Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

Económicas y Empresariales

Grado en Administración y Dirección de Empresas

Juegos Repetidos. Cooperación

Presentado por:

Pablo López López

En Valladolid a 23 de septiembre de 2021

RESUMEN

La teoría de juegos es una rama de las matemáticas que pretende modelar situaciones en las que es preciso tomar decisiones, para que los jugadores obtengan el máximo beneficio posible teniendo en cuenta las decisiones que toman los otros jugadores y las reglas externas que definen el juego. Se trata de un campo complejo con gran variabilidad debido a que en los juegos puede cambiar el número de jugadores, las relaciones que se pueden establecer entre ellos ─cooperativos o no cooperativos─, el orden en el que juegan los jugadores ─juegos estáticos o dinámicos─, el número de repeticiones del juego ─juegos finitos o infinitos─ o la información de la que disponen los jugadores.

Los juegos cooperativos se pueden producir mediante acuerdos previos, para conseguir un mayor beneficio que en una situación competitiva o pueden surgir mediante la repetición de los juegos.

Debido a que los escenarios económicos y sociales, suelen incluir varios participantes y que sus intereses se pueden definir mediante funciones matemáticas que representan la utilidad, la teoría de juegos puede considerarse una rama de la economía que nos permite caracterizar estos escenarios y tomar decisiones.

JEL: C71y C73

Palabras Claves: Teoría de juegos, Juegos repetidos, Cooperación en teoría de juegos.

ABSTRACT

Game theory is a branch of Mathematics which intends to characterize situations where decisions need to be made, in order to grant the players, the best payment, i.e. the most profitable outcome, taking into account other players' strategies and the game rules, which are usually fixed. It is a complex field given the great variability within games, the number of players can vary, the cooperation amongst players can also be limited ─cooperative or non-cooperative games─, the game structure ─static or dynamic games─, the number of turns or subgames within the game ─infinitely-repeated game or finitely-repeated game─ or even the information available may vary.

Cooperative games can be produced by prior agreements, to achieve a greater profit than in a competitive situation, or they can arise through repetition of the games.

Given that economic and social frameworks include several participants, whose interests can be modelled through mathematical formulas representing payoffs, game theory could also be considered a field within economics and it can be helpful to characterize these scenarios and guide decisions.

JEL:C71 and C73

Keywords: Game Theory, Repeated games, Cooperation in game theory

Contenido

1. INTRODUCCIÓN

La Teoría de Juegos es una rama de las matemáticas aplicadas que tiene como objetivo encontrar la estrategia o el conjunto de estrategias más beneficioso para un individuo o entidad ─el jugador─ a la hora de enfrentarse a otros individuos con los que se plantean conflictos de intereses. Dada la naturaleza competitiva del mundo empresarial y la posibilidad de plantear los negocios como juegos entre varios participantes, la teoría de juegos ha sido utilizada por los economistas para buscar estrategias ganadoras que permitieran a las empresas maximizar sus beneficios ─su utilidad, término que utilizaremos posteriormente─.

A pesar de que existen aportaciones atribuidas a Cournot (1838), Edgeworth (1881), Zermelo (1913) o Borel (1921), que fueron imprescindibles para los posteriores avances, el desarrollo de esta disciplina se le atribuye a John Von Neumann (1928). En 1928 Von Neuman demuestra el teorema del minimax y posteriormente en 1944, junto a Oskar Morgenstern publica el libro *Theory of Games and Economic Behavior* en el que se fijan las bases de lo que era una prometedora disciplina: La Teoría de Juegos clásica. En los años siguientes John F. Nash, Jonh Harsanyi, Reinhard Selten y otros científicos amplían la teoría para adaptarla a una gama más amplia de juegos con condiciones variables y allanan el terreno para trasladar los fundamentos teóricos a otras disciplinas como las ciencias biológicas, la economía, la computación o la política.

En este trabajo nos centraremos en la cooperación en los juegos repetidos. Empezaremos con la explicación de los elementos que componen los juegos, donde trataremos de crear una base que sirva de explicación para los siguientes puntos.

Continuaremos el trabajo estudiando tanto los juegos no cooperativos como los cooperativos. Nos centraremos y haremos principal hincapié en los cooperativos, pero sin dejar de lado sus diferencias con los no cooperativos. Trataremos también la representación de los juegos y dentro de este punto comenzaremos a desgranar uno de los conceptos más importantes de los juegos repetidos, El equilibrio de Nash.

Entrados ya en materia y con los conceptos básicos claros, el trabajo pretende introducirse en como afecta la repetición a la teoría de juegos, tanto en su forma finita como tratándose de una repetición infinita.

Para finalizar el manuscrito el objetivo es ejemplificar varios de los teoremas y formulas expuestas, para mejorar su comprensión, así como introducir el modelo de Cournot, ampliamente utilizado en la teoría de juegos.

2. ELEMENTOS DE LOS JUEGOS

Utilizamos la palabra juego para referirnos a situaciones de interdependencia entre individuos sometidas a unas reglas y que conducen a un resultado a través de la toma de decisiones. Los juegos se caracterizan a partir de los elementos que los componen y las características individuales de dichos componentes:

- Jugadores: son los individuos o entidades que participan en el juego, son los encargados de tomar las decisiones con el fin de maximizar su utilidad.
- Acciones: hacen referencia a los posibles movimientos o decisiones que cada jugador puede escoger en su turno.
- Información: hace referencia al conocimiento de los jugadores de las variables del juego. Si todos los jugadores conocen toda la información inherente a las consecuencias de las jugadas se considera que la información es completa, si uno o más jugadores desconoce total o parcialmente las consecuencias de las jugadas la información es incompleta. Respecto a el estado del desarrollo del juego, la información puede ser perfecta, si los jugadores conocen el desarrollo del juego o imperfecta, si en cualquier momento del juego se desconoce algún elemento del desarrollo de este, i.e. se desconocen las acciones de los otros jugadores.
- Estrategias: Incluye todas las acciones que se pueden tomar para cada momento del juego. Un perfil de estrategias es el conjunto que engloba una estrategia para cada jugador.
- Resultados: distintas formas en las que puede terminar el juego.

- Pagos: utilidad obtenida por cada jugador al final del juego en función del resultado del mismo.

A mayores de los elementos claves en los juegos, la Teoría de Juegos parte de una asunción clave: los jugadores se comportan de manera racional y son conscientes de que tanto su comportamiento como el de los otros jugadores es racional. En base a esa racionalidad se puede suponer que las acciones elegidas por los jugadores serán aquellas que maximicen la utilidad esperada.

3. JUEGOS COOPERATIVOS

Como su nombre indica, este tipo de juegos permiten que los jugadores puedan cooperar entre ellos para alcanzar un bien común superior, mediante la adopción de acuerdos vinculantes. Dentro de la Teoría de Juegos cooperativos, esos acuerdos de cooperación se conocen como coaliciones y manteniendo el principio de racionalidad los jugadores elegirán sus acciones con el fin de maximizar la utilidad para la coalición. En principio, y a no ser que las normas del juego indiquen lo contrario, no existe un límite de jugadores que puedan formar una coalición. En lo referente a los pagos, estos se pueden realizar a la coalición en su conjunto o a los jugadores que la componen, de esta forma subdividimos los juegos en dos tipos.

- Juegos cooperativos de utilidad transferible (juego UT): Los pagos se realizan a la coalición, que tendrá que distribuirlos libremente entre sus miembros una vez finalizado el juego.
- Juegos cooperativos de utilidad no transferible: (juego NUT): Los pagos los reciben los individuos que conforman la coalición, los miembros de la coalición tienen que elegir un pago que sea valioso para todos los componentes (McLean, 2002).

Por simplicidad nos vamos a centrar en los juegos cooperativos de utilidad transferible.

Definición 3.1. Un juego cooperativo o en forma de función característica con utilidades transferibles consiste en:

- Un conjunto finito de jugadores $J = \{1, 2, \ldots, n\}$.
- Una función característica, que asocia a cada subconjunto S de J un número real $v(S)$. $v : P(J) \rightarrow \mathbb{R}$ con $v(\emptyset) = 0$.

Por tanto, G (J, v) es un juego en forma de función característica con utilidades transferibles si J y v están especificados y que la función característica v asigne a un espacio vacío de jugadores el pago nulo. (Pérez et al., 2004 pp.48)
En vista de la definición 3.1 podemos definir una coalición como $C \subseteq J$ y $v(C)$ como la utilidad que puede obtener la coalición de forma conjunta.

La función de pagos v, suele ser considerada normalizada, positiva y monótona.

Normalizada, $v(\emptyset) = 0$

Positiva, $v(C) \geq 0 \; \forall \, C \subseteq J$

Monótona, $v(C) \leq v(D) \; \forall \, C, D \, / \, C \subseteq D \subseteq J$

En los juegos UT, como se ha indicado los jugadores cooperan entre sí para obtener un pago para la coalición, la dificultad de estos juegos radica en el reparto de los pagos entre los miembros de la coalición de acuerdo con la participación que cada uno de los miembros ha tenido para alcanzar la máxima utilidad de la coalición.

El pago a cada uno de los jugadores se puede determinar a través de distintos procedimientos, como puede ser el valor de Shapley o el valor de Banzhaf adaptado a juegos cooperativos UT (Owen, 1975). El objetivo de estos métodos es asignar a cada jugador de la coalición un número real que equivale al pago que recibirá en el juego. El pago que recibe cada jugador puede ser representado mediante un vector de números reales al que llamaremos vector de pagos.

3.1. El *core*

De entre todos los vectores de pagos posibles para los jugadores de la coalición, es necesario seleccionar aquellos que serían aceptables para todos los jugadores, ya que, según el principio de racionalidad, ningún jugador aceptaría un resultado peor al que obtendría individualmente o en una coalición de tamaño inferior, i.e. contenida en la misma.

Definición 3.2. El *core* de un juego (J, v) es el conjunto de todos los vectores de pagos que cumplen:

$$C(J, v) = \{(\phi_1(v), \phi_2(v), \ldots, \phi_n(v)) \in \mathbb{R}^n : \phi(J) = v(J), \phi(S) \geq v(S), \forall S \subseteq J\}$$

Siendo ϕ_i el pago que corresponde a cada jugador dentro de la coalición.

El *core*, representa el conjunto de los vectores de pago que ofrecen a cada jugador y a cada coalición $S \subseteq N$, la posibilidad de obtener un beneficio igual o mayor del que obtendrían de forma individual o en una coalición de menor tamaño $L \subseteq S \subseteq N$. De este modo, cualquier vector de pagos del *core* satisface a todos los jugadores o coaliciones. Sin embargo, el *core* puede ser un conjunto vacío, si no hay vectores que cumplan los siguientes axiomas.

Axioma 1. Eficiencia, que afirma que el pago total del juego debe ser repartido entre los miembros de la coalición.

Axioma 2. Racionalidad individual, por el que los jugadores tienen que obtener un beneficio superior del que obtendrían individualmente.

Axioma 3. Racionalidad cooperativa. Semejante a la racionalidad individual pero aplicada a las coaliciones.

3.2. Valor de Shapley

El valor de Shapley trata de buscar una distribución de pagos entre los jugadores que forman parte de la coalición de tal forma que se cumplan cuatro axiomas.

Definición 3.2. "Sea $G = (J, v)$ un juego en forma coalicional, en donde $J = \{1, 2, \ldots, n\}$. Se considera la siguiente asignación de pagos para los n jugadores:

$$\phi(v) = \left(\phi_1(v), \phi_2(v), \ldots, \phi_n(v)\right) \in \mathbb{R}^n$$

Es la función de pagos $\phi(v)$ la que cumple los cuatro axiomas siguientes:

Axioma 1. Eficiencia. La función de asignación $\phi(v)$ debe distribuir el pago total del juego. Por tanto, se cumple:

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i(v) = v\,(J)$$

Axioma 2. Simetría. Para cualquier par de jugadores que realicen aportaciones equivalentes para cada coalición, es decir, tales que cumplan:

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}), \text{para todo } S \in P(J), \text{con } i, j \notin S$$

Se cumplirá: $\phi_i(v) = \phi_j(v)$

Axioma 3. Tratamiento del jugador pasivo. Si un jugador no aporta ningún beneficio adicional al resto de jugadores no debe recibir ningún pago adicional. Es decir, para cada jugador $i \in J$ para el cual se verifica que

$$v(S) = v(S - \{i\}) + v(\{i\}), \text{para toda coalición } S \text{ con } i \in S$$

$$\text{debe ser } \phi_i(v) = v(\{i\})$$

Axioma 4. Aditividad. La función de asignación ϕ debe ser invariante a cualquier descomposición arbitraria del juego. Formalmente, dados dos juegos cualesquiera $(J, v1)\ y\ (J, v2)$ debe ser:

$$\phi\ (v_1 + v_2) = \phi\ (v_1) + \phi\ (v_2)$$

Teorema 3.1. La única asignación $\phi(v) = \big(\phi_1(v), \phi_2(v), \ldots, \phi_n(v)\big)$ que verifica los axiomas 1, 2, 3 y 4 es el valor de Shapley:

$$\phi_i(v) = \sum_{S \in P(J)} q(s)\ [v(S) - v(S - \{i\})]$$

En donde se define q como:

$$q(s) = \frac{(\mathrm{s}-1)!\,(\mathrm{n}-\mathrm{s})!}{\mathrm{n}!}$$

Con $s = |S|$, el número de jugadores que hay en la coalición S.

3.3. Ejemplo.

Para ilustrar los juegos cooperativos de utilidad transferible vamos a usar un ejemplo. A raíz de la crisis del coronavirus tres bares contiguos se vieron obligados a cerrar, y tras la reapertura esperan un descenso en la afluencia de clientes del 40% de media. Ante esta situación, para evitar incurrir en sobrecostes y ahorrar en camareros, luz y otros gastos se plantean la posibilidad de unir los negocios temporalmente y atender a todos los clientes en un mismo bar. Las cuentas de los negocios previas a la crisis se muestran a continuación:

BAR	Ingresos	Gastos[1]	EBITDA
1	9000	4000	5000
2	6000	3500	2500
3	7500	4500	3000

Tabla 3.1: Balances de los 3 bares o jugadores antes de la crisis

Tras la reapertura, la información de las posibles coaliciones se muestra a continuación, véase que los gastos de las coaliciones corresponden al gasto del bar con unos gastos superiores y que la utilidad que se va a tener en cuenta será el EBITDA, aunque podrían haberse elegido otros valores.

El juego queda formado por tres jugadores: $J = \{1, 2, 3\}$

Y $P(J)$ sería el conjunto de las partes de J, véase el conjunto formado por cada una de las posibles coaliciones. $\mathrm{P(J)} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

Y la función característica asocia a cada coalición $C \ / \ C \subseteq J$ un valor según la siguiente tabla, nótese que el valor que asigna la función v solo se corresponde con la columna de EBITDA, el resto de las columnas aparecen para mayor claridad, nótese también que los ingresos corresponden al 60 % de la suma de los ingresos de ambos bares previos a la crisis, ya que suponemos que el gasto por cliente se mantiene constante:

[1] El apartado de gastos incluye tanto el importe directo de los bienes vendidos como los gastos generales de personal y administrativos.

C	Ingresos	Gastos[2]	EBITDA $v(C)$
∅	0	0	0
{1}	5400	4000	1400
{2}	3600	3500	100
{3}	4500	4500	0
{1,2}	9000	4000	5000
{1,3}	9900	4500	4400
{2,3}	8100	4500	3600
{1,2,3}	13500	4500	9000

Tabla 3.2: Representación de las distintas coaliciones posibles con la información de ingresos y gastos y la definición de la función característica que se muestra en la última columna.

Como se puede comprobar, en este caso $v(C)$ es una función normalizada, cumple las condiciones de monotonía y es positiva. La dificultad de este tipo de juegos, como hemos indicado anteriormente, radica en el reparto de los beneficios obtenidos, en este caso el EBITDA, que hemos establecido como nuestra utilidad.

Repasemos ahora los axiomas del Core aplicados a nuestro ejemplo

Axioma 1. Eficiencia.

$$\phi_1(v) + \phi_2(v) + \phi_1(v) = 9000$$

Axioma 2. Racionalidad individual.

$$\phi_1(v) \geq v(\{1\}), \qquad \phi_2(v) \geq v(\{2\}), \qquad \phi_1(v) \geq v(\{2\})$$

$$\phi_1(v) \geq 1400, \qquad \phi_2(v) \geq 100, \qquad \phi_3(v) \geq 0$$

Axioma 3. Racionalidad cooperativa.

[2] El apartado de gastos incluye tanto el importe directo de los bienes vendidos como los gastos generales de personal y administrativos.

$$\phi_1(v) + \phi_2(v) \geq \ v(\{1,2\}), \phi_1(v) + \phi_3(v) \geq \ v(\{1,3\}), \phi_2(v) + \phi_3(v) \geq \ v(\{2,3\})$$
$$\phi_1(v) + \phi_2(v) \geq 5000, \phi_1(v) + \phi_3(v) \geq \ 4400, \phi_2(v) + \phi_3(v) \geq \ 3600$$

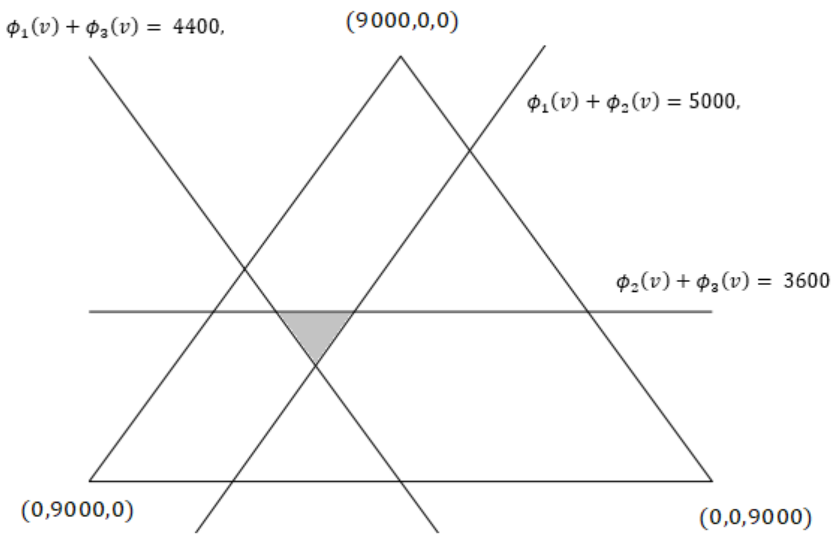


Figura 3.1. Proyección en el plano del juego de los bares descrito anteriormente con las ecuaciones que definen el core. La ecuación del plano definido por $\phi_1(v) + \ \phi_2(v) + \phi_1(v) = 9000$ no se muestra. En gris se presenta el *core*, que en este caso no es un conjunto vacío y contiene los vectores de pagos que cumplen las condiciones antes descritas, habiendo varias soluciones posibles.

Siguiendo con el ejemplo anterior de los bares, vamos a calcular, mediante el valor de Shapley, el reparto para la coalición {1,2,3} que tiene la misma dimensión que J, n=3. Siendo el número de coaliciones posibles $2^n = 8$, incluyendo la coalición $\emptyset$, y pudiendo formar parte cada jugador de cuatro coaliciones (ver tabla 3.2), la función $q(s)$ queda definida de la siguiente forma:

$$q(s) = \frac{(\mathrm{s} - \ 1)!\,(3 - \ \mathrm{s})!}{3!} \ \mathrm{con}\ 1 \leq \ s \leq \ \ 3\ y\ s \in \ \mathbb{N}$$

De esta forma obtenemos:

$$q(1) = \frac{1}{3}\ , q(2) = \frac{1}{6} \ \ y\ \ q(3) = \frac{1}{3}$$

Y la expresión definitiva para el valor de Shapley para cada uno de los pagos queda como una expresión de cuatro sumandos:

$$\phi_1(v) = \ q(1)[v(\{1\}) - v(\emptyset)] + \ q(2)[v(\{1,2\}) - v(\{2\})]$$
$$+ \ q(2)[v(\{1,3\}) - \ v(\{3\})] + q(3)[v(\{1,2,3\}] - v(\{2,3\})] =$$

$$= \frac{1}{3}v(\{1\}) + \frac{1}{6}[v(\{1,2\}) - v(\{2\})] + \frac{1}{6}[v(\{1,3\}) - v(\{3\})]$$

$$+ \frac{1}{3}\ [v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})]$$

$$= \frac{1}{3}\ 1400 + \frac{1}{6}\ 4900 + \frac{1}{6}\ 4400 + \frac{1}{3}\ 5400 = 3816\ €$$

$$\phi_2(v) = \frac{1}{3}v(\{2\}) + \frac{1}{6}[v(\{1,2\}) - v(\{1\})] + \frac{1}{6}[v(\{2,3\}) - v(\{3\})]$$

$$+ \frac{1}{3}\ [v(\{1,2,3\}) - v(\{1,3\})] = \frac{1}{3}\ 100 + \frac{1}{6}\ 3600 + \frac{1}{6}\ 3600 + \frac{1}{3}\ 4600$$

$$= 2767\ €$$

$$\phi_3(v) = \frac{1}{3}v(\{3\}) + \frac{1}{6}[v(\{1,3\}) - v(\{1\})] + \frac{1}{6}[v(\{2,3\}) - v(\{2\})]$$

$$+ \frac{1}{3}\ [v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\})] = \frac{1}{6}\ 3000 + \frac{1}{6}\ 3500 + \frac{1}{3}\ 4000 = 2416\ €$$

De esta forma el vector de pagos a cada integrante del grupo o vector de Shapley quedaría:

$$\phi(v) = (3816, 2767, 2416)$$

Y se puede comprobar que cumple todos los axiomas requeridos.

4. JUEGOS NO COOPERATIVOS

Cada jugador busca la máxima utilidad individual y las coaliciones no están permitidas, a pesar de que mediante el establecimiento de coaliciones el valor individual alcanzado pudiera ser superior. Dentro de los juegos no cooperativos presentan especialidad dificultad aquellos con información incompleta, porque al no disponer los jugadores de información sobre las consecuencias de sus acciones es necesario utilizar probabilidades para resolverlos.

4.1. Juegos estáticos.

Los jugadores escogen sus acciones de forma simultánea, sin conocer la decisión de los demás en ese turno, y los pagos se reciben una vez ha finalizado el juego, en este tipo de juegos la información puede ser completa o incompleta pero siempre será imperfecta.

4.2. Juegos dinámicos.

Las decisiones se toman de forma secuencial, en un orden determinado de forma que algunos jugadores serán conscientes de las acciones de los anteriores y podrán adaptar sus estrategias en función de las acciones previas. La información también puede ser completa o incompleta, pero en este caso si puede ser perfecta.

5. REPRESENTACIÓN DE JUEGOS

5.1. Juegos en forma normal.

Es la forma habitual de representación de los juegos estáticos. A diferencia de la forma extensiva que utiliza grafos, la representación en la forma normal son matrices cuando hay dos matrices. En general un juego en forma normal se representa por: $G = (J, (S_i)_{i \in J}, (v_i)_{i \in J})$ donde existe:

- El conjunto de jugadores $J = \{1, 2, \dots, n\}$.
- Un conjunto de estrategias para cada jugador $S_i, i \in J$,
- Una función de pagos $v_i: S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$
- Llamaremos perfil de estrategias a cada elemento de $S_1, S_2, \dots, S_n$:

$$s = (s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$$

- De la misma forma definimos

$$S_{-i} = S_1 \times \cdots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \cdots \times S_n \; con \; s_{-i} \in S_{-i}$$

- Por último, nos referiremos formalmente a $S_i \; s^* \in S_i \; y \; s_{-i} \in S_{-i}$:

$$(s^* | \, s_{-i}) = (s_1, .., s_{i-1}, s^*, s_{i+1}, .., s_n)$$

Los juegos en forma normal se pueden abordar de múltiples formas, entre las más conocidas tenemos la solución por argumentos de equilibrio, las soluciones por argumentos de dominación y las soluciones de estrategias prudentes.

5.1.1. Resolución mediante estrategias prudentes o de seguridad.

En este caso es necesario definir que entendemos por solución para aquellos juegos no cooperativos expresados en forma normal. La solución de un juego será el conjunto de perfiles de estrategias entre las cuales estarán las decisiones que es de esperar tomen los jugadores de forma racional.

Definición 5.1. Sea $G = (J, (S_i)_{i \in J}, (v_i)_{i \in J})$, $\hat{s}_i \in S_i$ es una estrategia prudente para el jugador i si:

$$min_{s_{-i} \in S_{-i}} v_i(\hat{s}_i | s_{-i}) = max_{s_i \in S_i} min_{s_{-i} \in S_{-i}} v_i(s_i | s_{-i})$$

Podemos describir la expresión anterior en lenguaje cotidiano como un jugador que se pone en la peor situación posible ante el desconocimiento de la elección de estrategia de los otros jugadores y de entre la peor situación posible escoger aquella estrategia que le reporta mayor utilidad. Nos referiremos a la utilidad mínima que obtendrá un jugador como pago de seguridad para ese jugador.

Esta es una forma desconfiada de comportarse que no tiene en cuenta las utilidades que suponen para los otros jugadores cada una de sus opciones, por lo que sería válido para juegos estrictamente competitivos. A pesar de que el problema del prisionero no representa un juego estrictamente competitivo, lo usaremos para ejemplificar este método.

5.1.2. Resolución mediante argumentos de dominación

Definición 5.2. Sean $s_i' y\ s_i^*$ estrategias del jugador i, se dice que s_i' está dominada por s_i^*, o que s_i^* domina a s_i' si:

$$v_i(s_i' | s_{-i}) \leq v_i(s_i^* | s_{-i}) \ \forall\, s_{-i} \in S_{-i}$$

Con al menos una desigualdad estricta. Se dice que s_i' está dominada estrictamente por s_i^*, o que s_i^* domina estrictamente a s_i' si:

$$v_i(s_i' | s_{-i}) < v_i(s_i^* | s_{-i}) \ \forall\, s_{-i} \in S_{-i}$$

Y diremos que una estrategia es dominante si domina al resto de las estrategias posibles para ese jugador, y de forma equivalente para una estrategia estrictamente dominante.

La definición anterior puede transcribirse al lenguaje cotidiano como que si una estrategia proporciona una mayor utilidad a un jugador —independientemente de las estrategias de los otros jugadores— que las otras, el jugador se decantará por aquella estrategia que comporta una mayor utilidad, por el principio de racionalidad.

En aquellos juegos en los que se observe una estrategia dominante para ambos jugadores diremos que existe un perfil de estrategias dominantes. Sin embargo, no todos los juegos presentan estrategias dominantes y se requieren estrategias para eliminar estrategias y llegar a un juego en el que sí que haya estrategias dominantes mediante argumentos de dominación. Hay dos tipos para llevar a cabo este procedimiento:

- Eliminación iterativa estricta (EIE): Consiste en eliminar para ambos jugadores las estrategias estrictamente dominadas en el juego inicial y construir un juego nuevo contenido en el inicial. Este proceso se repetirá reiteradamente hasta que no existan más estrategias dominadas. Las soluciones del juego serán los perfiles de estrategias que sobreviven al proceso de eliminación iterativa.
- Eliminación iterativa débil (EID): Es un método repetitivo equivalente a EIE, pero en este caso se eliminan aquellas estrategias dominadas, en lugar de aquellas estrictamente dominadas.

Definición 5.3. Se dice que un juego es resoluble por dominación si tras el proceso de dominación iterativa sobrevive un único perfil, o varios perfiles, siempre y cuando ambos jugadores sean indiferentes entre las estrategias que componen la solución.

5.1.3. Equilibrio de Nash (EN)

Se denomina equilibrio de Nash al perfil de estrategias en el que cada jugador ha adoptado una estrategia que maximiza su utilidad, teniendo en cuenta las estrategias de los otros jugadores. Por lo tanto, basándonos en el principio de racionalidad, ningún jugador cambiará su estrategia por no derivar beneficios del cambio siempre y cuando los otros jugadores no cambien las suyas.

Definición 5.4. Un perfil de estrategias $s^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*)$ se considera un equilibrio de Nash si y solo si:

$$v_i(\, s_i^* | s_{-i}^*) \geq v_i\big(\, s_i \ \big| s_{-i}^*\big) \ \forall \, s_i \ \in S_{i,} \ \forall \, i = 1,2, \dots, n$$

Si $s^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*)$ es un equilibrio de Nash, entonces s_i^* es una solución al problema

$$max_{s_{-i} \in S_{-i}} \ v_i(\, s_i | s_{-i}^*)$$

Un juego puede tener uno, varios o ningún equilibrio de Nash.

El equilibrio de Nash no asegura el mejor resultado para el conjunto de los jugadores, sino que asegura el mejor resultado para los jugadores considerados individualmente.

5.1.4. Optimo de Pareto

El Óptimo de Pareto. Se define óptimo de Pareto es aquel punto de equilibrio, en nuestro caso perfil de estrategias en el que ninguno de los jugadores puede aumentar su utilidad sin perjudicar a alguno de los otros jugadores.

Veamos la resolución de un ejemplo para ilustrar los tres métodos anteriores para resolver juegos en forma normal. Tenemos dos amigos, Juan y Álex, que ante una pandemia mundial tienen que decidir si continúan con su plan inicial de viaje, lo venden y se quedan en casa, cambian el viaje por otro dentro de la región o Alex se cambia por su hermano. La función de utilidad depende de numerosos factores como son la salud, el dinero o el entretenimiento, nótese que Alex tiene un delicado estado de salud.

El juego queda definido de la siguiente manera:

$J = \{Juan, Álex\} = \{1,2\}$

$S_{Alex} = \{Viajar, Casa, Cambio\ de\ viaje,\} = \{A, B, C\}$

$S_{juan} = \{Viajar, Casa, Cambio\ de\ viaje, Mandar\ a\ su\ hermano\} = \{A, B, C, D\}$

.

J1 \ J2	A	B	C	D
A	8, 4	4,3	5,5	6,4
B	1,1	4,4	1,3	1,2
C	3,1	3,2	6,6	3,3

Supongamos que la decisión la tienen que tomar por separado.

Usando <u>estrategias prudentes</u> concluimos que A,B son estrategias prudentes del jugador 1 y que B,D son las estrategias prudentes para el jugador 2. Sin embargo, dado que este no es un juego meramente competitivo queda de manifiesto que el uso de estrategias prudentes no es la mejor opción, ya que el perfil de estrategias (A, B) para uno y dos respectivamente supone menos utilidad que otros perfiles como (A, A) o (C, C).

Resolviendo por estrategias dominantes se observa que, aunque A domina a B para el jugador 1, este no tiene estrategias dominantes. De forma similar, el jugador dos no tiene tampoco estrategia dominante, aunque C domina a D y a A. Aplicando EID obtenemos un juego en el que la estrategia B desaparece para el jugador 1 y la D para el jugador 2:

J1 \ J2	B	C
A	4,3	5,5
C	3,2	6,6

En este nuevo juego, el jugador 2 si que tiene una estrategia estrictamente dominante, C, mientras que el jugador 1 carece de estrategias dominantes. Volviendo a aplicar EID, aunque en este caso produzca el mismo resultado que EIE, se obtiene otro nuevo juego en el que la estrategia dominante y por tanto la solución por estrategias dominantes es que ambos jugadores elijan la estrategia C.

J1 \ J2	C
A	5,5
C	6,6

Para resolver el juego mediante equilibrios de Nash usaremos la siguiente nomenclatura: marcaremos con un asterisco (*) la mayor utilidad del jugador 1 para cada estrategia del jugador 2, y con (‘) la mayor utilidad de 2 para cada opción de 1. La matriz del juego se presenta de la siguiente forma:

J2 / J1	A	B	C	D
A	8*, 4	4*,3	5,5’	6*,4
B	1,1	4*,4’	1,3	1,2
C	3,1	3,2	6*,6’	3,3

En este caso hay dos perfiles que cumplen son equilibrio de Nash (B, B) y (C, C), coincidiendo esta última con un óptimo de Pareto y la solución por estrategias dominantes.

5.2. Juegos en forma extensiva.

Es la forma de representación adecuada para los juegos dinámicos, ya que el diagrama de árbol es la forma más sencilla para visualizar el orden en el que se producen las decisiones, así como la información de la que dispone cada jugador en su turno y las posibles acciones ─ramas del árbol─ que puede escoger con los respectivos resultados para cada acción ─nodos─. Finalmente, los últimos nodos corresponden al vector de pagos que recibirán los jugadores al finalizar el juego.

Para las resoluciones de estos juegos se suele utilizar el principio de inducción hacia atrás. Este es el procedimiento de analizar desde el final hacia el principio, permitiendo identificar el equilibrio de Nash en estrategias puras. De forma abreviada un juego en forma extensiva consta de los siguientes elementos:

- Un conjunto finito de jugadores de tamaño n, nótese que a mayor tamaño del conjunto de jugadores más difícil es la visualización del árbol porque aumenta el número de niveles del mismo de forma directamente proporcional al número de jugadores y de turnos.
- El árbol, que según la teoría de grafos se define como el conjunto de los nodos y las conexiones en el que cualquier par de nodos están conectados por un único camino. En este caso el árbol es un grafo enraizado y dirigido.

- Un conjunto de nodos terminales ─aquellos que no tienen conexiones salientes─ denominados hojas. A cada hoja le corresponde un vector de pagos de n dimensiones, ya que asigna un pago a cada jugador.
- En los juegos con información incompleta puede existir un jugador extra, de forma que cada ronda del juego tiene n+1 niveles, cada uno con los nodos de un jugador y a mayores un subconjunto adicional que perteneciente al jugador denominado chance, quien se corresponde con la naturaleza y cuyas conexiones salientes se corresponde con eventos ajenos a los jugadores que tienen asociada una probabilidad dada.

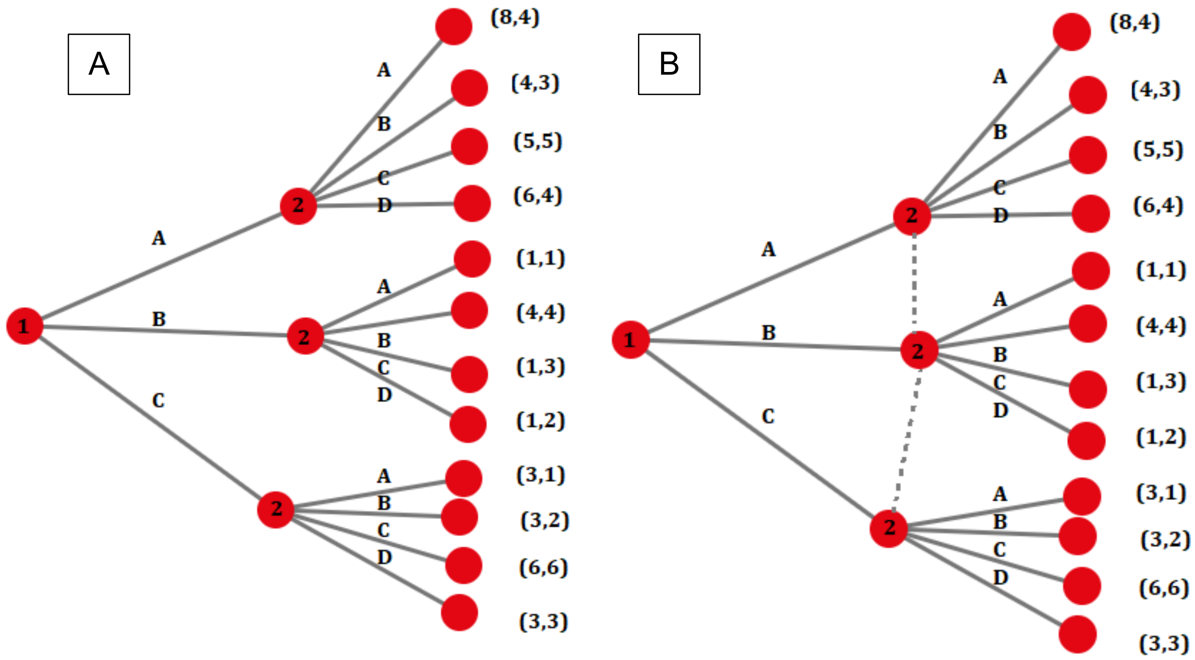
Con todo lo anterior se puede definir una jugada como el camino que se sigue a través de los nodos y conexiones desde la raíz hasta un nodo terminal que decidirá el vector de pagos.

Dentro de los juegos pueden aparecer subjuegos, que comienzan un único nodo de decisión y contiene a todos los nodos sucesores, sin romper ningún conjunto de información. Si todos los subjuegos constituyen un equilibrio de Nash entonces el perfil de estrategias constituye un ENPS.

En los juegos de forma extensiva también es posible que la información sea imperfecta, i.e. que a pesar de estar estructurado en forma de árbol cuando el segundo jugador escoge su estrategia, este todavía no conozca la decisión del primero, para señalar esta ausencia de información los nodos correspondientes al jugador dos se unen con una línea discontinua, como se observa en la figura 5.1.

Para ilustrar estos tipos de diagrama podemos echar un vistazo a la Figura 5.1. En ella se representa una variante del juego del apartado 5.1 en forma extensiva (A) y una representación fiel del juego del apartado 5.1 en forma extensiva (B). Ambas representaciones corresponden a un juego con información completa ya que no se observa el subconjunto de nodos perteneciente a la variabilidad natural, y el vector de pagos final solo depende de las decisiones de los jugadores. La figura 5.1.A representa el juego con información perfecta, en el que el jugador 2 ya conoce la decisión del jugador 1 por lo que no representa el mismo juego que en el apartado anterior, mientras que la figura derecha representa fielmente el juego del apartado 5.1. en el que el jugador 2 desconoce la elección del jugador 1.

Figura 5.1. Representación de juegos en forma extensiva.



En el caso del juego representado en 5.1.A, el jugador 2 conoce la estrategia de 1, por lo que optará por la estrategia que le reporte un pago mayor. El procedimiento para resolver restos juegos es el principio de inducción hacia atrás que lleva a que ambos elijan C.

En el caso del juego 5.1.B, al tener el jugador 2 información imperfecta es difícil resolver por inducción como es habitual en los juegos representados de forma extensiva con información perfecta.

Este tipo de representación es especialmente apropiado para juegos repetidos, en los que se repite durante dos o más turnos la toma de decisiones. Sin embargo, no procede transformar el juego anterior en un juego repetido y representarlo de forma extensiva, ya que el número de nodos terminales sería igual a 16^i siendo $i = \text{número de turnos}$.

Dado que un juego en forma extensiva se puede dividir en subjuegos, siempre y cuando los subjuegos contengan un nodo y todos los nodos sucesivos derivados de este, podemos resolver los juegos en forma extensiva mediante el procedimiento de inducción hacia atrás, comenzando por los nodos finales del árbol y retrocediendo hacia los iniciales.

6. JUEGOS REPETIDOS.

Los juegos repetidos, también conocidos como superjuegos dentro de la Teoría de Juegos son aquellos que se juegan de forma recurrente por un periodo de tiempo, este puede ser finito o infinito. Al jugarse en varios turnos sucesivos los jugadores son conscientes de las jugadas anteriores, por lo que se pueden establecer estrategias de cooperación que influyen en las decisiones de los jugadores.

El análisis de estos juegos tiene una dificultad añadida respecto a los juegos de un solo turno, porque no solo hay que tener en cuenta el pago instantáneo sino el efecto de la decisión sobre la próxima acción de los otros jugadores. Siguiendo el principio de racionalidad, la cooperación entre jugadores se producirá si la utilidad de cooperar es mayor que la de no cooperar, teniendo en cuenta tanto los pagos presentes —del turno en curso—, como los pagos futuros. No obstante, los pagos futuros no se pueden comparar directamente con el pago presente y por lo tanto es necesario valorarlos como el valor o la utilidad actual de un flujo de pagos futuros o *valor descontado de pagos*. Para valorar los pagos futuros de una estrategia podemos utilizar las siguientes fórmulas en función de si el juego es finito o infinito.

$$PDV = \sum_{t=i}^{\infty} \frac{p_t}{(1+r)^t} = \sum_{t=i}^{\infty} p_t \cdot \delta^t \quad y \quad PDV = \sum_{t=i}^{n} \frac{p_t}{(1+r)^t} = \sum_{t=i}^{n} p_t \cdot \delta^t$$

Siendo i el número de turno actual y *n* el número total de turnos para juegos finitos. PDV es el valor presente descontado, p_t el pago para el turno t, r la tasa de descuento y δ el factor de descuento. Como se deduce de la fórmula a mayor tasa de descuento menor influencia tiene el futuro en los pagos presentes, por lo que puede si δ tiende a 0, los pagos futuros pueden ser despreciados y basar las decisiones únicamente en el presente. Sin embargo, un factor de descuento próximo a 1 apunta a una gran importancia de los pagos futuros por lo que nuestra estrategia deberá tener en cuenta la influencia en los siguientes turnos.

6.1. Juegos con horizonte finito

El juego se repite un número finito de veces y los jugadores son conocedores de la duración total del juego. En caso de que la estrategia que ostenta el equilibrio de Nash coincida con la estrategia de cooperación, la opción óptima es obvia y el caso no es digno de estudio, Sin embargo, cuando el equilibrio de Nash no corresponde con la estrategia de cooperación, es lógico preguntarse si es posible mantener la estrategia de cooperación como equilibrio durante las rondas finitas del juego. En este caso, podemos comprobar por inducción hacia atrás, que la estrategia de cooperación no se puede mantener en el tiempo porque en el último turno, al no haber posibilidades de cooperación futura cada jugador optará por la estrategia óptima para él. La misma situación se puede plantear para el turno anterior, a sabiendas de que en el último la estrategia escogida será la óptima individualmente ─no cooperar─, por lo que no tiene sentido tampoco cooperar en esta ocasión y los jugadores optarán también por su estrategia óptima individual, véase, la estrategia escogida será el equilibrio de Nash en caso de que este exista para todos los turnos del juego, por no poder asegurar la cooperación en el siguiente turno en juegos con horizonte finito.

6.2. Juegos con horizonte infinito

En este caso, al repetirse el juego durante infinitos turnos, o desconocerse el número de repeticiones de este la estrategia de inducción retroactiva anterior no permite descartar la cooperación y es posible encontrar un equilibrio en la misma. Para valorar las distintas estrategias se puede utilizar la fórmula del valor presente descontado vista con anterioridad.

En estos juegos es posible adoptar estrategias que incluyen amenazas de castigo o promesas para forzar equilibrios de cooperación.

6.2.1. *"Grim Trigger strategy"* o estrategia de gatillo

Un jugador estará predispuesto a cooperar, comenzará cooperando y seguirá actuando de la misma manera hasta que algún jugador deje de cooperar. A partir de ese momento el jugador dejará de cooperar durante el resto del juego. Es considerada una de las estrategias más estrictas en los juegos repetidos y es válida cuando el jugador que la usa tiene la posibilidad de castigar al otro por su fallo a cooperar.

6.2.2. *“Tit for tat strategy”* o estrategia de ojo por ojo

En esta estrategia el primer jugador también está despuesto a cooperar y comenzará cooperando. Sin embargo, si el otro jugador deja de cooperar el castigo impuesto será temporal y es posible volver a cooperar en turnos futuros. Se puede resumir esta estrategia en que un jugador imita el comportamiento que ha mostrado el otro en el turno anterior. Esta estrategia es más permisiva, pero es menos habitual en los panoramas socioeconómicos por motivos de perdida de confianza.

6.3. *“Folk Theorem”* o teorema de tradición oral

A pesar de englobar varios teoremas sobre equilibrios en juegos repetidos, el principal teorema conocido bajo este nombre hace referencia a la existencia de múltiples equilibrios posibles en juegos repetidos infinitamente. Para que estos equilibrios, en los que el beneficio es superior al obtenido mediante en Equilibrio de Nash simple que hemos explicado para juegos no repetidos, se produzcan es necesario que los jugadores se comporten de forma racional y factible.

Para cumplir con el criterio de racionalidad, las estrategias racionales para ambos jugadores en un juego con repeticiones infinitas serán aquellas cuyas utilidades mejoran la utilidad de las estrategias que componen el equilibrio de Nash $s^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*)$.

Sea $\bar{r}^* = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ el vector de pagos para cada jugador cuando se juegan las estrategias del equilibrio de Nash:

$$v(s^*) \rightarrow \bar{r}^*$$

Sea $\bar{r}$ un vector que represente el pago medio por turno para cada jugador en un juego infinito, de forma que el pago obtenido por cada jugador en cada turno es superior el que obtendría si se jugaran las estrategias del equilibrio de Nash.

$$\bar{r}^*{}_i \leq \bar{r}_i \text{ para todo } i$$

Existe un factor de descuento $\delta \leq 1$ lo suficientemente grande como para que el vector $\bar{r}$ pueda ser adoptado como un equilibrio perfecto para subjuegos de Nash en un juego repetido de horizonte infinito. Aunque δ varía entre juegos, es necesario que sea lo suficientemente grande, es decir próximo a uno, para que los jugadores tengan la intención de cooperar con el fin de asegurar pagos futuros (Friedman, 1971).

7. MODELO DE COURNOT PARA JUEGOS REPETIDOS

El modelo de Cournot pretende estudiar el comportamiento de las empresas cuando estas se comportan como oligopolios, concretamente como duopolios. Supongamos dos empresas que producen bienes homogéneos con costes marginales iguales, en duopolio ambas empresas quieren maximizar los beneficios incrementando sus ventas, pero aumentar la cantidad producida puede derivar en una bajada de precios que chocaría con el objetivo de maximizar los beneficios. La demanda de mercado se puede expresar como:

$$P(Q) = a - b \cdot Q \text{ con } Q = q_1 + q_2 \text{ y acotada } P(Q) \text{ inferiormente en } 0 \quad (7.1)$$

Y la función de costes como:

$$C_i(q_i) = c \cdot q_i \quad (7.2)$$

Para simplificar la situación del problema supondremos que los costes de producción son iguales para ambas empresas $C(q_i) = c \cdot q_i$ para q_1 y q_2 , y despreciaremos los costes fijos, que supondrían otro sumando más. De esta forma las funciones de utilidad que definen los beneficios obtenidos por cada empresa del monopolio son:

$$v_1(q_1, q_2) = [a - b \cdot (q_1 + q_2) - c]\, q_1 \quad (7.3)$$

$$v_2(q_1, q_2) = [a - b \cdot (q_1 + q_2) - c]\, q_2 \quad (7.4)$$

La solución que es equilibrio de Nash cumplirá:

$$\max v_1(q_1, q_2) \quad (7.5)$$

$$\max v_2(q_1, q_2) \quad (7.6)$$

Derivando para cumplir las condiciones de primer y segundo orden obtenemos para ambas condiciones:

$$\frac{\partial v_1}{\partial q_1} = 0; \quad a - 2b \cdot q_1 - b \cdot q_2 - c = 0 \quad (7.7)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial q_2} = 0; \quad a - b \cdot q_1 - 2b \cdot q_2 - c = 0 \quad (7.8)$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial {q_1}^2} = -2b < 0 \text{ ó } \frac{\partial^2 v_2}{\partial {q_2}^2} = -2b < 0 \quad (7.9)$$

Utilizando la nomenclatura expuesta anteriormente $({q_1}^*, {q_2}^*)$ será un equilibrio de Nash si es solución del sistema:

$$\begin{cases} a - 2b \cdot q_1 - b \cdot q_2 - c = 0 \\ a - b \cdot q_1 - 2b \cdot q_2 - c = 0 \end{cases} \quad (7.10)$$

Resolviendo para $q_1 = {q_1}^* \; y \; q_2 = {q_2}^*$ tenemos:

$${q_1}^* = {q_2}^* = \frac{a - c}{3b} \quad (7.11)$$

De forma que la demanda, producción y los beneficios se pueden expresar como:

$$Q^* = \frac{2a - 2c}{3b}; \quad P^* = \frac{a + 2c}{3} \; y \; {v_1}^* = {v_2}^* = \frac{(a - c)^2}{9b} \quad (7.12)$$

Los resultados anteriores han de entenderse en el marco de que ninguna de las empresas puede obtener un beneficio inferior a cero al haber eliminado de las ecuaciones los costes fijos. También se observa que la cantidad vendida por las dos empresas es la misma.

Para una situación de monopolio imponemos la misma condición de maximizar el beneficio:

$$\max v(Q) = (a - bQ - c)\, Q \quad (7.13)$$

$$\frac{dv(Q)}{dQ} = a - 2bQ - c = 0; \; \frac{a - c}{2b} = Q \quad (7.14)$$

$$\frac{d^2 v(Q)}{dQ} = -2b < 0 \quad (7.15)$$

Los valores de demanda producción y beneficios en este caso, para una empresa, son:

$$Q^m = \frac{a - c}{2b}; \quad P^m = \frac{a + c}{2} \; y \; v^m = \frac{(a - c)^2}{4b} \quad (7.16)$$

Los beneficios obtenidos por el monopolio marcan la frontera, es decir el beneficio máximo que puede ser obtenido por ambas empresas si no estuvieran compitiendo, de forma que $Q \leq Q^m$.

Sin embargo, al transformar el problema de Cournot en un juego repetido es posible establecer otros equilibrios que mejoran los beneficios para ambas empresas. Las empresas se estarían repartiendo la cantidad de monopolio en este supuesto.

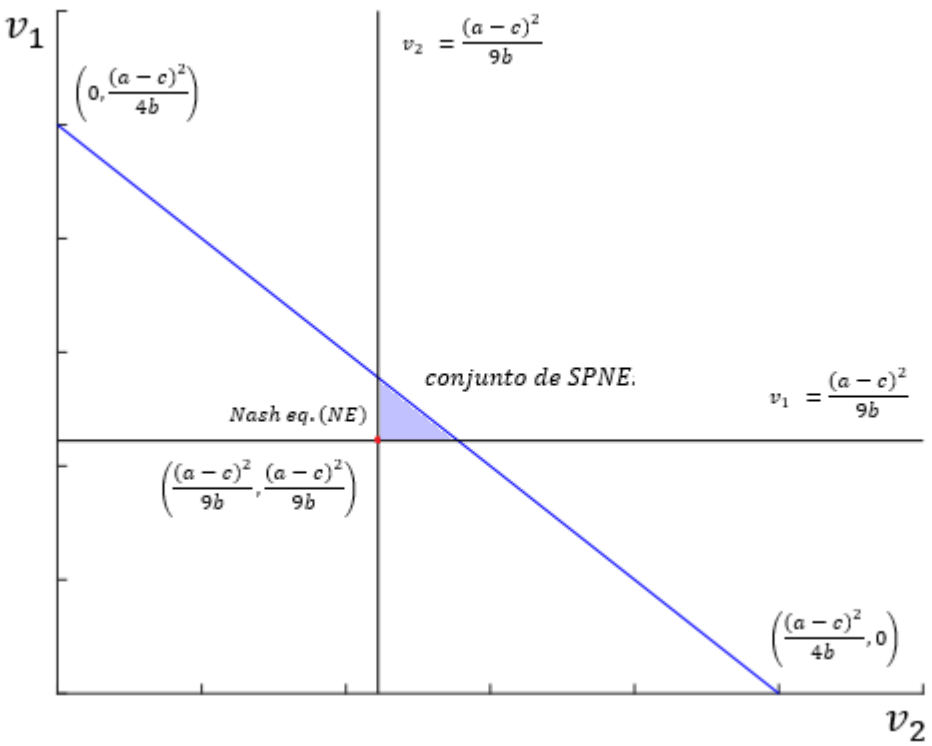


Figura 7.1. Representación de las posibles utilidades para cada uno de los duopolistas.

Si observamos la figura 7.1 se encuentra representada en azul la línea que conecta los pagos para cada una de las dos empresas actuando como monopolistas, el triángulo formado por dicha línea y los ejes abarca todos los pagos posibles para el problema de Cournot. El triángulo señalado en azul representa el conjunto de los pagos que mejoran los pagos del equilibrio de Nash y por tanto serían posibles mantener mediante cooperación en un juego repetido de horizonte infinito, las estrategias que conducen a estos pagos se consideran equilibrios perfectos de Nash para subjuegos.

Es necesario determinar los valores del factor de descuento mínimo para los que se pueden mantener los SPNEs. Vamos a calcular δ asumiendo que los duopolistas adoptan una estrategia de gatillo. El primer duopolista producirá la cantidad equivalente a la mitad de la cantidad óptima producida por el monopolio.

Siempre y cuando el otro duopolista mantenga la misma producción en el turno anterior, este repetirá la misma estrategia en el turno siguiente, por lo que para todos los turnos ocurriría:

$$q_1 = q_2 = \frac{a-c}{4b} \qquad (7.17)$$

La utilidad correspondiente a este perfil de estrategias corresponde en el gráfico con el punto medio del segmento que une los cortes de la línea azul con los ejes y como se observa tiene una utilidad mayor que el NE.

Sin embargo, si en el turno anterior el otro jugador a producido cualquier cantidad superior a la anterior —descartamos la producción de una posibilidad menor, ya que no sería racional—, la cantidad producida será la correspondiente al equilibrio de Nash —no sería racional producir menos cantidad que la del NE—.

$$q = \frac{a-c}{3b} \qquad (7.18)$$

Para que la amenaza de cooperación sea creíble y obligue al otro jugador a cooperar, el castigo por no cooperar tiene que ser suficientemente alto, es decir, lo que puede ganar el otro jugador manteniendo la alianza tiene que ser más útil que romperla. Para ello el factor de descuento tiene que ser suficientemente alto, porque si fuera próximo a cero el otro jugador no tendría intención de cooperar pues los pagos futuros no tendrían valor.

Si el jugador i coopera la utilidad para el turno actual sería la mitad de la que obtendría el monopolio, la del monopolio repartida entre los dos duopolistas, que para turnos infinitos corresponde con:

$$\frac{(a-c)^2}{8b} + \delta\frac{(a-c)^2}{8b} + \delta^2\frac{(a-c)^2}{8b} + \cdots = \frac{(a-c)^2}{8b\,(1-\delta)} \qquad (7.19)$$

En caso de que tras producir el primer jugador $q_1 = \frac{a-c}{4b}$ el otro jugador opte por no cooperar y producir en ese turno la cantidad que más beneficios le reporta, que sería $q_2 = \frac{3(a-c)}{8b}$, siendo los beneficios $v_2 = \frac{9(a-c)^2}{64b}$, pero en los turnos siguiente por no haber cooperado el beneficio volverá a ser el del equilibrio de Nash ${v_2}^* = \frac{(a-c)^2}{9b}$. Para infinitas repeticiones el beneficio será:

$$\frac{9(a-c)^2}{64b} + \delta\frac{(a-c)^2}{9b} + \delta^2\frac{(a-c)^2}{9b} + \cdots = \frac{9(a-c)^2}{64b} + \frac{\delta(a-c)^2}{9b(1-\delta)} \quad (7.20)$$

Según lo anterior, para que se mantenga la cooperación se tiene que respetar:

$$\frac{(a-c)^2}{8b\,(1-\delta)} > \frac{9(a-c)^2}{64b} + \frac{\delta(a-c)^2}{9b(1-\delta)} \quad (7.21)$$

Despejando y simplificando obtenemos:

$$\delta \geq \frac{9(a-c)^2}{17b} \quad (7.22)$$

Esto demuestra que al aumentar los costes unitarios de producción c, disminuirá el valor crítico del factor de descuento y es más fácil mantener la cooperación en el horizonte infinito del juego. Sin embargo, al aumentar el término a, que está directamente relacionado con la demanda de mercado aumentará también el valor crítico del factor de descuento, por lo que a mayor demanda en un mercado más difícil es mantener el SPNE. El factor b, que en muchos modelos se asume igual a 1, está inversamente relacionado con la demanda del mercado y el beneficio para las empresas y se comporta igual que c.

De esta forma hemos calculado cual debe de ser el valor del factor de descuento par un punto que es considerado SPNE, pero para los otros puntos del triángulo azul de la figura 2, el valor del factor de descuento será distinto. Es posible mantener otros equilibrios superiores a NE siempre y cuando el factor de descuento sea lo suficientemente próximo a uno. (Cowell, 2018 cap. 10)

7.1. Justificación de la Cooperación. Ejemplo de variante del dilema del prisionero.

A continuación, veremos un ejemplo que ilustra la coopración. En este ejemplo el número de empresas que pueden comerciar cierto producto está limitado por la propiedad intelectual, concretamente por patentes. Sin embargo, las empresas pueden licenciar la comercialización de algunos de los productos a otras empresas y recibir a cambio royalties, veamos con un ejemplo discreto las posibles decisiones que pueden tomar las empresas.

Cuando la empresa A es la única que ha desarrollado y patentado la tecnología y tiene la capacidad de producirla y comercializarla sin tener que recurrir a licenciar la tecnología, esta se comportaría como un monopolio y obtendría unos beneficios $v_m = 150M€$. Otra opción que tiene la compañía A es licenciar la tecnología a otra compañía B, pero en este caso aumentaría la competencia, lo que equivale a aumentar el sumando $-b \cdot (q_1 + q_2)$ en las ecuaciones (7.3) y (7.4) y reducir los beneficios de la industria $v_A + v_B$. En este caso, $v_A + v_B = 120M€$, podemos suponer el reparto de la cuota de mercado equitativo $v_A = v_B = 60M€$, independientemente de como esté distribuido el mercado, esta situación no beneficia a la empresa A, pues la empresa B nunca estará dispuesta a pagar por la licencia más de los beneficios que obtiene y por lo tanto la empresa A nunca obtendrá más de 120M€ incluyendo los royalties.

Si otra compañía C desarrolla otra tecnología protegida que es un sustituto perfecto de la anterior y puede explotarla por sí misma, aunque A no licencie su tecnología volveremos a encontrarnos con la misma situación anterior en la que se rompe el monopolio y los beneficios totales de la industria serán $v_A + v_C = 120M€$, que suponiendo una competencia perfecta se distribuirían $v_A = v_C = 60M€$. En esta nueva situación con dos tecnologías que compiten en e mismo mercado, si A decide licenciar a B, volverá a aumentar la competencia y por la misma razón que antes disminuirán los beneficios de la industria, digamos que se reducen esta vez en un 10%, y los beneficios están repartidos de forma homogénea entre las tres empresas. $v_A = v_B = v_C = 36M€$, pero la empresa A recibirá además el pago por la licencia de B, que puede variar en función del acuerdo firmado, pero supondremos que equivale al 75% de los beneficios de B, a estos $27M€$ que ingresa A por licencias habría que descontar los gastos de negociación de la licencia y otros gastos derivados del acuerdo que fijaremos en 1M€. Por lo que licenciando en estas circunstancias A obtendría 61M€, cantidad ligeramente superior a los que obtendría de no haber licencia. Hay que darse cuenta de que A no puede rebajar más los costes de la licencia a B, porque sino dejaría de ser rentable para la empresa licenciar la tecnología.

En caso de que la tecnología que ha desarrollado C no fuera una sustituta perfecta de la desarrollada por A, la distribución del mercado no sería simétrica y la competencia entre A y B sería superior a la de cualquiera de estas con C, por lo que probablemente los beneficios de la industria estarían inclinados hacia C y ya no sería rentable para A licenciar la tecnología.

Supongamos ahora que la empresa C también quiere licenciar su tecnología a D, lo que conllevaría un aumento de la competencia y de nuevo una disminución de los beneficios de la industria, digamos que de un 10 % nuevamente, si el reparto de los beneficios es homogéneo $v_A = v_B = v_C = v_D = 24{,}3M€$. Si C llega al mismo acuerdo de licencia con D, al que A llegó con B ─quede que C solo puede ofrecer un acuerdo mejor o igual a D, porque sino no sería racional para D aceptar dicho acuerdo basado en razones meramente económicas─, D pagaría a C un 75% de lo que habría que descontar el millón de los gastos de gestión, en este caso también variaría los royalties que B paga a A pues han disminuido sus beneficios. En este caso tanto A como C obtendrían 41,5M€, mientras que B y D seguirían obteniendo beneficio, ya que de otra forma no participarían de las licencias de explotación.

La matriz de pagos para la situación en la que A y C tienen patentes para tecnologías perfectamente reemplazables queda plateada de la siguiente forma.

C \ A	Licenciar	NO licenciar
Licenciar	41,5M€*, 41,5M€*	61M€*, 36M€
NO licenciar	36M€, 61M€*	60M€, 60M€

Excluimos a las empresas B y D de la matriz de pagos ya que sus decisiones basadas meramente en criterios económicos son obvias, ya que no participar en los convenios no les reporta beneficio alguno mientras que cerrar una licencia les acarrea un 25% de los beneficios obtenidos.

Como se observa en la matriz el equilibrio de Nash se produce cuando ambas empresas escogen la opción de licenciar la tecnología. Sin embargo, este no es un óptimo de Pareto, para este juego el óptimo de Pareto es el perfil de estrategias que considera No licenciar para ambas empresas.

Este juego también podría plantearse como un juego repetido en el que los convenios y licencias se negocian anualmente. Teniendo en cuenta que las patentes tienen una duración finita, de 20 años este juego pertenecería al grupo de los juegos repetidos con horizonte finito, por lo que mediante inducción retroactiva llegaríamos a la conclusión de que a las empresas no las interesa cooperar y mantendrían la estrategia Licenciar-Licenciar. No obstante, aunque la duración de las patentes sea finita, dado que las tecnologías son dinámicas en cualquier momento podría aparecer una tecnología sustituta a las anteriores y habría que plantear un nuevo juego, por lo que este juego si que puede considerarse de horizonte infinito ya que los jugadores no saben con exactitud cuando terminará.

Vamos a estimar el valor del factor de descuento necesario para que se produzca cooperación entre las dos empresas propietarias de la propiedad intelectual, asumiendo que el jugador A adopta una estrategia de gatillo y C es consciente de ello.

Si C coopera el beneficio que obtendrá será:

$$60M + \delta 60M + \delta^2 60M + \cdots = \frac{60M}{1-\delta} \quad (7.1)$$

Si el jugador C decide no cooperar:

$$61M + \delta 41{,}5M + \delta^2 41{,}5M + \cdots = 61M + \frac{\delta\, 41{,}5M}{1-\delta}$$

Para que a C le interese cooperar se tiene que cumplir:

$$\frac{60M}{1-\delta} > 61M + \frac{\delta\, 41{,}5M}{1-\delta}$$

$$\delta > 0{,}051$$

En este caso es bastante factible para el jugador C cooperar, ya que el castigo que puede imponer el jugador A es muy creíble y el beneficio de no cooperar en la primera ronda comparado con cooperar es muy bajo. Además, siendo la utilidad en nuestro caso el dinero, es muy difícil que se devalúe un 95% cada turno, para incitar a no colaborar.

No obstante, conforme avanzan los años y se acerca la expiración de la patente o aumenta la probabilidad de desarrollar nuevas tecnologías análogas, la probabilidad de cooperar disminuirá ya que en este juego tenemos un equilibrio entre un juego de horizonte finito y uno infinito con otros parámetros distintos a los económicos.

8. MODELO DE POLÍTICA MONETARIA

Para terminar este manuscrito, vamos a abordar un ejemplo, también teórico, aplicado a la política monetaria. En este caso vamos a presentar una aplicación directa de la teoría de Juegos en la Macroeconomía, concretamente vamos a utilizar una variación del modelo de Barro & Gordon, 1983 adaptado a juegos repetidos por Dixit, 2000.

Este modelo intenta valorar el interés de los países, divididos en dos bloques ─aquellos que desean aumentar la inflación y aquellos que no─ por aumentar la inflación y su influencia en la política monetaria común.

Sea π la inflación fijada por el Banco Central Europeo (BCE), y ϑ desviaciones estocásticas de la paridad del poder adquisitivo, los índices de inflación para cada país i son:

$$\pi_i = \pi - \vartheta_i \quad (8.1)$$

Y los niveles de bienestar para un país i serán:

$$U_i(\pi_i) = b_i(\pi_i - \pi_i^e) - \frac{1}{2}(\pi_i - \pi_i^*)^2 \quad (8.2)$$

En la ecuación anterior π_i^e representa la inflación esperada mientras que π_i^* representa la inflación óptima para el país i. Como es obvio, el primer término representa la inflación inesperada y el factor b_i incluye las preferencias de los países respecto a la inflación. Las desviaciones estocásticas según el modelo de Barro y Gordon son independientes unas de otras y están idénticamente distribuidas en el tiempo, aunque pueden estar correlacionadas entre países.

El objetivo del BCE es para un modelo con dos bloques de países:

$$U\,(\pi) = \omega_1 U_1 + \omega_2 U_2 \; con \; \omega_1 > 0, \omega_2 > 0 \; y \; \omega_1 + \omega_2 = 1 \quad (8.3)$$

ω_i podría definirse como el peso político de los países. No obstante, esta función podría modificarse ligeramente añadiendo mayor peso a la inflación en caso de que el BCE quiera mantenerla baja.

En el tratado de Maastrich se estipula que el BCE debe de guiarse por el promedio de las tasas de inflación de los países miembros, por lo que combinando (8.2) y (8.3), para n países obtenemos:

$$U\ (\pi) = \sum_{i}^{n} (\pi_i - \pi_i^e)\, b_i \omega_i - \frac{1}{2} \sum_{i}^{n} \omega_i (\pi_i - \pi_i^*)^2 \qquad (8.4)$$

Que para dos bloques se resume como:

$$U(\pi) = (\pi_1 - \pi_1^e) b_1 \omega_1 + (\pi_2 - \pi_2^e) b_2 \omega_2 - \frac{1}{2} \omega_1 \left(\pi_1 \ - \pi_1^*\right)^2$$
$$- \frac{1}{2} \omega_2 \left(\pi_2 \ - \pi_2^*\right)^2 \qquad (8.4)$$

El juego se desarrolla de la siguiente manera, primero el sector privado realiza las previsiones de la inflación suponiendo π_i^e conocido, en segundo lugar, se producen las desviaciones estocásticas y por último el BCE fija la inflación.

La elección óptima para el BCE cumplirá para nuestro modelo de dos bloques:

$$\frac{\partial U(\pi)}{\partial \pi} = \omega_1 [b_1 - (\pi - \vartheta_1 - \pi_1^*)] + \omega_2 [b_2 - (\pi - \vartheta_2 - \pi_2^*)] = 0 \quad (8.5)$$

Despejando π, que es la inflación fijada por el BCE obtenemos, cabe recordar las condiciones 8.3:

$$\pi = \omega_1 (b_1 + \vartheta_1 + \pi_1^*) + \omega_2 (b_2 + \vartheta_2 + \pi_2^*) = \omega_1 h_1 + \omega_2 h_2 \quad (8.6)$$

O de forma genérica para n países:

$$\pi = \sum_{i}^{n} (b_i + \vartheta_i + \pi_i^*)\, \omega_i = \sum_{i}^{n} \omega_i h_i \quad (9.7)$$

Para maximizar los niveles de bienestar de uno de los países, digamos del país uno, basta con igualar el peso político de ese país a uno, $\omega_1 = 1$, de esa forma el resto de los pesos serían cero y $\pi = h_1 = b_1 + \vartheta_1 + \pi_1^*$. Sin embargo, la estrategia económica más apropiada basada en la racionalidad no sería esa, sino que tendría que basarse en los h de todos los países ponderados según el peso de cada uno.

Sustituyendo en 9.1 la inflación en el país 1, retomando el modelo de dos bloques, será:

$$\pi_1 = \omega_1 h_1 + \omega_2 h_2 - \vartheta_1$$

Dado que este modelo tiene en cuenta distribuciones estocásticas de eventos y funciones de esperanza moduladas también por funciones de probabilidad, el análisis de los resultados se complica notablemente y se hace imposible en este trabajo presentarlos por la dificultad matemática que entraña. Con este ejemplo únicamente se quería presentar una aplicación real de la teoría de juegos, prescindiendo del clásico problema del prisionero ampliamente utilizado.

9. CONCLUSIONES

En los últimos 30 años, la teoría de juegos ha ido ganando cada vez más peso en la economía. Para darse cuenta de este detalle no hace falta más que observar los Premios Nobel de economía. Desde el primero, concedido en 1994 a Jhon F. Nash, Reinhard Selten y Jhon Harsanyi, se han cosechado tres premios más en esta categoría.

Como hemos visto a lo largo del trabajo, los juegos se clasifican en cooperativos o no cooperativos y, dentro de estos últimos, en dinámicos o estáticos y también diferenciando si la información es completa o no.

Los juegos estáticos se resuelven mediante la forma normal. Esta forma engloba diversos métodos resolutivos, como son los argumentos de dominación, estrategias prudentes y por supuesto el Equilibrio de Nash. El equilibrio de Nash es el más ampliamente utilizado y supone una de las bases de la teoría de juegos.

Los modelos dinámicos utilizan de forma general la forma extensiva para su representación. También utilizan la forma extensiva los juegos repetidos, aquellos en los que se centra el trabajo y que se caracterizan porque se juegan una y otra vez por un periodo de tiempo.

Es en estos juegos donde solo por el hecho de la repetición se introducen una nueva serie de incentivos que puede provocar la cooperación entre jugadores. Para que se produzca la cooperación se tiene que dar una serie de circunstancias. Lo primero es que la oferta de cooperación o la amenaza de dejar de cooperar tiene que ser creíble. Para comprobar si es creíble, basta con analizar si obtenemos un beneficio mayor con el pago que conseguimos al romper el pacto en un momento dado, que será muy superior al normal, o los pagos secuenciales frutos de respetar el acuerdo.

Es bastante visual que gran parte de esta decisión depende del factor de desuento de los pagos futuros. Si este factor es próximo a cero los pagos futuros serán despreciables y no interesará cooperar.

También es muy importante la duración del juego, si esta es finita y conocida, como desarrollamos en el trabajo no existirá cooperación salvo que esta coincida con el equilibrio de Nash que será la solución del juego.

En el caso de duración ilimitada o desconocida si que pueden aparecer cooperación, que estará también condicionadas por las existencias de ciertas estrategias de castigo como puede ser la del gatillo o la del ojo por ojo.

La repetición también se puede aplicar al oligopolio de Cournot, arrojando como resultado la cooperación (para un factor descuento no demasiado bajo) y fijando los precios, cercanos a los del monopolio, maximizando los beneficios de las empresas.

Con todo lo anterior podemos afirmar que la teoría de juegos tiene una gran importancia en la economía con una infinidad de situaciones donde se puede utilizar para comprender mejor ciertos fenómenos. También y para concluir quiero hacer hincapié en la importancia de la repetición por un periodo de tiempo infinito o desconocido, la cual es condición indispensable en la aparición de formas de cooperación.

10. BIBLIOGRAFÍA

Barro, R. J., & Gordon, D. B. (1983). "Rules, discretion and reputation in a model of monetary policy." *Journal of Monetary Economics*, *12*(1), 101–121.

Cowell, F. (2018). *Microeconomics: Principles and Analysis*. Oxford University Press.

Dixit, A. (2000). A Repeated Game Model of Monetary Union. *The Economic Journal*, *110*(466), 759–780. JSTOR.

Friedman, J. W. (1971). A Non-cooperative Equilibrium for Supergames. *The Review of Economic Studies*, *38*(1), 1–12. https://doi.org/10.2307/2296617

McLean, R. P. (2002). Chapter 55 Values of non-transferable utility games. In *Handbook of Game Theory with Economic Applications* (Vol. 3, pp. 2077–2120). Elsevier. https://doi.org/10.1016/S1574-0005(02)03018-7

Perez, J., Pastor, J. L. J., & Cerdá, E. (2004). *Teoría de juegos*. Ibergarceta Publicaciones S.L.

Owen, G. (1975). Multilinear extensions and the banzhaf value. *Naval Research Logistics Quarterly*, (pp.741–750).

Owen, G. (1978). Characterization of the BanzhafColeman Index. *Journal of Applied Mathematics*. /paper/Characterization-of-the-BanzhafColeman-Index-Owen/ab574ed3677aa9861992ab0c813c1a143426388e

Theory of Games and Economic Behavior. (1944). https://press.princeton.edu/books/paperback/9780691130613/theory-of-games-and-economic-behavior

v. Neumann, J. (1928). "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele." *Mathematische Annalen*, *100*(1), 295–320.