



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORÍA DE NEWTON-CARTAN:  
LA GRAVITACIÓN NEWTONIANA COMO  
CURVATURA DEL ESPACIO-TIEMPO “A LA  
EINSTEIN”

*Trabajo Fin de Grado*

Autor: Sergio Navarro Obregón

Dirigido por: Mariano Santander Navarro

Fecha: 29 de Junio de 2021

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>6</b>
1.1. Contexto histórico. . . . .	6
1.2. Motivación. . . . .	7
1.3. ¿Es el 3-espacio curvo? Geometría Riemanniana y geometría en la Teoría relativista de la gravedad. . . . .	7
1.4. Formulación convencional y geométrica de la gravitación Newtoniana. . . . .	9
<b>2. Espacio-tiempo newtoniano y espacio-tiempo clásico.</b>	<b>10</b>
2.1. “Métrica” temporal $t_{\mu\nu}$ . . . . .	11
2.2. “Cométrica” espacial $h^{\mu\nu}$ . . . . .	12
2.3. Discusión sobre las estructuras “métricas”. . . . .	13
<b>3. Versión geométrica de la Formulación convencional. Conexión inercial.</b>	<b>14</b>
3.1. Principio de inercia en la Formulación convencional. . . . .	14
3.2. Principio de inercia en la Formulación geométrica. . . . .	15
3.2.1. Principio de inercia y Conexión inercial. . . . .	15
3.3. Curvatura de la Conexión inercial. . . . .	17
3.4. ¿Existe base empírica para la conexión inercial? . . . . .	17
3.5. ¿Es posible discriminar entre un <i>MRI</i> y un <i>MRnI</i> ? . . . . .	18
3.6. Mecánica Newtoniana y Teoría especial de la relatividad. . . . .	20
<b>4. Formulación Newton-Cartan. Conexión gravito-inercial.</b>	<b>23</b>
4.1. Análisis de la Formulación Newton-Cartan en un MRI. . . . .	23

4.1.1.	Conexión gravito-inercial en un MRI. . . . .	23
4.1.2.	Curvatura de la Conexión gravito-inercial en un MRI. . . . .	24
4.1.3.	Ecuaciones de desviación geodésica en un MRI. Campo de marea. . . . .	25
4.1.4.	Ecuaciones de campo en un MRI. . . . .	26
4.2.	Análisis de la Formulación Newton-Cartan en un MRnI. . . . .	27
4.2.1.	Conexión gravito-inercial en un MRnI. . . . .	28
4.2.2.	Curvatura de la Conexión gravito-inercial en un MRnI. . . . .	29
4.2.3.	Ecuaciones de desviación geodésica en un MRnI. Campo de marea. . . . .	29
4.2.4.	Ecuaciones de campo en un MRnI. . . . .	31
4.3.	Mecánica Newtoniana y Teoría general de la relatividad. . . . .	31
4.4.	Resumen. . . . .	33
<b>5.</b>	<b>Formulación Newton-Cartan en la actualidad.</b>	<b>35</b>
5.1.	Gravedad Newton-Cartan asociado al grupo de movimientos rígidos. . . . .	35
5.2.	Cosmología Newton-Cartan. . . . .	38
5.3.	Espacio-tiempo de Bargmann. . . . .	41
5.4.	Introducción a la Teoría Newton-Cartan como Teoría Gauge. . . . .	43
5.5.	¿Son la Gravitación Newtoniana y la Formulación de Newton-Cartan teóricamente equivalentes? . . . . .	45
5.6.	Perspectiva general sobre la teoría de Newton-Cartan en la actualidad. . . . .	46
	<b>Conclusiones sobre la Formulación Newton-Cartan.</b>	<b>48</b>
	<b>A. Parámetros de no inercialidad.</b>	<b>50</b>
	<b>B. Grupo de Galileo.</b>	<b>52</b>
	<b>C. Geometría diferencial.</b>	<b>53</b>
C.1.	Conexión. . . . .	53
C.2.	Derivada covariante. . . . .	54
C.3.	Transporte paralelo y Geodésicas. . . . .	56

C.4. Tensor de curvatura de Riemann y tensor de Ricci. . . . .	56
<b>D. Otros datos de interés.</b>	<b>58</b>
D.1. Vorticidad, Cizalladura, Esfuerzo y Ritmo de expansión. . . . .	58
D.2. Identidades de Bianchi en la teoría de Bargmann. . . . .	58
<b>Bibliografía</b>	<b>60</b>

# Agradecimientos.

*En primer lugar, me gustaría dedicar todos los frutos de estos cuatro años de trabajo a lo largo de la carrera a mis padres, quienes me han brindado la posibilidad de estudiar esta hermosa carrera, además de haberme dado todo su apoyo y ánimos cada día, así como a mi hermano, quien también se embarca a realizar sus estudios de física y quien ha demostrado la misma pasión que yo por la ciencia.*

*Agradecer a todas las personas cercanas a mí, junto a las nuevas amistades que han surgido durante mi estancia en Valladolid, los cuales desde el primer momento han supuesto una fuente de motivación y de impulso.*

*También agradecer todo el empeño de los profesores que me han formado y me han transmitido todos los conocimientos que he necesitado durante estos años, y quienes me han permitido ver de una manera que jamás hubiese imaginado el mundo que me rodea.*

*No podría acabar sin mencionar antes a mi tutor Mariano Santander Navarro, quien ha volcado también todas sus fuerzas en que pudiese superar con creces este proyecto, y motivándome a seguir descubriendo nuevos conocimientos dentro de la rama de la Física Teórica.*

*A todos vosotros, gracias.*

# Capítulo 1

## Introducción

*"If I have seen further, it is by standing on the shoulders of Giants."*

*Sir Isaac Newton*

### 1.1. Contexto histórico.

Históricamente, la posibilidad de entender la gravedad como curvatura del espacio-tiempo apareció por primera vez en la Teoría relativista de la gravitación de Einstein, mucho antes de que la comunidad matemática se hubiera dado cuenta de que la conexión debía de ser el objeto fundamental en el estudio de los espacios curvos. Sin embargo, resulta que en la Teoría de la gravedad de Newton, cuando se la contempla desde el punto de vista novedoso que introdujo la Teoría de Einstein, la gravitación también puede ser interpretada como curvatura del espacio-tiempo.

Aunque con analogías con la Teoría relativista de la gravitación de Einstein, la formulación Newton-Cartan presenta diferencias físicas con esta, ya que la teoría propuesta por Einstein para el espacio-tiempo se adapta localmente a una estructura Minkowskiana, mientras que en la teoría de la gravitación de Newton se adapta el espacio-tiempo Newtoniano a una estructura “galileo-newtoniana” matemáticamente más artificiosa, en donde existe la concepción de “tiempo absoluto”. Las matemáticas requeridas para establecer la Teoría relativista de la gravitación de Einstein (culminada en 1915) eran ligeras modificaciones de las técnicas que venían siendo utilizadas en el estudio de los espacios curvos con métrica no degenerada y definida positiva. Sin embargo, las matemáticas necesarias para formalizar de manera geoméricamente adecuada las ideas físicas subyacentes a la Gravitación Newtoniana (en particular interpretar conjuntamente las fuerzas gravitatorias e inerciales como una conexión) requieren de unas técnicas que no comenzaron a estar disponibles hasta la década de 1920.

La formulación puramente geométrica de la Teoría Newtoniana de la gravedad fue iniciada por Cartan [1] en 1923, desarrollada en 1927 por Friedrichs [2], y finalmente rescatada por Trautman[3] y Havas [4] en los 1960s. En un cierto límite, la teoría de Einstein se reduce a la de Newton-Cartan (cuando el campo es débil y los movimientos son lentos); cuestión que fue analizada por varios autores, entre los que podemos distinguir a J.Ehlers [5] - [6].

## 1.2. Motivación.

La re-formulación Newton-Cartan de la gravedad Newtoniana en un lenguaje independiente de las coordenadas, nos proporciona un mayor grado de paralelismo entre esta y la relatividad general. Esto hace que sea interesante analizar dicha teoría, ya que aunque la relatividad general es más exacta y tiene una estructura más elegante, la búsqueda de soluciones a partir de las ecuaciones de campo presenta una gran complicación cuando se trata de analizar sistemas realistas. Es así como a menudo se toma una aproximación no relativista del sistema y se llevan a cabo los cálculos en esta, permitiendo resolver un amplio rango de escenarios, lo que hace a la Teoría de Newton-Cartan de una herramienta muy útil en diversas ocasiones.

Podemos hacer mención a los siguientes campos de estudio:

- Recientemente, varios modelos inspirados en esta teoría han cobrado mucha importancia en el estudio de varios sistemas mecano-cuánticos. Por destacar uno, podemos hacer referencia a su aplicación en el Efecto Hall cuántico [7], basado en un comportamiento colectivo en un sistema bidimensional de electrones. La interpretación de este fenómeno hace uso de la estructura propia de la geometría Newton-Cartan. La maquinaria matemática de la geometría de Newton-Cartan se torna útil para desarrollar una teoría de campos efectiva describiendo estados Hall cuánticos.
- Su aplicación no solamente se restringe a este caso, sino que también tiene un gran impacto cuando se combina con la correspondencia AdS/CFT [8] (mayormente conocida como “Conjetura de Maldacena”) para describir teorías de campos no relativistas en la física de la materia condensada. El Principio holográfico se utiliza en esta situación para convertir problemas de teorías de campos acoplados fuertemente en teorías equivalentes descritas en el lenguaje de la gravedad de Newton-Cartan.
- Finalmente, cabe destacar que la Teoría de Newton-Cartan también resulta ser aplicable en cosmología [22] [23], en donde de igual manera que en la relatividad general, se introduce un modelo de fluido con una 4-velocidad. Proyectando las ecuaciones de Newton-Cartan con respecto a la 4-velocidad y asumiendo homogeneidad, uno es capaz de derivar la ley de expansión.

## 1.3. ¿Es el 3-espacio curvo? Geometría Riemanniana y geometría en la Teoría relativista de la gravedad.

Los estudios en geometría tienen sus orígenes en las observaciones provenientes de la habilidad humana de reconocer la forma física y para comparar formas y tamaños.

Las civilizaciones Babilónica y Egipcia fueron las primeras en integrar el estudio de la geometría, pero, sin duda, fue la Griega aquella que entre los años 600 y 300 A.C proveyeron de estructura abstracta así como de una deducción formal a la geometría euclídea [12]. Los axiomas de Euclides se visualizaban como un pilar fundamental e indiscutible, y parecía reflejar la geometría de nuestro espacio. Sin embargo, tras más de 2000 años de reflexión, se llegó a la conclusión de que la geometría euclídea era tan solo una de las posibles geometrías con la llegada de la geometría no-euclídea a manos de Gauss, Lobachewsky, Bolyai y, finalmente, Riemann. Quien propició el impulso definitivo

a la consagración de la geometría diferencial fue Karl F. Gauss <sup>1</sup>, quien en 1827 presentó “Disquisitiones generales circa superficies curvas”. Establece en una de las secciones de este texto que, en un espacio bidimensional que localmente sea euclidiano, la curvatura queda descrita por medio de un solo número en cada punto; la llamada curvatura Gaussiana  $K$ . Riemann, por su parte, extendió la teoría de Gauss al caso de espacios de dimensión arbitraria  $N > 2$  manteniendo la exigencia de ser localmente Euclídeo. En su extensión, la curvatura está asociada a cada dirección bidimensional en cada punto. Como existen infinitas de estas bidirecciones en cada punto y las curvaturas en cada una de ellas no son independientes sino que existen entre ellas relaciones, estas curvaturas se representan en términos de un cierto conjunto finito de valores, constituyendo el llamado tensor de curvatura de Riemann. Así, el marco matemático adecuado para describir un espacio curvo es la geometría Riemanniana. Con lo cual, la estructura euclidiana aparece como una mera aproximación tangente a la estructura general de un espacio con curvatura.

Con ello, surge una pregunta inmediatamente: “¿Es el 3-espacio llano? ¿O es curvo?” En el siglo XIX hubo intentos de responder a dicha cuestión.

Uno de los intentos fue desempeñado por el propio Gauss [11]:

En una superficie bidimensional no euclidiana, la suma de los ángulos de un triángulo se desvía del valor Euclidiano en una cantidad  $\varepsilon$  que depende del área de la superficie  $F$ , de modo que para una constante característica  $R$  de la geometría no Euclidiana, se tiene que  $\varepsilon = (\alpha + \beta + \gamma) - 180 = KF$ , donde  $K = \frac{1}{R^2}$  o  $K = -\frac{1}{R^2}$ , según  $\varepsilon$  sea mayor o menor que 0, y el correspondiente  $R$ , que tiene dimensiones de longitud, corresponde al radio de curvatura, y puede caracterizarse en el lenguaje de la geometría diferencial por medio de la curvatura Gaussiana como  $K = \pm \frac{1}{R^2}$ , y mide la desviación de la geometría en un punto respecto a la geometría del caso Euclídeo (en la que  $R = \infty$ ). Dado que el defecto  $\varepsilon$  es proporcional al área, Gauss midió los ángulos de un triángulo cuyos vértices eran tres montañas del Harz (Brocken - Inselsberg - Hohenhagen) separadas entre sí del orden de 100 km. Consideró para ello la hipótesis hasta entonces aceptada de que la luz se propagaba según las geodésicas del espacio, determinando un valor para  $\varepsilon$  de  $14''{,}85348$ , lo cual era una diferencia muy por debajo de la precisión de la medición, con lo que llegó a la conclusión de que el espacio físico era euclidiano y que si su curvatura fuera no nula el posible valor absoluto de dicha curvatura debería de ser muy pequeño.

Otro de los intentos, fue propuesto por Lobachewski [13]:

Lobachewski, por su parte, usando el diámetro de la órbita de la Tierra alrededor del Sol como base de un triángulo y una estrella como vértice, indicó que si la geometría del espacio físico fuese hiperbólica en vez de euclídea, entonces el paralaje de cualquier estrella debía de ser superior a un cierto valor no nulo, independientemente de cuán alejada estuviese la estrella. Con los valores de las paralajes disponibles en su momento, llegó de esta forma a que si el espacio fuese hiperbólico, su curvatura debía de ser muy pequeña. Sus resultados daban para el radio de curvatura  $R$  una cota de  $R \geq 0,16 \times 10^6$  UA, lo que de nuevo aportaba una curvatura muy pequeña.

Hoy en día sabemos que el 3-espacio es curvo gracias al marco teórico que creemos que describe correctamente la geometría del espacio-tiempo en presencia de campo gravitatorio; estamos hablando de la Teoría relativista de la gravitación de Einstein.

---

<sup>1</sup>Cabe destacar obras como “Sobre la curva más corta que une dos puntos arbitrarios de una superficie arbitraria” (1732) de Euler, donde introduce la ecuación diferencial de las geodésicas o “Desarrollos de geometría pura” (1813) por Charles Dupin, donde introduce un método para caracterizar la forma local de una superficie.

Se debe insistir en que la idea de que el espacio pudiera ser curvo no ha de considerarse como un precedente directo de la Teoría relativista de la gravitación de Einstein, pues lo que en esta teoría es curvo es el espacio-tiempo. Aun así, la curvatura en el 3-espacio en circunstancias ordinarias es extraordinariamente pequeña. Para hacernos una idea en base a datos numéricos, en el campo gravitatorio creado por la Tierra sobre su superficie, si tomamos los 2-planos espacio-espacio obtenemos un valor del orden de  $10^{-23} \text{ m}^{-2}$  [9]; esto corresponde a un radio de curvatura del orden de  $10^{11} \text{ m}$ , lo cual es del orden de una unidad astronómica.

## 1.4. Formulación convencional y geométrica de la gravitación Newtoniana.

La posibilidad de entender la gravedad como curvatura del espacio-tiempo, la cual habitualmente queda asociada a la Teoría gravitatoria de Einstein, tiene como raíces conceptuales la estructura de la Gravedad Newtoniana, en concreto, en la necesidad de dotar de una conexión al espacio-tiempo con la intención de proveer al Principio de inercia de un sentido preciso y, por tanto, nada ambiguo.

Coexisten dos posibles interpretaciones, las cuales son observacionalmente equivalentes:

### 1. La Formulación Convencional.

En ella, el campo gravitatorio aparece como un campo de fuerzas adicional, que en cada 3-espacio de simultaneidad es un campo vectorial proveniente de un potencial gravitatorio.

### 2. La Formulación Geométrica.

Dentro de la misma podemos distinguir entre dos versiones diferentes, en las que se introduce una conexión como “objeto primitivo”. Dichas versiones se tratan de:

- Versión geométrica de la interpretación convencional.

Tal versión no se formula en el 3-espacio ordinario sino en el espacio-tiempo Newtoniano, en donde el estatus de campo gravitatorio permanece como un campo de fuerzas y donde las fuerzas de inercia están descritas por una conexión; esta es la conexión inercial.

- Formulación Newton-Cartan o puramente geométrica.

Esta otra versión se formula también en un espacio-tiempo de cuatro dimensiones, pero las fuerzas gravitatorias vienen descritas conjuntamente con las de inercia mediante otra conexión diferente a la anterior; esta es la “gravito-inercial”.

Además, el campo gravitatorio se entiende como curvatura del espacio-tiempo; curvatura que a su vez se manifiesta físicamente como el campo de marea.

## Capítulo 2

# Espacio-tiempo newtoniano y espacio-tiempo clásico.

La concepción del tiempo absoluto, que es intrínseca en el modelo de espacio-tiempo implícito en la teoría de Newton, permite usar como coordenada distinguida el tiempo universal  $t$ . La especificación completa de un suceso requiere dar, además de su coordenada  $t$ , su posición en el espacio en el instante  $t$ , para lo cual supondremos establecido un determinado marco de referencia. En cuanto a las coordenadas espaciales, en problemas concretos puede convenir emplear un determinado tipo de coordenadas u otro; nosotros utilizaremos coordenadas cartesianas, lo cual presupone que el 3-espacio es Euclídeo. Las coordenadas asignadas para un marco de referencia inercial resultan en  $(t, x^I)$  y, para un marco de referencia no inercial,  $(t, x^i)$ <sup>1</sup>.

La formalización de estas ideas físicas [1], [2], [3], [4] subyacentes al espacio absoluto de Newton correspondientes a las ideas de 3-espacio Euclídeo absoluto y tiempo absoluto por medio de una descripción geométrica, supone una definición formal del espacio-tiempo clásico Newtoniano por medio de una estructura del tipo  $(M, t_{\mu\nu}, h^{\mu\nu}, \Gamma)$ , donde  $M$  es una variedad diferenciable 4-dimensional de clase  $C^\infty$  homeomorfa a  $\mathbb{R}^4$ ,  $t_{\mu\nu}$  un campo simétrico sobre  $M$  con una signatura  $(+, 0, 0, 0)$ ,  $h^{\mu\nu}$  un campo simétrico sobre  $M$  con una signatura  $(0, +, +, +)$  y  $\Gamma$  una conexión afín, sin torsión, sobre  $M$ . Colectivamente, representan la estructura del espacio-tiempo presupuesto por la dinámica de la relatividad Galileana [14], en presencia de un posible campo.

El teorema fundamental de la geometría pseudoriemanniana, que establece que dada una variedad de Riemann o una variedad pseudoriemanniana, hay una sola conexión libre de torsión que preserve el tensor métrico (que debe de ser no degenerado), permite que, una vez que haya sido aceptada la hipótesis de que la conexión es compatible con la métrica, la conexión pueda verse como derivada de la métrica [15]. Así, resulta que en los espacios con métrica no degenerada, la métrica es conceptualmente suficiente para contener codificada la descripción completa de la geometría de esos espacios. Por el contrario, en el espacio-tiempo Newtoniano, las duraciones temporales y las distancias espaciales están codificadas por estructuras “métricas” diferentes, correspondiendo a  $t_{\mu\nu}$  y  $h^{\mu\nu}$  respectivamente, y ambas degeneradas. Esto es lo que provoca que no exista una única conexión compatible con ambas, por lo que la especificación completa de estructura del espacio-tiempo Newtoniano necesita irremediablemente de una conexión como tercer “objeto primitivo”

---

<sup>1</sup>Cuando se use los términos “inercial” o “no inercial”, su carácter estará bajo la concepción pre-1900, esto es, movimiento rectilíneo uniforme o bien acelerado respecto del espacio absoluto respectivamente.

que desempeña entonces un papel complementario y parcialmente independiente de las otras dos estructuras.

Una conexión es un objeto geométrico, intrínseco, que en cada sistema de coordenadas está descrito por los “coeficientes de la conexión”  $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ , que son funciones de las coordenadas (véase *Apéndice C.1*). Este objeto geométrico permite conectar espacios tangentes cercanos, permite transportar paralelamente un vector tangente a lo largo de una curva sobre una variedad (*Apéndice C.3*) y extender el cálculo diferencial con la derivada covariante (*Apéndice C.2*).

## 2.1. “Métrica” temporal $t_{\mu\nu}$ .

La “métrica” temporal del espacio-tiempo Newtoniano está dada por el tensor  $t_{\mu\nu}$  cuyas componentes en coordenadas Galileanas son

$$t_{\mu\nu} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

lo cual equivale a decir que el tiempo propio a lo largo de cualquier línea de universo es simplemente la diferencia de la coordenada  $t$  entre los dos extremos. Consecuentemente, la duración temporal a lo largo de cualquier movimiento coincide con el incremento de la coordenada  $t$ , lo que traduce la idea de tiempo absoluto. Esto se ve con la siguiente identificación: el tensor  $t_{\mu\nu}$  es realmente el producto de dos covectores. Si  $t_\mu$  denota al covector gradiente de la función tiempo absoluto  $t$  (más precisamente,  $t : M \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $t$  una función suave definida globalmente), entonces  $t_{\mu\nu} = t_\mu t_\nu$ <sup>2</sup>. De este modo, el cuadrado de la “norma” de un 4-vector cualquiera  $\phi^\mu$  resulta ser

$$t_{\mu\nu} \phi^\mu \phi^\nu = (t_\mu \phi^\mu)^2. \quad (2.2)$$

Con lo cual, haciendo uso de la expresión que relaciona la longitud de una curva con la métrica, se obtiene que

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{t_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{t_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} t_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(t_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau}\right)^2} d\tau = \int_{t_1}^{t_2} t_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} d\tau = t_2 - t_1.$$

La signatura que debe tener  $t_{\mu\nu}$  es el requerimiento de que, en cada punto de  $M$ , el espacio tangente tenga una base  $\zeta^{1\mu} \dots \zeta^{4\mu}$  tal que,  $\forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $t_{\mu\nu} \zeta^{i\mu} \zeta^{j\nu} = 0$  si  $i \neq j$  y

$$t_{\mu\nu} \zeta^{i\mu} \zeta^{j\nu} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j = 1, \\ 0, & \text{si } i = j = 2, 3, 4. \end{cases} \quad [14]$$

Cabe destacar que salvo un factor de proporcionalidad arbitrario, que se absorbe en la definición de la unidad de tiempo, es posible demostrar que el único tensor dos veces covariante e invariante frente a las transformaciones del grupo de Galileo (se definen dichas transformaciones y se analiza sus características de grupo en el *Apéndice B*), es decir, que satisfaga  $t_{\mu\nu} \alpha^\mu \rho \alpha^\nu \sigma = t_{\rho\sigma}$ , es precisamente (2.1).

---

<sup>2</sup>Puede verse que bajo transformaciones Galileanas ortocronas, la cantidad  $t_\mu = (1, 0, 0, 0)$  se transforma como un vector covariante, con numéricamente las mismas componentes en todos los sistemas de coordenadas. Sin embargo, no hay ningún vector contravariante que satisfaga una condición de invariancia análoga.

**Definición 2.1** Se dice que un vector  $\phi^\mu$  del espacio-tiempo galileano es de “género tiempo futuro” o de “género tiempo pasado” según el siguiente criterio

$$\phi^\mu \begin{cases} g.t.futuro, & \text{si } t_\mu \phi^\mu > 0, \\ g.t.pasado, & \text{si } t_\mu \phi^\mu < 0. \end{cases}$$

Además, diremos que  $\phi^\mu$  es de “género espacio” cuando  $t_\mu \phi^\mu = 0$ .

## 2.2. “Cométrica” espacial $h^{\mu\nu}$ .

En el espacio-tiempo Newtoniano no puede haber un tensor métrico que describa las longitudes espaciales y que esté definido en todo el espacio-tiempo ya que la distancia espacial solo tiene un sentido invariante entre sucesos simultáneos, puesto que si no tendría sentido la idea de longitud espacial de un vector arbitrario género tiempo, lo que daría un sentido invariante a una distancia espacial entre sucesos arbitrarios. Por el contrario, lo que sí hay es una métrica definida positiva en cada subvariedad de simultaneidad  $\mathcal{S}_t$ , que está especificada para un cierto valor de  $t$ . La noción Newtoniana de simultaneidad absoluta implica la existencia de una familia  $T$  de hipersuperficies en el espacio-tiempo que no se cortan (técnicamente, hablamos de una foliación). A través de cada suceso (punto de  $M$ ) pasa un elemento de  $\mathcal{S}_t$ , y nuestra experiencia nos sugiere que la topología de estas hipersuperficies es aquella de  $\mathbb{R}^3$  en muy buena aproximación, y que su geometría es exactamente euclídea es la hipótesis que consideramos, presentando en coordenadas cartesianas la forma

$$\delta_{ij} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Si bien no existe un tensor dos veces covariante que se reduzca en cada subvariedad de simultaneidad a la métrica  $\delta_{ij}$ , sí existe un tensor dos veces contravariante que se reduce a la cométrica  $\delta^{ij}$ ; esta es la “cométrica” espacial

$$h^{\mu\nu} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

La condición de signatura para  $h^{\mu\nu}$  proviene del requerimiento de que, en cada punto, en el espacio cotangente existe una base  $\sigma_{1\mu} \dots \sigma_{4\mu}$  tal que,  $\forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $h^{\mu\nu} \sigma_{i\mu} \sigma_{j\nu} = 0$  si  $i \neq j$  y

$$h^{\mu\nu} \sigma_{i\mu} \sigma_{j\nu} = \begin{cases} 0, & \text{si } i = 1, \\ 1, & \text{si } i = 2, 3, 4. \end{cases} \quad [14]$$

Igual que antes, es posible demostrar que el único tensor dos veces contravariante e invariante frente a las transformaciones del grupo de Galileo, es decir, que satisfaga  $h^{\mu\nu} \alpha^\rho{}_\mu \alpha^\sigma{}_\nu = h^{\rho\sigma}$ , es, salvo un factor, precisamente (2.3).

Si mantuviésemos la estructura de  $(M, t_{\mu\nu}, h^{\mu\nu}, \Gamma)$ , pero permitiéramos que  $h^{\mu\nu}$  pudiese tener dependencia de las coordenadas, obtendríamos un espacio-tiempo clásico más general que el espacio-tiempo newtoniano aquí considerado, en donde cabría la posibilidad de que el 3-espacio tuviese curvatura.

### 2.3. Discusión sobre las estructuras “métricas”.

Una vez que se reduce a su forma diagonal, la “métrica” espacial presenta un único valor igual a cero correspondiente a  $h^{00}$  y, los otros tres elementos de la diagonal, son positivos, lo que muestra que esa métrica degenera en la dirección de la coordenada  $t$ . Similarmente, cuando se reduce a su forma diagonal, la “métrica” temporal dispone de tres elementos nulos, salvo el elemento  $t_{00}$  que es positivo, lo que corresponde a que esa métrica degenera sobre cada espacio de simultaneidad  $S_t$  descrito antes.

El hecho de que las dos métricas deban degenerarse en el espacio (esto es, en el anulador) de la otra puede resumirse en la expresión siguiente

$$h^{\mu\nu}t_{\mu\nu} = 0. \tag{2.5}$$

La estructura geométrica de Newton-Cartan puede visualizarse como una colección de espacios de Riemann (un espacio para cada instante de tiempo) con una “métrica” espacial en cada “time slice”, y con un campo de velocidades conectando espacios de Riemann a diferentes tiempos. Esta idea corresponde a una foliación, y no tiene cabida dentro del marco relativista. Ello es consecuencia de que en una tal teoría relativista, el espacio de simultaneidad no es el mismo para diferentes observadores, ya que la idea de simultaneidad carece de significado absoluto y es relativo al movimiento del observador en cuestión. En cambio, la noción de un tiempo absoluto en un espacio-tiempo Newtoniano sí permite una misma identificación del 3-espacio en cada instante de tiempo. Para cada hipersuperficie, hay una métrica definida positiva codificada por  $h^{\mu\nu}$ , y son difeomorfos a  $\mathbb{R}^3$ .

Finalmente, con todo este desarrollo hemos conseguido, por un lado, dar sentido geométrico al concepto de tiempo absoluto al definir  $t_{\mu\nu}$  y, mediante la elección concreta de  $h^{\mu\nu}$ , que la métrica en el 3-espacio sea Euclidea, metas que pretendíamos alcanzar al comienzo de este capítulo.

El siguiente objeto geométrico primitivo a definir será la Conexión  $\Gamma$ .

## Capítulo 3

# Versión geométrica de la Formulación convencional. Conexión inercial.

### 3.1. Principio de inercia en la Formulación convencional.

Un movimiento que se encuentre bajo la acción de cualquier tipo de fuerzas se describe por medio de una desviación con respecto a los movimientos ideales inerciales, desviación que se mide por medio de su aceleración respecto a ellos. Estos movimientos inerciales ideales aparecen como movimientos rectilíneos uniformes respecto al espacio absoluto, permitiendo así definir unos marcos de referencia (que llamaremos inerciales), y desde los cuales un movimiento inercial ideal aparece como un movimiento con aceleración nula. Si por el contrario hacemos uso de un marco de referencia no inercial, para que las ecuaciones de Newton nos aporten las aceleraciones del movimiento de la partícula test relativamente a tal marco, entonces debemos tener en cuenta las llamadas fuerzas de inercia. Durante toda esta discusión debemos recordar que se está haciendo uso del concepto pre-1900 de los términos “inercial” y “no inercial”.

Dicho esto, procedamos a introducir el Principio de inercia en la formulación convencional:

**Principio 3.1 (Principio de inercia)** *Existen ciertos marcos de referencia privilegiados denominados “inerciales” con respecto a los cuales los movimientos ideales inerciales aparecen como teniendo aceleración nula*

$$\frac{d^2 x^I(t)}{dt^2} = 0. \quad (3.1)$$

Si por el contrario describiéramos tales movimientos inerciales ideales en un marco de referencia no inercial, no adquiriría la misma expresión la ecuación de movimiento, sino que sería necesario introducir las fuerzas de inercia para poder describir el movimiento correctamente. De esta forma, la expresión de un movimiento ideal inercial en tal marco quedaría como

$$\frac{d^2 x^k(t)}{dt^2} = -w^k(t) + \{\dot{\Omega}^k_i(t) - \Omega^k_j(t)\Omega^j_i(t)\}x^i(t) + 2\Omega^k_i(t)\frac{dx^i(t)}{dt}. \quad (3.2)$$

El carácter de no inercialidad del marco de referencia queda recogido completamente por las funciones del tiempo  $w^k(t)$  y  $\Omega^k_i(t)$ , que corresponden respectivamente a la aceleración absoluta del

movimiento de traslación y al tensor velocidad angular de rotación con respecto al espacio absoluto (para más información acerca de estas funciones que intervienen en las expresiones de las fuerzas de inercia, junto con su obtención, diríjase al *Apéndice A*).

De estar sometida la partícula test a la acción conjunta de fuerzas englobadas en una única resultante  $F^k(t, \mathbf{x})$ , las dos ecuaciones del movimiento quedarían finalmente como

$$m \frac{d^2 x^k(t)}{dt^2} = F^k(t, \mathbf{x})$$

$$m \frac{d^2 x^k(t)}{dt^2} = F^k(t, \mathbf{x}) + m(-w^k(t) + \{\dot{\Omega}^k_i(t) - \Omega^k_j(t)\Omega^j_i(t)\}x^i(t) + 2\Omega^k_i(t)\frac{dx^i(t)}{dt}).$$

Vemos que las fuerzas de inercia que actúan sobre la partícula de masa  $m$  resultan ser estrictamente proporcionales a  $m$ .

De aquí surge una de las causas principales del desagrado en la formulación tradicional de la Teoría Newtoniana de la gravedad, la aparente asimetría entre los marcos de referencia inerciales y los no inerciales.<sup>1</sup>

## 3.2. Principio de inercia en la Formulación geométrica.

### 3.2.1. Principio de inercia y Conexión inercial.

De forma matemáticamente precisa podríamos recoger el contenido del Principio de inercia transcribiendo la información de la siguiente manera:

**Principio 3.2 (Principio de inercia en la formulación geométrica)**

*En el espacio-tiempo existe una conexión denominada “conexión inercial”  $\bar{\Gamma}$  cuyas autoparalelas son exactamente los movimientos inerciales ideales cuando el parámetro afín a lo largo de estas autoparalelas es el tiempo absoluto.*

Cabe recordar que las autoparalelas de una conexión son las líneas cuya descripción paramétrica  $x^\mu(\tau)$  en términos del parámetro afín  $\tau$  satisface (véase *Sección C.3*)

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \quad (3.3)$$

Procedamos a comprobar si es posible encontrar una conexión cuyas autoparalelas sean exactamente los movimientos inerciales ideales. La idea básica consiste en tomar una conexión donde todos los coeficientes sean nulos en coordenadas newtonianas relativas a un *MRI*. Con ello, si partimos de la ecuación (3.3) resulta que

- La ecuación para  $\mu = 0$  queda como

$$\frac{d^2 x^0}{d\tau^2} = 0,$$

---

<sup>1</sup>Otra de las razones es la de la posibilidad de velocidades arbitrariamente altas para la propagación de las interacciones.

de donde se deduce que  $x^0 = B\tau + A$  con  $A$  y  $B$  constantes, y que indica que salvo por un cambio de origen y de escala, el parámetro afín  $\tau$  de las autoparalelas coincide con la coordenada del tiempo universal  $t$ .

- Las ecuaciones restantes, de este modo, se escribirían como

$$\frac{d^2 x^I}{dt^2} = 0,$$

lo que traduce exactamente las condiciones que establece el Principio de inercia.

De esta manera, debemos entender que un marco de referencia inercial es aquel que, en coordenadas Galileanas, presenta todas las componentes de la conexión inercial nulas (dentro de esta interpretación), esto es

$$\bar{\Gamma}^0_{00}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \bar{\Gamma}^0_{J0}(t, \mathbf{x}) = \bar{\Gamma}^0_{0J}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \bar{\Gamma}^0_{JK}(t, \mathbf{x}) = 0 \quad (3.4)$$

$$\bar{\Gamma}^I_{00}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \bar{\Gamma}^I_{J0}(t, \mathbf{x}) = \bar{\Gamma}^I_{0J}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \bar{\Gamma}^I_{JK}(t, \mathbf{x}) = 0.$$

Un paso del marco de referencia inercial inicial a otro que se mueve respecto del primero con movimiento uniforme (y, consecuentemente, inercial también) descrito por una ecuación lineal del tipo  $x^{I'} = R^{I'}_I x^I - tv^{I'} - a^{I'}$ , con  $v^{I'}$  y  $a^{I'}$  constantes, dará como resultado unos coeficientes de la conexión para el segundo marco de referencia inercial idénticamente nulos, puesto que la ley de transformación es de la siguiente forma (diríjase a la *Sección C.1*)

$$\Gamma^{\mu'}_{\alpha'\beta'}(\mathbf{x}') = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) + \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^{\alpha'} \partial x^{\beta'}}, \quad (3.5)$$

de modo que la parte que se transforma como un tensor, por tener el marco de referencia inercial de partida todos los coeficientes de la conexión nulos, se anula, y por la linealidad de las transformaciones, no intervendrá el término inhomogéneo tampoco.

Veamos entonces cómo serían estos coeficientes para un  $MRnI$ , teniendo en cuenta que las coordenadas  $x^I$  están relacionadas con las  $x^i$  por medio de (véase *Apéndice A*)

$$x^i = R^i_I(t)(x^I - a^I(t)), \quad (3.6)$$

donde ahora tanto el movimiento de traslación como la rotación dependen arbitrariamente del tiempo (este tipo de transformaciones constituyen las transformaciones que integran el grupo de movimientos rígidos, que será estudiado más en detalle en la *Sección 5.1*).

De nuevo, haciendo uso de la ley de transformación de los coeficientes de la conexión, deducimos que

$$\bar{\Gamma}^0_{00}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \bar{\Gamma}^0_{j0}(t, \mathbf{x}) = \bar{\Gamma}^0_{0j}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \bar{\Gamma}^0_{jk}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (3.7)$$

$$\bar{\Gamma}^i_{00}(t, \mathbf{x}) = -w^i + \{\dot{\Omega}^i_l - \Omega^i_j \Omega^j_l\} x^l, \quad \bar{\Gamma}^i_{j0}(t, \mathbf{x}) = \bar{\Gamma}^i_{0j}(t, \mathbf{x}) = -\Omega^i_j, \quad \bar{\Gamma}^i_{jk}(t, \mathbf{x}) = 0.$$

Resulta que la dependencia con las coordenadas espaciales  $x^i$  aparece tan solo en el coeficiente  $\bar{\Gamma}^i_{00}$  y es lineal; el resto de la dependencia en  $\bar{\Gamma}^i_{00}$  y en  $\bar{\Gamma}^i_{0j}$  es del tiempo a través de los parámetros de “no inercialidad”.

Dicho resultado podría ser deducido de forma no directa si hubiéramos utilizado un procedimiento análogo al del caso de un *MRI*, infiriendo de igual modo que el parámetro afín de las autoparalelas es el tiempo universal  $t$ , y que las ecuaciones espaciales correspondientes se identificaban con las ecuaciones del movimiento de una partícula test en un *MRnI*. Con ello, resulta que las fuerzas de inercia están descritas por una conexión en el espacio-tiempo, siendo su mera aparición cuando trabajamos en un *MRnI* el fruto de la ley de transformación no homogénea de la conexión. De tal modo, el espacio absoluto no es más que una forma que Newton encontró para “disfrazar” a la conexión dos siglos antes de que se hubiera definido el concepto de conexión. Así, la idea matemáticamente imprecisa de espacio absoluto se sustituye por una propiedad matemática ligada a un objeto matemático preciso. Una vez que la conexión toma el papel principal, las menciones al espacio absoluto resultan innecesarias además de redundantes. Con todo esto, parece romperse la aparente asimetría entre los *MRI* y los *MRnI*. El propio Principio de inercia nos obliga a reconocer que en el espacio-tiempo Galileano debe haber una estructura geométrica adicional a las dos estructuras métricas.

### 3.3. Curvatura de la Conexión inercial.

Se es capaz de describir la curvatura de una conexión cualquiera por medio del tensor  $R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$  haciendo uso de su expresión en términos de la conexión (para ver su demostración recurrese a la exposición del *Apéndice C.4*)

$$R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} = \frac{\partial\Gamma^\mu{}_{\nu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial\Gamma^\mu{}_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\alpha}\Gamma^\lambda{}_{\nu\beta} - \Gamma^\mu{}_{\lambda\beta}\Gamma^\lambda{}_{\nu\alpha}. \quad (3.8)$$

Si partimos de las coordenadas newtonianas asociadas al *MRI* no es necesario efectuar cálculo alguno, pues en estas coordenadas y para un *MRI* los coeficientes de la conexión son todos idénticamente nulos. Por tanto, todas las cantidades del tensor de curvatura también van a ser nulas.

$$\boxed{R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} = 0} \quad (3.9)$$

Si se pretende determinar cuál es el tensor de Riemann para otro marco de referencia, se ha de hacer uso de la ley de transformación que se presenta a continuación

$$R^{\mu'}{}_{\nu'\alpha'\beta'}(\mathbf{x}') = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}(\mathbf{x}), \quad (3.10)$$

de donde deducimos sin necesidad de cálculos que todas las componentes del tensor  $R^{\mu'}{}_{\nu'\alpha'\beta'}(\mathbf{x}')$  han a ser idénticamente nulas al serlo todas las de  $R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}(\mathbf{x})$  también. La curvatura de la conexión  $\bar{\Gamma}$  se anula, lo cual se entiende como que  $\bar{\Gamma}$  es una conexión sin curvatura o lo que es lo mismo, que es una conexión llana. Desde el punto de vista de que el espacio-tiempo tenga precisamente esta conexión, está justificado decir que el espacio-tiempo no presenta curvatura y, por tanto, que resulta ser rígido, llano y pasivo ante la presencia de materia.

### 3.4. ¿Existe base empírica para la conexión inercial?

Hasta este punto, hemos conseguido transcribir de manera matemáticamente satisfactoria y consistente el enunciado de la ley de inercia Newtoniana, pero ello no deriva en que sea tal consideración físicamente satisfactoria y que se presente una base observacional sólida.

Es así, que naturalmente nos surge la duda: “¿Es posible encontrar un aparato real que mida 0 cuando el aparato sigue en el espacio-tiempo un movimiento ideal inercial y que sea diferente a 0 cuando sigue un movimiento acelerado con respecto al movimiento ideal inercial?” Tal acelerómetro absoluto mediría la aceleración respecto al espacio absoluto.

Conceptualmente, su versión mecánica más simple es un acelerómetro de bola, que consiste en una esfera hueca con una masa  $m$  interior mantenida en una posición fiducial de equilibrio mientras que el aparato no acelera. Si por el contrario aceleramos el aparato, las fuerzas de inercia desplazan la posición de equilibrio de la masa interior a un punto excéntrico.

Todo esto, sin embargo, describe el comportamiento cuando no existe campo gravitatorio. Cuando este está presente, no se comporta el dispositivo como acabamos de comentar. La cuestión es que la gravitación es universal y no se puede apantallar de ninguna manera. Si un acelerómetro está en reposo en un marco de referencia que en la mecánica Newtoniana clásica denominábamos inercial, pero en el que está presente un campo gravitatorio, se produce un desplazamiento de la masa interior hasta que las fuerzas gravitatorias sobre ella se cancelan con las de recuperación que garantizan el funcionamiento del acelerómetro. Que cuando un acelerómetro lleve a cabo un movimiento ideal inercial marque diferente de 0, conlleva a que la discusión entre si esa medida se debe a “campo gravitatorio y marco inercial” o bien “ausencia de campo y marco no inercial” no se pueda concluir mientras no se introduzcan más elementos en la discusión. Si no existiera gravitación, sería aceptable identificar los *MRI* como aquellos en que en coordenadas apropiadas la conexión del espacio-tiempo tiene todos los coeficientes nulos.

La conexión resulta ser inobservable ya que no existe manera alguna de responder observacionalmente a la pregunta: “¿Está siguiendo esta partícula una autoparalela de la conexión  $\bar{\Gamma}$  o no?”

Ya que los movimientos ideales inerciales son inobservables por principio, resultaría más satisfactorio ignorar tales movimientos e identificar movimientos en el espacio-tiempo a lo largo de los cuales la lectura de un acelerómetro real sea constantemente 0.

### 3.5. ¿Es posible discriminar entre un *MRI* y un *MRnI*?

Si midiendo las posiciones, velocidades y aceleraciones, relativamente a un marco de referencia, de un número suficiente de partículas en caída libre en el campo gravitatorio, fuera posible encontrar separadamente, por un lado, el vector intensidad de campo gravitatorio  $g^k(t, \mathbf{x})$  en cada suceso del espacio-tiempo y, por otro, las cantidades que describen la “no inercialidad” del marco de referencia  $w^k(t)$  y  $\Omega^k_j(t)$  como funciones del tiempo, entonces podríamos afirmar si tal marco de referencia es o no inercial por medio de observaciones contrastables. Sin embargo, esto no va a ser posible como vamos a tratar de aclarar a continuación.

Partamos de la ecuación del movimiento para una partícula en caída libre en un campo gravitatorio

$$m_{in} \frac{d^2 x^k(t)}{dt^2} = m_{gr} g^k(t, \mathbf{x}(t)) + m_{in} \left\{ -w^k(t) + \{ \dot{\Omega}^k_i(t) - \Omega^k_j(t) \Omega^j_i(t) \} x^i(t) + 2\Omega^k_i(t) \frac{dx^i(t)}{dt} \right\}. \quad (3.11)$$

Dividiendo entre la masa inercial llegamos a

$$\frac{d^2 x^k(t)}{dt^2} = \frac{m_{gr}}{m_{in}} g^k(t, \mathbf{x}(t)) + \left\{ -w^k(t) + \{ \dot{\Omega}^k_i(t) - \Omega^k_j(t) \Omega^j_i(t) \} x^i(t) + 2\Omega^k_i(t) \frac{dx^i(t)}{dt} \right\}. \quad (3.12)$$

Tal expresión nos permitiría determinar sin ambigüedad  $\Omega^k_j(t)$  con tan solo efectuar medidas para partículas con la misma posición inicial, pero diferentes velocidades en tres direcciones independientes.

¿Se podrá de forma análoga hacer un desarrollo que nos permita determinar  $w^k(t)$ ? La respuesta resulta ser negativa.

El Principio de Galileo podemos enunciarlo como sigue:

**Principio 3.3 (Principio de Galileo)** *En la naturaleza, el cociente  $\frac{m_{gr}}{m_{in}}$  es el mismo para todas las partículas, independiente de su naturaleza, composición química, etc.*

“Si se acepta tal principio resulta que  $g^k(t)$  así como  $w^k(t)$  son cantidades que no presentan un significado absoluto e independiente del marco de referencia. Si no fuese cierto tal principio, podríamos medir posiciones, velocidades y aceleraciones de varias partículas que tuviesen diferentes valores para el cociente  $\frac{m_{gr}}{m_{in}}$  y, con ello, se podría determinar sin ambigüedad el término  $g^k(t, \mathbf{x}(t))$ , ya que al restar por parejas las ecuaciones relativas a las diferentes partículas los términos entre los corchetes exteriores se cancelarían. Finalmente, descontando las contribuciones de los términos ya conocidos sería posible determinar  $w^k(t)$ ” argumenta M. Santander en sus notas [9].

Únicamente tiene un significado observacional inambiguo para cada marco de referencia la cantidad  $g^k(t, \mathbf{x}(t)) - w^k(t)$ , pero no como contribuye cada término. Como la ambigüedad en  $g^k(t, \mathbf{x}(t))$  está dada por  $w^k(t)$  que es una función solamente del tiempo, está claro que la dependencia de  $g^k(t, \mathbf{x}(t))$  en las coordenadas espaciales no tiene ambigüedad; de hecho, esta dependencia es la que se encuentra medida por el campo de marea (hecho que tendrá una gran relevancia en el capítulo siguiente como veremos).

Newton utilizó el hecho de que la rotación respecto al espacio absoluto sí que era detectable observacionalmente para dar apoyo a su hipótesis de espacio absoluto [17]. Sin embargo, para un movimiento general que tenga también una componente de traslación posiblemente acelerada no parece existir ningún procedimiento que determine su aceleración absoluta. Esta imposibilidad queda recogida precisamente en el Principio de equivalencia:

**Principio 3.4 (Principio de equivalencia)** *Un campo gravitatorio uniforme produce los mismos efectos observables que provoca, en ausencia de gravedad, un movimiento acelerado del marco de referencia.*

Tomando como cierto tal principio debemos irremediablemente formular las teorías de manera que no dependa de la precondition de que el marco de referencia sea o no inercial; no se debe de tener ninguna contradicción al asignar a un marco de referencia el papel de “inercial” y a otro el de “no inercial” y posteriormente cambiar los roles. A partir de las medidas de aceleraciones de partículas en caída libre en un marco de referencia del que previamente ignoramos si es o no inercial, podemos obtener cierta información parcial sobre su no inercialidad, pero en lo que concierne a la aceleración de arrastre lineal no es posible concluir nada sobre si el marco es realmente o no inercial.

La conclusión es que la auténtica naturaleza del campo gravitatorio no puede ser un campo vectorial en el espacio-tiempo, sino que inevitablemente hay que describirla conjuntamente con las fuerzas de inercia por medio de un solo objeto; tal objeto es una conexión en el espacio-tiempo, y nos permitirá describir un movimiento real en presencia de un campo gravitatorio.

### 3.6. Mecánica Newtoniana y Teoría especial de la relatividad.

Dada una teoría física, a esta le corresponde un cierto formalismo matemático en el cual la teoría es expresada. Si uno pretende comparar dos teorías, es conveniente y deseable que se encuentren ambas formuladas en un mismo lenguaje.

Así, el propósito de esta sección es el de mostrar más en detalle las similitudes existentes entre la formulación 4-dimensional de la mecánica Newtoniana con las estructuras presentes en la teoría de la relatividad especial, haciendo visible lo estrechamente relacionadas que se encuentran estas teorías. Se compararán las hipótesis geométricas subyacentes a las teorías del espacio-tiempo de estas teorías y, al mismo tiempo, se enfatizará del mismo modo cómo resulta ser más exótica, matemáticamente hablando, la formulación en el caso de la teoría Newtoniana frente a la teoría relativista.

Comencemos recordando que las ecuaciones de la mecánica Newtoniana son invariantes bajo las transformaciones del grupo de Galileo (denotadas por  $\alpha$ ), al igual que aquellas de la relatividad especial lo son bajo las transformaciones de Poincaré (denotadas por  $\Lambda$ ), siendo ambos grupos de Lie de 10 parámetros. La teoría especial de la relatividad se fundamenta en el Principio de relatividad, por el que las leyes de la física deben de ser las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales, y en la constancia de la velocidad de la luz en el vacío para todos los sistemas inerciales; todo ello provoca que el tiempo no sea absoluto. Sin embargo, este último pilar no se encuentra presente en la mecánica Newtoniana, ya que asume la posibilidad de velocidades infinitas y un tiempo absoluto.

Durante toda la discusión de esta sección se presupone la elección de unas coordenadas cartesianas asociadas a un marco de referencia inercial, con la elección de  $x^0 = t$ .

En el espacio-tiempo de la transformaciones de Lorentz, se toma el tensor  $\eta_{\mu\nu}$  como el tensor métrico, cuya conexión asociada (la de Levi-Civita), es llana, de modo que el tensor de curvatura tiene todas sus componentes nulas. A tal métrica se la denomina “métrica de Minkowski”, y nos permite definir una distancia 4-dimensional a través de

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3.13)$$

al igual que podemos definir el tiempo propio que parametriza la línea de universo de una partícula cuyas 4-coordenadas vengán denotadas por medio de  $z^\mu$  mediante esta definición

$$d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} dz^\mu dz^\nu. \quad (3.14)$$

De manera análoga, podríamos hacer las mismas identificaciones en el caso del espacio-tiempo Galileano, cambiando el tensor métrico  $\eta_{\mu\nu}$  por el tensor  $t_{\mu\nu}$  definido en (2.1), con la salvedad, fundamental ahora, de que ahora  $t_{\mu\nu}$  no es estrictamente una métrica por ser degenerada.

La 4-velocidad y la 4-aceleración pueden definirse por medio de

$$v^\mu = \frac{dz^\mu}{d\tau} \quad a^\mu = \frac{d^2 z^\mu}{d\tau^2}, \quad (3.15)$$

en ambas teorías, salvo que en el espacio-tiempo de Minkowski, al poder subir y bajar índices al ser  $\eta_{\mu\nu}$  no degenerada, podemos escribir

$$v^\mu v_\mu = 1 \quad v^\mu a_\mu = v_\mu a^\mu = 0, \quad (3.16)$$

mientras que en el espacio-tiempo Galileano estas últimas condiciones se sustituyen por

$$v^\mu t_\mu = 1 \quad t_\mu a^\mu = 0, \quad (3.17)$$

que son formalmente idénticas, donde  $t_\mu$  denota al covector gradiente de la función tiempo absoluto  $t$  que se introducía en la *Sección 2.1*. En el límite no relativista  $v_\mu$  coincide con  $t_\mu$ . Estas expresiones no hacen otra cosa más que mostrar que la 4-velocidad es un vector género tiempo y la 4-aceleración género espacio.

En la literatura, podemos encontrar dos resultados sumamente importantes [4]:

**Propiedad 3.1** *Dado un 3-vector  $\vec{B}$  definido como una cantidad cuyas componentes se transforman como  $B^m = \alpha^m_r B^r$ , podemos asociar con él un 4-vector contravariante  $B^\mu$  con tan solo incluir una primera componente igual a 0, pudiendo ser caracterizado de manera invariante por medio de  $B^\mu t_\mu = 0$ .*

Introduzcamos a continuación un lema de importancia capital para establecer una correspondencia uno a uno entre vectores galileanos covariantes y contravariantes, lo cual en general solo es posible en espacios métricos:

**Lema 3.1** *Dado un 4-vector  $B^\mu$  que satisfaga  $B^\mu t_\mu = 0$  y  $\vec{v}$  la 3-velocidad de un cierto observador, la cantidad  $B_\mu = (\vec{B} \cdot \vec{v}, -\vec{B})$  satisfaciendo  $B_\mu v^\mu = 0$  se transforma bajo el grupo de Galileo como un vector covariante. Además,  $B^\mu$  está relacionado con  $B_\mu$  mediante*

$$B^\mu = h^{\mu\nu} B_\nu \quad B_\mu = k_{\mu\nu} B^\nu.$$

donde  $k_{\mu\nu}$  es definido como

$$k_{00} = -|\vec{v}|^2 \quad k_{0r} = k_{r0} = v^r \quad k_{11} = k_{22} = k_{33} = -1. \quad (3.18)$$

Notemos que este tensor que denotamos por  $k$  es relativo a un vector  $v$  dado, que corresponde a la elección de un observador.

Gracias a este lema, podemos asociar un vector covariante  $dx_\mu$  a  $dx^\mu$  por medio de  $k_{\mu\nu}$ , pero no puede ser construido un 4-vector covariante por medio de  $\vec{z}$  o  $\vec{v}$ , luego no puede verse  $a_\mu$  como derivada de un 4-vector.

A partir de la condición impuesta para  $v^\mu$  en (3.16) (o su contraparte Galileana), derivando respecto del tiempo propio, se deduce trivialmente que  $F_\mu v^\mu = 0$ , dado que  $F_\mu = m_0 a_\mu$ , lo cual tiene una importancia crucial, pues esta condición de ortogonalidad supone que las ecuaciones de movimiento, para ser válidas, necesariamente han de satisfacer que la 4-fuerza sea ortogonal a la 4-velocidad.

La importancia de esta descripción es que permite integrar tanto las ecuaciones tridimensionales de movimiento de un solo cuerpo, así como las relaciones entre el ritmo de cambio de energía y el ritmo al que se realiza trabajo, correspondiente a  $dE/dt = \vec{F} \cdot \vec{v}$ , en donde  $E = 1/2mv^2 + cte$  y  $E = mc^2 + cte$  para el caso Newtoniano y relativista respectivamente, en un único objeto.

El caso más importante es aquel en el que las fuerzas provienen de un potencial escalar  $U$ . Al no ser el vector covariante  $\partial_\mu U$  ortogonal a  $v^\mu$ , debemos, por tanto, de tomar como ecuación del movimiento la expresión

$$m_0 a_\mu = g(\partial_\mu U - t_\mu v^\nu \partial_\nu U)$$

donde  $g$  es la constante de interacción, y que ahora sí asegura la condición de ortogonalidad (como fácilmente puede verse por mera sustitución al incluir el producto escalar entre  $v^\mu$  y  $t_\mu$ ). Aprovechando que  $v^\nu \partial_\nu U = \frac{dU}{d\tau}$ , la ecuación previa se reescribe como

$$\frac{d}{d\tau}(P_\mu + g t_\mu U) = g \partial_\mu U. \quad (3.19)$$

Por otro lado, en el marco de la relatividad espacial, dispondríamos de la siguiente expresión, que muestra una gran analogía [4]

$$\frac{d}{d\tau}(P_\mu + g v_\mu U) = g \partial_\mu U. \quad (3.20)$$

y que para el límite no relativista se reduce a la misma expresión previa como es de esperar.

Como habrá podido quedar claro después de estas pinceladas superficiales, hay un paralelismo evidente entre las expresiones provenientes de ambos marcos, siendo unas el límite de las otras para  $c \rightarrow \infty$ . La única salvedad, es la particularidad de que el tensor “métrico”  $t_{\mu\nu}$  no es una métrica en el sentido estricto de la definición, pues no cumple que tenga inversa de modo que está degenerada. Esto acarrea una serie de consecuencias, como el hecho de que no podamos subir índices como sí ocurre en el espacio de Minkowski. Para poder conseguir esto mismo, lo cual es trivial en este último caso, hemos tenido que elaborar una forma más exótica y elaborada que llevaba a la definición de un lema junto a la definición de un nuevo tensor dos veces covariante; hablamos del tensor  $k_{\mu\nu}$ .

Si introducimos la definición  $H^{\mu\nu} = c^{-2} \eta^{\mu\nu}$ , vemos que trivialmente llegamos a

$$\eta_{\mu\rho} H^{\rho\nu} = c^{-2} \delta^\nu_\mu, \quad (3.21)$$

que en el límite  $c \rightarrow \infty$  nos determina tanto (2.5) como la identificación de  $H^{\mu\nu}$  con  $h^{\mu\nu}$ . De reescribir las ecuaciones con esta matriz  $H^{\mu\nu}$  notaríamos todavía un mayor paralelismo.

## Capítulo 4

# Formulación Newton-Cartan. Conexión gravito-inercial.

Del desarrollo llevado a cabo en la *Sección 3.5* concluimos que las fuerzas inerciales vienen, necesariamente, descritas correctamente por medio de una conexión, y que las fuerzas gravitatorias consideradas aisladamente de las inerciales no pueden estar descritas por un campo vectorial. Cabe destacar que en las ecuaciones de movimiento, tales fuerzas vienen mezcladas entre sí. Por esta razón, surge una pregunta de gran interés:

¿Sería posible describir conjuntamente las fuerzas gravitatorias y las de inercia mediante una única conexión? La respuesta, adelantando resultados, es afirmativa.

Durante nuestro procedimiento, que consistirá en tomar como punto de partida las ecuaciones del movimiento de cada uno de los marcos de referencia (*MRI* y *MRnI*) reinterpretándolas de manera adecuada, realizaremos una serie de comprobaciones que nos permitirán finalmente identificar como auténticos análogos de las geodésicas en una superficie a los movimientos de caída libre (los cuales sí son observables); al tensor de marea de la *TNG* con ciertas componentes del tensor de curvatura; y al introducir tal conexión (puesto que presentará curvatura), la gravedad no como una fuerza sino como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo.

### 4.1. Análisis de la Formulación Newton-Cartan en un MRI.

#### 4.1.1. Conexión gravito-inercial en un MRI.

En esta primera parte vamos a tratar de identificar los movimientos de caída libre en un campo gravitatorio con las líneas autoparalelas de una cierta conexión  $\tilde{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta}$  con el tiempo absoluto como parámetro afín.

Para ello, debemos partir de la expresión

$$\frac{d^2 x^I(t)}{dt^2} = g^I, \quad (4.1)$$

e identificarla con (3.3).

Para llevar a cabo tal identificación, resulta conveniente separar explícitamente la ecuación con  $\mu = 0$  de las tres ecuaciones con  $\mu = I$ , y en cada una de ellas además separar los términos en una suma doble en  $\alpha$  y  $\beta$  que corresponden a las alternativas  $\alpha = 0$  ó  $J$  y/o  $\beta = 0$  ó  $K$ . Esto conduce a

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^0}{d\tau^2} + \tilde{\Gamma}^0_{00} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} + 2\tilde{\Gamma}^0_{0J} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^J}{d\tau} + \tilde{\Gamma}^0_{JK} \frac{dx^J}{d\tau} \frac{dx^K}{d\tau} &= 0, \\ \frac{d^2 x^I}{d\tau^2} + \tilde{\Gamma}^I_{00} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} + 2\tilde{\Gamma}^I_{0J} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^J}{d\tau} + \tilde{\Gamma}^I_{JK} \frac{dx^J}{d\tau} \frac{dx^K}{d\tau} &= 0. \end{aligned}$$

Si tomamos la elección

$$\boxed{\tilde{\Gamma}^0_{00}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \tilde{\Gamma}^0_{J0}(t, \mathbf{x}) = \tilde{\Gamma}^0_{0J}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \tilde{\Gamma}^0_{JK}(t, \mathbf{x}) = 0} \quad (4.2)$$

$$\boxed{\tilde{\Gamma}^I_{00}(t, \mathbf{x}) = -g^I(t, \mathbf{x}), \quad \tilde{\Gamma}^I_{J0}(t, \mathbf{x}) = \tilde{\Gamma}^I_{0J}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \tilde{\Gamma}^I_{JK}(t, \mathbf{x}) = 0.}$$

podemos hacer que la ecuación para  $\mu = 0$  se reduzca a

$$\frac{d^2 x^0(t)}{dt^2} = 0,$$

cuya solución, como ya analizamos en el anterior capítulo, daba como resultado la identificación del parámetro afín con el tiempo absoluto  $t = \tau$  mediante un cambio de origen y de escala.

Además,

$$\frac{d^2 x^I}{d\tau^2} + \tilde{\Gamma}^I_{00} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} + 2\tilde{\Gamma}^I_{0J} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^J}{d\tau} + \tilde{\Gamma}^I_{JK} \frac{dx^J}{d\tau} \frac{dx^K}{d\tau} = 0,$$

se identifica precisamente con la ecuación de caída libre (4.1).

A causa de esto, si suponemos la existencia de un campo gravitatorio, no hay ningún marco de referencia de lo que en el sentido pre-1900 llamamos inercial, en el que todos los coeficientes de la conexión  $\tilde{\Gamma}$  se anulen; la gravitación no puede ser apantallada como discutimos en la *Sección 3.4*, hecho que provocaba que no fuera observable la conexión inercial. Si no existiera gravitación  $\tilde{\Gamma}$  y  $\bar{\Gamma}$  coincidirían, pudiendo entonces ser observables los movimientos ideales inerciales.

Concluimos que las ecuaciones de las autoparalelas para la conexión (4.2) contienen a la vez la identificación del parámetro afín  $\tau$  con el tiempo absoluto  $t$  y las ecuaciones Newtonianas convencionales de caída libre. Por tanto, es posible interpretar el movimiento de partículas en caída libre en el campo gravitatorio dado con las autoparalelas de la conexión gravito-inercial  $\tilde{\Gamma}$ .

#### 4.1.2. Curvatura de la Conexión gravito-inercial en un MRI.

Como ya habíamos dicho con anterioridad, el tensor de curvatura de una conexión se calcula mediante la ecuación (3.8).

Operando, llegamos a que las componentes de la curvatura de la conexión resultan todas nulas salvo las  $R^I_{0M0}$  y  $R^I_{00M}$ , cuyo valor corresponde a

$$\boxed{R^I_{0M0} = -\frac{\partial \tilde{\Gamma}^I_{00}}{\partial x^M}.} \quad (4.3)$$

Teniendo en cuenta que  $\tilde{\Gamma}^I_{00} = -g^I$ , al derivar respecto  $x^M$ , identificamos  $R^I_{0M0}$  con las componentes del tensor de marea  $A^I_M$ , esto es

$$\boxed{R^I_{0M0} \equiv A^I_M.} \quad (4.4)$$

El tensor 3D campo de marea  $A^I_M$  se identifica con las componentes  $R^I_{0M0}$  que son las únicas no nulas del tensor 4D de curvatura de la conexión gravito-inercial del espacio tiempo newtoniano. La ausencia de campo gravitatorio corresponde de manera intrínseca a la anulación del tensor de Riemann.

Debe notarse que las componentes puramente espaciales del tensor de curvatura se anulan, lo que corresponde a que el 3-espacio es plano, tanto en la Teoría Newtoniana convencional como en la formulación de Newton-Cartan. Toda nuestra exposición se ha basado en la consideración implícita que hicimos desde el principio de que el 3-espacio es plano, de manera que este resultado debe entenderse como una validación de nuestra hipótesis inicial en el sentido de que nuestro desarrollo no nos ha obligado a cambiar nuestra suposición de partida. En la interpretación geométrica de la gravitación Newtoniana, el espacio-tiempo es curvo, pero su curvatura es pobre y se restringe a los 2-planos “tiempo-espacio”, en contraste con la Teoría de la gravedad de Einstein donde si existe además curvatura en los 2-planos “espacio-espacio”.

#### 4.1.3. Ecuaciones de desviación geodésica en un MRI. Campo de marea.

A continuación, pasemos a analizar si las ecuaciones de separación de marea corresponden a las ecuaciones de desviación geodésica. Consideremos dos autoparalelas próximas  $\tau \rightarrow x^\mu(\tau)$  y  $\tau \rightarrow x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau)$ , y veamos que ocurre al analizar la ecuación de desviación geodésica

$$\frac{D^2 \delta x^\mu(\tau)}{D\tau^2} + R^\mu_{\nu\alpha\beta} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \approx 0. \quad (4.5)$$

Para facilitar el entendimiento, procedemos desde el punto de vista 1 + 3, separando por un lado la ecuación temporal y por otro las ecuaciones espaciales.

Por un lado,

$$\frac{D^2 \delta x^0(\tau)}{D\tau^2} + \cancel{R^0_{\nu\alpha\beta}} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \approx 0 \longrightarrow 0 = 0,$$

ya que  $\delta x^0(t) = 0$  pues  $\delta x^\mu(t)$  es un vector de género espacio en el espacio-tiempo Galileano y  $R^0_{\nu\alpha\beta}$  son nulos por (4.3). Obtenemos así una identidad. Y para las ecuaciones espaciales

$$\frac{D^2 \delta x^I(\tau)}{D\tau^2} + R^I_{\nu\alpha\beta} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \approx 0,$$

donde solo los elementos  $R^I_{0J0}$  y  $R^I_{00J}$  son distintos de cero eventualmente (por la antisimetría en los dos últimos índices, son iguales salvo un cambio de signo, véase *Apéndice C.4*), y como los elementos  $R^I_{00J}$  vienen acompañados de factores que son nulos, únicamente permanece la contribución proveniente de  $R^I_{0J0}$ , con lo que al ser  $\frac{D\delta x^I(t)}{D\tau} = \frac{d\delta x^I(t)}{dt}$  debido a (C.4), la ecuación anterior se reduce simplemente a

$$\boxed{\frac{d^2 \delta x^I(t)}{dt^2} + R^I{}_{0J0} \delta x^J \approx 0.} \quad (4.6)$$

Tal expresión coincide con la ecuación del campo de marea, además de otorgar de nuevo la identificación

$$A^I{}_J \longleftrightarrow R^I{}_{0J0} := -\frac{\partial g^I}{\partial x^J}.$$

Como consecuencia, inferimos que la curvatura está ligada a la existencia de una aceleración no nula de la desviación geodésica, esto es, de la separación entre dos geodésicas cercanas.

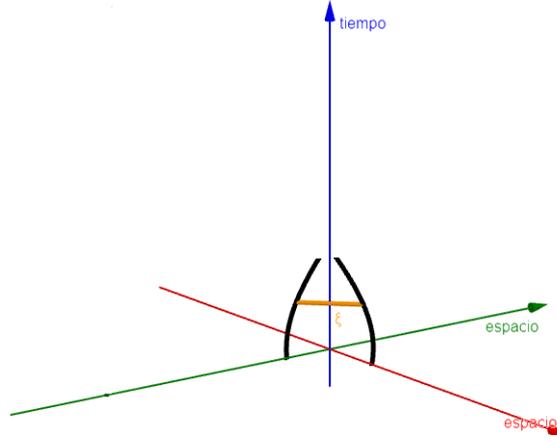


Figura 4.1: Aceleración en la separación entre dos geodésicas en el espacio-tiempo 1+2.

#### 4.1.4. Ecuaciones de campo en un MRI.

Las ecuaciones de campo relacionan la fuente de la gravedad, que es la distribución de masa, con la intensidad de campo gravitatorio. Si la fuente es una distribución continua de masa con densidad  $\rho(t, \mathbf{x})$ , el vector campo gravitatorio  $\mathbf{g}(t, \mathbf{x})$  satisface las dos ecuaciones siguientes

$$\nabla \mathbf{g}(t, \mathbf{x}) = -4\pi G \rho(t, \mathbf{x}), \quad (4.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{g}(t, \mathbf{x}) = 0,$$

si nos restringimos a un *MRI* y trabajamos con coordenadas cartesianas.

La segunda de las ecuaciones, nos indica que el campo gravitatorio es un campo irrotacional y, por ende, conservativo. En estas condiciones, localmente, se puede escribir la intensidad de campo gravitatorio como el vector asociado al covector gradiente de un cierto campo escalar  $\varphi(t, \mathbf{x})$  por medio de la cométrica espacial  $\delta^{IJ}$

$$g^I(t, \mathbf{x}) = -\delta^{IJ} \frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial x^J}.$$

A dicha función  $\varphi(t, \mathbf{x})$  se la denomina potencial gravitatorio, la cual está definida salvo una cantidad arbitraria, que debe de ser constante en cada espacio de simultaneidad, pero si bien podría depender de  $t$ . Desde el punto de vista de un *MRI*, en coordenadas cartesianas  $\mathbf{x}$ , las ecuaciones de campo pueden escribirse en términos del potencial gravitatorio  $\varphi(t, \mathbf{x})$  como

$$\nabla^2 \varphi(t, \mathbf{x}) = 4\pi G \rho(t, \mathbf{x}), \quad (4.8)$$

En términos del potencial gravitatorio, la ecuación de Poisson (4.8) debe considerarse como la única ecuación de campo gravitatorio Newtoniano.<sup>1</sup>

Si ahora introducimos el tensor campo de marea  $A^I{}_J(t, \mathbf{x}) := -\frac{\partial g^I(t, \mathbf{x})}{\partial x^J}$  en (4.8), obtenemos las siguientes expresiones

$$A^K{}_K(t, \mathbf{x}) = 4\pi G \rho(t, \mathbf{x}),$$

$$\delta^{JK} A^I{}_J = \delta^{IJ} A^K{}_K \quad ^2$$

Teniendo en cuenta que el tensor de Ricci  $R_{\nu\beta}$  se define por medio del tensor de curvatura como  $R_{\nu\beta} := R^\mu{}_{\nu\mu\beta}$  (ver *Apéndice C.4*), somos capaces de escribir en términos del tensor de Ricci y del tensor de curvatura las ecuaciones de campo en un *MRI* como sigue

$$\boxed{R_{00} = 4\pi G \rho(t, \mathbf{x})}, \quad (4.9)$$

$$\boxed{\delta^{JK} R^I{}_{0J0} = \delta^{JI} R^K{}_{0J0}},$$

y donde el resto de elementos del tensor de Ricci son idénticamente nulos.

## 4.2. Análisis de la Formulación Newton-Cartan en un MRnI.

Con el fin de abordar esta última cuestión podemos proceder a través de dos caminos: en el primero de ellos, realizaríamos un estudio análogo al llevado a cabo para los *MRI*, buscando las componentes de una conexión que garantice la identificación de la ecuación de las autoparalelas con la ecuación de caída libre en un *MRnI*. Por el segundo camino, como ya conocemos los coeficientes de  $\tilde{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\beta}$  en un *MRI*, haríamos uso de las leyes de transformación de la conexión, y obtendríamos así los coeficientes de  $\tilde{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\beta}$  en las coordenadas Newtonianas asociadas a cualquier otro marco de referencia e independientemente de las coordenadas elegidas.

Resulta más eficaz hacer uso del segundo método para así utilizar las herramientas de cálculo de la geometría diferencial, en vez de hacer un desarrollo análogo al anterior donde no se extraería información adicional a este método, además de ser más tedioso.

---

<sup>1</sup>Tan solo esta ecuación es necesaria ya que  $\nabla \times \vec{g} = -\nabla \times (\nabla \varphi) = -\{(\frac{\partial \varphi}{\partial z \partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y \partial z})\vec{u}_x + (\frac{\partial \varphi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x \partial z})\vec{u}_y + (\frac{\partial \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y \partial x})\vec{u}_z\}$  y las segunda derivadas del potencial son simétricas por el teorema de Schwarz en el intercambio de orden de derivación.

<sup>2</sup>Esta condición proviene del rotacional de  $\vec{g}$ , reflejando que el tensor campo de marea es un tensor simétrico.

### 4.2.1. Conexión gravito-inercial en un MRnI.

Para una curva, el hecho de ser autoparalela de una conexión es intrínseco y no depende del marco de referencia ni de las coordenadas que se empleen en tal marco. Como consecuencia, la identificación que así se obtiene entre movimientos en caída libre en el campo gravitatorio y autoparalelas de la conexión resulta independiente del marco y del sistema de coordenadas. Así, una vez realizada la identificación en un marco de referencia particular, la identificación se extiende automáticamente a cualquier otro marco de referencia y del sistema de coordenadas. De tal modo, no es necesario una vez que hemos completado el análisis en un *MRI* repetirlo en uno no inercial; los efectos de las fuerzas de inercia estarán descritos y codificados de manera correcta y automática por las propiedades matemáticas de la conexión.

Recordando que la ley de transformación de una conexión viene dada por (3.5); que la relación entre las coordenadas asociadas a un *MRI* y a un *MRnI* queda recogida en la expresión (3.6); y que los coeficientes de la conexión  $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\mu}$  en coordenadas Galileanas asociadas a un *MRI* están dadas por (4.2), deducimos, operando, que los coeficientes de la conexión  $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\mu}$  en coordenadas Galileanas asociadas a un *MRnI* son

$$\tilde{\Gamma}^0_{00}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \tilde{\Gamma}^0_{j0}(t, \mathbf{x}) = \tilde{\Gamma}^0_{0j}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \tilde{\Gamma}^0_{jk}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (4.10)$$

$$\tilde{\Gamma}^i_{00}(t, \mathbf{x}) = -g^i(t, \mathbf{x}) + w^i - \{\dot{\Omega}^i_l - \Omega^i_j \Omega^j_l\} x^l, \quad \tilde{\Gamma}^i_{j0}(t, \mathbf{x}) = \tilde{\Gamma}^i_{0j}(t, \mathbf{x}) = -\Omega^i_j, \quad \tilde{\Gamma}^i_{jk}(t, \mathbf{x}) = 0.$$

Si introdujéramos estos coeficientes en la expresión (3.3) determinaríamos que el parámetro afín de las autoparalelas se corresponde al tiempo absoluto y que las ecuaciones espaciales corresponden al movimiento de caída libre en un campo gravitatorio. Su comprobación es directa por mera sustitución.

Observemos que en el caso de un *MRnI* las fuerzas tienen componentes independientes de las velocidades ( $\tilde{\Gamma}^i_{00}$ ) y componentes lineales en las velocidades ( $\tilde{\Gamma}^i_{0j}$ ) que, no obstante, aparecen solamente en las aceleraciones no inerciales de Coriolis (recuérdese la ecuación (3.2)).

En un capítulo previo, elaboramos una discusión cuya conclusión indicaba que no era posible, trabajando en un marco de referencia, conocer sin ambigüedad el dato de no inercialidad  $w^k(t)$  ni, por tanto, discernir entre un marco de referencia inercial o no inercial. Tampoco era posible conocer sin ambigüedad el valor  $g^k(t)$  en un suceso dado. Por el contrario, sí que era posible asignar un valor sin ambigüedad a la combinación  $g^k(t, \mathbf{x}(t)) - w^k(t)$  en un marco dado. Resulta que tal combinación aparece precisamente en el coeficiente  $\tilde{\Gamma}^i_{00}$

$$\tilde{\Gamma}^i_{00}(t, \mathbf{x}) = -g^i(t, \mathbf{x}) + w^i - \{\dot{\Omega}^i_l - \Omega^i_j \Omega^j_l\} x^l.$$

Este coeficiente concreto de la conexión incorpora las fuerzas gravitatorias conjuntamente con las de inercia que sean independientes de la velocidad (con esto, nos referimos a la de arrastre de traslación, las de arrastre de rotación y la centrífuga). Las fuerzas “puramente” gravitatorias y las de arrastre de inercia aparecen englobadas en una única combinación  $g^k(t, \mathbf{x}(t)) - w^k(t)$ . Estamos considerando a las fuerzas gravitatorias como fuerzas descritas en el mismo lenguaje matemático que las de inercia. Con esto no estamos diciendo que sean lo mismo, sino que se describen conjuntamente. Las fuerzas gravitatorias aparecen debido a que el espacio-tiempo tiene curvatura y cuando existen tan solo pueden hacerse desaparecer a lo largo de una línea del universo particular mediante una elección

adecuada del marco de referencia, pero no pueden hacerse desaparecer en todo el espacio-tiempo a base de tales cambios. Sin embargo, las fuerzas de inercia siempre pueden hacerse desaparecer completamente en todo el espacio-tiempo a base de escoger adecuadamente un marco de referencia.

#### 4.2.2. Curvatura de la Conexión gravito-inercial en un MRnI.

El tensor de curvatura se calcula a partir de la conexión empleando la formula ya conocida (3.8). Operando, llegamos a

$$R^i{}_{0m0} = \frac{\partial \tilde{\Gamma}^i{}_{00}}{\partial x^m} - \frac{\partial \tilde{\Gamma}^i{}_{0m}}{\partial x^0} - \tilde{\Gamma}^i{}_{l0} \tilde{\Gamma}^l{}_{0m}, \quad R^i{}_{jm0} = \frac{\partial \tilde{\Gamma}^i{}_{j0}}{\partial x^m}, \quad R^i{}_{0mn} = \frac{\partial \tilde{\Gamma}^i{}_{0n}}{\partial x^m} - \frac{\partial \tilde{\Gamma}^i{}_{0m}}{\partial x^n}, \quad (4.11)$$

donde estas últimas simplificaciones se deben a que los parámetros de no inercialidad  $w^k(t)$  y  $\Omega^k(t)$  solo tienen dependencia con el tiempo y no con las coordenadas espaciales.

Hagamos ahora las cuentas pertinentes para  $R^i{}_{0m0}$

$$R^i{}_{0m0} = \frac{\partial \tilde{\Gamma}^i{}_{00}}{\partial x^m} - \frac{\partial \tilde{\Gamma}^i{}_{0m}}{\partial x^0} - \tilde{\Gamma}^i{}_{l0} \tilde{\Gamma}^l{}_{0m} = -\frac{\partial g^i}{\partial x^m} - \cancel{\Omega^i{}_m} + \cancel{\Omega^i{}_j \Omega^j{}_m} + \cancel{\Omega^i{}_m} - \cancel{\Omega^i{}_l \Omega^l{}_m},$$

(nótese que la cancelación de los términos que llevan  $\Omega$  se produce por la estructura de la expresión, independientemente de que  $\Omega$  sea nulo o no e independientemente de la dependencia temporal que pueda tener) luego,

$$R^i{}_{0m0} = -\frac{\partial g^i(t, \mathbf{x})}{\partial x^m} = \delta^{il} \frac{\partial^2 \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial x^m \partial x^l}, \quad R^i{}_{00n} = -R^i{}_{0n0}. \quad (4.12)$$

Dicho resultado también podría haberse hallado simplemente haciendo uso de la ley de transformación del tensor de curvatura (3.10).

Podemos leer directamente de la expresión del tensor de curvatura del espacio Newtoniano que el 3-espacio es plano, ya que todas las componentes del tipo  $R^\mu{}_{\nu mn}$  con  $m$  y  $n$  índices espaciales son nulas, y estas son precisamente las componentes del tensor de curvatura que regulan el cambio de un vector en transporte paralelo a lo largo de una trayectoria cerrada puramente espacial.

De las expresiones (4.12) del tensor de curvatura se concluye que aunque la intensidad de campo gravitatorio  $g^k$  aisladamente tenga una ambigüedad intrínseca y no disponga significado observable, tal ambigüedad desaparece al pasar a  $R^i{}_{0m0}$ ; la curvatura ella misma es una propiedad directamente observable y no tiene ninguna ambigüedad. Es decir, a pesar de que  $g^k$  no tenga significado directamente observable,  $R^i{}_{0m0}$  sí lo tiene. La presencia de campo gravitatorio corresponde de manera intrínseca a que el tensor de Riemann sea no nulo y su ausencia a que sea nulo.

#### 4.2.3. Ecuaciones de desviación geodésica en un MRnI. Campo de marea.

En el caso de hacer uso de un  $MRnI$ , la ecuación de la desviación geodésica adquiere términos extra comparados con los de (4.6) ya que en este caso la derivada covariante de la separación  $\delta x^i(t)$  a lo largo de la geodésica fiducial ya no coincide con la derivada ordinaria, sino que adquiere un término adicional.

Comencemos por determinar la derivada covariante (deducción de la expresión utilizada en el *Apéndice C.2*):

Al mantenerse la identidad de la coordenada  $t$  con el parámetro afín  $\tau$  así como el hecho de que la separación es un vector espacial ( $\delta x^0(t) = 0$ ), de

$$\frac{D\delta x^i}{D\tau} = \frac{d\delta x^i}{dt} + \tilde{\Gamma}^i_{\alpha\beta} \delta x^\alpha \frac{dx^\beta}{dt}$$

con tan solo hacer uso de (4.10), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{D\delta x^i}{D\tau} &= \frac{d\delta x^i}{dt} + \tilde{\Gamma}^i_{\alpha\beta} \delta x^\alpha \frac{dx^\beta}{dt} \\ &= \frac{d\delta x^i}{dt} + \tilde{\Gamma}^i_{00} \delta x^0 \frac{dx^0}{dt} + \tilde{\Gamma}^i_{j0} \delta x^j \frac{dx^0}{dt} + \tilde{\Gamma}^i_{0j} \delta x^0 \frac{dx^j}{dt} + \cancel{\tilde{\Gamma}^i_{jk} \delta x^j \frac{dx^k}{dt}} \\ &= \frac{d\delta x^i}{dt} + \tilde{\Gamma}^i_{j0} \delta x^j \\ &= \frac{d\delta x^i}{dt} - \Omega^i_{j(t)} \delta x^j. \end{aligned}$$

De este modo, solo cuando el marco de referencia no se encuentre rotando, la derivada covariante coincidirá con la derivada usual.

Acto seguido, llevamos a cabo la derivada segunda covariante

$$\begin{aligned} \frac{D^2\delta x^i}{Dt^2} &= \frac{D}{Dt} \left( \frac{D\delta x^i}{Dt} \right) \\ &= \frac{D}{Dt} \left( \frac{d\delta x^i}{dt} - \Omega^i_{j(t)} \delta x^j \right) \\ &= \frac{d^2\delta x^i(t)}{dt^2} - \dot{\Omega}^i_{j} \delta x^j - \Omega^i_{j} \frac{d\delta x^j}{dt} - \Omega^i_k \left( \frac{d\delta x^k(t)}{dt} - \Omega^k_m \delta x^m \right) \\ &= \frac{d^2\delta x^i(t)}{dt^2} - (\dot{\Omega}^i_{j} + \Omega^i_k \Omega^k_j) \delta x^j - 2\Omega^i_j \frac{d\delta x^j}{dt}. \end{aligned}$$

Al igual que ocurría en el caso de un *MRI*, solo puede aportar una contribución a (4.5) los elementos  $R^i_{0j0}$  y  $R^i_{00j}$ . Los  $R^i_{0j0}$  contribuyen acompañados de un factor  $\frac{dx^0}{dt} \delta x^j \frac{dx^0}{dt}$ , mientras que los  $R^i_{0j0}$  no lo hacen por ir acompañados de un factor  $\frac{dx^0}{dt} \delta x^0 \frac{dx^j}{dt}$ . De esta manera, la transcripción completa de la ecuación de la desviación geodésica queda como

$$\boxed{\frac{D^2\delta x^i}{Dt^2} + R^i_{0j0} \delta x^j = \frac{d^2\delta x^i(t)}{dt^2} - (\dot{\Omega}^i_{j} + \Omega^i_k \Omega^k_j) \delta x^j - 2\Omega^i_j \frac{d\delta x^j}{dt} + R^i_{0j0} \delta x^j \approx 0,} \quad (4.13)$$

ecuación que coincide completamente con la ecuación de marea para un *MRnI*

$$\frac{d^2\delta x^i(t)}{dt^2} - (\dot{\Omega}^i_{j} + \Omega^i_k \Omega^k_j) \delta x^j - 2\Omega^i_j \frac{d\delta x^j}{dt} \approx -A^i_j \delta x^j. \quad (4.14)$$

De nuevo, aparece la identificación entre el tensor de curvatura y el campo de marea

$$A^i_j \longleftrightarrow R^i_{0j0}. \quad (4.15)$$

El segundo miembro de (4.13) contiene solo el término de curvatura que corresponde al campo gravitatorio creado por las masas, mientras que los términos extra en el primer miembro se deben a que las derivadas relevantes son las derivadas “absolutas” covariantes y no las derivadas temporales “ordinarias”.

#### 4.2.4. Ecuaciones de campo en un MRnI.

Dentro de la formulación convencional ya habíamos visto cuál era la estructura de las ecuaciones de campo gravitatorio ((4.7) o bien (4.8)). Estas, se pueden escribir en términos del tensor campo de marea en un *MRnI*  $A^k{}_l(t, \mathbf{x}) := -\frac{\partial g^k(t, \mathbf{x})}{\partial x^l}$  resultando en

$$A^k{}_k(t, \mathbf{x}) = 4\pi G\rho(t, \mathbf{x}), \quad A^{ij} = A^{ji}. \quad (4.16)$$

Por medio de la identificación que hemos hecho anteriormente entre el tensor campo de marea y el tensor de curvatura, junto a la definición del tensor de Ricci, comprobamos que la ecuación de Poisson del campo gravitatorio puede expresarse como

$$R_{00} = R^\mu{}_{0\mu 0}(t, \mathbf{x}) = 4\pi G\rho(t, \mathbf{x}), \quad \delta^{jk}R^i{}_{0j0} = \delta^{ji}R^k{}_{0j0}, \quad (4.17)$$

donde para el resto de elementos del tensor de Ricci se tiene que  $R_{\mu\nu} = 0$  si  $\mu, \nu \neq 0$ . Fijémonos en que presenta esta ecuación la misma forma que en el caso de los marcos inerciales, lo que tiene una gran importancia ya que podemos considerar conjuntamente ambas expresiones eludiendo si se estaban formulando en un determinado marco o en otro.

Cuando las ecuaciones de campo se formulan para el campo gravitatorio, estas son ecuaciones diferenciales que requieren el empleo de condiciones de contorno para singularizar una solución. Por el contrario, las relaciones anteriores son locales: solo intervienen en ellas cantidades que están definidas en cada suceso del espacio-tiempo.

### 4.3. Mecánica Newtoniana y Teoría general de la relatividad.

A lo que denominamos “Teoría general de la relatividad” consiste realmente en una teoría específica que satisface tanto que las leyes de la física deben de poder ser descritas de una forma generalmente covariante, de manera que presenten la misma forma en todos los sistemas de coordenadas (a esto lo denominamos covarianza general), como que los efectos locales de un campo gravitatorio han de resultar ser equivalentes a aquellos que aparecen en la descripción de los fenómenos físicos en un marco de referencia acelerado, y donde “específica” hace referencia a que, además, esta ha de reducirse a la teoría especial de la relatividad en ausencia de campo gravitatorio. ¿Qué ocurre con la formulación Newton-Cartan?

Como ya enunciamos brevemente al final de la *Sección 3.5*, podemos formular de manera generalmente covariante cualquier teoría pues no depende del contenido físico de la misma [16], de manera que la formulación Newton-Cartan puede describirse en términos absolutos, independiente del marco de referencia escogido o de las coordenadas consideradas.

Podemos hacer a su vez una consideración referida al segundo de los pilares antes mencionados. En presencia de campo gravitatorio, los coeficientes de la conexión gravito-inercial tienen elementos no nulos. Si comparamos la expresión para la conexión gravito-inercial en un *MRI* (4.2) respecto de la de un *MRnI* (4.10) vemos como, en general, esta última es más complicada que la primera. Sin embargo, esto no impide que entre los *MRnI* sea posible encontrar ciertos marcos en los que la conexión sea especialmente simple. Estos marcos, aunque no inerciales en el contexto pre-1900, corresponden mejor, aunque sea localmente, a la idea de *MRI*. Estos son los llamados Marcos de Referencia Localmente Inerciales (MRnI). Si bien no puede responderse a la pregunta de si un marco

es o no inercial, ya que no se puede responder observacionalmente de manera inambigua (*Sección 3.4*), si es posible responder a si es o no un marco de referencia localmente inercial; para esto solo requerimos de dotar al observador de tres acelerómetros y tres girómetros montados en ejes mutuamente perpendiculares. Tal observador podría afirmar si las lecturas de la aceleración es nula en los tres acelerómetros y si la velocidad angular de rotación también sea idénticamente nula en los tres girómetros, declarándose de esta manera de observador localmente inercial. Considerando la relación entre las coordenadas de un suceso arbitrario en el *MRI* original y el nuevo *MRnr*, la conexión para un marco de referencia no rotante MRnr al que permitimos un movimiento de traslación arbitraria, eventualmente acelerada corresponde a

$$\tilde{\Gamma}^0_{\alpha\beta}(t, x) = 0, \quad \tilde{\Gamma}^i_{00}(t, x) = -g^{\hat{i}}(t, x) + w^{\hat{i}}(t), \quad \tilde{\Gamma}^i_{0j}(t, x) = 0, \quad \tilde{\Gamma}^i_{\hat{j}\hat{k}}(t, x) = 0. \quad (4.18)$$

Aprovechando la libertad en el término de aceleración de inercia  $w^{\hat{i}}(t)$ , somos capaces de anular la componente  $\tilde{\Gamma}^i_{00}$  a lo largo de una curva temporal concreta en el espacio-tiempo y solo a través de ella. Podemos entender físicamente esta anulación como el resultado de la cancelación entre las fuerzas gravitatorias y las inerciales de arrastre solo a lo largo de la línea de universo del movimiento escogido, pero no en el resto del espacio.

Por tanto, vemos que la mecánica Newtoniana es compatible con los principios básicos de la teoría general de la relatividad, de modo que ambas son en cierto sentido “generalmente relativistas”, y ciertas características que se piensan a menudo que son propias de la teoría general de Einstein tendrán su correspondiente contraparte en una teoría (general) Newtoniana debidamente reformulada (teoría de Newton-Cartan).

La motivación de esta sección es, entonces, mostrar precisamente estas analogías poco conocidas por lo general al comparar ambas teorías.

Para hacer aparente esta similitud, partamos de la ley de movimiento. Einstein estableció en su teoría que en ausencia de campos no gravitatorios, la ley de movimiento debía de venir dada por la ecuación de una geodésica, es decir, debía de satisfacer tal movimiento la expresión (3.3).

Durante nuestra discusión en la *Sección 3.6*, mencionamos la ley de movimiento en presencia de un campo que proviniese de un potencial escalar (3.19). Tal expresión podemos reescribirla en forma contravariante sin más que haciendo uso del tensor  $h^{\mu\nu}$ , y teniendo en cuenta (2.5), entonces trivialmente llegaríamos a

$$\frac{DP^\mu}{d\tau} = mh^{\mu\nu}U_{;\nu}. \quad (4.19)$$

Descrito en forma generalmente covariante, sabemos que la 4-aceleración se escribe como

$$a^\mu = \frac{Dv^\mu}{d\tau} = \frac{dv^\mu}{d\tau} + \bar{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta, \quad (4.20)$$

entonces, si consideramos el campo gravitatorio de modo que  $g = m$ , sin más que hacer uso de las dos expresiones anteriores, hallamos que

$$\frac{dv^\mu}{d\tau} + (\bar{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} - t_{\alpha\beta}h^{\mu\nu}U_{;\nu})v^\alpha v^\beta, \quad (4.21)$$

donde se tuvo en cuenta que la 4-velocidad es un vector género tiempo de módulo unidad. La forma que tenemos de considerar tal expresión como la ecuación de una geodésica es considerando  $\bar{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} - t_{\alpha\beta}h^{\mu\nu}U_{;\nu}$  en vez de  $\bar{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta}$  como la conexión afín de nuestro espacio. Así, hacemos la identificación

$$\tilde{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} = \bar{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} + \Lambda^\mu_{\alpha\beta}. \quad (4.22)$$

A pesar de que una conexión no es un tensor debido al término inhomogéneo, la diferencia de dos conexiones si lo es, de modo que podemos identificar  $\Lambda^\mu{}_{\alpha\beta}$  como un tensor 1 vez contravariante y 2 veces covariante.

Mientras que anteriormente diríamos que  $\bar{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\beta}$  daría cuenta de los efectos inerciales y  $\Lambda^\mu{}_{\alpha\beta}$  de los gravitatorios, ahora tenemos la posibilidad de decir que gracias a esta identificación, la ecuación de movimiento corresponde a la de una partícula bajo la influencia tan solo de fuerzas inerciales o bien considerar que solo actúa sobre ella fuerzas gravitatorias, de igual modo que ocurre en relatividad general. Si bien la curvatura de  $\bar{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\beta}$  es nula, esto no es generalmente cierto para  $\tilde{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\beta}$ . Es así que desde esta perspectiva, el espacio-tiempo debe tomarse como curvo y hemos conseguido describir la gravitación como una característica geométrica descrita por medio de la conexión afín  $\tilde{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\beta}$ .

Podríamos también hacer un análisis que contuviera campos no gravitatorios, pero es algo que se sale de la línea general de nuestro trabajo, de modo que si uno pretende un estudio más exhaustivo acerca del tema, podemos destacar el artículo de Havas [4].

#### 4.4. Resumen.

Con todo este desarrollo queda claro que la formulación Newton-Cartan es simplemente otra posible interpretación del campo gravitatorio Newtoniano y con el mismo contenido físico que en la formulación convencional. Todo ello ha sido posible gracias al análisis del papel que tiene necesariamente que jugar el Principio de inercia (necesidad de que en el espacio-tiempo exista una conexión) y al Principio de equivalencia débil (que sugiere muy directamente la idea de describir conjuntamente fuerzas inerciales y gravitatorias). Ha sido posible identificar los movimientos de caída libre en un campo gravitatorio con las autoparalelas de la conexión  $\tilde{\Gamma}$  definida en el espacio-tiempo. Tal conexión describe conjuntamente los efectos de las fuerzas inerciales y de las fuerzas gravitatorias. Gracias a ella podemos entender dentro de esta interpretación que el espacio-tiempo es curvo, con curvatura seccional diferente de cero según las 2-direcciones tiempo-espacio y con curvatura seccional nula según las 2-direcciones espacio-espacio y que agrupa a las dos ideas de tiempo absoluto y espacio absoluto; esto nos llevaba a afirmar que cada espacio de simultaneidad se identificaba con el espacio Euclídeo. Tal curvatura se manifiesta en la aceleración espacial entre partículas en caída libre; el campo de marea es la auténtica firma intrínseca de la gravitación. Esto es una cuestión que debería de cautivar al lector; hay una gran variedad de formas, basadas en partir de diferentes conceptos, en las que podemos expresar las leyes fundamentales para la materia gravitando, en donde todas ellas aportan predicciones físicas idénticas (una discusión sobre esto será dada en la *Sección 5.5*).

Una vez se formulan las ecuaciones en lenguaje tensorial todos los enunciados son válidos indistintamente del marco de referencia y del sistema de coordenadas (Principio de covariancia). Esto nos ha permitido comprobar también las similitudes de esta formulación con la teoría relativista, así como sus diferencias, como el hecho de que los espacio-tiempo de las teorías relativistas son métricos mientras que el espacio-tiempo de la formulación 4-dimensional de la teoría Newtoniana es solamente afín (por no tener una métrica en sentido estricto, sino solamente dos “métricas” degeneradas). Desde un punto de vista físico, esta diferencia surge de la limitación en la velocidad de una señal en las teorías relativistas. Esto último va a traer consigo profundas implicaciones, como que no podemos conocer si el espacio-tiempo es curvo a partir de  $t_{\mu\nu}$  y  $h^{\mu\nu}$ .

Las semejanzas entre el formalismo de Newton-Cartan y las teorías relativistas nos permiten poder tener un entendimiento mayor de ciertas características de la teoría de Einstein ligadas a la estructura 4-dimensional que hasta entonces parecían desconectadas de la teoría de Newton. Aparte de ese aspecto importante, mencionar también que gracias a esta semejanza somos capaces de obtener resultados aproximados de problemas de la teoría de Einstein por medio de la formulación Newton-Cartan como primer paso para tener una primera idea aproximada, en ciertos casos, de lo que podemos esperarnos.

## Capítulo 5

# Formulación Newton-Cartan en la actualidad.

Este último capítulo pretende mostrar algunas de las aplicaciones más modernas que ha encontrado la formulación Newton-Cartan, en donde queremos indicar su impacto en el área de la física de la materia condensada y las generalizaciones que son necesarias para ello, o su uso en cosmología, en donde se pueden deducir, por ejemplo, unas expresiones muy similares a las de Friedmann cuando se estudian modelos cosmológicos homogéneos e isotropos, así como predecir distintos universos de tipo Friedmann-Lemaître, como puede ser el universo de Einstein. Al mismo tiempo, mostraremos una nueva derivación de esta versión covariante de la gravedad Newtoniana basándonos en un procedimiento gauge en el grupo de Bargmann, permitiéndonos ver la gravedad como una teoría gauge. Por último, daremos una discusión acerca de la equivalencia teórica de la formulación Newton-Cartan con la teoría Newtoniana tradicional por medio de diferentes enfoques filosóficos sobre a lo que “teóricamente equivalente” se refiere, exponiendo distintas propuestas por parte de diversos filósofos de la ciencia. Además, la formulación de Newton-Cartan es objeto de una actividad destacada (véase por ejemplo [18] [19]) con muchas aportaciones novedosas que nosotros no trataremos en este escrito (como la gravedad Newton-Cartan supersimétrica, teorías de Newton-Cartan con torsión, etc).

### 5.1. Gravedad Newton-Cartan asociado al grupo de movimientos rígidos.

Una característica destacable de la formulación Newton-Cartan reside en que esta teoría, cuyo contenido geométrico es covariante Galileano, presenta una estructura similar a la teoría electrodinámica (la cual presenta simetría gauge  $U(1)$  y es covariante con respecto a la relatividad especial), cuando consideramos un conjunto de transformaciones que generalizan a las transformaciones Galileanas al introducir funciones que dependen arbitrariamente del tiempo. Cuando consideremos tales transformaciones dependientes del tiempo, haremos a nuestra teoría dinámica, provocando que el potencial escalar sea dependiente del tiempo y que surja un potencial vector también dependiente del tiempo, paralelamente a lo que ocurre en el paso de la electrostática cuando aparecen fenómenos electrodinámicos y requerimos de la introducción de un potencial vector. Ciertas diferencias entre marcos de referencia no inerciales con aceleración lineal o en rotación serán visibles durante la discusión.

Veamos entonces de que manera podemos llegar a estas conclusiones partiendo de la introducción de un nuevo grupo de transformaciones.

El grupo de movimientos rígidos  $\mathcal{G}$  es un grupo de Lie de dimensión infinita que contiene al grupo de Galileo  $G$  como un subgrupo y que, por tanto, permite extenderlo para incluir transformaciones entre todos los marcos de referencia no inerciales. El papel destacado en la gravitación newtoniana de este grupo, que no tiene análogo en la teoría relativista, ha sido objeto de análisis en trabajos de varios autores; aquí seguimos a [20].

Podemos definirlo como sigue [21]:

**Definición 5.1 (Grupo de movimientos rígidos  $\mathcal{G}$ )** *Considérese un conjunto de transformaciones cuya acción sobre un punto del espacio-tiempo  $(\mathbf{x}, t)$  es*

$$(R, \mathbf{a}, b) : \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(t)\mathbf{x} + \mathbf{a}(t) \\ t + b \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

donde  $R$  y  $\mathbf{a}$  son rotaciones y traslaciones espaciales dependientes del tiempo de manera arbitraria, y  $b$  traslaciones temporales. El grupo de movimientos rígidos  $\mathcal{G} := (R, \mathbf{a}, b)$  es un grupo de simetrías con regla de composición

$$(R_2, \mathbf{a}_2, b)(R_1, \mathbf{a}_1, b) = ((\Lambda_{b_1} R_2)R_1, (\Lambda_{b_1} R_2)\mathbf{a}_1 + \Lambda_{b_1}\mathbf{a}_2, b_1 + b_2), \quad (5.2)$$

en donde  $\Lambda$  hace referencia a un operador de desplazamiento que actúa según  $f(t) \rightarrow (\Lambda_b f)(t) = f(t + b)$ . De la regla de composición se deduce que el elemento inverso para un elemento dado del grupo presenta la forma

$$(R, \mathbf{a}, b)^{-1} = (\Lambda_{-b} R^{-1}, -\Lambda_b(R^{-1}\mathbf{a}), -b). \quad (5.3)$$

Recuperando los coeficientes de la conexión dados por (4.10), pero esta vez, en vez de dados en términos de los parámetros de no inercialidad  $\mathbf{w}(t)$  y  $\Omega(t)$ , descritos a través de la rotación y de la traslación espacial directamente, estos quedan como

$$\tilde{\Gamma}_{00}^i = \delta^{ki} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + R^{ik} \ddot{R}_{jk} x^j - R^{ik} \frac{d^2}{dt^2} (R_{jk} a^j) \quad (5.4)$$

$$\tilde{\Gamma}_{0j}^i = \tilde{\Gamma}_{j0}^i = R^{ik} \dot{R}_{jk}. \quad (5.5)$$

Vemos como ahora no es posible escribir  $\vec{g}$  como un simple gradiente de un potencial escalar. Por el contrario, resulta ser una combinación de un gradiente de un potencial escalar  $\varphi'$  junto a la derivada temporal de un potencial vector que denotaremos por  $\vec{W}'$ .

Todo esto queda recogido en las siguientes líneas junto a sus correspondientes definiciones [20]:

$$g^i = -\delta^{ij} \partial_j \varphi' - \partial_t W^i \quad (5.6)$$

$$\varphi' = \varphi - x^l R_l^k \frac{d^2}{dt^2} (R_{jk} a^j) \quad (5.7)$$

$$W^i = \int dt' R^{ik} \ddot{R}_{jk} x^j. \quad (5.8)$$

Vemos que las componentes de la conexión que contienen el efecto Coriolis son las que definen el potencial vector magnético y las componentes de la conexión que encapsulan a los términos centrífugos y de Euler son los que constituyen el campo gravitatorio.

Inmediatamente después de introducir el potencial vector surge el campo “magnético” gravitacional  $\vec{h}'$  por medio de la definición usual

$$h^i = \varepsilon^i{}_{jk} \partial^j W^k. \quad (5.9)$$

Directamente,  $\tilde{\Gamma}^i_{00}$  ya está descrito en términos de los potenciales, lo cual también es posible para las componentes  $\tilde{\Gamma}^i_{0j}$  de la conexión sin más que hacer uso de una identidad proveniente del hecho de que las matrices de rotación sean ortogonales, con lo que se cumple  $R_{ik}R_j{}^k = \delta_{ij}$ . En términos de los potenciales las componentes  $\tilde{\Gamma}^i_{0j}$  se escriben como

$$\tilde{\Gamma}^i_{0j} = -\frac{1}{2}\varepsilon^i{}_{jk}\varepsilon^k{}_{lm}\partial^l W^m = -\frac{1}{2}\varepsilon^i{}_{jk}h^k.$$

Una vez que se han establecido estas identificaciones, la ecuación de movimiento de una partícula no relativista en caída libre en un marco de referencia no inercial presenta una estructura análoga a la ecuación de movimiento de una partícula cargada bajo la fuerza de Lorentz, esto es

$$\frac{d^2\mathbf{x}^i}{dt^2} = g^i + \varepsilon^i{}_{jk}v^j h^k, \quad (5.10)$$

salvo que ahora la constante de acoplamiento es la masa en vez de la carga eléctrica. Veamos entonces que en la forma general de la formulación de Newton-Cartan puede aparecer una componente “magnética” del campo gravitatorio que es precisamente la que se encuentra en el término que contiene a la velocidad.

El paralelismo con la teoría electromagnética no queda ahí. De las propias relaciones de los campos con los potenciales (5.6) y (5.9) se garantizan automáticamente las dos ecuaciones de Maxwell homogéneas para los campos gravitatorio y magnético

$$\partial_i h^i = 0, \quad (5.11)$$

$$\varepsilon^i{}_{jk}\partial^j g^k = -\partial_{t'} h^i. \quad (5.12)$$

Las leyes de Ampere-Maxwell y la ley de Gauss se introducen con el propósito de definir una densidad de materia  $\rho'_{Gauss}$  y una densidad de corriente de materia  $J^i$ , las cuales se leen como [20]

$$\partial_i g^i = -4\pi\rho'_{Gauss}, \quad (5.13)$$

$$\varepsilon^i{}_{jk}\partial^j h^k = -4\pi J^i + \partial_{t'} g^i, \quad (5.14)$$

en donde el signo se ha escogido teniendo en cuenta que la carga gravitatoria (la masa) atrae en vez de repeler. Estas dos últimas leyes garantizan la ecuación de continuidad  $\partial_i J^i + \partial_{t'} \rho'_{Gauss} = 0$ .

A partir de las leyes inhomogéneas uno puede obtener las expresiones explícitas para las densidades de corriente de materia y la densidad de materia, tomando la forma siguiente

$$\rho'_{Gauss} = \rho - \frac{1}{4\pi}\dot{R}^{lk}\dot{R}_{lk} \quad (5.15)$$

$$J^i = -\frac{1}{4\pi}\partial_{t'}\Gamma^i{}_{00}. \quad (5.16)$$

En la *Sección 4.2.4* se comprobó ya que la ecuación de campo de Ricci  $R_{00} = 4\pi G\rho$  que describía la curvatura del espacio-tiempo Galileano era un escalar bajo  $\mathcal{G}$ ; que la curvatura del espacio-tiempo Galileano esté determinada por la densidad de materia se mantiene válida tanto en un marco de referencia inercial como en uno no inercial. Un matiz que no debe pasar por alto es que tanto en un marco de referencia inercial como en un marco de referencia no inercial con aceleración lineal, se satisface que  $\rho = \rho_{Ricci} = \rho_{Gauss}$ <sup>1</sup>, de modo que podemos escribir entonces  $-\partial_I g^I = R_{00} = 4\pi G\rho$

---

<sup>1</sup> $\rho$  hace referencia a la densidad de masa, y los subíndices en el resto denota la ecuación en la que se definen, bien por medio de la ecuación de Ricci o bien por medio de la ley de Gauss.

en el MRI y *mutatis mutandis* en el MRnI con aceleración lineal. Por el contrario, en un MRnI que presente rotación se tiene que  $\rho = \rho_{Ricci} \neq \rho_{Gauss}$ . Esto ilustra que existe una diferencia crucial entre aceleraciones lineales y aceleraciones rotacionales, y que desde un punto de vista gravitatorio, existe una íntima conexión entre marcos de referencia inerciales y marcos de referencia no inerciales con aceleración lineal.

Además, mencionemos que no existen densidades de materia ni densidades de carga físicas que puedan generar campos gravimagnéticos equivalentes a los que aparecen en un marco de referencia rotando. Veamos por qué de manera intuitiva:

En la expresión para  $\rho_{Gauss}$  aparece  $\rho$  que sí es la densidad de materia real/física que hay en el universo. Si consideramos el término  $\dot{R}^{lk}\dot{R}_{lk}$  que es espacialmente constante, la masa asociada  $\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \rho'_{Gauss}$  divergiría. De manera análoga, en la expresión para  $J^i$  aparece un término que crece con la distancia y otro término que es espacialmente constante, luego  $\oint_{\partial\mathbb{R}^3} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}$  también diverge.

Si considerásemos aceleraciones lineales tan solo, obtendríamos

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^i{}_{00} &= \delta^{ij} \frac{\partial \varphi'}{\partial x^j} - \ddot{a}^i, \\ \tilde{\Gamma}^i{}_{0j} &= 0, \\ \varphi' &= \varphi - \mathbf{x}' \cdot \ddot{\mathbf{a}} \\ W^l &= 0, \\ \rho_{Gauss} &= \rho = \rho_{Ricci},\end{aligned}$$

donde vemos que aunque el potencial escalar cuenta con un término adicional, al ser lineal en la posición, la ecuación de Poisson no se va a ver afectada. De estas expresiones directamente se lee su particularización al caso de transformaciones Galileanas.

## 5.2. Cosmología Newton-Cartan.

Esta sección pretende mostrar qué grado de aproximación presenta la cosmología de Newton-Cartan a la hora de modelar parcialmente los resultados ya conocidos en la relatividad general, puesto que en aquellos en los que se pueda reproducir de forma satisfactoria las conclusiones que se derivan de esta última, podremos garantizar que los cálculos serán apreciablemente más simples, disponiendo así de una herramienta de cálculo muy eficaz. Es de esta manera que vamos a citar algunos de estos resultados más importantes, haciéndose así visible el alcance que nos otorga esta teoría a la hora que prever las soluciones que aporta la relatividad general.

Consideremos el espacio-tiempo Galileano  $(M, h^{\mu\nu}, t_\mu)$  con  $t_{\mu\nu} = t_\mu \otimes t_\nu$  y sea  $u$  un campo vectorial de tipo tiempo y módulo unidad, que vamos a entender como el campo de observadores fundamentales del modelo.

Para elaborar un modelo de materia, vamos a asumir que es un fluido ideal con 4-velocidad  $u$ .

Resulta de utilidad introducir el operador de proyección  $P : T_x M \rightarrow S_x := \ker t_\mu$ , cuyas componentes resultan en

$$P^\nu{}_\mu = \delta^\nu{}_\mu - t_\mu u^\nu,$$

y reúne diversas identidades de las cuales no hablaremos. El interés de este objeto reside en la posibilidad de definir unas nuevas cantidades análogas a las introducidas en el contexto de la relatividad general, que reciben el nombre de vorticidad  $\Omega^{\alpha\beta}$ , cizalladura  $\sigma^{\alpha\beta}$ , esfuerzo  $\Theta^{\alpha\beta}$  y ritmo de expansión  $\theta$ , que definimos en el *Apéndice D.1* además de dar sus componentes. Siguiendo un procedimiento análogo al llevado a cabo en relatividad general [24], se puede derivar la ecuación de Raychaudhuri, donde considerando como ecuación de campo  $R_{\mu\nu} = 4\pi G\rho t_\mu t_\nu - \Lambda t_\mu t_\nu$  ( $\Lambda$  tiene unidades de  $T^{-2}$ ) siendo  $\rho := t_\mu t_\mu T^{\mu\nu}$ , con  $T^{\mu\nu}$  el tensor (newtoniano) de energía momento, la ecuación queda como

$$\text{div}(\nabla_u u) = \nabla_u \theta + \frac{1}{3}\theta^2 + h^{\mu\alpha} h^{\nu\beta} (\sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\mu\nu} - \Omega_{\alpha\beta} \Omega_{\lambda\tau}) + 4\pi G\rho - \Lambda. \quad (5.17)$$

Considerando el tensor de energía momento del fluido ideal como  $T = \rho u \otimes u + ph$ , de su requerimiento de divergencia covariante nula, se deduce que

$$\text{div}(\rho u) = 0, \quad \nabla_u u = -\frac{1}{\rho} \text{div}(ph), \quad (5.18)$$

tratándose la primera expresión de una ley de conservación que en el caso relativista no se da separadamente para la masa.

Vamos ahora a tratar de encontrar una solución estática en la teoría de Newton-Cartan, lo que significa que  $\Omega^\sharp (= \Omega^{\mu\nu} \partial_\mu \otimes \partial_\nu)$ <sup>2</sup>, con el fin de dar un ejemplo de la utilidad de la ecuación de Raychaudhuri, así como compararla con su análoga relativista. Asumiendo que el tensor de energía momento no presenta el término que va con la presión, lo que nos lleva a que la segunda de las ecuaciones (5.18) se anule, e invocando la ecuación de Raychaudhuri (5.17), obtenemos

$$4\pi G\rho = \Lambda - h^{\mu\alpha} h^{\nu\beta} \sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\theta^2. \quad (5.19)$$

Evidentemente, si  $\Lambda = 0$ , no hay solución, pues no hay densidades de materia negativas, y para  $\Lambda > 0$ , encontraríamos que [22]

$$\rho = \frac{\Lambda}{4\pi G}, \quad (5.20)$$

lo que define el universo de Einstein (en la contraparte relativista, esta expresión solo se diferencia en un factor  $c^2$  que aparece que aparece si tomamos  $\Lambda$  con dimensiones  $L^{-2}$ , en vez de tomarla, como aquí se está haciendo con dimensión  $T^{-2}$ ).

Por último, vamos a tratar de derivar las ecuaciones de Friedmann, para lo cual si consideramos las expresiones (5.18) descritas en coordenadas adaptadas, estas se transcriben de esta otra manera

$$\dot{\rho} + (\rho u^i)_{,i} + \frac{1}{2} h^{ij} h_{ij} \rho = 0, \quad \dot{u}^i + u^j u^i_{,j} + 2h^{ij} \kappa_{0j} + 2u^j \left( \frac{1}{2} h^{ik} \dot{h}_{kj} + h^{ik} \kappa_{jk} \right) + \frac{1}{\rho} h^{ij} p_{,j} = 0. \quad (5.21)$$

Asumamos que tanto  $\rho$  como  $p$  son, en coordenadas adaptadas, tan solo funciones de  $t$ . Entonces, la segunda de las ecuaciones (5.18) implica que  $\nabla_u u = 0$ , de modo que de la primera de las ecuaciones (5.21) se deduce trivialmente que  $u^i_{,i}$  solo depende del tiempo, lo que supone que la ecuación (5.17) en coordenadas adaptadas se reduzca a

$$\dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 + \sigma^{ab} \sigma_{ab} - \Omega^{ab} \Omega_{ab} + 4\pi G\rho - \Lambda = 0. \quad (5.22)$$

---

<sup>2</sup>El símbolo  $\sharp$  pretende denotar la acción de la co-métrica  $h$  sobre  $\Omega$ .

También, debemos de introducir una expresión proveniente de (5.21) así como de la expresión del ritmo de expansión en coordenadas adaptadas, que resulta

$$\dot{\rho} + \theta\rho = 0. \quad (5.23)$$

Con todo esto, si consideramos los modelos Friedmann-Lemaître de homogeneidad e isotropía (principio cosmológico), con los ansatz

$$h_{ij} = a^2(t)\delta_{ij}, \quad \Omega^\sharp = 0,$$

donde  $a(t)$  es un factor de escala, así como las expresiones siguientes [22]

$$\theta = 3\frac{\dot{a}}{a}, \quad \sigma_{ab} = 0, \quad \ddot{\theta} = 3\frac{\dot{a}a - \dot{a}^2}{a^2}, \quad (5.24)$$

entonces (5.22) y (5.23) se reducen a

$$0 = \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho \quad (5.25)$$

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}.$$

Como la solución de la primera de las ecuaciones es  $\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3$  como se puede comprobar rápidamente, una vez introducida en la segunda, se deduce

$$\dot{a}^2 + k = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 + \frac{\Lambda}{3}a^2, \quad (5.26)$$

en donde  $k$  aquí aparece como una constante de integración, que puede reducirse a los valores 1,0,-1 y que dimensionalmente debe ser  $T^{-2}$ . Fijémonos que las ecuaciones (5.25) y (5.26) representan las ecuaciones de Friedmann.

Las versiones relativistas son

$$\dot{a}^2 + kc^2 = \frac{8\pi G\rho a^2}{3} + \frac{\Lambda c^2 a^2}{3} \quad (5.27)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right) + \frac{\Lambda c^2}{3},$$

de donde podemos ver su gran similitud. En la comparación con la versión relativista debe tenerse en mente esta diferente elección de las cantidades  $k$  y  $\Lambda$  debida a que dimensionalmente son distintas.

Con todo esto, hemos conseguido dar una primera idea de la forma de tratar la cosmología en un contexto no relativista a través de la formulación Newton-Cartan, pudiendo derivar unas expresiones con gran analogía a las que aporta la relatividad general y por medio de las cuales podemos hacer una derivación análoga de los resultados que esta aporta, viendo que son igualmente aplicables. Por ejemplo, podemos remarcar que somos capaces de seguir definiendo una densidad de masa crítica  $\rho_c$  para la cual, la ecuación de Friedmann (5.26) nos asegura que el universo es plano puesto que  $k = 0$  y, por tanto, para valores  $\rho < \rho_c$  y  $\rho > \rho_c$  tendríamos universos abiertos-hiperbólicos o bien cerrados-esféricos respectivamente.

También, si consideramos que el universo permanece inmóvil ( $\ddot{a} = 0$ ), de la primera ecuación de Friedmann (5.25) se obtiene precisamente el valor (5.20) que habíamos hallado durante el estudio del universo de Einstein, puesto que describe un escenario estático.

### 5.3. Espacio-tiempo de Bargmann.

Actualmente, en el campo de la física de la materia condensada, a la hora de describir ciertos fenómenos (como puede ser en el estudio del efecto Hall cuántico [7] o de los fenómenos de transporte [25]), está siendo bastante fructífero el uso de modelos muy directamente relacionados con la formulación de Newton-Cartan, en los que se trata el acoplo de la materia descrita en una teoría cuántica y en un contexto no relativista. Para esto, resulta necesario disponer de un espacio-tiempo más general que incluya la estructura de Newton-Cartan ya anteriormente explicada; es así como deberemos de construir el espacio-tiempo de Bargmann, el cual además de la estructura de Newton-Cartan dispondrá de un campo gauge adicional el cual se acoplará a la masa. Es de esta manera, que es esta sección vamos a ilustrar cómo se construye este espacio-tiempo más general, el cual es consistente con la invarianza local Galileana y que, además, soporta campos de materia masiva.

Mencionemos antes la sutileza de que, durante esta discusión, estaremos considerando un contexto cuántico al que hemos ascendido nuestra teoría, donde se consideran, por tanto, los campos cuánticos (fermiónicos) que describen a la materia. El grupo de Bargmann que introduciremos solo aparece cuando consideramos una teoría cuántica. El caso más sencillo atañe a una partícula sin espín, cuya función de onda simplemente consta de una amplitud: a causa de la naturaleza cuántica del problema, tales funciones de onda no son reales sino que son funciones complejas, de modo que, ante una transformación de Galileo, la función de onda cambia por una cierta fase para, de esta manera, garantizar la invarianza de la ecuación de Schrödinger para una partícula sin espín manteniendo, además, la densidad de probabilidad inalterada (y por ello las predicciones físicas). Este factor de fase, que incluye la masa de la partícula, es el que se asociará con el grupo  $U(1)_M$  y constituirá, como veremos, la extensión central del grupo de Galileo.

Comencemos primero por definir el grupo de Bargmann: en un espacio-tiempo de  $d$  dimensiones espaciales, el grupo de Bargmann presenta la estructura que se muestra a continuación

$$Barg(1, d) := (SO(d) \times \mathbb{R}^d) \times (\mathbb{R}^{1+d} \otimes U(1)_M), \quad (5.28)$$

donde  $\times$  hace referencia al producto semidirecto, en donde el subgrupo normal es  $\mathbb{R}^{1+d} \otimes U(1)_M$ , y donde  $SO(d)$  es el grupo de rotaciones espaciales,  $\mathbb{R}^d$  denota a los boost Galileanos,  $\mathbb{R}^{d+1}$  las traslaciones espacio-temporales y, por último,  $U(1)_M$  es la extensión central correspondiente a la masa. Vemos entonces como este grupo integra al grupo de Galileo que es el  $SO(d) \times \mathbb{R}^d$ . La extensión central del grupo de Galileo por el grupo de simetría  $U(1)_M$  para la masa es precisamente el grupo de Bargmann. Podemos notar en esta definición un cierto parecido al grupo de Poincaré, que en términos del producto semidirecto toma la expresión  $Poin(1, d) = SO(1, d) \times \mathbb{R}^{1+d}$ , en el que  $SO(1, d)$  es el grupo de Lorentz y  $\mathbb{R}^{1+d}$  es el subgrupo normal.

La estructura de grupo de  $Barg(1, d)$  admite una representación extendida en  $\mathbb{R}^{1+d} \oplus \mathbb{R}$  como [26]

$$\Lambda^I{}_J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k^a & R^a{}_b & 0 \\ -\frac{1}{2}k^2 & k_c R^c{}_b & 1 \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

donde  $a, b, c \dots$  son los índices abstractos en  $\mathbb{R}^d$  y  $I, J \dots$  son los índices en  $\mathbb{R}^{1+d} \oplus \mathbb{R}$ . Por otro lado,  $\mathbf{R}$  denota a las rotaciones y  $k^a$  es el parámetro de los boosts.

Dentro de los objetos invariantes frente a  $Gal(d)$  tenemos un tensor  $h^{AB} \in \mathbb{R}^{1+d} \odot \mathbb{R}^{1+d}$ , una métrica extendida  $g^{IJ} \in (\mathbb{R}^{1+d} \oplus \mathbb{R}) \odot (\mathbb{R}^{1+d} \oplus \mathbb{R})$  y un covector temporal  $t_A \in (\mathbb{R}^{1+d})^*$  entre otros.

Sus formas matriciales son

$$h^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta^{ab} \end{pmatrix}, \quad g^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \delta^{ab} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_A = (1 \ 0). \quad (5.30)$$

Fijémonos que, si bien  $h^{AB}$  no es invertible,  $g^{IJ}$  si lo es, con lo que corresponde a una métrica en  $\mathbb{R}^{1+d} \oplus \mathbb{R}$  que nos permite subir y bajar (mediante su inversa) índices. Se cumple además que  $t_A h^{AB} = 0$  que era la condición que nos encontrábamos en el espacio-tiempo Galileano. Cabe mencionar también otro objeto invariante frente a  $Gal(d)$  que es el operador de proyección  $\Pi : \mathbb{R}^{1+d} \oplus \mathbb{R}^{1+d}$ , el cual viene descrito mediante  $\Pi^A{}_I = (\delta^A{}_B \ 0)$ .

Nuestro siguiente paso es el de construir el espacio de Bargmann sobre una variedad  $M$   $(1+d)$ -dimensional con invarianza local ante  $Gal(d)$ . Con este fin, introducimos un co-frame<sup>3</sup> extendido  $e^I$  como una 1-forma sobre  $M$  valorada en el subgrupo normal  $\mathbb{R}^{1+d} \oplus \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{1+d} \otimes U(1)_M$  y una conexión **gal**-valuada  $\omega^I{}_J$ .

El co-frame extendido tiene la descomposición

$$e^I = \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ e^a \\ \mathbf{a} \end{pmatrix},$$

que define tanto al campo gauge de masa  $\mathbf{a}$ , como al co-frame espacial  $e^a$  y la forma temporal  $\mathbf{t} = t_I e^I$  ( $t_I$  es el covector temporal extendido gracias al operador de proyección).

Por otro lado, la conexión-**bar** puede ser descompuesta, bien en su representación fundamental  $\omega^A{}_B$  o en la extendida  $\omega^I{}_J$  como

$$\omega^A{}_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{\omega}^a & \omega^a{}_b \end{pmatrix}, \quad \omega^I{}_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \bar{\omega}^a & \omega^a{}_b & 0 \\ 0 & -\bar{\omega}_b & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.31)$$

las cuales definen la conexión de boost  $\bar{\omega}^a$  y la conexión de espín  $\omega^a{}_b$ , mediante las cuales podemos realizar el transporte paralelo de espinores (los campos de materia son complejos, de manera que tiene un espín distinto de cero, lo que conlleva que las partículas que describen tales campos tengan espín no nulo como ocurre con las partículas que conforman la materia (fermiones), así que vendrán descritas estas excitaciones por medio de espinores, como ya sabemos).

Para justificar la presencia del campo auxiliar  $\mathbf{a}$ , deberíamos de considerar el comportamiento de campos de materia masiva que habiten en un espacio-tiempo de Bargmann. Si hiciéramos esto, veríamos como la masa de los campos se acoplaría de forma directa con  $\mathbf{a}$  actuando como un campo gauge para la masa. Podemos mencionar que, si quisiéramos introducir el electromagnetismo en nuestra discusión, requeriríamos de campos de materia cargados por medio de un grupo adicional  $U(1)_Q$ .

Para una lectura más en profundidad acerca de estos temas recomendamos al lector dirigirse a las siguientes referencias [26] - [27].

---

<sup>3</sup>En el contexto de variedades, un “frame” para una variedad  $M$  es una colección  $(X_1, \dots, X_n)$  de campos vectoriales suaves que están definidos en un abierto  $U \subseteq M$  tal que para cada  $p \in U$ , la colección  $(X_1(p), \dots, X_n(p))$  forma una base de  $T_p M$ . Similarmente, un “co-frame” es una colección de 1-formas suaves  $(\omega^1, \dots, \omega^n)$  tal que para  $p \in U$ , la colección  $(\omega^1(p), \dots, \omega^n(p))$  es una base de  $T_p^* M$ .

La transformación del co-frame extendido bajo un boost local de parámetro  $k^a$  resulta en

$$\begin{pmatrix} \mathbf{n} \\ e^a \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{n} \\ e^a - k^a \mathbf{n} \\ \mathbf{a} + k_a e^a - \frac{1}{2} k^2 \mathbf{n} \end{pmatrix}, \quad (5.32)$$

mientras que la de la conexión es

$$\omega^a{}_b \mapsto \omega^a{}_b, \quad \bar{\omega}^a \mapsto \bar{\omega}^a + dk^a + \omega^a{}_b k^b \quad (5.33)$$

También podemos introducir objetos como la curvatura o la torsión, pudiendo ser esta última descompuesta en una torsión temporal, una torsión espacial y una torsión de masa, pero no entraremos en detalles y nos bastará con mencionarlo para nuestra exposición.

Sobre  $M$ , se introduce el frame  $e^\mu{}_A = (v^\mu e^\mu{}_a)$  como campos vectoriales evaluados en  $(\mathbb{R}^{1+d})^*$  por medio de  $e^\mu{}_A e^A{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$ , donde bajo las transformaciones del grupo de Bargmann este objeto es covariante mientras que los  $v^\mu$  no lo son, sino que se transforman según los boosts de Milne ya que en espacios-tiempos no relativistas no puede haber un campo vectorial privilegiado y debemos tener invarianza frente a un cambio de  $v^\mu$ .

Con todo esto, somos capaces ya de definir unos tensores en el espacio-tiempo de Bargmann y que estén relacionados con las propiedades que veíamos en el espacio-tiempo de Newton-Cartan. Así, por ejemplo, podemos definir una métrica inversa en  $M$  mediante

$$h^{\mu\nu} := h^{AB} e^\mu{}_A e^\nu{}_B$$

la cual es invariante frente a transformaciones de  $Gal(d)$  locales, que satisface además la condición  $t_\mu h^{\mu\nu} = 0$ .

Usando  $\omega^A{}_B$  podemos definir un operador derivada covariante sobre  $M$  según

$$\nabla_\mu e^A{}_\nu := -\omega_\mu{}^A{}_B e^B{}_\nu. \quad (5.34)$$

Como tanto  $t_A$  como  $h^{AB}$  son covariantemente constantes, esta derivada covariante aplicada a las estructuras anteriores otorga un resultado nulo.

De estas indicaciones dadas, queda claro que el espacio-tiempo de Bargmann que hemos construido es un espacio-tiempo de Newton-Cartan. Una descripción bastante más detallada de las aplicaciones de este tipo de modelos en física del estado sólido excede por completo al ámbito de nuestro trabajo, y puede ampliarse en la bibliografía dada.

## 5.4. Introducción a la Teoría Newton-Cartan como Teoría Gauge.

Lo que se va a dar a continuación es una idea resumida, en la que no se pretende dar una descripción detallada de los conceptos matemáticos que residen en ella y que se darán por conocidos para no salirnos de la línea general de trabajo, sobre el sentido en el que la formulación Newton-Cartan puede ser vista como una teoría gauge, de manera en cierto modo análoga a como se puede obtener la relatividad general.

Para ello, inicialmente se ha de extender el álgebra de Galileo y declarar un gauge en el álgebra de Bargmann  $\mathfrak{b}(d,1)$  previamente mencionado. Los generadores corresponden a las traslaciones temporales ( $H$  con parámetro  $t$ ), traslaciones espaciales ( $P_a$  con parámetro  $\zeta^a$ ), boost ( $K_a$  con parámetro  $k^a$ ), rotaciones ( $J_{ab}$  con parámetro  $\lambda^{ab}$ ) y el generador central ( $M$  con parámetro  $\sigma$ ).

Los conmutadores no nulos de este álgebra son

$$[P_a, J_{bc}] = 2\delta_{a[b}P_{c]}, \quad [K_a, J_{bc}] = 2\delta_{a[b}K_{c]}, \quad [K_a, H] = P_a, \quad [J_{ab}, J_{cd}] = 4\delta_{[a[c}J_{d]b]}, \quad [K_a, P_b] = \delta_{ab}M$$

Notemos que si bien  $M$  conmuta con todos los generadores (es la extensión central), este aparece en el lado derecho de los conmutadores de traslaciones espaciales y boost, lo cual podría ser interpretado como una manifestación de la inercia.

Introduzcamos a continuación los campos gauge que corresponden a estos generadores: esto lo hacemos introduciendo la conexión de Cartan, que es la 1-forma dada por [29]

$$\alpha_\mu = m_\mu M + t_\mu H + e_\mu^a P_a + \omega_\mu^a K_a + \frac{1}{2}w_\mu^{ab} J_{ab}. \quad (5.35)$$

Notemos que aparecen los frames espacial  $e_\mu^a$  y temporal  $t_\mu$ , que ya habíamos nombrado con anterioridad, como campos gauge asociados a los generadores de traslaciones espaciales y temporales respectivamente.

Los campos duales a los frames  $e_\mu^a$  y  $t_\mu$  se definen de la manera habitual:

$$e_\mu^a e^\mu_b = \delta^a_b, \quad t^\mu t_\mu = 1, \quad t^\mu e_\mu^a = 0, \quad t_\mu e^\mu_a = 0, \quad e_\mu^a e^\nu_a = \delta_\mu^\nu - t_\mu t^\nu$$

Por medio de una serie de restricciones [30], somos capaces de reemplazar la simetría traslacional espacial y temporal ( $H$ -transformaciones y  $P$ -transformaciones) del álgebra así como las  $M$ -transformaciones, en transformaciones de coordenadas generales, permitiendo que la teoría sea invariante frente a cambios de coordenadas generales. Además, esto nos permite obtener las expresiones de las conexiones de espín como campos gauge dependientes de  $t_\mu$ ,  $e_\mu^a$  y  $m_\mu$ , que son precisamente los que desempeñan el papel de los campos gauge independientes, cuestión que en una teoría gauge en el álgebra de Galileo no se podría haber conseguido ya que no disponemos del generador  $M$ . Con otras de estas restricciones podríamos hacer la identificación  $t_\mu = \partial_\mu f$  para alguna función escalar  $f$ ; tal función designa el tiempo universal, hecho que define la mecánica Newtoniana.

Cuando uno lleva a cabo un procedimiento gauge en el álgebra de Poincaré para así determinar la teoría gravitatoria de Einstein, de imponer que las operaciones de transporte paralelo y proyección en los índices planos o curvos deben conmutar, uno determina el conocido como “postulado de vielbein” [31]. En nuestro caso, donde el procedimiento gauge se realiza en el álgebra de Bargmann, no se obtiene un postulado de vielbein sino dos; uno de ellos (espacial) se resume en  $\nabla_\mu e_\nu^a = \omega_\mu^a t_\nu$  y el otro (temporal) en  $\partial_\mu t_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} t_\lambda = 0$ . Con ello, se puede deducir la siguiente expresión

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = t^\rho \partial_{(\mu} t_{\nu)} + e^\rho_a \{ \partial_{(\mu} e_{\nu)}^a + \omega_{(\mu}^a b e_{\nu)}^b + \omega_{(\mu}^a t_{\nu)} \}, \quad (5.36)$$

que hace referencia a una conexión simétrica que satisface la compatibilidad con las dos estructuras métricas, es decir, que  $\nabla_\rho h^{\mu\nu} = 0, \nabla_\rho t_\mu = 0$ .

Si pretendemos establecer contacto con la gravitación Newtoniana, hemos de imponer una serie de restricciones que no enfatizaremos, además de hacer uso de las conocidas identidades de Bianchi

(*Apéndice D.2*) y, a través de la contracción de las expresiones que se hubiesen determinado de haber llevado a cabo los pasos pertinentes de forma rigurosa por medio de  $e^\mu{}_a$  y  $t^\mu$ , se deducirían las ecuaciones del movimiento siguientes

$$t^\mu e^\nu{}_a R_{\mu\nu}{}^a(K) = 4\pi G\rho \quad t^\mu e^\nu{}_a R_{\mu\nu}{}^{ab}(J) = 0, \quad (5.37)$$

donde simplemente mencionaremos, para evitar cualquier posible confusión, que los objetos que aparecen denotados como  $R(K)$  y  $R(J)$  con diferente índices no son directamente el tensor de curvatura, sino que son las 2-formas de curvatura asociadas cuando transcribimos toda la descripción geométrica en términos de las coordenadas al nuevo lenguaje (el del formalismo vielbein).

Vemos entonces que hemos conseguido ver de qué manera la formulación de la gravedad Newton-Cartan puede ser vista como una teoría gauge del álgebra de Bargmann así como conocer de otra vía para obtener los resultados ya conocidos, además de haber podido extraer ciertas conclusiones acerca de la importancia que juega el papel de haber un elemento no nulo en el centro del grupo.

## 5.5. ¿Son la Gravitación Newtoniana y la Formulación de Newton-Cartan teóricamente equivalentes?

Por medio del análisis realizado en el *Capítulo 4*, hemos podido afirmar finalmente que la formulación de Newton-Cartan es equivalente a la gravitación Newtoniana en cuanto a lo que al contenido empírico de la teoría se refiere. Esta es la perspectiva que podríamos denotar por “física”, pues es la que se basa en el punto de vista experimental y observacional.

Esta pregunta, inofensiva en primera instancia, resulta tener un gran impacto dentro de la perspectiva de la “filosofía de la ciencia”, debido a que existe una confrontación de opiniones acerca de esta cuestión; diferentes autores proponen distintos planteamientos acerca de lo que una equivalencia teórica consiste. Por citar a un autor que aporta un punto de vista, respecto del cual, estas dos teorías no son equivalentes teóricamente, destacamos a Glymour, quien propone un criterio de equivalencia entre teorías físicas en términos de objetos covariantes en una variedad [33].

**Criterio 5.1** *Dos teorías  $T_1$  y  $T_2$  son teóricamente equivalentes si para cada modelo  $M_1$  en  $T_1$ , existe un único modelo  $M_2$  en  $T_2$  que (1) tenga el mismo contenido empírico que  $M_1$  y (2) es tal que los objetos geométricos asociados con  $M_2$  son únicamente y covariantemente definibles en términos de elementos de  $M_1$  y los objetos geométricos asociados con  $M_1$  son únicamente y covariantemente definibles en términos de  $M_2$ , y viceversa.*

Según Glymour, a través de este criterio, la gravitación Newtoniana y la formulación Newton-Cartan no son teóricamente equivalentes, pues los modelos de la gravitación Newtoniana no están únicamente determinados por los modelos de la formulación Newton-Cartan. En este texto, no se va a profundizar más en esta cuestión, y se remite al lector a la referencia anterior para una lectura más en profundidad.

A nosotros nos concierne más desde qué punto de vista podemos afirmar que sí son teóricamente equivalentes; cuestión analizada por James O. Weatherall [32].

Veamos entonces esta nueva perspectiva:

El análisis “filosófico” de esta cuestión se basa en las nociones de categoría y de equivalencia entre categorías, cuyas definiciones damos a continuación:

**Definición 5.2** Una categoría consiste en (1) una colección de objetos  $A, B, C \dots$ ; (2) una colección de funciones  $f, g, h \dots$ ; y (3) asignaciones para cada función  $f$  de un par de objetos,  $\text{dom}(f)$  y  $\text{cod}(f)$ , llamados el dominio y codominio de la función, respectivamente.

**Definición 5.3** Una equivalencia entre categorías es un par de funciones  $F : C \rightarrow D$  y  $G : D \rightarrow C$  donde, dado cualquier objeto  $A$  de  $C$ , existe un isomorfismo  $\eta_A : A \rightarrow G \circ F(A)$ , donde esos isomorfismos colectivamente satisfacen que para cualquier función  $f : A \rightarrow B$  de  $C$ ,  $\eta_B \circ f = G \circ F(f) \circ \eta_A$ ; e igualmente, *mutatis mutandis*, para cualquier objeto de  $D$ .

Hecho esto, Weatherall propone el siguiente criterio para la identificación de dos teorías como teóricamente equivalentes [32]:

**Criterio 5.2** Dos teorías son teóricamente equivalentes solamente en el caso que exista una equivalencia entre sus categorías de modelos que preserven el contenido empírico.

Partiendo de esto, argumenta lo siguiente:

*“Representemos la teoría de Newton-Cartan por medio de una categoría cuyos objetos sean los espacios-tiempos clásicos  $(M, t_{\mu\nu}, h^{\mu\nu}, \bar{\Gamma})$ , satisfaciendo  $R_{00} = 4\pi G\rho, R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} = 0, R^{\mu}{}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{\beta} = R^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\mu}{}_{\nu}$  y cuyas funciones sean difeomorfismos que preserven las “métricas” y el operador derivativo. Para la gravitación Newtoniana, tomemos como categoría una cuyos objetos sean espacios-tiempos con potenciales gravitacionales  $(M, t_{\mu\nu}, h^{\mu\nu}, \bar{\Gamma}, \varphi)$  con  $\bar{\Gamma}$  plana, y donde las funciones son parejas  $(\chi, \varphi)$ , donde  $\varphi$  es un campo escalar suave y  $\chi$  es un difeomorfismo que preserva las métricas clásicas, el operador derivativo y el potencial gravitatorio.”*

Como existe una equivalencia de categorías entre la teoría de Newton-Cartan y esta nueva forma de considerar a la gravitación Newtoniana que preserva el contenido empírico, bajo esta interpretación, si podemos afirmar que ambas teorías son teóricamente equivalentes.

Uno ha de percibir tras esta discusión que en el ámbito científico hemos de desprendernos de determinadas afirmaciones tajantes como la de “el espacio-tiempo clásico es plano” o “el espacio-tiempo clásico es curvo”, pues dependiendo del contexto desde el cual abarquemos la pregunta podríamos argumentar unas conclusiones u otras. No hemos de poner un énfasis indebido a las implicaciones supuestas en una formulación particular de una teoría. Lo que debe quedar claro es que tales formulaciones son desde luego observacionalmente idénticas independientemente del marco desde el que demos las descripciones.

## 5.6. Perspectiva general sobre la teoría de Newton-Cartan en la actualidad.

Una discusión más profunda podría hacerse sobre los diferentes puntos anteriores, pero lo que se pretendía era más bien dar una visión parcial de los distintos aspectos, pudiendo tener así una primera idea sin necesidad de dar todos los detalles matemáticos que hay. Tampoco se han dado unos resultados numéricos que nos hayan permitido ver cuantitativamente la comparación entre los datos relativistas y los no relativistas, sino que hemos restringido nuestro trabajo a una

concepción más teórica y cualitativa. Además, hay otras aplicaciones de la formulación de Newton-Cartan que nosotros no hemos nombrado, como puede ser, por ejemplo, la “gravedad Newton-Cartan supersimétrica”, la “gravedad Newton-Cartan fibrada” o el “límite Newtoniano de la teoría de Klein-Gordon en un espacio-tiempo curvo”, y que resultarían de interés para futuros proyectos.

Por último, pero no menos importante, el estudio de la formulación de Newton-Cartan de la gravedad newtoniana es un ejemplo de cómo es posible desarrollar y expresar unas ideas sobre un fenómeno concreto, la gravedad newtoniana en este caso, que permiten ver ese fenómeno desde puntos de vista muy dispares, que solo en apariencia son contradictorios (por ejemplo, como puede ser que el espacio-tiempo clásico tenga o no curvatura según la concepción considerada). Ninguno de estos puntos de vista es en principio mejor ni peor que otro, y todos deben ser igualmente válidos siempre que determinen los mismos resultados que experimentalmente se miden.

Para cerrar esta discusión, mencionamos la siguiente cita de Feynman que ejemplifica perfectamente la esencia que se pretendía transmitir con esa aclaración [34]:

*“Psychologically we must keep all the theories in our heads, and every theoretical physicist who is any good knows six or seven different theoretical representations for exactly the same physics.”*

# Conclusiones sobre la Formulación Newton-Cartan.

Los **objetivos principales** que se pretendían abordar durante la memoria son, a grandes rasgos:

- I. *Introducir la Teoría de Newton-Cartan como una reformulación geométrica de la Gravitación Newtoniana, recuperando todas las consecuencias observacionales de la versión tradicional.*
- II. *Estudiar las estructuras matemáticas familiares de la Teoría de Einstein, como la conexión, la métrica, o el tensor de curvatura, determinando las diferencias que existen con las anteriores cuando, como escenario, consideramos un espacio-tiempo newtoniano.*
- III. *Dar una primera idea de la diversidad de fenómenos que pueden ser descritos, en diferentes campos de la física, por medio de esta versión covariante de la Gravitación Newtoniana, viendo el grado de aproximación de los resultados con los aportados por la teoría de Einstein.*

Todas estas cuestiones han sido estudiadas de forma exitosa. Los primeros dos objetivos nos han permitido extraer las siguientes conclusiones:

1. El **Principio de Inercia** junto con el **Principio de Galileo** requieren, necesariamente, de la introducción de una **conexión en el espacio-tiempo**, la cual **integre tanto las fuerzas gravitatorias como las fuerzas inerciales**, y al **no ser llana**, nos permite afirmar que la **gravedad es un efecto de la curvatura del espacio-tiempo**.
2. Las **autoparalelas** de esta conexión se identifican con los **movimientos de caída libre** en un campo gravitatorio, así como el **parámetro afín** de las mismas con la función **tiempo absoluto**.
3. En el **espacio-tiempo clásico** presupuesto por la **teoría de Newton de la gravedad**, existen **dos estructuras “métricas” degeneradas**. Esto, lleva consigo profundas implicaciones, como:
  - a) Las **duraciones temporales** y las **distancias espaciales** están dadas por medio de **dos estructuras tensoriales diferentes**; estas son  $t_{\mu\nu}$  y  $h^{\mu\nu}$  (las estructuras cronogeométricas) y satisfacen  $h^{\mu\nu}t_{\mu\nu} = 0$ .
  - b) **Foliación del espacio-tiempo en 3-espacios de simultaneidad**, cada uno de ellos identificados por un valor de la coordenada temporal  $t$ .
  - c) La conexión no está determinada unívocamente por las estructuras “métricas”, sino que hay **infinitas conexiones compatibles con los tensores  $t_{\mu\nu}$  y  $h^{\mu\nu}$** .

Del último de los objetivos, se pueden obtener estas otras conclusiones:

1. Dado el valor de la constante de Hubble ( $70 \text{ (km/s)/Mpc}$ ), un **estudio de la expansión actual del universo** puede realizarse con un **buen acuerdo** mediante la aproximación que nos ofrece los **modelos cosmológicos** que se derivan de la **formulación Newton-Cartan**.
2. Cuando uno necesita de una estructura geométrica mayor, o adicional, **a la hora de describir campos de materia** en un contexto de teoría cuántica de campos, se necesita construir un espacio-tiempo más general, con lo que **hay que extender el álgebra** del grupo de Galileo a otros que incluyan más **campos gauge**.
3. Hay **derivaciones más novedosas** de la formulación Newton-Cartan, construyendo una teoría más general que la de la Gravitación Newtoniana, de manera que **para que permitan el contacto** con esta última, habrá que llevar a cabo diferentes **restricciones** dentro de ese formalismo. Nosotros analizamos, en específico, la obtención de la formulación Newton-Cartan desde un contexto de campos gauge.

## Apéndice A

# Parámetros de no inercialidad.

Supongamos que el origen de un marco de referencia no inercial se mueve con un movimiento no uniforme, que en el sistema de inercial queda descrito por medio de la posición dependiente del tiempo  $a^I(t)$ , y que los ejes espaciales del marco están rotando con respecto al sistema inercial con una rotación, en el caso más general, dependiente del tiempo  $\mathbf{R}(t)$ , alrededor de un eje que pasa por el origen del marco no inercial. Entonces, la relación entre las coordenadas  $(t, x^I)$  y  $(t, x^i)$  está dada por medio de las ecuaciones

$$x^i = R^i{}_I(t) (x^I - a^I(t)), \quad x^I = R_i{}^I(t) x^i + a^I(t). \quad (\text{A.1})$$

Fijémonos en el hecho de que las funciones  $a^I(t)$  y  $R^i{}_I(t)$  son funciones del tiempo únicamente.

En la expresión de las fuerzas de inercia, la cantidad que interviene va a ser, no la propia  $a^I(t)$ , sino su segunda derivada con respecto del tiempo y a la que denotamos como sigue

$$w^I(t) := \frac{d^2 a^I(t)}{dt^2}. \quad (\text{A.2})$$

Respecto del marco de referencia no inercial, esta aceleración se escribe como

$$w^i(t) := R^i{}_I(t) \frac{d^2 a^I(t)}{dt^2}. \quad (\text{A.3})$$

En cuanto a la rotación, la cantidad que interviene en la expresión de las fuerzas de inercia no es propiamente la rotación, sino otro objeto que describe la velocidad angular instantánea, que puede considerarse como la primera derivada de  $R^i{}_I(t)$  con respecto del tiempo. Veamos cuál es este objeto:

**Propiedad A.1 (Ortogonalidad de la matriz de rotación.)** *La matriz de rotación es ortogonal, lo que significa que se satisface la condición siguiente*

$$\mathbf{R}^T(t) \mathbf{R}(t) = 1. \quad (\text{A.4})$$

Si uno toma la derivada temporal de esta condición obtiene que

$$\frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} \mathbf{R}^T(t) + \mathbf{R}^T(t) \frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = 0,$$

lo que nos permite ver la matriz  $\frac{d\mathbf{R}(t)}{dt}\mathbf{R}^T(t)$  como una matriz antisimétrica que denotaremos por  $\Omega(t)$ , y la condición de que la matriz  $\mathbf{R}(t)$  sea ortogonal como

$$\frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = \Omega(t)\mathbf{R}(t), \quad \frac{d\mathbf{R}^i{}_I(t)}{dt} = \Omega^i{}_k(t)\mathbf{R}^k{}_I(t). \quad (\text{A.5})$$

A  $\Omega^i{}_k(t)$  se le denomina tensor velocidad angular, y su dual es el vector velocidad angular.

**Definición A.1 (Vector velocidad angular instantánea.)**

$$\omega^l(t) = \frac{1}{2}\delta^{lk}\epsilon_{ijk}\Omega^{ij}(t). \quad (\text{A.6})$$

## Apéndice B

# Grupo de Galileo.

Un determinado evento se describe en un cierto marco de referencia inercial  $\Sigma$  mediante  $(\mathbf{x}, t)$ . Ese mismo evento, se describe en un segundo marco de referencia  $\Sigma'$  con  $(\mathbf{x}', t')$ , siendo  $\Sigma'$  un sistema desplazado una distancia  $\mathbf{a}$ , rotado una cantidad  $\mathbf{R}$ , moviéndose a velocidad  $\mathbf{v}$ , y con un origen de tiempo  $t' = t + \tau$  con respecto a  $\Sigma$ . La relación entre ambos sistemas coordenados viene dada por una transformación Galileana:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\mathbf{x} + \mathbf{v}t + \mathbf{a} \\ t + \tau \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

El conjunto de transformaciones Galileanas forman el grupo de Galileo. El elemento neutro resulta en

$$e = (I, 0, 0, 0),$$

el elemento inverso de  $G = (R, \mathbf{v}, \mathbf{a}, \tau)$  en

$$G^{-1} = (R^{-1}, -R^{-1}\mathbf{v}, -R^{-1}(\mathbf{a} - \mathbf{v}\tau), -\tau),$$

y la ley de composición es

$$(R_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{a}_2, \tau_2)(R_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{a}_1, \tau_1) = (R_2R_1, \mathbf{v}_2 + R_2\mathbf{v}_1, \mathbf{a}_2 + R_2\mathbf{a}_1 + \tau_1\mathbf{v}_2, \tau_2 + \tau_1).$$

Se puede ilustrar la acción del grupo por medio de la siguiente representación matricial 5-dimensional

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ t' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{v} & \mathbf{a} \\ 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

lo que en notación de índices quedaría como

$$x^{\mu'} = \alpha^{\mu'}_{\mu} x^{\mu} + \chi^{\mu'}, \quad (\text{B.3})$$

con lo que corresponden a transformaciones afines y  $\alpha^{\mu'}_{\mu}$  son las transformaciones lineales que constituyen un subgrupo del grupo de Galileo  $G$ , que se denomina grupo de Galileo homogéneo  $\alpha$ .

## Apéndice C

# Geometría diferencial.

### C.1. Conexión.

Damos aquí un resumen muy esquemático de las propiedades de una conexión y de su curvatura asociada en un espacio en el que la métrica es no degenerada y definida positiva. Supongamos que en un espacio, posiblemente curvo, tenemos en cada sistema de coordenadas  $x^\alpha$  la base coordenada correspondiente  $e_\alpha$ , que es una base en el espacio tangente en cada punto. Los coeficientes de conexión de ese espacio intervienen como los coeficientes en la relación:

$$\frac{\partial e_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} e_\mu. \quad (\text{C.1})$$

Si considerásemos, por el contrario, la base dual, esta expresión añadiría un signo negativo además del cambio del vector al covector en consideración. Veamos cuál es la ley de transformación de este objeto:

**Propiedad C.1 (Transformación de la conexión)** *Las componentes de la conexión se transforman como sigue*

$$\Gamma^{\mu'}{}_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} + \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\alpha'}} \quad (\text{C.2})$$

de modo que no es la ley de transformación de un tensor salvo en los casos en los que se anule el término no homogéneo, como es el caso de las transformaciones lineales por ejemplo.

**Demostración C.1** *Partamos de la expresión (C.1) para unas coordenadas dadas. Multiplicando a ambos lados por  $e^\mu$  obtenemos*

$$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = e^\mu \cdot \frac{\partial e_\alpha}{\partial x^\beta}$$

*Respecto de otras coordenadas, que denotaremos mediante índices primados, tendremos*

$$\Gamma^{\mu'}{}_{\alpha'\beta'} = e^{\mu'} \cdot \frac{\partial e_{\alpha'}}{\partial x^{\beta'}}$$

con lo que

$$\begin{aligned}
 \Gamma^{\mu'}_{\alpha'\beta'} &= e^{\mu'} \cdot \frac{\partial e_{\alpha'}}{\partial x^{\beta'}} \\
 &= \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} e^{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial x^{\beta'}} \left( \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} e_{\alpha} \right) \\
 &= \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} e^{\mu} \cdot \left( \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\alpha'}} e_{\alpha} + \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial e_{\alpha}}{\partial x^{\beta'}} \right) \\
 &= \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} e^{\mu} \cdot \left( \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\alpha'}} e_{\alpha} + \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial e_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \right) \\
 &= \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\alpha'}} e^{\mu} \cdot e_{\alpha} + \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} e^{\mu} \cdot \frac{\partial e_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \\
 &= \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\alpha'}} \delta^{\mu}_{\alpha} + \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \\
 &= \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} + \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\alpha'}},
 \end{aligned}$$

llegando al resultado antes mencionado.

El concepto de conexión, además, nos permite introducir otros objetos matemáticos como la derivada covariante o el transporte paralelo, y estos van a ser los que se van a analizar a continuación.

## C.2. Derivada covariante.

A pesar de que la derivada parcial de un tensor de orden 0 produce un tensor de tipo (0,1), la derivada parcial de un tensor de rango  $\geq 1$  no es, en general, un tensor. Por ello, surge la necesidad de introducir un nuevo tipo de derivada la cual, aplicada a un tensor, nos proporcione de nuevo un tensor. Tal tipo de derivada recibe el nombre de derivada covariante, donde “covariante” hace referencia a independencia de la elección de coordenadas.

**Demostración C.2 (Derivada Covariante)** *Sea  $V$  un campo vectorial. En términos de sus componentes contravariantes y su base de vectores covariantes resulta*

$$V = V^{\alpha} e_{\alpha}.$$

*Su derivada ordinaria es*

$$\frac{\partial V}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} (V^{\alpha} e_{\alpha}) = \frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} e_{\alpha} + V^{\alpha} \frac{\partial e_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}.$$

*Como ya habíamos mencionado previamente por encima, para una geometría no curva, el último término se anula. Sin embargo, en un espacio curvo, la base vectorial cambia punto a punto, de modo que la derivada del vector en cuestión involucra no solo un cambio en sus componentes sino también un cambio en la base.*

*Con lo cual, introduzcamos la definición (C.1) para dar cuenta de esto último. Con ello, somos capaces de escribir lo siguiente*

$$\frac{\partial V}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} e_\alpha + V^\alpha \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} e_\alpha + V^\gamma \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} e_\alpha.$$

Ahora, supongamos en nuestra variedad dos puntos  $P$  y  $Q$ , tal que el campo vectorial en esos dos puntos resulta en  $V(x^\mu)$  y  $V(x^\mu + dx^\mu)$ . Si transportamos paralelamente el vector  $V(x^\mu + dx^\mu)$  al punto  $P$ , la diferencia de los dos vectores en el punto  $P$  resulta en

$$\delta V = V(x^\mu)|_{\text{paralelo}} - V(x^\mu). \quad (\text{C.3})$$

La condición para transporte paralelo es que  $\frac{\partial V}{\partial x^\beta} = 0$ , de modo que

$$\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} = -V^\gamma \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}.$$

Veamos cuáles son las componentes vectorial en los punto  $P$  y  $Q$  a partir del resultado anterior. Integrando,

$$\begin{aligned} \int_{x^\mu}^{x^\mu + dx^\mu} \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} dx^\beta &= \int_{x^\mu}^{x^\mu + dx^\mu} -V^\gamma \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} dx^\beta \\ V^\alpha(x^\mu) - V^\alpha(x^\mu + dx^\mu) &\approx V^\gamma \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} dx^\beta \\ V^\alpha(x^\mu) &\approx V^\alpha(x^\mu + dx^\mu) + V^\gamma \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} dx^\beta. \end{aligned}$$

De este modo,

$$\begin{aligned} \delta V &= V(x^\mu)|_{\text{paralelo}} - V(x^\mu) \\ &\approx V^\alpha(x^\mu + dx^\mu) + V^\gamma \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} dx^\beta - V^\alpha(x^\mu) \\ &\approx V^\alpha(x^\mu + dx^\mu) - V^\alpha(x^\mu) + V^\gamma \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} dx^\beta. \end{aligned}$$

La derivada covariante entonces viene dada, en términos de sus componentes como

$$\begin{aligned} \nabla_\mu V^\alpha &= \lim_{dx^\mu \rightarrow 0} \frac{\delta V^\alpha}{dx^\mu} \\ &\approx \lim_{dx^\mu \rightarrow 0} \frac{V^\alpha(x^\mu + dx^\mu) - V^\alpha(x^\mu) + V^\gamma \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} dx^\beta}{dx^\mu} \\ &= \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\mu} + V^\gamma \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} \delta^\beta_\mu, \end{aligned}$$

con lo que, finalmente, llegamos al resultado deseado

$$\nabla_\mu V^\alpha = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\mu} + V^\gamma \Gamma^\alpha_{\gamma\mu}. \quad (\text{C.4})$$

Otras expresiones serán válidas cuando consideremos las derivadas covariantes de otro tipo de tensores de rangos diferentes, pero en este escrito nos limitaremos a enunciar el caso previo.

### C.3. Transporte paralelo y Geodésicas.

**Definición C.3.1 (Transporte paralelo.)** Consideremos una superficie regular  $S$  y  $\gamma : [a, b] \rightarrow S$  una curva regular en  $S$  parametrizada a través de  $s$ . Se dice que un campo vectorial  $\xi^\mu(s)$  se transporta paralelamente a lo largo de una curva si

$$0 = \frac{D\xi^\mu}{Ds} = \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{D\xi^\mu}{Dx^\alpha} = \frac{d\xi^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \xi^\beta \frac{dx^\alpha}{ds}, \quad (\text{C.5})$$

donde se hizo uso de la expresión (C.4).

**Definición C.3.2 (Geodésica.)** Si el campo de vectores tangentes a una curva (es decir,  $\frac{dx^\mu}{ds}$ ) corresponde a un campo de vectores paralelos a lo largo de la misma satisface (C.5) diremos que tal curva es una geodésica.

Podemos ver directamente de esta expresión que, en el caso en el que la conexión tenga todas las componentes idénticamente nulas, la ecuación de las geodésicas corresponde trivialmente a una línea recta.

### C.4. Tensor de curvatura de Riemann y tensor de Ricci.

**Definición C.4.1 (Tensor de Curvatura de Riemann.)** Tomemos en consideración el conmutador de dos derivadas covariantes actuando sobre un vector arbitrario  $V^\rho$ . Se va a proceder a calcular entonces la diferencia entre movernos a lo largo de la dirección marcada por  $\mu$  primero y después en la dirección marcada por  $\nu$ , con movernos primero en la dirección marcada por  $\nu$  y luego en la dirección marcada por  $\mu$ . Así:

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho &= \nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\rho \\ &= \nabla_\mu [\partial_\nu V^\rho + \Gamma^\rho_{\nu\sigma} V^\sigma] - (\mu \longleftrightarrow \nu) \\ &= \partial_\mu [\partial_\nu V^\rho + \Gamma^\rho_{\nu\sigma} V^\sigma] - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} [\partial_\lambda V^\rho + \Gamma^\rho_{\lambda\sigma} V^\sigma] + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} [\partial_\nu V^\lambda + \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} V^\sigma] - (\mu \longleftrightarrow \nu) \\ &= \partial_\mu \partial_\nu V^\rho + \partial_\mu (\Gamma^\rho_{\nu\sigma}) V^\sigma + \Gamma^\rho_{\nu\sigma} \partial_\mu V^\sigma - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \partial_\lambda V^\rho - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\lambda\sigma} V^\sigma + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \partial_\nu V^\lambda \\ &\quad + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} V^\sigma - \partial_\nu \partial_\mu V^\rho - \partial_\nu (\Gamma^\rho_{\nu\sigma}) V^\sigma - \Gamma^\rho_{\sigma\nu} \partial_\mu V^\sigma + \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \partial_\lambda V^\rho + \Gamma^\lambda_{\mu\mu} \Gamma^\rho_{\lambda\sigma} V^\sigma \\ &\quad - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \partial_\mu V^\lambda - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} V^\sigma = \left[ \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \right] V^\sigma = \\ &= R^\rho_{\sigma\mu\nu} V^\sigma. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Si el vector final difiere un cierto ángulo  $\alpha$  del inicial (Figura C.1), esto es debido a que la variedad presenta curvatura, y esta, viene descrita por medio del tensor de curvatura de Riemann  $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ .

**Propiedad C.4.1 (Propiedades del tensor de curvatura de Riemann)**

- I.  $R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta}$
- II.  $R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha}$
- III.  $R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}$
- IV.  $R_{\mu\nu\alpha\beta} + R_{\nu\alpha\mu\beta} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0$  primera identidad de Bianchi.

Debido a que los 4-tensores son demasiado complejos de manejar, a menudo es útil construir tensores más simples que resuman parte de la información contenida en el tensor de curvatura. El tensor más importante que precisamente consigue esto, es el conocido como tensor de Ricci o curvatura de Ricci.

**Definición C.4.2 (Tensor de Ricci)** El tensor de Ricci es un campo 2-tensorial covariante definido como

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}. \tag{C.7}$$

**Propiedad C.4.2 (Simetría del tensor de Ricci.)** El tensor de Ricci satisface que

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}. \tag{C.8}$$

**Definición C.4.3 (Curvatura escalar  $S$ )** Se define la curvatura escalar  $S$  como la traza del tensor de Ricci

$$S := R^{\mu}{}_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \tag{C.9}$$

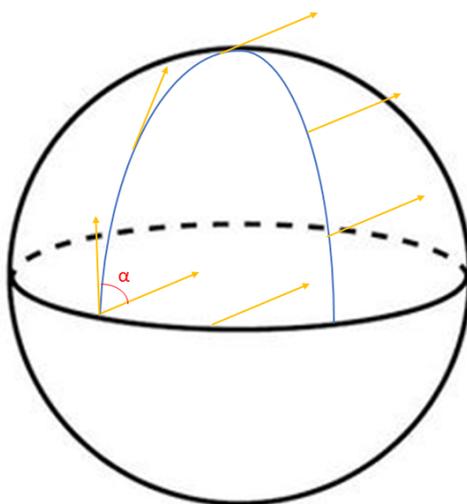


Figura C.1: Transporte paralelo a lo largo de un loop en una variedad con curvatura no nula.

## Apéndice D

### Otros datos de interés.

#### D.1. Vorticidad, Cizalladura, Esfuerzo y Ritmo de expansión.

Por medio del operador de proyección, el cual se define mediante  $P : T_x M \rightarrow S_x := \ker t_\mu$ , y cuyas componentes resultan en  $P^\nu{}_\mu = \delta^\nu{}_\mu - t_\mu u^\nu$ , podemos definir las siguientes cantidades, donde  $X$  e  $Y$  hacen referencia a campos vectoriales:

**Definición D.1.1 (Vorticidad (relativa a  $u$ ))**  $\Omega^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u^\alpha{}_{;\lambda} h^{\lambda\beta} - u^\beta{}_{;\lambda} h^{\lambda\alpha})$ .

**Definición D.1.2 (Esfuerzo)**  $\Theta^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u^\alpha{}_{;\lambda} h^{\lambda\beta} + u^\beta{}_{;\lambda} h^{\lambda\alpha})$ .

**Definición D.1.3 (Ritmo de expansión)**  $\theta = h^{\mu\nu} \Theta_{\mu\nu}$ .

**Definición D.1.4 (Cizalladura)**  $\sigma(X, Y) = \Theta(X, Y) - \frac{1}{3} \theta h(X, Y)$ .

#### D.2. Identidades de Bianchi en la teoría de Bargmann.

Dentro de la teoría de Bargmann, las identidades de Bianchi resultan en

$$D_{[\lambda} R_{\mu\nu]}(H) = 0, \tag{D.1}$$

$$D_{[\lambda} R_{\mu\nu]}{}^a(P) = -R_{[\lambda\mu}{}^{ab}(J)e_{\nu]}{}^b - R_{[\lambda\mu}{}^a(K)t_{\nu]} + R_{[\lambda\mu}(H)\omega_{\nu]}{}^a, \tag{D.2}$$

$$D_{[\lambda} R_{\mu\nu]}{}^{ab}(J) = 0, \tag{D.3}$$

$$D_{[\lambda} R_{\mu\nu]}{}^a(K) = -R_{[\lambda\mu}{}^{ab}(J)\omega_{\nu]}{}^b, \tag{D.4}$$

$$D_{[\lambda} R_{\mu\nu]}(M) = R_{[\lambda\mu}{}^a(P)\omega_{\nu]} - R_{[\lambda\mu}{}^a(G)e_{\nu]}{}^a. \tag{D.5}$$

# Bibliografía

- [1] E.Cartan, Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisé. Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure **40**, 325 (1923).
- [2] K.Friedrichs, Eine invariante Formulierung des Newtonschen Gravitationsgesetzes und des Grenzüberganges vom Einsteinschen zum Newtonschen Gesetz. Mathematische Annalen **98**, 566 (1928).
- [3] A.Trautman, in B. Hoffmann (editor), Perspectives in Geometry and Relativity, Bloomington, 1996.
- [4] P. Havas, Four-Dimensional Formulations of Newtonian Mechanics and Their Relation to the Special and the General Theory of Relativity. Rev.Mod.Phys. **36**, 938 (1964).
- [5] J. Ehlers, The Newtonian Limit of General Relativity, in G. Ferrarese (editor) Classical mechanics and relativity: relationships and consistency, Naples, 1991.
- [6] J. Ehlers, The Nature and Structure of Spacetime, in J. Mehra (editor) The Physicist's Conception of Nature, Reidel, Dordrecht (Holland), 1973.
- [7] Dam Thanh Son. Newton-Cartan Geometry and the Quantum Hall Effect. (2013) [arXiv:1306.0638].
- [8] Mohsen Alishahiha, Ali Davody and Ali Vahedi. On AdS/CFT of Galilean Conformal Field Theories. Journal of High Energy Physics (2009) [arXiv:0903.3953].
- [9] M. Santander Navarro. Notas de la asignatura Gravitacion y Cosmología disponibles en <https://unavistacircular.wordpress.com/>.
- [10] Helge Kragh. Geometry and Astronomy: Pre-Einstein Speculations of Non-Euclidean Space 3-12 (2012) [arXiv:1205.4909].
- [11] José F. Domínguez. La gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, **Vol. 8.3** (2005).
- [12] Domingo C. Miranda. Gauss y la Geometría del Espacio. Folia Canariensis Academiae Scientiarum. **3**, 221-251 (1991).
- [13] Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski. Pangeometry. European Mathematical Society (2010).
- [14] D.B.Malament, Topics in the Foundations of General Relativity and Newtonian Gravitation Theory (University of Chicago Press, 2012).
- [15] Jonh M. Lee. Riemann Manifolds, An introduction to Curvature. Springer (1997)

- 
- [16] E.Kretschmann. Über die prinzipielle Bestimmbarkeit der berechtigten Bezugssystembeliebiger Relativitätstheorien. *Annalen der Physik* **48**: 907-942, 943-982.
- [17] James Owen Weatherall. *Classical Spacetime Structure* (2017) [arXiv:1707.05887].
- [18] Kevin Morand. *Symétries nonrelativistes et gravité de Newton-Cartan*. PhD thesis, Université François Rabelais, 2014. Français.
- [19] Roel Andringa. *Newton-Cartan Gravity Revisited*. PhD thesis, University of Groningen, 2016.
- [20] Leo Rodriguez, James St. Germaine-Fuller, Sujeev Wickramasekara. *Newton-Cartan Gravity in Noninertial Reference Frames* [arXiv:1412.8655].
- [21] B. R. MacGregor, A. E. McCoy, and S. Wickramasekara. Unitary cocycle representations of the Galilean line group: Quantum mechanical principle of equivalence. *Annals of Physics*, September 2012. [arXiv:1107.2442v1].
- [22] C.Ruede and N.Straumann, On Newton-Cartan cosmology, *Helv.Phys. Acta* **70** (1997) 318 [arXiv:gr-qc/9604054].
- [23] Quentin Vigneron. 1+3 -Newton-Cartan system and Newton-Cartan cosmology. *Phys.Rev.D*, 2021, Vol. **103** (6).
- [24] Naresh Dadhich. Derivation of the Raychaudhuri Equation [arxiv.org/abs/gr-qc/0511123].
- [25] M.Geracie and D.T.Son, Thermal transport in a noncommutative hydrodynamics, *J.Exp.Theor.Phys.* **120**(3), 444-448, (2015) [arXiv:1407.4460v2].
- [26] Michael Geracie, Kartik Prabhu and Matthew M.Roberts. Curved non-relativistic spacetimes, Newtonian gravitation and massive matter. *J.Math.Phys.* **56**, (2015) [https://doi.org/10.1063/1.4932967].
- [27] K.Jensen. On the coupling of Galilean-invariant field theory to curved spacetime. *SciPost Phys.* **5** (2018) [arXiv:1408.6855v3].
- [28] C.Duval and H.P.Künzle. Minimal Gravitational Coupling in the Newtonian Theory and the Covariant Schrödinger Equation. *General Relativity and Gravitation*, Vol. **16** (1984).
- [29] Eric Spreen. On a variational principle for Newton-Cartan Gravity. Master's Thesis/Essay (2019).
- [30] Jason Bennett. A pedagogical review of gravity as a gauge theory (2021) [arXiv:2104.02627v1].
- [31] Renata Jora. Note about the spin connection in general relativity (2019) [arXiv:1911.05283v2].
- [32] J.O. Weatherall, Are Newtonian Gravitation and Geometrized Newtonian Gravitation Theoretically Equivalent?. *Erkenn* **81**, 1073–1091 (2016) [arXiv:1411.5757].
- [33] C.Glymour. Theoretical equivalence and the semantic view of theories. *Philosophy of Science* **80** (2), 286–297.
- [34] R.P.Feynman. *The Character of Physical Law*. Published November 8th 1994 by Modern Library (first published 1964).
- [35] Prasun Kumar Nayak. *Tensor Calculus and Differential Geometry*. PHI Learning Pvt. Ltd. (2011)
- [36] Kristopher Tapp. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Springer, 2016
-