

Fluctuaciones Cuánticas de Vacío alrededor de Kinks

Trabajo Fin de Grado

15 de Julio de 2021

Autor:
PABLO MERINO SAN JOSÉ

Dirigido por:
M. A. del Olmo y J. M. Muñoz Castañeda



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

Departamento de Física Teórica, Atómica y Óptica

Índice general

Introducción	3
Unidades y dimensiones	6
1. Formulación clásica de la teoría de kinks	7
1.1. Primeras nociones de la teoría de kinks	7
1.2. Variedad de vacío y evolución temporal	13
1.2.1. Evolución temporal	14
1.3. Defectos topológicos	16
1.4. La topología de \mathcal{D}	19
1.4.1. Componentes conexas de \mathcal{D} y su grupo de homotopía	19
1.5. Soluciones kink. Enfoque topológico	21
1.6. Estructura de vacío	24
1.7. Identificación del kink como partícula	25
1.8. Estabilidad de las soluciones kink	27
1.9. Teorema de Derrick	29
2. Energías clásicas. Modelos ϕ^4 y sine-Gordon	31
2.1. Ecuaciones de Bogomolny de primer orden	31
2.2. Equivalente mecánico	33
2.3. Kinks del modelo ϕ^4	34
2.4. Kinks del modelo sine-Gordon	43
2.5. Reformulación de la teoría. Resumen	49
2.6. Formalización de la teoría de sine-Gordon	52
2.7. Formalización de la teoría ϕ^4	53
3. Correcciones de masa al orden de un lazo	57
3.1. Fluctuaciones cuánticas al orden de un lazo	57
3.1.1. Oscilaciones semiclásicas alrededor de una solución estable	57
3.1.2. Fluctuaciones cuánticas de vacío	60
3.1.3. Fluctuaciones cuánticas de kink	66
3.2. Corrección cuántica de la masa: Fórmula DHN	72
3.2.1. Renormalización de la energía de punto cero: diferencia modo a modo	72
3.2.2. Renormalización de la masa	80
3.3. Cálculo de $\text{Spec}(\hat{K})$ y $\delta(k)$	85
3.3.1. Cálculo del espectro de autoestados ligados	87

3.3.2. Cálculos sobre estados de scattering	89
3.4. Correcciones en el modelo de sine-Gordon	91
3.5. Correcciones en el modelo ϕ^4	93
4. Conclusiones	95
A. Espacio de Fock	97
B. Potencial de PT. Método de factorización	101

Introducción

En los años 60 y 70 del siglo pasado, una nueva metodología en teoría cuántica de campos se desarrolló y popularizó. Físicos y matemáticos empezaron a tomarse en serio el estudio de soluciones clásicas de ecuaciones de campo no lineales, y a interpretar algunas de estas soluciones como candidatos firmes para ser partículas de la teoría. Formalmente, este tipo de partículas no habían sido reconocidas previamente, al ser diferentes de las partículas elementales que surgen de la cuantización de excitaciones de campos, expresadas como superposiciones de modos ondulatorios. No obstante, desde entonces, el estudio de este tipo de soluciones no se ha detenido, llegando a darles en ciertos casos una interpretación de objetos fundamentales extensos para altas energías.

Una de las características fundamentales de las soluciones o partículas que nosotros estudiamos, los llamados *kinks*, es su estructura topológica, la cual difiere de la estructura del vacío. A una solución estacionaria de campo situada en una componente conexa del espacio de configuración en que conecta, asintóticamente, puntos de vacío, se le conoce como *defecto topológico*. Si, además de esta carácter topológico, y de añadir, o no, dependencia temporal a través de la correspondiente transformación de Lorentz, pedimos que sean ondas no disipativas solución de ecuaciones de onda no lineales, diremos que estas soluciones son los mencionados *kinks*. Si uno supone que las oscilaciones cuánticas alrededor del vacío están asociadas a deformaciones continuas del campo, entonces tales excitaciones no cambiarían dicha topología del vacío. Es por ello que las partículas elementales de la teoría cuántica de campos, tales como el fotón, no tienen una estructura topológica propia. Es más, la estabilidad de las nuevas partículas se debe a su estructura topológica diferente a la del vacío. Una importante consecuencia de esto es que, aunque no haya ninguna garantía a priori de tener una energía grande o pequeña, en todo caso, podemos afirmar que estas nuevas partículas no pueden decaer directamente en un número arbitrario de partículas elementales. Hablaremos de algunos distintivos de la topología propia de estas nuevas soluciones, tales como la carga topológica o, más en general, de la conexión dentro del espacio de configuración de la teoría.

Los *kinks*, de esta forma, además de soluciones topológicas son ondas propagantes no disipativas solución de ciertas ecuaciones de onda no lineales. Abandonando provisionalmente el carácter topológico de las soluciones que nosotros tratamos, damos la cronología en el estudio general de este último tipo de soluciones, los llamados *solitones*. Tradicionalmente, los fenómenos ondulatorios han sido identificados por su carácter dispersivo, es decir, por la propiedad por la que ondas propagantes se desvanecen en un tiempo finito. El hito “experimental” que cambió esta mentalidad fue la observación del ingeniero escocés Scott-Russell (1870, [1]) de “*una onda solitaria que viaja sin cambiar de forma, tamaño ni velocidad*”. Las ecuaciones de onda lineales solo admiten soluciones en forma de ondas solitarias o propagantes si la relación de dispersión entre frecuencias y números de onda es lineal, caso en que todos los miembros de un paquete de ondas viajan a velocidad constante sin interferencias mutuas. Sin embargo, el planteamiento por Korteweg-de Vries en 1905 de la ecuación que lleva su nombre ([2]), la cual describía el movimiento ondulatorio de aguas

superficiales, revolucionó el estudio de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDPs) no lineales que admiten ondas no disipativas como soluciones. A pesar de su complejidad, en torno a 1965 se probó que esta ecuación es resoluble completamente (Kruskal, Miura, Lax, etc., véase [3] o [4]). Entre las soluciones encontradas, están las ondas solitarias, que preservan forma, tamaño y velocidad a lo largo de su propagación, dando un fundamento teórico a la experiencia de Scott-Russell. La resolución de la ecuación Korteweg-de Vries (ecuación de KdV en adelante) fue un gran impulso que llevó a la creación y desarrollo de ideas y técnicas sobre esta teoría de EDPs a lo largo de los últimos 60 años: el método de scattering inverso (Gardner et al, [3]), pares de Lax y condiciones de compatibilidad no lineales (P. Lax, [4]), transformaciones espectrales clásicas (Sakharov, [5]), etc. También, propiedades inesperadas y efectivas en otras EDPs no lineales fueron ampliamente tratadas, tales como en la ecuación de sine-Gordon, estudiada en este trabajo, la cual explica el efecto Josephson en física de semiconductores [6].

Por la parte cuántica, es natural preguntarse qué es lo que pasa con estas soluciones de campo tan estables sometidos a algún formalismo de cuantización. La ecuación fundacional de las EDPs que determinan estas teorías clásicas de campos, la ecuación KdV, nos da un solitón no cuantizable por ninguno de los métodos hasta hoy desarrollados. No obstante, existen otras teorías de solitones que sí que son cuantizables, como los modelos de kinks aquí tratados. Al principio de los 60, dado que de los dos grandes tipos de hadrones, los mesones eran los ligeros, y los bariones los pesados, era tentador pensar que bariones y mesones eran solitones cuantizados y cuantos de interacción, respectivamente. Skyrme y Finkelstein fueron pioneros en esta idea, el primero de ellos precursor del llamado modelo de Skyrmiones [7], el cual describe el límite clásico de los bariones, con los mesones entendidos como sus cuantos de interacción.

Generalizando estas interpretaciones sobre los solitones en términos de su interacción y/o identificación con partículas elementales, la pregunta que surge es clara: ¿cómo son los estados cuánticos de un solitón o, más en particular, de un kink cuantizado? Los primeros y más ilustrativos intentos fueron los dados sobre las teorías escalares ϕ^4 y sine-Gordon. En 1974, Dashen, Hasslacher y Neveu [8] desarrollaron las correcciones cuánticas de las masas clásicas de estos solitones, mediante expansiones hasta primer orden en \hbar . Desde entonces, múltiples mejoras se han ido desarrollando de estos cálculos, hasta llegar a la deducción de una fórmula cerrada para estas correcciones, con la inclusión de contratérminos deducidos a partir del orden normal del Hamiltoniano cuantizado de la teoría (Comtet, Cahill, y Glauber; 1976, [9]).

Esta no es la única técnica para la cuantización de ondas no lineales. A raíz de los desarrollos anteriores, surgieron nuevos formalismos de cuantización de estos objetos tales como: la identificación de aproximaciones dadas en términos de expansiones semiclásicas con modelos de física molecular, y de teorías de muchos cuerpos (Goldstone y Jackiw, [10]), o la equivalencia, probada por Coleman [11], entre la teoría de sine-Gordon y el modelo masivo fermiónico fundamental de Thirring (lo que confirmaba que estos solitones, pese a su procedencia de teorías bosónicas, son fermiones). A raíz de los métodos anteriores, nuevos descubrimientos se fueron dando en modelos más complejos. En 1973, Nielsen y Olesen [12] redescubrieron teóricamente los vórtices de Abrikosov en un sistema diferente, los cuales pueden ser visto, matemá-

ticamente, como defectos topológicos en un contexto relativista. En 1994, Polyakov [13] en Rusia e, independientemente, 't Hooft [14] en el CERN, encontraron objetos extensos identificados como defectos topológicos puntuales, cuya densidad energética estaba localizada principalmente en una bola tridimensional con convergencia exponencial a 0 más allá de ésta, lo que llevó a interpretar a estos objetos como monopolos magnéticos, si son vistos a suficiente distancia. En Moscú, en 1975, cuatro físicos rusos - Polyakov, Schwartz, Tybirk, y Belavin [15] - también descubrieron solitones en teorías gauge de Yang-Mills puras, en $1 + 4$ dimensiones (una quinta dimensión como tiempo imaginario en un espacio euclídeo cuadridimensional), y sin interacción con la materia. Esta adición dimensional gestó una nueva teoría, pariente directo de la teoría de defectos topológicos, que es la *teoría de instantones*.

Cuando aumentamos dimensionalmente la complejidad de las teorías de campos, nos encontramos con métodos de cuantización y cálculos de correcciones cada vez más difíciles de tratar. Es por ello que, actualmente, la punta de lanza en dichos cálculos se encuentra en una no tan larga lista de fórmulas de éstos, en el marco de teorías supersimétricas de Yang-Mills. Este es el caso, por ejemplo, del grupo de *Stony Brook group*, formado por Rebhan, van Nieuwenhuizen, y Wimmer que, en [16] (2003), dieron con dicha fórmula de correcciones cuánticas para la masa del vórtice abeliano supersimétrico, hasta el orden de un lazo. Estos cálculos del vórtice SUSY carecían de la dificultad de los cálculos estándar anteriores, ya que las divergencias de los fermiones cancelan a las de los campos de bosones. Sin embargo, el desarrollo de nuestro trabajo no recurre a teorías supersimétricas, sino que se fundamenta en el cálculo de correcciones cuánticas, presentado por A. A. Izquierdo, W. G. Fuertes, M. T. Mayado, y J. M. Guilarte, sobre la masa de vórtices autoduales sin técnicas SUSY en [17] y [18]. A raíz de esta metodología, seguiremos el procedimiento de correcciones de masas clásicas al orden de un lazo de [19] y [20], así como de [21], aplicado en nuestro caso sobre teorías escalares en $1 + 1$ dimensiones. Es de remarcar que, pese a la mayor complejidad de las teorías hoy encaradas, la “vieja” fórmula de Dashen, Hasslacher y Neveu (fórmula DHN) se encuentra con sorprendente asiduidad en los desarrollos teóricos de estas fluctuaciones, si bien los métodos de regularización y renormalización tienen que adaptarse a cada situación.

Así pues, en este trabajo, centramos el foco en un cierto tipo de soluciones no disipativas de energía finita, enmarcadas en determinadas teorías de campos escalares, con dos claros objetivos. El primero, mostrar la simbiosis en la que viven la topología del espacio-tiempo $1 + 1$, y la propia teoría de campos estudiada. Y el segundo, a partir de dicha intersección clásica, y con toda la artillería necesaria de la teoría cuántica de campos, calcular las correcciones cuánticas de vacío para las masas clásicas de kinks y solitones de los modelos, respectivamente, ϕ^4 y sine-Gordon. Las teorías aquí tratadas están inmersas en un universo de $1 + 1$ dimensiones. A pesar de esta aparente simpleza, las soluciones, campos o partículas con que trataremos (kinks) constituyen un caso ilustrativo de lo que significan estas teorías de campos. Esto nos permitirá entender las prácticas más recurrentes de éstas, en términos de conexión y homotopía, en espacios de configuración con dimensiones arbitrarias, así como el procedimiento a seguir para calcular correcciones a la masa de una partícula hasta el orden de un lazo, es decir, hasta segundo orden en el desarrollo en serie de

potencias del funcional acción o, dicho de otra forma, hasta primer orden en \hbar . Utilizaremos la fórmula DHN, con los contratérminos debidamente añadidos para no solo regularizar sobre el número de modos de fluctuación, sino también compensando las divergencias por el propagador del loop de la teoría, en primer orden.

En el primer capítulo, estudiamos la topología del espacio de configuración de una cierta familia de teorías escalares y bosónicas de campos reales, junto a un estudio de la estabilidad de las soluciones topológicas, y al teorema de Derrick [22]. En el segundo capítulo, seguimos con el desarrollo clásico para dar con la ecuación de primer orden de Bogomolny, a partir de la cual deducimos las soluciones estacionarias en dichos modelos. Desmenuzamos estos cálculos en un contexto clásico sobre los modelos ϕ^4 y sine-Gordon, e incluimos también una reformulación de las teorías de cara a manejar variables espacio-temporales y campos que sean adimensionales. Finalmente, en el capítulo tercero, entramos en la teoría cuántica de campos con el objetivo claro de calcular las correcciones cuánticas de las masas clásicas de los kinks ϕ^4 y sine-Gordon, para lo que nos valemos de la mentada fórmula DHN.

Incluimos dos apéndices: uno dedicado al análisis funcional del espacio de Fock, recurrente en la cuantización canónica del capítulo tercero; y otro dedicado a una resolución clásica y parcial de una ecuación de Schrödinger unidimensional con el potencial de Pöschl-Teller, en el que hacemos uso del método de factorización (véanse las referencias [23] y [24] para mayor generalidad de estos métodos). Esta última ecuación aparece en numerosas ocasiones en diversos problemas espectrales del capítulo tercero, en términos del operador de segunda variación de la energía en el sector topológico kink.

Unidades y dimensiones

En este trabajo, utilizamos un sistema de unidades en que la velocidad de la luz en el vacío es la unidad de velocidad: $c = 1$. No obstante, la constante de Planck h , así como \hbar , permanecerán explícitas, de cara a desarrollar correcciones semiclásicas sobre la masa clásica de un kink. Bajo estas consideraciones, se tiene que $[L] = [T]$, además de que las dimensiones de la masa de las partículas son $[M] = L^{-1}$, y que $[\hbar] = ML$.

La escala de longitud y energía de un solitón depende de las constantes de acoplamiento de la teoría. En una teoría invariante Lorentz y en la que las unidades son tales que $c = 1$, como es nuestro caso, la energía del solitón se identifica con su masa en reposo, en contraste con la práctica habitual con partículas elementales, para las que la masa es proporcional a \hbar . Teniendo en cuenta que los efectos cuánticos se hacen pequeños bajo $\hbar \rightarrow 0$, en este límite, el kink o solitón topológico, veremos, tendrá masa finita, pero las partículas elementales tendrán masa próxima a 0.

Capítulo 1

Formulación clásica de la teoría de kinks

1.1. Primeras nociones de la teoría de kinks

Fijamos nuestro estudio clásico en la resolución de ecuaciones de onda, de cara a calcular algunas soluciones no disipativas de ciertas ecuaciones no lineales. Empezamos dando la ecuación de ondas más sencilla.

$$\square\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi(x, t) = 0, \quad (1.1.1)$$

donde x y t denotan a las variables espacial y temporal, donde ϕ es una función en $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{1,1})$, y donde hemos denotado $\square = \partial_\mu \partial^\mu$. Las dos principales características de este tipo de ecuaciones de onda son:

A. La forma y la velocidad de un solo paquete de onda se mantienen constantes

Toda función con valores reales de la forma $f(x \pm ct)$, perteneciente al espacio $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{1,1})$, es solución de (1.1.1). Es más, basta tomar cualquier función f con una sola variable, perteneciente a $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ (a lo que se suele llamar una función *localizada* en el espacio), e introducir el argumento $x \pm ct$ para construir así un paquete de ondas localizado que viaja a velocidad $\pm c$, sin ningún tipo de distorsión en su forma a lo largo del tiempo y del espacio. Esto es claro si entendemos que en el espacio de estas ondas planas, el sistema $\{\sin(kx \pm wt), \cos(kx \pm wt)\}$ es ortogonal y completo, de tal forma que podemos escribir la f anterior como sigue

$$f(x - ct) = \int dk [a_1(k) \cos(kx - wt) + a_2(k) \sin(kx - wt)], \quad (1.1.2)$$

donde el hecho de que la onda plana *viaje sin atenuarse* a velocidad c surge del hecho de que la hemos descompuesto en infinitud de componentes, a modo de ondas planas, con la misma velocidad de propagación $w/k = c$.

B. La velocidad y la forma asintótica. En una colisión de paquetes de ondas, estos preservan forma y velocidad

Dada la naturaleza lineal de la ecuación de ondas (1.1.1), y dados dos paquetes de onda $f_1(x - ct)$ y $f_2(x + ct)$, su suma, a la que denotamos por $f_3(x, t)$, es también una solución. En tiempos negativos grandes ($t \rightarrow -\infty$), $f_3(x, t)$ está formado por dos paquetes de ondas separados, los cuales se acercan el uno al otro sin distorsionarse. En un instante t finito, estos paquetes colisionan. No obstante, de nuevo a tiempos muy grandes, pero ahora positivos ($t \rightarrow \infty$), la solución $f_3(x, t)$ se vuelve a escindir en dos paquetes de ondas, los cuales recuperan sus formas y sus velocidades originales. Este argumento se puede extender trivialmente a más de dos paquetes de ondas.¹

Sin embargo, la adición de términos de distinta índole (no lineales, disipativos, acoplados, ...), convierten este tipo de ecuaciones diferenciales en objetos más difíciles de tratar. Nuestro objetivo enmascarado en el estudio clásico de solitones es el apreciar y explotar los casos en que ecuaciones de ondas no lineales como las dadas, disfrutan de estas atractivas características A y B, para después estudiar las partículas e interacciones que afloran con la segunda cuantización de nuestras teorías clásicas. Obsérvese, quedándonos con el caso más sencillo, lo que pasa cuando añadimos un solo término a la ecuación (1.1.1), sin perder linealidad, pero perdiendo sencillez en el cálculo. Estamos hablando de la ecuación de Klein-Gordon, la cual, recordemos, debe su forma a la conservación del cuadrimomento de una partícula con masa m y espín 0:

$$(\square + m^2)\phi(x, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2 \right) \phi(x, t) = 0. \quad (1.1.3)$$

La linealidad de (1.1.3) permite seguir teniendo al conjunto dada por

$$\{\cos(kx \pm wt), \sin(kx \pm wt)\},$$

como un sistema ortogonal y completo del espacio de soluciones contenido en $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{1,1})$. No obstante, un sencillo cálculo (basta, por ejemplo, utilizar la transformada de Fourier del campo ϕ) nos da una relación de dispersión no tan trivial como en ondas planas:

$$w^2 = k^2 c^2 + m^2 c^4, \quad (1.1.4)$$

esto es, diferentes longitudes de onda de las ondas solución viajan a velocidades de propagación diferentes $w(k)/k$, dando a la ecuación (1.1.3) una naturaleza dispersiva. Esto significa que una solución ϕ de (1.1.3) que en $t = 0$ tenga una forma de paquete de onda localizado dada por

$$\int dk [a_1(k) \cos(kx) + a_2(k) \sin(kx)], \quad (1.1.5)$$

se dispersará para tiempos $t > 0$. Esto nos hace perder la característica A, y en cuanto a B, ni siquiera un solo paquete de ondas es capaz de mantener su forma en el tiempo, qué decir tiene que más de uno tampoco lo hará.

Consideremos ahora la adición en (1.1.1) de un término no lineal como sigue

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi(x, t) + \phi^3(x, t) = 0. \quad (1.1.6)$$

¹A lo largo de la introducción, nos referiremos a estas dos características como características A y B, en orden de aparición.

Cálculos numéricos de esta última ecuación muestra la naturaleza dispersiva de las ondas que de ella se derivan.

No obstante, ocurre a veces que los efectos disipativos y los términos no lineales se cancelan los unos a los otros, dando así ecuaciones de onda disipativas y no lineales con soluciones que cumplen la característica A. Este tipo de soluciones son llamados *ondas solitarias*. Lo mismo puede ocurrir con la característica B, dando en conjunto lo que se conoce como soluciones de tipo *solitón*. Sin embargo, a lo largo de este trabajo, usaremos ambos términos de forma biunívoca. Recurrimos a [11] para caracterizar estas soluciones en términos de energía. La idea clave para entender la diferencia clásica de estas soluciones de la teoría con respecto al resto de soluciones no homogéneas es la de *disipación*. Supongamos que la entrada $(0, 0)$ del tensor energía-momento T_0^0 (la densidad espacial de energía) de la teoría es siempre no negativo, y que se anula para los puntos de vacío de la teoría, es decir, para las soluciones de campo constantes que la minimizan. Una forma correcta de decir que una solución de la ecuación (2.5.9) es disipativa es afirmar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \max_x T_0^0(t, x) = 0. \quad (1.1.7)$$

De esta manera, las características A y B conllevan a que T_0^0 esté concentrada en una región acotada del espacio. En otras palabras, la densidad de energía es localizada. Con ello, podemos caracterizar a las soluciones clásicas estacionarias y no homogéneas como no disipativas a través de la energía. En resumen, una solución solitón es una solución de una ecuación de ondas no lineal de naturaleza *no homogénea, no singular y no disipativa*².

Es importante entender también que las teorías de campos escalares que nosotros estudiaremos son no perturbativas: no se aplica un procedimiento perturbativo al uso como se hace en la teoría de Klein-Gordon. Sin embargo, sí que desarrollaremos teoría de perturbaciones alrededor de soluciones no triviales y estacionarias. Esta condición de nuestras teorías se aprecian en los primeros pasos de su estudio clásico, que nos lleva, por ejemplo en el caso del campo ϕ^4 , a masas clásicas que divergen con $\lambda \rightarrow 0$.

Nos situamos en la teoría de campos escalares, más en concreto en el estudio de soluciones topológicas de los sistemas de ecuaciones no lineales en derivadas parciales como sigue

$$\frac{\partial^2 \phi^j}{\partial x_0^2} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \phi^i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial U}{\partial \phi^i} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.1.8)$$

donde $N \in \mathbb{N}^3$ es el número de componentes que tiene el campo escalar. Nos limitaremos al estudio de campos escalares en un universo bidimensional, con una coordenada espacial y otra temporal. No obstante, incluso cuando generalicemos a $1 + n$ variables, denotaremos por $x_\mu = (x_0, x_j)$ a las coordenadas en el espacio-tiempo de

²En este trabajo, entendemos por *no singularidad* a la condición de continuamente diferenciable en el correspondiente dominio de definición.

³Denotamos por \mathbb{N} al conjunto de números naturales, sin incluir el cero. Usaremos la notación \mathbb{N}_0 cuando lo incluyamos.

Minkowski $1+n$ -dimensional, particularizando a $x_\mu = (x_0, x_1) = (t, x)$ en el caso bidimensional. Así, los campos estudiados tendrán la forma $\phi(x_\mu) = (\phi^1(x_\mu), \dots, \phi^N(x_\mu))$, y los funcionales de estos campos vendrán dados por $F = F[\phi^1, \dots, \phi^N]$. Observará el lector que, aunque la forma y el contenido de los modelos ϕ^4 y sine-Gordon están bien definidos, tomaremos, en varias ocasiones, puntos de partida generales sobre estas dimensiones, con una métrica Lorentziana en el espacio de Minkowski que denotaremos por $g^{\mu\nu}$, y con signatura $(+, -, \dots, -)$, donde el signo menos se repite n veces.

Todo nuestro estudio se particularizará en los campos escalares con las densidades lagrangianas que siguen. Para ϕ^4 ,

$$\mathcal{L}[\phi] = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\lambda}{4} \left(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2, \quad (1.1.9)$$

y para sine-Gordon,

$$\mathcal{L}[\phi] = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\lambda}{m^4} \left(1 - \cos \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m} \phi \right) \right), \quad (1.1.10)$$

ambos con $N = 1$ componentes, y con λ y m constantes de la teoría.

Como veremos superficialmente, nuestro estudio clásico está en perfecta analogía con un enfoque mecánico clásico y geométrico, basado en el estudio de sistemas completamente integrables de mecánica clásica, plasmados en las ideas y modelos de Liouville. Bien es cierto que este estudio clásico tiene su formulación analítica en la resolución de ecuaciones diferenciales como en 1.1.8, pero para llegar a ello, necesitamos entender las magnitudes físicas que hay detrás de tales ecuaciones de campos.

Toda la información dinámica del sistema está contenida en el *funcional acción*, definido sobre el espacio de configuración de campos como sigue

$$S[\phi] := \int_{\Omega} d^{1+n} \mathcal{L}[\phi, \partial_\mu \phi], \quad (1.1.11)$$

donde \mathcal{L} es la densidad lagrangiana general de una teoría escalar y bosónica dada por

$$\mathcal{L}[\phi, \partial_\mu \phi] = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^i - U(\phi), \quad (1.1.12)$$

con $i = 1, \dots, N$, $\mu = 0, 1, \dots, n$.

Antes de continuar, debemos hacer una parada para formalizar la escritura matemática de las simetrías presentes en los sistemas físicos estudiados. Para empezar, el sistema debe ser invariante por transformaciones del grupo de Poincaré. Existe dos tipos dentro de estas transformaciones:

1. *Traslaciones espacio-temporales*: Están dadas por transformaciones infinitesimales de la forma

$$\delta x^\mu = i \varepsilon^\rho P_\rho x^\mu = \varepsilon^\mu, \quad (1.1.13)$$

donde $P_\rho = -i\partial_\rho$ denota a los generadores infinitesimales de este grupo de transformaciones. Las corrientes asociadas a estas simetrías del sistema, dada su condición relativista, son

$$j_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\mathcal{L}[\phi, \partial_\mu\phi] + \partial_\mu\phi^j\partial_\nu\phi^j. \quad (1.1.14)$$

Esto nos da unas cargas conservadas de la forma

$$P_\mu = \int d^n x \left(-g_{\mu 0}\mathcal{L}[\phi, \partial_\mu\phi] + \partial_\mu\phi^j\partial_\nu\phi^j \right). \quad (1.1.15)$$

Como es bien sabido, P_0 se corresponde con la energía del sistema físico, y P_i , $i = 1, \dots, n$, son los momentos lineales del sistema. Más explícitamente, dichas cargas conservadas adoptan la siguiente forma

$$P_0[\phi] = \int d^n x \left(\frac{1}{2}\partial_0\phi^j\partial_0\phi^j + \frac{1}{2}\partial_i\phi^j\partial_i\phi^j + U[\phi] \right), \quad (1.1.16)$$

$$P_i[\phi] = \int d^n x \partial_i\phi^j\partial_0\phi^j. \quad (1.1.17)$$

Al funcional $P_0[\cdot]$ de (1.1.16) lo llamaremos funcional completo de energía, y al funcional $U[\cdot]$ que aparece en el integrando de $P_0[\cdot]$ lo llamamos *autointeracción*.

2. *Transformaciones o rotaciones de Lorentz*: Para este otro tipo de elementos del grupo de Poincaré, tenemos las transformaciones infinitesimales

$$\delta x^\mu = \frac{1}{2}i\varepsilon^{\rho\sigma}M_{\rho\sigma}x^\mu = \varepsilon^{\mu\rho}x_\rho, \quad (1.1.18)$$

con generadores infinitesimales $M_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) + S_{\mu\nu}$, donde $S_{\mu\nu}$ es hermítico, además de estar en el mismo álgebra que el primer término. Las corrientes son ahora como sigue

$$j_{\mu\nu\rho} = (-g_{\mu\lambda}\mathcal{L} + \partial_\mu\phi^i\partial_\nu\phi^i)(g_\nu^\lambda x_\rho - g_\rho^\lambda x_\nu) = j_{\mu\nu}x_\rho - j_{\mu\rho}x_\nu - j_{\mu\rho}x_\nu. \quad (1.1.19)$$

De esto, se deducen las siguientes cargas conservadas

$$M_{\nu\rho} = \int d^n x (j_{0\nu}x_\rho - j_{0\rho}x_\nu), \quad \rho, \nu = 0, 1, \dots, n. \quad (1.1.20)$$

Estos generadores, introducidos por el teorema de Noether en virtud de la invariancia relativista del sistema, satisfacen las propiedades de un álgebra de Lie (antisimetría, identidad de Jacobi, bilinealidad). Los conmutadores de estos operadores infinitesimales, vistos como campos vectoriales, son los siguientes:

$$\begin{aligned} [P_\nu, P_\rho] &= 0, \\ [M_{\mu\nu}, P_\rho] &= -ig_{\mu\rho}P_\nu + ig_{\nu\rho}P_\mu, \\ [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= -i\delta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + i\delta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + i\delta_{\nu\rho}M_{\mu\rho} - i\delta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho}. \end{aligned} \quad (1.1.21)$$

Todas las simetrías vistas hasta ahora responden tan solo a la invariancia relativista formalizada a través de las transformaciones del grupo de Poincaré, o siguiendo la notación habitual en estos términos, a través de las *transformaciones espaciotemporales*.

Por otra parte, en las teorías que estudiaremos existen grupos de simetrías discretos que dejan invariantes las densidades lagrangianas dadas en (1.1.9) y (1.1.10). Para el primer caso, tenemos el grupo finito \mathbb{Z}_2 (bajo la transformación $\phi \rightarrow -\phi$), y en el segundo tenemos las traslaciones $\phi \rightarrow \phi + (2n\pi)$, con $n \in \mathbb{Z}$.

De cara a deducir, de un mismo planteamiento, las ecuaciones de Euler-Lagrange y la formulación de la estabilidad de las soluciones obtenidas, presentamos el desarrollo del funcional acción bajo modificaciones del campo $\delta\phi$ hasta orden 2 en un entorno de un campo solución general, de la forma

$$S[\phi, \delta\phi] = S_0[\phi, \delta\phi] + S_1[\phi, \delta\phi] + S_2[\phi, \delta\phi], \quad (1.1.22)$$

donde cada uno de los términos significan lo siguiente:

1. S_0 se corresponde con el funcional acción evaluado en el propio campo ϕ , sin deformaciones (i.e., se corresponde con la expresión 1.1.11).
2. S_1 viene dada por las perturbaciones sobre el campo de orden 1, de la forma

$$S_1[\phi, \delta\phi] = - \int d^{1+n}x \delta\phi^i \left[\partial_\mu \partial^\mu \phi^i + \frac{\partial U}{\partial \phi^i} \right], \quad (1.1.23)$$

sobre el que podemos aplicar el principio variacional o principio de Hamilton (i.e., la curvas en el espacio de trayectorias que describe al sistema físico debe ser un punto crítico del funcional acción). Con ello, deducimos las ecuaciones de Euler-Lagrange de nuestro sistema, que son

$$\square\phi^i = - \frac{\partial U}{\partial \phi^i}, i = 1, \dots, N. \quad (1.1.24)$$

Nótese que el espacio de configuración completo del sistema es el que sigue

$$\mathcal{F} = \{\phi(x_0, x_j) \in \text{Maps}(\mathbb{R}^{1,n}, V) : P_0[\phi] < \infty\}, \quad (1.1.25)$$

donde P_0 denota a la energía del sistema, y donde V es un espacio vectorial N -dimensional. Cuando particularicemos en nuestros campos de estudio, nos restringimos a $V = \mathbb{C}$, si no se indica otra cosa.

3. $S_2[\phi, \delta\phi]$ procede de deformaciones de segundo orden sobre el campo, de la forma que sigue

$$S_2[\phi, \delta\phi] = - \frac{1}{2} \int d^{1+n}x \delta\phi^i \left[\delta_{ij} \partial_\mu \partial^\mu + \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^i \partial \phi^j} \right] \delta\phi^j. \quad (1.1.26)$$

Esta expresión es de nuclear importancia en el estudio de la estabilidad de las soluciones de 1.1.24, así como en la cuantización de la teoría que nosotros aplicaremos. Esta expresión introduce en el campo pequeñas fluctuaciones de

segundo orden que podemos expresar a través del conocido como *operador general de segunda variación de la energía*. En teoría de operadores, esto es lo que se llama un operador diferencial Hessiano. Nosotros nos quedaremos con la terminología más física. Dicho operador es

$$\hat{\mathcal{H}} = \delta_{jk} \partial_\mu \partial^\mu + \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^j \partial \phi^k}. \quad (1.1.27)$$

Esto es, $\hat{\mathcal{H}}$ es una matriz cuadrada de dimensión $N \times N$. En las teorías que nosotros estudiaremos, este operador será escalar ($N = 1$).

Si bien el desarrollo hasta ahora nos ha permitido obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange de una teoría escalar con N componentes, de momento no sabemos nada del significado de los términos de segundo orden en el desarrollo de la acción. En un contexto clásico, estos términos configuran el operador diferencial Hessiano cuyo autovalores van a determinar la estabilidad o no estabilidad de las soluciones de la teoría. Esta estabilidad será una propiedad que nos acompañará en todo el estudio clásico que sigue. Matemáticamente, la estabilidad significa no negatividad de los autovalores con respecto al operador Hessiano, que es un caso particular de operador de tipo Schrödinger. Esto es debido a un resultado clásico de la teoría de operadores, por el que una solución es estable si y solo dicho operador Hessiano es positivo⁴. Físicamente, nos dice que podemos descomponer la perturbación en ondas dadas por las autofunciones de dicho operador de tipo Schrödinger, con frecuencia bien definida (i.e., no negativa).

De hecho, la corrección de masa de un kink o un solitón que persigue este trabajo, se obtiene sobre la cuantización y regularización de las fluctuaciones que determina el operador Hessiano.

Aquí termina la pincelada inicial de las teorías de campos y de los problemas espectrales que vamos a estudiar. Empezamos nuestra construcción con el estudio de campos constantes con valores en V que minimizan el funcional autointeracción, así como con el planteamiento que daremos a la evolución temporal en este trabajo.

1.2. Variedad de vacío y evolución temporal

Nos centramos en una clase especial de soluciones: campos constantes que minimizan el funcional energía. Desde un punto de vista cuántico, este tipo de soluciones clásicas, aún por cuantizar, nos dan los valores esperados buscados de los campos como operadores en el estado fundamental del sistema, para lo que usaremos la terminología de punto de vacío. Estamos lidiando con campos escalares en que no incluimos consideraciones de campos gauge. Esto simplifica notablemente el problema.

Recordemos las expresiones de los funcionales acción y densidad lagrangiana de las

⁴Más adelante, a partir de las autofunciones (1.8.4), y con este resultado, estudiamos la estabilidad de los operadores de segunda variación en nuestros modelos de kinks.

teorías escalares estudiadas:

$$\begin{aligned} S[\phi] &= \int dt \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^i - U[\phi] \right], \\ \mathcal{L}[\phi, \partial_\mu \phi] &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^i - U[\phi]. \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

Los operadores integrales cinético y potencial, sacados directamente de la densidad lagrangiana, son los funcionales que siguen

$$\begin{aligned} T[\phi] &= \frac{1}{2} \int d^n x (\partial_0 \phi)^2, \\ E[\phi] &= \int d^n x \left[\frac{1}{2} (\partial_i \phi)^2 + U[\phi] \right], \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

de lo que se deriva un funcional energía de la forma

$$P_0[\phi] = \frac{1}{2} \int d^n x (\partial_0 \phi)^2 + \int d^n x \left[\frac{1}{2} (\partial_i \phi)^2 + U[\phi] \right]. \quad (1.2.3)$$

Al potencial de autointeracción U le imponemos las siguientes condiciones:

1. El funcional $U : V \rightarrow \mathbb{R}$ será inferiormente acotado. Sin pérdida de generalidad (bastaría añadir una constante a la densidad lagrangiana), situamos el mínimo absoluto de dicho funcional en el elemento neutro de \mathbb{R} con respecto a su suma, es decir, imponemos $U_{min} = 0$.
2. Nos limitaremos a funcionales U con forma polinómica, global o localmente, con indeterminadas en los campos de estudio.
3. Cuando particularicemos $V = \mathbb{R}$, el potencial de autointeracción $U : V \rightarrow \mathbb{R}$ será una función dos veces diferenciable, esto es, $U(\cdot) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

Una primera consecuencia de estas dos imposiciones es la de que, necesariamente, todas las potencias de la expansión polinómica de U han de ser de exponente par.

1.2.1. Evolución temporal

Damos ahora, brevemente, la noción algebraica por la que podemos limitar nuestro estudio a soluciones estacionarias del espacio de configuración dado en (1.1.25). Denotamos por \mathcal{D} al espacio de configuraciones estacionarias, dado por

$$\mathcal{D} := \{ \phi \in \text{Maps}(\mathbb{R}^n, V) : E[\phi] < \infty \}, \quad (1.2.4)$$

teniendo en cuenta que $P_0[\phi] = E[\phi]$ para todo $\phi \in \mathcal{D}$.

La omisión de la dependencia explícita, con respecto a la variable tiempo, de las configuraciones de \mathcal{F} , puede verse como también como sigue. Fijémonos en que las ecuaciones (1.1.24) pueden interpretarse como campos vectoriales, y sus soluciones como curvas integrales, tangentes a este campo vectorial en cada punto de sus trayectorias. Pues bien, basta tomar las órbitas de cada uno de los tiempos t para

desarrollar el estudio que sigue, el cual pretende cubrir la conexión de \mathcal{D} en términos, solamente, de dos tipos de soluciones estacionarias: kinks y puntos de vacío. No obstante, nos quedamos con una explicación más algebraica a través de la teoría de grupos. En adelante, denotamos por ϕ_t a la sección de la configuración $\phi \in \mathcal{F}$ en la componente temporal $t \in \mathbb{R}$. En particular, para todo $\phi \in \mathcal{F}$ y todo $t \in \mathbb{R}$, se tiene $\phi_t \in \mathcal{D}$.

Definición 1.2.1. Sea $\phi \in \mathcal{F}$. Llamaremos aplicación de **evolución temporal** a la aplicación $T \in \text{Maps}(\mathbb{R} \times \mathcal{D}, \mathcal{D})$ tal que, fijado un instante arbitrario $t_0 \in \mathbb{R}$, viene dada por la siguiente correspondencia:

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R} \times \mathcal{D} &\rightarrow \mathcal{D} \\ (t, \phi_{t_0}) &\mapsto \phi_{t_0+t}. \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

A la sección de esta aplicación T por un cierto instante $t \in \mathbb{R}$, que manda cualquier configuración de campo a la misma configuración en el instante $t \in \mathbb{R}$, la denotaremos T_t .

La aplicación (1.2.5) es una aplicación \mathcal{C}^∞ (en particular, continua) entre espacios normados. La norma viene dada por la aplicación $E[\cdot]$ en \mathcal{D} , y extendida, en el conjunto origen y por un producto, a la norma correspondiente conjuntamente con la norma estándar en \mathbb{R} .

Es inmediato que las aplicaciones T_t pueden ser entendidas como elementos de un grupo que actúan sobre \mathcal{D} . Es por ello por lo que al conjunto de aplicaciones $\{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ se le suele llamar *grupo uniparamétrico de transformaciones temporales*, con la ley $T_t * T_s = T_{t+s}$, y con elemento neutro T_0 . Así haremos nosotros, y lo denotaremos por \mathcal{T} .

Dos consecuencias fundamentales se siguen de este análisis:

1. Dado que la restricción de $\text{Maps}(\mathbb{R}^{1,n}, V)$ a aquellos campos independientes del tiempo, en los que el funcional P_0 es finito, es un subconjunto de \mathcal{F} regular por sumas y productos por los escalares del espacio V , entonces podemos entender dicha restricción como un subespacio vectorial \mathcal{D} de \mathcal{F} .
2. Dada la independencia temporal, la restricción anterior nos permite omitir el término cinético del funcional P_0 . Nótese que esta simplificación preserva la condición semidefinida positiva de este funcional. Podemos pues seguir tomando P_0 como norma en \mathcal{D} , aunque ahora tomará la forma de E . Es por ello que a la energía, cuyo finitud determina los elementos de \mathcal{D} , la denotaremos en adelante como E .

Con todo ello, limitaremos nuestro estudio al espacio vectorial \mathcal{D} .

Pasamos ahora a definir lo que entenderemos por solución en nuestro espacio \mathcal{D} , para lo que nos servimos del principio de acción mínima o principio de Hamilton, así como del funcional energía E ya definido.

Definición 1.2.2. Sea $\phi \in \mathcal{D}$ una configuración no singular. Diremos que ϕ es solución de la teoría de campos dada si y solo si la derivada funcional de E se anula en su evaluación en ϕ . Esto es:

$$\phi \in \mathcal{D} \text{ solución} \iff \frac{\delta E}{\delta \phi} = 0. \tag{1.2.6}$$

Para poder estudiar el contenido topológico de la teoría de campos que nos ocupa con suficiente rigor, definimos también lo que entenderemos por variedad de vacío. Recordemos que habíamos situado el mínimo absoluto del término potencial U en un valor real mayor o igual que 0.

Definición 1.2.3. *Dado \mathcal{D} el espacio de configuración de nuestra teoría de campos, entenderemos por **variedad de vacío** o de **puntos de vacío** al siguiente conjunto de elementos de V :*

$$M := \{\phi \in \mathcal{D} : \phi = \text{constante y } U[\phi] = 0\}, \quad (1.2.7)$$

o, equivalentemente:

$$M := \{\phi \in V : U[\phi] = 0\}. \quad (1.2.8)$$

A los elementos de M los llamaremos **puntos de vacío**.

De la condición semidefinida positiva de U , y de la consideración $U_{\min} = 0$, se sigue sobre todo punto de vacío la condición necesaria de cualquier extremo local, esto es

$$\frac{\partial U}{\partial \phi^j}(\phi_\nu) = 0, \quad (1.2.9)$$

para todo $j = 1, \dots, N$, y todo $\phi_\nu \in M$.

1.3. Defectos topológicos

Estudiamos ahora las nociones de arco-conexo en nuestro espacio de configuración \mathcal{D} , y de continuidad a través del grupo \mathcal{T} . Los elementos de éste, con $t = 0$ como instante de referencia, son

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R} \times \mathcal{D} &\rightarrow \mathcal{D} \\ (t, \phi_0) &\mapsto \phi_t, \end{aligned}$$

Estos conceptos nos permitirán apreciar nuestro problema de campos escalares desde una perspectiva mucho más general a través de la topología que encierran estas ideas.

Recordemos que estas aplicaciones del grupo \mathcal{T} son continuas. A modo de ejemplo, supongamos el caso más sencillo en que \mathcal{D} es arco-conexo. Por definición de este concepto sabemos que dos configuraciones cualesquiera de \mathcal{D} pueden estar conectadas por caminos, esto es, por aplicaciones continuas. En particular, es conexo, luego a la hora de hablar de sus componentes conexas, es decir, de las clases de equivalencia de la relación binaria dada, para $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}$, por

$$\phi_1 \mathcal{R} \phi_2 \iff \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}', \quad \text{para } \mathcal{D}' \subset \mathcal{D} \text{ conexo}, \quad (1.3.1)$$

podemos afirmar que existe una única componente conexas en \mathcal{D} , lo que simplificaría notablemente nuestro problema. En este caso, dada la continuidad de los elementos $T \in \mathcal{T}$, y dada la preservación de la condición de conexo por continuidad, podemos

afirmar que dos configuraciones de \mathcal{D} podrán ser conectadas a través de una de estas transformaciones temporales. Si hubiera dos o más componentes conexas (i.e., si \mathcal{D} no fuera conexo), que será nuestro caso, este análisis se tendría que restringir a cada una de ellas. En adelante, salvo que se diga lo contrario, nos limitaremos al número de componentes de campos escalares que a nosotros nos ocupan: $N = 1$ y $n = 1$. Veamos que de este análisis aparece con completa naturalidad lo que nosotros entenderemos por *defecto topológico*. En primer lugar, de la acotación inferior del funcional E , y de la continuidad de los elementos de \mathcal{T} , se sigue que en cada una de las componentes conexas de \mathcal{D} debe haber, al menos, una configuración ϕ_m que minimice la energía E . Esto se debe a que, para tener valores finitos del funcional E , es necesario que los valores

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) \in M, \quad (1.3.2)$$

lo cual se aprecia directamente en nuestro caso de campos en una sola variable. Probaremos esto más adelante.

Ello implica que, en cada componente conexa de \mathcal{D} , debe haber, al menos, una solución estable. Entenderemos como tal a toda solución que siga siendo solución de nuestra ecuación de campo bajo perturbaciones dentro de un entorno de la solución original, en la topología de \mathcal{D} , que no es otra que la topología fuerte de un espacio normado.

De esta manera, a las soluciones de vacío les corresponderán su componente conexa, y a las soluciones no de vacío, pero estables y minimizadoras de E , les corresponderá, si existen, una componente conexa diferente. Esto se traduce en que estas últimas soluciones no pueden transformarse a través de homotopías (en particular, a través de elementos del grupo uniparamétrico \mathcal{T}) a puntos de vacío, por hallarse en componentes conexas diferentes. Es decir, un punto de vacío no puede evolucionar temporalmente hasta ser, en un cierto instante, una de esas soluciones que están fuera de M , o estaríamos violando la condición de conexo de cada una de las componentes; y viceversa. Dicho de otra forma, estaríamos violando la conservación de la energía. Más adelante veremos que los puntos de vacío de los valores asintóticos de estas soluciones (1.3.2) son necesariamente diferentes en $x \rightarrow \infty$, y en $x \rightarrow -\infty$. Con todo ello, definimos lo que entendemos por defecto topológico.

Definición 1.3.1. *Sea $\phi \in \mathcal{D}$ una configuración no singular de nuestra teoría. Supongamos que ϕ es un mínimo local de $E : \mathcal{D} \rightarrow [0, \infty)$, y que ϕ no está en M . Entonces, diremos que ϕ es un **defecto topológico**.*

Para demostrar que las soluciones de este último tipo definido son estables, se debe comprobar que la segunda variación de la energía en estos campos es una forma cuadrática semidefinida positiva, con la inclusión del caso de autovalores nulos. A continuación, introducimos la noción de grupo pequeño de un cierto elemento de un grupo, indispensable para hablar de las órbitas o sectores de nuestra teoría.

Definición 1.3.2. *Sea G un grupo, y sea $p \in G$, Llamamos grupo pequeño de p al subgrupo $H_p \subset G$ que fija p , esto es, tal que $h * p = p$, para todo $h \in G$, y dada $*$ la ley de dicho grupo.*

Como veremos que ocurre en nuestros dos modelos (ϕ^4 y sine-Gordon), supongamos que existe un grupo discreto cuyas transformaciones dejan invariante el término

de autointeracción, para lo que hace falta suponer que G está formado por elementos que operan en el espacio vectorial V . Dicho de otra forma, si denotamos por $g\phi$ a dicha acción de algún $g \in G$ sobre un elemento $\phi \in V$, se tiene:

$$U[g\phi] = U[\phi], \quad \forall g \in G. \quad (1.3.3)$$

No confundamos esto con una simetría sobre todo el espacio de configuración \mathcal{D} . Estamos suponiendo, simplemente, que G otorga a $U[\cdot]$ una simetría sobre los elementos de V , lo que en particular engloba a los elementos de la variedad de vacío M .

Supondremos también que, dado un punto de vacío $\phi_v \in M$, todos los elementos de M se pueden obtener de la forma $g\phi_v$, para algún $g \in G$. Veremos también que esto se cumple en nuestros modelos.

Bajo estas suposiciones, es posible demostrar, aunque no lo hagamos aquí por exceder con ello los objetivos de este trabajo, que si consideramos H el grupo pequeño de un punto de vacío ϕ_v arbitrario, con respecto a la representación dada de G en el espacio V , entonces la variedad de vacío M es isomorfa al grupo cociente G/H , que es grupo por ser H un subgrupo normal de G . Quedémonos pues con esta importante relación:

$$M \cong G/H. \quad (1.3.4)$$

La simplificación de que todos los puntos de vacío de M sean de la forma $g\phi_v$ para algún $g \in G$ tiene dos interesantes consecuencias:

1. Excluye la posibilidad de degeneración accidental por la que U presente ceros constantes independientes de cualquier tipo de simetría.
2. Omite la existencia de cualquier otro grupo interno de simetría ajeno a G .

En general, si no asumiéramos que existe una sola órbita en G en términos de los puntos de vacío, la variedad de ceros M se podría escindir en una unión disjunta de $r \in \mathbb{N}$ órbitas, de la forma

$$M = \cup_{a=0}^r G/G_a, \quad (1.3.5)$$

con G_a el grupo pequeño en la órbita indexada por $a \in \{0, \dots, r\}$.

Además, con todas estas consideraciones, estamos en condiciones de enunciar lo que se entiende por *espacio de moduli* para una variedad de puntos de vacío, y para el grupo de simetría G considerado. Este espacio se define como sigue

$$N = M/G = \{\phi^{(0)}, \phi^{(1)}, \dots, \phi^{(r)}\}, \quad (1.3.6)$$

donde cada $\phi^{(i)}$, $i = 0, \dots, r$, se corresponde con la clase de los puntos de vacío conectadas por transformaciones de G actuando sobre M . En nuestras teorías veremos que las variedades de moduli de vacío son conjuntos unipuntuales, lo que quiere decir que *todos* los puntos de vacío de la teoría están conectados vía transformaciones dadas por G . Por supuesto, esto no es un hecho general.

1.4. La topología de \mathcal{D}

En este apartado, veremos la relación entre condiciones de contorno de las configuraciones de \mathcal{D} y sus derivadas temporales, y la pertenencia a distintas componentes conexas. Esto nos permitirá identificar estas últimas, y caracterizar así las soluciones de nuestras ecuaciones de campos, reducidas, por lo visto, al caso estacionario. Particularizamos $V = \mathbb{C}$, y recordemos que ya hemos fijado $N = 1$ y $n = 1$.

Recordemos que hemos restringido nuestro estudio al subespacio \mathcal{D} , esto es, a los campos $\phi \in \text{Maps}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tales que $E[\phi] < \infty$.

Nuestro funcional energía se simplificaba a la expresión que sigue

$$E[\phi] = \int_{\mathbb{R}} dx \left[U[\phi] + \frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 \right]. \quad (1.4.1)$$

Es inmediata la acotación inferior que presenta el funcional de energía E sobre elementos de \mathcal{D} (con solo omitir el factor $1/2$ del primer término):

$$E[\phi] \geq \int_{\mathbb{R}} dx [(\partial_x \phi)^2 + U[\phi]]. \quad (1.4.2)$$

Así, para tener una energía finita $E[\phi] < \infty$, como ya se mencionó en el análisis de la evolución temporal de puntos de vacío y defectos topológicos, es necesario que el comportamiento espacialmente asintótico de nuestros elementos $\phi \in \mathcal{D}$ dada por los límites

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x), \quad (1.4.3)$$

y que denotamos por $\phi(\pm\infty)$, debe existir y debe ser, necesariamente, un cero de U , o de lo contrario, el área barrida por la integral anterior se hará infinita, y con ello tendríamos $E[\phi] = \infty$, en contraposición a nuestra suposición $\phi \in \mathcal{D}$.

Para que esa finitud bajo $x \rightarrow \pm\infty$ también sea satisfecha por el término dada por $(1/2)(\partial_x \phi)^2$ en el funcional $E[\cdot]$, también debemos tener

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \partial_x \phi(x) = 0. \quad (1.4.4)$$

Volviendo al lenguaje de más arriba, para que $E[\phi] < \infty$, necesariamente $\phi(\pm\infty) \in M$ o, de forma equivalente, $\phi(\pm\infty) \in G/H$. Englobando todas las condiciones de contorno de ϕ en un mismo objeto, podemos interpretar esta correspondencia como una aplicación $\phi(\infty)$ de \mathbb{Z}_2 en G/H . Identificamos $\partial\mathbb{R}$ con \mathbb{Z}_2 . Estamos haciendo corresponder cada uno de los elementos de $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ con cada uno de los dos puntos de vacío $\phi_1(\infty)$ y $\phi_2(\infty)$, uno para cada dirección del límite $x \rightarrow \pm\infty$.

1.4.1. Componentes conexas de \mathcal{D} y su grupo de homotopía

Para continuar, necesitamos algunos resultados y definiciones de la teoría de espacios topológicos conexos, así como de la teoría de homotopías. No se aportarán demostraciones, si bien se dará, puntualmente, la idea intuitiva de cómo se probaría. Empezamos definiendo lo que entendemos por homotopía, la cual es la formalización topológico-algebraica de la deformación continua entre aplicaciones continuas.

Definición 1.4.1. Sean X e Y dos espacios topológicos, y sean f_0 y f_1 dos aplicaciones continuas de X en Y . Sea I el intervalo cerrado y acotado $[0, 1]$. Diremos que f_0 y f_1 son homotópicas si y solo si existe una aplicación continua $F : X \times I \rightarrow Y$ tal que $F(x, 0) = f_0(x)$ y $F(x, 1) = f_1(x)$ para todo $x \in X$.

La relación de homotopía entre aplicaciones continuas es una relación de equivalencia. Esto nos permite escindir la familia de aplicaciones continuas entre los espacios topológicos X e Y en clases de equivalencia, las llamadas *clases de homotopía*, necesariamente disjuntas. Esto tiene una interpretación algebraica en el marco de la teoría de grupos a través de los llamados *grupos de homotopía*, como veremos ahora.

Identificaremos las componentes conexas de \mathcal{D} a través de dichos grupos de homotopía. Para ello, generalizamos nuestro problema otra vez a n variables espaciales. Afirmamos que la misma correspondencia que se ha hecho en el apartado anterior entre $\partial\mathbb{R} \cong \mathbb{Z}_2$ y G/H es extensible a S^{n-1} con G/H , para n variables espaciales, donde S^{n-1} denota la esfera en el espacio euclídeo n -dimensional. Fijamos un punto arbitrario $y \in S^{n-1}$ (e.g., su polo norte), y algún $\phi_0 \in G/H$ también arbitrario. Nos restringimos al conjunto de aplicaciones continuas que sigue

$$\mathcal{S} := \{f : S^{n-1} \rightarrow G/H : f(y) = \phi_0\}. \quad (1.4.5)$$

Notemos que hemos añadido una nueva restricción sobre las aplicaciones continuas estudiadas: deben tomar el punto $\phi_0 \in G/H$ en $y \in S^{n-1}$. Con el grupo dado por el conjunto de clases de homotopía de \mathcal{S} , junto a la ley interna naturalmente extendida de la concatenación de caminos en G/H , tenemos el n -ésimo grupo de homotopía $\pi_n(G/H)$. Nos referimos a los elementos de $\pi_n(G/H)$ como *clases de homotopía de G/H* .

Volvemos al estudio de la conexión de \mathcal{D} . Las ideas presentas ya nos permiten enunciar el siguiente resultado.

Teorema 1. *Existe una biyección entre el conjunto de clases de homotopía de G/H y el conjunto de componentes conexas de \mathcal{D} , extendida a n coordenadas espaciales. Como consecuencia, el número de G/H coincide con el número de componentes conexas de nuestro espacio de configuración \mathcal{D} , extendida a n coordenadas espaciales.*

La idea clave de la demostración de este teorema reside en que, como ya vimos más arriba para el caso unidimensional, existe una correspondencia biunívoca entre aplicaciones de $\text{Maps}(\partial\mathbb{R}^n \cong S^{n-1}, G/H)$ y las condiciones de contorno de las configuraciones de \mathcal{D} , extendidas a n variables espaciales.

Dado $\{D_i\}_{i \in I}$ el conjunto de componentes conexas con cardinal el de la familia de índices I , y dado un campo $\phi \in D_i$, la correspondencia se establece de la siguiente forma:

$$D_i \longleftrightarrow [\phi(\partial\mathbb{R}^n)] \in \pi_n(G/H). \quad (1.4.6)$$

Consecuencia directa de este teorema es el siguiente corolario.

Corolario 1.4.2. *Si no hay ninguna ruptura espontánea de simetría en la densidad lagrangiana de nuestra teoría de campos, entonces el espacio de configuración deberá ser necesariamente conexo.*

Demostración. Su demostración es directa del hecho de que si no hay ruptura espontánea de simetría, entonces el mínimo de U no puede estar degenerado, con lo que el grupo pequeño H del correspondiente punto de vacío es todo G : $H = G$. Entonces, $G/H = \{1_G\}$, con lo que el orden del grupo G/H es 1. Como, por el teorema 1, el número de componentes conexas de \mathcal{D} coincide con el número de clases de homotopía de G/H , y como todas las aplicaciones continuas de S^{n-1} a G/H dan al mismo punto, entonces solo hay una clase de homotopía, luego \mathcal{D} tiene una única componente conexa. Entonces, \mathcal{D} es conexo, y hemos terminado. \square

Este resultado 1.4.2 ilustra, con un caso muy particular, hasta qué punto la estructura topológica subyacente al espacio de configuración \mathcal{D} determina nuestra teoría de campos estudiada. Afirma que si hay más de un punto de vacío, se da una ruptura espontánea de simetría que aflora considerando fluctuaciones $\eta(t, x)$ sobre cada punto de vacío $\phi_v \in M$. Precisamente, la cuantización de estas fluctuaciones alrededor de un punto de vacío nos da la energía de punto cero de la teoría en el sector topológico de vacío.

1.5. Soluciones kink. Enfoque topológico

Cuando los defectos topológicos surgen de ecuaciones de onda no lineales que describen nuestros modelos de campos, se dan las llamadas *soluciones de tipo kink*. Con el estudio anterior sobre la conexión de \mathcal{D} , se tiene que decidir qué hacer con los puntos fijados en los espacios topológicos involucrados, con los cuales describíamos el conjunto \mathcal{S} . De cara a sentar un teoría sólida independiente de estos puntos (que, por ejemplo, fijábamos en el polo norte en las variedades S^{n-1}), manejaremos únicamente espacios conexos de configuraciones, restringiéndonos, como es el caso, a cada una de las componentes conexas de \mathcal{D} en el caso de que este último no sea conexo. En tal caso, es bien sabido de la teoría de homotopías que la construcción que sigue es completamente independiente del punto fijado en cada componente.

Estos aspectos topológicos en las teorías de campos, vía grupos de homotopía, permiten identificar las clases del grupo cociente G/H (equivalentemente, M), a través de subconjuntos de espacios euclídeos \mathbb{R}^d , para algún $d \in \mathbb{N}$ (con $d = 1$ en el caso que a nosotros nos ocupará de campos en una sola variable espacial).

No obstante, estas clasificaciones topológicas adquieren trascendencia solo cuando nos salimos de los modelos de campos lineales, en que todo campo ϕ puede ser sustituidos por un campo $(1 - t)\phi$, con $t \in (0, 1)$, dando así una homotopía que nos lleva del campo original ϕ al campo trivial $\phi = 0$.

En general, el caso no lineal no es trivial. En estos casos, restringiéndonos al caso particular de campos como aplicaciones de \mathbb{R}^n en algún espacio topológico Y (como es nuestro caso, $Y = V$, $n = 1$), afirmamos que, como \mathbb{R}^n es contráctil a un punto cualquiera, el único invariante topológico que conocemos en Y , a priori, es la componente conexa donde el correspondiente campo toma sus valores. Por lo tanto,

podemos afirmar que tales configuraciones de campo pueden ser clasificadas por los grupos de homotopía $\pi_1(Y)$. En otras palabras, la aplicación que lleva a cada una de estas configuraciones a su grupo $\pi_1(Y)$ está bien definida.

Este tipo de clasificaciones topológicas se hace más interesante cuando el funcional energía decae a 0 para valores muy altos de la norma sobre el vector de coordenadas espaciales (en nuestro caso, cuando $x \rightarrow \pm\infty$)⁵. Esto es una consecuencia de una razón física muy poderosa que ya ha salido varias veces en este trabajo: la energía del campo tiene que ser finita. Precisamente, esta es la condición que nos llevaba a identificar las condiciones de contorno de nuestros campos en $\partial\mathbb{R}^n$ con las componentes conexas de \mathcal{D} . Todo esto se resume en la siguiente correspondencia, la siguiente pertenencia, y el siguiente isomorfismo:

$$D_i \longleftrightarrow [\phi(\partial\mathbb{R}^n)] \in \pi_n(G/H) \cong \pi_n(M). \quad (1.5.1)$$

En conclusión, aportamos un resultado que resume y anticipa lo que está por venir.

Lema 1.5.1. *El carácter topológico de una configuración de campo ϕ está determinado por la clase de homotopía de sus condiciones de contorno, interpretados como elementos de M , y por lo tanto, vía isomorfismo, de G/H . Es decir, dicho carácter queda completamente determinado por la clase de homotopía $\pi_n(M)$.*

A modo de ejemplo, y a costa de generalizar los modelos que nos ocupan, tomemos $G = SO(n)$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Ilustremos este caso particular a través de los puntos siguientes, ya perfectamente entendible con la teoría expuesta. Recordemos, ya que ahí está la clave, que $G/H \cong M$, con lo que:

1. Si M consiste en una sola órbita de G , entonces, o bien M tiene un único punto, o bien M consiste, vía isomorfismo, a una esfera S^{n-1} , dependiendo de la forma del potencial autointeracción U .
2. Si, en particular, M es un único punto, lo que significaría que la simetría se *recompone* en la variedad de vacío (recordemos el corolario 1.4.2), entonces solo existe la clase de homotopía trivial en $\pi_n(M)$, y no habrá defectos topológicos.
3. Si, en particular, $M = S^{n-1}$, entonces sigue existiendo una ruptura espontánea de simetría del grupo interno de simetría G , y la aplicación (1.5.1) toma la forma siguiente

$$D_i \longleftrightarrow [\phi(\partial\mathbb{R}^n)] \in \pi_n(G/H) \cong \pi_n(S^{n-1}), \quad (1.5.2)$$

de tal modo que las configuraciones de \mathcal{D} estarán clasificadas por el grupo de homotopía $\pi_n(S^{n-1})$.

Nos restringimos, ahora así, a nuestro caso, $n = 1$, para poder enfrentarnos a nuestros modelos ϕ^4 y sine-Gordon. En este caso, $\partial\mathbb{R}$, es decir, lo que se conoce como la esfera

⁵Nótese, en el caso de los solitones, nosotros pedimos algo más fuerte: *energía total finita*.

en el infinito S_∞^{n-1} de \mathbb{R}^{n-1} para $n = 1$, toma la forma $\{-\infty, \infty\}$. De este modo, la correspondencia entre condiciones de contorno y M vendría dada por

$$\xi : S_\infty^{n-1} = \{-\infty, \infty\} \rightarrow M. \quad (1.5.3)$$

Esto nos lleva a enunciar el siguiente teorema.

Teorema 2. *Las componentes de M (o, equivalentemente, las de G/H), en el caso $n = 1$, están clasificadas por el grupo de homotopía $\pi_1(M)$.*

Con el teorema 2, podemos identificar $\pi_1(M)$ con el conjunto de puntos de vacío topológicamente distintos. Entiéndase esta terminología de *diferencia topológica* en términos de dicho teorema.

De este modo, la clase de homotopía de una configuración de campo para $\phi(x)$ se puede identificar con un elemento del grupo $\pi_1(M) \times \pi_1(M)$.

Suponamos que M es finito y que $\pi_1(M)$ está formado por $p \in \mathbb{N}$ puntos de \mathbb{C} (recordemos que, en nuestro \mathcal{D} , tenemos $V = \mathbb{C}$). Entonces, existen p^2 tipos topológicamente distintos de campos en \mathcal{D} . Enunciamos un lema que resume esto último.

Lema 1.5.2. *Toda configuración $\phi \in \mathcal{D}$ está topológicamente caracterizada por un elemento $(v_1, v_2) \in \pi_1(M) \times \pi_1(M)$.*

Y ya, por fin, damos los dos casos generales clave para entender las configuraciones de campo que ocupan en este trabajo:

1. Si $v_1 = v_2$, entonces el campo será de la clase de cualquiera de los puntos de vacío representantes de la clase de homotopía de v_1 .
2. Si $v_1 \neq v_2$, entonces el campo conectará, vía las homotopías antes descritas, un punto de vacío representante de v_1 en $-\infty$, con un punto de vacío representante de v_2 en ∞ . Diremos que estos campos son **tipo kink**. El hecho de que la evolución temporal sea una aplicación continua sobre $\mathbb{R} \times \mathcal{D}$, y que las soluciones kink estén en componentes conexas disjuntas de los puntos de vacío, justifica el nombre dado a estas configuraciones: *defectos topológicos*.

En adelante, para no cargar las explicaciones, denotaremos exactamente igual a las clases de $\pi_1(M)$ y a los puntos de vacío de M .

Fijémonos en que la clave de la existencia de las soluciones de tipo kink está en la existencia de múltiples puntos de vacío. Esta última, por el corolario 1.4.2, no puede ocurrir si no hay ruptura espontánea de simetría.

Cerrando este planteamiento, estas soluciones son, precisamente, los defectos topológicos de los que hablábamos en los razonamientos introductorios de este enfoque topológico. La razón es sencilla: hemos visto que los campos de tipo kink son configuraciones de \mathcal{D} que conectan distintos puntos de vacío. En particular, un kink no puede ser un punto de vacío, o si no, evidentemente, no podría conectar vacíos diferentes. Por lo tanto, la definición dada para soluciones tipo kink es *justamente* la de defecto topológico, esto es, una configuración no singular $\phi \in \mathcal{D}$, y distinta del vacío. Como acabamos de ver, no hay más soluciones en \mathcal{D} que las de tipo kink y los puntos de vacío, lo cual termina la demostración de esta identificación. Además,

recordemos el sentido de la terminología utilizada: defecto topológico es una solución con este carácter topológico que pertenece a \mathcal{D} , y si además es solución de una ecuación de ondas no lineal, entonces dicha configuración es un kink. En adelante, usaremos uno y otro término biunívocamente.

1.6. Estructura de vacío

La densidad lagrangiana objeto de nuestro estudio (no estamos considerando campos gauge), la cual involucra a un único campo escalar real ϕ , es la que sigue

$$\mathcal{L}[\phi] = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - U[\phi], \quad (1.6.1)$$

donde hemos vuelto a introducir la dependencia temporal del campo. La ecuación de Euler-Lagrange derivada de esta densidad lagrangiana es

$$\square \phi + \frac{\partial U}{\partial \phi} = 0. \quad (1.6.2)$$

Recordemos que estamos manejando un potencial de autointeracción U acotado inferiormente, con un mínimo absoluto $U_{\min} = 0$, y dado en forma polinómica, globalmente con finitos términos (ϕ^4), o localmente con infinitos términos (sine-Gordon) del campo ϕ .

El funcional energía potencial o energía venía dado por la siguiente expresión

$$E[\phi] = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2} \partial_x^2 \phi + U(\phi) \right) dx. \quad (1.6.3)$$

La energía cinética, por su parte, venía dada por

$$T[\phi] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \partial_t^2 \phi dx. \quad (1.6.4)$$

Recordemos también la definición que dábamos para la *variedad de vacío*, indispensable para el análisis que sigue:

$$M = \{ \phi \in V : U[\phi] = U_{\min}[\phi] = 0 \}. \quad (1.6.5)$$

Como ya se ha estudiado en este trabajo, sabemos que la existencia de defectos topológicos, esto es, de soluciones tipo kink, depende exclusivamente de la existencia de múltiples vacíos en M , de tal forma que M pueda tener más de una componente conexa, por el teorema 1. En otras palabras, $\pi_1(M)$ tiene que ser un grupo no trivial. Denotamos la identificación topológica de un elemento $\phi \in \mathcal{D}$ a través de la dupla $(\phi_-, \phi_+) \in \pi_1(M) \times \pi_1(M)$ (que antes denotamos (v_1, v_2)), con $\phi_{\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) \in M$. Con esta notación, la clasificación punto de vacío - kink se da de la siguiente manera:

1. $\phi_- = \phi_+ \implies \phi \in M$. Entonces, por deformaciones continuas, el campo puede transformarse en una constante $\phi_+ \in M$, i.e., en un punto de vacío.

2. $\phi_- \neq \phi_+ \implies \phi$ es solución kink. Entonces, el campo no puede deformarse por transformaciones continuas a un punto de vacío. Si pudiéramos deformar con continuidad un kink $\phi(x)$ a un vacío, necesariamente, en algún punto de la deformación, tendríamos un campo $\hat{\phi}$, homotópico a ϕ , tal que $\phi(\pm\infty)$ no está en M , por lo que $\hat{\phi}$ tendría energía infinita, violando la condición continua de dicha deformación (i.e., violando la conservación de la energía).

Estas soluciones de tipo kink siempre son funciones monótonas crecientes o decrecientes estrictas, conectando un puntos de vacío ϕ_- con otro ϕ_+ , para $\phi_- \neq \phi_+$. Esta implicación veremos que es consecuencia directa de un cierto tipo de ecuación estacionaria que describe dichas soluciones: *la ecuación de Bogomolny de primer orden*.

Presentamos dos formulaciones equivalentes de la estabilidad de una solución ϕ de la ecuación de campo (1.1.24):

1. Diremos que ϕ es estable si y solo si el espectro del operador Hessiano dado en (1.1.27) está formado por autovalores no negativos.
2. Diremos que ϕ es estable si y solo si, bajo perturbaciones de ϕ en un entorno de éste, el campo resultante sigue siendo solución de (1.1.24).

Así, el análisis hecho en términos de homotopías en el caso $\phi_+ \neq \phi_-$ es la razón fundamental por la que una solución de tipo kink siempre es estable, ya que la evolución temporal es un caso particular de homotopía o, dicho de otra forma, de deformación continua, a través de la cual la energía ha de permanecer finita para todos los valores del parámetro homotópico. Más adelante entraremos en el detalle de esto.

En otras palabras, y lo veremos para nuestros dos modelos, esta clasificación topológica dependerá de la forma que tome el campo escalar $\phi(x)$ cuando lo representemos en función de x . A cada uno de estos grandes grupos de soluciones en \mathcal{D} (o, equivalentemente, a cada una de las componentes conexas del espacio \mathcal{D}) se les denomina *sectores topológicos del modelo*.

1.7. Identificación del kink como partícula

Todos los argumentos utilizados en los apartados anteriores son válidos para soluciones sin dependencia temporal que conectan asintóticamente puntos de vacío iguales (elementos de M) o diferentes (soluciones kink). Así, todo lo que sabemos sobre las soluciones kink es que son defectos topológicos y que tienen energía finita. Tratamos en este apartado su interpretación como solitones, i.e., como ondas propagantes solución de una ecuación de ondas no lineal de la forma (1.1.8).

En términos formales, aportamos la siguiente definición de solitón.

Definición 1.7.1. *Un solitón es una solución no singular de la ecuación de campo (1.1.24), cuya densidad de energía permanece localizada en una región finita del espacio y puede ser escrita de la forma*

$$\varepsilon(t, x) = \varepsilon(x - vt), \tag{1.7.1}$$

donde $v \in \mathbb{R}$ es interpretado como la velocidad del solitón en un sistema de referencia fijado.

En otras palabras, la densidad de energía es localizada y se mueve con velocidad constante. Este anstanz tiene una implicación que enriquece nuestra teoría: es una justificación alternativa a la omnipresencia del grupo uniparamétrico \mathcal{T} de que podemos buscar soluciones de (1.1.24) centrándonos en soluciones estacionarias, pues el resto se puede obtener a partir de una transformación de Lorentz. Son formas distintas de decir lo mismo.

Recordemos algunas de las propiedades que hemos ido deduciendo e imponiendo a lo que hasta ahora entendíamos por solución kink:

1. Por su condición de solución estacionaria,

$$\partial_t \phi_k = 0. \quad (1.7.2)$$

2. Son puntos críticos del funcional energía de nuestra teoría, dado por

$$E[\phi] = \int dx \left[\frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 + U[\phi] \right], \quad (1.7.3)$$

de lo que deducíamos la ecuación de campo (1.1.24) de la teoría, para un solo campo escalar, i.e., $N = 1$.

3. Como la energía del kink es finita, también han de serlo los dos términos del integrando de (1.7.3). Esto ya lo probamos, y dedujimos de ello que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi_k(x) \in M, \quad (1.7.4)$$

mientras que esta misma condición sobre el término con la derivada $\partial_x \phi$ implicaba que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \partial_x \phi_k(x) = 0. \quad (1.7.5)$$

De hecho, como ya se mencionó, si aplicamos una transformación de Lorentz sobre la solución estacionaria de tipo kink $\phi_k(x)$, entendiéndola como en el sistema de referencia centro de masas del kink, podemos obtener la solución no estacionaria

$$\phi_k(t, x) = \phi_k \left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}, \right), \quad (1.7.6)$$

lo que explicita la condición de onda propagante de este último campo, a partir de las condiciones dadas sobre la solución estacionaria subyacente. Nótese que estamos considerando $c = 1$, con lo que $v \in (0, 1)$.

Al hilo del carácter de solitón para nuestras soluciones kink que veremos en nuestros modelos, y aunque estamos trabajando con teoría continuas de campos, los kinks pueden ser interpretados como partículas clásicas. Siendo más estrictos, dada su densidad de energía parcialmente localizada pero no concentrada en un punto, se pueden ver como *objetos extensos*. Tienen una masa en reposo M finita, y una localización definida (en concreto una localización para su *centro de masas*). Por

invariancia Lorentz en (1.7.6), estas soluciones propagantes tendrán la energía que sigue

$$E = (P^2 + M^2)^{1/2}. \quad (1.7.7)$$

No obstante, hay una diferencia fundamental con las partículas clásicas de mecánica clásica. Consideremos n puntos en el espacio, ordenados $a_1 < \dots < a_n$, así como n soluciones tipo kink estacionarias $f_i(x)$, y la configuración ϕ tal que $\phi(x) = f_i(x - a_i)$ en entornos de cada a_i . Entonces, la única forma de que esta configuración sea exacta y esté bien definida es que

$$f_i(\infty) = f_{i+1}(-\infty), \quad (1.7.8)$$

por la propia naturaleza topológica de las soluciones kink. Esta sencilla condición de *unión* de soluciones adyacentes tiene consecuencias muy grandes sobre la interpretación de los kinks como partículas. Retomaremos esto cuando hayamos tratado más a fondo las teorías ϕ^4 y sine-Gordon.

1.8. Estabilidad de las soluciones kink

Para estudiar la estabilidad de las soluciones tipo kink hay que hablar de las perturbaciones hasta segundo orden en el funcional acción. Razonamos sobre una teoría escalar de campos sobre la que existen, al menos, dos mínimos degenerados del término potencial, de tal forma que tengamos asegurada, siguiendo el hilo argumentativo de este trabajo, la existencia de soluciones con energía finita no triviales que minimicen, al menos localmente, dicho término. Si bien un tratamiento riguroso nos llevaría a un estudio detenido de la teoría de operadores de Sturm-Liouville, nos limitamos a tratar la estabilidad a partir de las ecuaciones de campo conocidas, y de las características vistas de las soluciones kink.

Estrictamente, y restringiéndonos a la dependencia espacial al delegar la temporal a las transformaciones de \mathcal{T} , una solución $\phi_S(x) \in \mathcal{D}$ es estable en nuestro espacio de configuración si y solo si el operador de segunda variación del funcional acción, en dicha solución, tiene *todos* sus autovalores mayores o iguales que cero. En la práctica, como veremos ahora, esto se prueba perturbando dicha solución $\phi_S(x)$, a la que nosotros llamaremos ϕ_{min} para enfatizar su condición de mínimo del término potencial U , con una función ψ suficientemente regular, y dando los pertinentes desarrollos en potencias de ψ para U .

Sea ϕ_m uno de estos mínimos, y denotamos por $\psi(x, t)$ a una función arbitraria, con orden de diferenciabilidad suficiente, que nos dé pequeñas oscilaciones respecto a ϕ_{min} . El desarrollo de Taylor del término potencial U quedaría como

$$U[\psi] = \frac{U[\phi_{mín}](\psi - \phi_{mín})^0}{0!} + \frac{U'[\phi_{mín}](\psi - \phi_{mín})^1}{1!} + \frac{U''[\phi_{mín}](\psi - \phi_{mín})^2}{2!} + O(\psi^3).$$

Por a condición necesaria de mínimo local, se tiene que

$$U'[\phi_{min}] = 0,$$

luego la densidad lagrangiana de la teoría hasta segundo orden en ψ es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \psi) (\partial^\mu \psi) - U[\phi_{\text{mín}}] - \frac{U''[\phi_{\text{mín}}] (\psi - \phi_{\text{mín}})^2}{2!} - O(\psi^3).$$

Además, por el teorema de Noether, tenemos la siguiente ecuación de campo

$$\partial_\mu \partial^\mu \psi + U''[\psi] \psi + O(\psi^2) = 0.$$

Hasta segundo orden en el desarrollo de U , se tiene

$$\partial_\mu \partial^\mu \psi(x, t) + U''[\phi_{\text{mín}}] \psi(x, t) = 0. \quad (1.8.1)$$

Esta ecuación (1.8.1) es invariante frente a traslaciones sobre las componentes del campo. Entonces, las soluciones de (1.8.1) pueden ser escritas como

$$\psi(x, t) = \text{Re} \sum_n a_n e^{i\omega_n t} \psi_n(x), \quad (1.8.2)$$

con w_n , a la que llamamos *autovalor frecuencia* o *frecuencia*, y ψ_n determinadas por

$$-\partial_x^2 \psi_n + U''[\phi_{\text{mín}}] \psi_n = \omega_n^2 \psi_n. \quad (1.8.3)$$

Nótese que (1.8.3) es una ecuación de Schrödinger unidimensional, cuyo potencial es $U''[\phi_{\text{mín}}]$. Por lo tanto, la solución $\phi(x, t) = \phi_{\text{mín}} + \psi(x, t)$ es estable si y solo si todos los valores propios energía w_n^2 de la ecuación son no negativos. Veamos que este es siempre el caso.

Sabemos que la teoría es invariante frente a traslaciones, esto es, si $f(x)$ es solución, entonces $f(x+a)$ es también solución para todo $a \in \mathbb{R}$. Por ello, ya conocemos un autoestado de energía de la ecuación de Schrödinger (1.8.3), que es

$$\psi_0(x) = \partial_x f(x), \quad (1.8.4)$$

el cual aflora del generador de estas transformaciones traslacionales (∂_x), y de la forma de las ecuaciones de campo. En concreto, si $f(x)$ es solución de la ecuación estacionaria de campo de la teoría, entonces

$$\partial_x^2 f(x) = \frac{\partial U}{\partial \phi}, \quad (1.8.5)$$

con lo que una derivación con respecto a x en ambos términos, y una aplicación de la regla de la cadena en el segundo miembro nos lleva a

$$-\partial_x^2 (\partial_x f) + U''[\phi_{\text{mín}}] (\partial_x f) = 0, \quad (1.8.6)$$

esto es, $\psi_0(x)$ es autoestado en esta ecuación de Schrödinger, con autovalor $w_n = 0$. El carácter monótono estricto de las soluciones kink implica que ψ_0 no puede tener nodos. Es bien conocido que para una ecuación de Schrödinger unidimensional con potencial arbitrario, el autoestado sin nodos es el autoestado de más baja energía. Y su energía es cero. Es decir, no existen autovalores w_n^2 negativos. Esto demuestra la estabilidad de las soluciones kink. Más adelante, en 3.1.1, volveremos a tocar este

tipo de autoestados cuando hablemos de modos nulos de las oscilaciones alrededor de soluciones estables de la teoría.

Como último apunte con respecto a la estabilidad de estos campos, supongamos por un momento que sabemos cómo resolver explícitamente esta ecuación (en una aproximación linealizada), de lo que obtendríamos una familia de soluciones de nuestra ecuación de movimiento (1.8.3). Esta familia sería especialmente interesante si entre ellas hubiera soluciones enmarcadas en un espectro discreto $\{w_n\}$, con algún $w_n \neq 0$. En ese caso, el autoestado asociado nos daría una solución de la ecuación linealizada de movimiento, que tiene energía finita, y que es periódica en el tiempo. Adelantando acontecimientos, y tomando ya atisbos de lenguaje de teoría cuántica, uno podría pensar que esta situación tiene que ver con mesones ligados al kink. Por otra parte, pudiera haber también una parte continua del espectro de (1.8.3), con la cual solo podríamos formar una solución de energía finita a través de paquetes de onda, los cuales representarían mesones en scattering con el kink de fondo. Veremos, cuando llegemos a la teoría de campos cuánticos, que todo esto es verdad.

1.9. Teorema de Derrick

Este trabajo quedaría incompleto si no enunciáramos uno de los teoremas más sobrecogedores de la teoría de campos escalares: *el teorema de Derrick* [22]. Este resultado confirma la no existencia de soluciones independientes del tiempo, distintas de los estados fundamentales, para una teoría de N campos escalares complejos, en $D > 1$ dimensiones espaciales. A continuación, lo enunciaremos y demostramos.

Teorema 3 (Teorema de Derrick). *Sea ϕ una familia de $N \in \mathbb{N}$ campos escalares complejos, dados en un vector N -dimensional, en una dimensión temporal y $D \in \mathbb{N}$ dimensiones espaciales. Supongamos que la dinámica de estos campos está gobernada por una densidad lagrangiana del tipo*

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - U[\phi], \quad (1.9.1)$$

con U un funcional no negativo y nulo para los estados fundamentales de la teoría. Entonces, si $D \geq 2$, las únicas soluciones independientes del tiempo no singulares, y con energía finita, son los estados fundamentales.

Demostración. Denotamos por x al vector con las D variables espaciales. Dado ϕ un campo cualquiera, denotamos

$$V_1 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^D} d^D x (\nabla \phi)^2, \quad (1.9.2)$$

$$V_2 = \int_{\mathbb{R}^D} d^D x U[\phi].$$

Se tiene que V_1 y V_2 son no negativos, y solo se pueden anular las dos al mismo tiempo si ϕ es un estado fundamental.

Supongamos ahora que $\phi(x)$ es una solución independiente del tiempo. Consideramos la familia uniparamétrica de configuraciones de campos dada por:

$$\phi(x, \lambda) = \phi(\lambda x), \quad (1.9.3)$$

con $\lambda > 0$. Para esta familia de campos, el funcional energía viene dado por

$$V(\lambda) = \lambda^{2-D}V_1 + \lambda^{-D}V_2. \quad (1.9.4)$$

Por el principio de Hamilton, esta función $V(\lambda)$ tiene que ser estacionaria para $\lambda = 1$. Entonces, tenemos la igualdad:

$$(D - 2)V_1 + DV_2 = 0. \quad (1.9.5)$$

Supongamos que $D > 2$. Entonces, necesariamente, V_1 y V_2 se anulan simultáneamente, y ello completa nuestra demostración en este caso.

Si $D = 2$, solo podemos decir que V_2 se anula, luego necesitamos trabajarlo un poco más. Como V_2 se anula, el campo es estacionario, ya que cero es su mínimo absoluto. Entonces, aplicando el principio de Hamilton separadamente al término V_1 , tenemos que, necesariamente, V_1 también se anula. \square

Note el lector que nada se ha dicho en el teorema 3 sobre las soluciones dependientes del tiempo. Solo niega la existencia de *soluciones estacionarias que no sean estados fundamentales* en teorías escalares con $D \geq 2$ dimensiones espaciales.

Pese a que a nosotros este teorema no nos afecta (tratamos con campos escalares con una sola variable espacial), limita gran parte del enfoque topológico de estas teorías, vía soluciones estacionarias, a nuestro caso. Así, podemos seguir razonando con soluciones estacionarias sin perder la información que buscamos.

Capítulo 2

Energías clásicas. Modelos ϕ^4 y sine-Gordon

A continuación, presentamos los modelos clásicos de ϕ^4 y sine-Gordon. Note el lector que empezaremos dando las características más básicas, mucho de ellos resultado de cálculos muy sencillos, para nada innecesarios si queremos entender la física que hay detrás de estos. Más adelante, cuando reformulemos las teorías por medio de campos y variables adimensionales, presentaremos y desarrollaremos toda la teoría topológica y analítica que subyace en estos campos de una forma más sistemática. Esto va fraguando nuestro camino hacia la cuantización, regularización y cálculo de correcciones a la energía clásica de estos campos, al orden de un lazo, y en este tipo de teorías escalares.

2.1. Ecuaciones de Bogomolny de primer orden

Volvemos a restringirnos al estudio de soluciones estacionarias para nuestras teorías con $n = 1$ (recordemos que se puede recuperar el campo en un instante determinado a través de la aplicación de la correspondiente aplicación evolución temporal a dicho instante, i.e., a través del grupo uniparamétrico \mathcal{T}).

Particularizando el funcional energía para el caso $n = 1$ de la familia de soluciones independientes del tiempo, obtenemos que

$$E[\phi] = \int_{\mathbb{R}} dx \left[\frac{1}{2} (\partial_x \phi(x))^2 + U[\phi] \right]. \quad (2.1.1)$$

Consideramos la función, definida en todo \mathbb{R} :

$$H(x) = \frac{1}{2} (\partial_x \phi(x))^2 - U[\phi(x)]. \quad (2.1.2)$$

En paralelo con el equivalente mecánico discutido más adelante, esta función puede ser entendida como la energía de una partícula dependiente del tiempo, que viene dado por la variable real x , y para la que $-U[\phi(x)]$ puede ser interpretada como la energía potencial de ésta. Por conservación de la energía, y dado que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x)$ es un elemento de M , y que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \partial_x \phi(x) = 0$, necesariamente $H = 0$, puesto que

no solo se ha de anular el primer término de H , sino también U . Integrando ahora respecto a la medida de Lebesgue de \mathbb{R} , se sigue la igualdad siguiente

$$\int_{\mathbb{R}} dx \frac{1}{2} (\partial_x \phi(x))^2 = \int_{\mathbb{R}} dx U[\phi(x)]. \quad (2.1.3)$$

Esta ecuación, note el lector, es una forma particular del *teorema del virial*.

De esta última expresión, se sigue una acotación inferior del funcional energía que *solamente depende de los valores de ϕ en el infinito*, i.e., de la *clasificación topológica* de $\phi \in \mathcal{D}$.

Tomando raíces cuadradas, se sigue que

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \partial_x \phi \pm \sqrt{U[\phi]} \right)^2 \geq 0. \quad (2.1.4)$$

Expandiendo este cuadrado e integrando en todo \mathbb{R} , se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}} dx \left(\frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 + U[\phi] \right) \geq \int_{\mathbb{R}} dx \sqrt{2U[\phi]} \partial_x \phi. \quad (2.1.5)$$

Entonces, como es inmediato de la forma que tiene el funcional energía para soluciones estacionarias (justamente el primer miembro de la última ecuación), tenemos que

$$E \geq \left| \int_{\mathbb{R}} dx \sqrt{2U[\phi]} \partial_x \phi \right|. \quad (2.1.6)$$

Formalmente, podemos escribir esta desigualdad en términos de ϕ_+ y ϕ_- , dadas las identificaciones topológicas ya estudiadas, como sigue

$$E \geq \left| \int_{\phi_-}^{\phi_+} d\phi \sqrt{2U[\phi]} \right|. \quad (2.1.7)$$

De hecho, es inmediato probar esta misma acotación inferior sobre soluciones dependientes del tiempo, dado que el término cinético T es positivo.

Dada la autointeracción $U[\phi]$, la forma en que se suele encontrar en la literatura esta acotación es en términos de un funcional $W[\phi]$ definido por

$$U[\phi] = \frac{1}{2} \left(\frac{dW}{d\phi} \right)^2, \quad (2.1.8)$$

con lo que la acotación anterior se reescribe como

$$E \geq |W[\phi_+] - W[\phi_-]|. \quad (2.1.9)$$

Este tipo de acotación, en que el funcional energía E está acotado inferiormente en términos de los datos topológicos del campo son las **cotas de Bogomolny** [25].

Dando un paso más, para convertir en igualdades a estas desigualdades, los campos ϕ en cuestión han de ser estacionarios (i.e., $\partial_t \phi = 0$, caso al que nos restringimos vía \mathcal{T}), y deben satisfacer la **ecuación de Bogomolny de primer orden**, es decir,

$$\partial_x \phi = \pm \sqrt{2U[\phi]}. \quad (2.1.10)$$

Un caso particular de campos que satisfacen estas ecuaciones son los campos, ya vistos, de tipo kink, dada la construcción seguida. En este caso, llamaremos *kinks* a los casos con signo + en (2.1.10), y *antikink* a los casos con signo −.

Estas terminologías de kink y antikink proceden de un comentario hecho en la construcción de las soluciones kink del capítulo primero. Por la forma de (2.1.10), se cumple que $\partial_x \phi(x)$ es siempre mayor que cero, o siempre menor que cero. Es decir, estas soluciones son siempre estrictamente crecientes (kinks) o decrecientes (antikinks). Esto es consecuencia de que, en nuestros dos modelos, $U[\phi(x)] > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, dada $\phi(x)$ la correspondiente solución kink.

Se sigue del razonamiento seguido, acotación incluida, que las soluciones de (2.1.10) son mínimos relativos del funcional energía, por lo que estas soluciones son puntos críticos de dicho funcional. Entonces, son soluciones estacionarias de las ecuaciones diferenciales de segundo orden de Euler-Lagrange (1.6.2).

Esto último se deduce diferenciando, directamente, sobre la ecuación (2.1.10):

$$\partial_x^2 \phi = \pm \frac{1}{\sqrt{2U}} \frac{dU}{d\phi} \partial_x \phi = \frac{dU}{d\phi}. \quad (2.1.11)$$

2.2. Equivalente mecánico

Como acabamos de enunciar a modo de consecuencia del cálculo de las cotas y la ecuación de Bogomolny de primer orden, las soluciones estacionarias de nuestra teoría escalar satisfacen (2.1.11). Recordando esto, presentamos el símil mecánico que se puede hacer sobre este tipo de teorías, leyendo dicha ecuación como la ecuación de movimiento de un problema mecánico clásico de partículas. En lo que sigue, los argumentos de los funcionales se darán entre paréntesis, para remarcar el símil.

Interpretamos dicha EDO¹ (2.1.11) como la ecuación que gobierna el movimiento de un sistema mecánico equivalente a nuestro sistema, en que

- 1) El campo ϕ es la partícula.
- 2) La variable x es el tiempo para dicha partícula.
- 3) El funcional $-U$, entendido como función de x para cada evaluación en $\phi(x)$, es la energía potencial.

Esto nos deja un sistema mecánico integrable en que, a diferencia de las técnicas de cálculo directo del apartado anterior, podemos afirmar la existencia de una constante de movimiento como sigue

$$I = \frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 - U(\phi), \quad (2.2.1)$$

lo cual se interpreta como la energía de la partícula en el sistema mecánico análogo. Nótese que esta constante de movimiento es exactamente la función $H(x)$ del apartado anterior. Como era de suponer, son dos formas equivalentes de expresar lo mismo. Al igual que entonces, las condiciones asintóticas $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \partial_x \phi(x) = 0$ y

¹En adelante, llamamos EDO a toda ecuación diferencial ordinaria.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) \in M$ implican que $I = 0$, de lo que se induce de igual forma la EDO de primer orden de Bogomolny,

$$\partial_x \phi(x) = \pm \sqrt{2U[\phi(x)]}.$$

El análisis que sigue ya es completamente paralelo al dado en la desigualdad (2.1.7), tomada ahora como igualdad, y con un significado mecánico más nítido. Con ello, definimos la *función característica de energía de Hamilton* como sigue, salvo constante de integración:

$$W(\phi) = \pm \int d\phi \sqrt{2U(\phi)}, \quad (2.2.2)$$

la que formaliza la evaluación del funcional energía (i.e., la energía de la acción de la partícula equivalente), como una cantidad dependiente de la topología de la configuración:

$$E[\phi_k] = |W(\phi^{i+1}) - W(\phi^i)|, \quad (2.2.3)$$

con ϕ_k la correspondiente solución kink, y ϕ^i y ϕ^{i+1} puntos de vacío consecutivos. Recalcamos que tanto este desarrollo del equivalente mecánico es idéntico a la situación de igualdad sobre las cotas de Bogomolny. No es más que otra forma de decir lo mismo.

2.3. Kinks del modelo ϕ^4

Este modelo consiste en una teoría de campos escalares y reales en que solamente tenemos dos vacíos. De ello se sigue que el grupo de homotopía es $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_2$. Recordemos que nos hemos restringido a funcionales $U[\phi]$ de tipo polinómico, con potencias de orden par en los campos. Luego, si queremos un U con dos vacíos diferentes, como mínimo tenemos que pedir que sea cuadrático. Si queremos, además, que la ecuación de campo resultante sea no lineal y del orden más bajo posible, tendrá que ser, en definitiva, un potencial de autointeracción cuártico. En general, tenemos la siguiente forma de tal autointeracción, con los coeficientes aún por especificar,

$$U[\phi] = d + b\phi^2 + c\phi^4, \quad d, b, c \in \mathbb{R}. \quad (2.3.1)$$

La primera regla de selección aflora del hecho de que $E[\phi]$ está acotado inferiormente por un valor mayor igual que cero. Entonces, $c > 0$. Tomamos, por conveniencia futura, $c = \lambda/4$, con $\lambda > 0$ constante.

Supongamos que $b \geq 0$. Un sencillo cálculo de las derivadas $U'[\phi]$ y $U''[\phi]$ nos lleva a que, en este caso, U solo tendría un mínimo absoluto en $\phi = 0$, con lo que M solo tendría un punto, esto es, $\pi_1(M)$ tendría una sola clase y, por ello, \mathcal{D} tendría una sola componente. Entonces, no habría soluciones kink. Necesariamente tenemos que imponer $b < 0$. Escogemos $b = -m^2/2$, con m una constante real y positiva.

Además, para tener $U_{\min} = 0$, escogemos, sin pérdida de generalidad, $d = m^4/4\lambda$.

Tenemos pues un funcional U de la forma que sigue

$$U[\phi] = \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - a^2)^2, \quad (2.3.2)$$

donde se ha denotado $a = m/\sqrt{\lambda}$.

De esta forma del término potencial, tenemos dos mínimos globales degenerados $U(\phi) = 0$ en $\phi = m/\sqrt{\lambda}$ y $\phi = -m/\sqrt{\lambda}$, ambos constantes, con lo que tenemos dos puntos de vacío con las expresiones siguientes

$$v_- = -m/\sqrt{\lambda}, \quad v_+ = m/\sqrt{\lambda}. \quad (2.3.3)$$

Con lo anterior, la densidad lagrangiana de este modelo queda de la siguiente forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - a^2)^2. \quad (2.3.4)$$

El análisis dimensional de esta teoría sería como sigue, habiendo tomado $c = 1$,

$$[\hbar] = ML, \quad [\phi] = M^{1/2}L^{1/2}, \quad [\lambda] = M^{-1}L^{-3}, \quad [m] = L^{-1}. \quad (2.3.5)$$

A través de la ecuación de Euler-Lagrange, obtenemos la siguiente ecuación de campo

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \lambda \phi (\phi^2 - a^2) = 0. \quad (2.3.6)$$

Ahora bien, una forma trivial de identificar cada uno de los sectores topológicos en que clasificamos las soluciones finitas de nuestro modelo en \mathcal{D} , en el marco de la teoría ϕ^4 , y teniendo en cuenta la forma que tienen los dos puntos de vacío (2.3.3), es a través de la **carga topológica del modelo ϕ^4** que, normalizada por meras razones estéticas, se define como sigue

$$N = \sqrt{\lambda} \frac{\phi_+ - \phi_-}{2m}, \quad (2.3.7)$$

donde recordemos que ϕ_+ y ϕ_- denotan a los dos puntos de vacío que conecta la correspondiente configuración de \mathcal{D} .

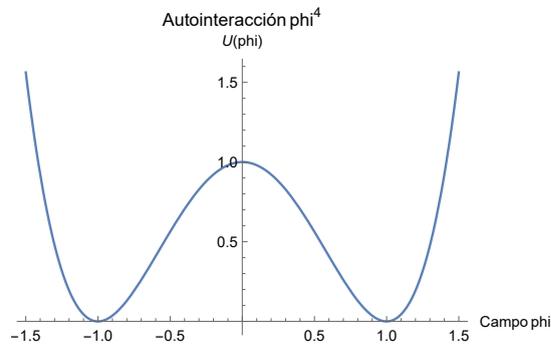


Figura 2.1: Potencial de autointeracción del modelo ϕ^4 , con $m = 1$, $\lambda = 1$.

Es claro, de la identificación de $\pi_1(G/H)$ con $\pi_1(M)$, que N toma los valores 0, 1 ó -1 , en función de si es puntos de vacío, kink, o antikink, respectivamente. En otras palabras, podemos identificar cada componente conexa de \mathcal{D} con uno de estos valores de carga topológica. Aunque en el desarrollo de esta teoría resulta innecesario, notemos que, de la expresión (2.3.7), podemos escribir la carga topológica en

términos de lo que se induce como una *densidad de carga topológica*, de la forma que sigue

$$N = \sqrt{\lambda} \frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \phi' dx. \quad (2.3.8)$$

En consecuencia, tenemos que:

1. Si $N = 0$, la configuración de campo de \mathcal{D} en cuestión *conecta* puntos de vacío, con lo que pertenece al sector topológico del correspondiente punto de vacío que conecta consigo mismo, v_+ o v_- .
2. El campo de energía localmente mínima con $N = 1$ es el llamado kink, el cual conecta v_- en $-\infty$ con v_+ en ∞ .
3. Si aplicamos la simetría $\phi \mapsto -\phi$ a nuestra solución kink, obtenemos una solución de campo kink en \mathcal{D} tal que $N = -1$, i.e., tal que conecta v_+ en $-\infty$ con v_- en ∞ .
4. No existen más valores de N , dada la incompatibilidad de cualquier otra posibilidad con las condiciones de contorno dadas por los vacíos de la teoría (recordemos que hay p^2 soluciones estacionarias entre vacíos y kinks, con $|M| = p < \infty$).

A pesar del último punto, es posible construir una configuración que combine una cantidad finita de kinks y antikinks alternados a lo largo de \mathbb{R} . No obstante, no existen soluciones estacionarias de este tipo. Lo veremos más adelante.

La cota de energía de Bogomolny para una de estas 3 soluciones estacionarias de la teoría ϕ^4 es como sigue

$$\begin{aligned} E &\geq \left| \int_{\phi_-}^{\phi_+} d\phi \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (\phi^2 - a^2)^2 \right| = \left| \int_{\phi_-}^{\phi_+} d\phi \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (\phi^2 - a^2) \right| \\ &= \left| \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \left[\frac{\phi^3}{3} - a^2 \phi \right]_{\phi_-}^{\phi_+} \right| = \left| \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \left[\frac{\phi_+^3 - \phi_-^3}{3} - a^2 (\phi_+ - \phi_-) \right] \right|, \end{aligned}$$

donde, usando $(b^3 - a^3) = (b - a)(b^2 + ab + a^2)$, se tiene que

$$\begin{aligned} E &\geq \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \left| (\phi_+ - \phi_-) \left[\frac{\phi_+^2 + \phi_+ \phi_- + \phi_-^2}{3} - a^2 \right] \right| \\ &= \sqrt{\frac{\lambda}{2}} |\phi_+ - \phi_-| \cdot \left| \frac{2a^2 \pm a^2}{3} - a^2 \right|. \end{aligned}$$

donde se toma el signo $+$ para el caso de puntos de vacío, y $-$ para el caso de soluciones kink; y donde, recordemos, $\phi_{\pm} = \pm m/\sqrt{\lambda}$. Para los puntos de vacío ($\phi_+ = \phi_-$), esta cota no aporta nada nuevo, dado que $N = 0$. Sin embargo, para las configuraciones kink y antikink tenemos que $\phi_+ \phi_- = -a^2$, luego

$$E \geq \left| \frac{2}{3} \sqrt{2\lambda} N a^3 \right| = \frac{2}{3} \sqrt{2\lambda} |N| a^3 > 0.$$

La igualdad se cumple para las configuraciones estacionarias que satisfacen la ecuación de Bogomolny de primer orden (2.1.10), que para el modelo ϕ^4 adopta la forma:

$$\partial_x \phi = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (\phi^2 - a^2), \quad (2.3.9)$$

donde se escoge el signo positivo de la raíz para el caso kink (como hemos hecho), y el signo negativo para la configuración antikink. Esta última ecuación diferencial, definida sobre todo \mathbb{R} , es fácilmente integrable: . Calculamos la primitiva para a continuación dar la solución en términos de la constante de integración.

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \int \frac{d\phi}{(\phi^2 - a^2)} &= \pm \Delta x \\ \implies \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \int \frac{d\phi}{(\phi^2 - a^2)} &= \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \frac{1}{2a} \ln \left| \left(\frac{\phi - a}{\phi + a} \right) \right| = \pm \Delta x \\ \implies \frac{\phi - a}{\phi + a} &= \exp(\pm m\sqrt{2}\Delta x) \implies \phi = a \cdot \frac{\exp(\pm \frac{m}{\sqrt{2}}\Delta x) - \exp(\mp \frac{m}{\sqrt{2}}\Delta x)}{\exp(\pm \frac{m}{\sqrt{2}}\Delta x) + \exp(\mp \frac{m}{\sqrt{2}}\Delta x)} \\ &= a \cdot \tanh(\pm \frac{m}{\sqrt{2}}\Delta x). \end{aligned}$$

De esta forma, la solución kink es:

$$\phi_k(x) = a \cdot \tanh \left(\frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0) \right), \quad (2.3.10)$$

donde x_0 es una constante de integración que localiza el campo como función en \mathbb{R} que conecta v_- con v_+ , si tomamos el signo +, y v_+ con v_- si tomamos el signo -. Además, la densidad de energía para esta configuración estacionaria es el resultado de un sencillo cálculo con funciones hiperbólicas:

$$\varepsilon[\phi_k] = \frac{1}{2} (\partial_x \phi_k)^2 + \frac{\lambda}{4} (\phi_k^2 - a^2)^2 = \frac{m^4}{2\lambda} \operatorname{sech}^4 \left(\frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0) \right), \quad (2.3.11)$$

con lo que la energía total, barriendo todo el área de esta densidad en \mathbb{R} :

$$E_k = \frac{2\sqrt{2}m^3}{3\lambda}. \quad (2.3.12)$$

Desde el punto de vista de la teoría de la relatividad especial, esta energía E_k , en unidades dadas en términos de $c = 1$, se interpreta como la energía en reposo M_k del kink, esto es, la energía en el sistema de referencia de centro de masas del kink, entendido como objeto extenso.

Observando las gráficas 2.2 y 2.3 es inmediato apreciar que, en $x = x_0$ con x_0 la constante de integración anterior, el campo ϕ_k se anula o, dicho de otra forma, toma el valor medio entre los dos puntos de vacío que conecta. Curiosamente, este mismo punto es en el que la densidad de energía del kink toma su valor máximo. En particular, toma el valor $m^4/2\lambda$.

Estas consideraciones nos llevan a interpretar x_0 como un parámetro de localización

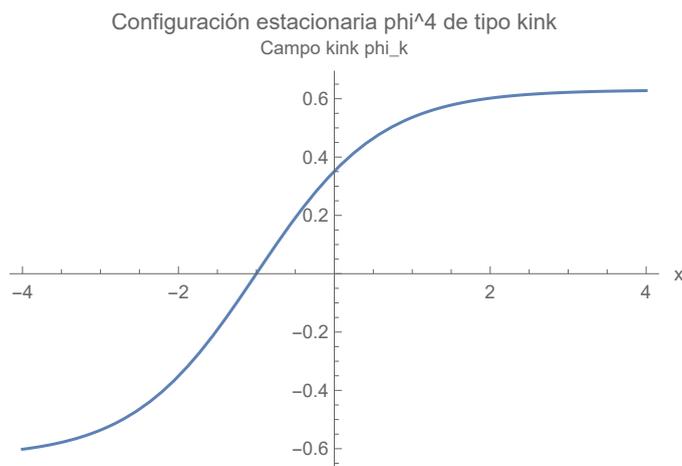


Figura 2.2: Solución tipo kink de esta configuración centrada en $x_0 = -1,0$, $m = 0,89$.

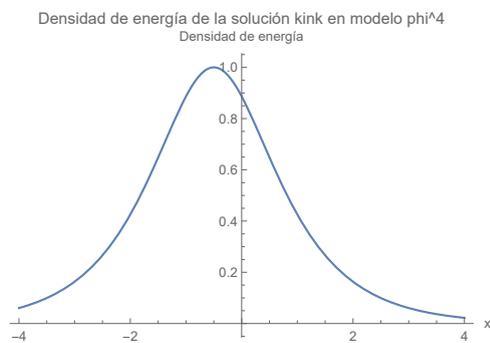


Figura 2.3: Densidad de energía de esta configuración centrada en $x_0 = -1/2$, $a = 0,63$.

del kink, esto es, la que sería la posición del centro de masas del kink, con su energía localizada una región finita en torno a dicho punto (ver figura 2.3). Además, x_0 es un parámetro libre, pues la densidad lagrangiana de nuestra teoría es invariante frente a traslaciones. Este análisis permite establecer una biyección entre los parámetros libres reales $x_0 \in \mathbb{R}$ de nuestras soluciones kink y dichas soluciones, identificando así las soluciones kink, como caso particular de mínimos relativos de energía, con una variedad, que en este caso es $\mathcal{M} = \mathbb{R}$, a la que en este contexto se le llama *variedad de Moduli del modelo ϕ^4* . No entraremos en el estudio detallado de la teoría de espacios de Moduli, aunque hacemos notar que dichas variedades dan cuenta de determinadas relaciones de equivalencia subyacentes a estas teorías de campos, en este caso en términos de un espacio de parámetros en que se localizan las partículas. Esto es una aplicación particular sobre estas teoría escalares de un concepto mucho más amplio, que se puede ilustrar fácilmente en geometría proyectiva. Por ejemplo, la recta proyectiva $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ puede ser interpretado como espacio de Moduli del conjunto de rectas vectoriales de \mathbb{R}^2 .

Aplicamos ahora un *boost de Lorentz* sobre estos campos tipo kink, a partir de lo que obtenemos la siguiente solución:

$$\phi_k(t, x) = a \cdot \tanh \left(\frac{m}{\sqrt{2}} \gamma (x - vt - x_0) \right), \quad (2.3.13)$$

donde $v \in (-1, 1)$ es la velocidad del kink definida en términos de V/c (con V la velocidad real respecto al primer sistema de referencia, y c la velocidad de la luz en el vacío, tomada como $c = 1$); y donde $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$ es un factor bien conocido en relatividad especial.

Repitiendo una integración análoga a la que se hizo para calcular la energía del kink (esto es, su masa en reposo), y fijándonos en que lo único que ha cambiado, en términos de integración, es el factor γ que acompaña al argumento de la tangente hiperbólica, se obtiene la energía que sigue

$$E = \frac{2\sqrt{2}m^3\gamma}{3\lambda}. \quad (2.3.14)$$

Esto muestra la solidez de esta sencilla teoría unidimensional frente a los boost de Lorentz, como era de esperar, ya que la teoría es invariante Lorentz tal y como ha sido construida.

Una simple derivación en la expresión del campo kink ϕ_k , dada en (2.3.13), nos lleva a $\dot{\phi} = -v\phi'$, luego el funcional energía cinética evaluado en este campo se puede escribir como

$$T[\phi] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx (\partial_x \phi)^2 = \frac{1}{2} v^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi'^2 dx, \quad (2.3.15)$$

y por el *teorema del virial* 2.1.3, esta expresión es igual a $\frac{1}{2} M v^2$. Parece que la teoría nos sugiere lo ya enunciado: un kink se puede entender como una partícula con la masa en reposo M , localizada en torno a x_0 .

Recuperando el análisis de (1.7.8), en la teoría ϕ^4 tenemos una situación peculiar: si tenemos un kink o un antikink, para poder formar un sistema con más de una de estas partículas, el siguiente campo ha de ser necesariamente un antikink o un

kink, respectivamente, por las condiciones de contorno de estos campos. El siguiente será un kink o un antikink, y así sucesivamente. Esto sugiere, mérito de Goldstone y Jackiw [10], que kink y antikink de esta teoría no son independientes, sino todo lo contrario: son el mismo objeto. Así, para ser coherentes con esta observación, afirmamos que las únicas configuraciones observables de ϕ son aquellas que permanecen inalteradas por la transformación $\phi \mapsto -\phi$.

Aportamos ahora una forma alternativa de probar que las soluciones estacionarias de ϕ^4 son no disipativas. Atendiendo a (1.1.7), y dadas las condiciones estacionaria y de valores asintóticos en M de éstas, probamos que toda solución de la teoría que satisfaga

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(t, x) = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(t, x), \quad (2.3.16)$$

es no disipativa. Nótese que esto incluye a las soluciones estacionarias kink o antikink de ϕ^4 . Tal y como venimos dando el funcional energía, como integral en el espacio de la entrada $(0, 0)$ del tensor energía-momento, podemos afirmar que dicha entrada se puede acotar como

$$T_0^0(x, t) = \frac{1}{2}(\partial_t \phi(t, x))^2 + \frac{1}{2}(\partial_x \phi(t, x))^2 + \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - a^2)^2 \geq U[\phi(t, x)].$$

Fijamos un $t \in \mathbb{R}$ arbitrario, con lo que por continuidad de dichas soluciones con respecto a $x \in \mathbb{R}$, debe existir un $x_1 \in \mathbb{R}$ para el que $\phi = 0$. En este punto,

$$T_0^0(t, x_1) \geq U[0] = \frac{\lambda a^4}{4},$$

con lo que

$$\max_x T_0^0(t, x) \geq \frac{\lambda a^4}{4} > 0.$$

Esto contradice (1.1.7), y por tanto demuestra la condición no disipativa de dichas soluciones.

Interacción energética de kink-antikink en el modelo ϕ^4

En este apartado, calculamos la energía de interacción de un par kink-antikink bien separado, para probar que existe una fuerza atractiva entre estos. Para simplificar el desarrollo, particularizamos $\lambda = \frac{1}{2}$ y $m = 1$, siendo un procedimiento trivial el de reescalar sobre las constantes generales originales.

Hay dos formas principales de practicar este cálculo: una, que nosotros no haremos, es la de obtener la energía de una configuración estacionaria de la ecuación de campo, añadiendo distribuciones delta a modo de fuentes, para fijar kink y antikink a cierta separación; y otra, que nosotros elegimos, que es la de calcular la energía de interacción identificando la fuerza producida de un kink sobre el otro con un ratio de variación de momento.

A partir del tensor energía-momento T_ν^μ dado en (1.1.16) y (1.1.17), damos el *momento lineal en el intervalo* $(-\infty, b]$, para algún $b \in \mathbb{R}$, como

$$P = - \int_{-\infty}^b T_1^0 dx = - \int_{-\infty}^b \dot{\phi} \phi' dx, \quad (2.3.17)$$

donde, recordemos, $\dot{\phi}$ denota la derivada temporal de ϕ , y ϕ' la espacial. Fijémonos en que, dado el análisis dimensional (2.3.5) de este modelo, se sigue que $[P] = (M^{1/2}L^{-1/2})^2L = M$, lo que da coherencia a esta definición. Como dicho tensor T_ν^μ

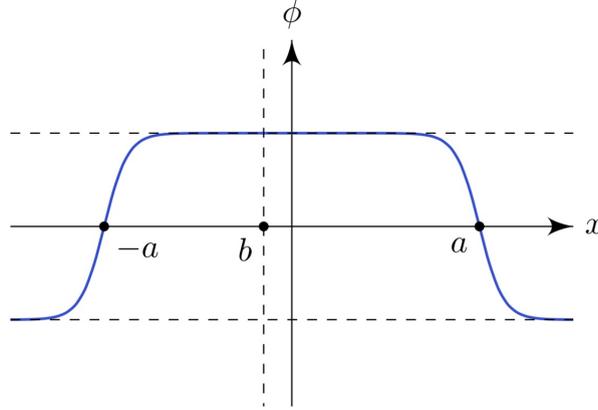


Figura 2.4: Configuración conjunta de kink y antikink independientes ampliamente separados ($b \ll a$, $a \gg 1$).

se conserva, entonces $\partial_\mu T_\nu^\mu = 0$. Por tanto,

$$\partial_t T_1^0 + \partial_x T_1^1 = 0. \quad (2.3.18)$$

Por la segunda ley de Newton, la fuerza F de interacción entre los miembros de la configuración kink-antikink está determinada por la variación temporal del momento, lo que fundamenta la siguiente definición. La *fuerza asociada a este momento y en ese intervalo* $(-\infty, b]$ es

$$\begin{aligned} F = \dot{P} &= - \int_{-\infty}^b \partial_t T_1^0 dx = \int_{-\infty}^b \partial_x T_1^1 dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 + \phi'^2) + U[\phi] \right] \Big|_{-\infty}^b, \end{aligned}$$

donde se ha usado la ecuación (2.3.18), y se ha integrado sobre derivadas en x . La física de esta expresión es que la fuerza en este intervalo es la diferencia de presiones en los puntos extremos.

Consideremos ahora un par kink-antikink, con el kink en posición a , y el antikink en $-a$, para $a \gg 1$. La configuración conjunta puede expresarse como sigue, por superposición de ambos campos suficientemente separados, y añadiendo una unidad para tener condiciones de contorno en M (de otra manera, en $x \rightarrow \pm\infty$, la configuración se anularía, y con ello no podríamos tener elementos de M bajo estos límites):

$$\phi(x) = \phi_1(x) + \phi_2(x) + 1, \quad (2.3.19)$$

con ϕ_1 y ϕ_2 , respectivamente, antikink y kink. Los expresamos como

$$\phi_1(x) = -\tanh(x + a), \quad \phi_2(x) = \tanh(x - a), \quad (2.3.20)$$

donde se han omitido las constantes que acompañan al campo kink. Supongamos que b están en $(-a, a)$, de tal forma que $-a \ll b \ll a$. Entonces, a lo largo de este último intervalo, $\phi_2 + 1$ está cerca de cero, lo que nos permite linealizar la combinación anterior. Así, la fuerza puede aproximarse, hasta orden 1 en $\phi_2 + 1$, de la forma que sigue

$$\begin{aligned} F &= \left[-\frac{1}{2}\phi_1'^2 + U[\phi_1] - \phi_1'\phi_2' + (1 + \phi_2)\frac{dU}{d\phi}[\phi_1] \right] \Big|_{-\infty}^b \\ &= [-\phi_1'\phi_2' + (1 + \phi_2)\phi_1''] \Big|_{-\infty}^b. \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

En la segunda igualdad se ha utilizado la ecuación de Bogomolny de primer orden (2.1.10) respecto a ϕ_1 , por la que los dos primeros términos se cancelan. También se ha usado la ecuación de campo estacionaria (2.1.11) para el último factor del último término.

Las configuraciones con las que estamos tratando tienen derivadas espaciales que decaen a 0 en el infinito, luego solo habrá contribución de la evaluación en b en el primer término de (2.3.21). En cuanto al segundo, hemos supuesto que ϕ_2 es un kink localizado en torno a a , con lo que, para $x \rightarrow -\infty$, se tiene que $1 + \phi_2$ se anula.

Como b es un punto alejado de la posición de kink y antikink, podemos aproximar ambos campos por funciones equivalentes bajo límite infinito, escribiendo

$$\phi_1(x) \approx -1 + 2 \exp(-2(x + a)), \quad \phi_2(x) \approx -1 + 2 \exp(2(x - a)). \quad (2.3.22)$$

Esto simplifica la expresión de la fuerza de la forma

$$\begin{aligned} F &\approx 16 \exp(-2(b + a)) \exp(2(b - a)) + 8 \exp(2(b - a)) \\ &\quad + (-1 + 2 \exp(-2(b + a)))8 \exp(2(b - a)) = 32 \exp(-2R), \end{aligned}$$

con $R = 2a$. Pese a la simpleza del argumento, este es perfectamente válido en el sistema simplificado estudiado. Así, si denotamos a la energía de interacción entre kink y antikink muy separados como E_i , se tiene

$$F = 32 \exp(-2R) = \frac{dE_i}{dR}. \quad (2.3.23)$$

La riqueza de esta teoría radica en que F es independiente de b , como es de esperar dada la arbitrariedad de su elección. Identificando F como la fuerza del kink sobre el antikink, se sigue que

$$E_i = -16 \exp(-2R) \quad (2.3.24)$$

es la energía de interacción necesaria para que ocurra dicho fenómeno. La condición atractiva de esta fuerza se ve fácilmente si notamos que E_i es negativa, y que decrece (en términos del valor absoluto) para distancias grandes, y crece para R pequeño.

2.4. Kinks del modelo sine-Gordon

Exploramos ahora un modelo de campos escalares, con un potencial de autointeracción que extiende, localmente y en torno a una solución estable de la teoría, el mismo potencial de ϕ^4 , con términos de orden par en ϕ . La ecuación de campo que surge de en esta teoría es una de las ecuaciones de onda no lineales más conocidas. Ya en 1862, la ecuación aparecía con el estudio de superficies de curvatura negativa y constante, como la ecuación de Gauss-Codazzi para superficies de curvatura -1 en un espacio tridimensional [26]. Fue redescubierta por Frenkel y Kontorova en su estudio de dislocaciones en redes cristalinas, en el llamado modelo de Frenkel-Kontorova [27]. Una de sus aplicaciones más sonadas es la de la unión Josephson de teoría de superconductores [6], a mediados del siglo pasado. No obstante, esta ecuación atrajo mucha atención en torno al año 1970 ya que, como veremos en este apartado, admite solución de tipo solitón ([28] contiene un extenso resumen histórico de este último enfoque).

Partimos de una densidad lagrangiana de la forma que sigue

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\lambda}{m^4} \left(1 - \cos \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m} \phi \right) \right), \quad (2.4.1)$$

donde λ y m son constantes reales de la teoría, y donde el potencial de autointeracción es, por lo tanto,

$$U[\phi] = \frac{\lambda}{m^4} \left(1 - \cos \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m} \phi \right) \right). \quad (2.4.2)$$

El análisis dimensional de este modelo, análogamente al caso ϕ^4 , sería como sigue

$$[\hbar] = ML, \quad [\phi] = M^{1/2} L^{1/2}, \quad [\lambda] = M^{-1} L^{-3}, \quad [m] = L^{-1}.$$

Notemos que si estudiamos pequeñas oscilaciones alrededor de una solución estable de esta teoría, digamos por ejemplo $\phi = 0$, podríamos extender la autointeracción a través del desarrollo de Taylor del coseno como sigue

$$U = \frac{\lambda^2}{2m^6} \phi^2 - \frac{\lambda^3}{24m^8} \phi^4 + O(\phi^6), \quad (2.4.3)$$

lo que nos hace pensar que esta teoría, en un contexto de oscilaciones en torno a una cierta solución estable, es una extensión de la teoría ϕ^4 . Algo así como que en ϕ^4 estamos truncando esta serie de Taylor. Esta aparente relación se hará realidad cuando formalicemos las ecuaciones espectrales que nos dan las fluctuaciones cuánticas, con las que corregir las masas clásicas. Vía la ecuación de Euler-Lagrange, tenemos la siguiente ecuación de campo:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{\lambda^{3/2}}{m^5} \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m} \phi \right) = 0. \quad (2.4.4)$$

En este modelo, dada la forma del funcional U , la variedad de vacío está formada por constantes de la forma $\phi = 2\pi n m / \sqrt{\lambda}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, con lo que, recordando las biyecciones tratadas entre nuestros grupos de homotopía:

$$\pi_1(M) = \mathbb{Z}. \quad (2.4.5)$$

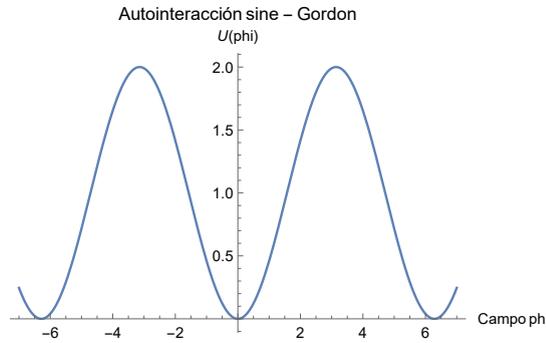


Figura 2.5: Potencial de autointeracción del modelo de sine-Gordon, con $m = 1$, $\lambda = 1$.

Denotamos, de nuevo, por (ϕ_-, ϕ_+) a los pares de valores de vacío del modelo, alcanzados por la correspondiente configuración $\phi \in \mathcal{D}$ en $x \rightarrow \pm\infty$. Recordemos que estos valores identifican el sector y la naturaleza topológica propios del campo estacionario en cuestión. La densidad lagrangiana (2.4.1) de esta nueva teoría es invariante frente a traslaciones $\phi \mapsto \phi \pm 2\pi m/\sqrt{\lambda}$, lo que tiene una importante consecuencia: sin pérdida de generalidad, fijamos $\phi_- = 0$ para todas las configuraciones que estudiaremos.

Los sectores topológicos de este modelo se caracterizan por una nueva carga topológica, ahora definida, a partir de dichos valores asintóticos de la configuración, como:

$$N = \frac{\sqrt{\lambda}(\phi_+ - \phi_-)}{2\pi m}, \quad (2.4.6)$$

lo que se puede expresar como sigue

$$N = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi m} \int_{-\infty}^{\infty} \phi' dx. \quad (2.4.7)$$

Esto nos permite interpretar N como *el número neto de solitones* (i.e., la diferencia entre el número de solitones y el número de antisolitones).

En esta teoría, haciendo uso de la periodicidad del integrando que sigue, y del hecho de que estamos cubriendo N veces el dominio de integración $[0, \frac{2\pi m}{\sqrt{\lambda}}]$, la cota de Bogomolny es

$$E \geq \pm \int_0^{(2\pi m/\sqrt{\lambda})N} \sqrt{2 \left[\frac{\lambda}{m^4} \left(1 - \cos \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m} \phi \right) \right) \right]} d\phi. \quad (2.4.8)$$

La igualdad para esta cota, i.e., la igualdad de Bogomolny de primer orden (2.1.10) se alcanza para los campos que satisfacen

$$\partial_x \phi = \pm \sqrt{2 \left[\frac{\lambda}{m^4} \left(1 - \cos \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m} \phi \right) \right) \right]}. \quad (2.4.9)$$

Nos restringimos al caso de las configuraciones estrictamente crecientes de kinks (i.e., con el signo $+$ en la igualdad anterior. El signo $-$, como ya ocurría en ϕ^4 , nos daría

los antikinks, estrictamente decrecientes). La resolución de esta ecuación diferencial, sin entrar en el detalle del análisis matemático, la resolvemos por métodos directos de integración. No exigimos precisión en la variedad de integración ni en las constantes de integración hasta formalizar el resultado. Se calcula la primitiva, teniendo en cuenta que en $\pm\delta x$ se incluye la constante de integración a , que localiza la partícula clásica solitón. Así,

$$\begin{aligned}\pm\delta x &= \int \frac{d\phi}{\sqrt{2\left(\frac{\lambda}{m^4}(1 - \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}\phi}{m}\right)\right)}} = \frac{m^2}{\sqrt{2\lambda}} \int \frac{d\phi}{\sqrt{\left(1 - \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}\phi}{m}\right)\right)}} \\ &= \frac{m^2}{2\sqrt{\lambda}} \int \frac{d\phi}{\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}\phi}{2m}\right)},\end{aligned}\quad (2.4.10)$$

donde se ha usado que $1 - \cos\left(\sqrt{\lambda}\phi/m\right) = 2\sin^2(\sqrt{\lambda}\phi/2m)$, con lo que

$$\pm\delta x = \frac{m^3}{\lambda} \int \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} = -\frac{m^3}{\lambda} \int \frac{ds}{1-s^2},\quad (2.4.11)$$

donde se han usado los cambios de variables $t = \sin\left(\sqrt{\lambda}\phi/2m\right)$ y $s = \sqrt{1-t^2}$. Ahora, escindimos la integral en dos fracciones simples, de forma que

$$\begin{aligned}\pm\delta x &= \frac{m^3}{\lambda} \int \frac{ds}{s^2-1} = \frac{m^3}{2\lambda} \int ds \left[\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} \right] = \frac{m^3}{2\lambda} \ln \left| \frac{1-s}{1+s} \right| \\ \implies \phi_s(x) &= \frac{4m}{\sqrt{\lambda}} \arctan \left(\exp \left(\pm \frac{\lambda(x-a)}{m^3} \right) \right)\end{aligned}\quad (2.4.12)$$

donde a es una constante de integración arbitraria, la cual localiza a la partícula clásica solitón. Escogemos la rama de la función tangente para la que $\phi_- = 0$, así como que $\phi_+ = 2\pi m/\sqrt{\lambda}$. Así pues, necesariamente, la carga topológica adquiere el valor $N = +1$. En otras palabras, hemos calculado la forma explícita de un campo kink que conecta puntos de vacío consecutivos. Lo que varía qué puntos consecutivos es la rama escogida. Esta deducción adquirirá más sentido cuando hablemos, al final de este apartado, de las posibles configuraciones multi-solitón de este modelo.

En cuanto al antikink, resolviendo la ecuación de Bogomolny (2.1.10) con el signo $-$, se obtiene la misma solución con el signo cambiado, i.e., la correspondencia kink-antikink de la forma $\phi \mapsto -\phi$.

Aplicamos una transformación de Lorentz sobre (2.4.12) para enviar la solución estacionaria $\phi_s(x)$ (en el sistema de referencia centro de masas del solitón), a un solución dependiente del tiempo con la forma de onda propagante,

$$\phi_s(t, x) = \frac{4m}{\sqrt{\lambda}} \arctan \left(\exp \left(\pm \frac{\lambda((x-a) - vt)}{m^3\sqrt{1-v^2}} \right) \right),\quad (2.4.13)$$

donde $v \in (0, 1)$ nos da la velocidad de propagación del solitón, teniendo en cuenta que $c = 1$.

Entremos de nuevo en la deducción análoga a la realizada para el caso ϕ^4 que nos

dé criterio para hablar de la posición de este campo como objeto extenso clásico. Fijémonos en que $\phi_s(a) = 4\pi m/\sqrt{\lambda}$, lo que, en términos del sector topológico ocupado por la solución solitón (o en otras palabras, por medio de la identificación de su sector topológico con sus valores frontera), nos sugiere que ϕ ocupa la posición dada por la constante arbitraria a .

Esta última reflexión queda confirmada por la forma que adopta la nueva densidad de energía. Nos proponemos pues calcular dicha densidad, quedándonos con el caso del kink. Recordemos que, para una configuración estacionaria tipo solitón

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2} (\partial_x \phi(x))^2 + U[\phi], \quad (2.4.14)$$

donde

$$\begin{aligned} \partial_x \phi(x) &= \frac{4\sqrt{\lambda}}{m^2} \frac{1}{\left[\exp\left(\frac{\lambda}{m^3}(x-a)\right) + \exp\left(-\frac{\lambda}{m^3}(x-a)\right) \right]} \\ &= \frac{2\sqrt{\lambda}}{m^2} \operatorname{sech}\left(\frac{\lambda}{m^3}(x-a)\right), \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

y donde

$$\begin{aligned} U[\phi_s(x)] &= \frac{\lambda}{m^4} \left[1 - \cos\left(4\arctan\left(e^{\frac{\lambda}{m^3}(x-a)}\right)\right) \right] \\ &= \frac{\lambda}{m^4} \cdot 2 \sin^2\left(2\arctan\left(e^{\frac{\lambda}{m^3}(x-a)}\right)\right) = \frac{2\lambda}{m^4} \left[2 \sin\left(\arctan\left(e^{\frac{\lambda}{m^3}(x-a)}\right)\right) \right. \\ &\quad \left. \times \cos\left(\arctan\left(e^{\frac{\lambda}{m^3}(x-a)}\right)\right) \right]^2 \\ &= \frac{8\lambda}{m^4} \left(\frac{e^{\frac{\lambda}{m^3}(x-a)}}{\sqrt{1+e^{\frac{2\lambda}{m^3}(x-a)}}} \frac{1}{\sqrt{1+e^{\pm\frac{2\lambda}{m^3}(x-a)}}} \right)^2 \\ &= \frac{2\lambda}{m^4} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\lambda}{m^3}(x-a)\right). \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

Con todo ello, por (2.4.14), la densidad de energía clásica del solitón es como sigue

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) &= \frac{1}{2} \left[\frac{2\sqrt{\lambda}}{m^2} \operatorname{sech}\left(\frac{\lambda}{m^3}(x-a)\right) \right]^2 + \frac{2\lambda}{m^4} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\lambda}{m^3}(x-a)\right) \\ &= \frac{4\lambda}{m^4} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\lambda}{m^3}(x-a)\right). \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

Esto sugiere que la energía está concentrada en torno a $x = a$, razón de más para nuestra afirmación anterior sobre la posición del solitón. Integrando esta expresión, tenemos una energía total de la forma

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x) dx = \frac{4\lambda}{m^4} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\lambda}{m^3}(x-a)\right) \\ &= \frac{4\lambda}{m^4} \cdot \frac{m^3}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(y) dy = 8/m. \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

Por un cálculo análogo al realizado en el modelo ϕ^4 , la energía clásica del kink propagante, con la forma y el sistema de referencia de (2.4.13), es $E = 4\gamma/m$, con $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$.

En las figuras 2.6 y 2.7 se aprecia la estructura localizada del campo y de la densidad en este contexto.

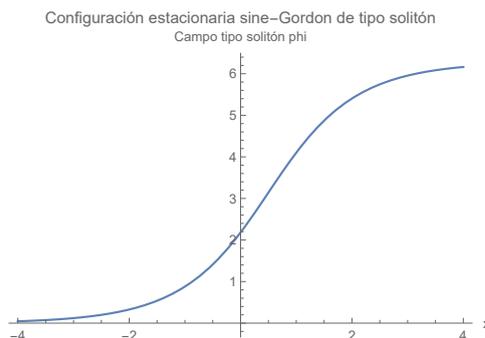


Figura 2.6: Configuración estacionaria del campo de tipo kink del modelo de sine-Gordon, $a = 0,5$, $\lambda = 1$, $m = 1$.

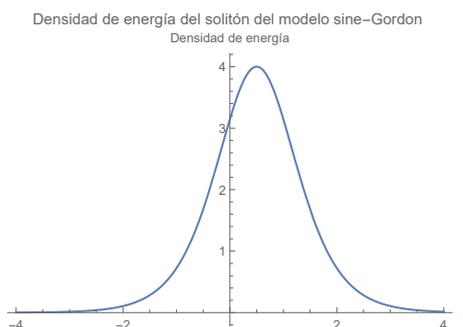


Figura 2.7: Densidad de energía del campo estacionario de tipo kink del modelo de sine-Gordon, $a = 0,5$, $\lambda = 1$, $m = 1$.

Calculamos la carga topológica de la solución estacionaria solitón de este modelo, que por la construcción seguida ha de ser la unidad. Por (2.4.7), se sigue que

$$\begin{aligned} N &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi m} \int_{\mathbb{R}} \partial_x \phi_s(x) dx = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi m} \cdot \frac{2m}{\sqrt{\lambda}} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sech}(u) du \\ &= 1, \end{aligned} \tag{2.4.19}$$

donde se ha usado que $\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sech}(u) du = \pi$, con lo que $N = 1$.

Por construcción, esta solución estacionaria de la ecuación de Bogomolny de primer orden (2.1.10) es un solitón con carga topológica unidad, de lo que se sigue que cualquier sistema multi-solitón en el que necesariamente la carga no puede ser unidad no será solución de (2.1.10). La clave de la prueba de esto lo encontramos en que cualquier configuración con $N \neq 1$ satisface la desigualdad estricta en (2.4.8). No obstante, de forma análoga a lo que vimos en el último apartado sobre sistemas kink-antikink, dos solitones de sine-Gordon infinitamente separados tendrán una

energía de aproximadamente $2E$, con E dado en (2.4.18), i.e., estaríamos sumando las energías totales de los solitones independientes. Entonces, la energía potencial del sistema de los dos solitones decrecerá a medida que éstos se separan, lo que induce una fuerza repulsiva entre los solitones. Un cálculo análogo al del apartado anterior, nos lleva a una energía de interacción de dos kinks de sine-Gordon de la forma

$$E_i = 32e^{-R}, \quad (2.4.20)$$

con R la separación entre solitones. Este resultado fue probado por Perring y Skyrme, cuando utilizan el modelo de sine-Gordon como un modelo “juguete” para teorías de campos tridimensionales más realistas, el llamado *modelo de Skyrme* [7].

Como ya hicimos en la teoría ϕ^4 , recurrimos de nuevo a (1.7.8). Supongamos que f_1 es un solitón o antisolitón. Tomamos f_2 también como solitón o antisolitón, para lo que, por (1.7.8), debemos escoger la rama de la función tangente que satisfaga dicha relación. Esto sugiere que no estamos construyendo un sistema de muchos solitones y antisolitones, correspondientes a muchas ramas de arctan, sino que existe un único solitón y un único antisolitón. Con esta elección, afirmamos que las únicas configuraciones observables ϕ en este modelo son las invariantes frente a $\phi \mapsto \phi + 2\pi m/\sqrt{\lambda}$.

Análogamente al estudio de ϕ^4 , aunque adaptándolo a la nueva variedad de vacío, afirmamos que, dada la ecuación de campo de sine-Gordon, cualquier solución $\phi(t, x)$ tal que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(t, x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(t, x) = \frac{4\pi m}{\sqrt{\lambda}}$$

es no disipativa. Nótese que esta consideración no incluye a las soluciones independientes del tiempo de tipo kink y antikink en sine-Gordon, pues la diferencia de sus valores asintóticos es justamente la mitad: $2\pi m/\sqrt{\lambda}$. La razón de tomar la diferencia como el doble de este último valor es que éste es el mínimo valor para el que se puede aplicar el mismo argumento, vía el teorema de Bolzano, que ya utilizábamos para ϕ^4 . Repitiendo cálculos casi idénticos, la entrada $(0, 0)$ del tensor energía-momento es

$$T_0^0(x, t) = \frac{1}{2}(\partial_t \phi(t, x))^2 + \frac{1}{2}(\partial_x \phi(t, x))^2 + \frac{\lambda}{m^4} \left(1 - \cos \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m} \phi \right) \right)^2 \geq U[\phi(t, x)].$$

Fijamos un $t \in \mathbb{R}$ arbitrario. Por continuidad de dichas soluciones con respecto a $x \in \mathbb{R}$, debe existir un $x_1 \in \mathbb{R}$ que anule la función $\cos(\sqrt{\lambda}\phi(t, x)/m)$. En este punto, que se puede tomar, por ejemplo, como $\phi = (m\pi)/(2\sqrt{\lambda})$, o como cualquiera de sus análogo módulo $m\pi/\sqrt{\lambda}$,

$$T_0^0(t, x_1) \geq U[(m\pi)/(2\sqrt{\lambda})] = \frac{\lambda}{m^4},$$

con lo que

$$\max_x T_0^0(t, x) \geq \frac{\lambda}{m^4} > 0.$$

De nuevo, esto contradice (1.1.7). Por lo tanto, se demuestra la condición no disipativa de dichas soluciones, aunque no sean estacionarias.

2.5. Reformulación de la teoría. Resumen

En este apartado, reformularemos una teoría escalar de campo bosónico en un espacio de $1 + 1$ dimensiones, de cara a manejar magnitudes y variables adimensionales, así como dos constantes de la teoría que contengan toda la información dimensional. Esta formulación es la que utilizaremos para la cuantización y posterior cálculo de las correcciones cuánticas de masa de un kink, hasta el orden de un lazo. Note el lector que lo que estamos a punto de hacer no es más que reajustar la teoría a nuestro interés, pero sigue siendo la misma. Volvemos a considerar el espacio de configuración \mathcal{F} . Seguimos con la imposición $c = 1$, sin hacer lo mismo con \hbar para expresar dichas correcciones en función de dicha constante. Centramos pues el estudio en $\mathbb{R}^{1,1}$. El funcional acción de nuestra teoría, evaluado en un campo $\psi \in \mathcal{F}$, viene dado por

$$\tilde{S}[\psi] = \int d^2y \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial\psi}{\partial y_\mu} \right)^2 - \tilde{U}[\psi] \right], \quad (2.5.1)$$

con \tilde{U} el potencial autointeracción de la teoría, $\psi(y_\mu) : \mathbb{R}^{1,1} \rightarrow \mathbb{R} \in \text{Maps}(\mathbb{R}^{1,1}, \mathbb{R})$, con $y^1 = y$, $y^0 = \tau$ las coordenadas locales, con un tensor métrico dado por $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1)$, $\mu, \nu = 0, 1$. El análisis dimensional de la teoría así dada es

$$\begin{aligned} [\hbar] &= [\tilde{S}] = ML, & [y_\mu] &= L, \\ [\psi] &= M^{1/2}L^{1/2}, & [\tilde{U}] &= ML^{-1}. \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Escribimos la acción como sigue

$$\tilde{S}[\psi] = \int d\tau \left[\tilde{T}[\psi(y_\mu)] - \tilde{E}[\psi(y_\mu)] \right], \quad (2.5.3)$$

con

$$\begin{aligned} \tilde{T}[\psi(y_\mu)] &= \int dy \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau} \right)^2 \right], \\ \tilde{E}[\psi(y_\mu)] &= \int dy \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} \right)^2 + \tilde{U}[\psi(y_\mu)] \right], \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

de lo que se sigue que $[\tilde{E}] = [\tilde{T}] = M$, con \tilde{E} el funcional energía o energía potencial, y \tilde{T} el funcional energía cinética.

Consideramos m_d y γ_d parámetros a partir de los cuales reformulamos la teoría como sigue

$$\begin{aligned} x_\mu &= m_d y_\mu, & \mu &= 0, 1, & \phi &= \gamma_d \psi, \\ U[\phi(x_\mu)] &= \frac{\gamma_d^2}{m_d^2} \tilde{U}[\psi(y_\mu)], \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

con dimensiones $[m_d] = L^{-1}$, $[\gamma_d] = M^{-1/2}L^{-1/2}$. Denotaremos a las nuevas coordenadas locales por $x_0 = t$, $x_1 = x$. De esta forma,

$$\begin{aligned} [x_\mu] &= L^{-1}L, \\ [\phi] &= M^{-1/2}L^{-1/2}M^{1/2}L^{1/2} \\ [U] &= \left[\frac{\gamma_d^2}{m_d^2} \right] ML^{-1} = M^{-1}L^{-1}L^2ML^{-1}, \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

esto es, hemos reescalado la teoría para tener variables en $\mathbb{R}^{1,1}$, campos y potenciales de autointeracción adimensionales.

El funcional acción se puede reescribir como sigue

$$\begin{aligned} \tilde{S}[\psi] &= \int \int \frac{1}{m_d^2} d^2x \left[\frac{1}{2} \left(\frac{m_d \partial(\phi/\gamma_d)}{\partial x_\mu} \right)^2 - \frac{m_d^2}{\gamma_d^2} U[\phi(x_\mu)] \right] = \\ &= \frac{1}{\gamma_d^2} \int \int d^2x \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} \right)^2 - U[\phi(x_\mu)] \right] = \frac{1}{\gamma_d^2} S[\phi(x_\mu)]. \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

Análogamente, el funcional energía

$$\begin{aligned} \tilde{E}[\psi(y_\mu)] &= \int \frac{dx}{m_d} \left[\frac{1}{2} \left(m_d \frac{\partial(\phi/\gamma_d)}{\partial x_\mu} \right)^2 + \frac{m_d^2}{\gamma_d^2} U[\phi(x_\mu)] \right] \\ &= \frac{m_d}{\gamma_d^2} \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} \right)^2 + U[\phi(x_\mu)] \right] = \frac{m_d}{\gamma_d^2} E[\phi(x_\mu)], \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

y de igual manera para $\tilde{T}[\cdot]$, esto es, $\tilde{T}[\psi(y_\mu)] = (m_d/\gamma_d^2)T[\phi(x_\mu)]$. Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange sobre (2.5.7), obtenemos la siguiente ecuación de campo

$$\partial_t^2 \phi - \partial_x^2 \phi = -\frac{\partial U}{\partial \phi}. \quad (2.5.9)$$

La versión estacionaria de esta ecuación de campo (2.5.9) vendría dada de la siguiente forma, la cual gobierna la forma de los campos kink o solitón:

$$\partial_x^2 \phi = \frac{\partial U}{\partial \phi} \quad (2.5.10)$$

A continuación, con la teoría reformulada, resumimos las nociones más importantes que hemos estudiado hasta ahora, de cara a recopilar toda la información que utilizaremos para la cuantización y deducción de una expresión para correcciones cuánticas de la energía del campo kink. La justificación de estas ideas ya ha sido dada en este trabajo.

1. Manejamos un espacio de configuración dado por $\mathcal{D} = \{\phi \in \text{Maps}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : E[\phi] < \infty\}$, como espacio normado con norma dada por la energía $E[\cdot]$. Nótese que ya se particulariza el espacio vectorial $V = \mathbb{R}$.

2. Si el funcional de autointeracción de la teoría es un polinomio de grado a lo sumo 2, entonces (2.5.9) es una EDO lineal. De cara a tener una ecuación de campo no lineal, lidiamos con funcionales U que toman, o bien la forma de un polinomio cuártico (ϕ^4), o bien está dado a partir de una función trigonométrica (sine-Gordon). Además, imponemos $U(\phi) \geq 0$ para todo $\phi \in \mathbb{R}$, y $U(\cdot) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

3. El contenido topológico de la teoría está determinado por su variedad de ceros,

$$M = \{\phi_v \in \mathbb{R} : U[\phi_v] = 0\}, \quad (2.5.11)$$

sobre lo que asumimos, como así será en los modelos que nosotros estudiamos, que el cardinal de M es a lo sumo infinito numerable, i.e., $|M| \leq \aleph_0$.

4. Las condiciones iniciales de todas las configuraciones $\phi \in \mathcal{D}$ satisfacen las siguientes relaciones

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) \in M, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \partial_x \phi(x) = 0, \quad (2.5.12)$$

lo que determina la familia entera de soluciones homogéneas y estacionarias de la teoría. Afirmábamos que, por finitud del funcional $E[\cdot]$, o equivalentemente por conservación de la energía, la condiciones (2.5.12) necesariamente se cumplen, para todo elemento de \mathcal{D} .

5. En nuestra teoría, asumimos la existencia de un grupo discreto G de simetría. Éste escinde la variedad de vacío M en una unión disjunta de órbitas expresadas en términos de los grupos pequeños G_a , $a = 0, \dots, r$, de la forma

$$M = \cup_{a=0}^r G/G_a. \quad (2.5.13)$$

También, la topología de la teoría puede ser correctamente ilustrada si conocemos la variedad de moduli de vacío

$$N = M/G. \quad (2.5.14)$$

Ésta nos da las clases de puntos de vacío conectados entre sí por G . Nosotros nos restringimos a teorías con variedades N unipuntuales, lo que simplifica el estudio a sectores de vacío conectados por transformaciones del grupo discreto G .

6. Denotando por H al único grupo pequeño de la teoría, que es subgrupo normal de G , sabemos que M y G/H son isomorfos, lo que nos permite identificar los puntos de vacío con los cogrupos del grupo cociente G/H .

7. Existe una biyección entre las componentes conexas de \mathcal{D} y el grupo de homotopía $\pi_1(G/H)$, es decir, entre las componentes conexas que inducen una partición de \mathcal{D} , y las clases de homotopía de $\pi_1(M)$. La correspondencia biunívoca viene dada por

$$D_i \longleftrightarrow [\phi(\pm\infty)] \in \pi_1(G/H) \cong \pi_1(M). \quad (2.5.15)$$

Esto determina la naturaleza topológica implícita, en términos homotópicos y de conexión, del espacio \mathcal{D} . Éste se puede escribir como

$$\mathcal{D} = \cup_{ij} C_{ij}, \quad (2.5.16)$$

con C_{ij} la componente conexa que contiene a los elementos $\phi^{(i)}, \phi^{(j)} \in M$ asintóticamente, i.e., C_{ij} es la componente conexa de las configuraciones $\phi \in \mathcal{D}$ que satisfacen

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) &= \phi^{(i)} \in M \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) &= \phi^{(j)} \in M. \end{aligned} \quad (2.5.17)$$

Las condiciones $\phi^{(i)} = \phi^{(j)}$ o $\phi^{(i)} \neq \phi^{(j)}$ determinan la naturaleza de vacío o de kink de la configuración de \mathcal{D} , respectivamente.

8. La evolución temporal es una transformación homotópica (i.e., transforma aplicaciones continuas $\phi \in \mathcal{D}$ entre las topología usuales de \mathbb{R}). Esto significa, por la partición de \mathcal{D} en las componentes conexas anteriores, que las condiciones asintóticas de una configuración dada *no cambian en el tiempo*. Esto es lo que quiere decir que los sectores topológicos o componentes conexas C_{ij} están topológicamente desconectados, en un contexto homotópico.
9. El punto anterior tiene una gran consecuencia: los puntos de vacío $\phi_v \in M$ pertenecen a los sectores C_{ii} , para todo $i = 0, \dots, r$.
10. También en relación al mismo punto, se da sentido a la terminología de *solución topológica* cuando hablamos de kinks. Necesariamente, los sectores $C_{i,i+1}$ *no pueden contener soluciones estáticas y homogéneas* de (2.5.9), sino que necesariamente han de depender explícitamente de la posición, de cara a conectar puntos de vacío diferentes.

2.6. Formalización de la teoría de sine-Gordon

Particularizamos dicha reformulación sobre el modelo de sine-Gordon, de cara a obtener campos y coordenadas locales adimensionales.

1. Consideramos $m_d^2 = m^2$ y $\gamma_d^2 = \lambda/m^2$ a partir de las constantes dadas de la teoría en la densidad lagrangiana (1.1.10).
2. Con las constantes dimensionales anteriores, se tiene $\phi = \sqrt{\lambda}\psi/m$, y tenemos la autointeracción dada como sigue

$$U[\phi] = \frac{\lambda}{m^4} \tilde{U}[\psi] = 1 - \cos(\phi). \quad (2.6.1)$$

De esta forma, la densidad lagrangiana viene dada como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - (1 - \cos(\phi)). \quad (2.6.2)$$

3. La variedad de ceros de la teoría es $M = \{\phi^{(n)} = 2\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$. Nótese que ahora se tiene $|M| = \aleph_0$.
4. Observando la densidad lagrangiana, es inmediato ver que el grupo discreto $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ es un grupo de simetría de la teoría, generado por las reflexiones de campos $\phi \mapsto -\phi$, y por las traslaciones de campos $\phi \mapsto \phi + 2\pi n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Este grupo es el llamado grupo diédrico o diedral infinito, que puede ser visto como el grupo de simetrías de los enteros.
5. De nuevo, el grupo pequeño sobre todos los elementos de M es el mismo. Denotando a este por G_0 , tenemos que $G_0 = \mathbb{Z}_2$. Así, afirmamos que $M \cong G/G_0$.
6. La variedad de moduli de vacío es unipuntual, ya que la acción de G sobre los elementos de M es transitiva, es decir, dados dos elementos cualesquiera $\phi^{(1)}$ y $\phi^{(2)}$ de M , siempre existe al menos un $g \in G$ tal que $\phi_1 = g\phi_2$. De esta forma, podemos representar dicha variedad como $N = M/G = \{\phi^{(0)}\}$, y se puede tomar como $\phi^{(0)} = 0$, por comodidad. Esto quiere decir que todos los puntos de vacío de M pueden ser conectados por G .
7. En el sector topológico $C_{i,i+1}$, la solución del campo kink, obtenida a partir de la solución conocida en la teoría sin reformular a través de las relaciones (2.5.5), es de la forma

$$\phi_k(x) = \pm 4 \arctan(e^{x-x_0}) + 2\pi n, \quad (2.6.3)$$

donde se ha denotado ahora a la constante de integración como $x_0 \in \mathbb{R}$. Nótese que hemos añadido un término $2\pi n$ a la solución clásica reformulada. Esto se debe a que, por las transformaciones de G que conectan puntos de vacío en términos de elementos de \mathbb{Z} , basta tomar una solución solitón arbitraria en un sector C_{ij} con i, j consecutivos, e ir añadiéndole el término $2\pi n$ correspondiente, en función de en qué sector nos queramos quedar.

8. La función de energía característica de Hamilton es, salvo constante de integración

$$W(\phi) = \pm \int d\phi \sqrt{2U(\phi)} = \pm \int d\phi \sqrt{2(1 - \cos(\phi))} = \pm 4 \cos\left(\frac{\phi}{2}\right). \quad (2.6.4)$$

Por lo tanto, la energía en reposo del kink clásico de sine-Gordon se puede calcular a partir de la diferencia de estos valores entre sectores contiguos como sigue

$$E[\phi_k] = |W(\phi^{(n+1)}) - W(\phi^{(n)})| = 4 \left| \cos\left(\frac{\phi^{(n+1)}}{2}\right) - \cos\left(\frac{\phi^{(n)}}{2}\right) \right| = 8. \quad (2.6.5)$$

2.7. Formalización de la teoría ϕ^4

En este apartado, resumimos los aspectos clásicos de este modelo, al hilo de todo el desarrollo topológico y algebraico de apartados anteriores, ya en términos de la teoría reformulada con variables y campos adimensionales.

1. A partir de las constantes conocidas de la teoría dada en apartados anteriores, definimos $m_d = m^2/2$, y $\gamma_d^2 = \lambda/m^2$, con las dimensiones conocidas.
2. Tenemos una autointeracción de la forma $U[\phi] = \frac{1}{2}(\phi^2 - 1)^2$. De esta forma, la densidad lagrangiana de la teoría es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}(\phi^2 - 1)^2. \quad (2.7.1)$$

3. La variedad de ceros de la teoría es $M = \{(-1)^j : j = 0, 1\}$.
4. El grupo discreto de simetría de la teoría es $G = \langle \phi \mapsto \phi, \phi \mapsto -\phi \rangle$, i.e., es el grupo generado por las transformaciones identidad y reflexión sobre elementos de \mathcal{D} , las cuales dejan invariante la densidad lagrangiana de la teoría. Este grupo es isomorfo al grupo multiplicativo \mathbb{Z}_2 .
5. Podemos expresar la variedad de ceros en términos de las órbitas de G . Nótese que este grupo solo tiene un grupo pequeño, al que denotamos por G_0 , sobre cada uno de los puntos de vacío, que es el grupo trivial $G_0 = \{\text{id}\}$, formado únicamente por el elemento neutro, i.e., por la transformación identidad.
6. El grupo de homotopía del grupo cociente G/G_0 , con G_0 el único grupo pequeño, es $\pi_1(M) \cong \pi_1(G/G_0) = \mathbb{Z}_2$.
7. La variedad de moduli del vacío de esta teoría es otra vez unipuntual, por la transitividad de la acción de G sobre M . Esto nos da $N = M/G = \{\phi^{(0)}\}$, i.e., una única clase en M/G con un representante arbitrario, que se puede tomar como $\phi^{(0)} = 0$, por comodidad.
8. Utilizando la expresión conocida (2.3.10) del campo kink con la teoría no reformulada, al que denotamos por $\psi_k(y)$, es inmediato que

$$\begin{aligned} \phi_k(x) &= \gamma_d\psi_k(y) = \pm \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m}\right) \left(\frac{m}{\sqrt{\lambda}}\right) \tanh\left(\frac{m}{\sqrt{2}}m_d^{-1}(x - x_0)\right) \\ &= \pm \tanh\left(\frac{m}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{m}(x - x_0)\right) = \pm \tanh(x - x_0). \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

9. La función de energía característica de Hamilton (2.2.2) en este caso particular es como sigue, salvo constante de integración

$$\begin{aligned} W(\phi) &= \pm \int d\phi \sqrt{2U(\phi)} = \pm \int d\phi \sqrt{(\phi^2 - 1)^2} \\ &= \pm \int d\phi (\phi^2 - 1) = \pm \left[\frac{\phi^3}{3} - \phi\right]. \end{aligned} \quad (2.7.3)$$

Por lo tanto, la energía clásica del kink, esto es, la masa en reposo de dicha partícula clásica entendida como objeto extenso, viene dada por esta última

función $W(\phi)$ entre las dos condiciones de contorno diferentes que aporta el M de esta teoría, es decir

$$\begin{aligned} E[\phi_k] &= |W(\phi^{(i+1)}) - W(\phi^i)| = \left| \left(\frac{\phi^3}{3} - \phi \right)_{\phi=1} - \left(\frac{\phi^3}{3} - \phi \right)_{\phi=-1} \right| \\ &= \left| -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right| = \frac{4}{3}. \end{aligned} \quad (2.7.4)$$

Con todo ello, expresadas en términos de campos y variables espacio-temporales adimensionales, hemos desarrollado el fundamento teórico de los kinks que afloran en nuestros dos modelos, sin perder nunca de vista la topología de \mathcal{D} , ni los valores asintóticos como elementos de M . También, conocemos las formas explícitas de dichas soluciones kink. Con todas estas ideas, estamos en condiciones de tratar la construcción de la teoría cuántica, sobre dichas soluciones y sobre los puntos de vacío, que nos dará las correcciones de masa hasta primer orden en \hbar .

Capítulo 3

Correcciones de masa al orden de un lazo

En este capítulo, desarrollamos la teoría de perturbaciones sobre los dos tipos de soluciones estacionarias estudiadas: puntos de vacío y kinks. Con ella, calculamos las relaciones de dispersión que satisfacen las fluctuaciones en cada uno de estos sectores topológicos. El objetivo último es el de presentar correcciones cuánticas al orden de un lazo de las masas clásicas de los kinks de sine-Gordon y ϕ^4 . Hasta entonces, será necesaria la cuantización canónica de los campos de fluctuación involucrados, así como el tratamiento de determinadas ecuaciones de Schrödinger unidimensionales con potenciales de Pöschl-Teller.

3.1. Fluctuaciones cuánticas al orden de un lazo

Presentamos ahora la formulación de los problemas espectrales que nos dan las fluctuaciones cuánticas alrededor de soluciones estables de tipo vacío y de tipo kink. Estas fluctuaciones, una vez cuantizadas, nos dan las energías de Casimir que buscamos, para después regularizarlas y renormalizar la masa, pasando por la correspondiente resolución de ecuaciones diferenciales con operadores de Sturm-Liouville. Este apartado formaliza la forma analítica que toma el proceso de perturbar soluciones estables conocidas.

3.1.1. Oscilaciones semiclásicas alrededor de una solución estable

Ya reformulados, nuestros funcionales acción, energía y energía cinética son

$$\begin{aligned} S[\phi] &= \int d^2x \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} \right)^2 - U[\phi] \right], \\ E[\phi] &= \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + U[\phi(x_\mu)] \right], \\ T[\phi] &= \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 \right]. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Consideramos una solución estable $\phi_s(x)$ de nuestra teoría, i.e., una solución estacionaria de \mathcal{D} tal que, en un entorno de ésta, el resultado de perturbarla bajo fluctuaciones $\eta(t, x)$ siga siendo solución de la ecuación de campo (2.5.9). El subíndice s se refiere a su condición de solución estable. Las frecuencias de los modos que nos dan un sistema completo de soluciones de las ecuaciones espectrales que determinan las fluctuaciones, son reales. Este último hecho se sigue de que, como vimos en el estudio de la estabilidad de estas soluciones a partir de la ecuación (1.8.3), aquellos autovalores frecuencia tienen cuadrado positivo, es decir, son reales. En otras palabras, y esto se verá con completa naturalidad en el desarrollo que sigue, los autovalores de los factores espaciales de estos modos, con respecto a un cierto tipo de operadores diferenciales Hessianos, son positivos.

De este modo, perturbamos estas configuraciones estables, y nos quedamos con los campos $\phi(t, x) = \phi_s(x) + \eta(t, x)$, con η los *campos fluctuación*. Desarrollamos los funcionales energía y energía cinética hasta orden dos en η , de forma que

$$E[\phi_s(x) + \eta(t, x)] \simeq E[\phi_s(x)] + \frac{1}{2} \frac{m_d}{\gamma_d^2} \int dx \eta(x) \left(-\partial_x^2 + \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \right]_{\phi_s} \right) \eta(x) + O(\eta^3),$$

$$T[\phi_s(x) + \eta(x)] \simeq \frac{1}{2} \frac{m_d}{\gamma_d^2} \int dx (\partial_0 \eta(x))^2 + O(\eta^3),$$

donde se ha utilizado la condición necesaria de mínimo local de ϕ_s sobre E , así como su condición estacionaria. Truncar en los términos de orden 2 es lo que se llama *aproximar al orden un lazo*.

Estas aproximaciones nos dan las siguientes ecuaciones de campo sobre las fluctuaciones $\eta(t, x)$:

$$\partial_t^2 \eta(t, x) - \hat{K} \eta(t, x) = 0, \quad (3.1.2)$$

con \hat{K} el llamado *operador de segunda variación de E en ϕ_s* , dada por

$$\hat{K} \equiv -\partial_x^2 + \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \right]_{\phi_s(x)}. \quad (3.1.3)$$

Por la estabilidad de $\phi_s(x)$, \hat{K} tiene valores propios no negativos. Entonces, para ciertos valores $w \in \mathbb{R}$, podemos escribir el problema espectral en términos de \hat{K} como

$$\hat{K} f_w(x) = w^2 f_w(x), \quad (3.1.4)$$

con $f_w(x)$ los factores espaciales de una familia completa de soluciones de (3.1.2). De hecho, dada la linealidad de estas ecuaciones de campo espectrales, y por completitud de la familia $\{g_w(t) f_w(x)\}$ (la llamada familia de *modos normales de fluctuación en el vacío*) sobre el espacio de estas soluciones, podemos escribir las fluctuaciones como sigue

$$\eta(t, x) = \sum_{w \in \text{Spec}(\hat{K})} (A_w g_w(t) f_w(x) + A_w^* g_w^*(t) f_w^*(x)), \quad (3.1.5)$$

donde la imposición de que η toma valores reales es lo que hace que desarrollemos la suma en pares de términos conjugados. Los $g_w(t)$ son funciones $g_w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, al igual que $f_w(x)$.

Cada término por separado de la suma (3.1.5) verifica las ecuaciones de campo linealizadas (3.1.2), y como las funciones $f_w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ son propias de \hat{K} con valores propios w^2 , se sigue que

$$\partial_t^2 g_w + w^2 g_w = 0. \quad (3.1.6)$$

Es bien sabido que un sistema completo de soluciones de (3.1.6) viene dado por las funciones $g_w(t) = (1/\sqrt{2w})e^{-iwt}$, con lo que la fluctuación se expresa como

$$\eta(t, x) = \sum_{w \in \text{Spec}(\hat{K}^{1/2})} \frac{1}{\sqrt{2w}} (A_w e^{-iwt} f_w(x) + A_w^* e^{iwt}(t) f_w^*(x)). \quad (3.1.7)$$

Llegados a este punto, aplicamos el método estándar de cuantización canónica. Para ello, restringimos el sistema a un intervalo finito $[-L/2, L/2]$ con $L > 0$ una longitud sobre el espacio-tiempo original, i.e., con dimensiones de longitud. Para adaptarlo a nuestra teoría reformulada, restringimos el sistema, ahora sobre las variables espacio-temporales adimensionales, a un intervalo finito $[-l/2, l/2]$, con $l = m_d L$.

Imponemos periodicidad, con período l , sobre las funciones propias de \hat{K} , $f_w(x)$. A través de la correspondiente transformada inversa de Fourier, se tiene

$$\begin{aligned} f_w(x) &= \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}_w(k) e^{ikx} dk \\ f_w(x+l) &= \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}_w(k) e^{ik(x+l)} e^{i\delta(k)} dk, \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

donde se ha añadido un desfase $\delta(k)$ sobre la autofunción trasladada $f_w(x+l)$, pues estamos tratando con completa generalidad estados ligados, semiligados y de scattering, luego no hay ninguna garantía de que dicho desfase sea nulo. Como $f_w(x) = f_w(x+l)$, se sigue que

$$e^{i(kl+\delta(k))} = 1 \implies kl + \delta(k) = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad w = w(k). \quad (3.1.9)$$

Esta imposición de intervalo finito y periodicidad discretiza el operador \hat{K} , y aporta una densidad espectral $\rho_{\hat{K}}(k) = \partial_k n(k)$. Estamos denotando por k a uno de los *números de onda* de este modo, en este sector topológico. Con los desarrollos que siguen, se verá que esta terminología adquiere sentido.

Añadimos constantes de normalización sobre los modos, cuya cálculo es el estándar para estas situaciones en que se introducen sistemas linealizados con sistemas completos $\{g_w(t) f_w(x)\}$, en intervalos finitos $[-l/2, l/2]$ (véase [29]). Con ello, las fluctuaciones resultan de la forma

$$\eta(t, x) = \left(\frac{\hbar \gamma_d^A}{m_d l} \right)^{1/2} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2w(k)}} (A(k) e^{-iw(k)t} f_k(x) + A(k)^* e^{iw(k)t} f_k^*(x)), \quad (3.1.10)$$

con γ_d y m_d las constantes características de la teoría.

Siguiendo el procedimiento estándar de cuantización canónica sobre estos campos, ya desarrollados en términos de modos de Fourier, uno podría pensar que bastaría con cuantizar los coeficientes $A(k)^*$ y $A(k)$ como operadores de creación y aniquilación de estados de momento k en el espacio de Fock (ver apéndice A). No obstante, en

este paso es pertinente hacer el siguiente comentario. Hay ciertos valores propios del espectro $\text{Spec}(\hat{K})$ que no se han tenido en cuenta en el desarrollo anterior: dada $\phi_s(x)$ una solución estable, el operador de segunda variación de la energía \hat{K} siempre tiene, en estos sistemas, núcleo no trivial. En otras palabras, existen autovalores nulos, sobre los que los modos de Fourier anteriores no están bien definidos, ya que estos *modos nulos* hacen que la expresión (3.1.10) diverja. Sin embargo, las diferencias de energías de punto cero que vamos a manejar vienen dadas, hasta el orden de un lazo, como sumas infinitas de los términos estándar de energía de punto cero de un oscilador armónico, $\hbar\omega$, por tratar con sistemas cuantizados que son colectividades de infinitos osciladores desacoplados. Este sencillo argumento justifica la omisión de los modos nulos en los desarrollos generales de campos fluctuación, como (3.1.10). De hecho, no es difícil probar que dicho operador siempre tiene núcleo no trivial en sistemas con ecuación de campo (2.5.9). Lo enunciamos y probamos en el lema que sigue.

Lema 3.1.1. *Sea $\phi_s(x)$ una configuración de campo estable para la teoría dada. Sea también \hat{K} el operador de segunda variación de E en ϕ_s , dada por (3.1.3). Entonces, dicho operador \hat{K} tiene un núcleo no trivial unidimensional. Además, la autofunción de valor propio nulo será proporcional a*

$$\eta_0 = \partial_x \phi_s(x). \quad (3.1.11)$$

Demostración. Supongamos que ϕ_s es una solución estable de la teoría. En particular, satisface la siguiente ecuación de campo

$$\partial_x^2 \phi(x) = \frac{\partial U}{\partial \phi}. \quad (3.1.12)$$

Basta derivar con respecto a x en la última expresión, así como aplicar la regla de la cadena, para deducir que

$$\hat{K}\eta_0 = 0, \quad (3.1.13)$$

con $\eta_0 = \partial_x \phi_s$, como se quería demostrar. \square

A continuación, particularizamos este procedimiento semiclásico en los sectores de vacío y de kink.

3.1.2. Fluctuaciones cuánticas de vacío

Escogemos un punto de vacío $\phi_v \in M$ y aplicamos sobre él pequeñas fluctuaciones, resultando un campo de la forma $\phi(t, x) = \phi_v + \eta(t, x)$. Por la ecuación (3.1.2), e introduciendo la O de Landau para clarificar el orden hasta el que desarrollamos el funcional acción $S[\cdot]$, que después omitiremos, se sigue que los términos cuadráticos de $S[\cdot]$ en η , cuya diagonalización nos da las fluctuaciones buscadas, son

$$S_c[\phi_v + \eta(t, x)] = \int \int d^2x \left[\frac{1}{2}(\partial_t \eta)^2 + \frac{1}{2}\eta \left(\partial_x^2 - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \right)_{\phi_v} \right) \eta \right] + O(\eta^3),$$

donde el subíndice c hace referencia a que estos desarrollos en potencias de η están enmarcados en un contexto clásico, con S_c como funcional definido sobre un espacio de elementos que, a priori, son funciones y no operadores. Integrando por partes, se tiene que

$$\begin{aligned} \int \int d^2x \frac{1}{2} (\partial_t \eta)^2 &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dx \eta (\partial_t \eta)|_{\partial \mathbb{R}} - \frac{1}{2} \int \int d^2x (\partial_t^2 \eta) \eta \\ &= -\frac{1}{2} \int \int d^2x (\partial_t^2 \eta) \eta, \end{aligned}$$

donde se ha usado que $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \eta(t, x) = 0$. Este comportamiento asintótico de las perturbaciones es necesario por la estabilidad de ϕ_v . Entonces,

$$S_c[\phi_v + \eta(t, x)] = \int \int d^2x \left[-\frac{1}{2} \eta (\partial_t^2 \eta) + \frac{1}{2} \eta (\partial_x^2 \eta) - \frac{1}{2} \eta \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \right)_{\phi_v} \eta \right] + O(\eta^3). \quad (3.1.14)$$

Por lo tanto, la ecuación de campo linealizada que satisface η es

$$\left[\partial_t^2 - \partial_x^2 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \right)_{\phi_v} \right] \eta + O(\eta^2) = 0, \quad (3.1.15)$$

donde se suele denotar

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \right)_{\phi_v} = v^2 \in \mathbb{R}^+, \quad (3.1.16)$$

lo cual es no negativo por ser ϕ_v un mínimo relativo de $U(\cdot)$.

Las soluciones de (3.1.15) se expresan con un sistema completo de soluciones, constituido por lo que hemos venido llamando *modos normales de fluctuación de vacío*, que son, como ya se probó en el desarrollo general,

$$\eta_k(t, x) = f_k(x) e^{iw(k)t}.$$

Las funciones $f_k(x)$ son funciones propias del operador segunda variación de la energía en el vacío, \hat{K}_0 , dada por

$$\hat{K}_0 f_k(x) = (-\partial_x^2 + v^2) f_k(x) = w(k)^2 f_k(x). \quad (3.1.17)$$

Análogamente al desarrollo del apartado anterior, un sistema completo de la anterior ecuación viene dado por $f_k(x) = e^{ikx}$, con los k distribuidos tal y como determine el espectro $\text{Spec}(\hat{K}_0)$.

De esta forma, como $f_k(x)$ es función propia de \hat{K}_0 con autovalor $w(k)^2$, sustituyendo estos modos $\eta_k(t, x)$ en (3.1.15) se tiene que

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 - \partial_x^2 + v^2) \eta_k(t, x) &= 0 \\ \implies -w(k)^2 + k^2 + v^2 &= 0 \implies w(k)^2 = k^2 + v^2. \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

Como ya hicimos para oscilaciones en torno a una solución estable arbitraria, ubicamos el sistema en un intervalo finito $[-l/2, l/2]$, recordando que en la teoría reformulada es tal que $l = m_d L$, con L el valor con unidades de longitud. Imponemos

las condiciones periódicas $f_k(-l/2) = f_k(l/2)$, así como $f'_k(-l/2) = f'_k(l/2)$. Esto nos permite escribir (3.1.17) como el siguiente problema de Sturm-Liouville con condiciones frontera no separadas:

$$\begin{aligned} f''_k(x) + (w(k)^2 - v^2)f_k(x) &= 0, \quad x \in [-l/2, l/2], \\ f_k(-l/2) &= f_k(l/2), \\ f'_k(-l/2) &= f'_k(l/2). \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

Sin entrar en mucho detalle, desarrollamos la solución de este problema de EDOs estándar. Tenemos tres casos:

1. $w(k)^2 - v^2 < 0$ (i.e., $w(k)^2 < v^2$).

Denotamos $k = \sqrt{v^2 - w(k)^2} \in \mathbb{R}$, con signo positivo. Entonces, podemos expresar la solución general en $[-l/2, l/2]$ como

$$f(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}, \quad (3.1.20)$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ constantes.

Imponiendo las condiciones de periodicidad, se sigue que

$$\begin{aligned} f(l/2) = f(-l/2) &\implies c_1[e^{kl/2} - e^{-kl/2}] = c_2[e^{kl/2} - e^{-kl/2}], \\ f'(l/2) = f'(-l/2) &\implies c_1 k[e^{kl/2} - e^{-kl/2}] = c_2 k[e^{-kl/2} - e^{kl/2}]. \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

Denotando $\gamma = e^{kl/2} - e^{-kl/2}$, que es no nulo, se tiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} \gamma c_1 - \gamma c_2 = 0 \\ k\gamma c_1 + k\gamma c_2 = 0. \end{cases} \quad (3.1.22)$$

Para que haya solución no trivial, debemos tener

$$\begin{vmatrix} \gamma & -\gamma \\ k\gamma & k\gamma \end{vmatrix} = 2k(e^{kl/2} - e^{-kl/2})^2 = 0, \quad (3.1.23)$$

lo cual no es cierto, pues la expresión entre corchetes nunca se anula, al ser $k, \gamma \neq 0$. Entonces, no hay solución no trivial para el caso $w(k)^2 - v^2 < 0$.

2. $w(k)^2 - v^2 = 0$ (i.e., $w(k)^2 = v^2$).

En este caso, la solución general es de la forma $f(x) = c_1 + c_2 x$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ constantes. Las condiciones de periodicidad implican que

$$c_1 + c_2(l/2) = c_1 - c_2(l/2).$$

Entonces, $c_2 = 0$, con lo que tenemos un sistema completo de solución unidimensional dado por

$$\vee \{1\}, \quad (3.1.24)$$

con autovalor $w(k)^2 = v^2$.

3. $w(k)^2 - v^2 > 0$ (i.e., $w(k)^2 > v^2$).

La solución general viene dada por

$$f(x) = c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx), \quad (3.1.25)$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ constantes. Aplicando las condiciones de periodicidad, llegamos a una expresión de la siguiente forma

$$\sin\left(\frac{lk}{2}\right) = 0 \implies k_n = \frac{2\pi n}{l}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.1.26)$$

Esto induce un sistema completo de soluciones dado por

$$\mathcal{S} = \left\{ \sin\left(\frac{2n\pi x}{l}\right), \cos\left(\frac{2n\pi x}{l}\right) \right\}_{n \in \mathbb{Z}}, \quad (3.1.27)$$

ahora infinito numerable. Los autovalores vienen dados por

$$w_n^2 = v^2 + (4n^2\pi^2/l^2) \geq v^2, \quad (3.1.28)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Con todo ello, tenemos el siguiente espectro discreto $\text{Spec}_d(\hat{K}_0)$ con el sistema localizado en $[-l/2, l/2]$ y con las condiciones periódicas anteriores,

$$\text{Spec}_d(\hat{K}_0) = \{v^2\} \cup \left\{v^2 + \frac{4n^2\pi^2}{l^2}\right\}_{n \in \mathbb{Z}}. \quad (3.1.29)$$

Las funciones propias de \hat{K}_0 en este sector, con el sistema en $[-l/2, l/2]$, añadiendo una constante de normalización $1/\sqrt{l}$ al estar manejando un sistema completo de soluciones en $L^2[-l/2, l/2]$, son de la forma

$$f_k(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} e^{ikx}.$$

La estaticidad del término potencial v^2 de la ecuación de Schrödinger dada en (3.1.19) implica un desfase nulo de los autoestados de scattering $f_k(x)$ para los que $w(k)^2 > v^2$.

Antes de pasar a la expresión general de las fluctuaciones en $[-l/2, l/2]$, tratamos el paso del espectro discreto de estados de scattering al espectro continuo de estos mismos estados. Para ello, tomamos el límite $l \rightarrow \infty$, y llegamos a un espectro continuo bajo la condición $w(k)^2 > v^2$ de la forma $\{v^2 + k^2 : k \in \mathbb{R}\}$.

De esta manera, el espectro completo del operador de segunda variación de nuestras teorías en el sector de vacío, ahora en el espacio \mathbb{R} , es

$$\text{Spec}(\hat{K}_0) = \{v^2\} \cup \{v^2 + k^2\}_{k \in \mathbb{R}}. \quad (3.1.30)$$

Así pues, en este sector, tenemos un espectro con un estado semiligado con autovalor localizado en el propio v^2 (más adelante se entenderá esta terminología), y con una familia infinita no numerable de autoestados de scattering con autovalor $w(k)^2 > v^2$.

Es decir, los modos normales de fluctuación de vacío vienen dados como una familia de ondas planas monocromáticas, con la anomalía situada en el caso $w(k)^2 = v^2$. Volviendo al sistema en $[-l/2, l/2]$, la solución general de (3.1.15) en el sector topológico de vacío es una serie de Fourier como sigue

$$\eta(t, x) = \left(\frac{\hbar\gamma_d^4}{m_d l} \right)^{1/2} \sum_{w(k) \in \text{Spec}(\hat{K}_0^{1/2})} \frac{1}{\sqrt{2w(k)}} \left(A(k) e^{-iw(k)t} e^{ikx} + A(k)^* e^{iw(k)t} e^{-ikx} \right), \quad (3.1.31)$$

dada como una combinación lineal infinita de estados libres independientes, donde cada uno de ellos se formaliza como una onda plana monocromática. La única diferencia de esta teoría en el sector de vacío con respecto a la teoría libre de Klein-Gordon (ver capítulo 3 de [29]), aunque fundamental, es el espectro sobre el que damos los autovalores $w(k)$ de los operadores $\hat{K}_0^{1/2}$, determinado por $\hat{K}_0 = -\partial_x^2 + v^2$. Como ya se mencionó en el caso más general, por el método estándar de cuantización canónica, los coeficientes de Fourier $A^*(k)$ y $A(k)$ se convierten en operadores de creación y aniquilación $A^\dagger(k)$ y $A(k)$, uno el adjunto del otro, de mesones en el vacío, como partículas fundamentales de espín 0. Esto nos sugiere la definición de $N(k) = A^\dagger(k)A(k)$ como el operador adimensional *número de ocupación*, siguiendo la línea estándar de la teoría de estados coherentes de la mecánica cuántica no relativista.

De esta forma, la corrección al orden de un lazo de la energía de vacío es la energía dada cuando todos los autoestados del operador de fluctuación, $\hat{\eta}$, están desocupados en el sector topológico de vacío, es decir,

$$\Delta \tilde{E}_0[\psi_v] = \frac{m_d}{\gamma_d^2} \Delta E_0[\phi_v] = \frac{\hbar m_d}{2} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N w(k_n) \right). \quad (3.1.32)$$

Probemos esta igualdad (3.1.32). Para ello, resumimos el formalismo de la cuantización canónica que hemos mencionado anteriormente. Note el lector que no entraremos en los detalles de la teoría de distribuciones que nos permite desarrollar estas teorías por esta vía.

Consideremos una configuración $\phi \in \mathcal{D}$, con su momento conjugado

$$\pi(t, x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}(t, x), \quad (3.1.33)$$

donde $\dot{\phi}$ es la derivada temporal del campo ϕ .

Por la correspondiente transformada de Legendre, tenemos el siguiente Hamiltoniano no reescalado

$$H = \frac{m_d}{2\gamma_d^2} \left[\left(\int dx \pi(t, x)^2 \right) + E[\phi] \right]. \quad (3.1.34)$$

El campo ϕ y su momento conjugado π pasan a ser operadores $\tilde{\phi}$ y $\tilde{\pi}$ que actúan sobre $\mathcal{L}^2(\mathcal{D})$, de la forma

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}\theta[\Phi(x), t] &= \phi(x)\theta[\Phi(x), t], \\ \tilde{\pi}\theta[\Phi(x), t] &= -\frac{i\hbar\gamma_d^4}{m_d} \frac{\delta\theta[\Phi(x), t]}{\delta\phi(x)}, \end{aligned} \quad (3.1.35)$$

lo que induce la siguiente regla de conmutación, dependiente de las constantes dimensionales de la teoría, así como del instante t que hemos añadido como argumento por coherencia

$$[\tilde{\phi}(x, t), \tilde{\pi}(x', t)] = -\frac{i\hbar\gamma_d^4}{m_d}\delta(x - x'), \quad (3.1.36)$$

donde $\delta : \mathcal{L}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{C}$ es la distribución delta de Dirac en el $x' \in \mathbb{R}$ sobre funciones $f(x)$, o viceversa.

Observemos la forma de la ecuación diferencial sobre las fluctuaciones $\eta(t, x)$ en términos del operador de segunda variación completo, truncando en primer orden de las potencias de η en (3.1.15):

$$\left[\partial_t^2 - \partial_x^2 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \right)_{\phi_v} \right] \eta = 0. \quad (3.1.37)$$

Si tomamos $v^2 = (\partial^2 U / \partial \phi^2)_{\phi_v}$ como la masa al cuadrado, y ϕ como el campo escalar bosónico de espín 0 que es, tenemos en (3.1.37) una ecuación del campo libre de Klein-Gordon. Este último, conceptualmente, consiste en una colectividad infinita de osciladores armónicos desacoplados. La única diferencia entre este sistema y el nuestro, como ya se mencionó, es la relación de dispersión dada por $w(k)^2 = k^2 + v^2$ sobre el espectro de \hat{K}_0 . Así, partiendo del Hamiltoniano conocido de esta última teoría, entonces el Hamiltoniano no reescalado que inducen los campos fluctuación cuantizados viene dado por

$$\tilde{H}_0 = \sum_k \hbar \xi_d w(k) \left(a(k)^\dagger a(k) + \frac{1}{2} \right), \quad (3.1.38)$$

con ξ_d una constante dimensional, que dependerá de las constantes de la teoría, y que vamos a determinar a continuación. Dada en (3.1.34) la expresión del Hamiltoniano no cuantizado de la teoría, sabemos que la constante m_d/γ_d^2 contiene toda la información dimensional del Hamiltoniano reescalado. Entonces, este último es

$$(\gamma_d^2/m_d)\tilde{H}_0 = H_0 = \sum_k \hbar w(k) \left(a(k)^\dagger a(k) + \frac{1}{2} \right). \quad (3.1.39)$$

Para deducir (3.1.32), consideramos un estado coherente tal que $n_k = 0$ para todo momento k , i.e., dada por autoestados en el espacio de Fock propios de $N(k)$ con autovalor 0, para cualquier k del espectro. Con ello, por la forma que tiene la reformulación del Hamiltoniano, así como la del funcional energía, la corrección de la energía de vacío al orden de un lazo es

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{E}_0[\psi_v] &= \frac{m_d}{\gamma_d^2} \Delta E_0[\phi_v] \\ &= \frac{m_d}{\gamma_d^2} \gamma_d^2 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \frac{\hbar w(k_n)}{2} = \frac{\hbar m_d}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N w(k_n). \end{aligned} \quad (3.1.40)$$

Por lo tanto, deshaciendo la transformación de constantes de la teoría,

$$\Delta E_0[\phi_v] = \frac{\hbar \gamma_d^2}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N w(k_n). \quad (3.1.41)$$

Situando el sistema en un intervalo finito $[-l/2, l/2]$ con las condiciones de periodicidad pertinentes, para regularizar esta teoría frente a las divergencias de las energías de punto cero se toma un número de modos de fluctuación de vacío del orden de $N \in \mathbb{N}_0$ que, aunque arbitrariamente grande, es finito. Esto se denomina tomar un *cutoff en la energía de los modos de fluctuación*. Al final, para volver al sistema original, tomaremos $N \rightarrow \infty$ y $l \rightarrow \infty$.

Como los números de onda consecutivos satisfacen la siguiente relación

$$(k_{n+1} - k_n)l = 2\pi, \text{ con } k_n = \frac{2n\pi}{l}. \quad (3.1.42)$$

entonces, la densidad de estados en el espacio de momentos viene dada por la expresión $\rho_0(k) = \rho_0 = l/2\pi$.

Regularizada la teoría en este sector, retomamos $l \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$. Por las pertinentes sumas de Riemann, se tiene la siguiente relación a partir de (3.1.41),

$$\begin{aligned} \Delta E_0[\phi_v] &= \frac{\hbar\gamma_d^2}{2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dk \rho_0(k) w(k) + \frac{v}{2} \right) \\ &= \frac{\hbar\gamma_d^2}{2} \left(\frac{l}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \sqrt{k^2 + v^2} + \frac{v}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.1.43)$$

Note el lector que se ha añadido a la energía anterior un término $\hbar\gamma_d^2 v/4$. Éste se corresponde con el llamado *autoestado semiligado* de la teoría, que aflora cuando $l \rightarrow \infty$, y cuyo origen está en el valor $w_b = v$ en la suma de (3.1.41), correspondiente a un estado propio de \hat{K}_0 constante, y al caso $w(k)^2 = v^2$ de la resolución de (3.1.19). Más adelante se entrará en la interpretación de este tipo de autoestados.

Este autoestado semiligado de la teoría, que siempre aflora, como hemos visto, en el sector de vacío, también lo puede hacer en el sector de kink. Es un autoestado diferente del estado $w_{k=0} = v$, i.e., del umbral del espectro continuo. El factor $1/2$ multiplicando al valor $w = v$ procede del llamado *teorema de Levinson en una dimensión* [30]. Más adelante, también, entraremos en el detalle de este último resultado.

Bajo el límite $l \rightarrow \infty$ es conveniente tomar una completación del espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ a $\bar{L}^2(\mathbb{R})$, de tal forma que tengamos pertenencia en este último de las ondas planas monocromáticas $f(x) = e^{ikx}$.

3.1.3. Fluctuaciones cuánticas de kink

Repetimos un razonamiento análogo al del sector de vacío, pero ahora con fluctuaciones sobre las soluciones estables de tipo kink o solitón, $\phi_s(x) = \phi_k(x)$.

En las dos teorías que estudiamos en este trabajo, así como en cualquier otra de tipo bosónico y escalar, podemos escindir el Hessiano de la autointeracción como sigue

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \right)_{\phi_k(x)} = v^2 + V(x), \quad (3.1.44)$$

añadiendo un término dependiente de la variable espacial x que induce un desfase sobre los autoestados de fluctuación de scattering de la teoría.

Esto nos deja la siguiente ecuación de campo, ahora como ecuación de ondas con un nuevo término no estático,

$$[\partial_t^2 - \partial_x^2 + (v^2 + V(x))] \eta(t, x) + O(\eta^2) = 0. \quad (3.1.45)$$

Se sabe que un sistema completo de soluciones de (3.1.45) viene dada por las expresiones generales $\eta_q(t, x) = e^{iw(q)t} f_q(x)$, los cuales nos dan los modos normales de las fluctuaciones alrededor del kink. El factor espacial de estos modos está determinado por el problema espectral expresado en términos del siguiente operador de segunda variación de la energía

$$\hat{K} = -\partial_x^2 + v^2 + V(x). \quad (3.1.46)$$

Recordemos, que bajo $x \rightarrow \pm\infty$, las soluciones de tipo kink tienden a puntos de vacío, i.e., a elementos de la variedad M de la teoría. Además, imponemos la siguiente condición:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \right)_{\phi^{(i)}(x)} = v^2 = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \right)_{\phi^{(i+1)}(x)}, \quad (3.1.47)$$

con $\phi^{(i+1)}$ y $\phi^{(i)}$ puntos de vacío consecutivos del modelo. Como ya hemos visto, esto es cierto en las teorías que nosotros estudiamos. La razón de que sí se cumpla para ϕ^4 y sine-Gordon es que, como ya hemos visto, estos tienen variedad de moduli de vacío unipuntuales.

No obstante, esta última afirmación no es cierta en general para cualquier teoría escalar y bosónica, ya que podría ocurrir que $v_{(i+1)}^2 \neq v_{(i)}^2$, con $v_{(i)}^2$ y $v_{(i+1)}^2$ los valores de los Hessianos de $U[\cdot]$ en puntos consecutivos del M de la teoría. Esto último ocurre cuando la solución kink conecta puntos de vacío pertenecientes a clases distintas del espacio de moduli de vacío M/G , con G el grupo discreto de simetría de la teoría, en coherencia con lo anterior.

En otras palabras, en el caso de que se dé la condición asintótica (3.1.47), y con ello el comportamiento deseado de $V(x)$ para $x \rightarrow \pm\infty$, se cumple la siguiente igualdad

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \hat{K} = \hat{K}_0, \quad (3.1.48)$$

donde no debemos perder de vista que \hat{K}_0 y \hat{K} son operadores de distinta índole: el primero es de tipo Helmholtz, mientras que el segundo es un operador de tipo Schrödinger. Como veremos, la resolución de las ecuaciones espectrales de éste último no es tan trivial como en el caso de \hat{K}_0 . No obstante, el razonamiento será relativamente similar (sin olvidar la dificultad del término $V(x)$), pues, como veremos también, la restricción espacial a $[-l/2, l/2]$ y las condiciones periódicas utilizadas lleva a una discretización de \hat{K} en términos de un operador de Sturm-Liouville regular y simétrico. Así, en $[-l/2, l/2]$, esto nos permitirá hablar de familias numerables y crecientes de autovalores de \hat{K} .

Por esta razón, la función $V(x)$ ha de satisfacer las siguientes condiciones:

- i) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = 0$.
- ii) $\hat{K} f_q(x) = w(q)^2 f_q(x)$.
- iii) La relación de dispersión general es $w(q)^2 = q^2 + v^2$.

La deducción del último punto es exactamente la misma que la del sector de vacío, esto es, basta sustituir un modo normal $\eta_q(t, x)$ en (3.1.45) de forma que

$$[\partial_t^2 - \partial_x^2 + (v^2 + V(x))] \eta_q(t, x) = (-w(q)^2 + q^2 + v^2 + V(x)) \eta_q(t, x) = 0, \quad (3.1.49)$$

luego tomando $x \rightarrow \pm\infty$, se tiene la relación de dispersión enunciada.

Con todo ello, los modos normales de fluctuación en el sector de kink *no van a ser ondas planas monocromáticas*, sino ondas dispersivas distorsionadas del caso de vacío por el kink, a través de $V(x)$. Además, existirán estados ligados del operador \hat{K} discretizado, cuyos autovalores permanecerán invariantes frente a $l \rightarrow \infty$.

En general, tendremos tres tipos de funciones propias de \hat{K} cuando tomemos $l \rightarrow \infty$, cuya construcción se verá explícitamente más adelante cuando entremos en la deducción de la fórmula de Dashen-Hasslacher-Neveu (DHN en adelante):

1. Estados de scattering

Los autovalores de esta parte del espectro vienen dados, con el operador discretizado, como $\{w(q_n)^2 = q_n^2 + v^2\}_{n \in \mathbb{Z}}$, de lo que es de notar la acotación inferior por la constante v^2 de nuestras teorías. Bajo $l \rightarrow \infty$, este espectro pasa a tener una cardinalidad no numerable sobre los reales, de la forma $\{w(q)^2 = q^2 + v^2\}_{q \in \mathbb{R}}$.

El comportamiento asintótico es el de una onda plana desfasada por una función $\delta(q)$, con $q \in \mathbb{R}$, de la forma

$$f_q(x) \approx e^{[iqx + i\delta(q)]}, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad (3.1.50)$$

donde $\delta(q)$ es el desfase total inducido por la función $V(x)$ del operador de Schrödinger.

Con el sistema en $[-l/2, l/2]$, e imponiendo las condiciones periódicas recurrentes sobre las $f_q(x)$, se sigue que

$$\begin{aligned} f_q(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_q(q) e^{iqx}, \\ f_q(x+l) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_q(q) e^{i\delta(q)} e^{i(x+l)q}, \end{aligned} \quad (3.1.51)$$

luego, como $f_q(x) = f_q(x+l)$, entonces $e^{i(\delta(q)+ql)} = 1$, luego tenemos la relación de dispersión

$$q_n l + \delta(q_n) = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.1.52)$$

De esta forma, tenemos la siguiente igualdad para los números de onda discretizados

$$q_n = \frac{2\pi n}{l} - \frac{\delta(q_n)}{l} = k_n - \frac{\delta(q_n)}{l}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3.1.53)$$

donde k_n es el número de onda análogo en el sector de vacío. De esto, se sigue directamente la densidad de autoestados en el espacio de las q_n , ya que

$$(q_{n+1} - q_n)l + (\delta(q_{n+1}) - \delta(q_n)) = 2\pi, \quad (3.1.54)$$

lo que implica la densidad de autoestados que sigue

$$\rho_1(q) = \frac{l}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \delta(q)}{\partial q}, \quad (3.1.55)$$

es decir, la densidad de estados en el sector de kink es la del sector de vacío desplazada por un factor que promedia la variación del desfajase sobre la constante 2π .

2. Estados ligados

Tendremos una familia finita de autoestados sobre x , de la forma

$$\{f_{w_1}(x), \dots, f_{w_b}(x)\}, \quad (3.1.56)$$

con $b \in \mathbb{N}$ el número de nodos de cada configuración propia de \hat{K} , por ser este último operador de tipo Schrödinger. Estos conforman la parte numerable del espectro del operador \hat{K} . Recordando que estamos perturbando soluciones estables, los autovalores correspondientes son no negativos, y dada la existencia de modos nulos bajo cualquier forma del operador segunda variación, los ordenamos de la forma $0 = w_1^2 < w_2^2 < \dots < w_b^2 < v^2$. Es de remarcar que este espectro tiene una cota superior estricta en el valor v^2 de la teoría.

El comportamiento asintótico $l \rightarrow \infty$ de estos autoestados viene dada por las siguientes igualdades, que veremos en los modelos estudiados, aunque se podrían generalizar sobre toda teoría escalar y bosónica de las aquí tratadas:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_{w_i}(x) = e^{(v-w_i)x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f_{w_i}(x) = e^{-(v-w_i)x}, \quad (3.1.57)$$

lo que confirma una importante característica distintiva de los estados ligados con respecto a los semiligados: $f_{w_i} \in L^2(\mathbb{R})$ para todo $i \in \{1, \dots, b\}$.

3. Estados semiligados

Éstos se dan si $w_b^2 = v^2$, lo que implica la existencia de autoestados propios de \hat{K} que son ligados, y a la vez están incluidos en el espectro continuo de scattering. Un seña de identidad de estos estados, con respecto a los estados ligados, es que, como se puede apreciar en (3.1.57), no hay ninguna garantía de que el estado semiligado en cuestión sea de cuadrado integrable.

Como ya se demostró con total generalidad en estas teorías, siempre existen modos nulos. El análisis anterior nos permite añadir una particularidad del autoestado con valor propio nulo: el estado de más bajo autovalor w^2 es siempre ligado. Esto se demuestra atendiendo a la ecuación de campo estacionaria (2.5.10), ya que, dada $\phi_k(x)$ la solución de tipo kink, se sigue que

$$\partial_x^2(\partial_x \phi_k(x)) = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \right)_{\phi_k(x)} \cdot \partial_x \phi_k(x), \quad (3.1.58)$$

sobre lo que ha bastado derivar con respecto de x , y aplicar la regla de la cadena, como ya se hizo en 3.1.1. Esto prueba que *siempre* existe una función propia de \hat{K} con energía nula en el sector de kink, $f_1(x) = \partial_x \phi_k(x)$ con $w_1 = 0$, la cual forma parte del espectro de estados ligados.

La autofunción $f_1(x)$ nos da la parte espacial de una fluctuación propia del problema espectral general en este sector: *el bosón de Goldstone* ([31],[32]), el cual no implica ninguna contribución física. Éste es el resultado de la ruptura espontánea de simetría mediada por el kink y sobre la simetría del sistema con respecto a traslaciones

espaciales del tipo $x \mapsto x + a$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

Además, en el marco de nuestras teorías, como solución estable del sector de kink que es $\phi_k(x)$, ésta ha de ser estrictamente monótona creciente o decreciente, en función de su naturaleza de kink o de antikink. Esto implica que $f_1(x) = \partial_x \phi_k(x)$ *no puede tener nodos*. En virtud de la teoría de operadores no negativos de Schrödinger, entonces $f_1(x)$ es la autofunción de más baja energía dentro del espacio de solución del problema espectral $\hat{K} f_{w_i}(x) = w_i^2 f_{w_i}(x)$, i.e., describe el estado fundamental de la teoría.

Así pues, repetimos un razonamiento análogo al que nos llevó, en el sector de vacío, a una expresión general de las perturbaciones dadas por (3.1.2) y (3.1.4): situamos el sistema en un intervalo finito $[-l/2, l/2]$, con $l = m_d L$ para L la longitud dimensional; imponemos condiciones periódicas con dicho período l , e introducimos constantes de normalización $1/\sqrt{l}$ en los $f_k(x)$, de forma que

$$\eta(t, x) = \sqrt{\frac{\hbar \gamma_d^4}{m_d l}} \left\{ \sum_{j=2}^b \frac{1}{\sqrt{2w_j}} [A_j e^{-iw_j t} + A_j^* e^{iw_j t}] f_{w_j}(x) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2w(q_n)}} [A(q_n) e^{-iw(q_n)t} f_{q_n}(x) + A^*(q_n) e^{iw(q_n)t} f_{q_n}^*(x)] \right\}, \quad (3.1.59)$$

donde no se ha considerado el modo cero ya que éste no está incluido en la aproximación de estas perturbaciones hasta el orden de un lazo. Recordemos que, bajo esta aproximación, las energías de punto cero de la colectividad de osciladores armónicos desacoplados en que resulta el sistema cuantizado, dependen de términos $\hbar w$, en que frecuencias nulas $w = 0$ no contribuyen.

Análogamente al caso de vacío, el estado semiligado posible ($w^2 = v^2$) aparece con $l \rightarrow \infty$, cuando la energía del estado ligado de mayor energía coincide con el umbral de autovalores del espectro continuo, de estados de scattering este último. Por el teorema de Levinson, se asigna un peso de 1/2 al valor propio de este autoestado semiligado. Más adelante se justifica este tipo de contribuciones del estado semiligado.

De nuevo, por el formalismo estándar de cuantización canónica, tomamos los coeficientes de Fourier $A(k)$ y $A^*(k)$ en (3.1.59) como operadores en $\mathcal{L}^2(\mathcal{D})$, y los denotamos como $a(k)$ y $a^\dagger(k)$. Éstos serán operadores de aniquilación y creación de mesones moviéndose en el sistema con el kink de fondo (scattering), o atrapados en un pozo de potencial inducido por el propio kink (ligados). Esto permite, otra vez, la construcción del operador número de ocupación, definido como $N(k) = a^\dagger(k)a(k)$, dado sobre el mismo espacio $\mathcal{L}^2(\mathcal{D})$.

Como en el apartado anterior, la corrección de la energía clásica de kink viene dada en términos de estados no ocupados del espacio de Fock para las fluctuaciones alrededor de kink, i.e., de estados coherentes con valores propios nulos de $N(k)$ para todo k en este sector. Por ello, dicha corrección se da como sigue

$$\Delta \tilde{E}_0[\psi_k] = \frac{m_d}{\gamma_d^2} \Delta E_0[\phi_k] = \frac{\hbar m_d}{2} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N w(q_n) + \sum_{j=2}^b w_j \right). \quad (3.1.60)$$

Probemos esta igualdad (3.1.60). Para ello, recordemos la forma del Hamiltoniano clásico, en términos del campo η y su momento conjugado π , sobre la teoría no

reformulada,

$$\tilde{H} = \frac{m_d}{2\gamma_d^2} \left[\left(\int dx \pi(t, x)^2 \right)^2 + E[\phi] \right]. \quad (3.1.61)$$

Por un procedimiento análogo al del sector de vacío, utilizando la ortogonalidad en $L^2(\mathbb{R})$ de las funciones propias de \hat{K} , se escinde el Hamiltoniano cuantizado en dos Hamiltonianos, cada uno correspondiente a una colectividad de osciladores armónicos desacoplados (con las contribuciones de los espectros discreto y continuo):

$$\tilde{H} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\hbar w(q_n)}{\gamma_d^2} (a^\dagger(q_n)a(q_n) + \frac{1}{2}) + \sum_{j=2}^b \frac{\hbar w_j}{\gamma_d^2} (a_j^\dagger a_j + \frac{1}{2}). \quad (3.1.62)$$

Recordemos que $(\gamma_d^2/m_d)\tilde{H}$ es el Hamiltoniano de la teoría reformulada. Denotando por $\Delta E_0[\phi_k]$ al autovalor, correspondiente a todos los números de ocupación nulos en todas las componentes que determinan los elementos del espacio de Fock, de la suma infinita de operadores $\gamma_d^2\tilde{H}$, se sigue que

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{E}_0[\psi_k] &= \frac{m_d}{\gamma_d^2} \Delta E_0[\phi_k] = m_d \left[\sum_{n=-N}^N \frac{\hbar w(q_n)}{2} + \sum_{j=2}^b \frac{\hbar w_j}{2} \right] \\ \implies \Delta E_0[\phi_k] &= \frac{\gamma_d^2}{m_d} \left(\frac{\hbar m_d}{2} \right) \left[\sum_{n=-N}^N w(q_n) + \sum_{j=2}^b w_j + s_b w_b \right] \\ \implies \Delta E_0[\phi_k] &= \frac{\hbar \gamma_d^2}{2} \left[\sum_{n=-N}^N w(q_n) + \sum_{j=2}^b w_j + s_b w_b \right], \end{aligned} \quad (3.1.63)$$

donde, s_b toma el valor 1 si $w_b < v$ (autoestado ligado), y $1/2$ si $w_b = v$, en virtud del teorema de Levinson (tratado más adelante). Esto termina la demostración de la igualdad (3.1.60), completada con el término del autoestado semiligado.

Volvemos al espacio original tomando $l \rightarrow \infty$, y tomamos también $N \rightarrow \infty$ sobre el cutoff de la energía. Para ello, nos valemos de las densidades conocidas, teniendo en cuenta que los estados ligados y semiligado permanecen intactos. Se sigue que, bajo estos límites,

$$\begin{aligned} \Delta E_0[\phi_k] &= \frac{\hbar \gamma_d^2}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dk \rho_1(k) w(k) + \sum_{j=2}^b w_j + s_b w_b \right] \\ &= \frac{\hbar \gamma_d^2}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dk \left(\frac{l}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \delta(k)}{\partial k} \right) \sqrt{k^2 + v^2} + \sum_{j=2}^b w_j + s_b w_b \right], \end{aligned} \quad (3.1.64)$$

donde hemos usado que

$$\rho_1(k) = \frac{l}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \delta(k)}{\partial k}. \quad (3.1.65)$$

Esta expresión (3.1.64) ha sido calculada como la energía de punto cero, tomada como referencia, en el sector topológico del kink. Puede ser interpretado como una corrección sobre la energía clásica del kink debida a las fluctuaciones hasta el orden

de un lazo de estados desocupados en el espacio de Fock. Esto adquiere más sentido cuando calculamos las diferencias de estas correcciones entre ambos sectores. Precisamente, dichas diferencias serán nuestros objetos de estudio en la primera parte del siguiente apartado.

3.2. Corrección cuántica de la masa: Fórmula DHN

Tal y como vienen dadas, las energías de vacío $\Delta E_0[\phi_v]$ y $\Delta E_0[\phi_k]$ dependen de integrales divergentes, ya que en estas teorías existe un número infinito de modos de fluctuación. En los años 70, Dashen, Hasslacher y Neveu, propusieron un procedimiento de regularización y renormalización en dos fases, del que derivó la llamada *fórmula DHN* (véase [8]), la cual expresa, hasta el orden de un lazo, la corrección cuántica a la masa clásica de un kink.

3.2.1. Renormalización de la energía de punto cero: diferencia modo a modo

En esta fase, se desarrolla una renormalización de la energía de punto cero a través de diferencias modo a modo de fluctuación, entre los dos sectores topológicos tratados.

Con los Hamiltonianos conocidos de las fluctuaciones en ambas componentes conexas, tiene sentido definir la diferencia de energías de punto cero modo a modo, del kink y del vacío, o *energía de Casimir*, como sigue

$$\Delta E_1[\phi_k] = \frac{\hbar\gamma_d^2}{2} \text{Tr}_{L^2(\mathbb{R})} \left(\hat{K}^{1/2} - \hat{K}_0^{1/2} \right) = \frac{\hbar\gamma_d^2}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N (w_j - v_j), \quad (3.2.1)$$

donde $j = 1, \dots, N$ constituye cada uno de los índices de los autovalores no negativos, ordenados de forma creciente, de ambos operadores discretizados \hat{K} y \hat{K}_0 .

El símbolo $\text{Tr}_{L^2(\mathbb{R})}$ denota a *la traza zeta regularizada* de los operadores discretizados sobre el espacio $L^2(\mathbb{R})$ que denotamos $\hat{K}^{1/2}$ y $\hat{K}_0^{1/2}$, con autovalores $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ y $\{v_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, respectivamente. De ahí el exponente 1/2 de la potencia fraccionaria del operador. Recordemos que esta discretización consiste en situar el sistema en $[-l/2, l/2]$, con $l = m_d L$, y en tomar las pertinentes condiciones frontera periódicas sobre las funciones propias de \hat{K} y \hat{K}_0 .

Formalmente, y pasando por $l \rightarrow \infty$ a un espacio infinito, esta diferencia $\Delta E_1[\phi_k]$ se da sobre el espectro completo de las potencias fraccionarias, con exponente 1/2, de los operadores $\hat{K}_0 = -\partial_x^2 + v^2$ y $\hat{K} = -\partial_x^2 + v^2 + V(x)$, es decir,

$$\Delta E_1[\phi_k] = \frac{\hbar\gamma_d^2}{2} \left(\sum_{w \in \text{Spec}(\hat{K}^{1/2})} w - \sum_{\bar{w} \in \text{Spec}(\hat{K}_0^{1/2})} \bar{w} \right), \quad (3.2.2)$$

donde $v^2 = (\partial^2 U / \partial \phi^2)_{\phi_v} \in \mathbb{R}$ constante, y donde $(\partial^2 U / \partial \phi^2)_{\phi_k(x)} = v^2 + V(x)$ nos da un pozo de potencial que decrece a su valor asintótico v^2 para $x \rightarrow \pm\infty$, pues,

como vimos, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = 0$.

Una regularización de esta expresión es necesaria, dado que, como ya dijimos, estamos sumando sobre un número infinito, e incluso no numerable, de valores $w \in \mathbb{R}$. Esto nos permite desarrollar el cálculo de la energía de Casimir (3.2.2). Usamos el método de regularización sobre el número de modos como hemos venido haciendo. Así pues, confinamos el sistema en $[-l/2, l/2]$, para tomar $l \rightarrow \infty$ al final. Recordemos que las funciones propias de estos operadores de segunda variación son: de scattering (espectro continuo, $w^2 > v^2$), y autoestados ligados y semiligados ($w^2 \leq v^2$). Imponemos condiciones frontera ficticias sobre estas autofunciones de la forma $f(\pm l/2) = 0$ sobre los estados de scattering, mientras que sobre los otros tipos de estados anticipamos, incluso antes de tomar $l \rightarrow \infty$, que los ligados decrecerán exponencialmente, y los semiligados tenderán a un valor constante.

Empezamos suponiendo que \hat{K} no tiene estados semiligados, para después generalizar la teoría directamente. Denotamos $\hat{K}_0 f_k(x) = \bar{w}(k)^2 f_k(x)$ y $\hat{K} f_q(x) = w(q)^2 f_q(x)$. En cuanto a los estados de scattering, recordemos que, tanto para el modelo ϕ^4 como para el sine-Gordon, así como para muchas otras teorías escalares de este tipo, se tiene la paridad $V(x) = V(-x)$. Esto implica que las funciones propias de \hat{K} son pares o impares, lo que generaliza las condiciones frontera $f_q(l/2) = f_q(-l/2)$.

A continuación, describimos con mayor detalle los espectros de \hat{K} y de \hat{K}_0 . La diferencia con las descripciones anteriores de estos espectros está en que ahora escindimos los espectros continuos de los estados de scattering en autofunciones pares e impares. Esto nos permite desarrollar la regularización de la teoría sobre la corrección $\Delta E_1[\phi_k]$ de forma separada sobre estos estados, que son los que nos dan la divergencia.

Para ello, sobre estos últimos autoestados de scattering, utilizamos el teorema de Levinson unidimensional en el caso de un potencial simétrico, como es nuestra función $V(x)$. Damos el resultado para cualquier $V \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Teorema 4 (Teorema de Levinson en una dimensión). *Sean $b(k) = |b(k)|e^{i\phi_t(k)}$ y $t(k) = |t(k)|e^{i\phi_t(k)}$ las amplitudes de scattering de un sistema cuya evolución espacial está gobernada por la ecuación que sigue*

$$\psi''(x) + k^2\psi(x) = v(x), \quad (3.2.3)$$

con $v \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ la función que describe el estado del sistema, y $k \in \mathbb{C}$ constante. Si $n \in \mathbb{N}$ es el número de estados ligados presente en el sistema, entonces

$$n = \frac{(\phi_t(0) - \phi_t(\infty))}{\pi} - \frac{b(0)}{2}. \quad (3.2.4)$$

La demostración de este teorema requiere un análisis espectral riguroso de los operadores autoadjuntos (Hamiltonianos libres y de interacción) que describen los autoestados dados por $\psi(x)$, en términos de proyecciones ortogonales en el caso finito numerable, y de medidas espectrales en el caso infinito no numerable. Nótese que nada se ha dicho sobre la paridad de v , caso que a nosotros nos ocupa. Otra forma de demostrarlo, méritos al propio Levinson (1949), es por aplicación del teorema de

los residuos sobre el contorno de una región de \mathbb{C} sobre la función $\dot{s}(k)/s(k)$, con $s(k) = \text{Det}S(k)$, para $S(k)$ la matriz de scattering, dependiente de las amplitudes $t(k)$ y $b(k)$ del enunciado. El tipo de polos de $s(k)$ y su número están determinados por el número de estados ligados, así como por $b(0)$, que determina el residuo con un polo que no tiene parte imaginaria, lo que justifica el factor $1/2$.

Brevemente, supongamos que $V(x) = v(x)$ es par. Denotamos el número de estados ligados $n = n^+ + n^-$, con n^+ y n^- el número de ellos que son pares e impares, respectivamente. Denotamos $\delta^+(q)$ y $\delta^-(q)$ a los desfases de las autofunciones pares e impares de una función f que satisface

$$-f''(x) + V(x)f(x) = q^2f(x), \quad x \in [-l/2, l/2], \quad l \in \mathbb{R}. \quad (3.2.5)$$

Tomamos por convención $\lim_{q \rightarrow \infty} \delta^+(q) = 0$ y $\lim_{q \rightarrow \infty} \delta^-(q) = 0$. La familia de potenciales $V(x)$ que a nosotros nos ocupan son los potenciales de Pöschl-Teller, los cuales son potenciales atractivos ($V(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$) y transparentes (se prueba más adelante, en (3.3.22)), como veremos más adelante. Dicha transparencia significa que la amplitud de reflexión del sistema es nula. Estos potenciales responden a la forma general

$$V(x) = -s(s+1)\text{sech}^2(x), \quad s \in \mathbb{N}_0. \quad (3.2.6)$$

Con esta predisposición, nos falta esclarecer qué pasa con el término $b(0)/2$ del teorema 4. Recurriendo al desarrollo del apéndice B, la partícula *libre* ($s = 0$) $\Phi_k(x) = e^{ikx}$ de la que partimos toma un valor distinto de cero en $k = 0$, mientras que en el caso más general ($s > 0$) el autoestado de scattering satisface $\phi_{k=0} = 0$, es decir, se da la reflexión total en este límite y para este estado. El teorema de Levinson relaciona los Hamiltonianos libres con los Hamiltonianos de interacción, esto es, los que incluyen $V(x)$, y lo hacen a través del número de estados ligados, de los desfases, y de las posibles anomalías con los correspondientes autoestados en un entorno de $k = 0$. Pues bien, por su simetría, los autoestados impares son cero en el centro del potencial para $k \rightarrow 0$. Esto se puede ver de forma que, si $k \rightarrow 0$, la longitud de onda se hace muy grande, y el estado no llega a *sentir* el potencial. Esto se resume en que el desfase de los estados ligados impares es $0 \bmod \pi$. Por otra parte, el estado *crítico* procedente del estado de partícula libre con $\Phi_{k=0} \neq 0$, es par. Todo este argumento físico implica que el término $b(0)$ será el -1 genérico para los autoestados pares, y será 0 para los impares.

Entonces, se cumple que, en un intervalo $[-L, L]$ (véase para mayor detalle [33]),

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 0} \delta^+(q) &= \pi(n^+ - \frac{1}{2}), \\ \lim_{q \rightarrow 0} \delta^-(q) &= \pi n^-. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Podemos generalizar este resultado a cualquier potencial transparente, con unitariedad de la matriz de scattering, y con continuidad del autoestado en $q = 0$, como ocurre en nuestras teorías.

Los espectros de los operadores discretizados quedan de la siguiente forma:

Espectro de \hat{K}_0

1. Autoestado semiligado

Basta escoger un elemento arbitrario $f_0(x)$ del espacio de soluciones dado en (3.1.24), con autovalor v^2 ($k=0$).

2. Autoestados de scattering

a) Autofunciones impares: Los números de onda k_{n^-} vienen dados en un espectro discreto por los $n^- \in \mathbb{N}$, tales que $k_{n^-}l = 2\pi n^-$. Por imparidad, se satisface que $f_{n^-}(-x) = -f_{n^-}(x)$, con lo que, limitando el espacio de soluciones dado en (3.1.27) a éstas, tenemos un sistema completo de soluciones restringido a las soluciones impares de la forma

$$\{f_{n^-}(x) = A_{n^-} \sin(k_{n^-}x)\}, \quad (3.2.8)$$

con autovalores $\bar{w}(k_{n^-})^2 = k_{n^-}^2 + v^2$, y con A_{n^-} constantes. Como ya se hizo anteriormente en un caso más general,

$$(k_{n^-+1} - k_{n^-})l = 2\pi \implies \bar{\rho}_-(k) = \frac{l}{2\pi}. \quad (3.2.9)$$

b) Autoestados pares: Por un razonamiento análogo al de los impares, se tiene

$$\begin{aligned} k_{n^+}l = 2\pi, \quad f_{n^+}(x) &= A_{n^+} \cos(k_{n^+}x) \\ \bar{w}^2(k_{n^+}) = k_{n^+}^2 + v^2, \quad \bar{\rho}_+(k) &= \frac{l}{2\pi}, \quad n^+ \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Espectro de \hat{K}

1. Autoestados ligados

Existe un valor $r \in \mathbb{N}$ que describe el número de estos estados ligados que, recordemos, tienen valores propios $w^2 \leq r^2$. Denotamos por r^+ al número de autoestados ligados pares, y r^- a los impares. Aunque de momento no consideremos este caso, si $w^2 = v^2$, entonces el autoestado ligado con mayor w^2 pasa a ser un estado semiligado y contribuye con un peso $s_r = 1/2$ a la corrección de masa, lo cual ajusta nuestra teoría como veremos más adelante.

2. Autoestados de scattering

a) Autoestados impares: Dedución análoga al del operador de Helmholtz \hat{K}_0 añadiendo un desfase por efecto de $V(x)$, i.e., tenemos funciones propias espaciales de la forma $f_{m^-}(x) \approx A_{m^-} \sin[q_{m^-}x + \delta^-(q_{m^-})]$ para $x \rightarrow l/2$, con $\delta^-(q_{m^-})$ tal desfase, con $m^- \in \mathbb{N}$.

Como ya vimos en el caso de fluctuaciones generales sobre cualquier solución estable,

$$q_{m^-}l + \delta(q_{m^-}) = 2\pi m^-. \quad (3.2.11)$$

Aplicamos el mentado teorema de Levinson sobre estos desfasajes, lo que nos permite afirmar, adaptando el resultado a un intervalo acotado $[-l/2, l/2]$, que

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \delta^-(q) = 0, \quad \lim_{q \rightarrow 0} \delta^-(q) = 2\pi m^-. \quad (3.2.12)$$

De lo anterior surge la siguiente pregunta: ¿cuál es el mínimo de m^- , al que denotamos por m_0^- , de cara a establecer índices en los sumatorios de la corrección regularizada? Recurrimos al principio de incertidumbre de Heisenberg. Si l es suficientemente grande, entonces $q_{m_0^-}$ se hará pequeño, con lo que la expresión (3.2.11) implica que

$$q_{m_0^-}(l + \delta'_-(0^+)) + \delta^-(0^+) = 2\pi m_0^-, \quad (3.2.13)$$

donde hemos denotado

$$\delta'_-(0^+) = \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{\partial \delta^-(q)}{\partial q}. \quad (3.2.14)$$

Entonces, por (3.2.12), tomando l suficientemente grande (lo cual tiene sentido, pues recordemos que el caso real se da en $l \rightarrow \infty$), y recordando que l es la longitud del intervalo en que ubicamos el sistema, entonces $\pi m_0^- = \pi r_-$, es decir, $r_- = m_0^-$.

Como se viene haciendo de forma recurrente sobre las relaciones de dispersión, restamos (3.2.11) entre lo casos m^- y $m^- + 1$, de modo que

$$(q_{m^-+1} - q_{m^-})l + (\delta^-(q_{m^-+1}) - \delta^-(q_{m^-})) = 2\pi, \quad (3.2.15)$$

de lo que se sigue la siguiente relación

$$\rho^-(q) = \frac{l}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \delta^-(q)}{\partial q}. \quad (3.2.16)$$

- b) Autoestados pares: Ahora, denotamos por $m_+ \in \mathbb{N}$ al número que etiqueta a los autovalores de \hat{K} . Por un procedimiento análogo, obtenemos las siguientes funciones propias, relación de dispersión, comportamiento en torno a $q = 0$ del desfasaje, mínimo de m^+ , y densidad de estados:

$$\begin{aligned} f_{m^+}(x) &\approx A_{m^+} \cos(q_{m^+}x + \delta^+(q_{m^+})), \quad x \rightarrow l/2 \\ q_{m^+}l + \delta^+(q_{m^+}) &= 2\pi m^+, \\ \lim_{q \rightarrow \infty} \delta^+(q) &= 0, \quad \lim_{q \rightarrow 0} \delta^+(q) = 2\pi(m^+ - \frac{1}{2}), \\ m_0^+ = r^+, \quad \rho^+(q) &= \frac{l}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \delta^+(q)}{\partial q}. \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Note el lector que, dada la paridad e imparidad de las funciones propias de este espectro, el razonamiento para $m^\pm < 0$ es análogo.

Con todas las relaciones de dispersión anteriores, la corrección, aún discretizada en $[-l/2, l/2]$, viene dada por la diferencia entre los autovalores de $\hat{K}^{1/2}$ y $\hat{K}_0^{1/2}$ como sigue

$$\begin{aligned} \Delta E_1[\phi_k] = & \frac{\hbar\gamma_d^2}{2} \left[\sum_{i=1}^r w_i \right. \\ & + \sum_{m^+=m_0^+}^N \sqrt{q_{m^+}^2 + v^2} - \sum_{n^+=0}^{N_0} \sqrt{k_{n^+}^2 + v^2} \\ & \left. + \sum_{m^-=m_0^-}^N \sqrt{q_{m^-}^2 + v^2} - \sum_{n^-=0}^{N'_0} \sqrt{k_{n^-}^2 + v^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

Nótese que en (3.2.18) incluimos el estado semiligado de \hat{K}_0 , correspondiente a un modo constante con autovalor $w^2 = v^2$, en la familia de autoestados de scattering pares, porque da cuenta del autovalor más bajo de \hat{K}_0 en el espectro continuo. Estamos aplicando una regularización de cutoff sobre el número de modos, imponiendo $N = N_0$ y $N' = N'_0$, lo que equilibra los estados de scattering propios de \hat{K} y \hat{K}_0 . Damos una expresión para la segunda línea de (3.2.18), teniendo en cuenta que para la tercera el procedimiento es análogo. Así, la segunda fila quedaría como

$$\begin{aligned} & \frac{\hbar\gamma_d^2}{2} \left[\sum_{m^+=m_0^+}^N \sqrt{q_{m^+}^2 + v^2} - \sum_{n^+=0}^{N_0} \sqrt{k_{n^+}^2 + v^2} \right] \\ = & \frac{\hbar\gamma_d^2}{2} \left[\sum_{n^+=0}^N (\sqrt{q_{n^+}^2 + v^2} - \sqrt{k_{n^+}^2 + v^2}) - \sum_{n^+=0}^{r^+-1} \sqrt{q_{n^+}^2 + v^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

Para simplificar la expresión, y omitir los factores l , calculamos el desarrollo de Taylor de la función $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, dada por $g(x) = \sqrt{x^2 + v^2}$, en un entorno de k_{n^+} , sobre un punto q_{m^+} dentro de dicho entorno. Denotamos $q = q_{m^+}$ y $k = k_{n^+}$ a dos de estos vectores de onda arbitrarios. La distancia entre q y k está mediada por las relaciones de dispersión dadas en (3.2.17), de forma que

$$q - k = -\frac{\delta(k)}{l} + O(l^{-2}). \quad (3.2.20)$$

La pertenencia de q a dicho entorno está supeditada al hecho de que podemos tomar, arbitrariamente, el l tan grande como queramos. Así, se tiene que

$$\begin{aligned} g(q) = \sqrt{q^2 + v^2} &= g(k) + g'(k)(q - k) + O((q - k)^2) = \\ & \sqrt{k^2 + v^2} - \frac{k\delta(k)}{l\sqrt{k^2 + v^2}} + O(l^{-2}). \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

Entonces, como $k_{n^+} = 2\pi n^+/l$, si sustituimos (3.2.21) en (3.2.19) la segunda línea

toma la expresión que sigue

$$\begin{aligned}
& \frac{\hbar\gamma_d^2}{2} \left[\sum_{m^+=m_0^+}^N \sqrt{q_{m^+}^2 + v^2} - \sum_{n^+=0}^{N_0} \sqrt{k_{n^+}^2 + v^2} \right] \\
& \approx \frac{\hbar\gamma_d^2}{2} \left[- \sum_{n^+=0}^N \frac{k_{n^+} \delta^+(k_{n^+})}{l \sqrt{k_{n^+}^2 + v^2}} - \sum_{n^+=0}^{r^+-1} \sqrt{q_{n^+}^2 + v^2} + O\left(\frac{1}{l^2}\right) \right] \\
& = - \frac{\hbar\gamma_d^2}{2} \left[\int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} \frac{dw(k)}{dk} \delta^+(k) + r^+ v \right], \tag{3.2.22}
\end{aligned}$$

donde, en la última igualdad, se ha tomado $l \rightarrow \infty$, con lo que utilizamos que, bajo este límite, $q_{n^+} \rightarrow 0$ para $n^+ \in \{0, \dots, r^+ - 1\}$, $O(1/l^2) \rightarrow 0$, $\bar{\rho} = l/2\pi$. Además, para llegar a la derivada de $w(k)$ del integrando, se ha usado

$$\frac{dw(k)}{dk} = \frac{d}{dk}(\sqrt{k^2 + v^2}) = \frac{k}{\sqrt{k^2 + v^2}}.$$

Como ya se dijo, el procedimiento para el caso impar es análogo. Así, ya tenemos expresiones listas para ser regularizadas sobre el espectro continuo, con respecto a los autoestados de scattering pares e impares, que eran los que nos daban las divergencias. Ahora tomando los operadores \hat{K}_0 y \hat{K} en $L^2(\mathbb{R})$, y sumando también las contribuciones de los autoestados ligados, tenemos la siguiente corrección de la masa al orden de un lazo en términos de diferencias modo a modo

$$\begin{aligned}
\Delta E_1[\phi_k] &= \frac{\hbar\gamma_d^2}{2} \sum_{i=1}^r w_i - \frac{\hbar\gamma_d^2}{2} r^+ v - \frac{\hbar\gamma_d^2}{2} w(k) \delta^+(k) \Big|_{k=0}^{k \rightarrow \infty} \\
&+ \left(\frac{\hbar\gamma_d^2}{2\pi} \right) \left(\int_0^\infty dk \frac{\partial \delta^+(k)}{\partial k} w(k) \right) - \frac{\hbar\gamma_d^2}{2} r^- v - \frac{\hbar\gamma_d^2}{2} w(k) \delta^-(k) \Big|_{k=0}^{k \rightarrow \infty} \\
&+ \left(\frac{\hbar\gamma_d^2}{2\pi} \right) \left(\int_0^\infty dk \frac{\partial \delta^-(k)}{\partial k} w(k) \right), \tag{3.2.23}
\end{aligned}$$

donde se ha aplicado integración por partes sobre integrales como la que aparece en (3.2.22).

Para dilucidar el comportamiento asintótico de los desfases, utilizamos la primera aproximación de Born, teniendo en cuenta que la función potencial que induce dichos desfases es $V(x)$. Así,

$$\begin{aligned}
\delta^+(k) &\approx -\frac{1}{k} \int_0^\infty dx V(x) \cos^2(kx), \quad k \rightarrow \infty \\
\delta^-(k) &\approx -\frac{1}{k} \int_0^\infty dx V(x) \sin^2(kx), \quad k \rightarrow \infty. \tag{3.2.24}
\end{aligned}$$

Sustituyendo estas equivalencias bajo $k \rightarrow \infty$ en (3.2.23), se sigue que

$$\begin{aligned}
\Delta E_1[\phi_k] &= \frac{\hbar\gamma_d^2}{2} \sum_{i=1}^r w_i - \frac{\hbar\gamma_d^2}{2} r^+ v - \frac{\hbar\gamma_d^2}{2} r^- v \\
&+ \frac{\hbar\gamma_d^2}{4\pi} w(0) \delta^+(0) + \frac{\hbar\gamma_d^2}{4\pi} w(0) \delta^-(0) \\
&+ \frac{\hbar\gamma_d^2}{4\pi} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{v^2}{k^2}} \right) \int_0^\infty dx V(x) (\cos^2(kx) + \sin^2(kx)) \\
&+ \frac{\hbar\gamma_d^2}{2\pi} \int_0^\infty dk \frac{\partial(\delta^+(k) + \delta^-(k))}{\partial k} w(k). \tag{3.2.25}
\end{aligned}$$

Definimos $\delta(k) = \delta^+(k) + \delta^-(k)$ como el desfase total de estos autoestados de scattering, y usamos que $w(0) = v$. Por el teorema de Levinson, se sabe que

$$\begin{aligned}
-\frac{\hbar\gamma_d^2}{2} r^- v + \frac{\hbar\gamma_d^2}{4\pi} \delta^-(0) v &= -\frac{\hbar\gamma_d^2}{2} r^- v + \frac{\hbar\gamma_d^2}{4\pi} 2\pi r^- v = 0, \\
-\frac{\hbar\gamma_d^2}{2} r^+ v + \frac{\hbar\gamma_d^2}{4\pi} \delta^+(0) v &= -\frac{\hbar\gamma_d^2}{2} r^+ v + \frac{\hbar\gamma_d^2}{4\pi} \left[2\pi \left(r^+ - \frac{1}{2} \right) \right] v = -\frac{\hbar\gamma_d^2}{2} \frac{v}{2} \neq 0, \tag{3.2.26}
\end{aligned}$$

lo que nos dice que estas diferencias sobre los estados impares tienen una contribución no nula. Entonces, la corrección a la masa de un kink al orden de un lazo, teniendo en cuenta la paridad de V a través de esta regularización de estados pares e impares, adopta la siguiente expresión

$$\Delta E_1[\phi_k] = \frac{\hbar\gamma_d^2}{2} \left[\sum_{i=1}^r w_i - \frac{v}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk \frac{\partial \delta(k)}{\partial k} w(k) + \frac{\langle V(x) \rangle}{2\pi} \right], \tag{3.2.27}$$

donde $\langle V(x) \rangle = \int_0^\infty dx V(x)$.

El término $(-\hbar\gamma_d^2 v/4)$ nos dice que la contribución del modo con número de onda $k = 0$, por parte del operador \hat{K}_0 , es la mitad de la contribución de un único estado ligado con ese mismo autovalor $w^2 = v^2$.

Veamos el caso en que \hat{K} tuviera un autoestado semiligado ($k = 0$, luego $w^2 = v^2$). Recordemos, con la notación anterior, que el teorema de Levinson afirma que

$$\begin{aligned}
\delta^-(0^+) &= 2r^+ v, \\
\delta^+(0^-) &= 2\pi \left(r^- - \frac{1}{2} \right), \tag{3.2.28}
\end{aligned}$$

lo que nos da, repitiendo exactamente el mismo razonamiento que antes, una misma contribución de $(-\hbar\gamma_d^2 v/4)$ en $\Delta E_1[\phi_k]$, además de una contribución de $1/2$ al número $r = r^+ + r^-$. Con ello, y teniendo en cuenta que el estado ligado umbral es el que cumple $\delta(q^+) = n_r \pi$, con n_r el número de estados ligados ($w^2 < v^2$), el primer término se cancela con este último, pues dicho estado semiligado contribuye a través de la frecuencia $w_r = v/2$.

De esta forma, la fórmula general para la corrección, considerando \hat{K} con y sin autoestado semiligado, es como sigue

$$\Delta E_1[\phi_k] = \frac{\hbar\gamma_d^2}{2} \left[\sum_{i=1}^{r-1} w_i - \frac{v}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk \frac{\partial\delta(k)}{\partial k} \sqrt{k^2 + v^2} + s_r w_r + \frac{\langle V(x) \rangle}{2\pi} \right], \quad (3.2.29)$$

donde $s_r = \frac{1}{2}$ si \hat{K} tiene estado semiligado, y $s_r = 1$ en caso contrario. Como veremos, las teorías ϕ^4 y de sine-Gordon *sí que admiten autoestado semiligado dados sus operadores de segunda variación \hat{K}* . Bastará con tomar $s_r = 1/2$.

Fijémonos en lo que hemos hecho. En vista a dar una expresión regularizable para (3.2.2), hemos planteado los mismos problemas espectrales sobre \hat{K}_0 y \hat{K} . La escisión de la parte del espectro con estados de scattering ($w^2 > v^2$) en estados pares e impares, nos ha permitido, ya bajo $l \rightarrow \infty$, desarrollar una expresión de $\Delta E_1[\phi_k]$ en términos de los frecuencias de los modos del espectro discreto w_i , de las frecuencias $w(k)$, del desfasaje de las funciones propias con estas últimas frecuencias al cuadrado como autovalores, y la función $V(x)$ del Hessiano de la autointeracción.

Todo este procedimiento tiene una ventaja adicional: nos permite distinguir, en $\text{Spec}(\hat{K})$, el ínfimo del espectro continuo y el valor propio del estado semiligado, al tener este último su propia contribución.

Así pues, regularizamos la expresión (3.2.29). Para ello, seguimos el método estándar de tomar un cutoff Λ sobre el número de onda k en la integral divergente de dicha expresión, de modo que definimos

$$\Delta E_1[\phi_k](\Lambda) = \frac{\hbar\gamma_d^2}{2} \left[\sum_{i=1}^{r-1} w_i - \frac{v}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\Lambda dk \frac{\partial\delta(k)}{\partial k} w(k) + s_r w_r + \frac{\langle V(x) \rangle}{2\pi} \right].$$

Con esta expresión, afirmamos que la corrección cuántica a la masa del kink con todas las consideraciones hasta ahora dadas (sobre todo, cuantización del sistema como colectividad de osciladores armónicos desacoplados, presencia y paridad de un V no estático, y posible presencia de autoestado semiligado), todas ellas hasta el orden de un lazo, es

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \Delta E_1[\phi_k](\Lambda) = \Delta E_1[\phi_k].$$

Decimos que dicha corrección o, idénticamente, *la energía de Casimir del kink*, está regularizada por medio de un cutoff Λ en el número de modos de fluctuación.

3.2.2. Renormalización de la masa

En la expresión de $\Delta E_1[\phi_k]$ de (3.2.29), la regularización de la teoría a través de un cutoff Λ sobre los momentos de la integral va encaminada a solventar la divergencia ultravioleta de vacío. No obstante, en una teoría con interacciones como la que estamos tratando, existen otras divergencias ultravioleta, la cual se explicita en

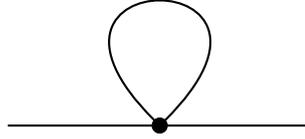


Figura 3.1: Diagrama de Feynman de la autoenergía que nos da la divergencia a un lazo, con factor dado por $(\partial^2 U / \partial \phi^2)_{\phi_v}$.

el propagador de la interacción del propio campo consigo mismo en un mismo punto. Con ello, damos un paso más allá en el proceso de regularización y renormalización: en esta segunda fase de la deducción de la fórmula DHN, añadimos a la teoría el contratérmino que compensa la divergencia que surge en la teoría cuantizada, al desarrollar, hasta el orden de un lazo, la correlación de dos campos cuantizados en el punto $x_\mu = (t, x)$. Necesitamos saber qué forma adquiere la integral divergente del propagador, y qué constantes le acompañan. Utilizaremos el formalismo del orden normal para el cálculo de estas correlaciones, a través del teorema de Wick, y con ello podremos dar el orden normal del Hamiltoniano cuantizado. La adición de estos nuevos términos nos dará la fórmula buscada de corrección de la masa clásica.

Pretendemos calcular la correlación en el vacío del campo cuantizado $\hat{\phi}$ en x_μ . Por comodidad, denotamos por $\hat{\phi}^2(x_\mu)$ a dicha correlación. Para calcularla, partimos de la correlación de dicho operador en los puntos $x_\mu = (t, x)$ y $y_\mu = (t', x)$, para finalmente tomar $t = t'$. Es decir, queremos calcular

$$\langle 0 | T \{ \hat{\phi}(x_\mu) \hat{\phi}(y_\mu) \} | 0 \rangle, \quad (3.2.30)$$

con T el operador que ordena los campos en el tiempo, y con $|0\rangle$ el estado de vacío en el espacio de Fock, en imagen de Heisenberg, i.e., con dichos estados de vacío independientes del tiempo.

En virtud del teorema de Wick, si tomamos $t = t'$, la correlación viene dada como sigue

$$\hat{\phi}^2(x_\mu) =: \hat{\phi}^2(x_\mu) : + \delta v^2, \quad (3.2.31)$$

donde $: \cdot :$ denota al mentado orden normal (i.e., recolocamos los operadores creación y aniquilación en que vienen dados los operadores, situando los primeros a la izquierda, y los segundos a la derecha), y donde δv^2 es el término divergente del diagrama de Feynman con el lazo (ver figura 3.1), obtenido en primer orden de teoría de perturbaciones. Este diagrama induce un propagador, con respecto al loop conectado a través del vértice interno, que es divergente. Esta divergencia es la única que, bajo estas consideraciones, tenemos que solventar ahora, teniendo en cuenta que con el orden normal las divergencias ultravioletas de la teoría ya están compensadas. Dicho δv^2 viene dado a partir del mencionado propagador, sobre el único vértice interno del diagrama. Este propagador es un propagador de Feynman al uso, dado en el espacio de momento de la forma

$$\delta v^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{e^{ik_\mu(x_\mu - y_\mu)}}{k_\mu k^\mu - v^2 + i\varepsilon}, \quad (3.2.32)$$

donde el término $i\varepsilon$, con $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, se añade por conveniencia, por una inminente aplicación del teorema de los residuos. Entonces, denotando $k = (k_0, k_1)$, se sigue que

$$\delta v^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk_1}{(2\pi)^2} \left[\int_{\mathbb{R}} dk_0 \frac{e^{ik_0(t-t')}}{k_0^2 - w_k^2 + i\varepsilon} \right], \tag{3.2.33}$$

donde $w_k^2 = v^2 + k_1^2$. En adelante, denotamos $\tau = t - t'$, y por I a la expresión entre corchetes de (3.2.33). Escindimos en fracciones simples el integrando de I , de forma que

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk_0}{2w_k} \left[\frac{e^{ik_0\tau}}{k_0 - (w_k - i\varepsilon)} - \frac{e^{ik_0\tau}}{k_0 - (-w_k + i\varepsilon)} \right]. \tag{3.2.34}$$

Denotamos

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathbb{R}} dk_0 \frac{e^{ik_0\tau}}{k_0 - (w_k - i\varepsilon)}, \\ I_2 &= \int_{\mathbb{R}} dk_0 \frac{e^{ik_0\tau}}{k_0 - (-w_k + i\varepsilon)}. \end{aligned} \tag{3.2.35}$$

En cada una de las integrales I_1 y I_2 , tomamos las integrales sobre curvas en \mathbb{C} que sean contornos de regiones en dicho plano complejo, que a su vez contengan a cada uno de los polos simples de los integrandos ($w_k - i\varepsilon$ y $-w_k + i\varepsilon$, respectivamente). Con ello, podemos aplicar el teorema de los residuos, dada la convergencia a cero del integrando, sin el factor exponencial, para $|k| \rightarrow \infty$ en cada uno de los semiplanos con $\text{Im}(z) \leq 0$, y con $\text{Im}(z) \geq 0$, tomando debidamente los signos del parámetro τ . De esta forma, como se aprecia en la figura 3.2, tomamos $\tau < 0$ para I_1 , y $\tau > 0$ para

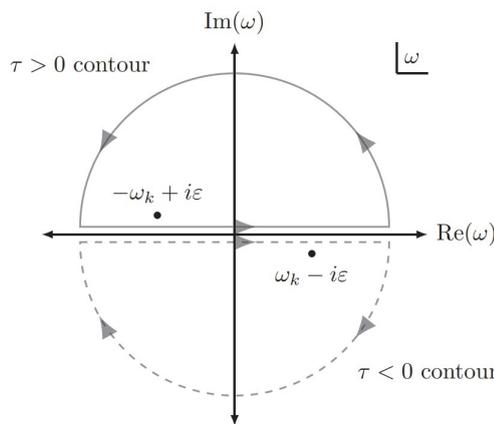


Figura 3.2: Contorno de la integral parametrizada sobre una curva compleja para el propagador de Feynman. Los polos son $\pm w_k \mp i\varepsilon$, y son simples. De cara a tener la convergencia a 0 deseada del integrando, para $\tau > 0$ cerramos dicho contorno en el semiplano superior, y para $\tau < 0$, en el inferior, englobando en cada una de estas regiones al correspondiente polo.

I_2 . La forma de escribir estas restricciones será a través de la función de Heaviside

H , definida como $H(x) = 0$ si $x < 0$, y $H(x) = 1$ si $x \geq 0$. Entonces, incluyendo esta función y aplicando el teorema de los residuos directamente¹, se sigue que

$$I_1 = 2\pi i \cdot \text{Res} \left(\frac{e^{ik_0\tau} H(-\tau)}{k_0 - (w_k - i\varepsilon)}, w_k - i\varepsilon \right) \eta(\gamma, w_k - i\varepsilon), \quad (3.2.36)$$

con γ la curva que parametriza dicho contorno, y $\eta(\gamma, w_k - i\varepsilon)$ su índice, que es la unidad. Tomando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ tenemos el valor

$$I_1 \rightarrow -2\pi i e^{iw_k\tau} H(-\tau). \quad (3.2.37)$$

Análogo procedimiento, tomando también $\varepsilon \rightarrow 0^+$, nos lleva a

$$I_2 \rightarrow 2\pi i e^{-iw_k\tau} H(\tau). \quad (3.2.38)$$

Entonces, sumando los dos términos y tomando el límite $\tau \rightarrow 0$ (mismo instante para los dos campos de la correlación), se sigue que

$$I \rightarrow \frac{-2\pi i}{2w_k}. \quad (3.2.39)$$

De esta manera, introduciendo este resultado de I en (3.2.33), obtenemos la siguiente integral divergente

$$\delta v^2 = \int \frac{dk}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{k^2 + v^2}}, \quad (3.2.40)$$

donde se ha denotado k_1 como k .

Discretizamos esta correlación, situando el sistema en $[-l/2, l/2]$, con condiciones periódicas sobre los factores espaciales de los modos de fluctuación, de la forma $f(-l/2) = f(l/2)$. En términos heurísticos, el paso al espectro continuo se da como

$$\sum \rightarrow \frac{l}{2\pi} \int, \quad (3.2.41)$$

de forma que, discretizando,

$$\delta v^2 = \frac{1}{2l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{4\pi^2 n^2}{l^2} + v^2}}. \quad (3.2.42)$$

A continuación, deducimos, en términos de este δv^2 , el contratérmino que hay que añadir a la corrección al orden de un lazo. Para ello, recordemos la expresión de la densidad Hamiltoniana cuantizada de nuestra teoría

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \left[\hat{\pi}^2(x_\mu) + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x}(x_\mu) \right] + U[\hat{\phi}(x_\mu)], \quad (3.2.43)$$

¹Tenga en cuenta el lector que la aplicación aquí expuesta del teorema de los residuos está incompleta en su presentación. El resultado al que llegamos es consecuencia de la integración sobre la curva con soporte $[-M, M] \cup \tilde{S}(0, R)$, con $M > 0$ el valor cuyo límite $M \rightarrow \infty$ nos dará el dominio original, y con $\tilde{S}(0, R)$ la semicircunferencia para un $R > 0$ sobre el que terminaremos aplicando $R \rightarrow \infty$, con resultado cero en esta última integral.

término de autointeracción de \hat{H} , ahora en términos de operadores creación y aniquilación.

De esta manera, por aplicación estándar del teorema de Wick sobre el orden normal en el Hamiltoniano, tenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned} : \hat{H} &:= \hat{H} + : \left[1 - \exp \left(-\frac{\hbar\gamma_d^2}{2} \delta v^2 \frac{\delta^2}{\delta\phi^2} \right) U[\hat{\phi}(x_\mu)] \right] : \\ &= \hat{H} - \frac{\hbar\gamma_d^2}{2} \delta v^2 : \frac{\partial^2 U[\hat{\phi}(x_\mu)]}{\partial\phi^2} : + O \left(\hbar^4 \gamma_d^4 \delta v^4 : \frac{\partial^4 U[\hat{\phi}(x_\mu)]}{\partial\phi^4} : \right), \end{aligned} \quad (3.2.44)$$

donde se ha desarrollado hasta primer orden la función exponencial (primer orden en teoría de perturbaciones). Dada la convergencia de la integral δv^2 tal y como la hemos deducido en (3.2.40), estos cálculos muestran explícitamente la necesidad de añadir un contratérmino a la teoría, ahora con factores conocidos en términos del Hessiano $\partial^2 U[\hat{\phi}(x_\mu)]/\partial\phi^2$.

Con todo ello, denotamos por $\Delta E_2[\phi_k]$ a la contribución de la diferencia de contratérminos de los sectores de vacío y de kink, cada uno de los cuales establece un operador Hessiano distinto. Adoptamos la notación de Dirac, con $|0, \hat{K}\rangle$ y $|0, \hat{K}_0\rangle$ los estados fundamentales (sin mesones) en cada uno de estos sectores. Así, se tiene que

$$\begin{aligned} \Delta E_2[\phi_k] &= -\frac{\hbar\gamma_d^2}{2} \delta v^2 \int_{\mathbb{R}} dx \left(\langle 0, \hat{K} | : \frac{\partial^2 U[\hat{\phi}(x_\mu)]}{\partial\phi^2} : |0, \hat{K}\rangle - \langle 0, \hat{K}_0 | : \frac{\partial^2 U[\hat{\phi}(x_\mu)]}{\partial\phi^2} : |0, \hat{K}_0\rangle \right). \end{aligned} \quad (3.2.45)$$

Por su construcción en el espacio bosónico de Fock, estos estados $|0, \hat{K}\rangle$ y $|0, \hat{K}_0\rangle$ son estados coherentes, es decir, son estados propios de los operadores de creación y aniquilación con que se formula la teoría cuantizada. En particular, son estados propios de $\partial^2 U[\hat{\phi}(x_\mu)]/\partial\phi^2$. Esto hace que el ordenamiento normal de este último operador sea trivial sobre dichos estados, de forma que

$$\begin{aligned} \langle 0, \hat{K} | : \frac{\partial^2 U[\hat{\phi}(x_\mu)]}{\partial\phi^2} : |0, \hat{K}\rangle - \langle 0, \hat{K}_0 | : \frac{\partial^2 U[\hat{\phi}(x_\mu)]}{\partial\phi^2} : |0, \hat{K}_0\rangle \\ = \frac{\partial^2 U[\phi_k(x)]}{\partial\phi^2} - \frac{\partial^2 U[\phi_v]}{\partial\phi^2} = v^2 + V(x) - v^2 = V(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, sustituyendo la diferencia de valores esperados en (3.2.45), se sigue la siguiente expresión como diferencia de contratérminos a añadir en la corrección al orden de un lazo que dimos en (3.2.29):

$$\Delta E_2[\phi_k] = -\frac{\hbar\gamma_d^2}{8\pi} \langle V(x) \rangle \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{\sqrt{k^2 + v^2}}. \quad (3.2.46)$$

Con todo ello, estamos en condiciones de dar una fórmula DHN general, tras regularizar, considerar la simetría del potencial $V(x)$, y tras añadir los correspondientes

contratérminos. Formalmente, la expresión de las correcciones de la masa del kink, respecto al punto de vacío escogido, hasta el orden de un lazo, sería como sigue

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E[\phi_k]}{\hbar\gamma_d^2} &= \frac{\Delta E_1[\phi_k] + \Delta E_2[\phi_k]}{\hbar\gamma_d^2} = \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{r-1} w_j \\ &+ \frac{1}{2} s_r w_r - \frac{v}{4} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk \frac{\partial \delta(k)}{\partial k} \sqrt{k^2 + v^2} \\ &+ \frac{\langle V(x) \rangle}{4\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{\sqrt{k^2 + v^2}} \right). \end{aligned} \quad (3.2.47)$$

En la práctica, con la regularización dada, estas correcciones se calculan tomando el límite $\Lambda \rightarrow \infty$ sobre el cutoff de momentos de la forma que sigue

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E[\phi_k]}{\hbar\gamma_d^2} &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{\Delta E[\phi_k]}{\hbar\gamma_d^2}(\Lambda) = \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{r-1} w_j \\ &+ \frac{1}{2} s_r w_r - \frac{v}{4} + \frac{1}{2\pi} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_0^\Lambda dk \frac{\partial \delta(k)}{\partial k} \sqrt{k^2 + v^2} \\ &+ \frac{\langle V(x) \rangle}{4\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_{-\Lambda}^\Lambda \frac{dk}{\sqrt{k^2 + v^2}} \right). \end{aligned} \quad (3.2.48)$$

Con todo ello, particularizamos esta fórmula sobre los modelos objeto de nuestro estudio: sine-Gordon y ϕ^4 . Para estos cálculos, necesitamos conocer explícitamente los espectros de \hat{K}_0 y \hat{K} de estos dos modelos, así como las formas analíticas de los desfases para los autoestados de scattering. Los espectros de \hat{K}_0 , de deducción estándar a partir de un operador de Helmholtz discretizado, ya los conocemos (ver (3.1.30)), con lo que bastaría particularizar para $v^2 = 1$ para sine-Gordon, y $v^2 = 4$ para ϕ^4 , pues

$$\begin{aligned} U_{sG}[\phi] = 1 - \cos(\phi) \ , \ \phi_v = 2n\pi, \ n \in \mathbb{Z} &\implies \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \right)_{\phi_v} = \cos(\phi_v) = 1, \\ U_{\phi^4}[\phi] = \frac{1}{2}(\phi^2 - 1)^2 \ , \ \phi_v = \pm 1 &\implies \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \right)_{\phi_v} = 6\phi_v^2 - 2 = 4, \end{aligned} \quad (3.2.49)$$

donde se ha usado que $(\partial^2 U / \partial \phi^2) = \cos(\phi)$ para sine-Gordon, y que $(\partial^2 U / \partial \phi^2) = 6\phi^2 - 2$ para ϕ^4 . El cálculo de $\text{Spec}(\hat{K})$ y de los desfases se trata en el siguiente apartado.

3.3. Cálculo de $\text{Spec}(\hat{K})$ y $\delta(k)$

Los problemas espectrales con los que lidiamos son

$$\hat{K} f_k(x) = w(k)^2 f_k(x), \quad (3.3.1)$$

donde $\hat{K} = -\partial_x^2 + (\partial^2 U / \partial \phi^2)_{\phi_k(x)}$. Con todo ello, conocidos los Hessianos de las autointeracciones de los modelos de sine-Gordon y ϕ^4 , así como las soluciones clásicas de tipo kink/antikink generales $\phi(x) = \pm 4 \arctan(e^x)$ para sine-Gordon, y

$\phi(x) = \pm \tanh(x)$ para ϕ^4 (se ha tomado la constante de localización x_0 como 0, por comodidad), podemos deducir los operadores de segunda variación en el sector kink para estas teorías. Los Hessianos de la autointeracción, evaluados en estas soluciones, son

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \right)_{\phi_k(x)} &= \cos(\pm 4 \arctan(e^x)) = 1 - 2 \operatorname{sech}^2(x), \\ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \right)_{\phi_k(x)} &= 6(\pm \tanh(x))^2 - 2 = 4 - 6 \operatorname{sech}^2(x). \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Esto nos dice que la resolución de (3.3.1) se corresponde con una familia más general de ecuaciones diferenciales de la forma

$$f''(x) + s(s+1) \operatorname{sech}^2(x) f(x) = (v^2 - w(k)^2) f(x), \quad (3.3.3)$$

donde se ha denotado a f_k como f , y donde, a priori, consideramos cualquier $s \in \mathbb{R}$. Entramos en la resolución, tanto para estados ligados y semiligado ($w(k)^2 \leq v^2$), como para autoestados de scattering ($w(k)^2 \geq v^2$), de la ecuación general (3.3.3). El potencial $V(x) = -s(s+1) \operatorname{sech}^2(x)$ que aparece en el Hessiano del operador de segunda variación de la energía obedece a una familia amplia de potenciales, de tipo transparente, llamada potenciales de *Pöschl-Teller*. En los apartados que siguen entramos en la caracterización, en principio general y después particularizada, no solo de los elementos necesarios para el cálculo de $\Delta E_2[\phi_k]$, sino también de la física, y parte de la matemática, subyacente a este tipo de problemas unidimensionales. La condición de transparencia del potencial aflorará cuando hablemos de estados de scattering, en términos de funciones hipergeométricas. Recordemos: un estado ligado en estas condiciones determina un mesón atrapado en un pozo de potencial inducido por el kink, mientras que un estado de scattering determina un mesón moviéndose en un sistema con el kink de fondo, ambos en términos de autofunciones de un operador de Schrödinger no estático. Esto último determina la diferencia fundamental con las fluctuaciones de vacío. No describimos los estados de estos mesones con modos dados como una combinación lineal de ondas planas libres e independientes, sino que ahora los estados de las partículas cuya colectividad engendra nuestro sistema no son libres en término general. En el mismo cuerpo de este trabajo, presentamos el desarrollo más rápido hoy conocido para deducir el espectro de los autoestados ligados, así como las formas generales, en términos de funciones hipergeométricas, de estos estados, viendo cómo aflora con total naturalidad el estado semiligado. Haremos lo mismo con los autoestados de scattering, probando que el potencial de Pöschl-Teller es transparente, e incluyendo un breve desarrollo del cálculo de $\delta(q)$ para sine-Gordon. En el apéndice B exponemos los resultados, detallados en [33] (p. 113), de las amplitudes de scattering y desfasajes de un sistema gobernado por la ecuación (3.3.3). Si bien desarrollaremos parcialmente el cálculo de $\delta(q)$ para sine-Gordon, dada la densidad del cálculo, aplicaremos directamente el contenido de dicho apéndice para la teoría ϕ^4 .

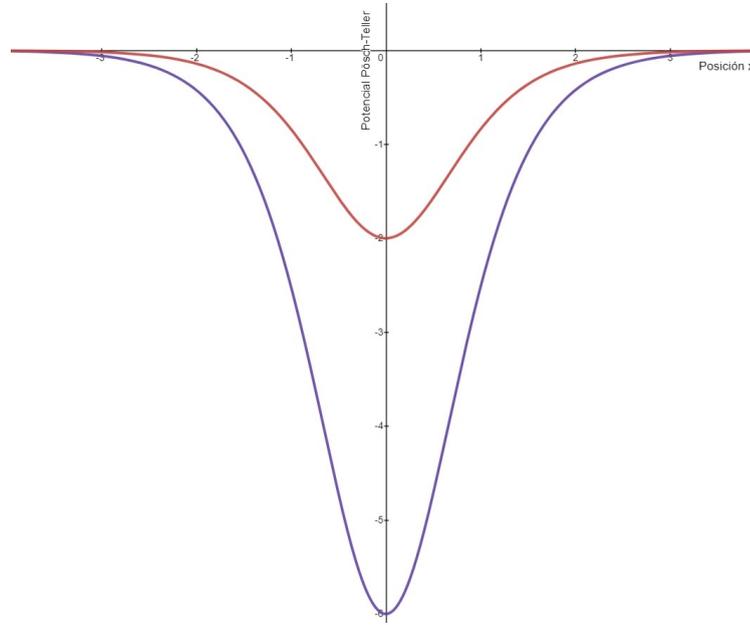


Figura 3.3: Potenciales de Pöschl-Teller $V(x) = -s(s+1)\text{sech}^2(x)$ para los casos $s = 1$ (sine-Gordon, rojo), y $s = 2$ (ϕ^4 , morado). Los autoestados con $w^2 < v^2$, con $v^2 = 1$ para sine-Gordon, y $v^2 = 4$ para ϕ^4 , son mesones *atados* al pozo de potencial determinado por $V(x)$. Si $w^2 > v^2$, estos autoestados describen mesones moviéndose con el kink de fondo.

3.3.1. Cálculo del espectro de autoestados ligados

Denotamos $\lambda = v^2 - w(k)^2$, y nos quedamos con el caso $\lambda \geq 0$. Mostraremos un cálculo estándar de deducción de soluciones a través de la ecuación diferencial típica de los polinomios de Legendre (o, en general, de funciones hipergeométricas), a partir de (3.3.3), de lo que podremos deducir todos los autoestados presentes. Escribimos la ecuación a resolver de la siguiente forma

$$f''(x) + [s(s+1)\text{sech}^2(x) - \lambda] f(x) = 0. \quad (3.3.4)$$

Aplicamos un cambio de variable vía el difeomorfismo $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ dada por $u = \tanh(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Denotamos $\varepsilon = \sqrt{\lambda}$, donde $\varepsilon \in \mathbb{R}$ dado que $\lambda \geq 0$. Teniendo en cuenta las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \partial_x \tanh(x) &= \text{sech}^2(x), \\ \partial_u &= \frac{1}{1-u^2} \partial_x \implies \partial_x = (1-u^2) \partial_u, \\ \text{sech}^2(x) &= \text{sech}^2(\text{arctanh}(u)) = 1-u^2, \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

entonces

$$f''(x) = (1-u^2) \partial_u [(1-u^2) \partial_u f(u)] = (1-u^2) [(1-u^2) f'(u)]'. \quad (3.3.6)$$

Todo ello nos permite reescribir (3.3.4) como sigue, previa división por $1-u^2 \neq 0$,

$$[(1-u^2) f'(u)]' + \left[s(s+1) - \frac{\varepsilon^2}{1-u^2} \right] f(u) = 0. \quad (3.3.7)$$

Pues bien, en este caso en que $\lambda \geq 0$, esta es la conocida EDO cuya solución se da en términos de los *polinomios de Legendre*. No obstante, para poder describir con exactitud los autoestados ligados, generalizamos la resolución a *funciones hipergeométricas*, con el cambio $f(u) = (1 - u^2)^{\varepsilon/2} h(u)$, con $h \in \mathcal{C}^2((-1, 1), \mathbb{R})$, y con $z = \frac{1}{2}(1 - u)$. Esto nos lleva de (3.3.7) a la siguiente ecuación

$$z(1 - z)h'' + (\varepsilon + 1)(1 - 2z)h' - (\varepsilon - s)(\varepsilon + s + 1)h = 0. \quad (3.3.8)$$

La solución de (3.3.8) viene dada en términos de una función hipergeométrica, dependiente de los parámetros de (3.3.7), como sigue

$$\begin{aligned} f(u) &= (1 - u^2)^{\varepsilon/2} F[\varepsilon - s, \varepsilon + s + 1, \varepsilon + 1, \frac{1}{2}(1 - u)] \\ &= (1 - u^2)^{\varepsilon/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon - s)_n (\varepsilon + s + 1)_n}{n! 2^n (\varepsilon + 1)_n} (1 - u)^n, \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

donde $(x)_n = x(x + 1) \dots (x + n - 1)$, con $x \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}_0$, es el llamado símbolo de Pochhammer.

Esta serie (3.3.9) converge si $|\frac{1}{2}(1 - u)| < 1$, i.e., si $u \in D(1, 2)$, con $D(1, 2)$ el disco centrado en $u = 1$, con radio 2. Sin embargo, a través de la correspondiente prolongación analítica, podemos tomar esta función también holomorfa en la región dada por $|u| \geq 1$, salvo en la rama $\{z : \text{Im}(z) = 0, |z| \geq 1\}$.

Nótese que, con estas últimas consideraciones, si $u \rightarrow 1$, es decir, si $x \rightarrow \infty$, la expresión (3.3.9) es finita; y si $u \rightarrow -1$, es decir, si $x \rightarrow -\infty$, para tener convergencia debemos imponer $\varepsilon - s = -n$, con $n \in \mathbb{N}_0$ (véase [34]). Esto implica que la función hipergeométrica de (3.3.9) es un polinomio de grado a lo sumo n , y finito para $u \rightarrow -1$.

Recordemos que $\varepsilon = \sqrt{\lambda}$, y como $\lambda = v^2 - w^2$ se tiene que

$$\begin{aligned} -n = \varepsilon - s = \sqrt{\lambda} - s &\implies \sqrt{\lambda} = s - n \\ \implies w_n^2 = v^2 - (s - n)^2, & \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Esto clarifica, al fin, el espectro que podemos tener para cualquier teoría cuya ecuación espectral en el sector kink es (3.3.4), para $\sqrt{v^2 - w^2} - s \in \mathbb{Z}^-$. En particular,

1. *sine-Gordon* ($s = 1, v^2 = 1$)

$$w_n^2 = v^2 - (1 - n)^2 = \begin{cases} v^2 - 1 = 0 & n = 0 \\ v^2 = 1 & n = 1 \end{cases} \quad (3.3.11)$$

2. ϕ^4 ($s = 2, v^2 = 4$)

$$w_n^2 = v^2 - (2 - n)^2 = \begin{cases} v^2 - 4 = 0 & n = 0 \\ v^2 - 1 = 3 & n = 1 \\ v^2 = 4 & n = 2 \end{cases} \quad (3.3.12)$$

Estos espectro dan cuenta de los modos nulos en ambas teorías, así como de estados semiligados en $w^2 = 1$ (sine-Gordon), y $w^2 = 4$ (ϕ^4), como el ínfimo del espectro continuo de los \hat{K} . En esta última, además, aparece un modo ligado, no semiligado y no nulo, con frecuencia $w^2 = 3$, en la teoría ϕ^4 . Este último fenómeno se debe a que el modelo ϕ^4 es una simplificación del modelo de sine-Gordon, a partir del truncamiento en el término de grado 4 en el desarrollo de Taylor de la autointeracción de esta última teoría.

3.3.2. Cálculos sobre estados de scattering

Recurrimos a un razonamiento análogo al del cálculo de estados ligados, con una importante diferencia: ahora $\lambda = v^2 - w(k)^2 \leq 0$. Así, partiendo de la misma ecuación (3.3.4), y con el mismo parámetro λ pero con signo cambiado, repetimos el cambio de variable a través del difeomorfismo $u = \tanh(x)$, denotando ahora $k = \sqrt{-\lambda} \in \mathbb{R}$. Nótese que ahora denotamos a este parámetro como si fuera un vector de onda, y tiene el sentido de que $k = \sqrt{-\lambda} = \sqrt{w^2 - v^2}$, i.e., es justamente el número de onda de las relaciones de dispersión conocidas. Así, aplicando estos cambios en (3.3.4), se tiene que

$$[(1 - u^2)f'(u)]' + \left[s(s + 1) + \frac{k^2}{1 - u^2} \right] f(u) = 0. \quad (3.3.13)$$

Añadimos ahora un nuevo cambio de variable. Consideramos $k = i\tau$, de tal forma que

$$[(1 - u^2)f'(u)]' + \left[s(s + 1) - \frac{\tau^2}{1 - u^2} \right] f(u) = 0. \quad (3.3.14)$$

Resolvemos (3.3.14) igual que para los estados ligados, sin olvidar que $\tau = -i\varepsilon$, y $\varepsilon = \sqrt{-\lambda}$. Consideramos $f(u) = (1 - u^2)^{-ik/2}h(u)$, $z = \frac{1}{2}(1 - u)$, de modo (3.3.14) se convierte en

$$z(1 - z)h'' + (\tau + 1)(1 - 2z)h' - (\tau - s)(\tau + s + 1)h = 0. \quad (3.3.15)$$

Con todo ello, la solución viene de nuevo dada en términos de una función hipergeométrica como sigue

$$\begin{aligned} f(u) &= (1 - u^2)^{-ik/2} F[-ik - s, -ik + s + 1, -ik + 1, \frac{1}{2}(1 - u)] \\ &= (1 - u^2)^{\varepsilon/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ik - s)_n (-ik + s + 1)_n}{n! 2^n (-ik + 1)_n} (1 - u)^n. \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

Nótese que si tomamos $u \rightarrow 1$, es decir, $x \rightarrow \infty$, podemos aproximar

$$1 - u = 1 - \tanh(x) \approx 2e^{-2x}, \quad (3.3.17)$$

lo que nos daría, bajo el régimen asintótico por el lado $x \rightarrow \infty$, una forma asintótica de onda transmitida proporcional a e^{ikx} .

Por otro lado, bajo $u \rightarrow -1$, es decir, $x \rightarrow -\infty$, la forma asintótica del autoestado viene dada por (para mayor detalle, ver [35]),

$$f(x) \approx e^{-ikx} \left[\frac{\Gamma(ik)\Gamma(1-ik)}{\Gamma(-s)\Gamma(1+s)} \right] + e^{ikx} \left[\frac{\Gamma(-ik)\Gamma(1-ik)}{\Gamma(-ik-s)\Gamma(-ik+1+s)} \right]. \quad (3.3.18)$$

Así, los estados asintóticos de este sistema están dados, de forma general, como

$$\begin{aligned} f(x) &\approx ae^{-ikx} + be^{ikx}, \quad x \rightarrow -\infty, \\ f(x) &\approx e^{ikx}, \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

Denotamos $b(k)$ y $t(k)$ las amplitudes de scattering de reflexión y de transmisión, y escribimos $t(k) = 1 + c(k)$ de tal forma que el desfase se podrá obtener a partir de $c(k)$ (ver [33], p. 105). Entonces,

$$\begin{aligned} b(k) &= \frac{a}{b} = \frac{\Gamma(ik)\Gamma(-ik-s)\Gamma(-ik+s+1)}{\Gamma(-ik)\Gamma(-s)\Gamma(1+s)}, \\ 1 + c(k) &= \frac{1}{b} = t(k) = \frac{\Gamma(-ik-s)\Gamma(-ik+s+1)}{\Gamma(-ik)\Gamma(1-ik)}. \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

Notemos que (ver [33]), si $s = n \in \mathbb{Z}$, se obtiene transmisión total $|t| = 1$, y además $\Gamma(-n) = \infty$, lo que implica que $b(k) = 0$.

Usamos ahora que, para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \quad (3.3.21)$$

Utilizando esta relación en la primera igualdad de (3.3.20), se sigue que

$$|b(k)|^2 = \frac{\cos^2\left(\pi\left(s + \frac{1}{2}\right)\right)}{\sinh^2(\pi k) \cos^2\left(\pi\left(s + \frac{1}{2}\right)\right)}, \quad (3.3.22)$$

lo cual se anula si $0 > -s(s+1)$, relación que se cumple si $s \in \mathbb{N}$. En particular, **los potenciales de Pöschl-Teller son transparentes si $s \in \mathbb{N}$** , lo que demuestra una afirmación que viene siendo recurrente en este trabajo.

Entramos ahora en el cálculo de los desfases. Para ello, necesitamos la forma exacta de las formas asintóticas de los autoestados de scattering. Nos limitamos a sine-Gordon ($s = 1$), pues el procedimiento para ϕ^4 es análogo, pero sus cálculos nos desviarían demasiado de nuestros objetivos. Además, en B presentamos someramente un método de factorización que nos permite expresar la forma general de dichos desfases, para potenciales de Pöschl-Teller con $s \in \mathbb{N}$. Así pues, en este caso, y usando (3.3.16), se obtiene la siguiente forma exacta de autoestado de scattering ([36] y [33]):

$$f_k(x) = \frac{(ik - \tanh(x))}{ik + 1} e^{ikx}. \quad (3.3.23)$$

Tomamos $x \rightarrow \infty$, y como entonces $\tanh(x) \rightarrow 1$, es inmediata la forma de $1 + c(k)$. Recordemos que $b(k) = 0$ para todo k , bajo el límite $x \rightarrow -\infty$. Así pues,

$$1 + c(k) = \frac{ik - 1}{ik + 1} \implies c(k) = -\frac{2}{1 + ik}. \quad (3.3.24)$$

Tengamos en cuenta, recurriendo a la deducción dada en [33], que nuestro potencial es par y transparente, lo que implica que los desfases asociados a los autoestados pares e impares coinciden, y por ello $c(k) = 2ie^{i\delta(k)/2} \sin(\delta(k)/2)$, con $\delta(k)$ el desfase asociado a ambos tipos de autoestados. Entonces, sustituyendo en (3.3.24), se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{i}{1 + ik} = e^{i\delta(k)/2} \sin(\delta(k)/2) &\implies \frac{k + i}{k^2 + 1} = \sin(\delta(k)/2) \cos(\delta(k)/2) + i \sin^2(\delta(k)/2) \\ \implies \begin{cases} \frac{k}{k^2 + 1} = \sin(\delta(k)/2) \cos(\delta(k)/2) \\ \frac{1}{k^2 + 1} = \sin^2(\delta(k)/2). \end{cases} & \quad (3.3.25) \end{aligned}$$

De esta manera, dividiendo la segunda igualdad entre la primera, se sigue que

$$\tan(\delta(k)/2) = \frac{1}{k}. \quad (3.3.26)$$

Para poder expresar el desfase, necesitamos dar una buena definición de la función arctan en \mathbb{C} , para lo que quitamos la rama $\{re^{i\pi/2} : r \geq 0\}$, lo que nos da una buena definición para los valores $1/k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. De esta forma, podemos afirmar que, para todo número de onda k el desfase para el estado de scattering descrito, con generalidad, en el modelo de sine-Gordon, es

$$\delta(k) = 2\arctan\frac{1}{k}, \quad (3.3.27)$$

admitiendo la extensión, aunque no esté dentro del dominio de $\delta(k)$, de $\delta(k) \rightarrow 0$ para $k \rightarrow \infty$.

Por su parte, enunciamos el valor que toma esta magnitud en el modelo ϕ^4 :

$$\delta(k) = -2\arctan\frac{3k}{2 - k^2}, \quad (3.3.28)$$

de nuevo en el dominio $\{re^{i\pi/2} : r \geq 0\}$, admitiendo $\delta(k) \rightarrow 0$ para $k \rightarrow \infty$.

Con todo ello, ya conocemos todos los autoestados ligados y autoestado semiligado, los espectros finitos con los cuadrados de las frecuencias de los modos asociados a todos estos, las formas explícitas de los autoestados de scattering, sostenidos sobre un espectro continuo de autovalores, para todo $s \in \mathbb{N}$, y los desfases para sine-Gordon y ϕ^4 ($s = 1$ y $s = 2$).

3.4. Correcciones en el modelo de sine-Gordon

Dada su mayor simpleza analítica, empezamos por el modelo de sine-Gordon. Resumimos los objetos más importantes para el cálculo de la corrección $\Delta E[\phi_k]$.

Recordemos que $V(x) = 1 - 2\text{sech}^2(x)$, con lo que, como

$$\int_{\mathbb{R}} dx \text{sech}^2(x) = \tanh(x)|_{-\infty}^{\infty} = 2, \quad (3.4.1)$$

se sigue que $\langle V(x) \rangle = -4$. Así, ya hemos deducido todo lo que sigue

$$\begin{aligned} \langle V(x) \rangle &= -4, \quad \text{Spec}(\hat{K}_0) = \{v_1^2 = 1\} \cup \{v(k)^2 = k^2 + 1\}_{k \in \mathbb{R}}, \\ \text{Spec}(\hat{K}) &= \{w_1 = 0\} \cup \{w_2^2 = 1\}_{1/2} \cup \{w(q)^2 = q^2 + 1\}_{q \in \mathbb{R}}, \\ \rho_0(k) &= \frac{l}{2\pi}, \quad \delta(q) = 2\arctan\frac{1}{q}, \\ \rho(q) &= \frac{l}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial\delta(q)}{\partial q} = \frac{l}{2\pi} - \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+q^2}, \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

donde el subíndice 1/2 en el segundo espectro denota al estado semiligado, en relación a que la contribución de la frecuencia de este modo se dará con un factor 1/2.

Sustituyendo todos estos valores en la fórmula DHN (3.2.48), se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E_2[\phi_k]}{\hbar\gamma_d^2} &= \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\ &+ \frac{1}{2\pi} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_0^\Lambda dk \frac{\partial\delta(k)}{\partial k} \sqrt{k^2 + 1} - \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_{-\Lambda}^\Lambda \frac{dk}{\sqrt{k^2 + 1}} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_0^\Lambda dk \left(-\frac{2}{k^2 + 1} \right) \sqrt{k^2 + 1} - \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_{-\Lambda}^\Lambda \frac{dk}{\sqrt{k^2 + 1}} \right) \\ &= -\frac{1}{\pi} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_0^\Lambda dk \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}} - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_0^\Lambda \frac{dk}{\sqrt{k^2 + 1}} \\ &= -\frac{1}{\pi}. \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Nótese que si nos hubiéramos quedado en la regularización con el cutoff de modos de fluctuación, la corrección sería

$$\Delta E_1[\phi]/(\hbar\gamma_d^2) = 0. \quad (3.4.4)$$

No obstante, podemos tomar con total libertad el límite $\Lambda \rightarrow \infty$, el cual, con los contratérminos añadidos (3.2.45), añaden un término no nulo a la corrección total. Como $\gamma_d^2 = \lambda/m^2$ es una de las constantes dadas en la teoría de sine-Gordon, se tiene que

$$\boxed{\Delta E[\phi_k] = -\frac{\hbar\lambda}{\pi m^2} \approx -0,31831 \cdot \frac{\hbar\lambda}{m^2}} \quad (3.4.5)$$

Con este resultado concluimos que el análisis perturbativo de la acción hasta segundo orden en potencias de la fluctuación, así como la naturaleza atractiva y transparente del potencial de Pöschl-Teller, la regularización sobre el número de modos, o la inclusión de contratérminos que compensen la divergencia considerada del propagador que encontramos en el diagrama 3.1, determinan teóricamente una corrección negativa, lineal en \hbar por la forma en que hemos truncado la expansión perturbativa, de

la masa clásica del kink de sine-Gordon. La causa de esta corrección reside en una idea recurrente en las teorías cuánticas de campos: las llamadas, con total generalidad, fluctuaciones cuánticas de vacío. Éstas se definen como cambios aleatorios y pequeños en los valores de determinados campos, a razón de las incertidumbres en tiempo y energía. El fundamento está en el *principio de incertidumbre de Heisenberg* [37]. Éste afirma que las incertidumbres de energía y tiempo están relacionadas por la desigualdad

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{1}{2} \hbar, \quad (3.4.6)$$

con lo que, en el vacío, pares de partículas virtuales, con energía dentro del margen de ΔE , y con tiempos de vida más pequeños que Δt , son creadas y destruidas continuamente. En nuestro caso, hemos estudiado el efecto de estas fluctuaciones sobre el valor de una masa obtenida por métodos clásicos y, para ello, hemos recurrido a técnicas de regularización y renormalización que nos han dado valores finitos y concretos de dichas correcciones.

3.5. Correcciones en el modelo ϕ^4

Análogamente, para el modelo ϕ^4 tenemos los siguientes valores

$$\begin{aligned} \langle V(x) \rangle &= -12, \quad \text{Spec}(\hat{K}_0) = \{v_1^2 = 4\} \cup \{v(k)^2 = k^2 + 4\}_{k \in \mathbb{R}}, \\ \text{Spec}(\hat{K}) &= \{w_1 = 0\} \cup \{w_2^2 = 3\} \cup \{w_3^2 = 4\}_{1/2} \cup \{w(q)^2 = q^2 + 4\}_{q \in \mathbb{R}}, \\ \rho_0(k) &= \frac{l}{2\pi}, \quad \delta(q) = -2 \arctan \frac{3q}{2 - q^2}, \\ \rho(q) &= \frac{l}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \delta(q)}{\partial q} = \frac{l}{2\pi} - \frac{3}{\pi} \frac{2 + q^2}{(1 + q^2)(4 + q^2)}, \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

con notación análoga. Sustituimos estos valores en (3.2.48), lo que nos da la siguiente corrección vía dicha fórmula DHN:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E_2[\phi_k]}{\hbar \gamma_d^2} &= \frac{1}{2} (0 + \sqrt{3}) + \frac{1}{4} \sqrt{4} - \frac{1}{4} \sqrt{4} \\ &+ \frac{1}{2\pi} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_0^\Lambda dk \left[-6 \frac{k^2 + 2}{(k^2 + 1)(k^2 + 4)} \right] \sqrt{k^2 + 4} - \frac{12}{4\pi} \left(1 - \frac{2}{2} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_0^\Lambda \frac{dk}{\sqrt{k^2 + 4}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{\pi} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left(\text{arcsinh} \left(\frac{\Lambda}{2} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{\sqrt{3}\Lambda}{\sqrt{4 + \Lambda^2}} \right) \right) \\ &- \frac{3}{\pi} \left(1 - \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \text{arcsinh} \left(\frac{\Lambda}{2} \right) \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{\pi} - \frac{\sqrt{3}}{\pi} \arctan(\sqrt{3}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{\pi}, \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

donde se ha utilizado que $\arctan(\sqrt{3}) = \pi/3$, dada la rama escogida para la función tangente en $(-\pi/2, \pi/2)$. También, se ha utilizado la tabla de primitivas [38] para

la segunda igualdad.

Ahora, si omitiéramos la adición de los contratérminos (3.2.45), y solo nos quedáramos con la regularización con el cutoff sobre el número de modos, tendríamos una corrección como sigue

$$\Delta E_1[\phi_k]/(\hbar\gamma_d^2) = 1/2\sqrt{3}. \quad (3.5.3)$$

No obstante, con los contratérminos añadidos a raíz de la divergencia vía la autoenergía del loop de la teoría, tenemos, teniendo en cuenta que de nuevo $\gamma_d^2 = \lambda/m^2$, la siguiente corrección total sobre la energía clásica del kink de ϕ^4 hasta el orden de un lazo:

$$\Delta E[\phi_k] = \frac{\hbar\lambda}{m^2} \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{\pi} \right) \approx -0,0889043 \cdot \frac{\hbar\lambda}{m^2} \quad (3.5.4)$$

Análogo comentario al de sine-Gordon es aplicable a este último resultado: de nuevo, las fluctuaciones cuánticas resultan en una corrección negativa de la masa clásica del kink, con una diferencia con respecto al caso anterior: ahora, limitándonos a la regularización por el cutoff en la energía, la corrección es no nula y positiva, como se aprecia en (3.5.3).

De esta manera, ya conocemos los valores teóricos con que las fluctuaciones cuánticas de vacío desplazan el valor de la masa clásica de nuestros dos kinks, como función de \hbar .

Capítulo 4

Conclusiones

Presentamos a continuación una lista de los resultados más importantes de este trabajo. Hemos referido las fórmulas que presentamos con su numeración original, para que al lector interesado le sea más fácil ir a la correspondiente ubicación en el propio trabajo.

1. Hemos estudiado la naturaleza topológica de las soluciones kink en una teoría escalar y bosónica con espacio de configuraciones estacionarias

$$\mathcal{D} = \{\phi \in \text{Maps}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : E[\phi] < \infty\}, \quad (1.2.4)$$

estudiando el carácter de conexión de \mathcal{D} a través de la relación $M \cong G/H$, con H el grupo pequeño de todos y cada uno de los elementos de la variedad de vacío M , G el grupo discreto de simetría de la teoría, y $E[\cdot]$ el funcional energía de la teoría. Todo el desarrollo, realizado sobre todo en el primer capítulo, ha mostrado la marcada relación existente entre las soluciones estacionarias de estas teorías escalares y la topología del espacio de configuración, determinada por las condiciones de contorno que ubicamos en M .

2. Hemos explorado algunas consecuencias de esta topología propia de las soluciones kink: su estabilidad, el comportamiento en el espacio de éstas a través de las cotas y ecuación de primer orden de Bogomolny, o el carácter atractivo de los sistemas kink-antikink en ϕ^4 , y el carácter repulsivo de los sistemas kink-antikink en sine-Gordon. Con respecto a esta última observación, la topología de \mathcal{D} determina todos los posibles sistemas multi-kink/antikink a través de las relaciones

$$f_i(\infty) = f_{i+1}(-\infty), \quad (1.7.8)$$

con f_i y f_{i+1} las soluciones estacionarias localizadas en puntos a_i y a_{i+1} consecutivos en una sucesión de valores de \mathbb{R} .

3. Hemos particularizado todo el desarrollo clásico anterior en los modelos de ϕ^4 y de sine-Gordon, dando una forma particular a las biyecciones probadas sobre los grupos de homotopía, $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$ para sine-Gordon y $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_2$ para ϕ^4 ; así como a las soluciones tipo kink, monótonas, con densidad de energía localizada en una región acotada del espacio, y masa en reposo finita.

A través de las correspondientes transformaciones de Lorentz, hemos pasado de estas soluciones estacionarias a las ondas propagantes no disipativas que caracterizan esta teoría, en particular

$$\phi_{\phi^4}(t, x) = \pm \tanh(\gamma(x - x_0 - vt)), \quad (2.3.13)$$

$$\phi_{sG}(t, x) = \pm 4 \arctan(e^{\gamma(x-x_0-vt)}) + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad (2.4.13)$$

con energías en reposo o masas clásicas dadas por

$$E[\phi_{\phi^4}] = 4/3, \quad (2.7.4)$$

$$E[\phi_{sG}] = 8. \quad (2.6.5)$$

4. Sobre las soluciones clásicas anteriores, hemos desarrollado correcciones cuánticas al orden de una lazo, en dos fases caracterizadas por distintos métodos de regularización. Las correcciones que resultan son consecuencia del fenómeno de las fluctuaciones cuánticas de vacío, las cuales se derivan del principio de incertidumbre de Heisenberg. Dichas fases son:

- 1) Regularización por cutoff sobre el número de modos de fluctuación, con correcciones

$$\Delta E_1[\phi_{sG}] = 0, \quad (3.4.4)$$

$$\Delta E_1[\phi_{\phi^4}] = \hbar\lambda / (2\sqrt{3}m^2). \quad (3.5.3)$$

- 2) Junto a lo anterior, por renormalización de la masa a través contratérminos añadidos a raíz del orden normal del Hamiltoniano cuantizado, obtenemos

$$\Delta E_2[\phi_{sG}] = -\frac{\hbar\lambda}{\pi m^2} \approx -0,31831 \cdot \frac{\hbar\lambda}{m^2}, \quad (3.4.5)$$

$$\Delta E_2[\phi_{\phi^4}] = \frac{\hbar\lambda}{m^2} \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{\pi} \right) \approx -0,0889043 \frac{\hbar\lambda}{m^2}. \quad (3.5.4)$$

En (3.4.4) y (3.5.3) presentamos las correcciones, hasta primer orden en \hbar , de dichas masas clásicas, a través de las diferencias, calculadas modo a modo, entre las energías de vacío de los sectores topológicos de kink y de vacío. Sin embargo, no nos hemos quedado ahí, y de cara a solventar la divergencia debida a la autoenergía dada en 3.1, hemos añadido la diferencia de los contratérminos, de nuevo entre los sectores kink y de vacío, de las teorías escalares de sine-Gordon y ϕ^4 , también hasta primer orden en \hbar . Este último cálculo nos ha dado unas correcciones finales negativas dadas por (3.4.5) y (3.5.4).

Apéndice A

Espacio de Fock

Introducimos algunas nociones esenciales en la formalización de toda teoría cuántica de campos, referentes al espacio de Fock. Nos limitamos a dar las nociones básicas de los operadores creación, aniquilación, y número de ocupación, así como de mostrar superficialmente la construcción y la forma de este espacio, con el cual expresamos los estados cuánticos de las teorías de campos cuantizadas que se dan en este trabajo. En este apéndice, seguiremos la referencia [39]

Sea H el espacio de Hilbert monoparticular, como lo puede ser frecuentemente el espacio de clases de equivalencia de funciones de cuadrado integrable en \mathbb{R}^3 , $L^2(\mathbb{R}^3)$, para el caso de partículas sin espín, y sean $\varphi_1(x) \in H_1 = H$ cada uno de sus elementos. En estos términos, un estado de dos partículas viene dado por el producto tensorial

$$\varphi_1(x_1, x_2) \in H_2 = H \otimes H \quad (\text{A.0.1})$$

Análogamente, para un estado de n -partículas,

$$\varphi_n(x_1, \dots, x_n) \in H^{\otimes n}. \quad (\text{A.0.2})$$

Denotaremos por (\cdot, \cdot) al producto interno definido en el espacio de n partículas $H^{\otimes n}$.

Como es bien sabido, sistemas de partículas idénticas obedecen a las conocidas estadísticas de Fermi o de Bose. En términos de elementos de un espacio vectorial de Hilbert, esto se traduce en que tenemos estados simétricos de la forma

$$S_n^+ \varphi_n = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} \varphi_n(x_{\pi 1}, \dots, x_{\pi n}), \quad (\text{A.0.3})$$

o antisimétricos como

$$S_n^- \varphi_n = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi) \varphi_n(x_{\pi 1}, \dots, x_{\pi n}). \quad (\text{A.0.4})$$

donde π denota a cada uno de los elementos del grupo simétrico G_n de permutaciones con cardinal $n!$, y donde se ha usado la aplicación $\text{sgn} : G_n \rightarrow \{-1, 1\}$, para la cual $\text{sgn}(\pi) = +1$ si π se descompone como composición de un número par de transposiciones, y $\text{sgn} = -1$ si lo hace en un número impar (téngase en cuenta que las trasposiciones generan el grupo G_n). S_n^+ y S_n^- son operadores proyección del

espacio de estados de n partículas en el espacio de estados de n partículas simétricos y antisimétricos, respectivamente. De esta forma, por su construcción podemos afirmar que S_n^+ y S_n^- son operadores idempotentes y autoadjuntos, es decir,

$$\begin{aligned} (S_n^\pm)^2 &= S_n^\pm, \\ (\psi_n, S_n^\pm \varphi_n) &= (S_n^\pm \psi_n, \varphi_n). \end{aligned} \quad (\text{A.0.5})$$

De esta forma, definimos los verdaderos estados físicos de n partículas, ya sea para la estadística de Bose o la de Fermi, como sigue:

$$H_n^\pm = S_n^\pm H^{\otimes n}, \quad (\text{A.0.6})$$

donde el signo $+$ hace referencia a los bosones, y $-$ a los fermiones. Nótese que lo único que hemos hecho ha sido simetrizar, o antisimetrizar, los estados producto tensorial definidos sobre un producto tensorial de espacios de Hilbert que contienen estados monoparticulares.

Así, con esta estructura funcional, pasamos a definir el espacio en el que daremos estados multiparticulares cualesquiera, con el signo dependiendo de a qué estadística estemos obedeciendo.

Definición A.0.1. *Todos los estados multiparticulares los vienen dados en el llamado **espacio de Fock**, definido como:*

$$F^\pm = \bigotimes_{n=0}^{\infty} H_n^\pm, \quad (\text{A.0.7})$$

donde

$$H_0 = \{\alpha\Omega\}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad (\text{A.0.8})$$

es el espacio de Hilbert unidimensional formado por los que llamaremos **estados de vacío**.

Notemos que un elemento de F^\pm o, cuando se quiera generalizar para ambas estadísticas, simplemente F , viene dado por una sucesión infinita de estados, los cuales serán el correspondiente de vacío, el de una partícula, el de dos partículas, etc. Esto es, los elementos de F son de la forma

$$\phi = (\varphi_0, \varphi_1, \dots), \quad (\text{A.0.9})$$

donde, formalizando lo que acabamos de decir,

$$\varphi_0 = \alpha\Omega, \quad \text{para algún } \alpha \in \mathbb{C}, \quad \varphi_1 \in H_1, \dots, \varphi_n \in H_n^\pm, \dots \quad (\text{A.0.10})$$

De forma usual a como se suele definir el producto interno de una suma directa de espacios de Hilbert, damos el producto interno del espacio de Fock como sigue

$$(\phi, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi_n, \psi_n)_n, \quad (\text{A.0.11})$$

donde $(\cdot, \cdot)_n$ denota al producto interno de H_n^\pm , que no es más que el de H_n restringido a estados simétricos o antisimétricos.

A continuación, formalizamos, en estos espacios, la forma que tomará el operador número de partículas, que denotaremos por N .

Definición A.0.2. Sea $\phi = (\varphi_0, \varphi_1, \dots) \in F$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, definimos el operador número de partículas N de la siguiente forma

$$(N\phi)_n = n\varphi_n, \quad (\text{A.0.12})$$

sobre un dominio dado por

$$D(N) = \left\{ \phi \in F : \sum_n n^2 \|\varphi_n\|_n^2 = \|N\phi\|^2 < \infty \right\}. \quad (\text{A.0.13})$$

De esta definición se sigue automáticamente el siguiente resultado.

Proposición A.0.3. El operador número de partículas N es no acotado, positivo y auto-adjunto sobre el dominio $D(N)$ dado en la definición A.0.2.

El significado físico de este operador es el de devolver como autovalores de los correspondientes elementos generadores del espacio de Fock el número de partículas en un determinado estado, dado en términos de coordenadas o de momentos, en función de la representación que se esté utilizando. De esta forma, cualquier operador A que actúe sobre el espacio de Fock F y que conmute con N , es decir

$$[A, N] = 0, \quad (\text{A.0.14})$$

no cambiará el número de partículas de los estados del correspondiente sistema. Ahora, introducimos los operadores que *sí que cambian* el número de partículas. Empezamos por el **operador creación** $a^*(f)$, el cual crea una partícula con “función de onda” $f \in H_1$, i.e., $a^*(f)\Omega = f$, y

$$(a^*(f)\phi)_n = \sqrt{n} S_n^\pm(f \otimes \varphi_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}, \phi \in F, \quad (\text{A.0.15})$$

donde, por ahora, $*$ es un mero formalismo. Veremos más adelante que su significado será el de adjunto de otro operador. Por el factor \sqrt{n} , a^* es no acotado para bosones, mientras que sí será acotado para fermiones. Esto es debido a la antisimetrización en el último caso, hecho que no ocurre en el caso bosónico.

Definidos los operadores creación, los de aniquilación se definen de forma análoga

$$(a(f)\phi)_n(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{n+1} \int dx f^*(x) \varphi_{n+1}(x, x_1, \dots, x_n), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (\text{A.0.16})$$

esto es, absorbe una partícula con función de onda f . En el vacío $\Omega = (1, 0, \dots)$, éste actúa de la forma

$$a(f)\Omega = 0, \quad f \in H_1. \quad (\text{A.0.17})$$

Con esta construcción, aunque no es trivial, enunciamos la relación esperada de operadores adjuntos de los operadores de creación y aniquilación:

$$a(f) = a^*(f)^\dagger, \quad f \in H_1, \quad (\text{A.0.18})$$

lo que se puede interpretar como la definición abstracta de los operadores de aniquilación.

A partir de a^* , podemos definir, en los espacios de coordenadas y de momentos, los funcionales $a^*(x)$ y $\hat{a}^*(k)$ que toman valores en el espacio de operadores con origen en F , de la forma

$$a^*(f) = \int dx a^*(x) f(x) = \int dk \hat{a}^*(k) \hat{f}(k), \quad (\text{A.0.19})$$

con \hat{f} la transformada de Fourier de f , y donde al operador a se le hace corresponder expresiones análogas. Con este formalismo, si tomamos una base ortonormal $\{f_j\}$ de H_1 , con f_j^* sus conjugados, podemos escribir estos objetos en términos de series de Fourier como

$$\begin{aligned} a^*(x) &= \sum_j a^*(f_j) f_j^*(x) = \sum_j a^*(f_j^*) f_j(x), \\ \hat{a}^*(k) &= \sum_j a^*(\hat{f}_j) \hat{f}_j^*(x) = \sum_j a^*(\hat{f}_j^*) \hat{f}_j(x), \\ a(x) &= \sum_j a(f_j^*) f_j(x) = \sum_j a(f_j) f_j^*(x), \\ \hat{a}(k) &= \sum_j a(\hat{f}_j^*) \hat{f}_j(x) = \sum_j a(\hat{f}_j) \hat{f}_j^*(x) \end{aligned} \quad (\text{A.0.20})$$

Con todo ello, escribimos las siguientes expresiones de $a^*(k)$ y $a(x)$ actuando sobre componentes de elementos de F , en los espacios de momentos y de coordenadas. Damos solo este par por su trivial analogía con las expresiones de $a(k)$ y $a^*(x)$.

$$\begin{aligned} (\hat{a}^*(k)\phi)_n(k_1, \dots, k_n) &= \sqrt{n} S_n^\mp (\delta(k - k_1) \varphi_{n-1}(k_2, \dots, k_n)), \\ (a(x)\phi)_n(x_1, \dots, x_n) &= \sqrt{n+1} \varphi_{n+1}(x, x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (\text{A.0.21})$$

La primera expresión no es un operador, pues está actuando sobre distribuciones delta; mientras que la segunda *sí que lo es*. Los operadores a y a^* , escritos en estos términos, no son más que coeficientes de Fourier de una expansión en una base ortonormal. Llegados a este punto, presentamos una forma en que se puede expresar, a partir de los operadores creación y aniquilación, el operador número de partículas:

$$N = \int dx a^\dagger(x) a(x), \quad (\text{A.0.22})$$

o bien, a partir de (A.0.20), se tiene

$$N = \sum_{jk} a^\dagger(f_j) a(f_k) (f_j, f_k) = \sum_j a^\dagger(f_j) a(f_j). \quad (\text{A.0.23})$$

De ello, y ya para concluir esta construcción, se puede probar que

$$(N\phi)_n = n S_n^\pm \varphi_n(x_1, \dots, x_n). \quad (\text{A.0.24})$$

Todo ello formaliza, de manera superficial, el análisis funcional que hay detrás de las locuciones “estados en el espacio de Fock” o “cuantizamos tomando los coeficientes de Fourier como operadores de creación y aniquilación”. Aunque, por supuesto, no hemos hecho más que rozar la punta del iceberg, a nosotros nos basta con quedarnos aquí.

Apéndice B

Potencial de PT. Método de factorización

En este apéndice recogemos, con las correspondientes justificaciones físicas y/o matemáticas, la razón de ser y la forma de las amplitudes de scattering y de reflexión, a las que denotaremos $t(k) = 1 + c(k)$ y $b(k)$ respectivamente, dependientes del número de onda k ; así como los desfases de los autoestados de scattering, para un sistema físico cuya evolución espacial está gobernada por la siguiente EDO de segundo orden de tipo Schrödinger

$$-f''(x) + V(x)f(x) = \lambda f(x), \quad (\text{B.0.1})$$

donde $\lambda = w^2 - v^2$, preservando la notación de los problemas espectrales del trabajo. Nótese que si $\lambda \geq 0$ (estados de scattering), λ no es otra cosa que k^2 , con k el número de onda de las relaciones de dispersión de esta parte del espectro. En el desarrollo que sigue, seguiremos el planteamiento de [33] (p. 109-113). El recorrido de este apéndice será el de aportar estos resultados a través del llamado *método de factorización*, el cual nos permitirá inducir éstos y otros contenidos de la teoría, a partir de la teoría libre (potencial nulo) que sea *compañera* (*partner*) de la teoría de nuestro interés. Esto justificará, de una forma alternativa, determinados rasgos del teorema de Levinson o del porqué de la transparencia de ciertos potenciales.

Cuando nos restrinjamos al caso de potencial de Pöschl-Teller (PT en adelante), tomaremos

$$V(x) = -s(s+1)\text{sech}^2(x), \quad s \in \mathbb{N}_0, \quad (\text{B.0.2})$$

donde ya se están tomando parámetros s enteros no negativos. Las expresiones (3.3.9) y (3.3.16) nos dan las soluciones generales, para $\lambda \geq 0$ y $\lambda \leq 0$ (i.e., estados de scattering y ligados de (B.0.1), donde $u = \tanh(x)$). La particularización de estas expresiones en casos concretos de s la daremos siguiendo las tablas de funciones geométricas del capítulo 2 de [34].

Fijemos $s = 1$. Esto nos da el problema espectral en términos del operador de segunda variación de la energía, que denotábamos por \hat{K} , en el sector kink de la teoría de sine-Gordon. El único estado ligado de este sistema, que damos a partir de (3.3.9) y [34], viene dado como

$$f_1(x) = \mathcal{N}\text{sech}(x), \quad \mathcal{N} \text{ constante de normalización}, \quad (\text{B.0.3})$$

lo cual describe el modo normal nulo en este sistema, i.e.,

$$w_n = 0 \quad (\implies \quad \lambda = -1). \quad (\text{B.0.4})$$

Por otra parte, ahora de (3.3.16) y de nuevo por [34], el estado de scattering exacto viene dada como

$$f_k(x) = \frac{ik - \tanh(x)}{ik + 1} e^{ikx}. \quad (\text{B.0.5})$$

Ya probamos también que $b(k) = 0$ para todo k , dado que $s \in \mathbb{N}$. De este último estado de scattering, deducíamos los siguientes desfase y amplitud de dispersión

$$t(k) = 1 + c(k) = \frac{ik - 1}{ik + 1}, \quad \delta(k) = \arctan(1/k), \quad (\text{B.0.6})$$

con la convención de $\delta(q) \rightarrow 0$ para $q \rightarrow \infty$. Hasta ahora, no hemos dicho nada nuevo. Este es un punto de arranque necesario para la formulación del método de factorización. En virtud de éste, será un cierto tipo de soluciones de la teoría libre de (B.0.1) y este primer potencial de PT los que, a través de la factorización del Hamiltoniano, nos permiten generalizar las expresiones de $t(k)$ y $\delta(k)$. El método de factorización fue iniciado por Schrödinger (1940, [40]), y aplicado por primera vez con potenciales transparentes por Kay y Moses [41]. Si el lector desea profundizar en este tema, en [41] encontrará una completa exposición. Aquí nos limitaremos a las nociones básicas y necesarias para nuestras teorías de campos.

Nos basamos en los tres resultados siguientes de la ecuación de Schrödinger en una dimensión:

1. Sea $\phi_0(x)$ una solución con energía E_0 conocida. Denotamos $D = d/dx = -D^\dagger$. Escribimos el operador Hamiltoniano como $H = -D^2 + V(x)$, con $H\phi_0 = E_0\phi_0$. Entonces, el Hamiltoniano factoriza de la siguiente forma: escribimos $\phi_0(x) = e^{W(x)}$, y definimos el operador $A = D + W'(x) = \phi_0 D \phi_0^{-1}$, de forma que $A\phi_0 = 0$, $H - E_0 = A^\dagger A$, y $V(x) - E_0 = W'(x)^2 - W''(x)$.
2. Si conocemos una solución ϕ con energía E conocida, entonces existe una segunda solución, posiblemente sin significado físico, con la misma energía E , y obtenida con una cuadratura como sigue: sea $\hat{\phi}$ dicha segunda solución, entonces $A^\dagger A\hat{\phi} = 0$, pero $A\hat{\phi} \neq 0$. De esta manera, $A\hat{\phi}$ está en $\ker A^\dagger$. Además, como $A\phi = 0$, entonces $A^\dagger \phi^{-1} = 0$, y con lo anterior, se sigue que $A\hat{\phi} = \phi^{-1}$. Equivalentemente, como $A = D + W'(x)$, se cumple la igualdad

$$\hat{\phi} = \phi \int \frac{dx}{\phi^2}. \quad (\text{B.0.7})$$

Esto significa que, para cada autovalor E_0 , existe una familia de factorizaciones para los que la solución general es $a\phi + b\hat{\phi}$, donde solo varían a y b . No todos los elementos de esta familia son soluciones físicas, sino que puede haber soluciones sin una interpretación dentro de nuestro sistema físico.

3. Dada una factorización $A^\dagger A$, existe un Hamiltoniano compañero, $\hat{H} - E_0 = AA^\dagger$, con el mismo espectro (hasta el estado fundamental), y donde existe una relación entre las soluciones propias de H y \hat{H} dada de la forma

$$\begin{aligned} H\phi_n = E_n\phi_n &\implies \hat{H}\psi_n = E_n\psi_n \text{ con } \psi_n = A\phi_n \\ \hat{H}\psi_n = E_n\psi_n &\implies H\phi_n = E_n\phi_n \text{ con } \phi_n = A\psi_n. \end{aligned} \quad (\text{B.0.8})$$

A las funciones auxiliares $W(x)$ se les llama *superpotenciales*, por su presencia en la Mecánica Cuántica Supersimétrica (SUSY). Nótese que para encontrar $W(x)$, dado un potencial $V(x)$, se tiene

$$V(x) = W'(x)^2 - W''(x) + E, \quad (\text{B.0.9})$$

lo que equivale a resolver una ecuación de Riccati.¹ El potencial compañero del dado originalmente vendrá dado por

$$V_c(x) = W'(x)^2 + W''(x). \quad (\text{B.0.11})$$

Hay casos en que un Hamiltoniano admite más de una factorización, lo que da lugar a cálculos iterativos entre modelos vinculados por esta relación de “compañerismo”, induciendo una cadena de Hamiltonianos compañeros.

Nos centramos ahora en la familia $V_s(x) = -s(s+1)\text{sech}^2(x)$, $s \in \mathbb{N}_0$. Si $s = 0$, estamos en el caso libre, para el que escogemos la solución sin significado físico, de energía negativa $-\kappa^2 < 0$, de la forma

$$\phi_\kappa(x) = \cosh(\kappa x). \quad (\text{B.0.12})$$

Es claro que $\phi_\kappa(x) \rightarrow \infty$ para $x \rightarrow \pm\infty$, i.e., ésta no es una solución física. No obstante, ya hemos dejado claro que esta solución solo es un paso intermedio para la construcción recursiva de soluciones que sí que son físicas.

El operador que factoriza el Hamiltoniano de esta teoría libre, dada ϕ_κ , es $A = D + W'(x)$, con $W(x) = \log(\cosh(\kappa x))$, esto es, $A = D - \kappa \tanh(\kappa x)$. Entonces, por (B.0.11), y tomando $\kappa = 1$ por comodidad, el Hamiltoniano compañero vendría dado por

$$\hat{H} - E = AA^\dagger = -D^2 + 1 - 2\text{sech}^2(x), \quad (\text{B.0.13})$$

lo que es, exactamente, el operador \hat{K} del modelo de sine-Gordon, que configura un Hamiltoniano unidimensional con potencial de PT para $s = 1$. Sabemos, por el análisis introductorio de este apéndice, que existe un único estado ligado (modo nulo) que, salvo constante de normalización, toma la forma

$$f_1(x) = \text{sech}(x), \quad (\text{B.0.14})$$

¹Una ecuación de Riccati es una forma de reescribir EDOs de segundo orden $\psi''(x) + p(x)\psi'(x) + q(x)\psi(x) = 0$, mediante el uso de su invariancia por dilataciones $\psi \mapsto \lambda\psi$, y cambiando de variable con $\psi(x) = e^{\bar{\phi}(x)}$, de forma que la ecuación se reduce a

$$\phi'(x) = A(x) + B(x)\phi(x) + C(x)\phi(x)^2, \quad (\text{B.0.10})$$

con $\phi(x) = \bar{\phi}'(x)$. Esta última ecuación es precisamente la ecuación de Riccati.

el cual es elemento de $\ker A$, ya que

$$Af_1(x) = (\partial_x - \tanh(x))\operatorname{sech}(x) = 0, \quad (\text{B.0.15})$$

y $f_1(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, además de que, ahora sí, $f_1 \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces, f_1 se puede interpretar como el estado fundamental para $V_1(x)$ en (B.0.1).

Además, existe en la teoría un autoestado, a priori ligado (autovalor en la parte discreta de $\operatorname{Spec}(\hat{K})$), cuyo valor propio viene determinado por $\lambda = 0$, esto es, $w^2 = v^2$, pero cuya energía *no es nula*. En un entorno de $k = 0$, este estado viene dado como

$$f_{k=0}(x) = -\tanh(x), \quad (\text{B.0.16})$$

y, como veremos a continuación, es la evaluación en $k = 0$ de los estados de scattering. Como vemos, $f_{k=0}(x)$ es impar, no nulo, y es el que, en el cuerpo de este trabajo, hemos venido llamando *autoestado semiligado* del modelo de sine-Gordon, en el sector de kink.

En virtud del método de factorización, la forma exacta, salvo constante de normalización, de las soluciones de scattering se deduce de la aplicación de A sobre las ondas libres e^{ikx} , esto es,

$$f_k = \mathcal{N}(D - \tanh(x))e^{ikx}. \quad (\text{B.0.17})$$

Ya sabemos que $b(k) = 0$ para todo k con estos potenciales transparentes $V_s(x)$, $s \in \mathbb{N}$. Además, de forma alternativa al cálculo directo que ya desarrollamos en el cuerpo del trabajo, esta factorización nos da la amplitud de dispersión y el desfasaje de (3.3.24) y (3.3.27), una vez calculemos \mathcal{N} en (B.0.17). Este método ha explicado, hasta ahora, el caso más sencillo de potencial transparente: en el caso de autoestados de scattering, se trata de un potencial compañero de ondas libres que no tienen término de onda reflejada ($\Phi_k(x) = e^{ikx} + 0 \cdot e^{-ikx}$), y como $A = D - \tanh(x)$ es un operador lineal, entonces la amplitud de reflexión nula de estas ondas libres será amplitud de reflexión nula en la teoría compañera.

Todo este planteamiento nos da otra interpretación del 1/2 del teorema de Levinson. La onda libre es tal que $\Phi_{k=0}(x) = 1 \neq 0$, mientras que el comportamiento general visto, hasta ahora para $s = 1$, del caso de $V_s(x)$ con $s \in \mathbb{N}$, es de que $f_{k=0} = 0$, es decir, de reflexión total en $k = 0$. Es sobre este punto sobre el que la comparación entre Hamiltonianos libres y de interacción, esencia de la demostración del teorema de Levinson, tiene lugar: la teoría libre se dice que es *crítica* por su comportamiento en $k = 0$, y eso influye en el número de autoestados ligados. Este calificativo de *crítico* tiene el sentido de que si al potencial $V \equiv 0$ (teoría libre) lo reducimos, por un valor δ tal que $\delta \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ tan pequeño como se quiera, entonces aparecerá un nuevo estado ligado, bien diferenciado del caso semiligado, i.e., del umbral del espectro de estados de scattering.

Volviendo a nuestra familia de potenciales $V_s(x)$, generalizamos la factorización hecha a derivadas del superpotencial de la forma $W'(x) = -l \tanh(x)$, generándose así una familia de potenciales compañeros de la forma

$$\begin{aligned} V_0(x) &= 0, & V_1(x) &= -2\operatorname{sech}^2(x), & V_2(x) &= -6\operatorname{sech}^2(x), & \dots, \\ \dots & & V_s(x) &= -s(s+1)\operatorname{sech}^2(x). \end{aligned} \quad (\text{B.0.18})$$

Enunciamos los resultados hasta ahora vistos sobre el caso $s = 1$, para lo que basta un razonamiento recursivo con superpotenciales, amplitudes de reflexión y transmisión, y desfases:

1. Amplitudes de reflexión: $b_{(s)}(k) = 0$, para todo k , y todo $s \in \mathbb{N}$ (por linealidad de los operadores que factorizan cada Hamiltoniano).
2. Amplitudes de dispersión:

$$t(k) = 1 + c(k) = \frac{(ik - l)(ik - (l - 1)) \dots (ik - 2)(ik - 1)}{(ik + l)(ik + (l - 1)) \dots (ik + 2)(ik + 1)}. \quad (\text{B.0.19})$$

3. Por la aditividad de los desfases,

$$\delta(k) = \sum_{m=1}^s \arctan\left(\frac{m}{k}\right), \quad (\text{B.0.20})$$

escogiendo la rama que dé buena definición para estas funciones arctan, como $\mathbb{C} \setminus \{re^{i\pi/2} : r \geq 0\}$.

Aplicamos todo esto en nuestras teorías: $l = 1$ y $l = 2$.

- a) Para $l = 1$, tenemos un estado ligado par, lo que implica un desfase de $\pi/2$, en acuerdo con el teorema de Levinson: π por el estado ligado, y $-\pi/2$ por el estado crítico del potencial libre compañero, caracterizado en la teoría después de la factorización como un estado semiligado. El desfase de los estados de scattering ya ha sido dado en este trabajo (ver (3.3.27)).
- b) Hay dos estados ligados, uno par y otro impar, así como un estado no nulo con $\lambda = w^2 - v^2 = 0$ (lo que se llama una *resonancia de energía cero*), que es par. El desfase es

$$\delta(k) = -2\arctan\left(\frac{3q}{2 - q^2}\right). \quad (\text{B.0.21})$$

En general, para $V_s(x)$, $s \in \mathbb{N}$, tenemos s estados ligados, alternadamente pares e impares, y una resonancia de energía cero en $\lambda (= w^2 - v^2) = 0$, que también alterna en paridad con los anteriores.

Bibliografía

- [1] J.S. Russell. “Report on Waves”. *Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science, York, September 1844* (1844).
- [2] D.J. Korteweg and G. de Vries. “On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel and on a new type of long stationary wave”. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and J. of Science* **39** (1895), págs. 422-443. DOI: [10.1080/14786449508620739](https://doi.org/10.1080/14786449508620739).
- [3] C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal and R.M. Miura. “Method for solving the Korteweg-de Vries equation”. *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967), págs. 1095-1097. DOI: [10.1103/PhysRevLett.19.1095](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.19.1095).
- [4] P.D. Lax. “Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves”. *Comm. Pure Applied Math.* **21.5** (1968). DOI: [10.1080/14786449508620739](https://doi.org/10.1080/14786449508620739).
- [5] A.D. Sakharov. “Vacuum quantum fluctuations in curved space and the theory of gravitation”. *Sov. Phys. Usp.* **34.5** (1991). DOI: [10.1103/PhysRevLett.19.1095](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.19.1095).
- [6] J.J. Mazo and A.V. Ustinov. *The sine-Gordon Equation in Josephson-Junction Arrays*. Nonlinear Systems and Complexity. Springer, 2014, págs. 155-175.
- [7] T.H.R. Skyrme. “A Non-Linear Field Theory”. *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **260** (1961), págs. 127-138. DOI: [10.1098/rspa.1961.0018](https://doi.org/10.1098/rspa.1961.0018).
- [8] R.F. Dashen, B. Hasslacher and A. Neveu. “Nonperturbative methods and extended-hadron modelos in field theory. I. Semiclassical functional methods”. *Phys. Rev. D.* **10.12** (1974). DOI: [10.1103/PhysRevD.10.4130](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.10.4130).
- [9] K. Cahill, A. Comtet and R.J. Glauber. “Mass formulas for static solitons”. *Phys. Lett. B* **64.3** (1976), págs. 283-285. DOI: [10.1016/0370-2693\(76\)90202-1](https://doi.org/10.1016/0370-2693(76)90202-1).
- [10] J. Goldstone and R. Jackiw. “Quantization of nonlinear waves”. *Phys. Lett. D* **11.6** (1975). DOI: [10.1103/PhysRevD.11.1486](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.11.1486).
- [11] S. Coleman. *Aspects of Symmetry*. Cambridge University Press: Cambridge, 2010.
- [12] H.B. Nielsen and P. Olesen. “Vortex-line models for dual strings”. *Nuclear Physics B* **61** (1973), págs. 45-61. DOI: [10.1016/0550-3213\(73\)90350-7](https://doi.org/10.1016/0550-3213(73)90350-7).

- [13] A.M. Polyakov. “Particle Spectrum in the Quantum Field Theory”. *JETP Lett.* **20** (1974), págs. 194-195. DOI: [10.1142/9789814317344_0061](https://doi.org/10.1142/9789814317344_0061).
- [14] G. Hooft't. “Magnetic Monopoles in Unified Gauge Theories”. *Nucl. Phys. B* **79** (1974), págs. 276-284. DOI: [10.1016/0550-3213\(74\)90486-6](https://doi.org/10.1016/0550-3213(74)90486-6).
- [15] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.S. Schwartz and T.S. Tyupkink. “Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations”. *Phys. Lett. B* **59** (1975), págs. 85-87. DOI: [10.1016/0370-2693\(75\)90163-X](https://doi.org/10.1016/0370-2693(75)90163-X).
- [16] A. Rebhan, P. van Nieuwenhuizen and R. Wimmer. “Nonvanishing quantum corrections to the mass and central charge of the $N = 2$ vortex and BPS saturation”. *Nucl. Phys. B* **679** (2004), págs. 382-394. DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2003.11.030](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2003.11.030).
- [17] A.A . Izquierdo, W.G. Fuertes, M.T. Mayado and J.M. Guilarte. “Quantum corrections to the mass of self-dual vortices”. *Phys. Rev. D* **70** (2004). DOI: [10.1103/PhysRevD.70.061702](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.70.061702).
- [18] A.A . Izquierdo, W.G. Fuertes, M.T. Mayado and J.M. Guilarte. “Quantum oscillations of self-dual Abrikosov-Nielsen-Olesen vortices”. *Phys. Rev. D* **71** (2005). DOI: [10.1103/PhysRevD.71.125010](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.71.125010).
- [19] A.A . Izquierdo, W.G. Fuertes, M.A. González León and J.M. Guilarte. “One-loop corrections to classical masses of kink families”. *Nucl. Phys. B* **681**.1-2 (2004), págs. 163-194. DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2004.01.003](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2004.01.003).
- [20] A.A . Izquierdo and J.M. Guilarte. “One-loop mass shifts: A computational approach”. *Nucl. Phys. B* **852** (2011), págs. 696-735. DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2011.07.005](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2011.07.005).
- [21] J.M.M. Castañeda. *Vórtices cuánticos de Abrikosov-Nielsen-Olesen*. Dpto. Física Fundamental, Univ. Salamanca (tesina de licenciatura): Salamanca, 2005.
- [22] G.H. Derrick. “Comments on Nonlinear Wave Equations as Models for Elementary Particles”. *Journal of Mathematical Physics* **5** (1964). DOI: [10.1063/1.1704233](https://doi.org/10.1063/1.1704233).
- [23] S. H. Dong. *Factorization Methods in Quantum Mechanics*. Springer: Denver, 2010.
- [24] J.O. Rosas-Ortiz. “On the factorization method in quantum mechanics”. *Proceedings of the First International Workshop on Symmetries in Quantum Mechanics and Quantum Optics* (1999). Ed. por A. Ballesteros *et al* (Servicio de Publicaciones de la Universidad de Burgos), págs. 285-299.
- [25] E.B. Bogomolny. “Stability of Classical Solutions”. *Sov. J. Nucl. Phys.* **24**.4 (1976), págs. 449-454.
- [26] E. Bour. “Théorie de la déformation des surfaces”. *Journal de l'École Impériale Polytechnique* **19** (1862), págs. 1-48.

- [27] J. Frenkel and T. Kontorova. “On the theory of plastic deformation and twinning”. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Seriya Fizicheskaya* **1** (1939), págs. 137-149.
- [28] R. Rajaraman. *Solitons and Instantons*. 3rd ed., North-Holland Personal Library: Amsterdam, 1987.
- [29] F. Mandl and G. Shaw. *Quantum Field Theory*. 2nd ed., A John Wiley and Sons Publication: Pondicherry, 2010.
- [30] A. Galindo y P. Pascual. *Mecánica Cuántica*. Vol. 2. Eudema: Madrid, 1989, págs. 61-67.
- [31] J. Goldstone. “Field Theories with Superconductor Solutions”. *Nuovo Cim.* **19** (1961), págs. 154-164. DOI: [10.1007/BF02812722](https://doi.org/10.1007/BF02812722).
- [32] A. Salam, J. Goldstone and S. Weinberg. “Broken Symmetries”. *Phys. Rev.* **127** (1962), págs. 965-970. DOI: [10.1103/PhysRev.127.965](https://doi.org/10.1103/PhysRev.127.965).
- [33] L.J. Boya. “Quantum-mechanical scattering in one dimension”. *Revista del Nuovo Cimento* **31.2** (2008), págs. 75-139. DOI: [10.1393/ncr/i2008-10030-4](https://doi.org/10.1393/ncr/i2008-10030-4).
- [34] F. Oberhettinger, R.P. Soni and W. Magnus. *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*. 3rd ed., Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH: Berlin, 1966.
- [35] E.M. Lifshitz and L.D. Landau. *Quantum Mechanics. Non-Relativistic Theory*. 3rd ed., Volumen 3 de “Course of Theoretical Physics”, Pergamon Press: Moscow, 1991.
- [36] J. Lekner. “Reflectionless eigenstates of the sech^2 potential”. *American Journal of Phys.* **75** (2007). DOI: [10.1119/1.2787015](https://doi.org/10.1119/1.2787015).
- [37] W. Heisenberg. “Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik”. *Zeitschrift für Physik* **43** (1927), págs. 172-198.
- [38] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*. School of Chemical and Physical Sciences, Victoria University of Wellington: 8th ed., Elsevier, Wellington, 2015.
- [39] G. Scharf. *Finite Quantum Electrodynamics*. Springer: Berlin, 1995, págs. 66-93.
- [40] E. Schrödinger. “A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions”. *Proceedings of the Royal Irish Academy* **46A** (1940), págs. 9-16.
- [41] I. Kay and H.E. Moses. “Reflectionless Transmission Through Dielectrics And Scattering Potentials”. *Journal of App. Phys.* **27** (1956). DOI: [10.1063/1.1722296](https://doi.org/10.1063/1.1722296).
- [42] G.B. Folland. *Quantum Field Theory, A Tourist Guide for Mathematicians*. “Mathematical Surveys and Monographs”, American Mathematical Society: Providence (Rhode Island), 2013.

- [43] H. Laurell. *A summary on solitons in Quantum Field Theory*. Uppsala Universitet: Uppsala, 2016.
- [44] N. Manton and P. Sutcliffe. *Topological Solitons*. EBA Cambridge University Press: Cambridge, 2004.
- [45] S. Flügge. *Practical Quantum Mechanics*. 2nd ed., “Classics in Mathematics”, Springer: Berlin, 1994.
- [46] F. Galindo, J. Gómez, J. Sanz and L.A. Tristán. *Guía práctica de Variable Compleja y Aplicaciones*. 1st ed., Ediciones Universidad de Valladolid: Valladolid, 2019.