TEM): No existe componente ni del campo eléctrico ni del magnético en la dirección de propagación; i.e,  $E_z=0$  y  $H_z=0$ .
- Transversales magnéticos (TM): No existe componente del campo magnético en la dirección de propagación; i.e,  $H_z=0$  y  $E_z \neq 0$ .
- Transversales eléctricos (TE): No existe componente del campo eléctrico en la dirección de propagación; i.e,  $E_z=0$  y  $H_z \neq 0$ .
- Modos híbridos electromagnéticos (HEM): Pueden existir componentes tanto del campo eléctrico como del campo magnético en la dirección de propagación; i.e,  $E_z \neq 0$  y  $H_z \neq 0$ .

Pero no todos estos modos se propagan en todas las GO: en el caso de las GO circulares, sólo se propagan modos TE y TM; es decir, se propagan modos no TEM.

Para una GO circular la frecuencia de corte se calcula usando la fórmula

$$f_c = \frac{v}{2\pi} \beta_{c,m,n} \quad (2.1.1)$$

Donde  $v$  es la velocidad de la onda en el medio que rellene la guía de ondas, y  $\beta_{c,m,n}$  es una constante de corte de fase diferente para cada modo, cuya forma de cálculo viene indicada en la Tabla I. Vemos así que existen infinitos modos caracterizados por los números  $m$  y  $n$ , que toman valores desde el cero.

Tabla I: Cálculo de la constante de corte de fase,  $\beta$ , según el modo.

Modo TE <sub>m,n</sub>	Modo TM <sub>m,n</sub>
$\beta_{c,m,n} = \frac{\chi'_{m,n}}{r}$	$\beta_{c,m,n} = \frac{\chi_{m,n}}{r}$

Donde

- $\chi_{m,n}$  es la n-ésima raíz de la m-ésima función de Bessel.
- $\chi'_{m,n}$  es la n-ésima raíz de la m-ésima función de Bessel derivada.
- $r$  es el radio de la GO.

Los valores de las funciones de Bessel y las funciones de Bessel derivadas vienen normalmente dadas en tablas como la que sigue[33]

Tabla II: Valores de las funciones de Bessel y sus derivadas.

m	n	$\chi_{m,n}$	$\chi'_{m,n}$
0	1	2.405	3.832
0	2	5.520	7.016
0	3	8.654	10.173
1	1	3.832	1.841
1	2	7.016	5.331
2	1	5.136	3.054
2	2	8.417	6.706
3	1	6.380	4.201

---

Cada modo de la GO está descrito por una distribución única de componentes transversales y longitudinales de los campos eléctrico y magnético. Como ya se ha mencionado antes, las GO circulares reconocen dos tipos de modos: los TE y los TM, que vienen descritos por índices  $m$  y  $n$ , que representan la variación del campo en las direcciones radial y axial, respectivamente.

En este tipo de GO, el modo de frecuencia de corte más baja, llamado *modo fundamental*, es el  $TE_{1,1}$ . Suponiendo que el interior de la GO está relleno de aire, la frecuencia de corte para este modo será, según 2.2.1 y refiriéndonos a el valor subrayado en azul en la tabla anterior

$$(f_c)_{TE_{1,1}} = \frac{c}{2\pi} \frac{1,841}{r} \approx \frac{c}{1,7 \cdot 2r} (Hz) \quad (2.1.2)$$

Así, en lo que sigue, usaremos esta fórmula para saber qué tamaño de agujero necesitamos en función de la frecuencia a la que queramos realizar la simulación, o lo que es lo mismo, en función del tamaño del agujero elegido podremos saber a qué frecuencia se dará la transmisión ordinaria. Usaremos así la frecuencia dada por el modo fundamental como guía, pues será la más baja de todas. El resto de modos aparecerán a frecuencias más altas. El siguiente modo es el  $TM_{0,1}$ , que tiene una frecuencia de corte (tomando los valores resaltados en rosa en la tabla anterior)

$$(f_c)_{TM_{0,1}} = \frac{c}{2\pi} \frac{2,405}{r} (Hz) \quad (2.1.3)$$

---

## 2.3. Transmisión Extraordinaria

Generar una fuente de luz sub-lambda, a primera vista, parece sencillo. Bastaría con taladrar un agujero circular de tamaño sub-lambda en una lámina metálica e iluminar esta pantalla por un lado. Así, el otro lado de la lámina se comportaría como una fuente de luz sub-lambda, gracias a la luz transmitida. Por desgracia, la teoría de Bethe nos dice que esta transmisión será prácticamente nula, como hemos visto en la subsección 2.2.1.

No obstante, existen ciertas situaciones bajo las cuales este no es el caso. La disposición periódica de agujeros de tamaño sub-lambda da lugar a un pico de transmisión mucho mayor de lo esperado para uno solo. Esto es lo que se conoce como Transmisión Extraordinaria.

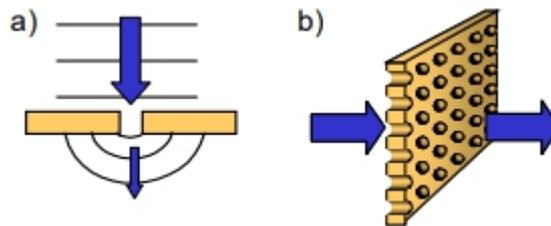


Figura 2.12: (a) Un único agujero sub-lambda presenta transmisión mínima. (b) Un array de dichos agujeros puede tener una transmisión que incluso exceda la unidad cuando se normaliza con respecto al área total del agujero.

La Transmisión Extraordinaria (ET por sus siglas en inglés) es el fenómeno por el cual se produce un pico de alta transmisión en la zona de corte de los agujeros de tamaño sub-lambda de una placa metálica perforada con una estructura periódica regular. Esto fue, como hemos indicado previamente, inicialmente observado por el grupo de Ebbesen en 1998. El experimento mostraba que los agujeros, una vez organizados, tenían una sección transversal de transmisión más grande que el propio área de los agujeros. Por ello, en estos picos de transmisión extraordinaria se obtenían eficiencias de transmisión que podían llegar a exceder la unidad, cuando están normalizados con respecto al área del agujero, radicalmente opuesto a lo predicho por la teoría de Bethe.

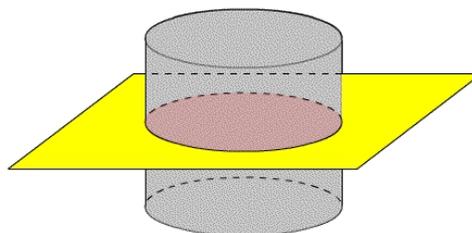


Figura 2.13: Sección transversal de un agujero.

Inicialmente, el fenómeno se publicó en el rango de frecuencias ópticas[2, 34], pero se ha descubierto evidencia del mismo fuera de este rango[4, 5, 20]. Las imágenes de la Figura 2.14 muestran la transmisión extraordinaria para dos rangos de frecuencias distintos. Para frecuencias ópticas, que fueron en las que apareció por primera vez, el fenómeno se conoce como Transmisión Óptica Extraordinaria (EOT). Fuera de este rango, el fenómeno se conoce de manera general como Transmisión Electromagnética Extraordinaria (EET). De manera genérica, también suele referirse al fenómeno simplemente como Transmisión Extraordinaria (ET).

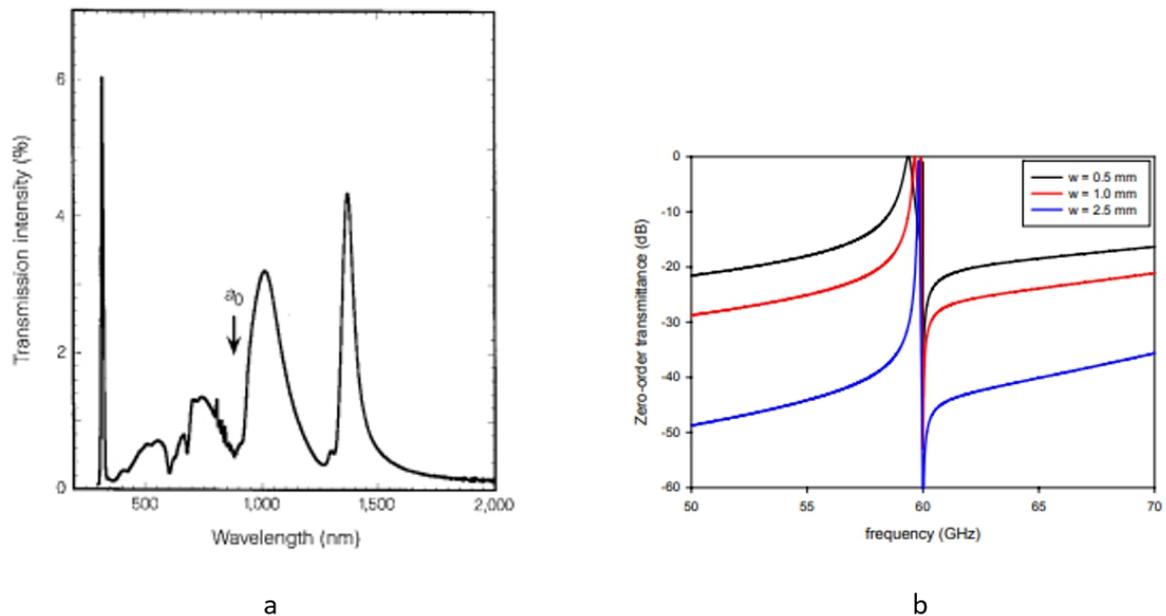


Figura 2.14: (a) Resultado experimental de EOT (frecuencias ópticas) en función de la longitud de onda[2]. (b) Simulación de EET (frecuencias de gigahercios) para distintos grosores de la placa en función de la frecuencia[20].

En la Figura 2.14 podemos apreciar el pronunciado pico de transmisión, y la forma que toma según se represente en función de la longitud de onda [Figura 2.14(a)] o de la frecuencia [Figura 2.14(b)]. Podemos adelantar que estas resonancias de transmisión están relacionadas con factores estructurales de la placa, por lo que la longitud de onda de transmisión es comparable a la constante de red, y fuertemente dependiente del ángulo de incidencia.

Por un lado, la Figura 2.14(a) muestra el resultado experimental obtenido por el equipo de Ebbesen para una placa de plata de grosor  $0,2\mu\text{m}$  colocada por evaporación sobre un sustrato de cuarzo. Los agujeros, de diámetro  $0,15\mu\text{m}$ , están separados por una distancia de  $0,9\mu\text{m}$ . El primer pico de transmisión que observamos en la figura, a  $326\text{nm}$ , según Ebbesen, corresponde a una resonancia de la propia plata. Si tenemos en cuenta que la longitud de onda de corte ( $\lambda_c=c/f_c$ ) para una abertura circular de ese diámetro sería de  $255\text{nm}$  (aire) o del orden de  $380\text{-}390\text{nm}$  (en el cuarzo), sería una transmisión “ordinaria”.

Lo que observa Ebbesen, es que a frecuencias inferiores, en las cuales, como hemos visto, debería reducirse la transmisión como una función de  $\lambda^4$ , aparecen en su lugar dos máximos, con sus mínimos asociados. El primer mínimo se produce a una longitud de onda igual al periodo de la red de agujeros ( $a_0$ ), mientras que en el segundo la relación entre la longitud de onda y ese periodo es el índice de refracción del cuarzo (es decir, la longitud de onda de la señal dentro del sustrato de cuarzo coincide también con el periodo de la red de agujeros en la plata).

El mismo fenómeno se puede observar también, con más simplicidad, si se elimina el sustrato de cuarzo y así tenemos el mismo medio (aire) a ambos lados de la placa metálica. En la figura 2.14(b) podemos ver otro ejemplo, realizado por el equipo de Beruete[20] en una escala diferente, de manera que el fenómeno se pueda observar también en frecuencias electromagnéticas. En este caso observamos el resultado con tres placas de grosores diferentes, pero todas con la misma periodicidad de 5mm y agujeros de 2,5mm de diámetro. En todos los casos el pico aparece a una frecuencia cercana a 60GHz, que corresponde a una longitud de onda de 5mm igual al periodo de la red de agujeros.

Como en el resultado de Ebbesen, el pico viene asociado también a una caída brusca y estrecha del coeficiente de transmisión. Esta caída se conoce como "anomalía de Wood"[35], fenómeno descubierto por Wood en 1902, también en estructuras periódicas, y que se puede observar que acompaña siempre a los fenómenos de transmisión extraordinaria.

Las anomalías de Wood son un efecto que se manifiesta como variaciones bruscas en la intensidad de varios órdenes espectrales de difracción en ciertas bandas estrechas de frecuencia, y aparecen en el espectro como función de la longitud de onda o el periodo para un ángulo de incidencia fijo. Estas anomalías no dependen del material, pero sí del periodo de la rejilla, de la incidencia de la longitud de onda, y de los índices de refracción del medio que lo rodea. Las anomalías de Wood no serán tratadas más extensivamente en este texto, pero pueden consultarse en la referencia[36]. La Figura 2.15 muestra resultados para diferentes situaciones experimentales, apreciándose la brusca caída.

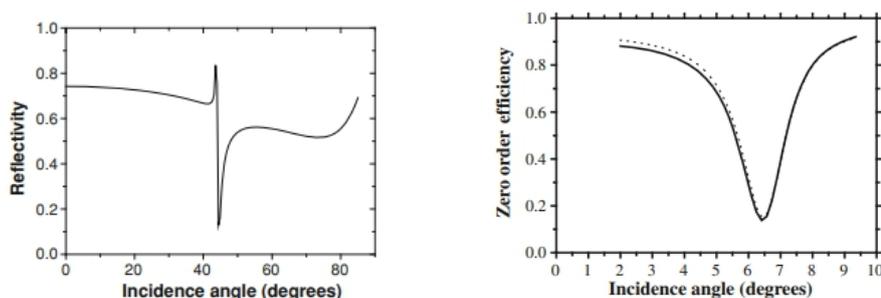


Figura 2.15: Anomalía de Wood. [36]

---

En este apartado se va a tratar la Transmisión Extraordinaria desde una perspectiva más teórica, con el fin de familiarizarse con los modelos existentes que explican el por qué del fenómeno. Por un lado, la hipótesis plasmónica nos da la respuesta para los rangos de frecuencia óptica[2, 34]. Aquí, las anomalías de Wood juegan un rol fundamental, que permitió replicar el fenómeno en otras regiones del espectro electromagnético[4, 5], donde los plasmones no pueden ser usados para explicarlo, pues no existen. En estos caso, modelos de difracción de onda completa[37, 38, 39] (*full-wave diffraction models*), que dan cuenta de los campos propagante y evanescente en la estructura periódica, explican satisfactoriamente el fenómeno. No obstante, existe una teoría alternativa, que usa la perspectiva de la teoría de circuitos[40], que haciendo uso de los conceptos de superficies de frecuencia selectiva, guías de onda y líneas de transmisión, y logra dar cuenta de todos los detalles observados en el espectro de transmisión.

### 2.3.1. Plasmones

Cuando se descubrió la EOT, una de las primeras teorías que explicaba de manera correcta el fenómeno era una teoría basada en los plasmones[41, 42, 43]. Los plasmones pueden dar buena cuenta del las características que se observan en la transmisión extraordinaria, pero sólo cuando trabajamos en el rango de frecuencias ópticas. Es por ello que aquí usaremos generalmente el término “luz” para referirnos a la radiación electromagnética que incide sobre el metal.

Cuando la luz, esto es, una onda en el rango de frecuencias ópticas, incide sobre una estructura metálica, aparecen distintos tipos de modos resonantes debido a la fluctuación de electrones libres (que en estas frecuencias se comportan como un plasma) en la banda de conducción del metal. Estos modos oscilantes se llaman *plasmones*, y son ondas EM evanescentes.

David Pines y David Bohm fueron los que propusieron su existencia en 1952[44], y dos años más tarde mostraron que surgían de un Hamiltoniano para correlaciones electrón-electrón de largo alcance[45]. Desde un punto de vista cuántico pueden ser considerados cuasipartículas. Al igual que la luz, que es una oscilación óptica, consiste de fotones, o los fonones son cuantizaciones de vibraciones mecánicas, un plasmón es un cuanto de oscilación de plasma, hasta que pierden su energía a causa de amortiguamientos. Como los electrones poseen carga, estas oscilaciones están asociadas inherentemente a un campo electromagnético.

El modelo de Drude, que explica la conducción de electrones en los metales, puede ser útil para explicar éstas oscilaciones del plasma. Las oscilaciones del plasma son oscilaciones rápidas de la densidad de electrones en medios conductores, como los metales. Se producen a una frecuencia denominada *frecuencia del plasma*,  $\omega_p$ . Esta frecuencia, que viene señalada en la Figura 2.16, se encuentra, para la mayoría de los metales, en el rango ultravioleta (UV), que comprende desde los 10nm a los 400nm.

---

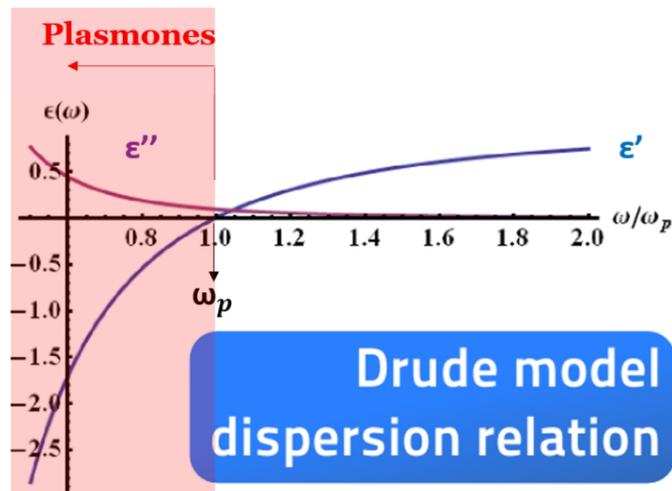


Figura 2.16: Modelo de Drude; relación de dispersión.

Los plasmones influyen de manera determinante las propiedades ópticas de estructuras metálicas y semiconductoras. Por un lado, aquellas frecuencias por debajo de la frecuencia del plasma son reflejadas por el material debido al apantallamiento que los electrones del material hacen sobre el campo eléctrico. Por otro, las frecuencias por encima de la del plasma serán transmitidas por el material, ya que los electrones del mismo no pueden responder lo suficientemente rápido como para apantallarlo. Como se ha mencionado, en la mayoría de los metales la frecuencia del plasma se encuentra en el UV, lo que les hace brillantes (reflectivos) en el rango visible. Un análisis matemático de las resonancias plasmónicas puede consultarse en la referencia [46]. Sobre el comportamiento de los plasmones en nanoestructuras metálicas puede consultarse la referencia [47], también utilizada para el desarrollo del subapartado anterior. Asimismo, en el apéndice A.2 puede encontrarse más sobre plasmones.

## Plasmones superficiales (PS) en la EOT

La experiencia nos dice que la luz no se confina con facilidad; en condiciones normales viaja por las tres dimensiones espaciales. No obstante, bajo ciertas condiciones, la luz puede viajar confinada por la superficie de los metales. Los plasmones superficiales (PS) fueron predichos por Rufus Ritchie en 1957[48]. Sin embargo, hasta hace poco se les consideraba un inconveniente, pues los electrones disipan energía al moverse. De manera cualitativa, un PS disipa más de la mitad de la intensidad de la luz que porta tras recorrer tan solo una décima de milímetro. No obstante, en los últimos años se han empezado a visionar las posibles aplicaciones que pueden llegar a tener. Por un lado, la miniaturización constante de la electrónica, que podría proporcionar escalas favorables para la manipulación de estos plasmones, abre la posibilidad de transportar información con los mismos[49]. Otras áreas prometedoras incluyen la transmisión de la luz a través de agujeros pequeños, los sensores moleculares basados en plasmones superficiales[50] y los circuitos plasmónicos[51], entre otros.

Los plasmones superficiales ocurren en la interfaz de dos materiales donde una parte de la función dieléctrica cambia de signo a través de dicha interfaz (p. ej. una interfaz metal-dieléctrico, como puede ser una lámina de metal en aire). Además, para que existan los plasmones superficiales, la magnitud de la permitividad en la región de permitividad negativa debe ser mayor que la de la región de permitividad positiva[52]. La Figura 2.17 muestra un esquema de esta situación. Por otra parte, volviendo a la Figura 2.16 podemos observar que esto ocurre por debajo de  $\omega_p$ , donde  $\epsilon'$  toma valores negativos y  $\epsilon''$  toma valores positivos. Este  $\omega_p$ , que está en el ultravioleta (10nm-400nm), constituye así el “límite superior” de frecuencias a las que se pueden producir los plasmones superficiales. Por debajo del UV seguimos teniendo el rango de frecuencias ópticas, que va desde los UV hasta los 750nm para los rojos. Por ello, esta teoría se usa para explicar la EOT.



Figura 2.17: Interfaz metal-dieléctrico y condición para la existencia de PS.

A los plasmones superficiales se les asignó desde el principio un rol fundamental en el fenómeno de la Transmisión Óptica Extraordinaria. En el propio artículo de Ebbesen aparecen como principales responsables del mismo; en sus propias palabras, “*nuestro experimento proporciona información de que estas inusuales propiedades ópticas son debidas al acoplamiento de la luz con los plasmones en la superficie de la película metálica perforada periódicamente*”.

En su momento, esto explicaba también por qué este fenómeno aparecía solo en sistemas metálicos. En 2001, el equipo de Pendry[53] mostraba cómo la luz, tras entrar en el agujero, va y vuelve repetidamente antes de salir por la otra cara de la lámina. En cada paso se transmite solo una pequeña fracción de la luz, pero cuya suma puede dar lugar a una transmisión muy alta.

Los plasmones superficiales “recogen” parte de la luz que se perdería y la devuelven al proceso de transmisión, llevándola a iluminar otros agujeros. Es importante que esta luz, i.e ondas electromagnéticas, transportada por los PS interfiera constructivamente con la incidente. Para que se produzca interferencia constructiva deben darse así ciertas relaciones entre las dimensiones de la lámina, los agujeros y la longitud de onda, que guarda una relación directa con el período de la red.

---

No obstante, los plasmones pasarían a ser algo secundario y peculiar de la EOT cuando se obtuvieron resultados que demostraban que este fenómeno podía extenderse a otros rangos de frecuencias y materiales en los que los plasmones superficiales no pueden existir, entre otros[54, 55, 56]. Un ejemplo de esto son los conductores perfectos, para los cuales se ha demostrado la existencia del fenómeno[51]. Teóricamente, un conductor perfecto es impenetrable, por lo que no puede haber plasmones superficiales en su superficie, pues éstos requieren la presencia de campos magnéticos a ambos lados de la superficie. Por el contrario, en un metal no ideal, en el rango óptico, la luz puede penetrar decenas de nanómetros.

Como curiosidad, empresas como L'Oréal están investigando los plasmones superficiales ópticos con vista a mejorar el maquillaje[57].

Así, se ha recurrido a otras teorías en las que la presencia de estas cuasipartículas no sea indispensable[37, 38, 39]. Entre ellas, la más exitosa a la hora de dar cuenta del fenómeno es el modelo de difracción de onda completa[58, 59], que fue usado por primera vez para arrays periódicos unidimensionales[60, 61], aunque para explicar la ET los modelos en 2-D son los que mejor dan cuenta del fenómeno[21, 22, 38, 39]. Sin embargo, aquí seguiremos el estudio de la ET desde un punto de vista distinto, que se cubrirá en el sub-apartado que sigue, y propuesto por el equipo de Medina.

### **2.3.2. Teoría de Circuitos**

Como se ha comentado al comienzo de esta sección, la EOT fue inicialmente explicada por medio de los plasmones superficiales y diversas teorías que los involucraban. No obstante, la evidencia de la existencia de este fenómeno en otros rangos de frecuencia, así como en superficies que no pueden tener plasmones, ha dado lugar a nuevas teorías. Actualmente, modelos de difracción[37, 38, 39] explican satisfactoriamente el fenómeno. Un teoría alternativa propuesta por Medina et al[40], que hace uso de la teoría de circuitos, es una forma sencilla de obtener las principales características del fenómeno. Así, se interpreta la transmisión extraordinaria en términos de la difracción por un diafragma fino o grueso de un modo TEM que viaja a lo largo de una línea de transmisión de placas paralelas. Implementando el método de adaptación de modos para resolver el correspondiente problema electromagnético, se obtienen unos resultados numéricos que se corresponden perfectamente con aquellos datos por otras técnicas ya mencionadas.

Simplificando mucho, el problema se reduce a uno de adaptación de guías de onda mediante iris inductivos y capacitivos. Por ello, comenzaremos con una breve explicación de ello.

---

## Adaptación de GO mediante iris

A fin de conseguir adaptaciones de carga, es decir, que no haya diferencia de impedancia entre dos guías, y por tanto evitar reflexiones, que provocan pérdidas, suele recurrirse a iris, que pueden ser tanto inductivos como capacitivos. Estos vienen representados en la Figura 2.18, y son básicamente láminas metálicas colocadas dentro de la guía con los parámetros adecuados[62].

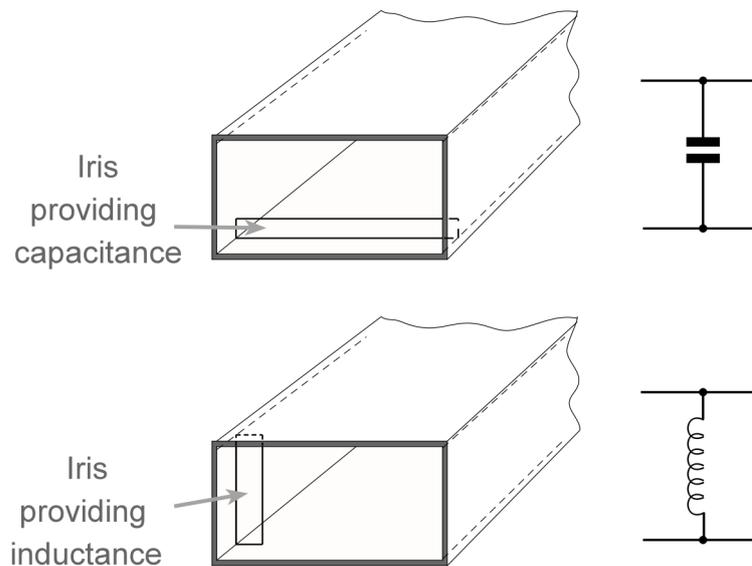


Figura 2.18: Iris capacitivo e inductivo, de arriba abajo.

Generalmente se supone que el sistema será alimentado a una frecuencia tal que el modo fundamental es propagante, y los superiores evanescentes. No obstante, estos modos superiores seguirán generándose en la discontinuidad, pues son necesarios para cumplir las condiciones de contorno que el propio obstáculo impone. Al tratarse de modos evanescentes, almacenarán energía en las inmediaciones de iris que, según sea predominantemente eléctrica o magnética, darán al dispositivo un carácter inductivo o capacitivo. A suficiente distancia de la discontinuidad, solo será apreciable el modo fundamental, por lo que en la descripción del sistema por su línea equivalente, el efecto de la discontinuidad podrá representarse por una susceptancia (inductiva o capacitiva) de valor adecuado y en paralelo con la línea.

El problema de adaptación de una carga mediante un iris puede ser resuelto por tres métodos: análisis de campos, uso de la teoría de líneas de transmisión o técnica de redes de microondas (ver Capítulo 3, apartado 3.2.1 para más detalle de este último). Aquí vamos a comentar el segundo de ellos, pues es el que más relación guarda con el planteamiento que Medina hace para modelar la transmisión extraordinaria.

---

La resolución por el método de líneas de transmisión se podrá usar cuando no se necesite conocer todos los campos en el dominio de estudio. Entonces, podrá establecerse un equivalente circuital de la estructura en cuestión, que será de parámetros distribuidos, que se explican en el párrafo siguiente.

Para bajas frecuencias en los cables convencionales, como su longitud es pequeña comparada con las frecuencias de uso y los tiempos de reacción a tratar, se puede suponer que todos los tramos del cable están en fase. Sin embargo, para frecuencias mayores esto no se da. Un ejemplo de ello son las líneas de transmisión. En este caso se utiliza un modelo de parámetros distribuidos en el cual se presupone que la línea se compone de multitud de sub-tramos de tamaño diferencial, cada uno de ellos con su propia resistencia, capacitancia, etc. Además la señal está en fase en todo el sub-tramo. Así, aplicando las leyes de Maxwell entre dos tramos consecutivos, y extendiéndolo para el resto de la línea, se obtienen las conocidas como “ecuaciones del telegrafista”, base de la teoría de LT[60]. La Figura 2.19 muestra esquemáticamente una LT de parámetros distribuidos.

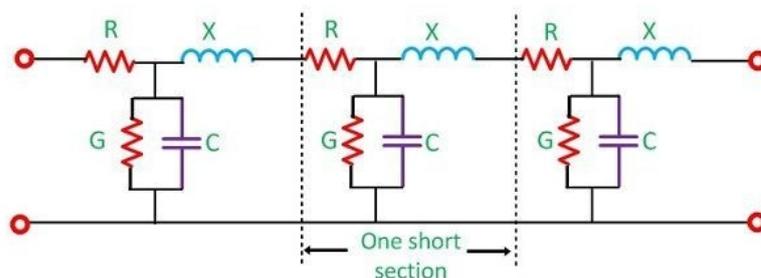


Figura 2.19: Modelo de parámetros distribuidos para una LT. Se puede tomar un sub-tramo como el señalado, en el que la señal estará en fase.

Entonces, si la GO está compuesta por un solo conductor y bajo ciertas consideraciones, el problema consistirá en resolver la LT correspondiente al modo propagante, y solo quedaría incluir el equivalente del iris.

Sabiendo esto podemos volver ya al artículo de Medina que tratamos de analizar en esta sección.

## Modelización de la ET

La idea de esta teoría es que el problema original puede reducirse al estudio de la difracción de un modo TEM incidente por un iris rectangular colocado en una lámina metálica. En nuestro caso, como hemos visto antes, los iris serán tanto inductivos (“lados verticales”) como capacitivos (“lados horizontales”). Como se acaba de mencionar, este problema se puede resolver por medio de un circuito equivalente, que da cuenta de las características más importantes del fenómeno. Además, este modelo predice transmisión extraordinaria para sistemas no periódicos, aunque aún no hay evidencia experimental de ello.

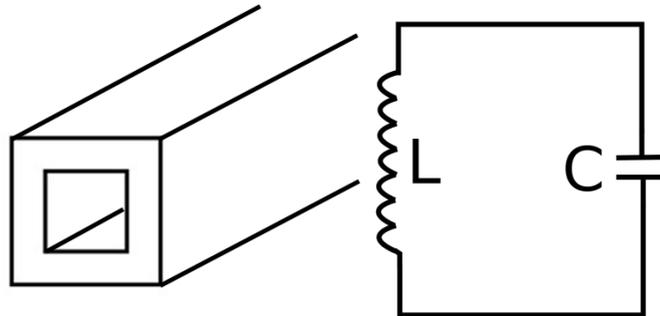


Figura 2.20: Iris inductivo y capacitivo proveen capacitancia e inductancia.

A continuación se pondrán los equivalentes circuitales para cada escenario, y las conclusiones que se pueden obtener cuando se resuelve el problema, siguiendo un procedimiento similar al comentado en la adaptación mediante iris. No obstante, prescindiremos de las ecuaciones, que pueden consultarse en el artículo original [40].

### Pantallas de espesor cero

Igual que hizo Ebbesen, recurrimos al caso más sencillo (e irreal) del problema, en el que la placa a considerar presenta grosor cero. El circuito equivalente en este caso se muestra en la Figura 2.3.2.1.

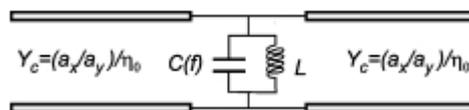


Figura 2.21: Modelo circuitual para caso de grosor cero.

Resolviendo el circuito equivalente pueden predecirse las siguientes características, que están en muy buen acuerdo con los resultados de otros modelos, y se encuentran avaladas por las simulaciones llevadas a cabo:

- Para agujeros sub-lambda, los picos de transmisión se encuentran próximos a la frecuencia de la primera anomalía de Wood, y su anchura disminuye según disminuye el tamaño de la apertura.
- La periodicidad es la que determina el valor de la frecuencia a la que se produce la ET.
- Las pérdidas serán más notables para el caso de agujeros pequeños (ET) que para grandes agujeros. En este modelo, las pérdidas aparecen como una resistencia conectada en serie con la inductancia.

## Pantallas con espesor

La mayoría de experimentos y simulaciones numéricas de este fenómeno se llevan a cabo con placas de un cierto grosor. El problema corresponde así al de la difracción por un iris y una placa de grosor finito. En este caso, el circuito equivalente se muestra en la figura 2.3.2.2. Observamos que tiene tres mallas adicionales, dos de las cuales son como la del caso anterior, y una tercera compuesta por tres inductancias.

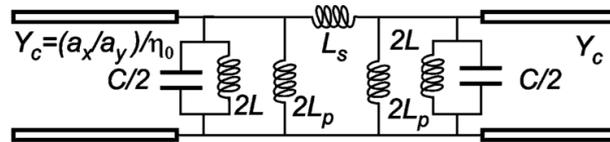


Figura 2.22: Modelo circuital para caso de grosor finito.

Las predicciones esperadas según las simulaciones numéricas y modelos analíticos que se pueden hacer para este caso son:

- Se observan dos picos de transmisión en vez de uno, próximos a la frecuencia de Wood.
- Cuanto mayor es el espesor de la placa, más cerca se encuentran ambos picos.
- Ambos picos colapsan en uno solo cuando el espesor del agujero es lo suficientemente grande.
- Los picos de transmisión disminuyen para placas de espesor muy grande debido al comportamiento evanescente de los campos dentro del agujero.

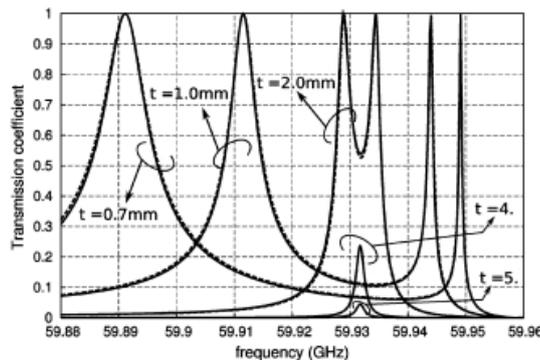


Figura 2.23: Simulación computacional de los coeficientes de transmisión para agujeros rectangulares pequeños practicados en placas de distinto espesor. Los picos se aproximan según aumenta el espesor de la placa. Para espesores grandes, los dos picos colapsan en uno solo y, finalmente, la transmisión desaparece para pantallas de espesor muy grande.

# Capítulo 3

## Metodología

Antes de exponer los resultados obtenidos es necesario describir los programas y técnicas utilizadas en este trabajo para diseñar y analizar las diferentes estructuras. En este apartado se explica resumidamente el funcionamiento del software de simulación usado, así como los aspectos y procedimientos prácticos tenidos en cuenta durante la realización de los cálculos y la interpretación de los resultados.

### 3.1. CST

CST Studio Suite® es un software de diseño, análisis y optimización de componentes y sistemas electromagnéticos, proporcionando soluciones computacionales precisas y eficientes para los mismos. En concreto, para las simulaciones de este trabajo se ha utilizado CST Microwave Studio® (CST MWS).

Este programa resuelve el conjunto completo de las ecuaciones de Maxwell para una estructura determinada sin suponer ningún tipo de simplificación. Para ello utiliza como base la técnica de Integración Finita (FIT). Esto es un modelo de discretización espacial que aborda el análisis de complejas estructuras 3-D en dominios del tiempo y la frecuencia. Para la discretización, el programa crea una malla de la geometría bajo análisis que, dependiendo de la exactitud buscada, dará resultados más o menos precisos. Cuanto más densa sea la malla, más precisos serán los resultados, pero también será más costoso el tiempo de computación.

Para la estructura diseñada en este trabajo, se usará una malla tetraédrica, y la simulación se realizará en el dominio de la frecuencia. Además, vamos a considerar que nuestra estructura periódica es infinita. Por lo tanto, basándonos en el teorema de Floquet[64] y las condiciones de contorno periódicas, solo será necesario analizar la celda unidad.

Los resultados de la simulación se pueden visualizar mediante una interfaz interactiva, la cual permite conocer rápidamente la situación de la estructura de estudio.

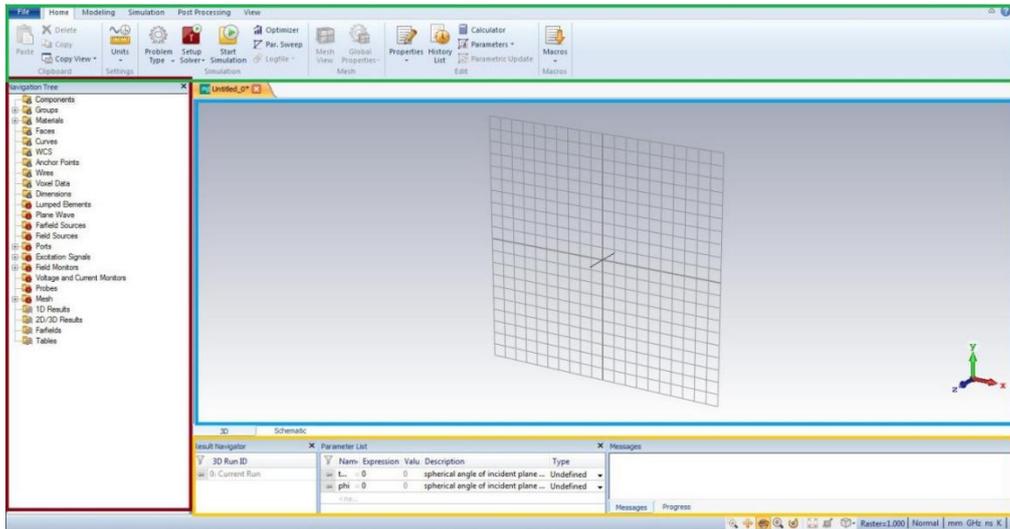


Figura 2.3: Interfaz gráfica del programa CST

La interfaz gráfica general aparece en la figura 2.3. En la parte superior de dicha imagen, recuadrado en verde, se encuentra el menú de opciones que se pueden implementar en el entorno de la simulación: la forma del dispositivo, la excitación que dará lugar a la onda electromagnética, la definición del dominio del sistema y sus condiciones de contorno, la posibilidad de exportar los resultados de los cálculos numéricos a un fichero externo, el menú de visionado de resultados con sus distintas posibilidades, tales como la elección de un plano de corte, el rango de colores de la intensidad del campo, etc.

En vertical, a la izquierda, recuadrado en rojo, aparece un árbol donde se muestra cada uno de los parámetros que se han elegido o que es posible elegir para el dispositivo de estudio o para la excitación del sistema, así como las magnitudes que se desean medir. Una vez la simulación ha sido realizada, aparecen también las magnitudes que se han solicitado, cuya forma de visualización se puede modificar en el menú superior.

La parte central de la interfaz, en azul, está destinada a la visualización gráfica del sistema, tanto de su disposición espacial cuando se está diseñando el sistema como de los resultados una vez se han finalizado los cálculos necesarios, o de las gráficas de algunos parámetros o magnitudes, algunas de las cuales se incluirán en la exposición de resultados a continuación.

Finalmente, en la parte inferior, en amarillo, aparece el proceso de los cálculos del método de simulación. Es aquí donde aparecerán, si los hubiera, los errores o los avisos que muestran posibles problemas que el programa encuentra en la ejecución de la resolución.

## 3.2. Interpretación de los resultados

### 3.2.1. Parámetros de scattering

En el programa definimos puertos, que es por donde se introducen las señales, y por donde se mide lo que sale por ellos. La relación entre ambos (coeficientes de reflexión y transmisión) es lo que se denominan parámetros de scattering (S).

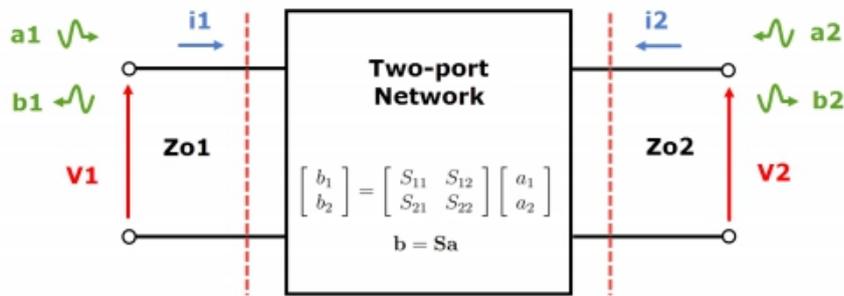


Figura 3.2.1: Parámetros de un sistema de dos puertos[xx]

Los parámetros S se definen en función de un conjunto de ondas para cada puerto. En nuestro caso, esas ondas son los modos. Así, los parámetros S definen la relación entre una onda incidente en el puerto  $j$  y la onda transmitida que sale por el puerto  $i$ . Las ondas incidentes en todos los puertos excepto en el  $j$ -ésimo son cero, lo que implica que esos puertos tienen adaptación de carga para evitar reflexiones[65]:

$$S_{ij} = \left. \frac{b_i}{a_j} \right|_{a_k=0, k \neq j} \quad (3.2.1)$$

Donde  $b_i$  representa el modo transmitido en el puerto  $i$  y  $a_j$  el modo incidente en el puerto  $j$ .

Para un solo modo, la matriz de scattering se define con todos los diferentes parámetros como:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (3.2.2)$$

Así, esta matriz implica que, en este caso,  $S_{11}$  y  $S_{22}$  son los coeficientes de reflexión, mientras que  $S_{12}$  y  $S_{21}$  son los coeficientes de transmisión.

---

El coeficiente de reflexión será así el cociente entre la onda reflejada y la transmitida. De manera análoga, el coeficiente de transmisión será el cociente entre la onda transmitida y la incidente.

En nuestra simulación  $Z_{max}$  se ha definido como puerto de entrada y  $Z_{min}$  como puerto de salida. Según acabamos de ver, la lectura que hay que hacer de los es la siguiente:

-  $S_{Z_{max}(n), Z_{min}(m)}$  será el coeficiente de transmisión, que entra por  $Z_{max}$  con modo  $n$  y sale por  $Z_{min}$  con modo  $m$ .

-  $S_{Z_{min}(n), Z_{min}(m)}$  será el coeficiente de reflexión, que entra por  $Z_{max}$  con modo  $n$  y sale por  $Z_{max}$  con modo  $m$ .

Por otro lado, para saber cuántas veces es mayor la onda transmitida que la incidente, como las gráficas se obtienen en dB, usaremos la fórmula[66]:

$$I(dB) = 20 \log_{10} \left[ \frac{I}{I_0} \right] \quad (2.4.1)$$

Despejando el cociente  $I/I_0$  se podrá conocer la relación entre las intensidades de la onda transmitida y la incidente.

Adicionalmente, de todos los modos que se obtienen en la simulación nos vamos a fijar solo en el primero, que es el modo fundamental  $TM_{0,0}$ . Este modo representa una onda plana que incide sobre la placa y que se propaga o se refleja según el caso. No obstante, como hemos visto en la sub-sección 2.2.2, las discontinuidades de la placa (agujeros) imponen ciertas condiciones de contorno que deben ser cumplidas por los campos EM. Estas nuevas condiciones implican la excitación otros modos, en adición al modo dominante, que es el fundamental. Estos otros modos de frecuencias más altas pueden ser luego evanescentes o propagantes. Así, en la transmisión “ordinaria”, el modo que encontramos, como hemos visto, es el  $TE_{1,1}$ , pero el modo que sale de la estructura es el  $TM_{0,0}$ , esto es, la onda plana que ha incidido inicialmente.

# Capítulo 4

## Resultados

En este capítulo se presentan de manera detallada los resultados obtenidos y analizados según los métodos descritos en el Capítulo 2.

Queremos simular una red periódica. Para ello, se define una celda unidad en el programa, como la que se muestra en la Figura 4.1(b). Después, para esta celda unidad se aplican condiciones que simulen que se repite periódicamente, como muestra la Figura 4.1(a). Para las simulaciones llevadas a cabo, en la celda unidad se han variado los parámetros espesor de la lámina, diámetro del agujero, distancia entre los agujeros y frecuencia.

Vamos a clasificar los resultados según la frecuencia a la que se ha realizado la simulación. Según se ha visto, para frecuencias en el rango óptico, que son en las que apareció por primera vez el fenómeno[2], tenemos lo que se conoce como EOT. Fuera del rango óptico también existe el fenómeno, denominado EET o ET de forma general. En este segundo caso se estudiará el fenómeno para el rango milimétrico, es decir, frecuencias de gigahercios.

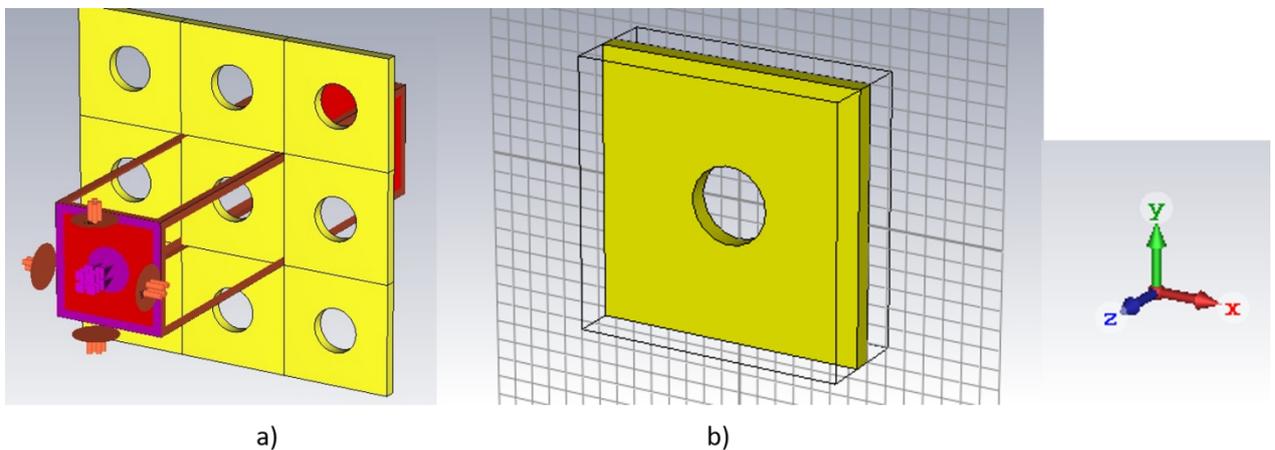


Figura 4.1: (a) Placa periódica con condiciones periódicas. (b) Celda unidad.

### 3.3. Transmisión óptica extraordinaria

Para esta primera simulación se han usado los mismos parámetros que se usaron en el artículo original de Ebbesen[11]. No obstante, se ha usado una simplificación de la lámina, de plata en este caso. En el artículo original la lámina que se usa es algo más compleja, pues se trata de una película de plata de  $0,2\mu\text{m}$  de grosor depositada por evaporación en un sustrato de cuarzo.

La siguiente gráfica es el resultado de la simulación:

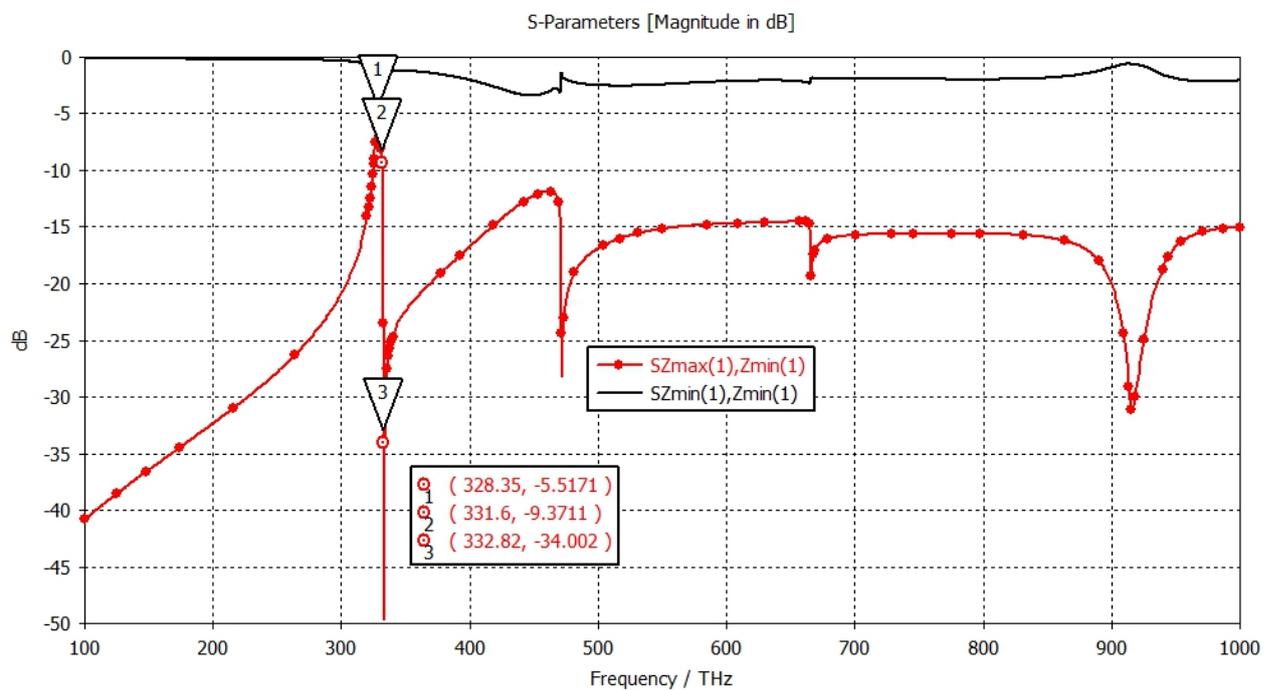


Figura 4.1: Espectro de transmisión para una lámina de periodo  $0,9\mu\text{m}$ , radio  $75\text{nm}$  y grosor  $0,2\mu\text{m}$ .

La primera conclusión que podemos extraer es que, en efecto, la frecuencia a la que se produce la transmisión extraordinaria coincide con la distancia entre dos agujeros, esto es, el periodo. En este caso, como el periodo,  $a_o$ , es de  $0,9\mu\text{m}$ , teóricamente el pico aparecerá a una longitud de onda  $\lambda=a_o$ , que se corresponde con una frecuencia  $f=c/a_o$ . Esto nos da una frecuencia teórica de  $333\text{THz}$ , en buen acuerdo con los resultados de la simulación, para los que aparece a una frecuencia de  $332,82\text{THz}$ . A esta frecuencia observamos también el fuerte bajón que se produce debido a la anomalía de Wood.

La transmisión ordinaria se produciría a una frecuencia que viene dada por la ecuación 2.1.2 de la sub-sección 2.2.2, que estaría en torno a los  $1117\text{THz}$ , por lo que en esta gráfica no se puede apreciar.

El máximo transmitido está sobre -5dB. Despejando en la ecuación 2.4.1, que nos da la relación entre las intensidades incidente y transmitida, tenemos que  $I/I_o=0,56$ .

Como en un rango de frecuencias tan alto el tiempo de computación es muy costoso, la variación de parámetros se realizará en el rango de frecuencias de los GHz. La variación de los parámetros en el rango de frecuencias ópticos produce exactamente los mismos efectos, y está ya exhaustivamente estudiado en la literatura existente.

### 3.4. Transmisión electromagnética extraordinaria

En esta segunda simulación vamos a comprobar lo que se ha expuesto anteriormente, esto es, que el fenómeno de la transmisión extraordinaria también se da fuera del rango óptico. Para ello, se ha simulado en el rango de los gigahercios, para lo que se han usado agujeros del tamaño de los milímetros. También se va a comprobar el efecto de la variación de los distintos parámetros.

Primero, empezamos por comprobar que en efecto fuera del rango óptico existe el fenómeno de la ET. Las siguientes dos gráficas, producto de la simulación, dan prueba de ello:

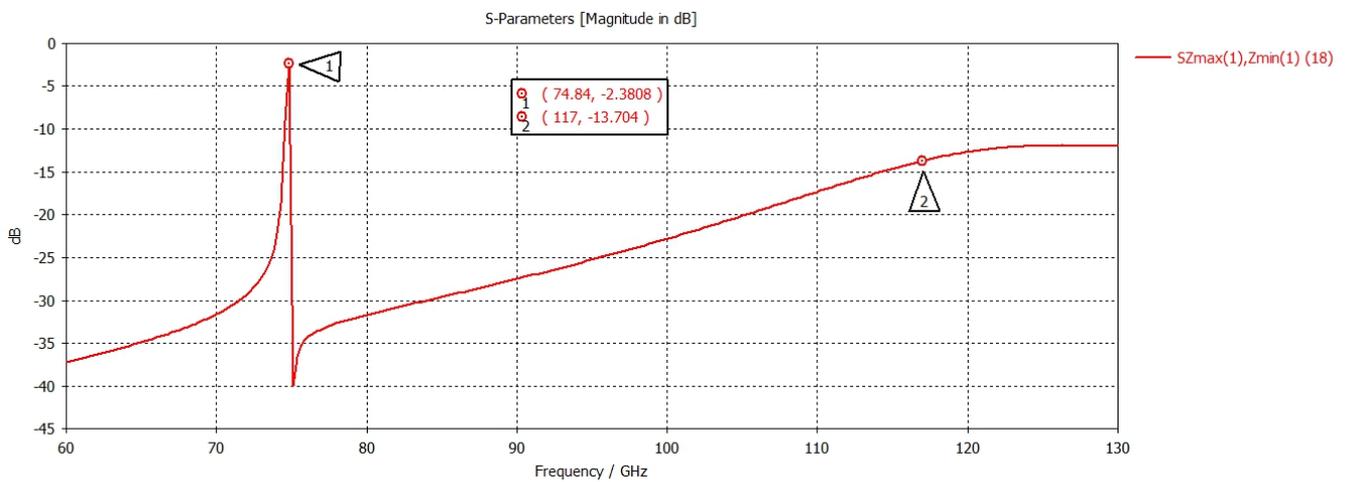


Figura 4.2: Pico de transmisión extraordinaria para una placa de periodo 4mm, radio 0,75mm y 1mm de grosor.

En la Figura 4.2 observamos en primer lugar que el pico de transmisión extraordinaria aparece a 74,8GHz. Teóricamente debería salir a unos 75GHz, por lo que hay muy buena correspondencia. De nuevo, la anomalía de Wood hace su aparición aproximadamente a la misma frecuencia.

De la misma manera, en la Figura 4.3 la transmisión extraordinaria aparece a unos 99GHz, muy cerca de los 100GHz que le corresponden teóricamente según su periodo. Se puede concluir que el pico de transmisión extraordinaria escala de manera exacta con la periodicidad espacial de los agujeros, de modo que aparecen a una longitud de onda de transmisión  $\lambda = a_0$ .

Por otro lado, según la fórmula 2.1.2 de la sub-sección 2.2.2, la transmisión “ordinaria” debe aparecer a una frecuencia de 117GHz en ambos casos, pues el cálculo de esta frecuencia depende únicamente del radio de la GO, y éste es el mismo en ambos casos,  $r = 0,75\text{mm}$ . La etiqueta 2 señala en ambas gráficas el comienzo de esta transmisión “ordinaria”

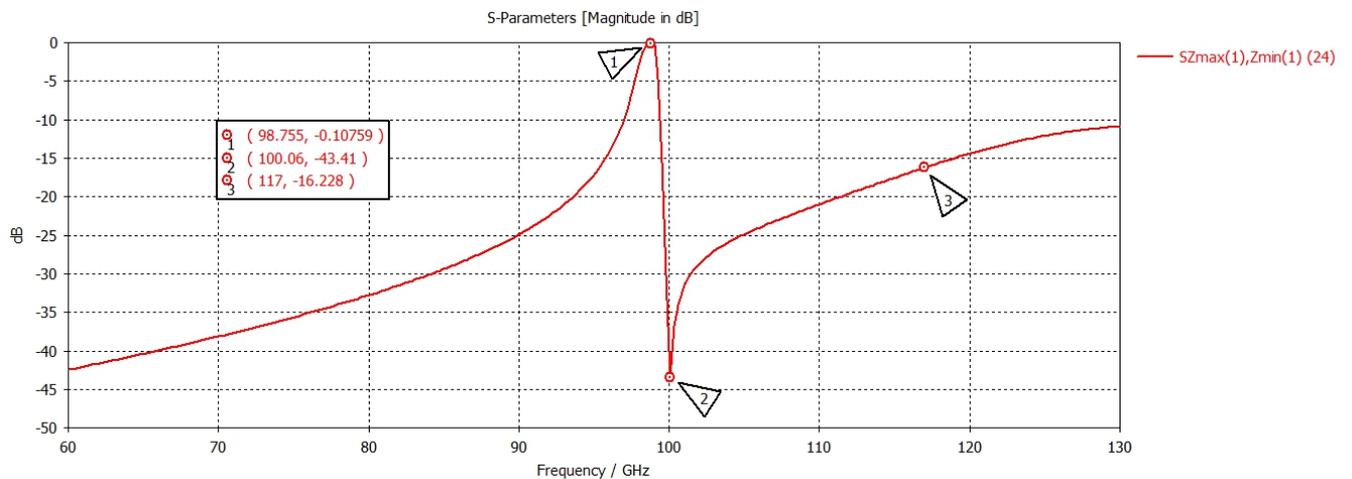


Figura 4.3: Pico de transmisión extraordinaria para una placa de periodo 3mm, radio 0,75mm y 1,5mm de grosor.

### Efecto de la variación del periodo espacial

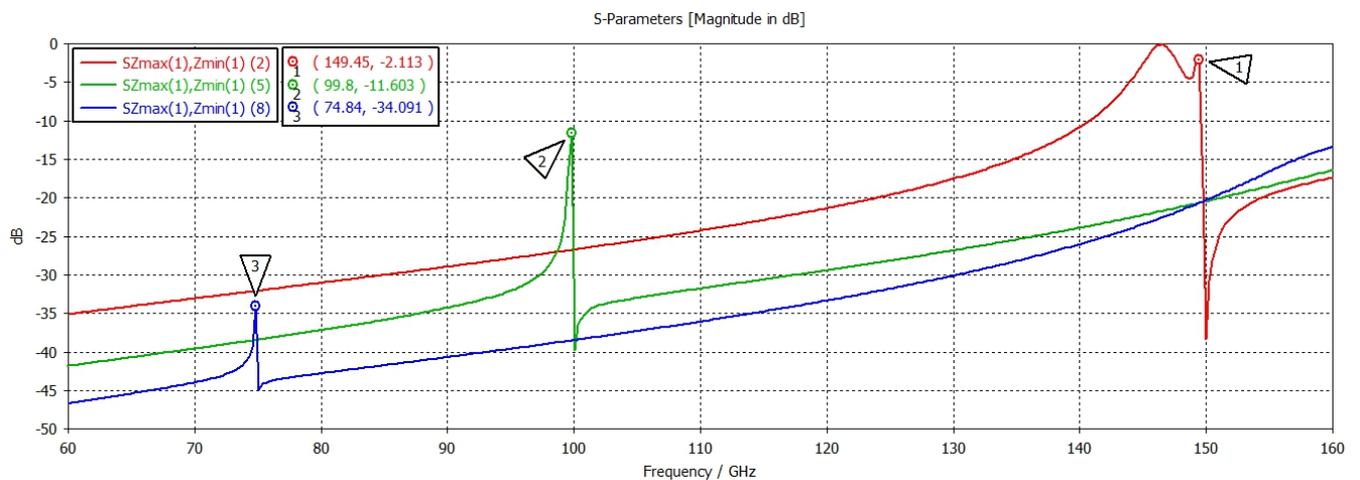


Figura 4.4: Pico de transmisión extraordinaria para una placa de espesor y radio 0,5mm y periodo de 2mm(rojo), 3mm(verde) y 4mm(azul).

Tabla III. Frecuencias teórica y experimental, que dependen del periodo espacial.

Periodo $a_0/\mu\text{m}$	$f_{\text{teórica}}/\text{GHz}$	$f_{\text{experimental}}/\text{GHz}$
2	150	149,5
3	100	99,8
4	75	74,8

Se vuelve a comprobar que el periodo espacial está directamente relacionado con la frecuencia a la que aparece el pico de transmisión, como puede leerse en la tabla.

La Figura 4.5 muestra otro ejemplo del efecto de la variación del periodo espacial de los agujeros. En este caso, el espesor de la lámina y el radio de los agujeros no es igual en todos los casos. Se aprecia que la aparición de los picos de ET aparecen a la una frecuencia que se corresponde con su periodo, según indica la Tabla III. Por ello, se puede concluir entonces que el pico de transmisión depende únicamente del periodo espacial de los agujeros, y es independiente de cualquier otro parámetro.

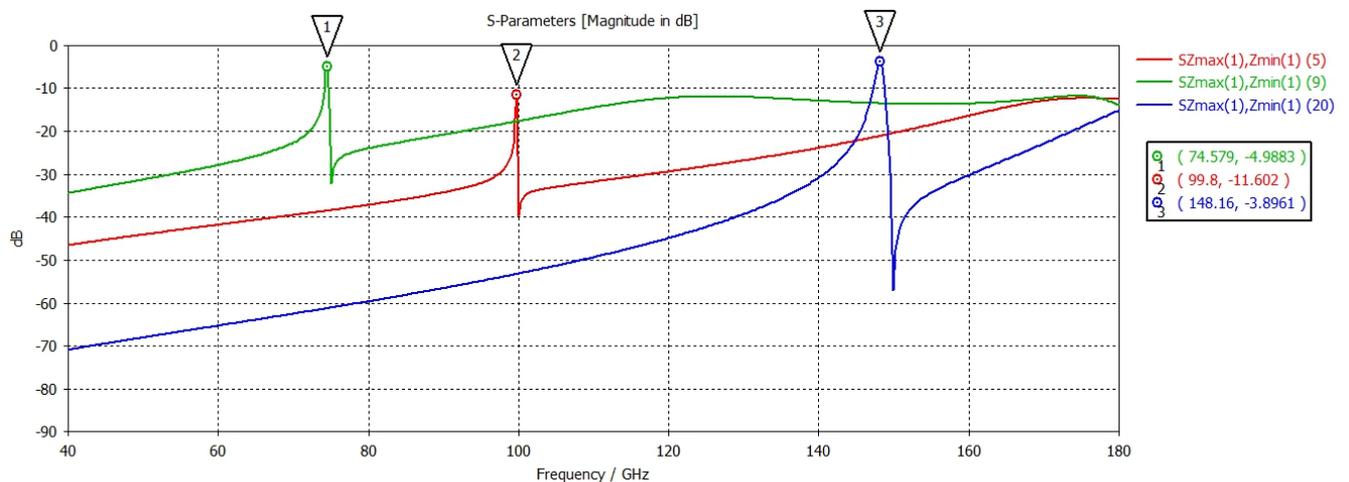


Figura 4.5: Pico de transmisión extraordinaria para una estructura de parámetros (espesor, radio, periodo) en mm: verde(0.75, 0.5, 4), rojo(0.5, 0.5, 3), azul(0.5, 1.5, 2).

## Efecto de la variación del radio de las aperturas

En este caso se comparan placas del mismo espesor (0,5mm) y periodo de 3mm, por lo que sabemos que el pico aparecerá sobre los 100GHz, y se varía el radio de los agujeros. Se comprueba que la anchura del pico de transmisión depende del cociente  $t/d$ , siendo  $t$  el grosor de la placa y  $d$  el diámetro de los agujeros. Para  $t/d=0,25$  (línea azul) se obtiene el pico más ancho, mientras que para  $t/d=0,5$  (línea roja) se obtiene el más estrecho.

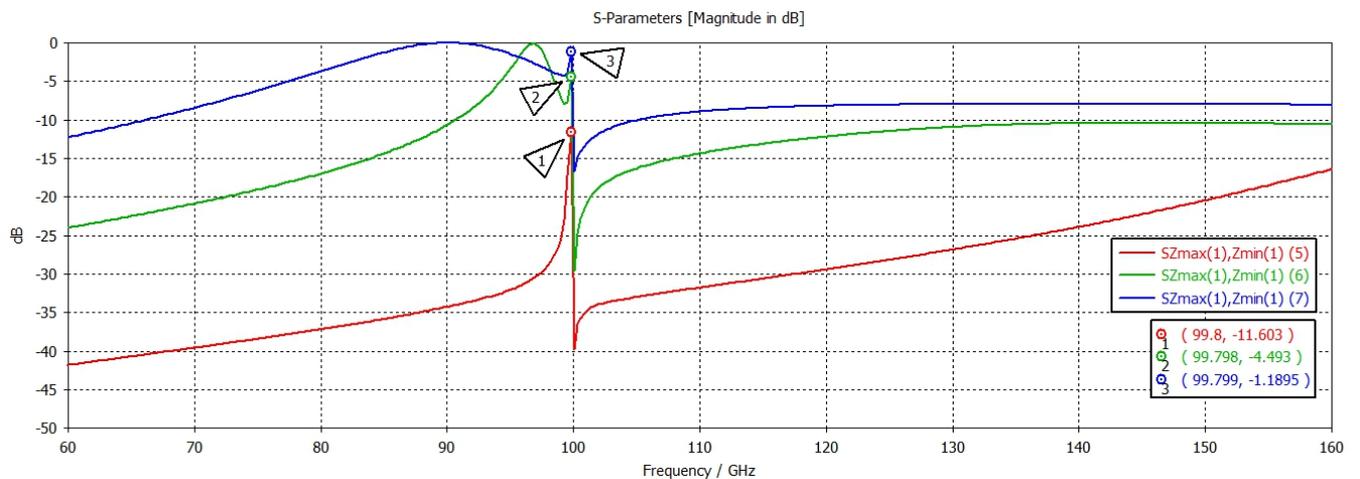


Figura 4.6: Transmisión extraordinaria en una placa de periodo 3mm, radio 0,5mm de grosor y radio 0,5mm(rojo), 0,75mm(verde) y 1mm(azul).

Tabla IV: Relación espesor/diámetro; espesor  $t=0,5mm$

Radio/ $\mu m$	Cociente $t/d$
0,5	0,5
0,75	0,3
1	0,25

## Efecto de la variación del espesor de la placa

Para esta última simulación se ha variado el espesor de las placas, manteniendo fijos los valores del radio en 0,75mm y del periodo en 4mm. El valor del radio afecta a la frecuencia de corte que da lugar a la transmisión “ordinaria”, que vuelve a aparecer sobre los 117GHz. El pico de transmisión extraordinaria está asociado al periodo espacial. Como este periodo es del 4mm, el pico aparecerá a una frecuencia de 75GHz.

Por otra parte, se puede apreciar de nuevo que variar el parámetro espesor afecta únicamente al grosor del pico de ET, que depende del cociente  $t/d$ .

En este caso se presentan las gráficas tanto en escala logarítmica como en escala lineal.

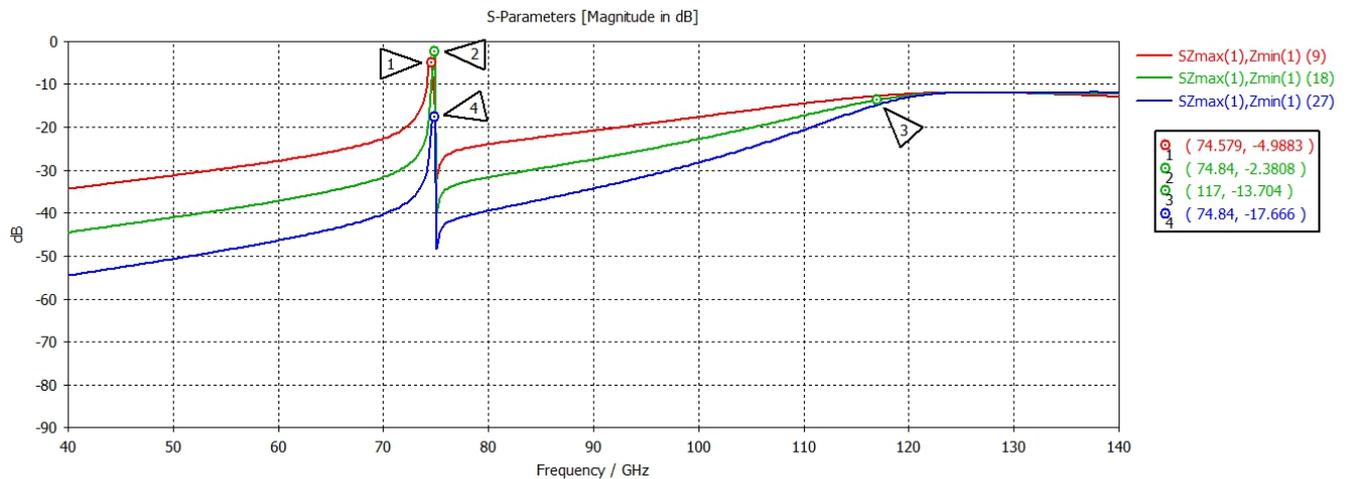


Figura 4.7: Transmisión extraordinaria en una placa de periodo 4mm, radio 0,75mm de radio y grosor 0,5mm(rojo), 1mm(verde) y 1,5mm(azul). Escala logarítmica.

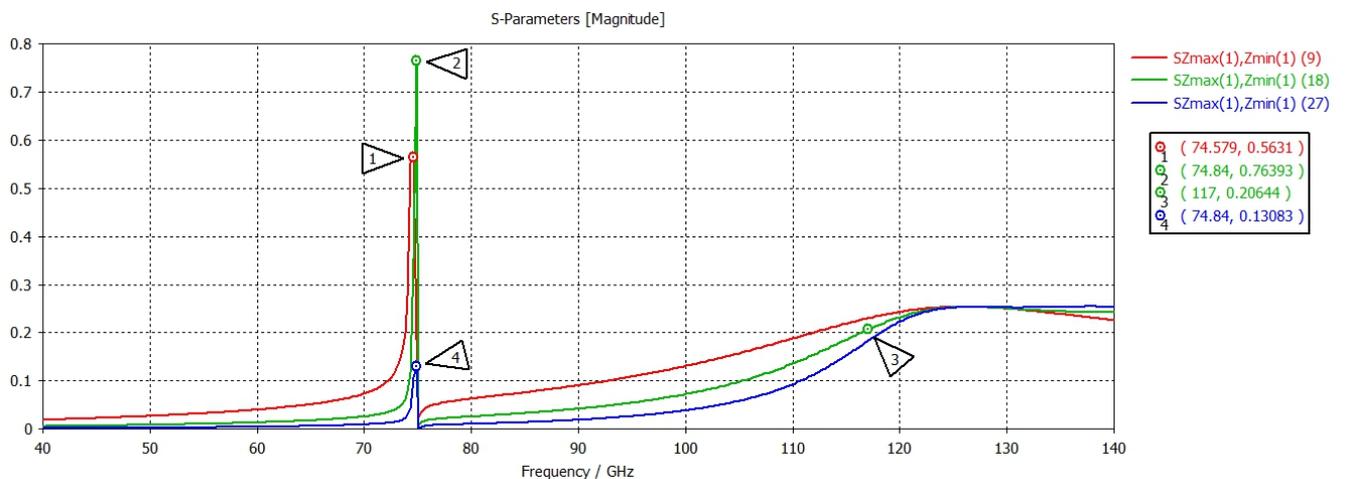


Figura 4.8: EET en escala lineal para una placa con  $a_0=4\text{mm}$ ,  $r=0,75\text{mm}$  y espesor  $t=0,5\text{mm}$  (rojo),  $t=1\text{mm}$ (verde) y  $t=1,5\text{mm}$ (azul).

Puede observarse mejor esta relación entre grosor y diámetro en la Figura 4.9. En ella se muestran los picos de ET simulados para una placa de periodo 3mm y radio de 0,5mm, con espesores de 0,5mm(verde) y 1,5mm(rojo). Se aprecia que el pico verde, con  $t/d=0,5$  está mucho más definido que el pico rojo, con  $t/d=0,17$ . Así, según hemos visto, que el cociente  $t/d$  se aproxime a la unidad implica un pico mucho más definido.

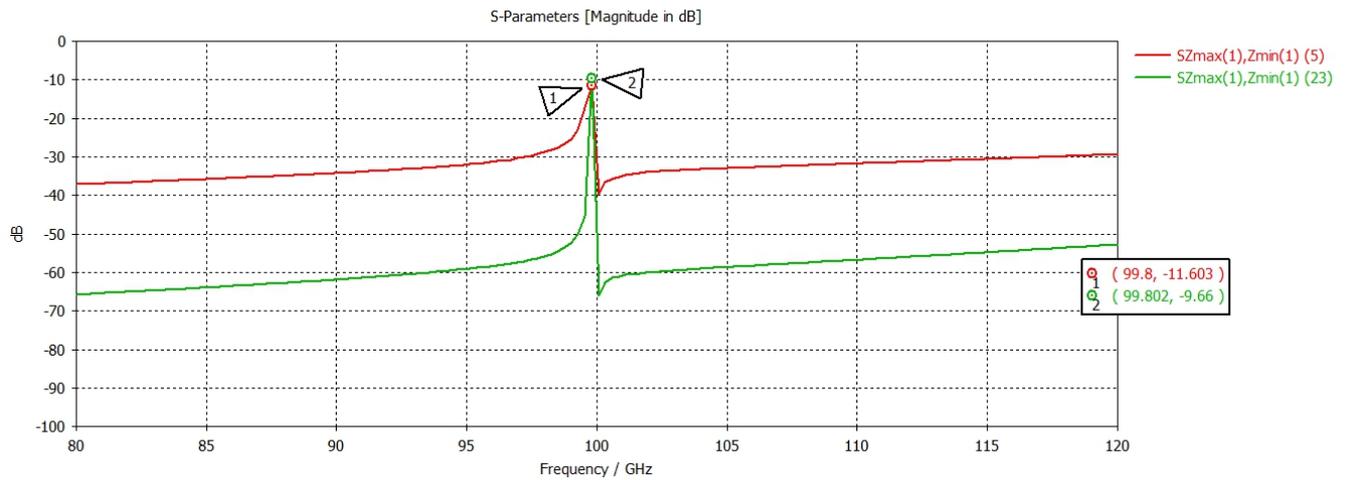


Figura 4.9: Efecto del cociente  $t/d$  en el grosor del pico de la ET.

# Capítulo 5

## Conclusiones

En este trabajo se ha estudiado el fenómeno de la Transmisión Electromagnética Extraordinaria. Este fenómeno ocurre cuando existe una red periódica de agujeros de tamaño sub-lambda, y su principal característica es un pico de transmisión mucho mayor de lo que se esperaría según una teoría clásica para un único agujero. Según la frecuencia a la que se trabaje, el fenómeno puede ser explicado por diferentes teorías.

Cuando se trabaja a frecuencias ópticas se ha visto que aparecen lo que se denominan plasmones, que consiguen “redirigir” la luz a los agujeros y conseguir estas transmisiones más eficientes. No obstante, los plasmones existen bajo ciertas condiciones, pero se ha encontrado ET en situaciones que no cumplen las condiciones para la existencia de plasmones. Por ello, no pueden ser una teoría que explique todo el fenómeno, sino una particularidad que ocurre a frecuencias ópticas. Actualmente se trabaja con modelos de difracción de onda completa, que sí están siendo exitosos a la hora de explicar este fenómeno para otras frecuencias y tipos de láminas, como las dieléctricas. No obstante, la ET también puede explicarse mediante la modelización con circuitos equivalentes, dando resultados satisfactorios para las principales características del fenómeno.

En cuanto a los resultados experimentales obtenidos, podemos resaltar los siguientes puntos:

- La ET se produce a una frecuencia que coincide con la periodicidad espacial de los agujeros. Esto es independiente de cualquier otro parámetro.

- El fenómeno se da fuera del rango óptico. Se ha comprobado su existencia en el rango de los gigahercios.

- La relación entre el grosor de la lámina y el diámetro de los agujeros afecta a la anchura del pico de transmisión extraordinaria, pero no a su posición. Cuanto más cerca esté el cociente *espesor/diámetro* de la unidad, más definido estará el pico de transmisión.

Por otro lado, el estudio de este fenómeno nos abre la puerta a los metamateriales. El descubrimiento de un nuevo material siempre supone una revolución, no solo en la ciencia, sino también en la sociedad. Esto lleva ocurriendo desde el comienzo de la humanidad, y algunos de estos materiales dan nombre a etapas de nuestra historia (como pueden ser la Edad de Piedra, o actualmente, donde se habla de la Edad del Silicio). Como hemos comentado en la introducción, a través de una estructura como la que se necesita para producir transmisión extraordinaria podemos acceder al mundo de los metamateriales. Los más estudiados para estructuras como las que hemos visto son los metamateriales de índice de refracción negativo, que podrían encontrar su aplicación, entre otras cosas, en nanolitografía o superlentes de campo cercano, que podrían ser útiles en aplicaciones biomédicas. También podría encontrarse aplicación, quizás, en la transmisión extraordinaria de otro tipo de ondas, como podrían ser las acústicas. Algún autor ya ha presentado trabajos de esto último, y podría ser muy interesante para nuevos dispositivos auditivos mucho más eficientes. Es un campo que sigue abierto y del que queda mucho por conocer, pero la familiarización con fenómenos tan extraordinarios como este es el primer paso para acercarse a este recién creado mundo.

# Bibliografía

- [1] H. A. Bethe. *Theory of diffraction by small holes.*, Phys. Rev. 66, 163, 1944
- [2] T. H. Ebbesen, H. J. Lezec, H. F. Ghaemi, T. Thio and P. A. Wolff. *Extraordinary optical transmission through sub-wavelength hole arrays.*, 1998.
- [3] Heinz Raether. *Surface Plasmons on Smooth and Rough Surfaces and on Gratings*, Springer-Verlag.
- [4] M. Beruete, M. Sorolla, I. Campillo, J. S. Dolado, L. Martín-Moreno, J. Bravo-Abad and F. J. García-Vidal. *Enhanced millimeter wave transmission through subwavelength hole arrays*, Opt. Lett., vol. 29, no. 21, pp. 2500-2502, Nov. 2004.
- [5] M. Beruete, M. Sorolla, I. Campillo, J. S. Dolado, L. Martín-Moreno, J. Bravo-Abad and F. J. García-Vidal. *Enhanced millimeter wave transmission through quasi-optical subwavelength perforated plates*, IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 53, no. 6, pp. 1897-1903, Jun. 2005.
- [6] V. M. Shalaev. *Optical negative-index metamaterials*, Nature Photon., vol. 1, pp. 41-48, 2006.
- [7] M. Navarro, M. Beruete, F. Falcone, M. Sorolla, I. Campillo. *Comportamiento de propagación electromagnética en apilamientos con agujeros sublambda y agujeros propagantes.*
- [8] M. Navarro-Cía, M. Beruete, M. Sorolla, I. Campillo. *Lentes metálicas basadas en el fenómeno de transmisión extraordinaria para conseguir índices de refracción negativos.*
- [9] J. B. Pendry. *Negative Refraction Makes a Perfect Lens*, Phys. Rev. Lett. 85, 3966, Published 30 October 2000.
- [10] Max Born, Emil Wolf. *Principles of Optics*, 1980.
- [11] Francesco Maria Grimaldi. *Physico-mathesis de lumine, coloribus, et iride.*, 1665.

- 
- [12] H. Boersch. *Handbuch der Physik.*, edited by S. Flügge, Springer-Verlag.
- [13] *Printed in Fresnel.*, 1866–70, vol. 1, pp. 171–81.
- [14] Chr. Huygens. *Traité de la Lumière.*, 1678.
- [15] Eugene Hecht. *Optics*, Pearson Education, ISBN 9780133977226, 2017.
- [16] Imagen de PSSC Physics, Cengage Learning, D. C. Heath, Boston, 1960.
- [17] C. F. Meyer. *The Diffraction of Light, X-rays, and Material Particles.*, Chicago, The University Press, 1934.
- [18] A. Sommerfeld, *Partielle Differentialgleichungen der Physik*, 1947.
- [19] G. Kirchhoff, *Zur Theorie der Lichtstrahlen*, Annalen der Physik, vol. 254, issue 4, pp. 663-659, DOI: 10.1002/andp.18832540409, 1883.
- [20] M. Beruete, *Chapter 2: Extraordinary Transmission Through Perforated Metallic Plates*.
- [21] H. J. Lezec and T. Thio. *Diffraction evanescent wave model for enhanced and suppressed optical transmission through subwavelength hole arrays*, Opt. Exp., vol. 12, no. 16, pp. 3629-3651, Aug. 2004.
- [22] P. B. Catrysse and S. Fan. *Near complete transmission through subwavelength hole arrays in phonon-polaritonic thin films*, Phys. Rev. B, Condens. Matter, vol. 75, 2007, ID 075422-1.
- [23] Jenkins & White, section 15.1, p. 288, 1957.
- [24] F. W. Sears, *Optics*, pp. 248-249, Addison-Wesley, 1948.
- [25] Imagen de Fraunhofer y Fresnel, basadas en *Fundamentals of Waves and Oscillations*, K. U. Ingard, Cambridge University Press, 1988.
- [26] G. B. Airy, *On the Diffraction of an Object-glass with Circular Aperture*, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 5, pp. 283–291, 1835.
- [27] Imagen de difracción de Fraunhofer por una apertura circular de R. G. Wilson, Illinois Wesleyan University.
- [28] F. W. Sears, *Optics*, third edition, pp. 250-26, Addison-Wesley.
- [29] <https://physics.stackexchange.com/q/141713>, consultada el 15/02/21.
- [30] Rodolfo Neri Vela. *Líneas de transmisión*, 2013.
- [31] [https://www.atmmicrowave.com/wpcontent/uploads/atm\\_std\\_cvr\\_flg\\_-\\_tabulated.pdf](https://www.atmmicrowave.com/wpcontent/uploads/atm_std_cvr_flg_-_tabulated.pdf), consultado el 15/04/21.
-

- 
- [32] William Stallings. *Wireless Communications and Networks*. Prentice Hall Professional Technical Reference, 2005. 2nd edition.
- [33] G. N. Watson. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, 1922.
- [34] J. Gómez Rivas, C. Schotsch, P. Haring Bolivar and H. Kurz, *Enhanced transmission of THz radiation through subwavelength holes*, Phys. Rev. B, 68, 201306(R), 2003.
- [35] R.W. Wood, *On a remarkable case of uneven distribution of light in a diffraction grating spectrum*, Philos. Mag. **4**, 396–402 (1902).
- [36] Stefan Alexander Maier, *Plasmonics. Fundamentals and Applications*, Springer, 2007.
- [37] F.J.G.d. Abajo, R. Gómez-Medina, and J.J. Sáenz, *Full transmission through perfect-conductor subwavelength hole arrays*, Phys. Rev. E, Stat. Phys. Plasma Fluids Relat., vol. 72, 2005, Article ID 016608-1.
- [38] J. Bravo-Abad, L. Martín-Moreno, and F.J. García-Vidal, *Resonant transmission of light through subwavelength holes in thick metal films*, IEEE J. Sel. Topics Quantum Electron., vol. 12, no. 6, pp. 1221-1227, Nov.-Dec. 2006.
- [39] Z. Y. Fan; L. Zhan; X. Hu; Y. X. Xia, *Critical process of extraordinary optical transmission through periodic subwavelength hole array: Hole-assisted evanescent-field coupling*, Optics Communications. **281**(21): 5467–5471, 2008.
- [40] F. Medina, F. Mesa and R. Marqués. *Extraordinary transmission through arrays of electrically small holes from a circuit theory perspective*, IEEE, 0018-9480, 2008.
- [41] H. F. Ghaemi, T. Thio, T. H. Ebbesen, H. J. Lezec and D. E. Grupp. *Surface plasmons enhance optical transmission through subwavelength holes*, Phys. Rev. B, vol. 58, no. 15, pp. 6779-6782, Sep. 1998.
- [42] D. E. Grupp, H. J. Lezec, T. H. Ebbesen, K. M. Pellerin and T. Thio. *Crucial role of metal surface in enhanced transmission through subwavelength apertures*, Appl. Phys. Lett., vol. 77, pp. 1569-1571, Sep. 2000.
- [43] H. Liu, P. Lalanne. *Microscopic theory of the extraordinary optical transmission*, Nature, 452 (7188): pp. 728-731, 2008.
- [44] David Pines, David Bohm, *A Collective Description of Electron Interactions: II. Collective vs Individual Particle Aspects of the Interactions*, Physical Review. **85** (2): 338–353, 15 January 1952.
-

- 
- [45] David Bohm, David Pines, *Coulomb Interactions in a Degenerate Electron Gas*, Phys. Rev. A Collective Description of Electron Interactions: III. **92** (3): 609–625, 1 November 1953.
- [46] Matias Ruiz, *Mathematical analysis of plasmonics resonances for nanoparticles and applications*, Plasmas. Université Paris sciences et lettres, 2017. English. NNT : 2017PSLEE054. tel-01827839.
- [47] Carsten Sönnichsen, *Plasmons in metal nanostructures*, Dissertation der Fakultät für Physik der Ludwig-Maximilians-Universität München, Jun. 2001.
- [48] Ritchie, R. H., *Plasma Losses by Fast Electrons in Thin Films*, Physical Review, **106** (5): 874–881, Jun. 1957.
- [49] Kristin Lewotsky, *The Promise of Plasmonics*, SPIE Professional, doi:10.1117/2.4200707.07, 2007.
- [50] Heip, H. M.; et al., *A localized surface plasmon resonance based immunosensor for the detection of casein in milk*, Science and Technology of Advanced Materials. **8** (4): 331–338, 2007.
- [51] F. J. García Vidal, L. M. Moreno, *Plasmones superficiales*, revista Investigación y Ciencia, pp. 66-76, oct. 2008.
- [52] Raether, Heinz, *Surface Plasmons on Smooth and Rough Surfaces and on Gratings*, Springer. p. 119. ISBN 978-3540173632, 1988.
- [53] L. Martín-Moreno, F. J. García-Vidal, H. J. Lezec, K. M. Pellerin, T. Thio, J. B. Pendry and T. H. Ebbesen. *Theory of extraordinary optical transmission through subwavelength hole arrays*, Phys. Rev. Lett., vol. 86, pp. 1114-1117, Feb. 2001.
- [54] R. Ulrich; M. Tacke, *Submillimeter waveguiding on periodic metal structure*, Appl. Phys. Lett, **22** (5): 251–253, 1972.
- [55] J. B. Pendry; L. Martín-Moreno; F. J. García-Vidal, *Mimicking surface plasmons with structured surfaces*, Science, **305** (5685): 847–848, 2004.
- [56] F. J. Garcia de Abajo and J. J. Saenz, *Electromagnetic surface modes in structured perfect-conductor surfaces*, Phys. Rev. Lett. **95** (23): 233901, 2005.
- [57] *The L'Oréal Art & Science of Color Prize - 7<sup>th</sup> Prize Winners*.
- [58] B. Ung; Y. Sheng, *Optical surface waves over metallo-dielectric nanostructures: Sommerfeld integrals revisited*, Optics Express, **16** (12): 9073–9086, 2008.
-

- [59] M. W. Maqsood; R. Mehfuz; K. J. Chau, *High-throughput diffraction-assisted surface-plasmon-polariton coupling by a super-wavelength slit*, Optics Express, **18** (21): 21669–21677, 2010.
- [60] J. A. Porto, F. J. García-Vidal, J. B. Pendry, *Transmission resonances on metallic gratings with very narrow slits*, Phys. Rev. Lett., vol. 83, no. 14, pp. 2845-2848, OCT. 1999.
- [61] M. M. J. Treacy, *Dynamical diffraction explanation of the anomalous transmission of light through metallic gratings*, Phys. Rev. B, Condens. Matter, vol. 66, 2002.
- [62] J. D. Kraus, *Electromagnetics*, p.639.
- [63] Richard Collier, *Transmission Lines*, University of Cambridge, ISBN: 9781107026001
- [64] G. Floquet, *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, **12**: 47-48, doi:10.24033/asens.220, 1883.
- [65] Robert E. Collin, *Guided Waves*, Second Edition, IEE Press, 1990.
- [66] Alexander, Charles K., O. Sadiku, Matthew N., *Fundamentos de circuitos eléctricos* (Quinta edición). México: McGraw-Hill. pp. 531-532, 2013.

# Capítulo A

## Anexos

### A.1. Guía de ondas circular

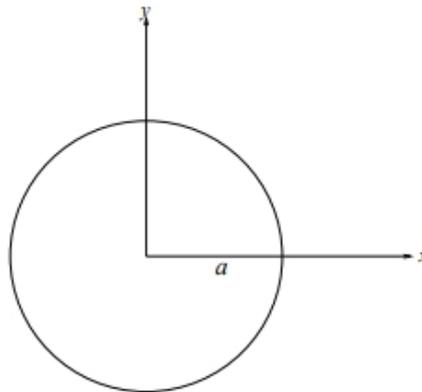


Figura A.1.1: Guía de ondas circular de radio  $a$ .

Para una GO circular de radio  $a$  (Figura A.1.1), la simetría del problema hace que podamos expresar en coordenadas cilíndricas las componentes transversales del campo en términos de las componentes longitudinales (i.e  $E_z, H_z$ ). En coordenadas cilíndricas, el campo transversal es

$$\begin{aligned}\bar{E}_T &= \hat{\rho}E_\rho + \hat{\phi}E_\phi \\ \bar{H}_T &= \hat{\rho}H_\rho + \hat{\phi}H_\phi\end{aligned}\tag{A.1.1}$$

Usando éstas en las ecuaciones de Maxwell (donde el rotacional se aplica en coordenadas cilíndricas), y suponiendo que la propagación es de una onda plana en la dirección  $e^{-j\beta z}$ , se llega a

$$\begin{aligned}
H_\rho &= \frac{j}{k_c^2} \left( \frac{\omega \varepsilon}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \\
H_\varphi &= \frac{-j}{k_c^2} \left( \omega \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial \rho} - \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right) \\
E_\rho &= \frac{-j}{k_c^2} \left( \beta \frac{\partial E_z}{\partial \rho} - \frac{\omega \mu}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right) \\
E_\varphi &= \frac{j}{k_c^2} \left( \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right)
\end{aligned} \tag{A.1.2}$$

Donde  $k_c^2 = k^2 - \beta^2$  es la constante de corte,  $\beta = 2\pi/\lambda_g$  es la constante de propagación o de fase en la guía, y  $k = 2\pi/\lambda_0$  el número de ondas en el medio libre. Los valores que toma  $k_c$  vienen impuestos por las condiciones de contorno de cada tipo de guía de onda. En el caso de una guía metálica hueca,  $k_c^2 > 0$  y toma valores cuantizados. Se pueden asociar a  $k_c$  una “longitud de onda de corte” o una “frecuencia de corte”, obteniendo así, respectivamente,  $k_c = 2\pi/\lambda_c$  o  $k_c = \omega_c \sqrt{\varepsilon \mu}$ . Usando esta última expresión podemos escribir  $\beta^2 = \varepsilon \mu (\omega^2 - \omega_c^2)$ , de modo que si  $\omega < \omega_c$ , entonces  $\beta^2 < 0$  y la onda será no propagante (evanescente).

## Modos TE

Para obtener los modos TE, se debe resolver la ecuación de Helmholtz (ecuación A.1.3) para el campo longitudinal, donde el Laplaciano habrá que calcularlo en coordenadas cilíndricas. Así, la ecuación de ondas para  $H_z$  es

$$(\nabla^2 + k^2)H_z = 0 \tag{A.1.3}$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) H_z(\rho, \varphi, z) = 0 \tag{A.1.4}$$

Usando el método de separación de variables, tomamos  $H_z(\rho, \varphi, z) = R(\rho)P(\varphi)e^{-j\beta z}$ , y se obtiene

$$\left[ R''P + \frac{1}{\rho} R'P + \frac{1}{\rho^2} RP'' + (k^2 - \beta^2)RP \right] e^{-j\beta z} = 0 \tag{A.1.5}$$

Multiplicando por un factor común da lugar a

$$\rho^2 \frac{R''}{R} + \rho \frac{R'}{R} + \rho^2 k_c^2 + \frac{P''}{P} = 0 \tag{A.1.6}$$

Observamos que los dos primeros términos son únicamente función de  $\rho$ , y el tercer término es función de  $\varphi$ .

Porque la suma de los términos de esta ecuación es una constante, y cada uno depende de una sola coordenada, cada término debe ser constante:

$$\frac{P''}{P} = -k_\phi^2 \rightarrow P'' + k_\phi^2 P = 0 \quad (\text{A.1.7})$$

De modo que

$$P(\phi) = A_0 \text{sen}(k_\phi \phi) + B_0 \cos(k_\phi \phi) \quad (\text{A.1.8})$$

Usando este resultado en (A.1.6) nos lleva a

$$\rho^2 \frac{R''}{R} + \rho \frac{R'}{R} + (\rho^2 k_c^2 - k_\phi^2) = 0 \quad (\text{A.1.9})$$

O

$$\boxed{\rho^2 R'' + \rho R' + (\rho^2 k_c^2 - k_\phi^2) R = 0} \quad (\text{A.1.10})$$

Este último resultado se conoce como *Ecuación Diferencial de Bessel*. La solución a dicha ecuación es

$$R(\rho) = C_0 J_{k_\phi}(k_c \rho) + D_0 N_{k_\phi}(k_c \rho) \quad (\text{A.1.11})$$

Donde  $J_\nu(x)$  es la función de Bessel de primer tipo de orden  $\nu$  y  $N_\nu(x)$  es la función de Bessel de segundo tipo de orden  $\nu$ .

1. Primero, examinemos  $k_\phi$ .

$$H_z(\rho, \phi, z) = [C_0 J_{k_\phi}(k_c \rho) + D_0 N_{k_\phi}(k_c \rho)] [A_0 \text{sen}(k_\phi \phi) + B_0 \cos(k_\phi \phi)] e^{-j\beta z} \quad (\text{A.1.12})$$

Observamos que  $H_z(\rho, \phi, z) = H_z(\rho, \phi + 2\pi l, z)$  donde  $l$  es un entero. Esto solo puede ser cierto si  $k_\phi = \nu$ , donde  $\nu$  es un entero.

$$H_z(\rho, \phi, z) = [C_0 J_\nu(k_c \rho) + D_0 N_\nu(k_c \rho)] [A_0 \text{sen}(\nu \phi) + B_0 \cos(\nu \phi)] e^{-j\beta z} \quad (\text{A.1.13})$$

2. Resulta que  $N_\nu(k_c \rho) \rightarrow \text{inf}$  cuando  $\rho \rightarrow 0$ . Claramente,  $\rho = 0$  está en el dominio de la GO. Físicamente, sin embargo, no podemos tener una intensidad infinita de campo en este punto. Esto nos lleva a concluir que  $D_0 = 0$ . Así, tenemos

$$H_z(\rho, \phi, z) = [A \text{sen}(\nu \phi) + B \cos(\nu \phi)] J_\nu(k_c \rho) e^{-j\beta z} \quad (\text{A.1.14})$$

3. Los valores relativos de  $A$  y  $B$  están relacionados con el sistema coordinado absoluto que hemos usado para definir la GO. Por ejemplo, sea  $A=F\cos(v\varphi_0)$  y  $B=-F\sin(v\varphi_0)$  (se puede encontrar un valor de  $F$  y  $\varphi_0$  para que esto funcione). Entonces

$$A\sin(v\varphi) + B\cos(v\varphi) = F\sin[v(\varphi - \varphi_0)] \quad (\text{A.1.15})$$

El valor de  $\varphi_0$  que hace que esto funcione puede pensarse como la referencia de coordenadas para medir  $\varphi$ .

Así, nos queda encontrar  $F$ , que es simplemente la amplitud del modo y se determina por lo tanto por la excitación.

4. Aún queda por determinar  $k_c$ . La condición de contorno que podemos aplicar es  $E_\varphi(a, \varphi, z)=0$ , donde  $\rho=a$  representa el contorno de la guía. Como

$$E_\varphi(\rho, \varphi, z) = \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = \frac{j\omega\mu}{k_c^2} [A\sin(v\varphi) + B\cos(v\varphi)] k_c J'_v(k_c \rho) e^{-j\beta z} \quad (\text{A.1.16})$$

Donde

$$J'_v(x) = \frac{d}{dx} J_v(x) \quad (\text{A.1.17})$$

Nuestra condición de contorno indica que  $J'_v(k_c a)=0$ . Así

$$k_c a = p'_{vn} \rightarrow k_c = \frac{p'_{vn}}{a} \quad (\text{A.1.18})$$

Donde  $p'_{vn}$  es el  $n$ -ésimo cero de  $J'_v$ . Debajo está una tabla de unos pocos ceros de  $J'_v(x)$ :

$J'_v(k_c a)=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$v=0$	0,0000	3,8317	7,0156
$v=1$	1,8412	5,3314	8,5363
$v=2$	3,0542	6,7061	9,9695

5. Ya hemos definido  $k_c^2 = k^2 - \beta^2$ , de modo que

$$\beta^2 = k^2 - \left( \frac{p'_{vm}}{a} \right)^2 \quad (\text{A.1.19})$$

Notemos que no hay término “ $\varphi$ ” aquí. Sin embargo, la variación  $\varphi$  de los campos en la GO influencia a  $\beta$ .

6. Frecuencia de corte ( $\beta=0$ ): Como  $k=k_c=2\pi f_{c,vm}/c$  en la frecuencia de corte,

$$f_{c,vm} = \frac{c}{2\pi} \frac{p'_{vm}}{a} \quad (\text{A.1.20})$$

7. Modo dominante: No contamos el  $v=0$ , modo  $n=1$  ( $\text{TE}_{01}$ ) pues  $p'_{01}=0$  da campos nulos. El modo TE dominante es por lo tanto el modo con el valor no nulo más pequeño de  $p'_{vm}$ , que es el modo  $\text{TE}_{11}$ .

## Modos TM

La derivación es la misma excepto que resolvemos para  $E_z$ . Así, podemos escribir:

$$E_z(\rho, \varphi, z) = [A \sin(v\varphi) + B \cos(v\varphi)] J_v(k_c \rho) e^{-j\beta z} \quad (\text{A.1.21})$$

Nuestra condición de contorno en este caso es  $E_z(a, \varphi, z)=0$  o  $J_v(k_c a)=0$ . Esto nos lleva a

$$k_c a = p_{vm} \rightarrow k_c = \frac{p_{vm}}{a} \quad (\text{A.1.21})$$

Donde  $p_{vm}$  es el  $n$ -ésimo cero de  $J_v(x)$ .

$J_v(k_c a)=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$v=0$	2,4048	5,5201	8,6537
$v=1$	3,8317	7,0156	10,1735
$v=2$	5,1356	8,4172	11,6198

En este caso, tenemos

$$\beta^2 = k^2 - \left( \frac{p_{vm}}{a} \right)^2 \quad (\text{A.1.22})$$

$$f_{c,vm} = \frac{c}{2\pi} \frac{p_{vm}}{a} \quad (\text{A.1.23})$$

Es claro que el modo TE<sub>11</sub> es el dominante de la GO.

## Funciones de Bessel

Aquí aparecen algunas propiedades básicas de las funciones de Bessel:

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n+\nu}}{n!(n+\nu)!} \quad (\text{A.1.24})$$

$$N_\nu(x) = \lim_{p \rightarrow \nu} \frac{J_p(x) \cos(p\pi) - J_{-p}(x)}{\text{sen}(p\pi)} \quad (\text{A.1.25})$$

$$J_\nu(-x) = (-1)^\nu J_\nu(x), \nu \text{ es un entero} \quad (\text{A.1.26})$$

$$J_\nu(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \pi/4 - \nu\pi/2), x \rightarrow \infty \quad (\text{A.1.27})$$

$$N_\nu(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \text{sen}(x - \pi/4 - \nu\pi/2), x \rightarrow \infty \quad (\text{A.1.27})$$

$$\frac{d}{dx} Z_\nu(x) = Z_{\nu-1}(x) / x \quad (\text{A.1.29})$$

Donde Z es cualquier función de Bessel. Las Figuras A.1.2 y A.1.3 muestran funciones de Bessel de primer y segundo tipo de órdenes 0, 1, 2, 3.

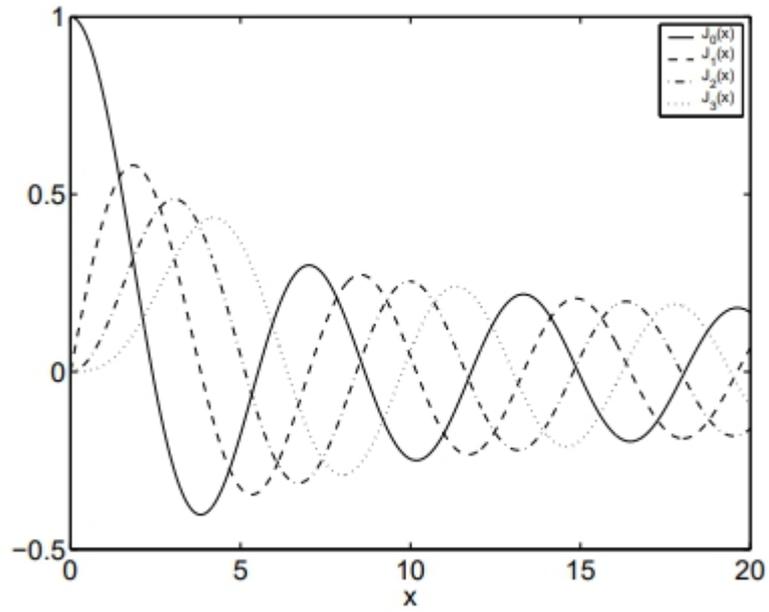


Figura A.1.2: Funciones de Bessel de primer tipo

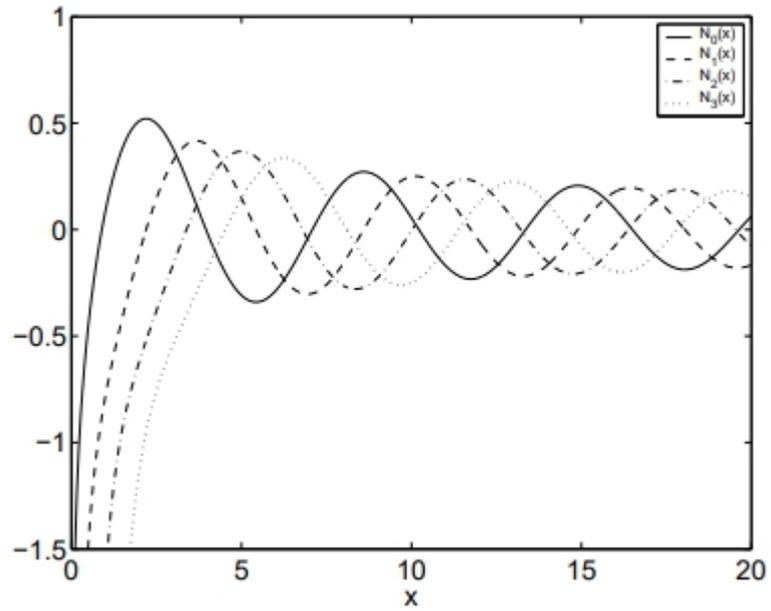


Figura A.1.3: Funciones de Bessel de segundo tipo

## A.2. Plasmones

Siguiendo el análisis descrito en [20], partimos de considerando una onda TM en la interfaz entre un dieléctrico estándar, como el aire ( $\epsilon_0$ ), y un metal a una frecuencia óptica, donde  $\text{Re}(\epsilon_1) < 0$ . La Figura A.2.1 muestra un esquema de la situación a considerar.

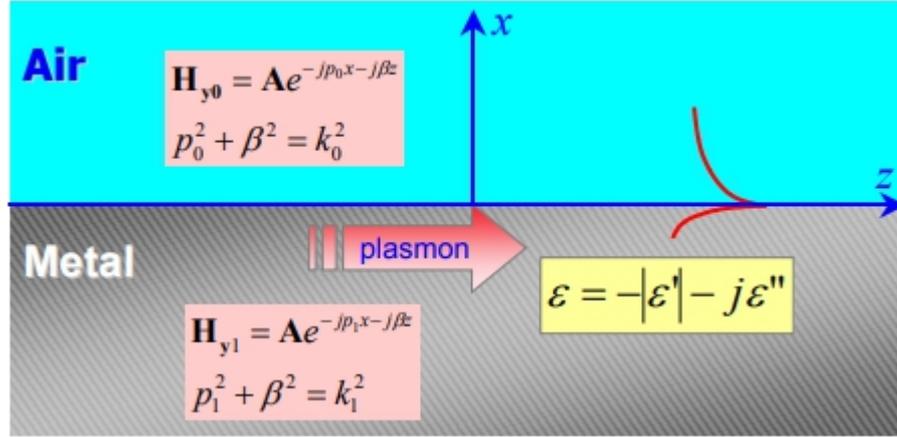


Figura A.2.1: Esquema de una onda propagándose en la interfaz aire-metal a frecuencias ópticas ( $\text{Re}(\epsilon_1) < 0$ ). [20]

La onda en el aire ( $x > 0$ ) puede expresarse como

$$H_{y0} = A e^{-j p_0 x} e^{-j \beta z} \quad (\text{A.2.1})$$

Donde  $p_0^2 + \beta^2 = k_0^2$ . En el metal ( $x < 0$ ) el campo magnético es

$$H_{y1} = A e^{-j p_1 x} e^{-j \beta z} \quad (\text{A.2.2})$$

Donde  $p_1^2 + \beta^2 = k_1^2$ . La continuidad de  $H_y$  en la interfaz ( $x=0$ ) implica que

$$\beta_1 = \beta \quad (\text{A.2.3})$$

De  $H_y$  las componentes del campo eléctrico se obtienen rápidamente haciendo uso de las ecuaciones de Maxwell. En particular la componente z toma la forma

$$E_{z0} = -\frac{H_{y0}}{\omega \epsilon_0} p_0 \quad (\text{A.2.4})$$

$$E_{z1} = -\frac{H_{y1}}{\omega \epsilon_0 \epsilon_1} p_1 \quad (\text{A.2.5})$$

Aplicando la continuidad de la componente tangencial del campo eléctrico en la interfaz ( $x=0$ ) se obtiene

$$p_1 = \epsilon_1 p_0 \quad (\text{A.2.6})$$

Operando se llega a

$$\beta = k_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{1 + \varepsilon_1}} \quad (\text{A.2.7})$$

$$p_0 = \frac{k_0}{\sqrt{1 + \varepsilon_1}} \quad (\text{A.2.8})$$

$$p_1 = \frac{\varepsilon_1 k_0}{\sqrt{1 + \varepsilon_1}} \quad (\text{A.2.9})$$

Despreciando las pérdidas y a una frecuencia de trabajo por debajo de la del plasma, la permitividad dieléctrica es puramente real y negativa ( $\varepsilon_1 = -|\varepsilon_1|$ ) y las relaciones anteriores pasan a ser

$$\beta = k_0 \sqrt{\frac{|\varepsilon_1|}{1 + |\varepsilon_1|}} \quad (\text{A.2.10})$$

$$p_0 = \frac{k_0}{\sqrt{1 + |\varepsilon_1|}} = j\alpha_0 \quad (\text{A.2.11})$$

$$p_1 = \frac{-|\varepsilon_1| k_0}{\sqrt{1 - |\varepsilon_1|}} = -j\alpha_1 \quad (\text{A.2.12})$$

Así, si las pérdidas son bajas ( $\varepsilon'' \ll |\varepsilon_1|$ ) entonces la onda es esencialmente propagante en z y evanescente en x. Estas ondas se llaman *plasmones* y pueden existir en la interfaz de dos medios cuya permitividad cambia de signo.

Para el caso particular en el que  $|\varepsilon_1| > 1$ , se obtiene una onda propagante en la dirección z (en la interfaz) y una evanescente (de la interfaz al medio respectivo) en la dirección x. Este tipo de onda es una onda de plasma. Cuando se tienen en cuenta las pérdidas ( $\varepsilon'' > 0$ ) la onda resultante tiene valores complejos de  $p_0$ ,  $p_1$  y  $\beta$ , i.e tiene componentes propagante y evanescente en las direcciones x y z.