



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO

GRADO EN FÍSICA

UN MODELO DE POTENCIAL NUCLEAR UTILIZANDO POTENCIALES DE CONTACTO

Autor: Alfonso Martín Mozo

Tutores: Luis Miguel Nieto y César Romaniega

Departamento de Física Teórica, Atómica y Óptica

8 de julio de 2021

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, me gustaría agradecer la enorme dedicación que han tenido Luis Miguel Nieto y César Romaniega en su tarea de tutorización. Sus numerosos consejos, dirección, y correcciones a lo largo del trabajo han hecho posible esta memoria. No encuentro mejor forma de terminar mis estudios de grado en Física que habiendo tenido la oportunidad de aprender tanto de ellos a lo largo de la realización de este Trabajo de Fin de Grado.

En segundo lugar, me gustaría agradecer al Prof. Larry Glasser su ayuda con alguna de las propiedades de funciones especiales que aparecen involucradas en este trabajo. Sin estas propiedades, difícilmente se podría haber obtenido muchas de las conclusiones a las que se llega en este estudio.

En tercer lugar, también me gustaría agradecer a todos los profesores, tanto universitarios como preuniversitarios, su contribución a mi formación, y que hayan sabido potenciar una curiosidad científica que ha hecho posible que termine mis estudios de Grado en Física.

Finalmente, me gustaría agradecer a todos los amigos, familiares y compañeros, con los que he tenido el placer de compartir mi etapa como estudiante, su apoyo incondicional a lo largo de estos años.

Valladolid, 25 de junio de 2021

Índice general

Resumen/Abstract	VII
Introducción	IX
1. Modelo nuclear de capas	1
1.1. Introducción al modelo nuclear de capas	1
1.1.1. Núcleos doblemente mágicos	7
2. Modelo nuclear basado en potenciales de contacto	9
2.1. Potencial de Woods-Saxon	9
2.1.1. Constantes físicas	11
2.2. Hamiltoniano del sistema	12
2.3. Resolución de la ecuación de Schrödinger	15
2.3.1. Ecuación de onda en la región interior	16
2.3.2. Límite $Z \rightarrow 0$ en la región interior	19
2.3.3. Ecuación de onda en la región exterior	21
2.3.4. Límite $Z \rightarrow 0$ en la región exterior	22
3. Ecuación secular	23
3.2. Estados ligados	27
3.2.1. Ceros de la función de Whittaker	27
3.2.2. Ceros de la función ${}_1F_1$	28
3.3. Número de estados ligados	29
3.3.1. Estados ligados frente al momento angular ℓ	30
3.3.2. Valor máximo del momento angular	34

3.4. Orden de los estados ligados	36
3.4.1. Dependencia con el número cuántico n	38
3.4.2. Dependencia con el número cuántico j	39
3.4.3. Dependencia con el número cuántico ℓ	40
3.4.4. Estados de baja energía	42
4. Parámetros físicos	43
4.1. Análisis del ^{208}Pb	44
4.1.1. Energía de ligadura en función de los números cuánticos n , ℓ y j	46
4.1.2. Energía según el tipo nucleón adicional	46
4.2. Estados ligados en función de β	47
4.2.1. Análisis del ^{208}Pb	47
4.2.2. Análisis del ^{40}Ca	50
4.2.3. Análisis del ^{16}O	52
4.3. Tablas Adicionales	54
Conclusiones	57
A. Funciones Hipergeométricas confluentes	59
A.1. Resolución de la ecuación	59
A.1.1. Solución correspondiente a $\lambda = \mathbf{0}$	60
A.1.2. Solución correspondiente a $\lambda = \mathbf{1} - \mathbf{c}$	61
A.1.3. Derivadas de la función hipergeométrica confluyente	62
A.1.4. Transformaciones de Kummer	62
A.2. Ecuación de Whittaker	63
A.2.1. Desarrollos asintóticos	64
A.2.2. Derivadas de las funciones Whittaker	64
B. Condiciones de ajuste	65
B.1. Condiciones para potenciales del tipo δ	65
B.2. Condiciones para $\alpha\delta + \beta\delta'$	66
Bibliografía	67

Índice de figuras

1.1.	Desviaciones en la energía de separación de nucleones respecto a la fórmula semiempírica de masas.	2
1.2.	Energía de partículas α emitidas por isótopos de Rn.	3
1.3.	Cambio en el radio nuclear cuando $\Delta N = 2$	3
1.4.	Sección eficaz para la captura neutrónica para varios núcleos.	4
1.5.	Esquema de capas resultante del pozo de potencial infinito y del potencial del oscilador armónico.	5
1.6.	Esquema de capas resultante del potencial de Woods-Saxon.	6
1.7.	Tabla nuclear tomada de la referencia [4].	7
2.1.	Potencial de Woods-Saxon para valores adimensionales de a , $V_0 = -50$ y $R = 3.39$	10
2.2.	Potencial de Woods-Saxon para distintos valores de R y de V_0 , con $a = 0.2$	10
2.3.	Derivadas primera (izquierda) y segunda (derecha) del potencial de Woods-Saxon para $V_{so} = 5$, $V_q = 5$ y $R = 3$	11
2.4.	Energía potencial electrostática (2.21) para el núcleo de ^{208}Pb (con $Z = 82$, y $R = 7.53$ fm).	15
3.1.	Estados ligados para la ecuación secular (3.10). Las constantes utilizadas son $\beta = 4$, $g = 3.5$, $v_0 = 30$, $\ell = 1$ y $w_{\ell j} = -20$	30
3.2.	Estados ligados de la ecuación secular (3.10) para $\beta = 4$, $g = 3.5$, $v_0 = 30$, $w_{\ell j} = -20$	31
3.3.	Número de puntos de discontinuidad de Φ_ℓ para $g = 3.5$, $v_0 = 30$ y $w_{\ell j} = -20$ en función del momento angular ℓ	32
3.4.	Estados ligados de la ecuación secular (3.10) para $\beta = 4$, $g = 3.5$, $v_0 = 30$, $w_{\ell j} = -20$	35
3.5.	Estados ligados de la ecuación secular (3.10) para $\beta = 4$, $g = 3.5$, $v_0 = 30$ y $w_{\ell j}$ dado en (3.37).	38

3.6. Variación de las funciones de la ecuación (3.10), $\Phi_\ell(\varepsilon) = \Psi_\ell(\varepsilon)$, con respecto a ℓ para $v_0 = 20$, $w_{\ell j} = 20$, $g = 2$ and $\beta = 1$	41
3.7. Estudio de las energías relativas en función del momento angular ℓ	41
4.1. Estados ligados para el isótopo de ^{208}Pb completado con un nucleón, para $\beta = 0$ y $\ell = 0$	44
4.2. Estados ligados para el isótopo de ^{208}Pb completado con un nucleón, para $\beta = 0$ y $\ell = 1$	45
4.3. Potencial visto por el nucleón que completa el isótopo doblemente mágico.	46
4.4. Estados ligados para la ecuación secular (3.10) del ^{208}Pb completado por un nucleón y $\ell = 0$ para diferentes valores de β	48
4.5. Desviación σ respecto del valor de β para protones y neutrones para el ^{208}Pb	48
4.6. Desviación σ respecto del valor de β para protones y neutrones para el ^{209}Pb	49
4.7. Estados ligados para un nucleón que completa el isótopo de ^{208}Pb , con $\beta = 8.9$ y $\beta = 0.85$	49
4.8. Desviación σ respecto del valor de β para protones y neutrones para el ^{40}Ca	50
4.9. Desviación σ respecto del valor de β para protones y neutrones para el ^{40}Ca	51
4.10. Estados ligados para un nucleón que completa el isótopo de ^{40}Ca , con $\beta = 0.5$ y $\beta = 0.45$ para neutrones y protones respectivamente.	51
4.11. Desviación σ respecto del valor de β para protones y neutrones para el ^{16}O	52
4.12. Desviación σ respecto del valor de β para protones y neutrones para el ^{16}O	53
4.13. Estados ligados para un nucleón adicional en el isótopo de ^{16}O , con $\beta = 3.05$ y $\beta = 6.05$ para neutrones y protones respectivamente.	53

Resumen

En el presente trabajo se estudia una partícula no relativista sujeta a un potencial tridimensional esféricamente simétrico consistente en un pozo finito, una interacción del tipo coulombico, y radial δ - δ' de contacto en el borde del pozo.

Considerando el potencial de Woods-Saxon y definiendo las condiciones de contorno apropiadas para las funciones radiales, fijando así una extensión auto-adjunta del hamiltoniano no singular, se encuentra analíticamente la función de onda de dicha partícula.

Los estados ligados existentes son estudiados en detalle, y se extienden algunos de los resultados de ordenación de estados para potenciales continuos esféricamente simétricos.

El presente estudio sirve como una primera aproximación a un modelo nuclear de campo medio. Los resultados obtenidos con este modelo son contrastados con los obtenidos al resolver numéricamente el modelo clásico de Woods-Saxon para nucleones que completan algunos isótopos doblemente mágicos.

Abstract

In this work we study a non-relativistic particle subject to a three-dimensional spherical potential consisting of a finite well, a Coulombic potential and a radial δ - δ' contact interaction at the well edge.

Considering the Woods-Saxon potential and defining the appropriate matching conditions for the radial functions, thereby fixing a self-adjoint extension of the non-singular Hamiltonian, analytical solutions for the wave function of this particle are calculated.

The existing bound states are thoroughly studied, and some of the well-known ordering properties of continuous spherically symmetric potentials are extended.

The present study is implemented as a first approximation for a mean-field nuclear model. Results derived within this model are compared with the ones obtained by solving numerically the classical Woods-Saxon model for nucleons which complete double magic nuclei.

Introducción

Motivación

A lo largo de la historia de la física ha habido numerosos intentos de comprender cómo se forma la materia. En la década de 1950, la mayoría de avances científicos en el estudio de la materia se debieron a descubrimientos del núcleo atómico. Tanto es así que numerosos científicos, como son Ernest Rutherford, Paul Wigner o Maria Goeppert-Mayer entre otros, han sido galardonados con el Premio Nobel en Física por sus contribuciones en estas líneas de investigación. Entre algunas de estas aportaciones, está el modelo nuclear de capas, que al igual que el modelo de capas electrónico, sugiere el llenado de niveles mediante nucleones. Este modelo, motivado por diversas evidencias experimentales, da lugar a lo que se conoce como *números mágicos*, números que corresponden a capas llenas de nucleones, y que hacen que ciertos isótopos sean particularmente estables.

En el año 1949 se aportó el primer modelo matemático que permitía reproducir a la perfección la existencia de los números mágicos que se encontraban experimentalmente (ver [13]). El trabajo que se presenta en la presente memoria pretende proponer un modelo que, utilizando un potencial que reproduzca todos los números mágicos, pueda ser resuelto de forma analítica, y empleado para calcular los niveles de energía de nucleones adicionales en isótopos doblemente mágicos (es decir, con capas de neutrones y capas de protones llenas). De esta forma, desarrollaremos una primera aproximación a un modelo nuclear de campo medio.

En el artículo [1], publicado en 2020, se ha realizado un análisis de un modelo similar al que nos proponemos ahora. Básicamente, se ha estudiado una partícula no relativista sujeta al mismo potencial que proponemos ahora, pero sin el término del potencial coulombiano, ya que el nucleón estudiado en este caso es necesariamente un neutrón. Por tanto, buscamos generalizar, en lo posible, la solución y las conclusiones obtenidas en [1], de forma que al hacer tender a cero los términos que se derivan de la influencia del término coulombiano, se obtengan los resultados, en particular la función de la partícula bajo estudio, ahí enunciados.

Matemáticamente, se va a realizar el estudio de una partícula (el nucleón) no relativista sujeta a un potencial tridimensional esférico consistente en un pozo finito, un término de potencial coulombiano y una interacción radial δ - δ' de contacto en el borde de este pozo. Este potencial de contacto se define por las condiciones de ajuste apropiadas (véase la referencia [2]), de forma que se fija una extensión autoadjunta del hamiltoniano no singular resultante.

Objetivos

El objetivo principal de este trabajo es desarrollar un modelo fenomenológico que nos permita estudiar los posibles estados ligados, y la energía de los mismos, de nucleones (ya sean protones o neutrones) dentro de un isótopo doblemente mágico. Más concretamente, se pretende detallar a fondo cómo afectan los diferentes parámetros involucrados en el modelo que desarrollaremos en el número de estados ligados, así como ordenar la energía en función de los números cuánticos de cada estado ligado. Finalmente, se van a comparar los resultados obtenidos a partir de este modelo con otros que se obtienen al resolver numéricamente modelos similares.

Esquema de la memoria

En el *Capítulo 1* se desarrollan muchas de las evidencias que llevaron al modelo nuclear de capas, y se analizan posibles potenciales que reproduzcan hechos experimentales relacionados con la existencia de los números mágicos. Además, se recogen todos los isótopos doblemente mágicos actualmente conocidos.

Una vez que se ha presentado el modelo nuclear de capas, en el *Capítulo 2* se formaliza matemáticamente el modelo que utilizaremos, y se resolverá la ecuación de Schrödinger para el sistema considerado. Para ello, se partirá del estudio del caso en que el nucleón adicional sea un protón, y finalmente se comprobará que haciendo tender los términos de carga eléctrica a cero, se recupera la solución analítica obtenida en [1] para el caso en que el nucleón extra sea un neutrón.

Partiendo de la función de onda encontrada en el segundo capítulo, en el *Capítulo 3* se plantea la ecuación secular del modelo resultante, y se resuelve para encontrar estados ligados. En este capítulo se realiza un estudio profundo de los estados ligados (número de estados ligados, valor máximo del momento angular y ordenación de estados en función de los números cuánticos), visto como modelo matemático, sin pretensiones de obtener ninguna conclusión física.

Finalmente, en el *Capítulo 4* se examina el modelo propuesto para valores realistas de las constantes utilizadas, exponiendo un método general de análisis, y aplicándolo a tres núcleos doblemente mágicos: ^{208}Pb , ^{40}Ca y ^{16}O . Las conclusiones obtenidas son comparadas con los resultados procedentes de la resolución numérica de modelos similares. Posteriormente, se presentan y discuten conclusiones del modelo desarrollado a lo largo de este trabajo.

En el *Apéndice A*, se recoge la resolución analítica de ecuaciones diferenciales ordinarias que aparecen en el *Capítulo 2* y algunas de las propiedades de las soluciones a estas mismas ecuaciones, mientras que en el *Apéndice B* se recopilan las condiciones de ajuste apropiadas que fijan una extensión autoadjunta del hamiltoniano no singular.

Capítulo 1

Modelo nuclear de capas

A lo largo de este estudio, vamos a utilizar el modelo nuclear de capas. El objetivo de este primer capítulo no es exponer de manera profunda dicho modelo, sino recoger los resultados e ideas claves que se derivan del mismo, y que serán utilizadas de forma posterior en esta memoria. Para el desarrollo de este modelo seguiremos el esquema empleado en el capítulo 5 de [3].

Antes de comenzar a enumerar los diferentes experimentos que condujeron al modelo nuclear de capas, es importante justificar la necesidad de los modelos nucleares, así como dejar claro qué conclusiones podemos esperar obtener de ellos. La importancia de los modelos nucleares se ve más que justificada por la imposibilidad de estudiar los núcleos atómicos mediante potenciales nucleón-nucleón. Una de estas dificultades se debe a que matemáticamente, utilizar potenciales de este tipo implica resolver el problema de muchos cuerpos, cuya solución no se puede obtener de forma analítica. Otro problema adicional se debe a la naturaleza de la propia fuerza nuclear. Hay evidencias para pensar que los nucleones no interactúan únicamente mediante fuerzas mutuas de dos cuerpos, sino que lo hacen mediante fuerzas de tres cuerpos, es decir, que la fuerza sobre el nucleón 1 no solo depende de las posiciones individuales de los nucleones 2 y 3, sino que contiene una contribución adicional que surge de la correlación de las posiciones de los nucleones 2 y 3.

Mediante los modelos nucleares esperamos obtener simplificaciones de problemas reales que puedan ser analizadas desde el punto de vista matemático, y que sean capaces de reproducir, al menos de forma fenomenológica, propiedades que se observen experimentalmente, así como predecir otras que puedan ser medidas en nuevos experimentos.

1.1. Introducción al modelo nuclear de capas

Históricamente, este modelo fue propuesto por D. Ivanenko y E. Gapon en el año 1932, pero inicialmente no fue aceptado. Posteriormente, fue desarrollado de manera independiente por físicos como Eugene Paul Wigner, Maria Goeppert-Mayer o J. Hans D. Jensen, quienes compartieron en 1963 el Premio Nobel en Física por sus “*contribuciones a la teoría del núcleo atómico y las partículas elementales, mediante el descubrimiento y aplicación de principios fundamentales de simetría, y por los descubrimientos sobre la estructura nuclear de capas*”.

Este modelo parte de la misma idea que el modelo de capas de los átomos. En el modelo de capas atómico, los electrones van llenando las capas electrónicas en orden creciente de energía, siempre respetando el Principio de Exclusión de Pauli, y las propiedades químicas de los átomos (radio atómico, energía de ionización, ...) se explican a partir de los electrones en la última subcapa no llena (los electrones de valencia). Este modelo atómico es válido, ya que se comprueba experimentalmente que las propiedades que predice varían de forma suave dentro de una misma capa, mientras que cambian de manera brusca cuando empieza a llenarse otra capa.

El modelo nuclear de capas surge precisamente de aplicar esta misma idea de llenado de capas a los nucleones. Esta propuesta no es casual, sino que existen numerosas evidencias experimentales de la existencia de capas en el núcleo.

Los siguientes experimentos, que sugieren la existencia de capas nucleares, muestran cambios bruscos en las propiedades cuando se tienen 2, 8, 20, 28, 50, 82, o 126 protones o neutrones en un mismo núcleo. Estos números se conocen en física nuclear como *números mágicos*. El cambio repentino en las propiedades de núcleos con un número mágico de protones o neutrones se explica de manera análoga al cambio en las propiedades de átomos que se deducen utilizando el modelo electrónico de capas, es decir, estos números corresponden a capas completas de neutrones o de protones, considerando el llenado de capas por separado para protones o neutrones.

1. Energía de separar dos protones o dos neutrones del núcleo atómico.

En física nuclear, la *fórmula semiempírica de masas* es una fórmula que permite dar la variación de la energía de enlace en función del número másico A y del número atómico Z . Sin embargo, si representamos la diferencia de energía necesaria para arrancar dos nucleones del núcleo entre la obtenida mediante esta fórmula y la experimental, obtenemos la Figura 1.1, donde podemos ver que hay máximos y mínimos para N (o Z) 2, 8, 20, 28, 50, 82 y 126. Estos cambios repentinos corresponden a llenado de capas.

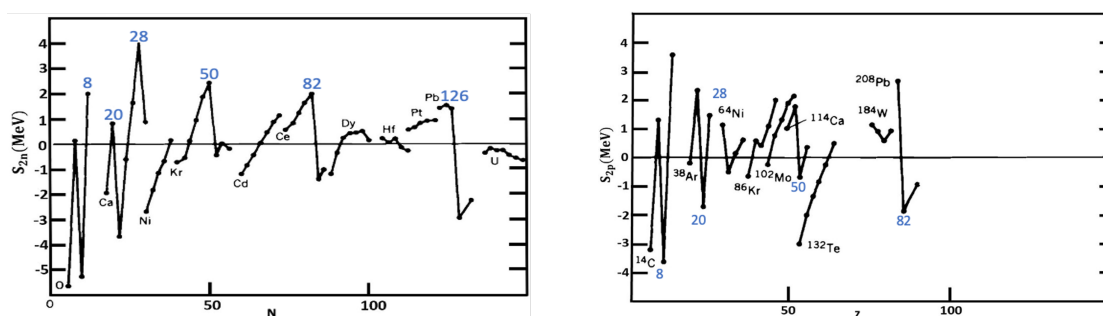
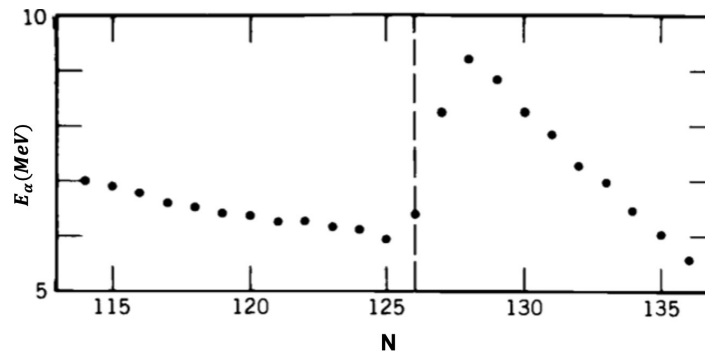


Figura 1.1: Desviaciones en la energía de separación de nucleones respecto a la fórmula semiempírica de masas. Para neutrones a la izquierda y para protones a la derecha.

2. Energía de emisión de partículas α .

El ^{86}Rn es un emisor natural de partículas α . Estudiar la energía de emisión de las partículas α emitidas por el ^{86}Rn únicamente nos permite intuir la existencia de uno de los números mágicos, el número 128. Sin embargo, esto es más que suficiente para evidenciar la existencia de capas nucleares.

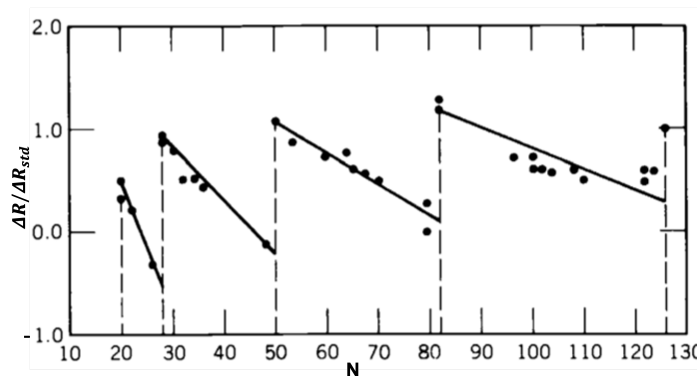
Sabemos de la teoría general de física nuclear que si un núcleo padre decae por emisión de una partícula α en un núcleo hijo que es muy estable, entonces la energía

Figura 1.2: Energía de partículas α emitidas por isótopos de Rn.

de la partícula α es muy grande. Si estudiamos el espectro de energía de emisión de la partícula α en función del número de neutrones N de los isótopos de ^{86}Rn obtenemos la Figura 1.2. Notemos el cambio de tendencia cuando el núcleo hijo tiene $N = 126$ (número mágico) neutrones, es decir, cuando el padre tiene $N = 128$ neutrones. El núcleo hijo es muy estable, debido a que tiene la última capa de neutrones completamente llena, y por tanto, la partícula α es emitida con mayor energía.

3. Radio nuclear al añadir dos neutrones

Se puede demostrar que, teóricamente, el radio nuclear verifica $R_{\text{std}} \propto A^{1/3}$. En la Figura 1.3 se ha representado el cambio en el radio nuclear al añadir dos neutrones. Para enfatizar la diferencia, se ha dividido el cambio experimental entre lo que se predice teóricamente. Se observan los números mágicos 20, 28, 50, 82 y 126.

Figura 1.3: Cambio en el radio nuclear cuando $\Delta N = 2$.

4. Sección eficaz de captura para neutrones.

Si estudiamos la sección eficaz de captura de neutrones en función de N , el número de neutrones del núcleo blanco, obtendremos algo similar a la Figura 1.4. Notemos que se ha utilizado una escala semilogarítmica, y que la sección eficaz diferencial decrece hasta dos órdenes de magnitud menor para los valores cercanos a $N = 50, 82$ y 126 .

Estos cuatro experimentos son algunos de los muchos que sugieren la existencia de capas nucleares. Ante esta evidencia experimental, nuestro siguiente objetivo es desarrollar un modelo nuclear que reproduzca un llenado completo de capas nucleares precisamente para los números mágicos: el modelo nuclear de capas.

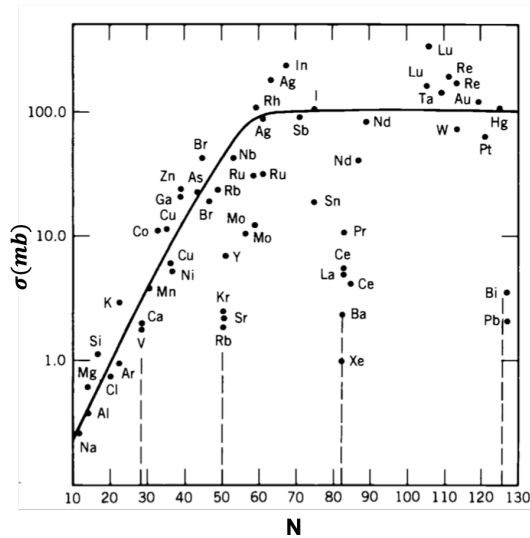


Figura 1.4: Sección eficaz para la captura neutrónica para varios núcleos.

Este modelo tiene como hipótesis fundamental que cada nucleón se mueve en un potencial efectivo que es creado por todos los nucleones restantes (*aproximación de campo medio*). Bajo esta hipótesis, debemos encontrar un potencial efectivo de forma que resolver la ecuación de Schrödinger para dicho potencial nos lleve a la existencia de capas nucleares que estén llenas para un número mágico de nucleones.

En un primer intento de encontrar dicho potencial, podemos probar si potenciales cuya solución es bien conocida conducen a la estructura de capas, y en caso de hacerlo, si reproducen los números mágicos que se encuentran experimentalmente. Dos de estos potenciales conocidos son el pozo de potencial infinito y el potencial del oscilador armónico.

La resolución de la ecuación de Schrödinger para estos potenciales lleva a las estructuras de capas mostradas en la Figura 1.5. A la izquierda de cada nivel se ha indicado la degeneración del mismo, es decir, el número de nucleones que caben dentro. Esta degeneración viene dada por $2(2\ell + 1)$, donde el factor $(2\ell + 1)$ viene de los posibles valores que puede tomar m_ℓ (que son $m_\ell = -\ell, \dots, \ell$), y el factor 2 de los posibles valores que puede tomar m_s , que en este caso son $m_s = \pm 1/2$.

Podemos observar que si en ambos casos se reproduce bien los números mágicos bajos (2, 8 y 20), ninguno de los dos potenciales reproduce correctamente los números mágicos más altos.

El hecho de que estos potenciales no reproduzcan de manera correcta los números mágicos altos no debería sorprendernos, porque tampoco son buenas aproximaciones de un posible potencial nuclear. Por un lado, el pozo infinito no es buena aproximación por varios motivos: para separar un neutrón o un protón del núcleo, debemos dar una cantidad infinita de energía para sacar el nucleón del pozo, lo cual, evidentemente, no es realista físicamente. Además, sabemos que el núcleo no tiene un borde marcado, sino que la densidad de carga y materia desciende a cero suavemente a partir del radio nuclear medio R . Por otra parte, el oscilador armónico no tiene un borde suficientemente marcado, sino que es todavía muy suave, y también requiere de energías de separación infinitas.

Para intentar solventar este problema, se introduce el potencial de Woods-Saxon, cuya

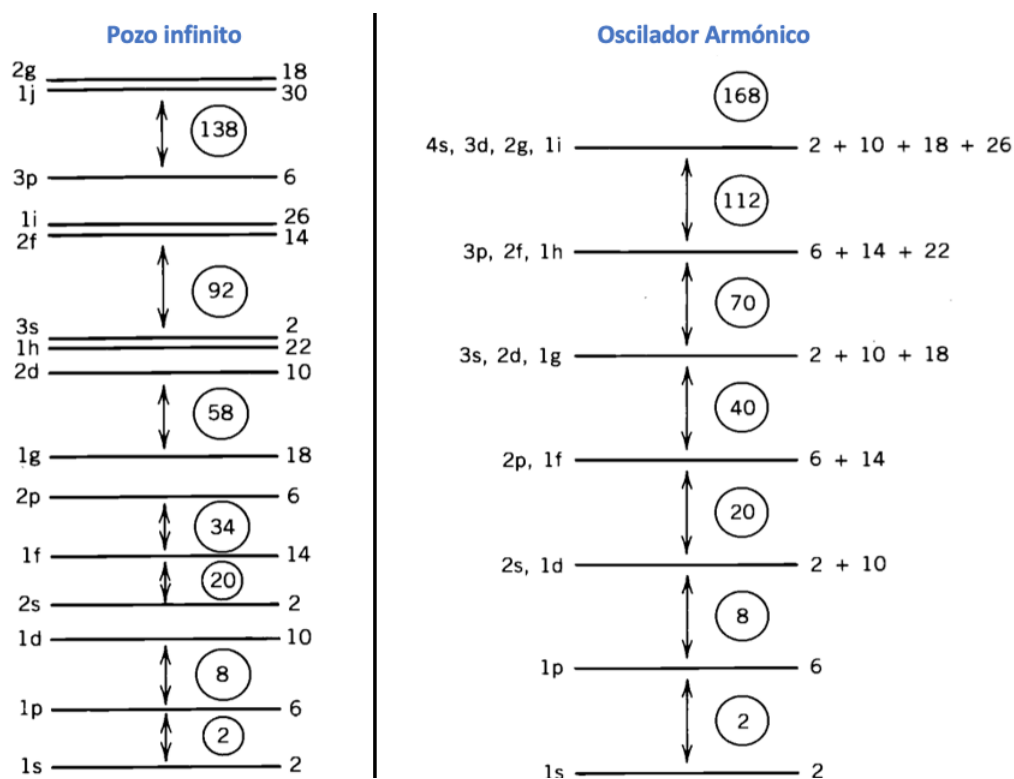


Figura 1.5: Esquema de capas resultante del pozo de potencial infinito y del potencial del oscilador armónico.

expresión viene dada por

$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + \exp[(r - R)/a]}.$$

En el capítulo siguiente dedicaremos una sección al estudio de este potencial (Sección 2.1), por lo que ahora nos quedaremos únicamente con la expresión matemática y con la estructura de capas que se deduce de la resolución de Schrödinger para dicho potencial, dejando para más adelante un estudio de la forma y parámetros físicos involucrados.

Utilizar este potencial, rompe la degeneración que aparecía en el oscilador armónico, pues separa la energía de distintos valores del momento angular ℓ . Sin embargo, tampoco explica los números mágicos más altos.

Para poder reproducir los números mágicos más altos, hubo que introducir más términos en el potencial. En el año 1949 los físicos Mayer, Haxel, Suess y Jensen mostraron que introducir un término de potencial espín-órbita puede dar la separación apropiada de las subcapas. El potencial utilizado es de la forma

$$U_{\text{so}}(r) = V_{\text{so}} F(r) \mathbf{L} \cdot \mathbf{S},$$

siendo V_{so} una constante propia de cada núcleo, y $F(r)$ una función radial cuya expresión es irrelevante, únicamente importa que aparezca en el potencial $U_{\text{so}}(r)$ el factor $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$, que es el que causa el reordenamiento de las capas nucleares.

Al igual que se hace en física atómica, al utilizar una interacción espín-órbita es conveniente emplear el momento angular total $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$, ya que el operador momento angular total conmuta con el nuevo hamiltoniano, que incluye el término con $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$, mientras que \mathbf{S} y \mathbf{L} no lo hacen.

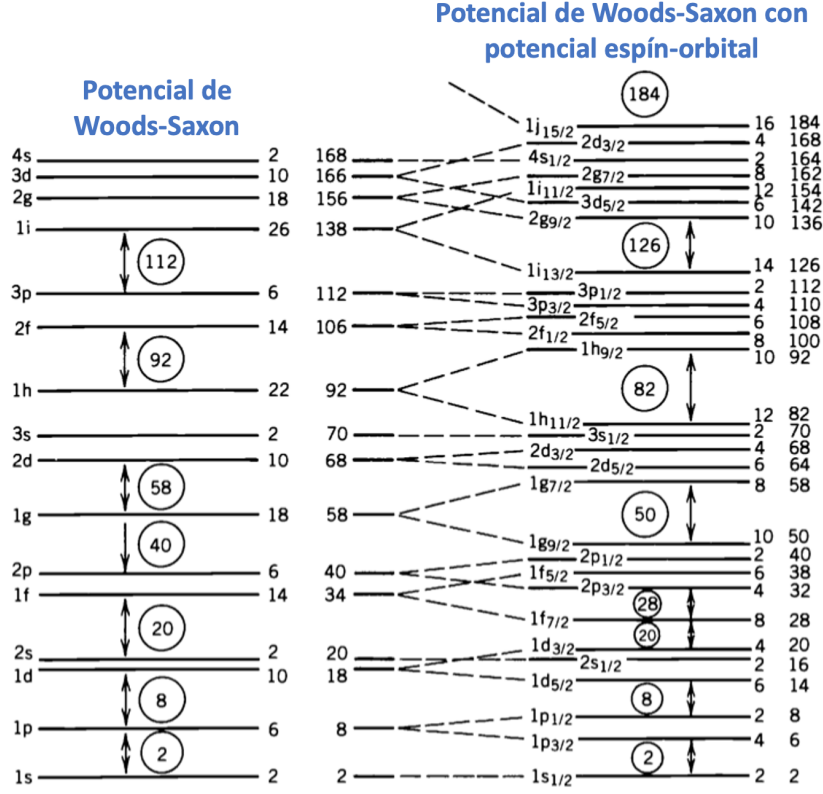


Figura 1.6: Esquema de capas resultante del potencial de Woods-Saxon.

En la Figura 1.6 se ha representado la estructura de capas que se obtiene con el potencial de Woods-Saxon, y con este mismo potencial pero incluyendo el potencial espín-órbita.

Podemos apreciar que el nuevo término añadido es el que separa cada uno de los niveles con $\ell > 0$ en dos nuevos niveles. De hecho, se puede obtener de manera sencilla la separación de estos niveles calculando el valor esperado $\langle \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \rangle$. Puesto que

$$\mathbf{J}^2 = (\mathbf{L} + \mathbf{S})^2 = \mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + 2\mathbf{L} \cdot \mathbf{S},$$

se tiene que $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = (\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2)/2$. Por tanto, tomando valores esperados en esta última igualdad, se deduce que

$$\langle \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} [j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)] \hbar^2. \quad (1.1)$$

Notemos que $s = \pm 1/2$, luego si $\ell > 0$, los posibles valores de j son $j = \ell \pm 1/2$. Por tanto, para cualquier pareja de estados con $\ell > 0$, podemos calcular la diferencia de energía que aparece debido al término espín-órbita utilizando (1.1):

$$\langle \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \rangle_{j=\ell+1/2} - \langle \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \rangle_{j=\ell-1/2} = \frac{1}{2} (2\ell + 1) \hbar^2. \quad (1.2)$$

De la expresión anterior se deduce que el *splitting* crece para valores más altos de ℓ .

El modelo de capas nuclear sirve para predecir muchas propiedades nucleares, como puede ser el momento dipolar magnético, el momento cuadrupolar eléctrico, o describir algunos de los estados excitados de ciertos núcleos. Sin embargo, para nuestros propósitos nos sirven las ideas hasta ahora desarrolladas. Simplemente, resta por definir lo que entendemos por *núcleos doblemente mágicos*.

1.1.1. Núcleos doblemente mágicos

Los núcleos que tienen tanto un número mágico de protones como un número mágico de neutrones son particularmente estables. Estos núcleos se conocen como *núcleos doblemente mágicos*.

En la Figura 1.7 se han representado todos los núcleos conocidos, ordenándolos según el número de protones Z y del número de neutrones N . Los colores simplemente indican cuan estable es un núcleo, utilizando los colores oscuros (cerca de negro) para aquellos núcleos que son más estables y los colores claros para aquellos que lo son menos.

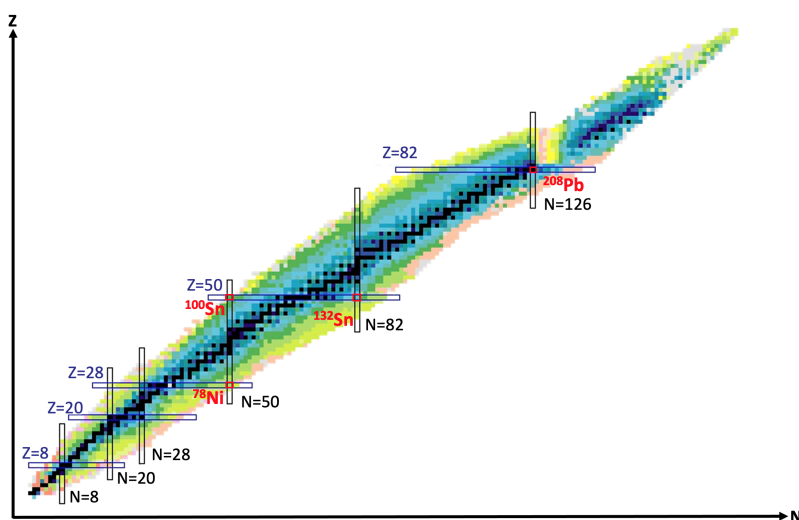


Figura 1.7: Tabla nuclear tomada de la referencia [4].

En esta misma figura se han representado líneas de isótopos (mismo número de protones Z), y líneas isótónicas (mismo número de neutrones N) para los números mágicos 8, 20, 28, 50, 82 y 126, de forma que los puntos de corte entre ambas líneas corresponden a ejemplos de núcleos doblemente mágicos.

Como se ha mencionado en la Introducción, nuestro estudio se centra en el estudio de los posibles estados ligados de nucleones dentro de núcleos doblemente mágicos. Por tanto, estudiaremos los núcleos que aparecen en la intersección de las líneas de isótopos e isótónicas representadas en la Figura 1.7, algunos de los cuales han sido resaltados en color rojo.

Para proseguir con nuestro estudio, aplicaremos la hipótesis de campo medio, es decir, supondremos que el potencial al que se ve sujeto el protón adicional es precisamente el potencial efectivo debido al núcleo doblemente mágico.

Finalmente, comentar que a lo largo de esta memoria, ${}^A_Z X_N$ denota la notación nuclear estándar, es decir, A hace referencia al número másico (protones más neutrones del núcleo), Z al número atómico (número de protones), N al número de neutrones y X la especie nuclear. En todo momento se indicará el número atómico A y la especie nuclear (en esencia, Z), pudiendo obtener a partir de ellos el número de neutrones en caso de que fuese necesario.

Capítulo 2

Modelo nuclear basado en potenciales de contacto

La configuración que estudiamos consiste en un núcleo de número másico A , número de neutrones N y número de protones (número atómico) Z , a los que se añade un protón extra. Los protones, además de la fuerza nuclear fuerte, experimentan la fuerza de Coulomb.

En este modelo, vamos a considerar los nucleones como partículas puntuales, sin ninguna estructura interna. Esta aproximación es válida siempre que nuestro propósito sea estudiar la estructura nuclear a bajas energías. Por otra parte, las fuerzas nucleares se describen sin atender a sus mecanismos subyacentes, es decir, sin atender a los grados de libertad mesónicos y de quarks.

Como ya se ha mencionado en el capítulo anterior, para estudiar sistemas de núcleos doblemente mágicos con un protón adicional, utilizaremos la aproximación de campo medio, es decir, suponemos que cada nucleón se mueve en un campo externo creado por los $A - 1$ nucleones restantes, e intuitivamente, consideramos el potencial efectivo como un promedio temporal de las interacciones entre el nucleón y sus vecinos restantes.

A lo largo del capítulo, se pretende formalizar el modelo que emplearemos en esta memoria, así como encontrar las autofunciones del hamiltoniano resultante. Por otra parte, se comprobará que en el límite de la carga del protón tendiendo a cero, se recuperan las soluciones obtenidas en [1] para un sistema similar a este, pero que estudia la función de onda de un neutrón adicional en un isótopo doblemente mágico, en vez de un nucleón dentro de núcleo doblemente mágico como ahora hacemos.

2.1. Potencial de Woods-Saxon

En nuestro modelo de estudio utilizaremos el potencial de Woods-Saxon, un potencial de campo medio utilizado para describir las fuerzas aproximadas que aparecen sobre cada nucleón (protones y neutrones) en el modelo nuclear de capas.

Este potencial, presentado originariamente en [5], se debe a Roger D. Woods y David S. Saxon, y toma la siguiente expresión

$$U_0(r) = -V_0 f(r) = -\frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)}, \quad r \geq 0, \quad (2.1)$$

donde $V_0 > 0$ hace referencia a la profundidad del pozo de potencial, $a > 0$ al espesor de la superficie del núcleo, y $R > 0$ al radio nuclear. En la Figura 2.1 pueden verse varios ejemplos de este potencial al variar exclusivamente el parámetro a , dejando constantes V_0 y R . En nuestro modelo posteriormente consideraremos el límite $a \rightarrow 0^+$, que, como ya veremos de forma analítica, se comporta como un pozo de potencial (algo que ya se intuye en la Figura 2.1).

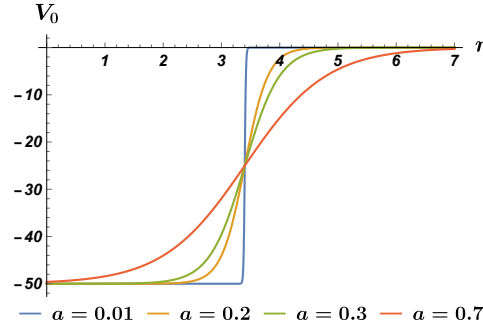


Figura 2.1: Potencial de Woods-Saxon para valores adimensionales de a , $V_0 = -50$ y $R = 3.39$.

Por otra parte, podemos representar el potencial de Woods-Saxon para distintos valores de R (en esencia, distintos números atómicos), y distintos valores de V_0 . En la Figura 2.2 podemos apreciar de manera intuitiva cómo V_0 hace referencia a la profundidad del potencial, mientras que R a la extensión del núcleo atómico.

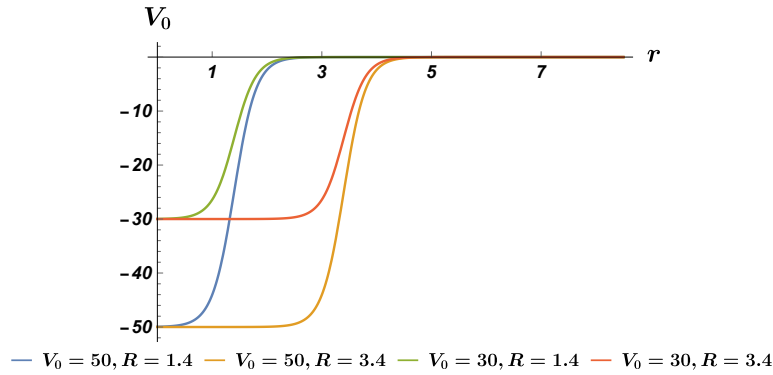


Figura 2.2: Potencial de Woods-Saxon para distintos valores de R y de V_0 , con $a = 0.2$.

En este modelo, no solo aparecerá el potencial de Woods-Saxon, sino también términos que incluyen su primera y segunda derivada. Sin más que derivar dos veces la función $f(r)$ definida en (2.1), tenemos que

$$f'(r) = -\frac{1}{a} \frac{e^{(r-R)/a}}{(1 + e^{(r-R)/a})^2}, \quad (2.2)$$

$$f''(r) = -\frac{1}{a^2} \frac{e^{(r-R)/a} (1 - e^{(r-R)/a})}{(1 + e^{(r-R)/a})^3}. \quad (2.3)$$

En la Figura 2.3 se ha representado la derivada primera y segunda de Woods-Saxon (a la izquierda $V = -V_{so}f'(r)$ y derecha $V = -V_qf''(r)$) para distintos valores del parámetro a . Como ya se ha mencionado, en nuestro modelo tomaremos el límite cuando $a \rightarrow 0^+$. En la siguiente sección se realizará un estudio analítico de este límite para ambas funciones.

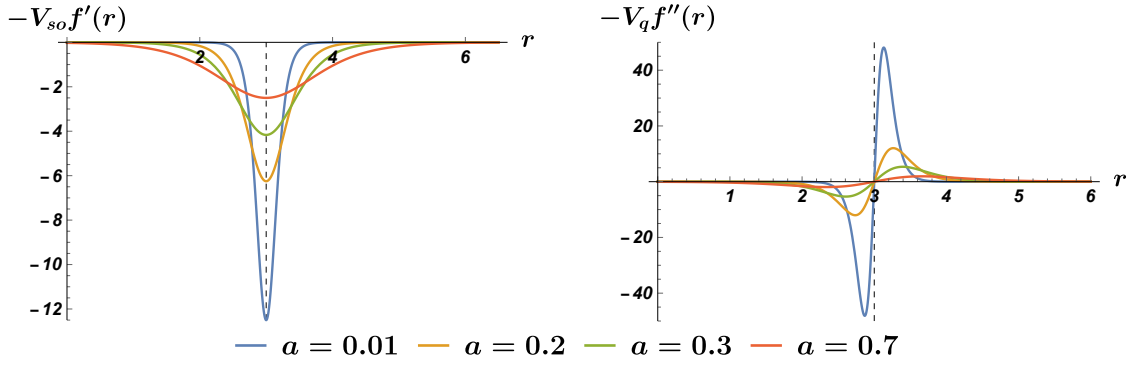


Figura 2.3: Derivadas primera (izquierda) y segunda (derecha) del potencial de Woods-Saxon para $V_{so} = 5$, $V_q = 5$ y $R = 3$.

Las siguientes propiedades del potencial (2.1) son las que hacen factible que este potencial sea utilizado en física nuclear para aproximar el potencial existente alrededor de un núcleo atómico:

- Crece de forma monótona con la distancia r , por lo que se trata de un potencial atractivo.
- Los nucleones cerca de la superficie del núcleo (es decir, en $r \approx R$ a una distancia de orden a) experimentan una fuerza grande hacia el centro del núcleo.
- Se acerca rápidamente a cero cuando $r - R \gg a$, reflejando la naturaleza de fuerza de corta distancia característica de la fuerza nuclear fuerte.
- Para valores grandes de R es aproximadamente plano en el interior del núcleo (en $r < R$).

2.1.1. Constantes físicas

Anteriormente se ha descrito el potencial radial de Woods-Saxon, cuya expresión es la dada por (2.1). Según se ha mencionado, nuestro modelo tomará el límite en que $a \rightarrow 0^+$, pero aún resta especificar los valores de V_0 , V_{so} , V_q y del radio atómico, R , que utilizaremos en el planteamiento del hamiltoniano de este modelo en los próximos capítulos. El objetivo de esta sección es precisamente recopilar las parametrizaciones usuales de estas constantes, de forma que el potencial de Woods-Saxon suponga una buena aproximación de potencial nuclear, y ofrezca conclusiones físicas que puedan ser comparables a lo observado experimentalmente.

En la Sección 3.1.1 de [2], se especifica que las parametrizaciones utilizadas usualmente para el potencial de Woods-Saxon, así como para el término V_{so} que aparece en el potencial espín-órbita, son las siguientes:

$$R = r_0 A^{1/3} = 1.28 A^{1/3} \text{ fm}, \quad (2.4)$$

$$V_0 = \left(51 \pm 33 \frac{N - Z}{A} \right) \text{ MeV}, \quad (2.5)$$

$$V_{so} = 0.44 V_0 \text{ MeV fm}, \quad (2.6)$$

donde A , N y Z denotan el número másico, número de neutrones y de protones respectivamente.

Como ya se mencionado, estamos utilizando la aproximación de campo medio, de forma que podemos ver cada nucleón como si estuviese inmerso en un campo externo creado por los demás $A - 1$ nucleones. Para núcleos con un exceso de neutrones, los protones sentirán un potencial más fuerte que los neutrones, ya que el potencial protón-neutrón promedio es más fuerte que el potencial promedio neutrón-neutrón (o protón-protón). El signo de (2.5) da cuenta precisamente de esto, debemos tomar el signo $+$ para definir el potencial que siente un protón debido a los restantes nucleones, y el signo $-$ en caso de que se trate de un neutrón.

2.2. Hamiltoniano del sistema

Consideremos el siguiente hamiltoniano para el centro de masas de nuestro sistema,

$$H(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{P}^2}{2\mu} + U_0(r) + U_{\text{so}}(r)(\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}) + U_{\text{q}}(r) + V_{\text{C}}(r), \quad (2.7)$$

donde μ denota la masa reducida, \mathbf{P} el operador cinético, \mathbf{L} y \mathbf{S} los operadores momento angular orbital y de espín respectivamente, $V_{\text{C}}(r)$ el potencial coulombiano, y $U_0(r)$, $U_{\text{so}}(r)$ y $U_{\text{q}}(r)$ el potencial de Woods-Saxon, su primera y su segunda derivada, es decir,

$$\begin{aligned} U_0(r) &= -V_0 f(r) = -V_0 \frac{1}{1 + e^{(r-R)/a}}, \\ U_{\text{so}}(r) &= \frac{V_{\text{so}}}{\hbar^2} f'(r) = -\frac{V_{\text{so}}}{a\hbar^2} \frac{e^{(r-R)/a}}{(1 + e^{(r-R)/a})^2}, \\ U_{\text{q}}(r) &= V_{\text{q}} f''(r) = -\frac{V_{\text{q}}}{a^2} \frac{e^{(r-R)/a} (1 - e^{(r-R)/a})}{(1 + e^{(r-R)/a})^3}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Recordemos que podemos escribir el operador cinético en términos del momento angular \mathbf{L} y las coordenadas radiales, pues

$$\frac{\mathbf{P}^2}{2\mu} = \frac{1}{2\mu} (-i\hbar\nabla)^2 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2,$$

y, puesto que en coordenadas esféricas el operador ∇^2 viene dado por

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\mathbf{L}^2}{\hbar^2 r^2},$$

deducimos la siguiente expresión para este operador

$$\frac{\mathbf{P}^2}{2\mu} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\mathbf{L}^2/\hbar^2}{r^2} \right]. \quad (2.9)$$

Las autofunciones de la ecuación de Schrödinger correspondiente al hamiltoniano propuesto (2.7) se pueden factorizar en una parte radial $u_{n\ell j}(r)/r$ y una parte angular $\mathcal{Y}_{\ell j m}(\theta, \phi)$, donde $\mathcal{Y}_{\ell j m}(\theta, \phi)$ es una combinación lineal de armónicos esféricos $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$. Recordemos

que, si \mathbf{L} , \mathbf{S} , y \mathbf{J} son los operadores de momento angular orbital, momento angular de espín, y momento angular total respectivamente, entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^2\mathcal{Y}_{\ell jm}(\theta, \phi) &= \hbar^2\ell(\ell+1)\mathcal{Y}_{\ell jm}(\theta, \phi), & \ell = 0, 1, 2, \dots, n-1, \\ \mathbf{S}^2\mathcal{Y}_{\ell jm}(\theta, \phi) &= \hbar^2s(s+1)\mathcal{Y}_{\ell jm}(\theta, \phi), & \text{donde } s = 1/2, \\ \mathbf{J}^2\mathcal{Y}_{\ell jm}(\theta, \phi) &= \hbar^2j(j+1)\mathcal{Y}_{\ell jm}(\theta, \phi), & |\ell - s| \leq j \leq \ell + s,\end{aligned}\quad (2.10)$$

de manera que $\mathcal{Y}_{\ell jm}(\theta, \phi)$ es simultáneamente autofunción de los tres operadores \mathbf{L}^2 , \mathbf{S}^2 y $\mathbf{J}^2 = (\mathbf{L} + \mathbf{S})^2$. Por otra parte, podemos escribir la interacción espín-órbita $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ como

$$(\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}) = \frac{1}{2} (\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2),$$

luego, sin más que aplicar dicha expresión del operador a la combinación lineal de armónicos esféricos $\mathcal{Y}_{\ell jm}(\theta, \phi)$, se comprueba que

$$\begin{aligned}(\mathbf{L} \cdot \mathbf{S})\mathcal{Y}_{\ell jm}(\theta, \phi) &= \frac{1}{2} (\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2) \mathcal{Y}_{\ell jm}(\theta, \phi) \\ &= \frac{\hbar^2}{2} (j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)) \mathcal{Y}_{\ell jm}(\theta, \phi) \\ &= \frac{\hbar^2}{2} \left(j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} \right) \mathcal{Y}_{\ell jm}(\theta, \phi),\end{aligned}\quad (2.11)$$

donde en la última igualdad se ha utilizado que $s = 1/2$. Vemos así que $\mathcal{Y}_{\ell jm}(\theta, \phi)$ es también una autofunción del operador $(\mathbf{L} \cdot \mathbf{S})$. En vistas de (2.11), conviene definir

$$\xi_{\ell j} \equiv \frac{1}{2} \left(j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} \right), \quad (2.12)$$

y, puesto que j únicamente puede tomar los valores $j = \ell + 1/2, \ell - 1/2$, si $\ell > 0$, y $j = 1/2$ si $\ell = 0$, tenemos que

$$\xi_{\ell j} = \begin{cases} \frac{\ell}{2} & \text{para } j = \ell + \frac{1}{2}, \text{ con } \ell \geq 0, \\ -\frac{(\ell+1)}{2} & \text{para } j = \ell - \frac{1}{2}, \text{ con } \ell > 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Utilizando las relaciones anteriores, tenemos que la parte radial de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para el hamiltonianon (2.7) satisface $Hu_{nlj}(r) = E_{nlj}u_{nlj}(r)$, donde

$$H = \frac{-\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] - V_0f(r) + V_{\text{so}}\xi_{\ell j}f'(r) + V_{\text{q}}f''(r) + V_{\text{C}}(r). \quad (2.14)$$

Notemos que, usualmente, el término del hamiltoniano correspondiente al espín-órbita se define con un factor $1/r$. Sin embargo, se puede mostrar mediante resoluciones numéricas, al igual que se muestra en la Tabla 1 de [1] para neutrones, que los efectos de este factor sobre los niveles de energía de protones es despreciable para las ondas parciales s , mientras que tiene efectos más pronunciados para valores mayores de $\ell = 1$. Puesto que esta diferencia se puede absorber en la fuerza efectiva V_{so} , prescindiremos de el término $1/r$ en nuestra definición del factor espín-órbita.

De cara a obtener un potencial efectivo más manejable, vamos a considerar el límite $a \rightarrow 0^+$ en las expresiones descritas en (2.8). Para el potencial de Woods-Saxon $U_0(r)$, tenemos que

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} U_0(r) = \left\{ \begin{array}{ll} -V_0 & \text{si } r < R \\ -V_0/2 & \text{si } r = R \\ 0 & \text{si } r > R \end{array} \right\} = V_0[\theta(r - R) - 1], \quad (2.15)$$

donde $\theta(x)$ es la función escalón de Heaviside definida por

$$\theta(x) \equiv \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } 0 < x. \\ 1/2 & \text{si } x = 0. \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Para calcular $f'(r)$ y $f''(r)$, debemos utilizar la definición de la derivada en el sentido de las distribuciones.

Para un estudio avanzado sobre la teoría de distribuciones se puede consultar el Capítulo 7 de [6], pero sin entrar en muchos detalles técnicos, puede decirse que una distribución es una aplicación lineal y continua de un espacio de funciones de prueba en \mathbb{C} . En el caso que nos ocupa, consideraremos como espacio de prueba el espacio de Schwartz $\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Si bien se puede formalizar, intuitivamente este espacio de prueba es el espacio de funciones indefinidamente derivables y de decrecimiento rápido, es decir, es el espacio formado por funciones de clase $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$, tales que tanto ellas como sus derivadas de cualquier orden tienen a cero en el infinito ($\pm\infty$) más deprisa que el inverso de cualquier polinomio. Por otra parte, si $\psi(r) \in \mathcal{S}$ es una función cualquiera de este espacio, entonces la acción de la distribución $f(r)$ sobre $\psi(r)$ se define, simbólicamente, por

$$f[\psi(r)] \equiv \langle \psi(r) | f(r) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* f(r) dr.$$

Nuestro objetivo ahora no es exponer de forma concisa el concepto de derivada de una distribución, sino que simplemente utilizaremos que dada una distribución f , su *derivada p-ésima en el sentido de las distribuciones* se define como aquella distribución que actúa del siguiente modo

$$\left(\frac{d^p f}{dx^p} \right) [\psi] \equiv \left\langle \frac{d^p f}{dx^p} | \psi \right\rangle := \left\langle f | (-1)^p \frac{d^p \psi}{dx^p} \right\rangle. \quad (2.17)$$

Haciendo la primera derivada de f en el sentido de las distribuciones y tomando el límite $a \rightarrow 0^+$, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0^+} \left\langle \psi(r) | \frac{d}{dr} f(r) \right\rangle &= - \lim_{a \rightarrow 0^+} \langle \psi'(r) | f(r) \rangle = - \langle \psi'(r) | 1 - \theta(r - R) \rangle \\ &= \langle \psi(r) | -\delta(r - R) \rangle, \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde se ha utilizado que $\lim_{a \rightarrow 0^+} f(r) = 1 - \theta(r - R)$, como ya vimos en (2.15), y que la delta de Dirac es la derivada de la función escalón de Heaviside definida en (2.16). Por tanto, tenemos que

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} V_{\text{so}} \xi_{\ell j} f'(r) = -V_{\text{so}} \xi_{\ell j} \delta(r - R). \quad (2.19)$$

Repetiendo el procedimiento anterior, hallamos la siguiente expresión para la derivada segunda

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} U_q(r) = \lim_{a \rightarrow 0^+} V_q f''(r) = -V_q \delta'(r - R). \quad (2.20)$$

Finalmente, si consideramos el núcleo atómico como una distribución continua y uniforme de carga, cuya carga total es Ze , la parte del potencial coulombiano $V_C(r)$ (*energía potencial electrostática de esfera maciza uniformemente cargada y un protón*) viene dada por

$$V_C(r) = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{3 - (r/R)^2}{2R}, & r \leq R, \\ \frac{1}{r}, & r > R, \end{cases} \quad (2.21)$$

donde el término $V_C(r)$ afecta únicamente a protones, siendo cero cuando tratamos el estudio de neutrones. En la Figura 2.4 se ha representado dicho potencial.

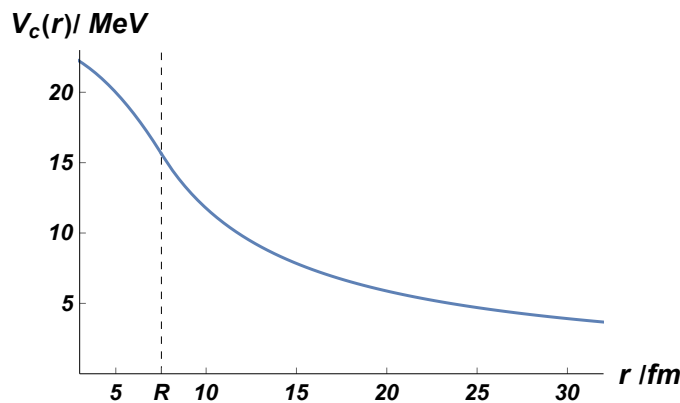


Figura 2.4: Energía potencial electrostática (2.21) para el núcleo de ^{208}Pb (con $Z = 82$, y $R = 7.53$ fm).

Con todo ello, el límite cuando $a \rightarrow 0^+$ del hamiltoniano (2.14) nos lleva al hamiltoniano singular

$$H_{\text{sing}} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] + V_0[\theta(r-R) - 1] + V_C(r) - V_{\text{so}}\xi_{\ell j}\delta(r-R) - V_q\delta'(r-R), \quad (2.22)$$

expresión con la que trabajaremos en las siguientes secciones.

2.3. Resolución de la ecuación de Schrödinger

En la sección anterior se ha derivado (2.22), una expresión para la parte radial del hamiltoniano de nuestro sistema de estudio. El modelo considerado parte del modelo de Woods-Saxon clásico, pero hemos considerado el límite $a \rightarrow 0^+$, para poder encontrar analíticamente la función de onda del nucleón bajo estudio, y se ha añadido el término δ' para compensar, en medida de lo posible, los efectos que tiene esta hipótesis.

Si no hubiésemos considerado la aproximación $a \rightarrow 0^+$, tendríamos que, o bien emplear métodos numéricos, o bien utilizar el método de Nikiforov-Uvarov para poder resolver la ecuación de Schrödinger que se obtiene del modelo de Woods-Saxon.

El objetivo de esta sección es determinar las autofunciones de dicho hamiltoniano, es

decir, encontrar funciones $u_\ell(r)$ que verifiquen

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2\mu E}{\hbar^2} + \frac{2\mu V_0}{\hbar^2} (\theta(r-R) - 1) + \frac{2\mu}{\hbar^2} V_C(r) + \alpha\delta(r-R) + \beta\delta'(r-R) \right] u_\ell(r) = 0, \quad (2.23)$$

donde se han definido

$$\alpha \equiv -\frac{2\mu}{\hbar^2} V_{so} \xi_{\ell j} \quad y \quad \beta \equiv -\frac{2\mu}{\hbar^2} V_q. \quad (2.24)$$

Los parámetros definidos en (2.24) se deben entender como parámetros independientes, sin ninguna relación, en principio, con cualquier aplicación a modelos nucleares. Por ello, la ecuación (2.23) puede ser considerada de manera abstracta como describiendo una partícula cuántica sujeta a un pozo esférico con potencial coulombiano y con una interacción δ - δ' en su borde.

La ecuación radial de Schrödinger (2.23) está definida en el intervalo $0 \leq r < \infty$. Sin embargo, para poder resolverla, dividimos el espacio en dos regiones: $0 \leq r < R$ y $R < r < \infty$. De esta forma, obtendremos una función de onda en cada una de las regiones y aplicaremos condiciones adecuadas de ajuste en $r = R$, definiendo así la parte singular del hamiltoniano.

Cabe mencionar que en [1] se ha realizado un estudio detallado de un hamiltoniano similar a (2.23), donde se omitió el término coulombiano. En esencia, en dicha referencia se resuelve la ecuación de Schrödinger para un neutrón ligado a un núcleo doblemente mágico, mientras que nuestro propósito ahora es resolver la misma ecuación aplicada a un nucleón, que en este caso puede ser o bien un protón o bien un neutrón, que se encuentra dentro de un isótopo doblemente mágico. Por tanto, esperamos poder recuperar las soluciones que se obtienen en [1] a partir de las obtenidas en las próximas secciones sin más que hacer nulos los términos que se deriven de la influencia de este potencial coulombiano.

Para resolver la ecuación que define (2.23), abordaremos la resolución en la región $0 \leq r < R$, que denotaremos por interior, y luego en $r > R$, que denotaremos por exterior.

2.3.1. Ecuación de onda en la región interior

Para valores de r tales que $0 \leq r < R$, tomando los términos de la ecuación (2.23) que afectan a esta región, y teniendo en cuenta la expresión para esta zona del espacio de la energía potencial coulombiana definida en (2.21), tenemos que

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2\mu(E+V_0)}{\hbar^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{3 - (r/R)^2}{2R} \right] u_\ell(r) = 0, \quad (2.25)$$

es decir, debemos resolver

$$\frac{d^2 u_\ell(r)}{dr^2} + \left[\frac{2\mu(E+V_0)}{\hbar^2} - \frac{3\mu Ze^2}{4\pi\hbar^2\epsilon_0 R} + \frac{\mu Ze^2}{4\pi\hbar^2\epsilon_0} \frac{r^2}{R^3} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] u_\ell(r) = 0. \quad (2.26)$$

Definamos la constante g como

$$g \equiv \sqrt{\frac{\mu Ze^2 R}{4\pi\hbar^2\epsilon_0}}, \quad (2.27)$$

de forma que la ecuación (2.26) se escribe como

$$\frac{d^2 u_\ell(r)}{dr^2} + \left[\left(\frac{2\mu(E + V_0)}{\hbar^2} - \frac{3g^2}{R^2} \right) + \left(\frac{gr}{R^2} \right)^2 - \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} \right] u_\ell(r) = 0. \quad (2.28)$$

En vistas de la expresión anterior, conviene introducir el parámetro

$$\kappa \equiv \frac{R^2}{4g} \left[\frac{2\mu(E + V_0)}{\hbar^2} - \frac{3g^2}{R^2} \right] \quad (2.29)$$

como nueva constante, de forma que la ecuación a resolver es simplemente

$$\frac{d^2 u_\ell(r)}{dr^2} + \left[\frac{4g\kappa}{R^2} + \left(\frac{gr}{R^2} \right)^2 - \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} \right] u_\ell(r) = 0. \quad (2.30)$$

De cara a analizar el comportamiento de una posible solución $u_\ell(r)$, vamos a estudiar por separado el comportamiento para $r \rightarrow 0^+$ y $r \rightarrow \infty$. Aunque nos interesa la solución en el intervalo $0 \leq r < R$, resolvemos la ecuación (2.30) en todo el espacio, para proponer luego un posible cambio de función incógnita.

Supongamos que $r \rightarrow 0^+$, de forma que, considerando solo los términos dominantes de (2.30), tenemos que aproximadamente esta ecuación se reduce a

$$\frac{d^2 u_\ell^0(r)}{dr^2} - \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} u_\ell^0(r) = 0. \quad (2.31)$$

Esta última ecuación admite soluciones sencillas de la forma

$$u_\ell^0(r) = C_1 r^{\ell+1} + C_2 r^{-\ell}.$$

Sin embargo, $r^{-\ell}$ diverge en el origen, por lo que no tiene sentido físico considerar ese término. Fijando $C_1 = 0$, deducimos que cerca del origen la solución radial se comporta aproximadamente como $u_\ell^0(r) \sim r^{\ell+1}$.

Supongamos ahora que $r \rightarrow \infty$, de forma que podemos despreciar el término con $1/r^2$ y la constante $4g\kappa/R^2$ de (2.30), luego en este caso, podemos aproximar la ecuación (2.30) por esta otra

$$\frac{d^2 u^\infty(r)}{dr^2} + \left(\frac{gr}{R^2} \right)^2 u^\infty(r) = 0. \quad (2.32)$$

Notemos que la ecuación anterior no depende de ℓ . Tratemos ahora de buscar una solución de la forma $u^\infty(r) = \exp[s(r)]$. Sustituyendo una función de esta forma en (2.32), tenemos que

$$e^{s(r)} \left[s'' + (s')^2 + \left(\frac{gr}{R^2} \right)^2 \right] = 0 \Rightarrow \left[s'' + (s')^2 + \left(\frac{gr}{R^2} \right)^2 \right] = 0. \quad (2.33)$$

No queremos todas las soluciones de la ecuación anterior, sino sólo una de ellas. Se puede comprobar que

$$s(r) = \frac{igr^2}{2R^2} \quad (2.34)$$

verifica la ecuación anterior si asumimos que s'' no es tan relevante para la ecuación diferencial, que está justificado debido a que dicha función permite considerar un cambio de variable a partir del cual se puede resolver la ecuación inicial. Por tanto, podemos considerar un cambio de variable que se comporte como $u^\infty(r) = \exp[s(r)]$ cuando $r \rightarrow \infty$, donde $s(r)$ es la función (2.34).

Es cierto que el conjugado de la solución anterior es también solución de (2.32), pero puesto que, para interpretaciones físicas, no requerimos la función de onda en sí, sino módulo al cuadrado de la misma, consideraremos únicamente la solución dada por (2.33).

Según acabamos de ver, una solución físicamente aceptable de (2.30) se debe comportar como $r^{\ell+1}$ cuando $r \rightarrow 0^+$, y como $\exp[s(r)]$ cuando $r \rightarrow \infty$. Por tanto, tiene sentido considerar el siguiente cambio de función incógnita

$$u_\ell(r) = r^{\ell+1} \exp\left(\frac{igr^2}{2R^2}\right) v_\ell(r), \quad (2.35)$$

donde la nueva función incógnita $v_\ell(r)$ no debe ser dominante en cero y en infinito.

Sin más que derivar y simplificar este cambio de variable (2.35) concluimos que

$$\frac{du_\ell(r)}{dr} = \exp\left(\frac{igr^2}{2R^2}\right) r^\ell \left[\left(\ell + 1 + \frac{igr^2}{R^2} \right) v_\ell(r) + r \frac{dv_\ell(r)}{dr} \right]. \quad (2.36)$$

Derivando de nuevo la expresión anterior, vemos que

$$\begin{aligned} \frac{d^2u_\ell(r)}{dr^2} = \exp\left(\frac{igr^2}{2R^2}\right) r^{\ell-1} & \left[\left(\ell(\ell+1) + \frac{igr^2}{R^2}(3+2\ell) - \frac{g^2r^4}{R^4} \right) v_\ell(r) \right. \\ & \left. + 2r \left(1 + \ell + \frac{igr^2}{R^2} \right) \frac{dv_\ell(r)}{dr} + r^2 \frac{d^2v_\ell(r)}{dr^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Sustituyendo (2.35) y (2.37) en (2.30), y dividiendo el resultado por $r^{\ell+1} \exp(igr^2/2R^2)$, se sigue que

$$\frac{d^2v_\ell(r)}{dr^2} + \left(\frac{2\ell+2}{r} + \frac{2igr}{R^2} \right) \frac{dv_\ell(r)}{dr} + \left(\frac{4g\kappa}{R^2} + \frac{ig}{R^2}(3+2\ell) \right) v_\ell(r) = 0. \quad (2.38)$$

Consideremos ahora el cambio de variable independiente

$$z = \gamma r^2, \quad (2.39)$$

siendo γ una constante que se elegirá posteriormente. Sin más que aplicar la regla de la cadena, e identificando $\omega_\ell(z) \equiv v_\ell(r)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{dv_\ell}{dr} &= \frac{d}{dr} \omega_\ell[z(r)] = \frac{dz}{dr} \frac{d\omega_\ell}{dz} = 2\gamma r \frac{d\omega_\ell}{dz}, \\ \frac{d^2v_\ell}{dr^2} &= \frac{d}{dr} \left(\frac{dv_\ell}{dr} \right) = 2\gamma \frac{d\omega_\ell}{dz} + (2\gamma r)^2 \frac{d^2\omega_\ell}{dz^2} = 2\gamma \frac{d\omega_\ell}{dz} + 4\gamma z \frac{d^2\omega_\ell}{dz^2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (2.38), llegamos a que

$$4\gamma z \frac{d^2\omega_\ell}{dz^2} + 2\gamma \frac{d\omega_\ell}{dz} + \left(\frac{2\ell+2}{r} + \frac{2igr}{R^2} \right) 2\gamma r \frac{d\omega_\ell}{dz} + \left(\frac{4g\kappa}{R^2} + \frac{ig}{R^2}(3+2\ell) \right) \omega_\ell = 0,$$

con lo que, sin más que dividir por 4γ , concluimos que

$$z \frac{d^2\omega_\ell(z)}{dz^2} + \left(\ell + \frac{3}{2} + \frac{igz}{\gamma R^2} \right) \frac{d\omega_\ell(z)}{dz} + \left[\frac{g\kappa}{\gamma R^2} + \frac{ig}{2\gamma R^2} \left(\ell + \frac{3}{2} \right) \right] \omega_\ell(z) = 0. \quad (2.40)$$

En vistas de la ecuación anterior, notemos que si tomamos $\gamma = -ig/R^2$, el cambio de variable considerado transforma la ecuación (2.40) en una *ecuación diferencial hipergeométrica confluyente* (ver Apéndice A):

$$z \frac{d^2 \omega_\ell(z)}{dz^2} + \left(\ell + \frac{3}{2} - z \right) \frac{d\omega_\ell(z)}{dz} - \left[\frac{1}{2} \left(\ell + \frac{3}{2} \right) - i\kappa \right] \omega_\ell(z) = 0, \quad (2.41)$$

cuya solución general viene dada por

$$\omega_\ell(z) = A_\ell {}_1F_1(a, c; z) + B_\ell z^{1-c} {}_1F_1(a+1-c, 2-c; z), \quad (2.42)$$

donde ${}_1F_1$ es la *función hipergeométrica confluyente de Kummer*, A_ℓ y B_ℓ constantes arbitrarias, y

$$a \equiv \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{3}{2} \right) - i\kappa, \quad c \equiv \ell + \frac{3}{2}, \quad (2.43)$$

ya que $c \notin \mathbb{Z}$ para ningún valor de ℓ .

Deshaciendo los dos cambios de variable efectuados, encontramos que

$$u_\ell(r) = e^{igr^2/2R^2} \left[A_\ell r^{\ell+1} {}_1F_1 \left(a, c; \frac{-igr^2}{R^2} \right) + B'_\ell r^{-\ell} {}_1F_1 \left(a+1-c, 2-c; \frac{-igr^2}{R^2} \right) \right],$$

donde se ha definido la constante B'_ℓ por $B'_\ell = (-ig/R^2)^{1-c} B_\ell$. En el segundo sumando de la ecuación anterior hay un factor $r^{-\ell}$. Por tanto, en vistas de la forma de la función hipergeométrica confluyente (ver la Definición A.2 del Apéndice A), el primer sumando de este factor es singular en $r = 0$. Luego necesariamente, a fin de tener una solución que sea válida físicamente, debemos fijar $B'_\ell = 0$.

Con todo ello, la solución físicamente aceptable de (2.28) viene dada por

$$u_\ell(r) = A_\ell r^{\ell+1} e^{igr^2/2R^2} {}_1F_1 \left(\frac{1}{2} \left(\ell + \frac{3}{2} \right) - i\kappa, \ell + \frac{3}{2}; \frac{-igr^2}{R^2} \right), \quad 0 \leq r < R. \quad (2.44)$$

2.3.2. Límite $Z \rightarrow 0$ en la región interior

Ya se ha mencionado que, haciendo nulos los términos que se derivan de la influencia del término coulombiano, esperamos poder recuperar la solución que se obtiene en [1] para esta misma zona del espacio. La solución allí obtenida para $r < R$ viene dada por

$$y_\ell(r) = A'_\ell \sqrt{\sigma r} J_{\ell+\frac{1}{2}}(\sigma r), \quad \text{con } \sigma \equiv \frac{\sqrt{\mu(E+V_0)}}{\hbar}, \quad (2.45)$$

donde J_ν denota la función de Bessel de primera especie. Recordando que la función J_ν de Bessel se define por

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)k!} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k+\nu}, \quad (2.46)$$

podemos escribir la solución (2.45) en forma de serie como

$$y_\ell(r) = \sqrt{2} A'_\ell \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\ell+\frac{3}{2})k!} \left(\frac{\sigma r}{2} \right)^{2k+\ell+1}. \quad (2.47)$$

Volviendo sobre la solución que acabamos de hallar (2.44), y teniendo en cuenta la expresión de ${}_1F_1$ dada en (A.10), también podemos escribir la solución (2.44) en forma de serie como

$$u_\ell(r) = A_\ell r^{\ell+1} e^{igr^2/2R^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\ell + \frac{3}{2}\right) - i\kappa\right)_k}{\left(\ell + \frac{3}{2}\right)_k k!} \left(-\frac{ig}{R^2}\right)^k r^{2k}, \quad (2.48)$$

donde $(x)_n$ denota al símbolo de Pochhammer definido por (A.9). Notemos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\left(\ell + \frac{3}{2}\right) - i\kappa\right)_k \left(-\frac{ig}{R^2}\right)^k &= \left[\left(\frac{c}{2} - i\kappa\right) \dots \left((k-1) + \frac{c}{2} - i\kappa\right)\right] \left(-\frac{ig}{R^2}\right)^k \\ &= \left(\frac{-igc}{2R^2} - \frac{g\kappa}{R^2}\right) \dots \left(-\frac{ig(k-1)}{R^2} - \frac{igc}{2R^2} - \frac{g\kappa}{R^2}\right), \end{aligned} \quad (2.49)$$

donde se ha definido $c = (\ell + 3/2)$, como ya se hizo en (2.43).

Por cómo se ha definido g en (2.27), si $Z \rightarrow 0$, entonces $g \rightarrow 0$, luego utilizando la definición de κ en (2.29), se tiene

$$-\frac{g\kappa}{R^2} = -\frac{1}{4} \left[\frac{2\mu(E + V_0)}{\hbar^2} - \frac{3g^2}{R^2} \right] \xrightarrow{Z \rightarrow 0} -\frac{\sigma^2}{4}, \quad (2.50)$$

donde la variable σ se ha definido como en (2.45), y por tanto, tomando el límite en (2.49), concluimos que

$$\lim_{Z \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}\left(\ell + \frac{3}{2}\right) - i\kappa\right)_k (-ig)^k = \left(-\frac{\sigma^2}{4}\right)^k. \quad (2.51)$$

Utilizando el teorema de la convergencia dominada, con respecto a la medida de Dirac (que es la suma sobre los naturales), se puede demostrar que estamos en condiciones de permutar suma y límite, de forma que el límite de la suma cuando $Z \rightarrow 0$ es igual a la suma del límite cuando $Z \rightarrow 0$ de su término general. Por tanto, teniendo en cuenta (2.51), se tiene que el límite de nuestra solución (2.44) es

$$\begin{aligned} \lim_{Z \rightarrow 0} u_\ell(r) &= A_\ell \sum_{k=0}^{\infty} r^{\ell+1} \frac{\left(-\frac{\sigma^2}{4}\right)^k}{\left(\ell + \frac{3}{2}\right)_k k!} r^{2k} \\ &= \left[\frac{2^{\ell+1} A_\ell \Gamma\left(\ell + \frac{3}{2}\right)}{\sigma^{\ell+1}} \right] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma\left(\ell + \frac{3}{2} + k\right) k!} \left(\frac{\sigma r}{2}\right)^{2k+\ell+1} = y_\ell(r), \end{aligned} \quad (2.52)$$

donde se ha definido la constante $\sqrt{2}A'_\ell$ por el término entre corchetes de la última expresión y se ha utilizado que, por definición del símbolo de Pochhammer $(x)_n$ (ver (A.9)), se cumple que

$$\left(\ell + \frac{3}{2}\right)_k = \frac{\Gamma\left(\ell + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\ell + \frac{3}{2} + k\right)}.$$

Observamos que haciendo el límite $Z \rightarrow 0$ de (2.44), recuperamos la solución que se obtuvo en [1] para esta misma zona del espacio. Por tanto, hemos demostrado que los resultados que acabamos de obtener para $Z \neq 0$ coinciden, dentro del núcleo, con lo publicado en [1], que se obtiene como el límite (2.52) cuando $Z \rightarrow 0$.

2.3.3. Ecuación de onda en la región exterior

Vamos ahora a resolver la ecuación de Schrödinger para valores de r tales que $r > R$. Teniendo en cuenta los términos no nulos que aparecen en (2.23), y la expresión de la energía potencial coulombiana dada por (2.21), la ecuación a resolver es

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2\mu E}{\hbar^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right] u_\ell(r) = 0, \quad (2.53)$$

donde requerimos $E < 0$, ya que buscamos estados ligados. Definiendo g como hicimos en (2.27), la ecuación anterior se transforma en

$$\frac{d^2 u_\ell(r)}{dr^2} + \left[\frac{2\mu E}{\hbar^2} - \frac{2g^2}{rR} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] u_\ell(r) = 0. \quad (2.54)$$

Consideremos el cambio de variable dado por

$$z = \eta r, \quad (2.55)$$

siendo η una constante que determinaremos posteriormente. Aplicando la regla de la cadena, e identificando $u_\ell(r) \equiv v_\ell(z)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{du_\ell}{dr} &= \frac{dz}{dr} \frac{dv_\ell}{dz} = \eta \frac{dv_\ell}{dz}, \\ \frac{d^2 u_\ell}{dr^2} &= \frac{d}{dr} \left(\frac{du_\ell}{dr} \right) = \eta^2 \frac{d^2 v_\ell}{dz^2}, \end{aligned} \quad (2.56)$$

con lo que tras aplicar el cambio de variable a la ecuación (2.54), tenemos que

$$\eta^2 \frac{d^2 v_\ell(z)}{dz^2} + \left[\frac{2\mu E}{\hbar^2} - \frac{2g^2 \eta}{zR} - \frac{\ell(\ell+1)\eta^2}{z^2} \right] v_\ell(z) = 0. \quad (2.57)$$

Si dividimos la expresión anterior entre η^2 , obtenemos que

$$\frac{d^2 v_\ell(z)}{dz^2} + \left[\frac{1}{\eta^2} \frac{2\mu E}{\hbar^2} - \frac{2g^2}{\eta z R} - \frac{\ell(\ell+1)}{z^2} \right] v_\ell(z) = 0. \quad (2.58)$$

Puesto que $E < 0$, se cumple que $E = -|E|$. Definamos η como

$$\eta \equiv \sqrt{\frac{8\mu|E|}{\hbar^2}} > 0, \quad (2.59)$$

y λ como

$$\lambda \equiv -\frac{2g^2}{\eta R} = -\frac{\sqrt{\mu} Z e^2}{2\pi \hbar \epsilon_0 \sqrt{8|E|}}, \quad (2.60)$$

de forma que la ecuación (2.58) es

$$\frac{d^2 v_\ell(z)}{dz^2} + \left[\frac{\lambda}{z} - \frac{1}{4} - \frac{\ell(\ell+1)}{z^2} \right] v_\ell(z) = 0. \quad (2.61)$$

Notemos que la ecuación (2.61) es una ecuación diferencial de Whittaker (ver Apéndice A.2), donde, utilizando la notación del apéndice, $\kappa = \lambda$ y $\mu = (1 + 2\ell)/2$, de forma que la solución general de dicha ecuación viene dada por

$$v_\ell(z) = A_\ell M_{\lambda, \ell + \frac{1}{2}}(z) + B_\ell W_{\lambda, \ell + \frac{1}{2}}(z), \quad (2.62)$$

siendo A_ℓ y B_ℓ constantes arbitrarias y $M_{\kappa,\mu}$ y $W_{\kappa,\mu}$ las funciones de Whittaker de primera y segunda especie respectivamente.

Deshaciendo el cambio de variable utilizado, llegamos a que la solución general de (2.54) es

$$u_\ell(r) = A_\ell M_{\lambda,\ell+\frac{1}{2}}(\eta r) + B_\ell W_{\lambda,\ell+\frac{1}{2}}(\eta r), \quad r > R. \quad (2.63)$$

Sin embargo, dado que los desarrollos asintóticos cuando $r \rightarrow \infty$ de estas dos funciones de Whittaker vienen dados (ver Apéndice A.2.1) por

$$\begin{aligned} M_{\lambda,\ell+\frac{1}{2}}(r) &\sim \Gamma(2+2\ell) e^{\frac{1}{2}\eta r} (\eta r)^{-\lambda} / \Gamma(1+\ell-\lambda), \\ W_{\lambda,\ell+\frac{1}{2}}(r) &\sim e^{-\frac{1}{2}\eta r} (\eta r)^\lambda, \end{aligned} \quad (2.64)$$

y teniendo en cuenta que $\eta > 0$, de cara a tener una solución que sea válida físicamente, debemos fijar $A_\ell = 0$, pues en el desarrollo asintótico de este término aparece un factor $e^{\frac{1}{2}\eta r}$ que diverge cuando $r \rightarrow \infty$.

Con todo ello, la solución físicamente aceptable en la región exterior viene dada por

$$u_\ell(r) = B_\ell W_{\lambda,\ell+\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{8\mu|E|}}{\hbar} r\right), \quad r > R. \quad (2.65)$$

2.3.4. Límite $Z \rightarrow 0$ en la región exterior

En [1] se obtuvo que, para $r > R$, la solución que proviene del mismo modelo físico pero sin términos de interacción coulombiana viene dada por

$$\omega_\ell(r) = D_\ell \sqrt{\rho r} K_{\ell+\frac{1}{2}}(\rho r), \quad \text{donde } \rho \equiv \frac{\sqrt{2\mu|E|}}{\hbar}, \quad (2.66)$$

donde K_ν denota la función de Bessel modificada de segunda especie, y D_ℓ una constante arbitraria.

Notemos que, según hemos definido η en (2.59) y ρ en la ecuación anterior, tenemos que $\eta = 2\rho$. Por otra parte, conviene recordar (ver 13.18 en [7]) la siguiente relación entre las funciones de Whittaker y las de Bessel modificadas de segunda especie:

$$W_{0,\nu}(2z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} K_\nu(z). \quad (2.67)$$

Por tanto, el límite cuando $Z \rightarrow 0$ de la solución que obtuvimos en (2.65) viene dado por

$$\lim_{Z \rightarrow 0} u_\ell(r) = \lim_{Z \rightarrow 0} B_\ell W_{\lambda,\ell+\frac{1}{2}}(\eta r) = B_\ell W_{0,\ell+\frac{1}{2}}(2\rho r) = B_\ell \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\rho r} K_{\ell+\frac{1}{2}}(\rho r) = \omega_\ell(r),$$

donde se ha tenido en cuenta que de (2.60) se deduce que $\lambda \rightarrow 0$ por el hecho de que si $Z \rightarrow 0$ entonces $g \rightarrow 0$ por cómo se definió g en (2.27), y en la última igualdad se ha definido $D_\ell \equiv B_\ell \sqrt{2/\pi}$.

Por tanto, vemos que la solución obtenida en este trabajo para la región exterior es consistente con la publicada en [1] para el caso especial en que $Z = 0$.

Capítulo 3

Ecuación secular

En el capítulo anterior se ha analizado el modelo de estudio propuesto, y se ha resuelto la ecuación de Schrödinger resultante del hamiltoniano del sistema para las regiones interior y exterior del núcleo, obteniéndose las siguientes soluciones en (2.44) y (2.65):

$$u_\ell(r) = \begin{cases} A_\ell r^{\ell+1} e^{igr^2/2} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}\left(\ell + \frac{3}{2}\right) - i\kappa, \ell + \frac{3}{2}; -igr^2\right), & 0 \leq r < R, \\ B_\ell W_{\lambda, \ell + \frac{1}{2}}(\eta r), & r > R, \end{cases} \quad (3.1)$$

donde las constantes que aparecen involucradas han sido definidas anteriormente. El objetivo de esta capítulo es aplicar las condiciones de ajuste que aparecen al estudiar potenciales que generalizan la delta de Dirac, tipo $\alpha\delta + \beta\delta'$ para poder completar la solución desde un punto de vista tanto matemático como físico, y poder extraer luego las conclusiones adecuadas.

De entre estas condiciones, las definidas por Kurasov, ver [8], permiten construir una extensión autoadjunta con el término de δ y el de δ' soportados en el mismo punto, en nuestro caso, $r = R$. Estas condiciones vienen expresadas en forma de sistema lineal por:

$$\begin{pmatrix} u_\ell(R^+) \\ u'_\ell(R^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2+\beta}{2-\beta} & 0 \\ \frac{4\alpha}{4-\beta^2} & \frac{2-\beta}{2+\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\ell(R^-) \\ u'_\ell(R^-) \end{pmatrix}, \quad \text{donde } u_\ell(R^\pm) = \lim_{x \rightarrow R^\pm} u_\ell(x), \quad (3.2)$$

siendo α y β las dos constantes que se han definido como en (2.24).

El caso en que $\beta = \pm 2$ obviamente no está incluido en (3.2) y no será estudiado en este trabajo, pues para estos valores de β , la ecuación secular no relaciona los datos de los límites en $r = R^+$ con los de $r = R^-$, se indica en [9] que estos valores de β conducen a las siguientes condiciones frontera:

$$\begin{aligned} u_\ell(R^+) - \frac{4}{\alpha} u'_\ell(R^+) &= 0, & u_\ell(R^-) &= 0, & \text{si } \beta &= 2, \\ u_\ell(R^-) + \frac{4}{\alpha} u'_\ell(R^-) &= 0, & u_\ell(R^+) &= 0, & \text{si } \beta &= -2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

En el Apéndice B, se comenta la existencia de cierta controversia acerca de las condiciones de ajuste. En esta sección adoptaremos estas condiciones y extraeremos las consecuencias pertinentes.

De (3.2), se deducen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} u_\ell(R^+) &= \frac{2+\beta}{2-\beta} u_\ell(R^-), \\ u'_\ell(R^+) &= \frac{4\alpha}{4-\beta^2} u_\ell(R^-) + \frac{2-\beta}{2+\beta} u'_\ell(R^-). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dividiendo la segunda de ellas entre la primera, llegamos a que

$$\frac{u'_\ell(R^+)}{u_\ell(R^+)} = \frac{4\alpha}{(2+\beta)^2} + \frac{(2-\beta)^2}{(2+\beta)^2} \frac{u'_\ell(R^-)}{u_\ell(R^-)}. \quad (3.5)$$

Multiplicando la ecuación anterior por $(2+\beta)^2/(2-\beta)^2$, y pasando el primer sumando al término de la izquierda, tenemos que

$$\frac{u'_\ell(R^-)}{u_\ell(R^-)} = \frac{(2+\beta)^2}{(2-\beta)^2} \frac{u'_\ell(R^+)}{u_\ell(R^+)} - \frac{4\alpha}{(2-\beta)^2}. \quad (3.6)$$

Para concretar la ecuación anterior, necesitamos calcular explícitamente $u'_\ell(R^+)$ y $u'_\ell(R^-)$. Para ello, no hay más que tomar las expresiones en (3.1) y, considerando las expresiones dadas por (A.17) y (A.32), derivar respecto de r , y tomar el límite $r \rightarrow R^\pm$. Definamos los parámetros a y b por

$$a = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{3}{2} \right) - i\kappa, \quad b = \ell + \frac{3}{2},$$

de forma que la solución interior se escribe como

$$u_\ell(r) = A_\ell R^{\ell+1} e^{igr^2/2R^2} {}_1F_1 \left(a, b; -\frac{igr^2}{R^2} \right).$$

Si derivamos esta última expresión, teniendo en cuenta (A.17), y realizamos posteriormente el límite $u'_\ell(R^-) = \lim_{r \rightarrow R^-} u'_\ell(r)$, deducimos que

$$u'_\ell(R^-) = A_\ell e^{igr^2/2R^2} R^\ell \left[(1 + \ell + ig) {}_1F_1(a, b; -ig) - \frac{4iag}{3 + 2\ell} {}_1F_1(a + 1, b + 1; -ig) \right],$$

y dividiendo entre $u'_\ell(R^-)$, concluimos que

$$\frac{u'_\ell(R^+)}{u_\ell(R^+)} = \frac{1 + \ell}{R} + \frac{ig}{R} - \frac{4iag}{R(3 + 2\ell)} \frac{{}_1F_1(a + 1, b + 1; -ig)}{{}_1F_1(a, b; -ig)}. \quad (3.7)$$

Por otra parte, la derivada $u_\ell(R^+)$ en (3.1), utilizando para derivar la expresión (A.32), viene dada por

$$u'_\ell(R^+) = B_\ell \left[\left(\frac{\eta}{2} - \frac{\lambda}{R} \right) W_{\lambda, \ell + \frac{1}{2}}(\eta R) - \frac{1}{R} W_{\lambda + 1, \ell + \frac{1}{2}}(\eta R) \right], \quad (3.8)$$

de donde se sigue ahora que

$$\frac{u'_\ell(R^+)}{u_\ell(R^+)} = \frac{\eta}{2} - \frac{\lambda}{R} - \frac{1}{R} \frac{W_{1+\lambda, \ell + \frac{1}{2}}(\eta R)}{W_{\lambda, \ell + \frac{1}{2}}(\eta R)}. \quad (3.9)$$

Con todo ello, sin más que sustituir (3.7) y (3.9) en (3.6) y multiplicar posteriormente por $-R$ dicha ecuación, llegamos a

$$\frac{4iag}{3+2\ell} \frac{{}_1F_1(a+1, b+1; -ig)}{{}_1F_1(a, b; -ig)} = 1 + \ell + ig + \frac{4\alpha R}{(2-\beta)^2} - \frac{(2+\beta)^2}{(2-\beta)^2} \left[\frac{\eta R}{2} - \lambda - \frac{W_{\lambda+1, \ell+\frac{1}{2}}(\eta R)}{W_{\lambda, \ell+\frac{1}{2}}(\eta R)} \right]. \quad (3.10)$$

Esta ecuación nos da una condición que liga los valores de los parámetros físicos que aparecen en ella, implícita o explícitamente, es decir $(R, \ell, Z, V_0, E, \alpha, \beta)$, y sirve para determinar los niveles de energía aceptables.

La ecuación (3.10) es trascendente¹. Puesto que no podemos encontrar soluciones analíticas (estados ligados) de la misma, vamos a recurrir a métodos gráficos, y representar el lado izquierdo frente al lado derecho, de forma que las soluciones sean los puntos de corte de ambas curvas. Para estudiar una ecuación general de este tipo, tendríamos que representar por separado la parte real y la parte imaginaria, ya que claramente (3.10) es una expresión que involucra números complejos.

Sin embargo, la ecuación a la que hemos llegado tiene una propiedad interesante, y es que tanto la parte imaginaria del lado derecho, llamémoslo Ψ_ℓ , como la del lado izquierdo, llamémoslo Φ_ℓ , son constantes, y además, iguales. Esto simplifica notablemente el estudio, pues únicamente debemos preocuparnos de resolver la parte real de la ecuación (3.10).

Para demostrar esta propiedad que hemos mencionado, notemos que $\text{Im}[\Psi_\ell] = g$, pues el resto de términos que aparecen son reales, y las funciones de Whittaker involucradas también toman valores reales.

Pero es que además, se cumple que $\text{Im}[\Phi_\ell] = g$. Para demostrarlo, probaremos el siguiente teorema auxiliar.

Teorema 3.1.1. *Dados tres números cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{R}$, se tiene la siguiente propiedad*

$$\text{Re} \left[\frac{(x+iy) {}_1F_1(x+iy+1, 2x+1; -iz)}{x {}_1F_1(x+iy, 2x; -iz)} \right] = 1, \quad (3.11)$$

donde ${}_1F_1(a, c; z)$ representa la función hipergeométrica confluyente definida en (A.10).

Demostración:

Notemos en primer lugar que, usando la regla de derivación de las funciones hipergeométricas confluentes dada en (A.17), se tiene que

$$2i \frac{d}{dz} \ln {}_1F_1(x+iy, 2x; -iz) = \frac{(x+iy) {}_1F_1(x+iy+1, 2x+1; -iz)}{x {}_1F_1(x+iy, 2x; -iz)}. \quad (3.12)$$

Recordemos que, como se muestra en (A.19), la primera relación de Kummer establece

$${}_1F_1(a, b; z) = e^z {}_1F_1(b-a, b; -z). \quad (3.13)$$

¹Una *ecuación trascendente* es una ecuación que no se reduce a una ecuación algebraica mediante transformaciones algebraicas.

Definamos $M \equiv {}_1F_1(x + iy, 2x; -iz)$, de forma que, aplicando la transformación de Kummer (3.13) a M , se tiene que

$$M \equiv {}_1F_1(x + iy, 2x; -iz) = e^{-iz} {}_1F_1(x - iy, 2x; iz) \equiv e^{-iz} M^*, \quad (3.14)$$

donde w^* denota el conjugado complejo de $w \in \mathbb{C}$. Tomando logaritmos en ambos lados de la expresión anterior, tenemos que

$$\ln M = -iz + \ln M^* \quad \Rightarrow \quad \ln M - \ln M^* = -iz. \quad (3.15)$$

Derivando respecto de z la ecuación anterior llegamos a

$$\left[\frac{d}{dz} \ln M \right] - \left[\frac{d}{dz} \ln M \right]^* = -i, \quad (3.16)$$

de donde, utilizando $w - w^* = 2i \operatorname{Im}(w)$, se sigue que

$$2i \operatorname{Im} \left[\frac{d}{dz} \ln M \right] = -i \quad \Rightarrow \quad -\operatorname{Im} \left[2 \frac{d}{dz} \ln M \right] = 1. \quad (3.17)$$

Finalmente, usando que $-\operatorname{Im}[w] = \operatorname{Re}[iw]$, tenemos que

$$\operatorname{Re} \left[2i \frac{d}{dz} \ln M \right] = \operatorname{Re} \left[2i \frac{d}{dz} \ln {}_1F_1(x + iy, 2x; -iz) \right] = 1, \quad (3.18)$$

luego sustituyendo (3.12) en (3.18) queda probado (3.11). \square

Volviendo sobre la ecuación (3.10), que es la que nos interesa analizar, notemos que si tomamos

$$z = g, \quad x = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{3}{2} \right) = \frac{b}{2}, \quad y = -\kappa, \quad \Rightarrow \quad a = x + iy,$$

su lado izquierdo es

$$\Phi_\ell \equiv \frac{4iag}{3 + 2\ell} \frac{{}_1F_1(a + 1, b + 1; -ig)}{{}_1F_1(a, b; -ig)} = g \frac{i(x + iy) {}_1F_1(x + iy + 1, 2x + 1; -iz)}{x {}_1F_1(x + iy, 2x; -iz)},$$

luego aplicando el Teorema 3.1.1 que acabamos de demostrar, es evidente que

$$\operatorname{Im}[\Phi_\ell] = -\operatorname{Re}[i\Phi_\ell] = g \operatorname{Re} \left[\frac{(x + iy) {}_1F_1(x + iy + 1, 2x + 1; -iz)}{x {}_1F_1(x + iy, 2x; -iz)} \right] = g.$$

Por tanto, únicamente debemos resolver la parte real de la ecuación (3.10). Para poder hacerlo, vamos a adimensionalizar los parámetros dependientes de la energía que hemos empleado. Para ello, es conveniente definir

$$v_0 \equiv \sqrt{\frac{2\mu R^2 V_0}{\hbar^2}}, \quad \varepsilon = |E|/V_0 \in (0, 1), \quad (3.19)$$

de forma que las constantes a utilizar son:

- **Región interior:** en esta zona del espacio, consideramos valores de la energía tales que $E > -V_0$. Por tanto,

$$\kappa = \frac{R^2}{4g} \left[\frac{2\mu(E + V_0)}{\hbar^2} - \frac{3g^2}{R^2} \right] = \frac{1}{4g} \frac{2\mu R^2}{\hbar^2} V_0(1 - \varepsilon) - \frac{3g}{4} = \frac{v_0^2}{4g}(1 - \varepsilon) - \frac{3}{4}g, \quad (3.20)$$

$$g = \sqrt{\frac{\mu Z e^2 R}{4\pi \hbar^2 \varepsilon_0}}, \quad (3.21)$$

$$a = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{3}{2} \right) - i\kappa = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{3}{2} \right) - \frac{i}{4} \left(\frac{v_0^2}{4g}(1 - \varepsilon) - 3g \right). \quad (3.22)$$

- **Región exterior:** En esta zona del espacio, requerimos que $E < 0$. Por tanto,

$$\eta = \sqrt{\frac{8\mu|E|}{\hbar^2}} = 2\sqrt{\frac{2\mu|E|}{\hbar^2}} = 2\sqrt{\frac{2\mu V_0}{\hbar^2}} \sqrt{\varepsilon} = \frac{2v_0}{R} \sqrt{\varepsilon}, \quad (3.23)$$

$$\lambda = -\frac{2g^2}{\eta R} = -\frac{g^2}{v_0 \sqrt{\varepsilon}}. \quad (3.24)$$

Tras haber realizado esta adimensionalización de los parámetros, la ecuación secular (3.10) se escribe simplemente por $\Phi_\ell(\varepsilon) = \Psi_\ell(\varepsilon)$, en donde Φ_ℓ viene dado por

$$\Phi_\ell(\varepsilon) \equiv \frac{4iag}{3 + 2\ell} \frac{{}_1F_1(a + 1, \ell + \frac{5}{2}; -ig)}{{}_1F_1(a, \ell + \frac{3}{2}; -ig)}, \quad (3.25)$$

siendo g y a son los parámetros adimensionalizados definidos en (3.21) y (3.22), y Ψ_ℓ por

$$\Psi_\ell(\varepsilon) \equiv 1 + \ell + ig + \frac{w_{\ell j}}{(2 - \beta)^2} - \frac{(2 + \beta)^2}{(2 - \beta)^2} \left[\frac{\eta R}{2} - \lambda - \frac{W_{\lambda+1, \ell+\frac{1}{2}}(\eta R)}{W_{\lambda, \ell+\frac{1}{2}}(\eta R)} \right], \quad (3.26)$$

donde g , η y λ son (3.21), (3.23) y (3.24) respectivamente, y se ha definido

$$w_{\ell j} \equiv 4\alpha R. \quad (3.27)$$

3.2. Estados ligados

En la sección anterior se ha deducido (3.10), la ecuación secular del modelo propuesto. Tras haber realizado una adimensionalización de los parámetros involucrados en dicha ecuación, estamos en condiciones de buscar los estados ligados. El objetivo de esta sección es precisamente encontrar las soluciones de la ecuación secular, a fin de poder sacar conclusiones físicas del problema propuesto.

En la ecuación secular pueden aparecer factores que divergen cuando $W_{\lambda, \frac{1}{2}+\ell}(\eta R) = 0$ y cuando ${}_1F_1(a, \frac{3}{2} + \ell, -ig) = 0$. El siguiente paso para discutir la continuidad de Ψ_ℓ y Φ_ℓ (lado derecho e izquierdo respectivamente), es estudiar estos posibles ceros.

3.2.1. Ceros de la función de Whittaker

El lado derecho de la ecuación secular es, tras adimensionalizar, $\Psi_\ell(\varepsilon)$. Veamos que se trata de una función continua en $\varepsilon \in (0, 1)$. Para a poder asegurar la continuidad de dicha

función, tenemos que ver que la ecuación $W_{\lambda, \ell + \frac{1}{2}}(\eta R) = 0$ no tiene ninguna solución para $\varepsilon \in (0, 1)$, pues esto daría lugar a asíntotas verticales.

Notemos que, según hemos visto en (A.30), la función de Whittaker se define en términos de la función hipergeométrica confluyente de segunda especie $U(a, c; z)$, introducida en la Definición A.2, por

$$W_{\kappa, \mu}(z) = e^{-\frac{1}{2}z} z^{\frac{1}{2} + \mu} U\left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa, 1 + 2\mu; z\right),$$

por tanto, los ceros de $W_{\kappa, \mu}(z)$ son exactamente los ceros de $U\left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa, 1 + 2\mu, z\right)$.

Para el caso que nos ocupa, queremos estudiar los ceros de $W_{\lambda, \frac{1}{2} + \ell}(\eta R) = 0$, donde $\ell \geq 0$ y los parámetros adimensionalizados, como ya vimos en (3.23) y (3.24), son

$$\begin{aligned} \eta(\varepsilon) &= \frac{2v_0}{R} \sqrt{\varepsilon}, & \varepsilon \in (0, 1) &\Rightarrow & \eta \in \left(0, \frac{2v_0}{R}\right), \\ \lambda(\varepsilon) &= -\frac{g^2}{v_0 \sqrt{\varepsilon}}, & \varepsilon \in (0, 1) &\Rightarrow & \lambda \in \left(-\infty, -\frac{g^2}{v_0}\right), \end{aligned}$$

que como acabamos de ver, tiene los mismos ceros que la función hipergeométrica confluyente de segunda especie $U(1 + \ell - \lambda, 2 + 2\ell, \eta R)$.

En la Sección 13.9 de [7] se realiza un estudio detallado los ceros de la función hipergeométrica confluyente de segunda especie. Sin embargo, para este caso concreto, podemos aplicar directamente el Teorema 1 que se demuestra en [10], que establece que si $a, c \in \mathbb{R}$ y $2a - c > -1$, entonces cualquier cero z_v de $U(a, c; z)$ debe satisfacer que $\text{Re}(z_v) < 0$, es decir, que en tal caso, $U(a, c; z)$ no tiene ceros reales positivos.

Notemos que en nuestro caso, $2a - b = -2\lambda$, y puesto que $\lambda < 0$, evidentemente $2a - b > -1$. Por tanto, concluimos que la función que estamos estudiando no tiene ceros reales positivos, de donde deducimos que $\Psi_\ell(\varepsilon)$ es una función continua en $\varepsilon \in (0, 1)$.

3.2.2. Ceros de la función ${}_1F_1$

A diferencia de lo que ocurría con Ψ_ℓ , el lado izquierdo de la ecuación secular (3.10), es decir, Φ_ℓ , no es continuo, y esto se debe a que ${}_1F_1(a, \frac{3}{2} + \ell, -ig) = 0$ tiene, de hecho infinitas, soluciones. Sin embargo, nos interesa estudiar la parte real de las soluciones de dicha ecuación en el intervalo $\varepsilon \in (0, 1)$. Notemos que el único argumento de la función ${}_1F_1(a, c; z)$ que depende de la energía adimensionalizada ε es a , mientras que los argumentos $c = \ell + 1/2$ y $z = -ig$ son constantes, por lo que buscamos lo que se conoce como “*a-ceros*” de la función en la literatura especializada.

Encontrar una solución analítica de dichos ceros es una tarea realmente difícil debido a la complejidad de las funciones hipergeométricas. Sin embargo, se sabe (ver apartado 13.9.10 de [7]) que para b y z fijos en \mathbb{C} , todos los a -ceros de la ecuación ${}_1F_1(a, c; z) = 0$ son de la forma

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{\pi^2}{4z} \left(n^2 + \left(c - \frac{3}{2} \right) n \right) \\ &\quad - \frac{1}{16z} \left(\left(c - \frac{3}{2} \right)^2 \pi^2 + \frac{4}{3} z^2 - 8c(z - 1) - 4c^2 - 3 \right) + \mathcal{O}(n^{-1}), \end{aligned} \quad (3.28)$$

donde n es un número natural². Evidentemente, las soluciones aproximadas mediante la expresión anterior son más precisas cuanto mayor sea n , pues esta aproximación numérica es una $\mathcal{O}(n^{-1})$, denotando \mathcal{O} la O-grande de Landau. Sin embargo, como veremos, la solución anterior proporciona aproximaciones realmente buenas incluso para valores enteros de n pequeños. Simplificando la expresión (3.28), deducimos que

$$a_n = -\frac{(-3 + 2c)n\pi^2}{8z} - \frac{n^2\pi^2}{4z} - \frac{-3 - 4c^2 + \left(-\frac{3}{2} + c\right)^2\pi^2 - 8c(-1 + z) + \frac{4z^2}{3}}{16z}. \quad (3.29)$$

Para obtener los valores de ε donde el lado izquierdo de la ecuación secular diverge, no tenemos más que sustituir los valores de a y c dados por (2.43) en la expresión (3.29), e igualarlo al parámetro a adimensionalizado dado en (3.22). Aunque los cálculos son ciertamente tediosos, se puede mostrar que la solución a dicha ecuación viene dada por

$$\varepsilon_n^0 \equiv 1 - \frac{8g^2}{3v_0^2} + \frac{\ell}{v_0^2} - \frac{\ell n \pi^2}{v_0^2} - \frac{n^2 \pi^2}{v_0^2} - \frac{\ell^2 (-4 + \pi^2)}{4v_0^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.30)$$

En vistas de la expresión (3.30), deducimos que si ε_n^0 es un cero de la función adimensionalizada ${}_1F_1(a(\varepsilon), \frac{3}{2} + \ell, -ig) = 0$, entonces necesariamente $\varepsilon_n^0 < 1$, pues como $\ell \geq 0$ y $n = 1, 2, \dots$, siempre se cumple que

$$-\frac{\ell}{v_0^2} + \frac{\ell n \pi^2}{v_0^2} \geq 0,$$

luego

$$\varepsilon_n^0 = 1 - \left[\frac{8g^2}{3v_0^2} - \frac{\ell}{v_0^2} + \frac{\ell n \pi^2}{v_0^2} + \frac{n^2 \pi^2}{v_0^2} + \frac{\ell^2 (-4 + \pi^2)}{4v_0^2} \right],$$

donde el término entre corchetes es claramente positivo.

De la expresión de (3.30) deducimos que si n es suficientemente grande, o v_0 suficientemente pequeño, no tendremos ningún a -cero en el intervalo $(0, 1)$, lo que como ya veremos de forma analítica y más precisa, influirá en el número de estados ligados.

3.3. Número de estados ligados

El objetivo de esta sección es obtener conclusiones sobre el número de estados ligados de la ecuación secular (3.10). Para facilitar el estudio y comprensión del problema presente, comenzaremos a analizar esta ecuación para valores concretos de los parámetros físicos, y, posteriormente, pasaremos a enunciar resultados y propiedades generales.

Como ya se ha comentado, la ecuación (3.10) de este modelo se trata de una ecuación trascendente, y por ello no podremos resolverla de forma analítica, pero aun así podemos obtener diversas consecuencias a partir de procedimientos numéricos y gráficos.

En la Figura 3.1 se han representado las funciones $\Phi_\ell(\varepsilon)$ y $\Psi_\ell(\varepsilon)$, definidas en (3.25) y (3.26) respectivamente, así como las asíntotas verticales de Φ_ℓ (líneas discontinuas) aproximadas mediante la expresión (3.30) en el intervalo $(0, 1)$. Según hemos probado, la función Ψ_ℓ es continua en dicho intervalo.

²Donde consideramos la siguiente definición de los números naturales $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0 \setminus \{0\} \equiv 1, 2, 3, \dots$

Los puntos donde Φ_ℓ presenta singularidades han sido aproximados por la expresión (3.30). Si bien sabemos que estos puntos no corresponden a soluciones analíticas, sino numéricas, podemos apreciar que son buenas aproximaciones incluso cuando n es pequeño. Como veremos más adelante, en la Tabla 3.1 se muestra la calidad de la aproximación de estos ceros.

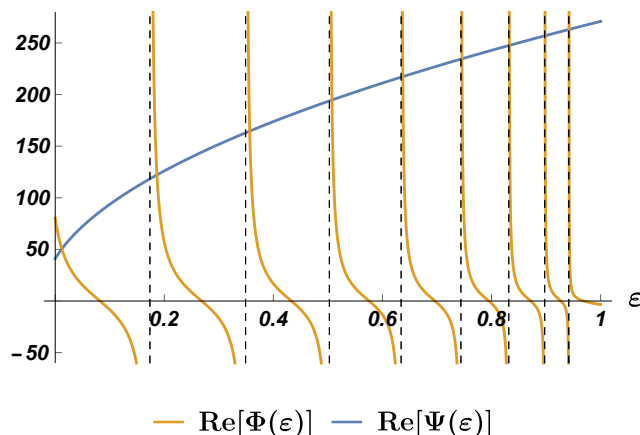


Figura 3.1: Estados ligados para la ecuación secular (3.10). Las constantes utilizadas son $\beta = 4$, $g = 3.5$, $v_0 = 30$, $\ell = 1$ y $w_{\ell j} = -20$.

Por otra parte, sabemos que la función Φ_ℓ no es continua en un punto de algún entorno³ de los puntos ε_n^0 dados por (3.30), pero entre dos puntos de discontinuidad consecutivos esta función es inyectiva y monótona decreciente, y su imagen es la recta real, salvo que se trate del primer intervalo (entre el punto de discontinuidad más cercano a $\varepsilon = 1$), en cuyo caso la imagen es la recta real positiva y una muy pequeña parte de la recta real negativa.

Debido a la complejidad de las funciones hipergeométricas y de Whittaker, demostrar estas propiedades (la monotonía de Ψ , y la inyectividad e imagen de Φ entre dos ceros consecutivos) está fuera del objetivo de este trabajo. En cualquier caso, estas han sido demostradas para el caso $g = 0$ en [1] y comprobadas para los casos que nos interesan en este trabajo, en particular para todos los núcleos doblemente mágicos considerados en el capítulo 4. De ahora en adelante, se tomarán estos resultados como ciertos.

3.3.1. Estados ligados frente al momento angular ℓ

El objetivo de esta sección es extraer conclusiones generales sobre cómo afecta el valor del momento angular ℓ al número de estados ligados. En la siguiente sección veremos que existe un valor máximo del momento angular, al que denotaremos por ℓ_{\max} , a partir del cual la ecuación secular (3.10) no tiene estados ligados. Sin embargo, el propósito de esta sección es determinar el número de estados ligados en caso de que los haya.

Recordemos que los estados ligados vienen representados por los puntos de corte de Φ_ℓ y Ψ_ℓ en gráficas similares a la representada en la Figura 3.1. De entre estos estados ligados, aquellos que corresponden a valores mayores de ε están más ligados. Es interesante remarcar que, como se señala en la Sección 3.2.2 de [2], este modelo ofrece mejores

³Sabemos que dichas soluciones no son exactas, pero gráficamente observamos que las aproximaciones numéricas son muy precisas. De esta forma, aunque no conocemos con total precisión los puntos de discontinuidad, podemos garantizar que se encuentran en un entorno de los puntos dados por (3.30) contenidos en el intervalo $(0, 1)$.

resultados precisamente para los estados más ligados. Para estudiar la dependencia del número de estados ligados frente al momento angular ℓ , vamos a buscar gráficamente las soluciones de la ecuación secular $\Psi_\ell(\varepsilon) = \Phi_\ell(\varepsilon)$, tomado como constantes las utilizadas en la Figura 3.1, es decir, $\beta = 4$, $g = 3.5$, $v_0 = 30$ y $w_{\ell j} = -20$.

En la Figura 3.2 se ha representado la ecuación secular para los valores de $\ell = 0, 1, 2$ y 3. Podemos observar que, en este caso, para valores más bajos del momento angular ℓ tenemos mayor número de estados ligados, pues hay un total 9 estados ligados para $\ell = 0$ y $\ell = 1$, mientras que 8 estados ligados para $\ell = 2$ y $\ell = 3$. Notemos que en las cuatro figuras ahí representadas se ha tomado el mismo valor de $w_{\ell j}$ ⁴.

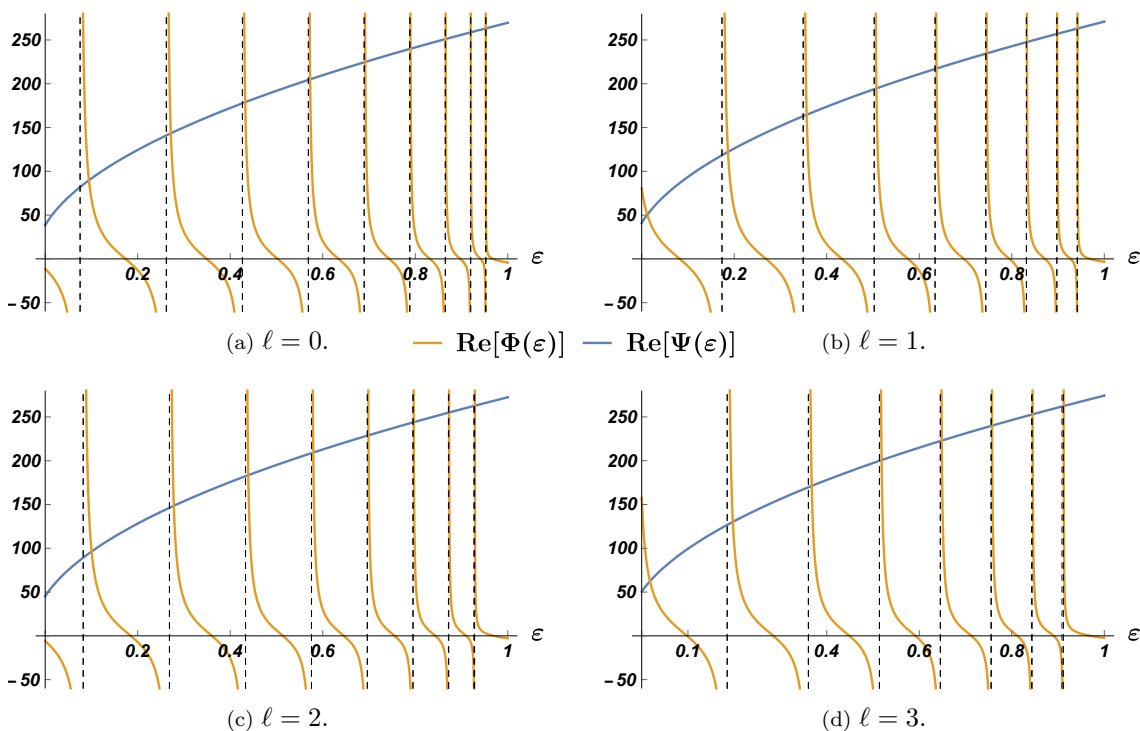


Figura 3.2: Estados ligados de la ecuación secular (3.10) para $\beta = 4$, $g = 3.5$, $v_0 = 30$, $w_{\ell j} = -20$.

De hecho, que el número de estados ligados sea menor cuanto mayor sea el valor del momento angular ℓ , no ocurre únicamente para este caso concreto, sino que podemos extender este resultado para cualesquiera valores de los parámetros físicos. Para hacer esta generalización, con las hipótesis de monotonía de Ψ_ℓ e imagen y monotonía de Φ_ℓ entre dos puntos de discontinuidad consecutivos, únicamente debemos razonar a partir de los a -ceros de la función hipergeométrica de Kummer ${}_1F_1$ que aparece dividiendo en el lado izquierdo de ecuación secular (3.10).

Estos ceros vienen dados aproximadamente por la expresión (3.30). Viendo esta expresión, se deduce que $\varepsilon_n^0 \rightarrow -\infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. Si queremos estudiar el número máximo de estados ligados para cierto valor ℓ del momento angular, no tenemos más que analizar para qué valor de n los valores de ε_n^0 dados por la expresión (3.30) están contenidos en el intervalo $(0, 1)$. Según vimos, todos ellos verifican que $\varepsilon_k^0 < 1$, luego tenemos que ver

⁴Como explicaremos más adelante, esto no corresponde al valor que se debe utilizar cuando se quieren extraer conclusiones físicas del modelo, pero puesto que los resultados de esta sección se basan únicamente en número de ceros de la función ${}_1F_1$ –independiente de $w_{\ell j}$ – podemos tomar este parámetro como constante a fin de simplificar razonamientos.

a partir de qué valor de n_0 se verifica que $\varepsilon_n^0 < 0$ si $n \geq n_0$. Sin más que considerar la expresión (3.30) como función de n , y resolver la ecuación cuadrática $\varepsilon_n^0 = 0$, deducimos que

$$n_\ell \equiv \left\lfloor \frac{-3\pi\ell \pm \sqrt{-24g^2 + 9(\ell + \ell^2 + v_0^2)}}{6\pi} \right\rfloor, \quad (3.31)$$

donde $\lfloor x \rfloor$ denota la función suelo, una función que asigna a cada número real su número entero más cercano por defecto, y además se ha asumido que

$$-24g^2 + 9(\ell + \ell^2 + v_0^2) \geq 0, \quad (3.32)$$

ya que $n_\ell \in \mathbb{N}$. Para obtener un solución con sentido físico, debemos tomar el signo $+$ en la solución (3.31), es decir, consideramos únicamente la solución

$$n_\ell^+ \equiv \left\lfloor \frac{-3\pi\ell + \sqrt{-24g^2 + 9(\ell + \ell^2 + v_0^2)}}{6\pi} \right\rfloor.$$

Por tanto, es evidente que si s es el número de ceros contenidos en el intervalo $(0, 1)$ de la ecuación ${}_1F_1(a(\varepsilon), \frac{3}{2} + \ell, -ig) = 0$, entonces

$$s = \max \{n_\ell^+, 0\}. \quad (3.33)$$

En el caso que estamos estudiando, se cumple la desigualdad (3.32), ya que $g = 3.5$ y $v_0 = 30$, luego $-24g^2 + 9v_0^2 > 0$. Para los núcleos doblemente mágicos que consideraremos en el capítulo 4, esta desigualdad siempre se verifica, como se muestra en la Tabla 3.2. En la Figura 3.3 se ha representando, para las constantes con las que estamos trabajando, la función discreta dada en (3.33) en función del valor del momento angular ℓ .

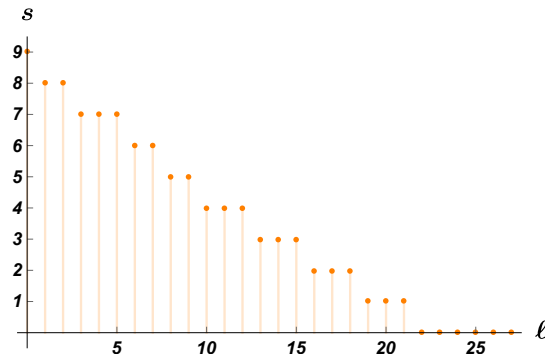


Figura 3.3: Número de puntos de discontinuidad de Φ_ℓ para $g = 3.5$, $v_0 = 30$ y $w_{\ell j} = -20$ en función del momento angular ℓ .

El número de puntos de discontinuidad de Φ_ℓ contenidos en $(0, 1)$ se ha asumido que viene dado por (3.33) de forma exacta. Viendo en la Figura 3.3 el valor de s para $\ell = 0, 1, 2$ y 3 deducimos que, para estos valores del momento angular, el número de puntos de discontinuidad aproximado por esta función es exactamente el mismo número de puntos de discontinuidad que podemos contar en las gráficas correspondientes de la Figura 3.2.

De hecho, la expresión de (3.33) viene de asumir que los a -ceros de la ecuación

$${}_1F_1(a(\varepsilon), \frac{3}{2} + \ell, -ig) = 0$$

son calculados de manera exacta a partir de la expresión (3.30). Para poder analizar la precisión en la aproximación de estos ceros, podemos comparar estas soluciones aproximadas con las que se pueden obtener de manera más precisa mediante la ayuda de programas de cálculo⁵ y de procedimientos numéricos.

En la Tabla 3.1 se han recogido los a -ceros de la función ${}_1F_1$, donde Aprox. representan los primeros a -ceros obtenidos a partir de la expresión (3.30), y Num. los que hemos obtenido a partir de resolver ${}_1F_1(a(\varepsilon), \ell + \frac{3}{2}; -ig) = 0$ mediante procedimientos numéricos. Podemos apreciar que las aproximaciones obtenidas son realmente buenas. Esta misma comparación se ha realizado en la Tabla 4.6 para todos los núcleos doblemente mágicos, donde se puede apreciar que las aproximaciones son igualmente buenas en estos casos.

$\varepsilon_{n\ell j}^0$	$\ell = 0$		$\ell = 1$		$\ell = 2$		$\ell = 3$	
	Aprox.	Num.	Aprox.	Num.	Aprox.	Num.	Aprox.	Num.
$n = 1$	0.953	0.952	0.941	0.941	0.927	0.928	0.908	0.911
$n = 2$	0.920	0.919	0.897	0.897	0.872	0.872	0.843	0.844
$n = 3$	0.865	0.864	0.832	0.831	0.795	0.795	0.755	0.755
$n = 4$	0.788	0.788	0.744	0.743	0.696	0.696	0.645	0.646
$n = 5$	0.690	0.689	0.634	0.634	0.576	0.575	0.514	0.514
$n = 6$	0.569	0.568	0.503	0.503	0.433	0.433	0.360	0.360

Tabla 3.1: Algunos puntos de discontinuidad de Φ_ℓ para $g = 3.5$, $v_0 = 30$ y $w_{\ell j} = -20$ en función del momento angular ℓ .

Por tanto, puesto que los ceros son aproximados con gran precisión para valores bajos del momento angular ℓ , podemos asumir que, para al menos estos valores de ℓ , el número de puntos de discontinuidad de Φ_ℓ viene dado exactamente por (3.33).

Sin embargo, para valores más altos del momento angular ℓ puede diferir por varias unidades. Esto se debe a que se ha partido de una aproximación numérica de los a -ceros de la función hipergeométrica confluyente, y la aproximación no es tan buena para valores de ℓ grandes.

Como ya se ha mencionado, este modelo ofrece mejores resultados para valores bajos del momento angular ℓ . De hecho, a través de los razonamientos que hemos realizado, estamos en condiciones de enunciar un teorema sobre el número de estados ligados para valores pequeños del momento angular. Para ello, asumiremos las propiedades de monotonía e inyectividad de Ψ_ℓ y Φ_ℓ mencionadas anteriormente.

Teorema 3.3.1. *El número de estados ligados viene dado por*

$$N_\ell = (s - 1) + m + m',$$

donde s es el número de puntos de discontinuidad de Φ_ℓ en el intervalo $(0, 1)$, que para valores bajos de ℓ puede ser aproximado por (3.33), y se definen m y m' según

$$m = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_\ell(0) > \Psi_\ell(0), \\ 0 & \text{si } \Phi_\ell(0) < \Psi_\ell(0), \end{cases} \quad m' = \begin{cases} 1 & \text{si } \Psi_\ell(1) > \Phi_\ell(1), \\ 0 & \text{si } \Psi_\ell(1) < \Phi_\ell(1). \end{cases} \quad (3.34)$$

⁵En este caso, se ha utilizado *Mathematica* para encontrar las soluciones numéricas.

Demostración:

Es evidente que si Ψ_ℓ es monótona creciente en $(0, 1)$, y Ψ_ℓ es inyectiva entre dos ceros consecutivos, teniendo como imagen la recta real, entre cada par consecutivo de puntos de discontinuidad de Φ_ℓ necesariamente debe de haber un punto de corte⁶ entre Φ_ℓ y Ψ_ℓ , dando lugar al menos a $s - 1$ estados ligados.

Además, si $\Phi_\ell(0) < \Psi_\ell(0)$ –como ocurre por ejemplo en las dos gráficas de la derecha de Figura 3.2– es evidente que hay un estado ligado adicional en cierto ε_k tal que $\varepsilon_k < a_k$, siendo a_k el punto de discontinuidad de Φ_ℓ más cercano al origen.

Finalmente, si $\Psi_\ell(1) > \Phi_\ell(1)$, entonces necesariamente tenemos un estado ligado adicional para cierto ε_1 tal que $a_1 < \varepsilon_1 < 1$, siendo a_1 el punto de discontinuidad de Φ_ℓ más cercano a $\varepsilon = 1$. \square

3.3.2. Valor máximo del momento angular

En la sección anterior se ha estudiado el número de estados ligados para cierto valor del momento angular ℓ , y se ha visto que para valores más altos del momento angular hay menos estados ligados. Esto parece sugerir la existencia de un valor ℓ_{\max} del momento angular a partir del cuál la ecuación secular no tiene estados ligados. El objetivo de esta sección es encontrar dicho valor máximo del momento angular.

Hemos visto que una condición necesaria para que no haya estados ligados es que la función Φ_ℓ sea continua en el el intervalo $(0, 1)$ pues, como hemos deducido, puntos de discontinuidad en este intervalo dan lugar necesariamente a estados ligados. Esta función tiene infinitos puntos de discontinuidad, luego lo que debe ocurrir es que el primer punto de discontinuidad, ε_1^0 utilizando la notación anterior, sea negativo.

Por ello, si tomamos la expresión⁷ (3.30), y resolvemos, vista como función de ℓ , la ecuación $\varepsilon_1^0 = 0$, tendremos el valor del momento angular a partir del cual la función Φ_ℓ es continua.

La ecuación $\varepsilon_1^0(\ell) = 0$ se trata de una ecuación cuadrática cuya solución viene dada por

$$\ell_{\max} = \max \left\{ \left\lceil \frac{6 - 6\pi^2 + 2\sqrt{(9\pi^2 - 36)v_0^2 + 9(2\pi^2 + 1) - 24(\pi^2 - 4)g^2}}{3(\pi^2 - 4)} \right\rceil, 0 \right\}, \quad (3.35)$$

donde hemos supuesto que

$$(9\pi^2 - 36)v_0^2 + 9(2\pi^2 + 1) - 24(\pi^2 - 4)g^2 \geq 0, \quad (3.36)$$

hemos tomamos la solución correspondiente al signo +, y además $[x]$ denota a la función techo, una función que a cada número real le asigna el número entero más cercano por exceso.

Es interesante remarcar que de la expresión anterior se deduce que v_0 (en esencia, V_0 y R) contribuyen a que el valor ℓ_{\max} sea más grande, mientras que g (el término correspondiente a la repulsión coulombiana) contribuye a que este valor sea menor. Esto último es coherente desde un punto de vista físico, pues el potencial de Coulomb es repulsivo.

⁶Para demostrarlo no hay más que aplicar la propiedad de Darboux.

⁷Notemos que lo que verdaderamente debe ocurrir para que Φ_ℓ sea continua es que $a_1^* < 0$, siendo a_1^* el punto de discontinuidad exacto, mientras que en nuestros razonamientos estamos buscando ℓ_{\max} tal que ε_1^0 –solución numérica aproximada– verifique $\varepsilon_1^0 < 0$ si $\ell \geq \ell_{\max}$.

Al sustituir los valores con los que estamos trabajando, obtenemos que $\ell_+ = 21.33$, de donde se deduce, utilizando (3.35), que el número máximo del momento angular para que haya estados ligados es cercano a $\ell_{\max} = 22$.

Por otra parte, hay que tener en cuenta que el hecho de que Φ_ℓ sea continua es una condición necesaria, pero no suficiente. Una de nuestras hipótesis es que Ψ_ℓ es una función monótona, luego también debe ocurrir que $\Psi_\ell(0) > \Phi_\ell(0)$ para que no haya estados ligados.

En la Figura 3.4 se ha representado la ecuación secular para valores de ℓ próximos a $\ell = 22$. A partir de estas gráficas, observamos que la aproximación del momento angular máximo ℓ_{\max} dada por la expresión (3.35) difiere en unas unidades. Sin embargo, esto no debería sorprendernos en absoluto, pues como se ha mencionado, las aproximaciones a los puntos de discontinuidad dadas por (3.30) son menos precisas para valores pequeños de n , y la ecuación (3.35) surge precisamente de aproximar ε_1^0 , es decir, de utilizar la peor de las aproximaciones a ceros de la función ${}_1F_1$ que obtenemos mediante la expresión (3.30).

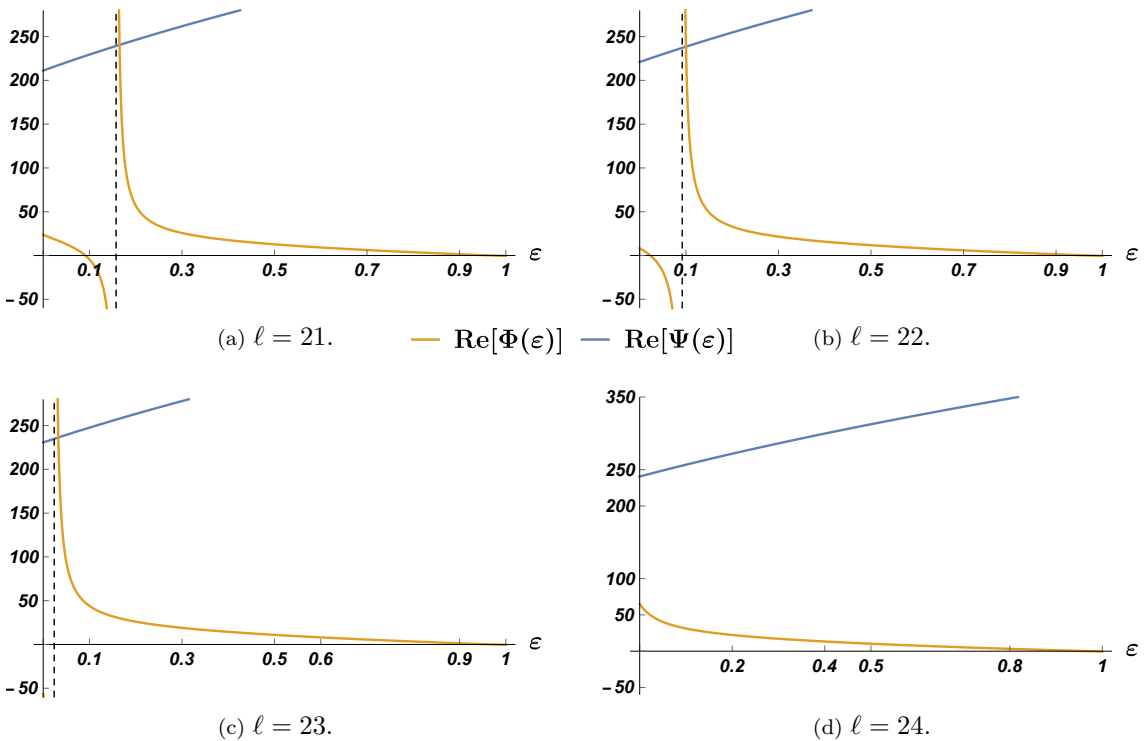


Figura 3.4: Estados ligados de la ecuación secular (3.10) para $\beta = 4$, $g = 3.5$, $v_0 = 30$, $w_{\ell j} = -20$.

De nuevo comentar que este modelo ofrece buenos resultados para valores bajos del momento angular, y aunque el valor máximo del momento angular para que no haya estados ligados no es exacto, difiere a lo sumo en unas unidades, y proporciona una gran intuición hacia el valor exacto de ℓ_{\max} , pudiéndose comprobar la validez de este posteriormente mediante representaciones gráficas.

Finalmente, es interesante remarcar que a lo largo de las últimas secciones se ha asumido que se verifican las desigualdades (3.32) para realizar un conteo analítico del número de estados ligados, y (3.36) para calcular el valor máximo del momento angular. Evidentemente, estas desigualdades no se verifican para valores cualesquiera de g , v_0 y ℓ . Sin embargo, se puede comprobar calculando los parámetros físicos correspondientes a todos los isótopos doblemente mágicos que estas desigualdades se cumplen en todo momento para valores de los parámetros realistas con posibles aplicaciones nucleares.

En la Tabla 3.2 se han recogido los valores de las desigualdades (3.32) y (3.36) para el caso en que el nucleón en cuestión sea un protón, tomando para la primera⁸ de ellas $\ell = 0$. Como podemos observar, estas desigualdades se verifican para todos los valores físicos que pueden tomar v_0 , g , y ℓ .

Isótopo	Z	N	v_0	g	R/fm	des. (3.32)	des. (3.36)
${}^4_2\text{He}$	2	2	3.155	0.372	2.016	86.254	692.930
${}^{10}_2\text{He}$	2	8	3.349	0.434	2.736	96.429	752.656
${}^{16}_2\text{O}$	8	8	5.008	0.939	3.200	204.568	1387.390
${}^{40}_{20}\text{C}$	20	20	6.797	1.730	4.343	343.957	2205.540
${}^{48}_{20}\text{Ca}$	20	28	6.822	1.784	4.615	342.555	2197.320
${}^{48}_{28}\text{Ni}$	28	20	7.602	2.110	4.615	413.283	2612.460
${}^{56}_{28}\text{Ni}$	28	28	7.604	2.165	4.858	407.827	2580.430
${}^{78}_{28}\text{Ni}$	28	50	7.678	2.288	5.426	404.871	2563.080
${}^{100}_{50}\text{Sn}$	50	50	9.225	3.187	5.894	522.076	3251.030
${}^{132}_{50}\text{Sn}$	50	82	9.292	3.338	6.466	509.584	3177.710
${}^{208}_{82}\text{Pb}$	82	126	10.940	4.612	7.524	566.677	3512.820

Tabla 3.2: Verificación de las desigualdades (3.32) y (3.36) para todos los posibles núcleos doblemente mágicos con un protón adicional.

En caso de que el nucleón sea un neutrón, el único parámetro que cambia respecto a la Tabla 3.2 es g , que en este caso es nulo para todos los isótopos. Sin embargo, es evidente que se verifican las desigualdades mencionadas, pues sustituyendo en ellas $g = 0$ se tiene

$$9(\ell + \ell^2 + v_0) \geq 0, \quad (9\pi^2 - 36)v_0^2 + 9(2\pi^2 + 1) \geq 0.$$

Por tanto, deducimos que para el estudio de un posible sistema físico, donde se toman valores realistas de las constantes, y no arbitrarios, las desigualdades mencionadas se verifican en todo momento, y (3.33) y (3.35) devuelven el número de puntos de discontinuidad de Ψ_ℓ y el valor máximo del momento angular respectivamente.

Los razonamientos anteriores también se han basado en que la aproximación numérica a los a -ceros de la función hipergeométrica confluyente ${}_1F_1$ son bastante precisos. En la Tabla 4.6, situada en la Sección 4.3 del Capítulo 4, se muestra la calidad de estos ceros. Puesto que los primeros ceros, correspondientes a estados de baja energía, son aproximados con gran precisión, podemos tomar para nuestros propósitos la aproximación dada en (3.30) como exacta.

3.4. Orden de los estados ligados

En la sección anterior se ha estudiado el número de estados ligados frente al valor del momento angular ℓ . Sin embargo, únicamente se ha mencionado que los estados más

⁸Notemos que la desigualdad (3.32) es $-24g^2 + 9(\ell + \ell^2 + v_0^2) \geq 0$, luego puesto que $\ell \geq 0$, es suficiente demostrar que $-8g^2 + 3v_0^2 \geq 0$.

ligados son los correspondientes a los valores de ε mayores, y que la energía de dichos estados se puede obtener a partir de la expresión (3.38). Nuestro objetivo ahora es ordenar los estados ligados, es decir, estudiar en detalle para qué valores de n , ℓ y j estos estados están más ligados.

Los razonamientos anteriores se han basado únicamente en los ceros de la función ${}_1F_1$, y por ello hemos podido suponer que $w_{\ell j}$ es constante, pues no nos hemos preocupado por los puntos de corte de Φ_ℓ y Ψ_ℓ , sino únicamente del número de puntos de discontinuidad de Φ_ℓ . Sin embargo, se ha definido $w_{\ell j} = 4\alpha R$, donde α viene dado por (2.24), y en vistas de la expresión de $\xi_{\ell j}$ dada en (2.13), vemos una clara dependencia de $w_{\ell j}$ con los números cuánticos j y ℓ . Por tanto, en esta sección, donde vamos a analizar valores de la energía, debemos incluir esta dependencia de forma explícita.

Se sabe que para potenciales continuos esféricamente simétricos, si $E_{n\ell}$ denota la energía de un estado ligado definido por los números cuánticos n y ℓ , entonces se tienen las siguientes desigualdades

$$E_{n\ell} < E_{(n+1)\ell} < E_{(n+1)(\ell+1)}, \quad n, \ell \in \mathbb{N}_0.$$

Para demostrar estas desigualdades se debe aplicar el Teorema de Sturm, así como analizar las propiedades espectrales del hamiltoniano, como se hace en la Sección 6.2 de [11].

Para el caso que nos ocupa, no tenemos un potencial continuo esféricamente simétrico, sino el potencial δ - δ' esféricamente simétrico. En este caso, hay que añadir la dependencia adicional del número cuántico j . Sin embargo, trataremos de extender las conclusiones anteriores a potenciales de este último tipo con los que estamos trabajando.

Puesto que nuestro objetivo ahora no es obtener valores realistas de las energías para núcleos concretos, sino estudiar la dependencia con los números cuánticos, nos conformaremos con tomar $w_{\ell j} \propto \ell$ si $j = j_+ \equiv \ell + 1/2$, y $w_{\ell j} \propto -(\ell + 1)$ si $j = j_- \equiv \ell + 1/2$. A lo largo de esta sección tomaremos

$$w_{\ell j} = \begin{cases} -20\ell & \text{para } j_+ = \ell + \frac{1}{2}, \\ 20(\ell + 1) & \text{para } j_- = \ell - \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (3.37)$$

Al igual que el resto de parámetros de esta sección, $w_{\ell j}$ no es un valor necesariamente realista aplicable en el modelo nuclear, lo único relevante es que $w_{\ell j} < 0$ y $w_{\ell j} \propto \ell$ para j_+ y $w_{\ell j} > 0$ y $w_{\ell j} \propto (\ell + 1)$ para j_- .

De ahora en adelante, denotemos por $E_{n\ell j}$ a la energía del estado asociado a la energía relativa $\varepsilon_{n\ell j}$.

Con la intención de resolver la ecuación secular, hemos realizado una adimensionalización de la energía. Hemos definido $\varepsilon = |E|/V_0$ luego, puesto que $E < 0$ en la región interior, para obtener la energía $E_{n\ell j}$ a partir de la energía relativa $\varepsilon_{n\ell j}$ no tenemos más que aplicar

$$E_{n\ell j} = -\varepsilon_{n\ell j} V_0, \quad (3.38)$$

donde recordemos que V_0 ya tiene unidades de energía.

En la Figura 3.5 se ha representado la ecuación secular para distintos valores del ℓ y de j , tomando como parámetros los utilizados anteriormente. Recordemos para $\ell = 0$ hay un

único posible valor de j , que es $j = 1/2$, mientras que para $\ell > 0$ se tiene que $j = \ell \pm 1/2$. Es interesante notar que, como ya se comentó durante el desarrollo del modelo nuclear de capas (ver expresión (1.2)), la separación de energía para capas con valores de $j_+ = \ell + 1/2$ y $j_- = \ell - 1/2$ es $\Delta E = (2\ell + 1)\hbar^2/2$.

Como apreciamos en las gráficas de la Figura 3.5, para valores más altos de ℓ , los estados ligados asociados a j_+ y j_- están más separados, mientras que para valores pequeños de ℓ lo están menos.

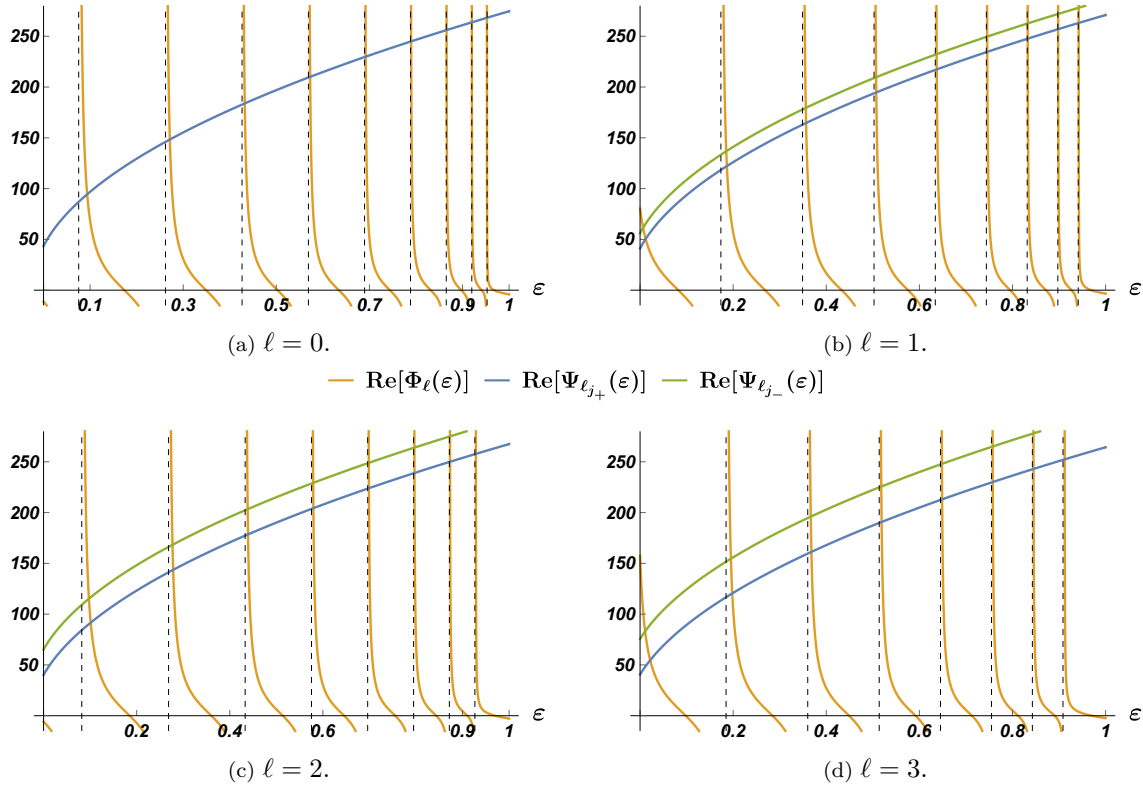


Figura 3.5: Estados ligados de la ecuación secular (3.10) para $\beta = 4$, $g = 3.5$, $v_0 = 30$ y w_{ℓ_j} dado en (3.37).

Sin más que tomar los puntos de corte entre Ψ_ℓ y Φ_ℓ encontrados en estas gráficas, podemos completar la siguiente tabla donde se recoge la energía de todos los estados ligados para $\ell = 0, 1, 2$, y 3 , con los posibles valores de $j_+ = \ell + 1/2$ y $j_- = \ell - 1/2$. Por otra parte, la Tabla 3.3 recoge tanto todos los valores de la energía adimensionalizada de estados ligados así como la dimensionalizada (obtenida a partir de (3.38)) para diferentes valores del momento angular ℓ , y del momento angular total j .

3.4.1. Dependencia con el número cuántico n

El objetivo de esta sección es mostrar que, para cualquier valor de n, ℓ y j , se tiene la desigualdad de la energía adimensionalizada

$$-\varepsilon_{n\ell_j} < -\varepsilon_{(n+1)\ell_j}, \quad (3.39)$$

que, en vistas de 3.38, equivale a probar que

$$E_{n\ell_j} < E_{(n+1)\ell_j},$$

desigualdad ya conocida para potenciales continuos esféricamente simétricos. La demostración de esta desigualdad es trivial, pues sin más que tomar la expresión (3.30) y derivar respecto de n se concluye que $\varepsilon'_n = (-\ell\pi^2 - 2n\pi^2)/v_0^2 < 0$, luego $\varepsilon_{(n+1)\ell_j} < \varepsilon_{n\ell_j}$, equivalente a (3.39).

$\varepsilon_{n\ell_j}$		$\ell = 0$		$\ell = 1$		$\ell = 2$		$\ell = 3$	
		j_+	j_-	j_+	j_-	j_+	j_-	j_+	j_+
$n = 1$	Adim.	0.952	0.952	0.942	0.942	0.928	0.928	0.912	0.911
	MeV	-28.560	-28.560	-28.260	-28.260	-27.840	-27.840	-27.360	-27.360
$n = 2$	Adim.	0.919	0.919	0.898	0.898	0.872	0.872	0.845	0.844
	MeV	-27.480	-27.480	-26.940	-26.940	-26.160	-26.160	-25.350	-25.320
$n = 3$	Adim.	0.865	0.865	0.832	0.832	0.796	0.796	0.757	0.756
	MeV	-25.680	-25.680	-24.960	-24.960	-23.880	-23.880	-22.710	-22.680
$n = 4$	Adim.	0.789	0.789	0.745	0.745	0.698	0.698	0.469	0.648
	MeV	-23.670	-23.670	-22.350	-22.350	-20.940	-20.940	-19.479	-19.440
$n = 5$	Adim.	0.691	0.691	0.637	0.637	0.579	0.578	0.518	0.517
	MeV	-20.730	-20.730	-19.110	-19.110	-17.370	-17.340	-15.540	-15.510
$n = 6$	Adim.	0.572	0.572	0.507	0.506	0.438	0.437	0.368	0.366
	MeV	-17.160	-17.160	-15.210	-15.180	-13.140	-13.110	-11.040	-10.90
$n = 7$	Adim.	0.432	0.431	0.356	0.355	0.278	0.276	0.189	0.184
	MeV	-19.960	-19.930	-10.680	-10.650	-8.340	-8.289	-5.670	-5.520
$n = 8$	Adim.	0.271	0.270	0.186	0.184	0.101	0.097	0.011	0.010
	MeV	-8.130	-8.100	-5.580	-5.520	-3.030	-2.910	-0.330	-0.300
$n = 9$	Adim.	0.093	0.091	0.011	0.006	-	-	-	-
	MeV	-2.790	-2.730	-0.330	-0.018	-	-	-	-

Tabla 3.3: Valores de la energía para algunos estados ligados de la ecuación secular (3.10) para $\beta = 4$, $g = 3.5$, $v_0 = 30$, y w_{ℓ_j} definido en (3.37).

3.4.2. Dependencia con el número cuántico j

Al introducir el término de potencial espín-orbita, nos vimos obligados a trabajar con el valor del momento angular total j . El objetivo de esta sección es mostrar que

$$-\varepsilon_{n\ell_{\ell+1/2}} < -\varepsilon_{n\ell_{\ell-1/2}}. \quad (3.40)$$

La dependencia con el valor del momento angular j ya ha sido mencionada durante el desarrollo del potencial de Woods-Saxon. Según vimos, introducir el potencial espín-órbita definido en (2.8) separa los niveles de energía con $\ell > 0$ en dos nuevos niveles (ver Figura 1.6). Además, la separación entre niveles de energía con $j_{\pm} = \ell \pm 1/2$ es $\Delta E \propto (2\ell + 1)\hbar^2/2$.

Si $U_{\text{so}}(r)$ es negativo, entonces el estado con mayor nivel de j es “empujado hacia abajo” en el esquema de niveles de energía, es decir, corresponde a un estado ligado más energético. Por ejemplo, el estado $1h$ del potencial de Woods-Saxon se desdobra, debido a la interacción espín-órbita, en dos niveles $1h_{11/2}$ y $1h_{9/2}$, siendo el primero de ellos más energético, pues ocupa una capa más baja.

En vistas de (2.8), para que $U_{\text{so}}(r)$ sea negativo, debe ocurrir que V_{so} sea positivo, pero recordemos que hemos usado la parametrización

$$V_{\text{so}} = 0.44 \left(51 \pm 33 \frac{N - Z}{A} \right),$$

con lo que es positivo. Para verlo, no hay más que observar en la Figura 1.7 los posibles valores de N y Z para núcleos doblemente mágicos, donde sin más que sustituir N , Z y A se puede comprobar que $V_{\text{so}} > 0$.

Por tanto, concluimos que debido al potencial de interacción espín-órbita, aquellos estados ligados que corresponden a un valor mayor de j serán más energéticos.

El razonamiento anterior se ha basado en el modelo nuclear propuesto. Sin embargo, también podríamos haber razonado en base a la solución que hemos obtenido. Notemos que la dependencia con j está dada por el término $w_{\ell j}/(2 - \beta)^2$. Este término es una constante que se suma al lado izquierdo de la ecuación secular. Sin más que tener en cuenta las definiciones (3.27), (2.24) y (2.13), se deduce que

$$w_{\ell j} = \begin{cases} -\frac{2\mu}{\hbar^2} V_{\text{so}} \ell & \text{para } j = \ell + \frac{1}{2}, \text{ con } \ell \geq 0, \\ \frac{2\mu}{\hbar^2} V_{\text{so}} (\ell + 1) & \text{para } j = \ell - \frac{1}{2}, \text{ con } \ell > 0, \end{cases} \quad (3.41)$$

de donde se deduce que si $\ell > 0$, entonces $\Psi_{\ell_{j-}}(\varepsilon) > \Psi_{\ell_{j+}}(\varepsilon)$ para todo $\varepsilon \in (0, 1)$, como ya pudimos apreciar en la Figura 3.5. Pero debido al comportamiento de la función $\Phi_{\ell}(\varepsilon)$, que es independiente de j , esto se traduce en puntos de corte para valores menores de ε con $\Psi_{\ell_{j-}}(\varepsilon)$ que con $\Psi_{\ell_{j+}}(\varepsilon)$.

3.4.3. Dependencia con el número cuántico ℓ

En esta sección se pretende mostrar que los estados ligados con energías relativas $\varepsilon_{n\ell_j}$ y $\varepsilon_{n(\ell+1)_j}$ verifican que

$$-\varepsilon_{n\ell_j} < -\varepsilon_{n(\ell+1)_j}, \quad (3.42)$$

es decir, que los estados están más ligados para valores más bajos del momento angular, al igual que ocurre para potenciales esféricamente simétricos.

Para demostrar este resultado de forma analítica, habría que hacer un estudio de la monotonía de Φ_{ℓ} y Ψ_{ℓ} respecto al parámetro ℓ . Sin embargo, debido a la dificultad que esto conlleva, por la complejidad de las funciones involucradas, nos conformaremos con mostrar cómo intuitivamente se puede comprobar este hecho de forma gráfica para valores concretos de las constantes.

En primer lugar, notemos que si queremos comparar los estados con valor del momento angular $\ell_1 = \ell$ y $\ell_2 = \ell + 1$, para que estos tengan el mismo valor del momento angular total j , de forma que una posible diferencia de energía entre ellos proceda exclusivamente del valor del momento angular orbital, debemos tener

$$\begin{aligned} j_1 = \ell_1 + \frac{1}{2} = \ell + \frac{1}{2} & \Rightarrow w_{\ell_1 j_1} = -\frac{2\mu}{\hbar^2} V_{\text{so}} \ell \\ j_2 = \ell_2 - \frac{1}{2} = \ell + \frac{1}{2} & \Rightarrow w_{\ell_2 j_2} = -\frac{2\mu}{\hbar^2} V_{\text{so}} (\ell + 2) \end{aligned}$$

pero razonando como en la sección anterior, a partir de desplazamientos verticales, se deduce que estos valores de $w_{\ell j}$ favorecen la desigualdad que estamos intentando probar, luego debemos limitarnos a estudiar cómo afecta el valor de ℓ .

En la Figura 3.6 se han representado las funciones $\Psi_{\ell}(\varepsilon)$ y $\Phi_{\ell}(\varepsilon)$ para distintos valores de ℓ , tomando únicamente la primera de las ramas que aparecen para $\Psi_{\ell}(\varepsilon)$. Dado un valor

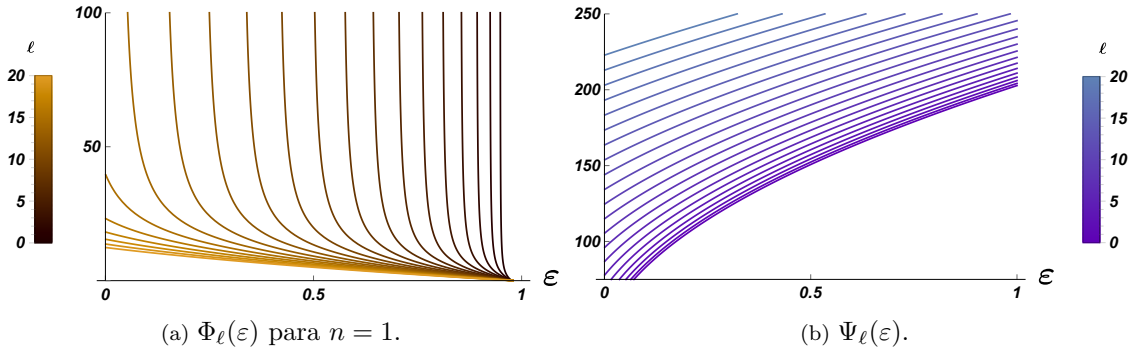


Figura 3.6: Variación de las funciones de la ecuación (3.10), $\Phi_\ell(\varepsilon) = \Psi_\ell(\varepsilon)$, con respecto a ℓ para $v_0 = 20$, $w_{\ell j} = 20$, $g = 2$ and $\beta = 1$.

fijo de ℓ , el primer estado ligado corresponde al corte de ambas funciones para este valor del momento angular. Para observar cómo influye el valor de ℓ en la energía adimensionalizada del estado ligado, fijemos por separado una curva correspondiente a un valor de ℓ_0 fijo para una de estas funciones, y estudiemos cómo influye el valor de ℓ en la otra función para el punto de corte.

Supongamos ℓ_0 un valor fijo, y fijémonos en los puntos de corte de curva $\Psi_{\ell_0}(\varepsilon)$ con $\Phi_{\ell_1}(\varepsilon)$, y $\Phi_{\ell_2}(\varepsilon)$ siendo $\ell_1 \leq \ell_2$. En la Figura 3.7a se ha representado dicha situación. Podemos observar que si $\Phi_{\ell_1}(\varepsilon_1) = \Psi_{\ell_0}(\varepsilon_1)$ y $\Phi_{\ell_2}(\varepsilon_2) = \Psi_{\ell_0}(\varepsilon_2)$, entonces $\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$. Intuitivamente, acabamos de ver que valores menores de ℓ en Φ contribuye a estados ligados con mayor energía relativa.

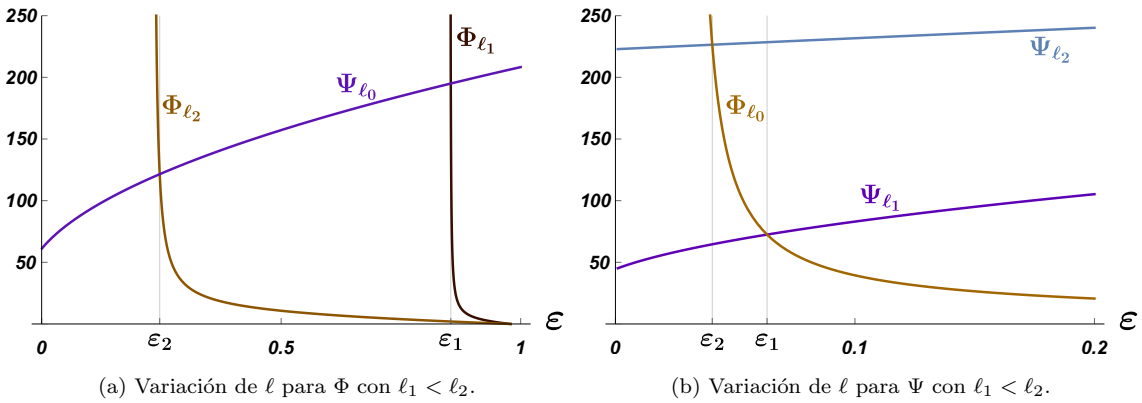


Figura 3.7: Estudio de las energías relativas en función del momento angular ℓ .

Por otra parte, podemos estudiar la situación contraria. Fijando ℓ_0 , estudiemos los puntos de corte de $\Psi_{\ell_0}(\varepsilon)$ con las curvas $\Phi_{\ell_1}(\varepsilon)$ y $\Phi_{\ell_2}(\varepsilon)$, tomando de nuevo $\ell_1 \leq \ell_2$. En la Figura 3.7b podemos observar de nuevo, valores menores de ℓ en Ψ contribuye a estados ligados con mayor energía relativa.

En el razonamiento anterior, se ha estudiado la energía del mayor de los estados ligados (es decir, $n = 1$), pero si razonásemos con cualquiera de ellos, llegaríamos a la misma conclusión, pues lo único que cambia es que para $n = 1$ la imagen de la función no es toda la recta real, sino la recta real positiva y $(-x, 0)$, siendo $x > 0$, mientras que para $n > 1$ la imagen es toda la recta real. Hemos visto que valores menores de ℓ contribuyen, a través

tanto de Φ_ℓ como de Ψ_ℓ , a estados más ligados de energía, es decir, que

$$\varepsilon_{n\ell_j} > \varepsilon_{n(\ell+1)_j},$$

de donde se deduce (3.42).

3.4.4. Estados de baja energía

Como se puede apreciar en las figuras mostradas a lo largo de este capítulo, los estados ligados de baja energía, aquellos correspondientes a los primeros valores de n y ℓ , pueden ser aproximados por $\varepsilon_{n\ell_j}$, de forma que

$$\varepsilon_{n\ell_j} \simeq 1 - \frac{8g^2}{3v_0^2} + \frac{\ell}{v_0^2} - \frac{\ell n \pi^2}{v_0^2} - \frac{n^2 \pi^2}{v_0^2} - \frac{\ell^2 (\pi^2 - 4)}{4v_0^2}. \quad (3.43)$$

La ventaja de utilizar esta aproximación, es que tenemos una expresión con la que podemos aproximar las energías adimensionalizadas de los estados ligados, de forma que se pueden extraer conclusiones acerca de cómo influyen los números cuánticos, utilizando razonamientos analíticos.

La aproximación (3.43) únicamente considera los a -ceros de ${}_1F_1(a_n, \ell + \frac{3}{2}; -ig)$, de forma que no depende de w_{ℓ_j} , i.e, de j . Notemos que el factor $w_{\ell_j}/(2-\beta)^2$ que aparece en Ψ_ℓ no tiene otro efecto que un desplazamiento vertical sobre el eje de ordenadas respecto al caso en el que se tuviese $w_{\ell_j} = 0$. Evidentemente, la aproximación anterior se basa en que el punto de corte entre Φ_ℓ y Ψ_ℓ se produce cerca del punto de discontinuidad de Ψ_ℓ , y esto será mejor aproximación cuanto mayor sea el valor de ordenadas de este punto de corte. Por tanto, si $w_{\ell_j}/(2-\beta)^2 \gg 0$, la aproximación anterior será de gran calidad.

Revisemos la ordenación de estados ligados utilizando esta aproximación para bajas energías:

- $-\varepsilon_{n\ell_j} < -\varepsilon_{(n+1)\ell_j}$: esta desigualdad es trivial, pues de (3.43) se deduce que el término

$$-\frac{\ell n \pi^2}{v_0^2} - \frac{n^2 \pi^2}{v_0^2} \quad (3.44)$$

decrece con n .

- $-\varepsilon_{n\ell_j} < -\varepsilon_{n(\ell+1)_j}$: esta desigualdad es también es trivial, pues

$$\frac{\ell}{v_0^2} - \frac{\ell n \pi^2}{v_0^2} - \frac{\ell^2 (\pi^2 - 4)}{4v_0^2} = -\frac{\ell (\pi^2 n - 1)}{v_0^2} - \frac{\ell^2 (\pi^2 - 4)}{4v_0^2} \quad (3.45)$$

decrece con ℓ .

- $-\varepsilon_{n\ell_{\ell+1/2}} < -\varepsilon_{n\ell_{\ell-1/2}}$: esta desigualdad únicamente tiene sentido para $\ell > 0$, pues para $\ell = 0$ no hay desdoblamiento. Como ya se ha mencionado, la dependencia con j entra en la ecuación a través de $w_{\ell_j}/(2-\beta)^2$, siendo $w_{\ell_j} > 0$ para $j_+ = \ell + 1/2$ y $w_{\ell_j} < 0$ para $j_+ = \ell - 1/2$. Por tanto,

$$-\varepsilon_{n\ell_{\ell+1/2}} \lesssim -\varepsilon_{n\ell_{\ell-1/2}}, \quad (3.46)$$

donde el hecho de que sea estrictamente menor pero parecida se deduce de que como vimos $\Delta E \propto \ell$, y estamos considerando bajas energías, luego valores pequeños de ℓ .

Capítulo 4

Parámetros físicos

En los capítulos anteriores se ha realizado un análisis tanto del modelo propuesto como de las soluciones que se obtienen del mismo, pero sin utilizar valores realistas de las constantes físicas involucradas. Nuestro objetivo ahora es realizar este mismo estudio con valores apropiados de todos los parámetros involucrados, para así poder sacar las conclusiones de una posible aplicación nuclear. A lo largo de este capítulo, tomaremos como sistema sobre el que aplicar el modelo desarrollado un nucleón (ya sea protón o neutrón) que completa uno de los núcleos de ^{208}Pb , ^{40}Ca y ^{16}O (que como se puede comprobar en la Figura 1.7, son todos ellos doblemente mágicos). La masa reducida de este sistema físico –núcleo incompleto más nucleón– puede ser aproximada por la masa del nucleón, pues como $m_{\text{núcleo}} \gg m_{\text{nucleón}}$, tenemos que

$$\mu \equiv \frac{1}{\frac{1}{m_{\text{núcleo}}} + \frac{1}{m_{\text{nucleón}}}} = \frac{m_{\text{núcleo}} m_{\text{nucleón}}}{m_{\text{núcleo}} + m_{\text{nucleón}}} \approx m_{\text{nucleón}}, \quad (4.1)$$

que, en nuestro caso, tomaremos la masa del protón o neutrón en reposo. A fin de no hacer repetitiva la escritura, siempre que no exista una posible confusión con respecto al isótopo considerado, nos referiremos simplemente como *caso con protón* (resp. neutrón) al sistema formado por este isótopo doblemente mágico completado mediante el protón adicional.

A lo largo de la discusión del modelo, hemos visto que las constantes que necesitamos conocer para poder extraer resultados sobre el número de estados ligados y de la energía de los nucleones adicionales son A , Z , V_0 (a partir de los cuales se puede obtener R , V_{so} , v_0 y g), los valores de ℓ y j (a partir de los que se calcula $w_{\ell j}$), y de β , siendo este último un parámetro que usaremos para ajustar a medidas experimentales u obtenidas de forma numérica. Cabe remarcar que en principio, salvo el radio nuclear R , todos estos parámetros dependen de si el nucleón que completa el isótopo es un protón o un neutrón. Sin embargo, una situación muy habitual, como ocurre para el ^{40}Ca y el ^{16}O , es que un núcleo doblemente mágico tenga el mismo número de protones y de neutrones (núcleo doblemente mágico para el mismo número mágico). En este caso, en vistas de (2.5), se deduce que se tiene $V_0 = 51$ MeV, independientemente del tipo de nucleón adicional; y lo mismo ocurre para todos los parámetros que se derivan a partir de V_0 .

Sin más que tener en cuenta los números atómicos y másicos de cada una de las especies nucleares anteriormente nombradas, así como las definiciones de cada uno de los parámetros vistas en el capítulo anterior, podemos obtener valores de las constantes que aparecen en la ecuación secular de cada uno de los sistemas. Estos valores se han recogido en la Tabla 4.1. En esa tabla, se han detallado únicamente las variables para los isótopos que estudiaremos en este capítulo. Sin embargo, en la Tabla 4.7, situada en la última

página de este mismo capítulo, se han recogido las constantes de este modelo propias de todos los isótopos doblemente mágicos existentes.

	$^{208}_{82}\text{Pb}_{126}$		$^{40}_{20}\text{Ca}_{20}$		$^{16}_8\text{O}_8$	
	Prot.	Neutr.	Prot.	Neutr.	Prot.	Neutr.
R/fm	7.542		4.343		3.200	
V_0/MeV	57.98	44.02	51.00		51.00	
$V_{\text{so}}/\text{MeV fm}$	25.51	19.36	22.44		22.44	
w_{ℓ_j}	$w_{\ell_{j+}}$	-18.43ℓ	-13.99ℓ	-9.361ℓ	-6.897ℓ	
	$w_{\ell_{j-}}$	$18.43(\ell+1)$	$13.99(\ell+1)$	$9.361(\ell+1)$	$6.897(\ell+1)$	
g	4.621	0	1.730	0	0.939	0
v_0	12.56	10.94	6.797		5.008	

Tabla 4.1: Valores de la constantes físicas involucradas en la ecuación (3.10) para $^{208}_{82}\text{Pb}_{126}$, $^{40}_{20}\text{Ca}_{20}$ y $^{16}_8\text{O}_8$.

4.1. Análisis del ^{208}Pb

Una vez tenemos los valores concretos de los parámetros físicos de una especie nuclear, estamos en condiciones de estudiar los estados y los niveles de energía de los mismos de un nucleón ligado a este isótopo. En esta sección se pretende hacer un análisis detallado, que sirva como ejemplo de cómo proceder para los demás sistemas mencionados, del núcleo doblemente mágico de ^{208}Pb . Como ya sabemos, si el nucleón adicional es un neutrón, este no se ve afectado por los términos que se derivan de la fuerza de Coulomb. Para este caso, podemos o bien utilizar las soluciones que se obtienen en [1], o bien utilizar las expresiones encontradas a lo largo de esta memoria, tomando $g = 0$, puesto que ya vimos que en el límite $g \rightarrow 0$ ambas soluciones son la misma.

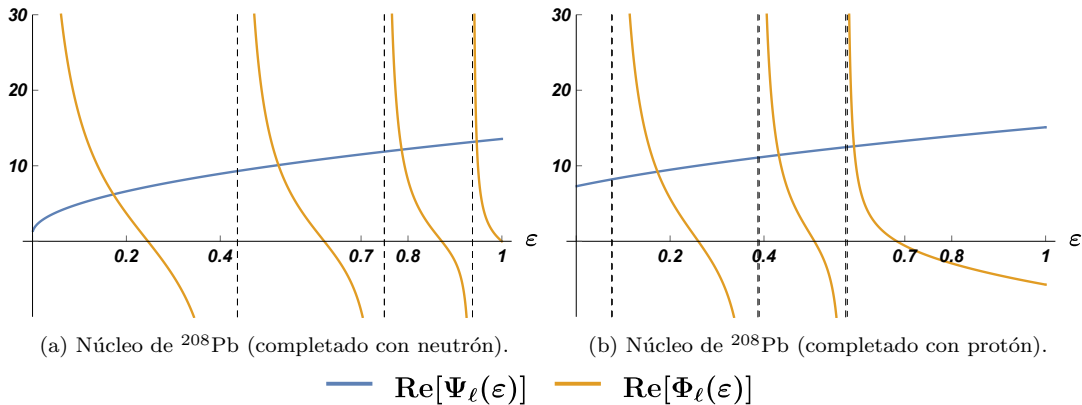


Figura 4.1: Estados ligados para el isótopo de ^{208}Pb completado con un nucleón, para $\beta = 0$ y $\ell = 0$.

Utilizando las constantes sacadas de la Tabla 4.1, podemos encontrar los estados ligados para los diferentes valores del momento angular ℓ y del momento angular total j . En la Figura 4.1 se ha representado, para $\ell = 0$, ambos términos de la ecuación secular (3.10) para el caso en que el isótopo doblemente mágico se ha completado con neutrón o con un protón (izquierda y derecha respectivamente), tomando $\beta = 0$. En este caso, j únicamente puede tomar el valor $j = 1/2$.

Si consideramos el caso en que el momento angular orbital es $\ell = 1$, ahora tenemos que j puede tomar dos posibles valores, y estos son $j = 1/2, 3/2$ que, como ya sabemos,

implican una diferencia de energía debida al potencial espín-órbita. En la Figura 4.2 se ha representado, de nuevo para $\beta = 0$, el lado izquierdo y derecho de la ecuación secular para $\ell = 1$ y estos posibles valores de j , siendo $j_+ = 3/2$ y $j_- = 1/2$.

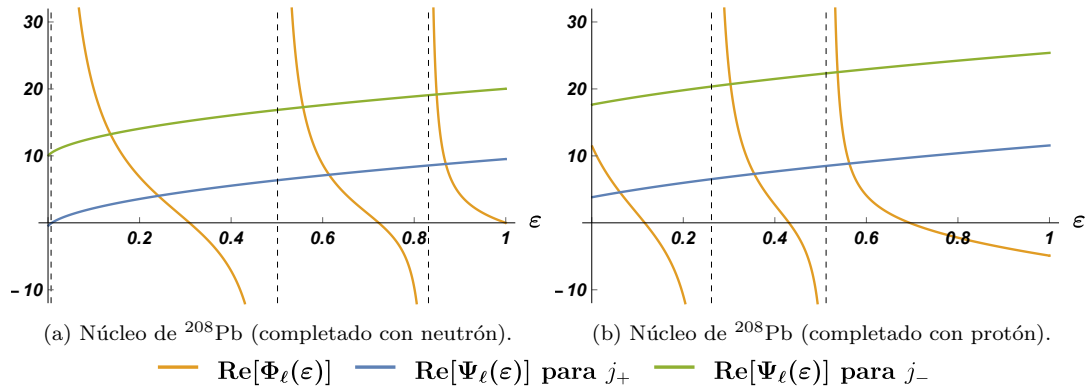


Figura 4.2: Estados ligados para el isótopo de ^{208}Pb completado con un nucleón, para $\beta = 0$ y $\ell = 1$.

Utilizando las Figuras 4.1 y 4.2 podemos, sin más que convertir la energía adimensionalizada (valor de ε para el cual hay un punto de corte de Ψ_ℓ y Φ_ℓ) con la expresión (3.38), encontrar la energía de los diferentes estados ligados. Para designar a los posibles estados, utilizaremos la *notación espectroscópica*, con la salvedad de que en física nuclear, a diferencia de física atómica, el índice n no indica el número cuántico principal, sino que únicamente da cuenta el número de niveles con ese valor de ℓ . Estos valores de energía de posibles estados ligados han sido recogidos en la Tabla 4.2. En ella se han incluido los valores comparativos tomados de [12], que han sido obtenidos al resolver numéricamente un modelo del tipo Woods-Saxon, donde los datos iniciales de la simulación se tomaron de los parámetros dados en el libro de Estructura Nuclear de Bohr y Mottelson, y fueron posteriormente optimizados para producir una mejor convergencia con los valores de energía disponibles para varios núcleos con números mágicos de protones o de neutrones. Es decir, en esencia, se trata de un modelo de Woods-Saxon mejorado.

Como podemos observar, las energías obtenidas son similares. La columna $\beta = 0$ son las obtenidas mediante el presente modelo, y WS las tomadas de [12].

Estado	$E_{\text{neutr.}}/\text{MeV.}$		$E_{\text{prot.}}/\text{MeV.}$	
	$\beta = 0$	WS	$\beta = 0$	WS
$0s_{1/2}$	-40.98	-39.62	-34.30	-31.73
$1s_{1/2}$	-31.94	-29.19	-25.02	-21.26
$3s_{1/2}$	-17.25	-14.81	-10.04	-6.58
$0p_{3/2}$	-38.25	-36.01	-32.63	-28.71
$1p_{3/2}$	-27.03	-23.22	-20.58	-15.19
$2p_{3/2}$	-10.61	-7.97	-3.57	—
$0p_{1/2}$	-37.37	-35.05	-31.14	-27.82
$1p_{1/2}$	-24.53	-22.22	-17.57	-14.42
$2p_{1/2}$	-6.01	-6.93	—	—

Tabla 4.2: Energías para los estados ligados para nucleones que completan capas en el isótopo de ^{208}Pb para $\beta = 0$.

4.1.1. Energía de ligadura en función de los números cuánticos n , ℓ y j

En el capítulo anterior vimos cómo ordenar la energía de ligadura en función de los números cuánticos n , ℓ y j . Es interesante comprobar que, en efecto, para los sistemas que estudiamos se verifican las desigualdades que ahí enunciamos.

De los valores de la Tabla 4.2, es evidente que la desigualdad enunciada sobre n se cumple en todo momento.

Respecto al momento angular ℓ , vimos en (3.42) que $-\varepsilon_{n\ell_j} < -\varepsilon_{n(\ell+1)_j}$, que en vistas de (3.38), equivale a $E_{n\ell_j} > E_{n(\ell+1)_j}$. Recordemos que, en la notación espectroscópica, los estados s corresponden a un valor del momento angular $\ell = 0$, mientras que los p a $\ell = 1$. Por tanto, las desigualdades mencionadas establecen que debe cumplirse que

$$|E(0s_{1/2})| > |E(0s_{1/2})|, \quad |E(1s_{1/2})| > |E(1s_{1/2})|, \quad |E(2s_{1/2})| > |E(2s_{1/2})|,$$

que, efectivamente, son desigualdades que se satisfacen tanto para el caso en que el isótopo se complete tanto con un protón como con un neutrón.

Por otra parte, vimos que si el potencial del espín-órbita es negativo, como es nuestro caso, los estados están más ligados para j_+ que para j_- , es decir, $|E_{n\ell_{\ell+1/2}}| > |E_{n\ell_{\ell-1/2}}|$, que para los estados que tenemos, se traduce en que se cumplan las siguientes desigualdades:

$$|E(0p_{3/2})| > |E(0p_{1/2})|, \quad |E(1p_{3/2})| > |E(1p_{1/2})|, \quad |E(2p_{3/2})| > |E(2p_{1/2})|,$$

donde se tiene en cuenta que la última de ellas solo se aplica a neutrones, pues para protones no existe el estado ligado $2p_{1/2}$. De nuevo, podemos comprobar que estas desigualdades se verifican para ambos casos.

4.1.2. Energía según el tipo nucleón adicional

En el apartado anterior hemos comprobado las desigualdades ya conocidas de la energía de los estados ligados. Sin embargo, a lo largo del estudio no hemos mencionado si la energía de ligadura para cierto estado es mayor o menor en caso de que el nucleón que completa el isótopo doblemente mágico se trate de un protón o de un neutrón.

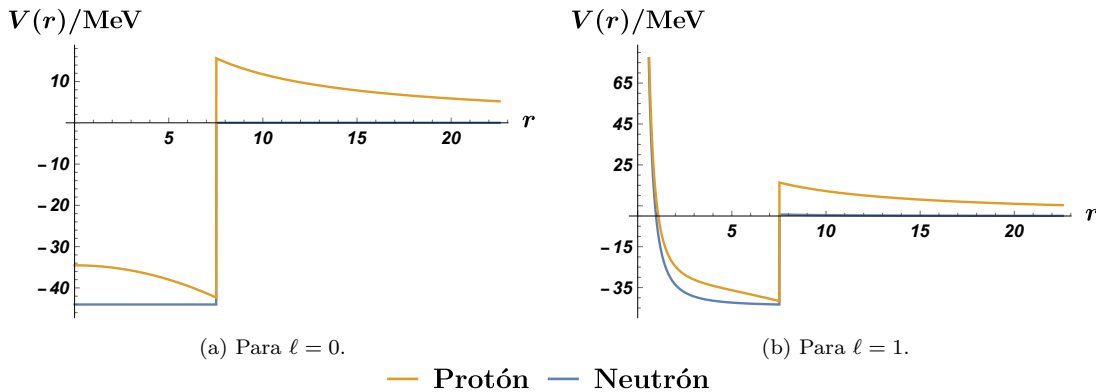


Figura 4.3: Potencial visto por el nucleón que completa el isótopo doblemente mágico.

En la Figura 4.3 se ha representado el término de potencial visto por el nucleón adicional debido a las contribuciones del término coulombico, el centrífugo y la parte de pozo

de potencial. Evidentemente, esto no corresponde al potencial total del modelo, pero nos puede servir para nuestros razonamientos.

En vista de los valores de la Tabla 4.2, es evidente que para este isótopo está más ligado el caso en el que se tiene un neutrón como nucleón adicional. En este caso, hay dos efectos en sentidos contrarios. Por una parte, el término coulombico es repulsivo, lo que contribuye a que los nucleones a los que este potencial afecta, los protones, estén menos ligados que los neutrones para un mismo estado. Pero por otra parte, el pozo de potencial más profundo para protones. Sin embargo, al representar estos términos del potencial, como se ha hecho en la Figura 4.3, se observa que el potencial visto por el neutrón es menor en todo momento que el visto por un protón (se ha representado únicamente para $\ell = 0$ y $\ell = 1$, pero el valor del momento angular contribuye a la parte del potencial centrífuga, que es idéntica para protones y neutrones, luego nuestros razonamientos sirven para cualquier valor de ℓ). Por otra parte, el término en $\delta(r - R)$ del potencial no es igual para el caso que se complete con un protón o un neutrón, pero se ha comprobado que tras calcular los niveles de energía de estados ligados, nuestra conclusión se mantiene. Siempre que tratemos una situación análoga a la recién estudiada, tendremos que los estados están más ligados para neutrones que para protones.

4.2. Estados ligados en función de β

En el presente trabajo, se ha tomado el modelo de Woods-Saxon, y se realizado la aproximación $a \rightarrow 0^+$ para poder obtener soluciones concretas de la función de onda. Sin hacer esta suposición, nos vemos forzados a emplear una resolución numérica de la ecuación de onda, como se hace en [12]. Tras un estudio riguroso de las extensiones autoadjuntas del hamiltoniano del modelo de Woods-Saxon haciendo el límite mencionado, hemos propuesto el término adicional δ' , que puede ser utilizado, ajustando el coeficiente β , para compensar (en parte) la aproximación anterior. El objetivo de esta sección es exponer un procedimiento que pueda ser empleado para ajustar β a datos experimentales o tabulados que se obtengan al resolver numéricamente el modelo clásico de Woods-Saxon. Se detallará el ajuste para el ^{208}Pb , y se realizará de manera más breve para los demás isótopos considerados en este capítulo.

4.2.1. Análisis del ^{208}Pb

Ajustaremos el parámetro β para reproducir los datos que se obtuvieron numéricamente en [12] para este caso, y que han sido recogidos en la Tabla 4.2.

En la Figura 4.4 se han representado el lado izquierdo y derecho de la ecuación secular para este sistema con diferentes valores de β . Lo que vamos a hacer, de cara a estudiar qué β reproduce mejor los datos numéricos obtenidos a través del modelo de Woods-Saxon mejorado, es calcular las energías de ligadura de estos estados para diferentes valores de β , y calcular la desviación de los datos obtenidos respecto de estos primeros. Evidentemente, podría ocurrir que para valores diferentes de β no haya los mismos estados ligados, aunque para estados de baja energía, que son en los que nos centraremos, esto es altamente improbable.

Si $E_\beta(n\ell_j)$ representan las energías de ligadura obtenidas con este modelo, y $E_{\text{exp.}}(n\ell_j)$

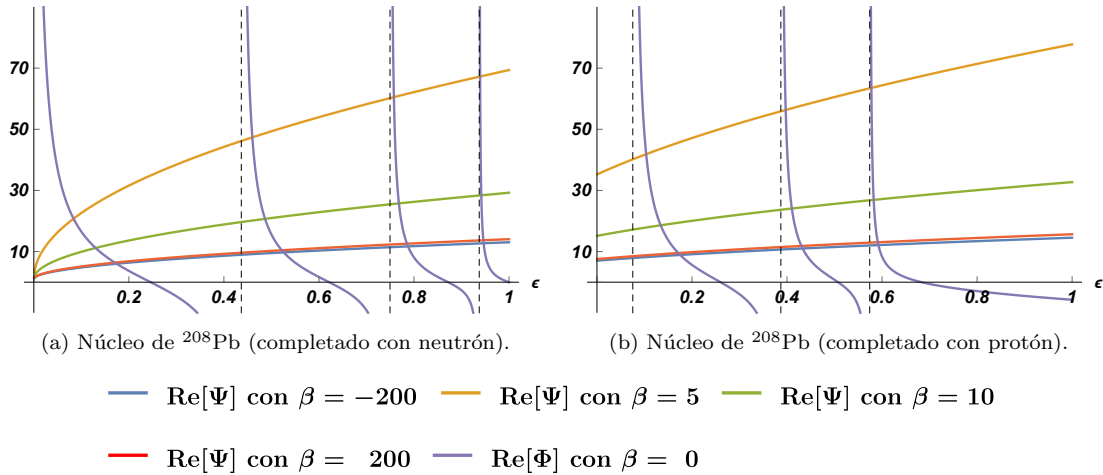


Figura 4.4: Estados ligados para la ecuación secular (3.10) del ^{208}Pb completado por un nucleón y $\ell = 0$ para diferentes valores de β .

las obtenidas numéricamente, busquemos fijar β de forma que se minimice

$$\sigma_\beta = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{\text{estados } nl_j} [E_\beta(nl_j) - E_{\text{exp.}}(nl_j)]^2}, \quad (4.2)$$

donde N es el número de estados sobre los que se realiza la sumación. Así σ_β es la desviación típica de los niveles de energía obtenidos mediante nuestro modelo con respecto a los que se obtienen al resolver numéricamente el modelo de Woods-Saxon.

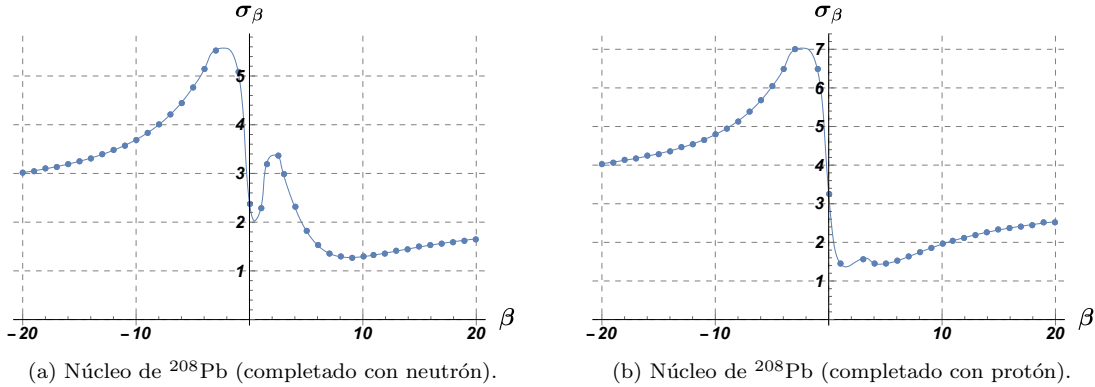


Figura 4.5: Desviación σ respecto del valor de β para protones y neutrones para el ^{208}Pb .

Sin más que encontrar la energía de los estados ligados para un rango amplio de β , con los procedimientos anteriormente expuestos, y sustituir estos valores y los teóricos $E_{\text{exp.}}$ en la fórmula (4.2), podemos obtener algo similar a la Figura 4.5. Esta figura nos dice que las energías que ofrece nuestro modelo se ajustan mejor a las experimentales para un valor de β cercano el menor valor de σ_β . En el caso presente, el mínimo se alcanza en $\beta = 8$ en el caso del neutrón adicional, y para $\beta = 1$ en el caso del protón adicional.

Para precisar todavía más el valor de β que ajusta mejor las energías, podemos repetir el procedimiento anterior, pero esta vez centrándonos en posibles valores de β cercanos a $\beta = 1$ para el caso de protones, y cercanos a $\beta = 9$ para el caso de neutrones, y obtener la

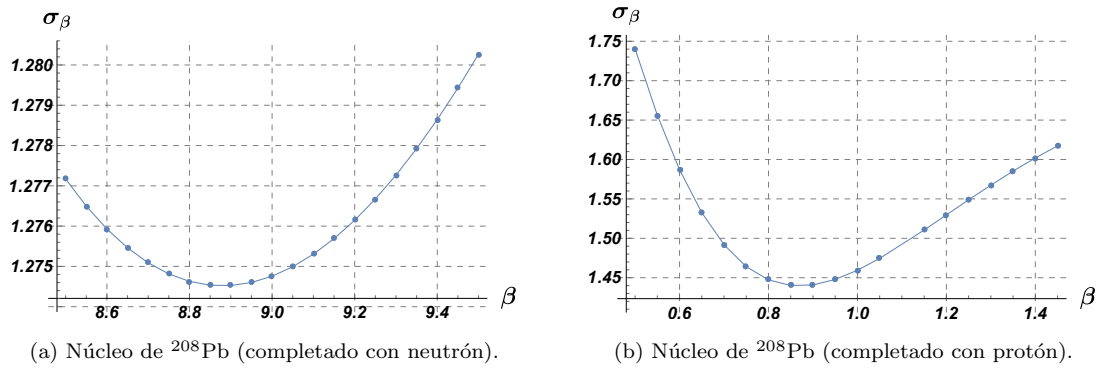


Figura 4.6: Desviación σ respecto del valor de β para protones y neutrones para el ^{209}Pb .

Figura 4.6. En esta figura podemos apreciar que los valores de β que minimizan el error de ajuste de las energías de los estados ligados ofrecidas por este modelo a las tabuladas son $\beta = 8.9$ y $\beta = 0.85$ para neutrones y protones respectivamente.

Representemos ambos lados de la ecuación secular para estos valores óptimos de β . Notemos que en los casos anteriormente considerados, se había tomado el mismo β para protones que para neutrones, mientras que ahora hemos elegido β diferente en cada caso para ajustar a datos experimentales. Recordemos que la dependencia con j viene dada por el término $w_{\ell j}/(2 - \beta)^2$, por tanto, cuanto mayor sea $(2 - \beta)^2$, menor será la separación de estados para j_+ y j_- , como ocurre en la Figura 4.7 para el caso de los neutrones, en donde $\beta = 8.9$.

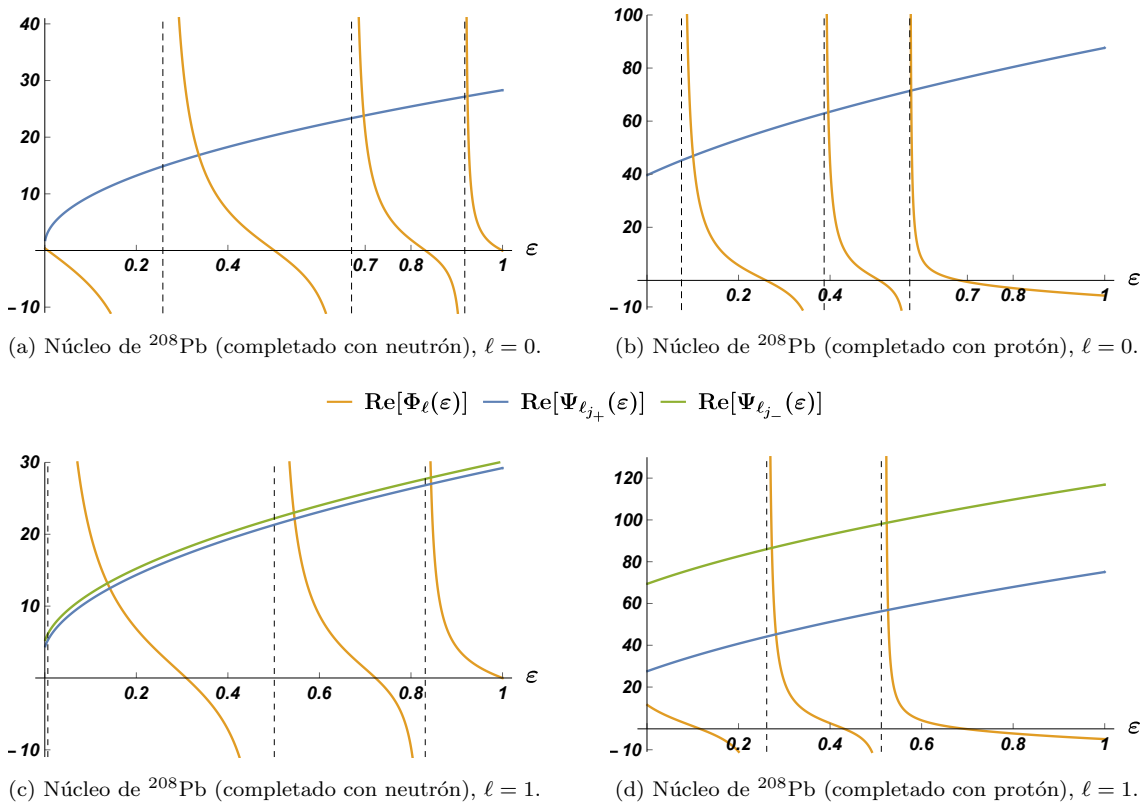


Figura 4.7: Estados ligados para un nucleón que completa el isótopo de ^{208}Pb , con $\beta = 8.9$ y $\beta = 0.85$.

Estado	$E_{\text{neutr.}}/\text{MeV.}$			$E_{\text{prot.}}/\text{MeV.}$		
	$\beta = 0$	$\beta = 8.9$	WS	$\beta = 0$	$\beta = 0.85$	WS
$0s_{1/2}$	-40.97	-40.65	-39.62	-34.30	-33.46	-31.73
$1s_{1/2}$	-31.93	-30.67	-29.19	-25.02	-22.95	-21.26
$3s_{1/2}$	-17.25	-14.81	-14.81	-10.03	-5.84	-6.58
$0p_{3/2}$	-38.25	-37.14	-36.01	-32.63	-30.53	-28.71
$1p_{3/2}$	-27.03	-24.02	-23.22	-20.58	-16.34	-15.19
$2p_{3/2}$	-10.61	-6.25	-7.97	—	—	—
$0p_{1/2}$	-37.37	-37.13	-35.05	-31.14	-30.37	-27.82
$1p_{1/2}$	-24.53	-23.95	-22.22	-17.57	-15.82	-14.42
$2p_{1/2}$	-6.09	-6.02	-6.93	—	—	—

Tabla 4.3: Comparación de las energías de ligadura para $\beta = 0$, para el β óptimo y las numéricas del nucleón que completa el isótopo de ^{208}Pb .

Recogiendo las energías de los diferentes estados ligados, obtenemos la Tabla 4.3. En ella podemos ver que los datos que se obtienen a partir de este modelo se ajustan muy bien a los que se publicaron en [12]. Se aprecia que introducir el término de δ' permite ajustar notablemente mejor los datos respecto al caso en que no se tuviese este término ($\beta = 0$).

4.2.2. Análisis del ^{40}Ca

Para estudiar los estados ligados del sistema formado por el núcleo del isótopo ^{40}Ca con un nucleón adicional, no tenemos más que proceder como anteriormente. Para ese caso, emplearemos β para ajustar la energía de los estados ligados a los valores de las Tablas 3.3 y 3.4 de [2], que proceden de resolver numéricamente el modelo de Woods-Saxon.

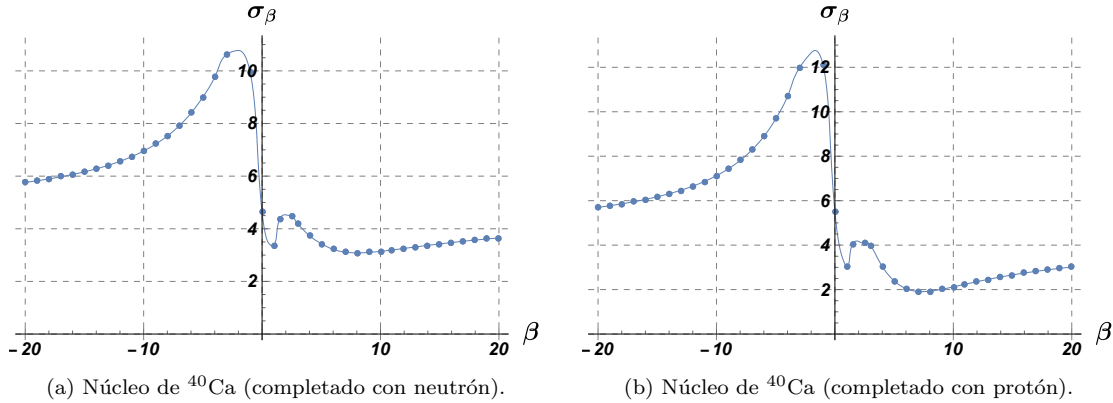


Figura 4.8: Desviación σ respecto del valor de β para protones y neutrones para el ^{40}Ca .

En la Figura 4.8 se ha representado las desviaciones de las energías de nuestro modelo con respecto a las de [2]. Para el caso del protón adicional, vemos que los valores de σ_β alcanzan mínimos locales en torno a $\beta = 1$ y $\beta = 6$, y estudiando de forma detallada valores cercanos a estos, se deduce que la mínima desviación se alcanza para $\beta = 0.55$, como puede verse en la Figura 4.9. Por otra parte, para el caso del neutrón extra, para $\beta = 1$ y $\beta = 7$ se alcanzan mínimos en σ_β , y, analizando rangos cercanos a estos, se deduce que el mínimo se alcanza en $\beta = 7.45$.

Viendo el valor de las desviaciones para cada uno de los casos mencionados, podemos ya deducir que tendremos datos más ajustados para el caso del neutrón adicional, pues la

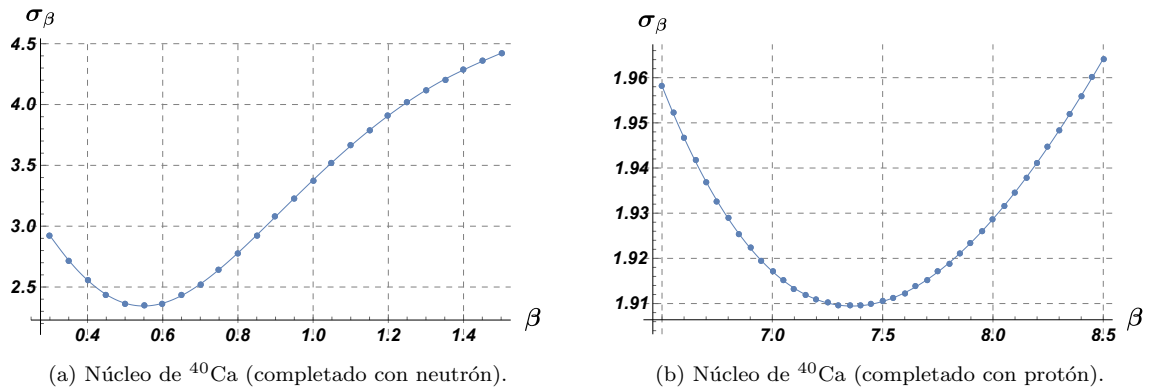


Figura 4.9: Desviación σ respecto del valor de β para protones y neutrones para el ^{40}Ca .

desviación es notablemente menor que para el caso del protón extra. Sin más que tomar los puntos de corte de las gráficas de la Figura 4.10, podemos completar la Tabla 4.4, donde se comparan las energías de nuestro modelo con las de las Tablas 3.3 y 3.4 de [2].

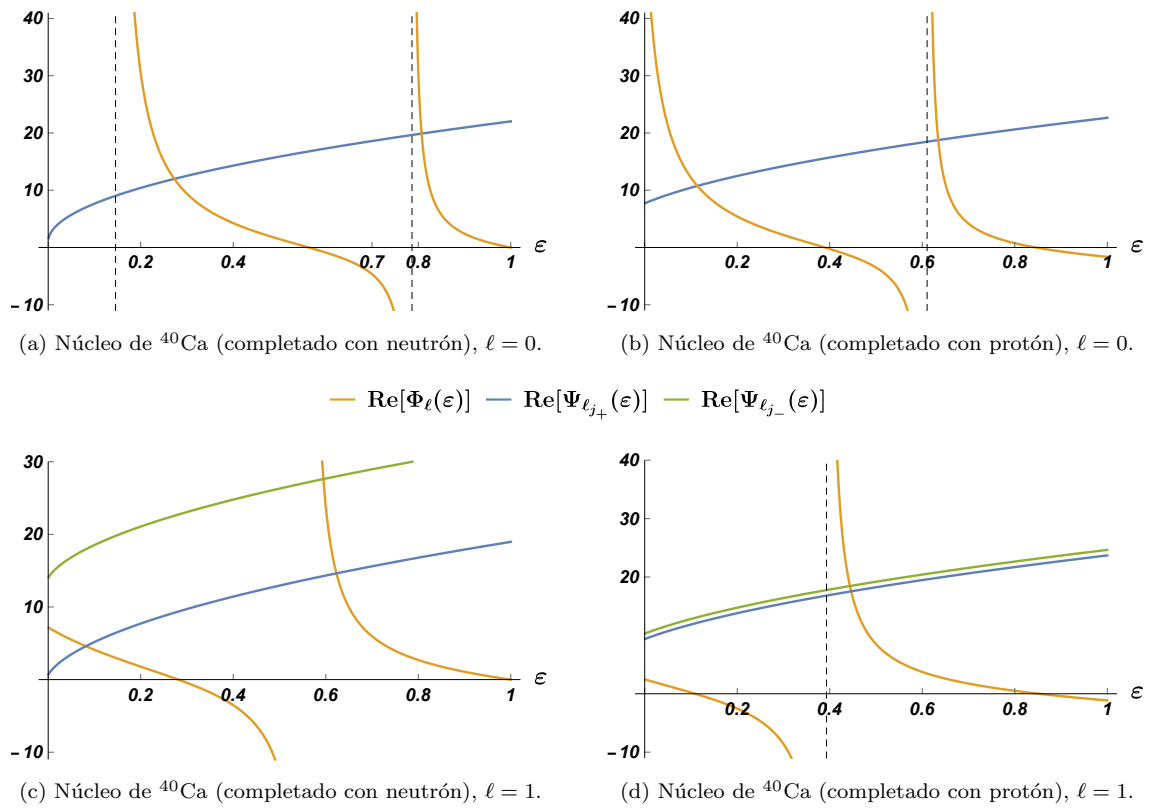


Figura 4.10: Estados ligados para un nucleón que completa el isótopo de ^{40}Ca , con $\beta = 0.5$ y $\beta = 0.45$ para neutrones y protones respectivamente.

Estado	$E_{\text{neutr.}}/\text{MeV.}$			$E_{\text{prot.}}/\text{MeV.}$		
	$\beta = 0$	$\beta = 0.5$	Numérica	$\beta = 0$	$\beta = 7.45$	Numérica
$0s_{1/2}$	-42.782	-41.166	-38.842	-34.156	-32.363	-29.982
$1s_{1/2}$	-19.147	-14.362	-15.684	-10.856	-5.809	-7.990
$0p_{3/2}$	-36.151	-31.778	-29.541	-28.135	-22.763	-21.255
$1p_{3/2}$	-8.199	-4.149	-5.673	—	—	1.092
$0p_{1/2}$	-31.354	-30.488	-26.942	-23.972	-22.133	-18.573
$1p_{1/2}$	—	—	-3.320	—	—	—

Tabla 4.4: Comparación de las energías de ligadura para $\beta = 0$, para el β óptimo y las numéricas del nucleón que completa el isótopo de ^{40}Ca .

4.2.3. Análisis del ^{16}O

Finalmente, en esta sección se pretende proporcionar el análisis de los estados ligados del isótopo de ^{16}O con un nucleón adicional. En este caso, vamos de nuevo a ajustar los valores de energía a los que se obtienen numéricamente para el modelo de Woods-Saxon en [2] en las Tablas 3.1 y 3.2.

Como en las secciones anteriores, en primer lugar se ha buscado el valor de β que minimiza la desviación de las energías obtenidas a partir de nuestro modelo con respecto a los de [2]. De la Figura 4.11 podemos observar que $\beta = 1.5$ y $\beta = 6$ minimizan esta desviación tan para el caso del neutrón adicional, mientras que para el caso del protón adicional lo hace $\beta = 6$.

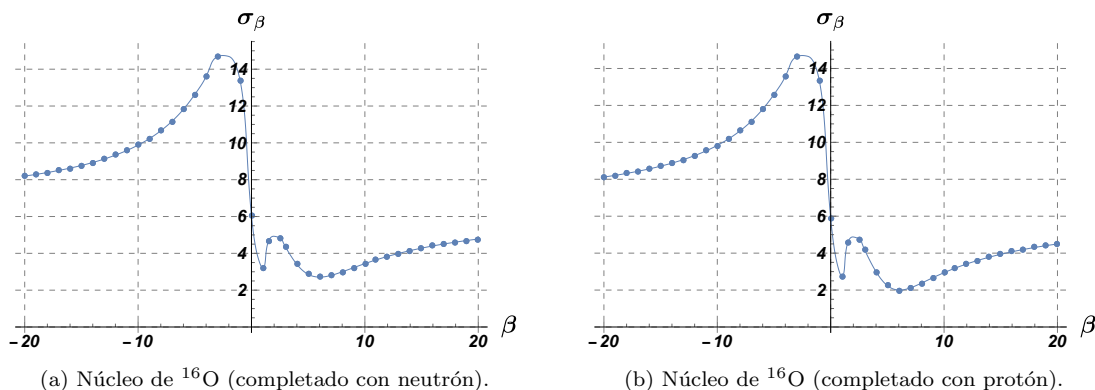


Figura 4.11: Desviación σ respecto del valor de β para protones y neutrones para el ^{16}O .

Estudiando la desviación para valores de β cercanos a los anteriormente mencionados, se puede observar (Figura 4.12) que el valor óptimo de β para el caso del neutrón y del protón es respectivamente $\beta = 3.05$ y $\beta = 6.05$.

Tomando estos valores óptimos de β , podemos representar ambos términos de la ecuación secular, como se ha hecho en la Figura 4.13, y encontrar las energías de los diferentes estados ligados, recogidas todas ellas en la Tabla 4.5.

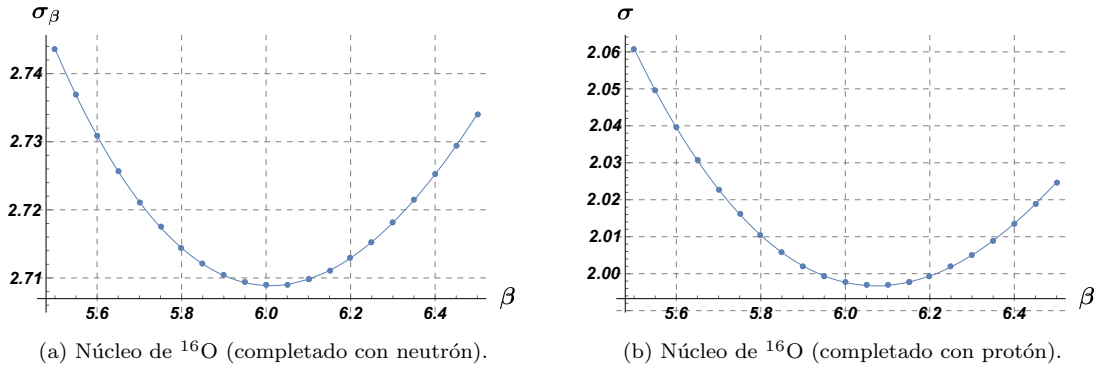
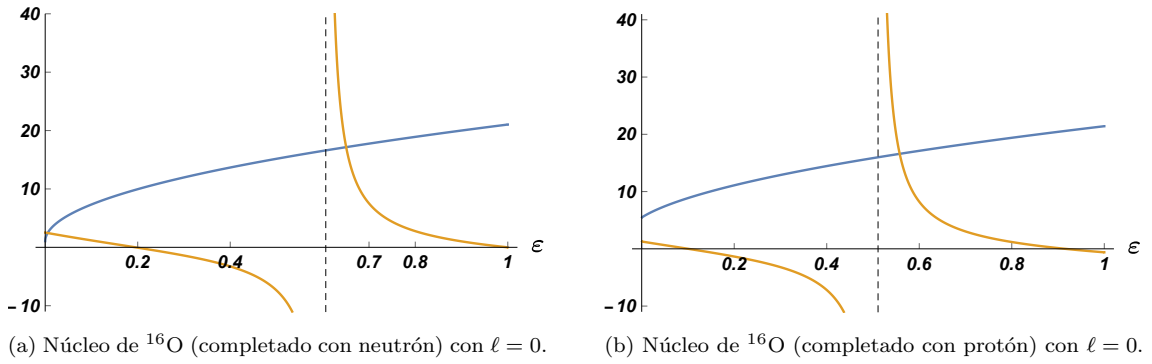


Figura 4.12: Desviación σ respecto del valor de β para protones y neutrones para el ^{16}O .

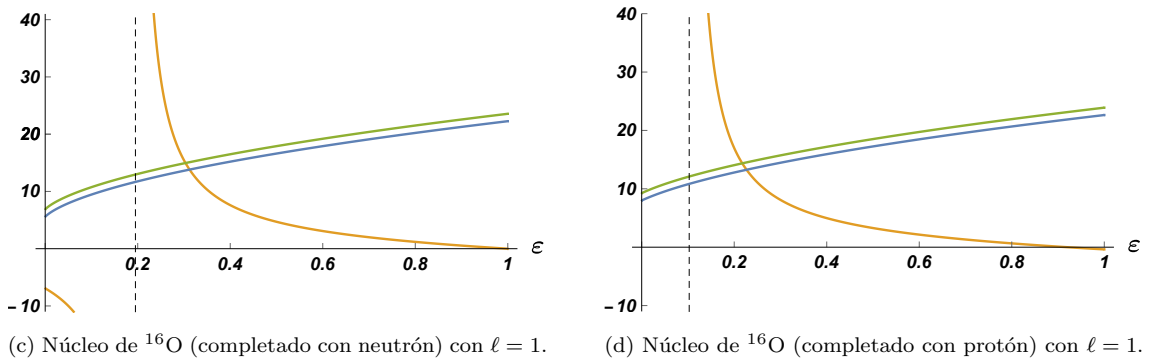
Estado	$E_{\text{neutr.}}/\text{MeV.}$			$E_{\text{prot.}}/\text{MeV.}$		
	$\beta = 0$	$\beta = 3.05$	Numérica	$\beta = 0$	$\beta = 6.05$	Numérica
$0s_{1/2}$	-37.292	-33.181	-31.091	-30.462	-28.337	-26.445
$1s_{1/2}$	-1.974	-0.267	-3.970	-	-	-0.709
$0p_{3/2}$	-27.015	-15.917	-18.612	-22.815	-11.561	-14.451
$0p_{1/2}$	-19.145	-15.470	-14.466	-14.708	-11.088	-9.328

Tabla 4.5: Comparación de las energías de ligadura para $\beta = 0$, para el β óptimo y las numéricas del nucleón que completa el isótopo de ^{16}O .



(a) Núcleo de ^{16}O (completado con neutrón) con $\ell = 0$. (b) Núcleo de ^{16}O (completado con protón) con $\ell = 0$.

— $\text{Re}[\Phi_\ell(\epsilon)]$ — $\text{Re}[\Psi_{\ell j_+}(\epsilon)]$ — $\text{Re}[\Psi_{\ell j_-}(\epsilon)]$



(c) Núcleo de ^{16}O (completado con neutrón) con $\ell = 1$. (d) Núcleo de ^{16}O (completado con protón) con $\ell = 1$.

Figura 4.13: Estados ligados para un nucleón adicional en el isótopo de ^{16}O , con $\beta = 3.05$ y $\beta = 6.05$ para neutrones y protones respectivamente.

Notemos que en este caso, nuestro modelo no precide el estado ligado $1s_{1/2}$ para el

caso del protón adicional. Sin embargo, en los datos sacados de [2] se tiene una energía de ligadura menor a 1 MeV, por lo que aunque nuestra predicción es que ese estado no está ligado, la conclusión a la que se llega numéricamente resolviendo un problema similar es que está muy poco ligado, con lo que podemos estar satisfechos con las conclusiones de nuestro modelo.

4.3. Tablas Adicionales

En esta sección se pretende incluir una tabla en la que se muestre, como ya se ha comentado, la calidad de la aproximación de los a -ceros de la función ${}_1F_1$ dada por la expresión (3.30), y otra en la que se recopilen todos los valores de las constantes y parámetros involucrados en el modelo desarrollado para cada uno de los isótopos doblemente mágicos (Tablas 4.6 y 4.7 respectivamente).

$\varepsilon_{n\ell j}^0$		$n = 1$		$n = 2$	
		Num.	App.	Num.	App.
^{10}O	$\ell = 0$	0.07440	0.07524	–	–
^{16}O	$\ell = 0$	0.5110	0.5127	–	–
	$\ell = 1$	0.1027	0.1006	–	–
^{40}Ca	$\ell = 0$	0.6106	0.6136	–	–
	$\ell = 1$	0.3930	0.3899	–	–
	$\ell = 2$	0.1152	0.1026	–	–
^{48}Ca	$\ell = 0$	0.6023	0.6056	–	–
	$\ell = 1$	0.3868	0.3835	–	–
	$\ell = 2$	0.1112	0.09829	–	–
^{48}Ni	$\ell = 0$	0.6203	0.6238	0.1103	0.1114
	$\ell = 1$	0.4486	0.4449	–	–
	$\ell = 2$	0.2281	0.2153	–	–
^{56}Ni	$\ell = 0$	0.6095	0.6131	0.0999	0.1011
	$\ell = 1$	0.4383	0.4344	–	–
	$\ell = 2$	0.2181	0.2048	–	–
^{78}Ni	$\ell = 0$	0.5918	0.5958	0.0922	0.09352
	$\ell = 1$	0.4247	0.4204	–	–
	$\ell = 2$	0.2094	0.1953	–	–
^{100}Sn	$\ell = 0$	0.5611	0.5658	0.2159	0.2178
	$\ell = 1$	0.4504	0.4443	–	–
	$\ell = 2$	0.3047	0.2883	–	–
	$\ell = 3$	0.1268	0.09789	–	–
^{132}Sn	$\ell = 0$	0.5367	0.5416	0.1965	0.1986
	$\ell = 1$	0.4285	0.4218	–	–
	$\ell = 2$	0.2856	0.2681	–	–
	$\ell = 3$	0.1108	0.08042	–	–
^{208}Pb	$\ell = 0$	0.439	0.4436	0.1926	0.1962
	$\ell = 1$	0.3678	0.3572	0.02930	0.02738
	$\ell = 2$	0.2695	0.2463	–	–
	$\ell = 3$	0.1471	0.1109	–	–
	$\ell = 4$	0.0020	0.0490	–	–

Tabla 4.6: Comparación de los puntos de discontinuidad de Φ_ℓ aproximados por (3.30) (Num.) y los exactos (App.)

Estado	$R/$ fm	$V_0/\text{MeV.}$		$V_{\text{so}}/\text{MeV. fm}$		$w_{\ell j}$ (Prot.)		$w_{\ell j}$ (Neutr.)		g		v_0	
		Prot.	Neutr.	Prot.	Neutr.	j_+	j_-	j_+	j_-	Prot.	Neutr.	Prot.	Neutr.
^4_2He	2.016	51.000		22.440		-4.346 ℓ	4.346($\ell+1$)	-4.346 ℓ	4.346($\ell+1$)	0.372	0	3.155	
$^{10}_2\text{He}$	2.736	70.800	31.200	31.152	13.728	-8.186 ℓ	8.185($\ell+1$)	-3.609 ℓ	3.608($\ell+1$)	0.434	0	5.045	3.349
$^{16}_8\text{O}$	3.200	51.000		22.440		-6.897 ℓ	6.897($\ell+1$)	-6.897 ℓ	6.897($\ell+1$)	0.939	0	5.008	
$^{40}_{20}\text{Ca}$	4.343	51.000		22.440		-9.361 ℓ	9.361($\ell+1$)	-9.361 ℓ	9.361($\ell+1$)	1.730	0	6.797	
$^{48}_{20}\text{Ca}$	4.615	56.500	45.500	24.860	20.020	-11.020 ℓ	11.020($\ell+1$)	-8.876 ℓ	8.875($\ell+1$)	1.784	0	7.602	6.822
$^{48}_{28}\text{Ni}$	4.615	45.000	56.500	20.002	24.860	-8.876 ℓ	8.875($\ell+1$)	-11.020 ℓ	11.020($\ell+1$)	2.110	0	6.822	7.602
$^{56}_{28}\text{Ni}$	4.858	51.000		22.440		-10.472 ℓ	10.472($\ell+1$)	-10.572 ℓ	10.472($\ell+1$)	2.165	0	7.604	
$^{78}_{28}\text{Ni}$	5.426	60.307	41.692	26.535	18.344	-13.830 ℓ	13.830($\ell+1$)	-9.561 ℓ	9.561($\ell+1$)	2.288	0	26.535	18.344
$^{100}_{50}\text{Sn}$	5.894	51.000		22.440		-12.705 ℓ	12.705($\ell+1$)	-12.705 ℓ	12.705($\ell+1$)	3.187	0	9.225	
$^{132}_{50}\text{Sn}$	6.466	59.000	43.000	25.960	18.920	-16.123 ℓ	16.123($\ell+1$)	-11.751 ℓ	11.751($\ell+1$)	3.338	0	10.884	9.292
$^{208}_{82}\text{Sn}$	7.524	57.980	44.019	25.511	19.368	-18.438 ℓ	18.438($\ell+1$)	-13.998 ℓ	13.998($\ell+1$)	4.614	0	12.556	10.940

Tabla 4.7: Valores de las constantes del modelo desarrollado para todos los isótopos doblemente mágicos existentes.

Conclusiones

Antes de concluir este trabajo de fin de grado, es interesante sacar las conclusiones pertinentes a los resultados obtenidos mediante el modelo desarrollado a lo largo de esta memoria.

Básicamente, este modelo busca ofrecer los mismos resultados que se obtienen a partir del modelo de Woods-Saxon clásico. El problema de este último, es que únicamente puede ser estudiado mediante procedimientos numéricos o procedimientos analíticos más avanzados, como es el método de Nikiforov–Uvarov. En este trabajo, hemos tomado el modelo de Woods-Saxon clásico, y hemos considerado el límite $a \rightarrow 0^+$, de forma que la función de onda del nucleón que completa un isótopo doblemente mágico pudiese ser encontrada de forma analítica. Para compensar, en mayor forma de lo posible, los efectos de esta hipótesis, se ha tomado una de las extensiones autoadjuntas plausibles del hamiltoniano resultante. Más concretamente, se ha tomado la extensión correspondiente a añadir un término δ' , soportado en el borde del pozo de potencial, adicional al hamiltoniano, cuya constante β , ajustamos para obtener una mínima desviación a resultados experimentales o numéricos obtenidos a través del modelo clásico.

Mediante el modelo presentado se han obtenido el número de estados ligados para este nucleón, el valor máximo del momento angular ℓ para que existan estados ligados y la ordenación de estos estados, generalizando algunas de las desigualdades conocidas para potenciales continuos esféricamente simétricos (a pesar de que el potencial considerado no es continuo). Es cierto que algunos de los resultados enunciados a lo largo del trabajo se han basado en aproximaciones numéricas. Esto se debe, en mayor medida, a que no se conocen expresiones analíticas para los a -ceros de las funciones hipergeométricas confluentes ${}_1F_1$, y lo máximo que podemos hacer es depender de soluciones numéricas aproximadas.

Sin embargo, estas aproximaciones resultan ser de gran calidad para todos los valores físicos, como ya se ha comprobado en la Tabla 4.6. Por otra parte, a lo largo del capítulo 3 también se han asumido ciertas desigualdades que han sido comprobadas en la Tabla 3.2 para todos y cada uno de los sistemas posibles. Finalmente, probar de manera analítica los resultados de crecimiento y monotonía de ambos términos de la ecuación secular enunciados en esta memoria tendría un carácter prohibitivo debido su complejidad, y se escapa de los objetivos de la misma, pero han sido corroborados al encontrar cada uno de los estados ligados que aparecen en la Tabla 4.6, y puesto que en dicha tabla se han considerado todas las combinaciones de valores físicos posibles, pueden ser tomados como ciertos.

A lo largo de este estudio, hemos desarrollado un modelo fenomenológico que explica a la perfección los estados ligados de nucleones que completan isótopos doblemente mágicos. En el proceso de estudio de este modelo, no solo se ha encontrado una generalización, incluyendo el término coulombico, de la solución de Schrödinger del potencial estudiado

en [1], sino que se ha demostrado el Teorema 3.1.1, un teorema que no había sido enunciado y demostrado con anterioridad a este trabajo.

Finalmente, es interesante remarcar que la principal ventaja que tiene este modelo simplificado respecto al de Woods-Saxon es que se pueden encontrar de forma exacta las autofunciones, obteniendo propiedades analíticas del espectro resultante de este hamiltoniano.

Apéndice A

Funciones Hipergeométricas confluentes

A lo largo de la resolución de la ecuación de Schrödinger, hemos empleado diversos cambios de variable que nos han conducido a ecuaciones diferenciales hipergeométricas confluentes. Aunque la solución de dichas ecuaciones diferenciales es bien conocida, en este anexo se pretende recoger la resolución de dicha ecuación, usando el método de potencias de Frobenius. Una descripción más detallada se puede encontrar en el capítulo 10 de [6].

A.1. Resolución de la ecuación

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$$\left[z \frac{d^2}{dz^2} + (c - z) \frac{d}{dz} - a \right] w(z) = 0, \quad (\text{A.1})$$

donde a y c son constantes complejas arbitrarias. La ecuación anterior se conoce como *Ecuación de Kummer* o *Ecuación hipergeométrica confluyente*. Dicha ecuación tiene un punto singular regular en $z = 0$, y un punto singular irregular en $z = \infty$.

Busquemos una solución de dicha ecuación, escrita como serie de Frobenius, en torno de $z = 0$

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\lambda}. \quad (\text{A.2})$$

Las derivadas de dicha función son

$$w' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n + \lambda) z^{n+\lambda-1}, \quad w'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n + \lambda)(n + \lambda - 1) z^{n+\lambda-2},$$

luego, sin más que sustituir en (A.1), tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n + \lambda)(n + \lambda - 1) z^{n+\lambda-1} + c \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n + \lambda) z^{n+\lambda-1} \\ - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n + \lambda) z^{n+\lambda} - a \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\lambda} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Es interesante notar que la función hipergeométrica confluyente ${}_1F_1$ converge en todo el plano complejo para cualesquier valor de a y de c , pues sin más que aplicar el teorema de Cauchy-Hadamard, tenemos que puesto que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(a)_{n+1}}{(c)_{n+1}(n+1)!} z^{n+1}}{\frac{(a)_n}{(c)_n n!} z^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a+n}{(c+n)(n+1)} z \right| = 0, \quad (\text{A.11})$$

el radio de convergencia es infinito. Por otra parte, según hemos visto, cualquier múltiplo de la función hipergeométrica confluyente de parámetros a y c , esto es, ${}_1F_1(a, c; z)$, es solución de (A.1).

A.1.2. Solución correspondiente a $\lambda = 1 - c$

Sin más que sustituir $\lambda = 1 - c$ en la ecuación de recurrencia (A.7), tenemos que

$$(n+2-c)(n+c)a_{n+1} = (n+a+1-c)a_n \Rightarrow a_{n+1} = \frac{(n+a+1-c)}{(n+2-c)(n+1)} a_n \quad (\text{A.12})$$

de donde:

$$\begin{aligned} \underline{n=0} : \quad a_1 &= \frac{a+1-c}{1 \cdot (2-c)} a_0; \\ \underline{n=1} : \quad a_2 &= \frac{(a+2-c)}{2(3-c)} a_1 = \frac{(a+2-c)(a+1-c)}{2 \cdot 1(3-c)(2-c)} a_0; \\ \underline{n=2} : \quad a_3 &= \frac{(a+3-c)}{3(4-c)} a_2 = \frac{(a+3-c)(a+2-c)(a+1-c)}{3!(4-c)(3-c)(2-c)} a_0; \\ &\vdots \\ \underline{n-1} : \quad a_n &= \frac{(a+n-c) \cdots (a+1-c)}{n!(n+1-c) \cdots (2-c)} a_0 = \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(a+1-c)} \frac{\Gamma(a+n+1-c)}{\Gamma(n+2-c)n!} a_0 \\ &= \frac{(a+1-c)_n}{(2-c)_n} a_0; \end{aligned}$$

Por ello, la solución correspondiente a $\lambda = 1 - c$ será

$$w(z) = a_0 z^{1-c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+1-c)_n}{(2-c)_n} z^n = z^{1-c} {}_1F_1(a+1-c, 2-c; z). \quad (\text{A.13})$$

Notemos que en este caso, la solución no tiene sentido si $c \in \{2, 3, 4, \dots\}$, y que si $c = 1$, recuperamos la solución para $\lambda = 0$. Las dos soluciones que hemos encontrado están únicamente definidas si $c \notin \mathbb{Z}$. En la siguiente proposición se recoge la solución general cuando c no es un número entero.

Proposición A.1. *Si $c \notin \mathbb{Z}$, la solución más general de (A.1) viene dada por*

$$w(z) = A {}_1F_1(a, c; z) + B z^{1-c} {}_1F_1(a+1-c, 2-c; z), \quad (\text{A.14})$$

siendo A y B constantes.

De entre todas las combinaciones de soluciones propuestas en (A.14), se conoce como *función hipergeométrica confluyente de segunda especie* o *función de Tricomi* a la siguiente.

Definición A.2 (Función hipergeométrica confluyente de segunda especie). Dadas constantes complejas arbitrarias a y c tales que c no es entero negativo, se define la función hipergeométrica confluyente de segunda especie de parámetros a y c en z como

$$U(a, c; z) = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)} {}_1F_1(a, c; z) + \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} z^{1-c} {}_1F_1(a-c+1, 2-c; z). \quad (\text{A.15})$$

La ventaja de esta solución es que, si bien tampoco está definida para $c \in \mathbb{Z}$, existe una continuación analítica para cualquier valor de c entero. El objetivo de este anexo no es proporcionar un estudio detallado de la ecuación (A.1), por lo que no se hallará de forma explícita esta prolongación. Para un estudio más detallado de la función hipergeométrica de segunda especie de Tricomi se recomienda [7]. En vistas de la expresión de la función de Tricomi, tenemos la siguiente proposición.

Proposición A.2. La solución más general de la ecuación (A.1) se puede expresar por

$$w(z) = A {}_1F_1(a, c; z) + B U(a, c; z), \quad (\text{A.16})$$

donde ${}_1F_1$ y U denotan las funciones hipergeométricas confluentes de primera y segunda especie respectivamente, y A y B constantes.

A.1.3. Derivadas de la función hipergeométrica confluyente

Puesto que la solución de (A.1) se puede expresar, si $c \notin \mathbb{Z}$, en términos de funciones ${}_1F_1$, es necesario conocer las sucesivas derivadas de estas funciones. En la siguiente proposición se deduce una expresión para las mismas

Proposición A.3. Las sucesivas derivadas de la función hipergeométrica $F_1(a, c; z)$ se calculan según

$$\frac{d^m}{dz^m} {}_1F_1(a, c; z) = \frac{(a)_m}{(c)_m} {}_1F_1(a+m, c+m; z). \quad (\text{A.17})$$

Demostración:

Derivando (A.10), tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} {}_1F_1(a, c; z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(a)_n z^{n-1}}{(b)_n n!} = \frac{a}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_{n-1} z^{n-1}}{(b)_{n-1} (n-1)!} = \frac{a}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{n+1} z^n}{(b)_{n+1} (n)!} \\ &= \frac{a}{c} {}_1F_1(a+1, c+1; z) \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

y derivando otras $m-1$ veces, se sigue (A.17). \square

A.1.4. Transformaciones de Kummer

Se conocen como transformaciones de Kummer a una serie de relaciones que involucran a las funciones hipergeométricas confluentes de primera y segunda especie. Las dos primeras relaciones de Kummer (las demás se encuentran detalladas en [7]) son las siguientes:

$$\begin{aligned} {}_1F_1(a, c; z) &= e^z {}_1F_1(c-a, c; -z), \\ U(a, c; z) &= z^{1-c} U(a-c+1, 2-c; z). \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

A.2. Ecuación de Whittaker

A lo largo de la resolución de la ecuación de Schrödinger en la región exterior se ha llegado a la *ecuación diferencial de Whittaker*. Si bien la solución de dicha ecuación es bien conocida, en esta sección se pretende proporcionar un cambio de variable que transforma esta ecuación en una ecuación hipergeométrica confluyente, cuya solución ha sido descrita en la sección anterior. Consideremos la ecuación diferencial de Whittaker, dada por

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\kappa}{z} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{z^2} \right) \right] W = 0. \quad (\text{A.20})$$

De cara a estudiar el comportamiento de una posible solución $W(z)$, vamos a estudiar por separado el comportamiento para $z \rightarrow 0$ y $z \rightarrow \infty$. Supongamos que $z \rightarrow 0$, de forma que considerando los términos dominantes de (A.23), tenemos

$$\frac{d^2 W^0(z)}{dz^2} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{z^2} W^0(z) = 0, \quad (\text{A.21})$$

ecuación que admite soluciones de la forma

$$W^0(z) = C_1 z^{\frac{1}{2} - \mu} + C_2 z^{\frac{1}{2} + \mu} \quad (\text{A.22})$$

Supongamos que $\mu > 0$, de forma que para que la solución no diverja en el origen, independientemente del módulo de μ , debemos fijar $C_1 = 0$, con lo que deducimos que $W^0(z) \sim z^{\frac{1}{2} + \mu}$.

Supongamos ahora que $z \rightarrow \infty$, y consideremos los términos dominantes de (A.23), esto es, consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 W^\infty(z)}{dz^2} - \frac{1}{4} W^\infty(z) = 0, \quad (\text{A.23})$$

cuyas soluciones son de la forma

$$W^\infty(z) = C_1 \exp\left(\frac{z}{2}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{z}{2}\right). \quad (\text{A.24})$$

Para que la solución anterior no diverga cuando $z \rightarrow \infty$, es necesario fijar $C_1 = 0$.

Con todo ello, tiene sentido considerar el siguiente cambio de función incógnita

$$W(z) = z^{\frac{1}{2} + \mu} \exp\left(-\frac{z}{2}\right) v(z). \quad (\text{A.25})$$

Derivando y simplificando el cambio de variable anterior, tenemos que

$$\frac{dW}{dz} = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{z}{2}\right) z^{-\frac{1}{2} + \mu} \left[(1 - z + 2\mu) v(z) + 2z \frac{dv}{dz} \right], \quad (\text{A.26})$$

y volviendo a derivar,

$$\begin{aligned} \frac{dW^2}{dz^2} = \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{z}{2}\right) z^{-\frac{3}{2} + \mu} & \left[(-1 - 2z + z^2 - 4\mu z + 4\mu^2) v(z) \right. \\ & \left. + (4z - 4z^2 + 8\mu z) \frac{dv}{dz} + 4z^2 \frac{dv^2}{dz^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Aplicando este cambio de variable, y dividiendo entre $\exp(-z/2)z^{-1/2+\mu}$, tenemos que

$$\left[z \frac{d^2}{dz^2} + (1 + 2\mu - z) \frac{d}{dz} - \left(\frac{1}{2} - \kappa + \mu \right) \right] v(z) = 0, \quad (\text{A.28})$$

donde identificamos una ecuación hipergeométrica confluyente de parámetros

$$a = \frac{1}{2} - \kappa + \mu, \quad c = 1 + 2\mu.$$

Sin más que tener en cuenta la solución de esta última ecuación dada por (A.16), y deshacer el cambio de variable efectuado, tenemos demostrada la siguiente proposición

Proposición A.4. *La solución más general de la ecuación diferencial de Whittaker (A.23) viene dada por*

$$W(z) = A M_{\kappa,\mu}(z) + B W_{\kappa,\mu}(z), \quad (\text{A.29})$$

donde $M_{\kappa,\mu}$ y $W_{\kappa,\mu}$ denotan las funciones de Whittaker de primera y segunda especie respectivamente, definidas según

$$\begin{aligned} M_{\kappa,\mu}(z) &= e^{-\frac{1}{2}z} z^{\frac{1}{2}+\mu} {}_1F_1 \left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa, 1 + 2\mu, z \right), \\ W_{\kappa,\mu}(z) &= e^{-\frac{1}{2}z} z^{\frac{1}{2}+\mu} U \left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa, 1 + 2\mu, z \right). \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

A.2.1. Desarrollos asintóticos

En la resolución de la ecuación de Schrödinger han aparecido las funciones de Whittaker en la región exterior, por lo que de cara a quedarnos con una solución físicamente aceptable, debemos asegurarnos que las soluciones no divergen en el infinito. Para ello, estudiamos sus desarrollos asintóticos cuando $z \rightarrow \infty$. Estos vienen dados por

$$\begin{aligned} W_{\kappa,\mu}(z) &\sim e^{-\frac{1}{2}z} z^\kappa & |\text{ph } z| \leq \frac{3}{2}\pi - \delta \\ M_{\kappa,\mu}(z) &\sim \Gamma(1 + 2\mu) e^{\frac{1}{2}z} z^{-\kappa} / \Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa\right) & |\text{ph } z| \leq \frac{1}{2}\pi - \delta \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

A.2.2. Derivadas de las funciones Whittaker

Las derivadas de las funciones de Whittaker de primera y segunda especie se calculan según tenemos las siguientes derivadas

$$\begin{aligned} \frac{dM_{\kappa,\mu}(z)}{dz} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\kappa}{z} \right) M_{\kappa,\mu}(z) + \frac{1}{z} \left(\frac{1}{2} + \kappa + \mu \right) M_{1+\kappa,\mu}(z) \\ \frac{dW_{\kappa,\mu}(z)}{dz} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\kappa}{z} \right) W_{\kappa,\mu}(z) - \frac{1}{z} W_{1+\kappa,\mu}(z) \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Apéndice B

Condiciones de ajuste

En nuestro modelo, hemos utilizado un potencial en los que aparecen tanto $\delta(r - R)$ como $\delta'(r - R)$. Los potenciales de este tipo fijan condiciones de ajuste. Según se ha expuesto en el primer capítulo, de con vistas a resolver la ecuación de Schrödinger, se pretende resolver por separado la región interior y la exterior, y posteriormente, aplicar las condiciones de ajuste apropiadas. El objetivo de esta sección es precisamente recoger dichas condiciones.

En este Apéndice, vamos a obtener las condiciones de ajuste para potenciales del tipo δ , y se expondrán las condiciones para potenciales del tipo $\alpha\delta + \beta\delta'$.

B.1. Condiciones para potenciales del tipo δ

Consideremos un potencial del tipo

$$V(r) = V_0\delta(r - R). \quad (\text{B.1})$$

El potencial V tiene una discontinuidad infinita en $r = R$. Esto implica que si $\psi(r)$ es la función de onda resultante de resolver la ecuación de Schrödinger independiente de tiempo, necesariamente $\psi'(r)$ no es continua. Para verlo, consideremos la ecuación de Schrödinger independiente de tiempo para este potencial

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2\psi(r)}{dr^2} &= (E - V(r)) \psi(r) \\ \Rightarrow \frac{d^2\psi(r)}{dr^2} &= \frac{2\mu}{\hbar^2} (V_0 \cdot \delta(r - R) - E) \psi(r). \end{aligned}$$

Integrando ambos lados de la ecuación anterior entre $R - \varepsilon$ y $R + \varepsilon$, donde $\varepsilon > 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon} \frac{d^2\psi(r)}{dr^2} dr &= \frac{2\mu}{\hbar^2} \int_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon} [V_0 \cdot \delta(r - R) - E] \psi(r) dr \\ &= \frac{d\psi}{dr} \Big|_{R+\varepsilon} - \frac{d\psi}{dr} \Big|_{R-\varepsilon} = \frac{2\mu}{\hbar^2} V_0 \int_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon} \delta(r - R) \psi(r) dr - \int_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon} E dr, \end{aligned}$$

luego sin más que hacer el límite el límite $\varepsilon \rightarrow 0^+$, concluimos que

$$\frac{d\psi}{dr} \Big|_{R+\varepsilon} - \frac{d\psi}{dr} \Big|_{R-\varepsilon} = \frac{2\mu}{\hbar^2} V_0 \psi(R). \quad (\text{B.2})$$

Es decir, existe una discontinuidad en la derivada de la función de onda proporcional a la función de onda en ese punto (y al parámetro del potencial de la función delta).

B.2. Condiciones para $\alpha\delta + \beta\delta'$

Para el caso que nos ocupa, el del potencial $\alpha\delta + \beta\delta'$, existen también condiciones de ajuste que deben verificar la función de onda y su derivada.

En los potenciales de este tipo, existe controversia acerca de las condiciones de ajuste, pues las condiciones obtenidas mediante el procedimiento anterior (es decir, integrando la ecuación de Schrödinger) producen inconsistencias (ver [14]).

Las condiciones de ajuste para este tipo de potenciales han sido estudiadas en diversos artículos, pero en este estudio utilizaremos las expuestas por Kurasov en [8], que permiten construir una extensión autoadjunta con el término de δ y δ' soportados en el mismo punto. Estas condiciones –expresadas en forma de sistema lineal– son las siguientes:

$$\begin{pmatrix} u_\ell(R^+) \\ u'_\ell(R^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2+\beta}{2-\beta} & 0 \\ \frac{4\alpha}{4-\beta^2} & \frac{2-\beta}{2+\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\ell(R^-) \\ u'_\ell(R^-) \end{pmatrix}, \quad \text{donde } u_\ell(R^\pm) = \lim_{x \rightarrow R^\pm} u_\ell(x). \quad (\text{B.3})$$

Para deducirlas, no se realiza la integración de la ecuación de Schrödinger, sino que se emplean técnicas del análisis funcional. Una deducción detallada excede los objetivos de este trabajo, por lo que las tomaremos como ciertas sin exponer su demostración.

Bibliografía

- [1] C. Romaniega, M. Gadella, R.M. Id Betan, and L.M. Nieto, An Approximation to the Woods–Saxon Potential Based on a Contact Interaction, *Eur. Phys. J. Plus* **135**, 372 (2020).
- [2] J. Suhonen, *From Nucleons to Nucleus: Concepts of Microscopic Nuclear Theory* (Springer-Verlag, Berlin, 2007).
- [3] K. S. Krane, *Introductory Nuclear Physics* (John Wiley and Sons, New York, 1988).
- [4] National Nuclear Data Center, Brookhaven National Laboratory. Última visita: 10-05-2021. <https://www.nndc.bnl.gov/nudat2/chartNuc.jsp>.
- [5] R.D. Woods and D.S. Saxon, Diffuse Surface Optical Model for Nucleon-Nuclei Scattering, *Phys. Rev.* **95**, 577 (1954).
- [6] M. Gadella y L.M. Nieto, *Métodos Matemáticos Avanzados para Ciencias e Ingenierías* (Universidad de Valladolid, Valladolid, 2013).
- [7] F.W.J. Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert, and C.W. Clark (Eds), *NIST Handbook of Mathematical Functions* (Cambridge University Press, Cambridge, 2010).
- [8] P. Kurasov. Distribution Theory for Discontinuous Test Functions and Differential Operators with Generalized Coefficients, *J. Math. Anal. Appl.* **201**, 297 (1996).
- [9] J.M. Muñoz-Castañeda, L.M. Nieto, and C. Romaniega, Hyperspherical δ - δ' Potentials, *Ann. Phys.* **400**, 246 (2019).
- [10] J. Wimp, On the Zeros of a Confluent Hypergeometric Function, *Proc. Amer. Math. Soc.* **16**, 281 (1965).
- [11] A. Galindo and P. Pascual, *Quantum Mechanics I* (Springer-Verlag, Berlin, 2012).
- [12] A. Sharma, S. Gora, J. Bhagavathi, and O.S.K.S. Sastri, Simulation Study of Nuclear Shell Model Using Sine Basis, *Am. J. Phys.* **88**, 576 (2020).
- [13] M.G. Mayer, On closed shells in nuclei *Phys. Rev.* **74**,235 (1948).
- [14] D. J. Griffiths. Boundary conditions at the derivative of a delta function, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **26**(9): 2265, 1993.