



---

**Universidad de Valladolid**

**Facultad de Ciencias Económicas y  
Empresariales**

**Trabajo de Fin de Grado  
Grado en Economía**

**Teoría de subastas**

Presentado por:

***Mario Martín Vallecillo***

*Valladolid, 20 de septiembre de 2021*

## **RESUMEN**

Desde la antigüedad las subastas se han utilizado para vender distintas cosas: desde los babilonios subastando esposas, los antiguos griegos con esclavos o los romanos con botines de guerra. Todo ello ha evolucionado hasta la actualidad en los que las subastas han cobrado tanta importancia reflejándose en varios de los mercados más importantes del mundo que están organizados como subastas.

La Teoría de Juegos es una rama de las matemáticas y la economía que se encarga de analizar unas situaciones llamadas juegos, en las que dos o más jugadores deben decidir qué decisión tomar en función de las decisiones que puedan tomar los otros jugadores. Esta rama comenzó a tomar una gran importancia en la década de 1990, con la consecución en 1994 del Premio Nobel de Economía por parte de John Forbes Nash, John Harsanyi y Reinhard Selten. En los últimos años la Teoría de subastas ha experimentado un importante desarrollo y ha cobrado cierta importancia en los diseños de subastas. Después de describir los principales tipos de subastas se hace hincapié en el Modelo de Referencia y otros enfoques diferentes a la corriente principal para desarrollar la Teoría de Subastas.

**PALABRAS CLAVES:** Subasta, Teoría de Juegos, Teoría de Subastas.

## **ABSTRAC**

Since ancient times, auctions have been used to sell different things: from the Babylonians auctioning wives, to the ancient Greeks auctioning slaves, to the Romans auctioning spoils of war. All this has evolved to the present day where auctions have become so important that they are reflected in several of the world's most important markets that are organised as auctions.

Game theory is a branch of mathematics and economics that analyses situations called games, in which two or more players must decide what decision to make depending on the decisions that the other players may make. This branch began to take on great importance in the 1990s, with the 1994 Nobel Prize in Economics awarded to John Forbes Nash, John Harsanyi and Reinhard Selten.

In recent years, Auction Theory has undergone significant development and has gained some importance in auction design. After describing the main types of auctions, emphasis is placed on the Reference Model and other non-mainstream approaches to developing Auction Theory.

**KEYWORDS:** Auction, Game Theory, Auction Theory

**Códigos JEL:** C72, D44, D82

## INDICE

1. Introducción.....	4
2. Teoría de juegos.....	4
2.1. Breve historia de la Teoría de Juegos.....	5
2.2. Tipos de juegos.....	7
2.3. Juegos Bayesianos.....	10
2.3.1. Especificación del juego.....	11
2.3.2. Equilibrio Bayesiano de Nash.....	12
3. Subastas.....	12
3.1. Tipos de subastas.....	14
3.1.1. Subastas de un solo bien.....	14
3.1.2. Subastas de múltiples bienes.....	16
4. Teoría de subastas.....	19
4.1. Modelo de referencia.....	20
4.1.1. Principio de equivalencia de ingresos.....	25
4.2. Enfoques diferentes a la corriente principal.....	26
4.2.1. Modelos con competidores no estratégicos.....	26
4.2.2. Subasta con información completa.....	28
5. Conclusiones.....	29
6. Referencias bibliográficas.....	29

## **1. INTRODUCCIÓN**

Este trabajo de fin de grado va a constar de tres partes: Una primera parte que tratará de la Teoría de juegos donde se dará una definición de la misma, se comentará sus orígenes y hablaremos de sus principales aportadores a esta rama como por ejemplo John Forbes Nash y se analizará los principales tipos de juegos (estáticos, con información completa...) mediante un ejemplo del juego "El dilema del prisionero". También hablaremos más detenidamente sobre los juegos bayesianos, especificación del mismo y explicaremos el equilibrio bayesiano de Nash.

Una segunda parte donde hablaremos de las subastas, su definición y el origen de las mismas y los principales tipos que existe según los bienes que se subasten, más concretamente, subastas de un bien y subastas de múltiples bienes.

La tercera parte trata sobre la Teoría de Subastas con el modelo de referencia como principal atractivo del trabajo y otros enfoques diferentes a la corriente principal como los modelos con competidores no estratégicos o subastas con información incompleta.

## **2. TEORÍA DE JUEGOS**

La teoría de juegos es una rama de las matemáticas y de la economía en la que se analizan situaciones de conflicto entre distintos agentes, más concretamente, en situaciones (denominadas juegos) en las que participan dos o más agentes (o jugadores) y donde deben elegir qué decisión tomar en función de la decisión que tomen los otros agentes teniendo en cuenta que sus decisiones afectarán tanto a sus resultados como a los resultados de los otros agentes y viceversa.

La Teoría de Juegos es una disciplina muy importante y por ello ha sido la base de muchos premios Nobel de economía como el que obtuvieron John Forbes Nash, John Harsanyi y Reinhard Selten en 1994, por sus análisis del equilibrio en los juegos no cooperativos; el que obtuvieron Tomas Schelling y Robert Aumann en 2005, por ampliar la comprensión de conflicto y cooperación mediante análisis basados en la Teoría de Juegos; el que obtuvieron Lloyd Stowell Shapley y Alvin Elliot Roth en 2012, por sus aportaciones a la "teoría de

asignaciones estables y la práctica del diseño del mercado” que se encuentran dentro de la Teoría de Juegos.

En el año 2020 el Comité Nobel otorgó el premio a los economistas estadounidenses Paul R. Milgrom y Robert B. Wilson gracias a sus mejoras y teorías sobre las subastas, invenciones de nuevos formatos de subastas y la fijación de precios.

Gracias a sus estudios, han beneficiado tanto a compradores como a vendedores y contribuyentes de todo el mundo. Su estudio intenta comprender las reglas de licitación y precios finales, el formato de subasta.

Indagando más en las aportaciones de cada uno de ellos, Robert Wilson demostró por qué quienes realizan apuestas tienden a apostar por debajo de su propia valoración del valor máximo del bien subastado. Esto se debe a la llamada “maldición del ganador” (pagar demasiado y perder).

En cuanto a Paul Milgrom, desarrolló una teoría más generalizada de las apuestas que no solo permite que varíen los valores comunes entre los diversos competidores, sino que también los valores privados.

Así, Wilson y Milgrom además de aclarar cómo funcionan las subastas y por qué los postores se comportan de cierta manera, también han inventado gracias a sus descubrimientos teóricos formatos de subastas completamente nuevos para la venta de bienes y servicios.

Para entender mejor que es un juego, se definen básicamente los elementos por los que está compuesto y para ello seguiremos la terminología básica de Jimeno et al. (2004); los elementos son los siguientes:

- **Jugadores:** Los participantes en el juego, los que toman las decisiones con el fin de maximizar su utilidad. Deben de ser como mínimo dos jugadores.
- **Información:** El conocimiento que tienen los jugadores de las variables del juego.

- **Acciones:** Los posibles movimientos de cada jugador en el momento en que le toca jugar. Son las decisiones entre las que puede optar cada jugador.
- **Estrategias:** Es el conjunto de acciones y determina una acción en cada uno de los momentos del juego en el que le toca jugar.
- **Perfil de estrategias:** Es un conjunto de estrategias correspondiente a cada uno de los jugadores.
- **Resultados:** Las distintas formas en que puede concluir o finalizar cada juego dependiendo de las acciones que haya tomado cada jugador.
- **Pagos:** Es la ganancia o pérdida que el jugador obtiene al acabar el juego, cada resultado lleva unos pagos asociados para cada uno de los jugadores. También representan la utilidad que cada jugador atribuye a cada resultado posible del juego.

## 2.1. Breve historia de la Teoría de Juegos

Ya desde el siglo XVII se empezó a originar las bases de lo que es ahora la teoría de juegos, de la mano de los científicos Huygens (1629-1695) y Leibniz (1646-1716) ya que propusieron la creación de una disciplina que utilizara el método científico para estudiar las interacciones y los conflictos humanos. Esta disciplina nació en el siglo XVIII y se desarrolló en el siglo XX.

No obstante, no es hasta la década de 1880 cuando aparecen los orígenes de la Teoría de Juegos con los trabajos de Cournot en 1838 y Edgeworth en 1881 (considerados como los padres de la Teoría de Juegos) pero el gran desarrollo en el siglo XX tuvo lugar en la década de los años veinte. Los autores cuyas obras fueron más relevantes fueron Zermelo (1913), Borel (1921), John Von Neumann (1928) y John Forbes Nash (1950)

La gran contribución del trabajo de Von Neumann en 1928 es que proporcionaba respuestas a las cuestiones que había planteado Borel. Las respuestas las obtuvo demostrando la solución del teorema del minimax, provocando la aparición de nuevas áreas y puso de manifiesto nuevas conexiones dentro de las Matemáticas.

En 1944 John Von Neumann y Oskar Morgenstern publicaron su obra: "Theory of Games and Economic Behaviour" ("Teoría de Juegos y Comportamiento Económico"). Es considerado como el libro base de la Teoría de Juegos, ya que tras esta publicación la Teoría de juegos se inicia como disciplina científica. Esta gran obra es la mayor contribución a esta rama de las Matemáticas aplicadas a la Economía y marca la consolidación de la Teoría de Juegos.

En la década siguiente se desarrollaron nuevos avances de la Teoría de Juegos como el dilema del prisionero o el concepto de estrategia óptima para juegos con múltiples jugadores de John Forbes Nash cuando el óptimo no se puede establecer previamente (equilibrio de Nash). Después de J. Von Neuman, Nash es posiblemente el que realizó contribuciones más relevantes a la teoría, sobre todo con el llamado equilibrio de Nash. Este autor, contaba con grandes capacidades intelectuales, no obstante, padecía una enfermedad mental (sufrió de esquizofrenia). En 1994, Nash recibió el Premio Nobel de Economía por sus contribuciones en la Teoría de Juegos con una tesis basada en la consecución por parte de dos o más contrincantes de idénticos resultados sin necesidad de cooperar entre sí. En el año 2001, su historia fue llevada al cine, con la película "A beautiful mind" ("Una mente maravillosa"). (National Geographic, Deulofeu, 2016, p. 122).

Visto todo lo anterior, podemos decir que John Von Neumann fue la figura que sentó las bases de la Teoría de Juegos, y que John F. Nash la desarrolló hasta tal punto de que sus trabajos se han podido aplicar a otras ciencias como Política, Psicología o Economía entre otras.

## **2.2. Tipos de juegos**

Los juegos se clasifican en muchas categorías que determinan qué métodos particulares se pueden aplicar para resolverlos (y, de hecho, también cómo se define "resolución" en una categoría particular). En general, se pueden considerar estas clases de juegos.

- Juegos cooperativos o no cooperativos

Los juegos cooperativos (también conocidos como juegos coalicionales) son los juegos en los que se pueden formar coaliciones en donde los jugadores cuentan con “mecanismos” que les permiten realizar acuerdos condicionales.

En este tipo de juegos la clave está en ponerse de acuerdo con los demás jugadores para lograr una utilidad superior a la que habrían conseguido de no haberlo hecho. Para ello, los jugadores elaboran estrategias conjuntas, es decir, se ayudan entre ellos. Los grupos que forman los jugadores entre ellos se denominan coaliciones.

En cuanto a los juegos no cooperativos, la dinámica es totalmente distinta ya que jugadores toman decisiones centradas en su beneficio personal, (lo cual no impide que en algunos casos dicha toma de decisiones pueda favorecerlos a todos, como es lo que se busca en los juegos cooperativos) sin cooperar con el resto de jugadores. Toman las decisiones sin pactar con terceros, actúan en cuenta propia.

- Juegos estáticos o dinámicos

Los juegos estáticos son aquellos en los que los jugadores realizan sus movimientos simultáneamente, es decir, la toma de decisiones se ejecuta de una sola vez por lo que los jugadores al actuar en una sola jugada no saben cómo han actuado el resto de jugadores.

En cambio, en los juegos dinámicos las decisiones de cada jugador se toman en distintos momentos de tiempo, se produce de manera secuencial por lo que hay varias jugadas. En estos tipos de juegos cabe la posibilidad de que cuando un jugador realice su acción, este quizás sepa las acciones que han podido tomar los jugadores que actuaron antes, por lo que la estrategia que llevaría a cabo el jugador que actuará en este momento tendría en cuenta las acciones ya ejecutadas por el resto de jugadores.

- Juegos con información completa

Se dice que hay información completa cuando cada jugador conoce la función de utilidad de los otros jugadores y las reglas del juego (no son el tipo de juego más habitual). En los juegos con información completa los jugadores conocen exactamente todas las estrategias del resto de jugadores. No hay que confundir información completa con información perfecta ya que esta última se da cuando los jugadores poseen información acerca de los jugadores, es decir, en cada momento se conoce perfectamente el desarrollo del juego.

- Juegos con información incompleta

En los juegos con información incompleta, los jugadores desconocen las estrategias del resto de jugadores y/o sus utilidades. Cada jugador posee información privada sobre las preferencias cuando escogen sus estrategias.

Ahora vamos a ver los diferentes tipos de juegos mencionados anteriormente mediante el dilema del prisionero con las siguientes posibles situaciones:

JUG.2 JUG.1	Confesar	Callar
Confesar	-8, -8	0, -10
Callar	-10, 0	-1, -1

*Tabla 2.1: Ejemplo del dilema del prisionero*

“El dilema del prisionero” fue creado por Merrill M.Ford y Melvin Dresher y finalmente fue formalizado por Albert W.Tucker. El dilema consiste en lo siguiente:

Dos delincuentes habituales son apresados cuando acaban de cometer un delito grave. No hay prueba clara contra ellos, pero si indicios fuertes de dicho delito y además hay pruebas de un delito menor. Son interrogados simultáneamente en habitaciones separadas. Ambos saben que si los dos se callan serán absueltos del delito principal por falta de pruebas, pero condenados por el delito menor (1 año de cárcel); que, si ambos confiesan, serán condenados por el principal, pero se les rebajará un poco la pena por confesar (8 años), y finalmente, que, si solo uno confiesa, él se librará de las penas y al otro se le impondrá una pena mayor (10 años).

En principio, este juego es estático, ya que los dos presos deciden a la vez, pero, en el caso en el que tuvieran que decidir primero uno y luego otro, sería de tipo dinámico. Si una vez que decide uno, se le comunica al otro preso la decisión que ha tomado el otro preso, sería un juego de información perfecta y completa y si uno de los presos no sabe lo que hizo el otro, es un juego de información imperfecta.

### **2.3. Juegos bayesianos**

Un juego bayesiano es uno en el cual la información sobre las características de los demás jugadores es incompleta, no se conoce. Estos juegos son perfectos para analizar información imperfecta debido a la falta de información de los jugadores y el modelado de las creencias.

A raíz de las ideas de John Harsanyi, un juego bayesiano puede ser formado a través de la introducción de la naturaleza como jugador en un juego en donde la naturaleza asigna una variable aleatoria a cada jugador que podría tomar valores de tipos para cada jugador y las probabilidades de asociación o una función de densidad de probabilidad con esos tipos. En el transcurso de la partida, la naturaleza elige de forma aleatoria un tipo para cada jugador de acuerdo con la distribución de probabilidad a través de las características del jugador.

Harsanyi propone un enfoque para modelar un juego bayesiano con el fin de permitir que los juegos de información incompleta se conviertan en juegos de información imperfecta.

Tales juegos se denominan bayesianos por el análisis probabilístico inherente del juego en donde los jugadores tienen distintas distribuciones de probabilidad (también llamado creencias) sobre los tipos posibles de cada jugador. Estas creencias se pueden actualizar de acuerdo con la regla de Bayes conforme se lleva a cabo el juego, es decir, la creencia de que cada jugador tenga sobre otro jugador podría cambiar en función de las acciones que hayan jugado.

### **2.3.1. Especificación del juego**

Lo primero es explicar la representación de la forma normal de un juego no bayesiano con información completa, que es la especificación de los espacios de estrategias y funciones de ganancias de los jugadores. Explicado anteriormente, una estrategia para un jugador es un plan de acción completo que cubra todas las posibilidades del juego. En cuanto al espacio de estrategias de un jugador es el conjunto de todas las estrategias disponibles para un jugador. Una función de utilidad es una función del conjunto de perfiles de estrategias para el conjunto de pagos donde un perfil de estrategia es un vector que especifica una estrategia para cada jugador.

En cambio, en un juego bayesiano es necesario especificar los espacios de estrategias, funciones de pago, espacios de tipos y las creencias de cada jugador. A diferencia de los otros juegos (no bayesianos), una estrategia no sólo debe especificar las acciones del jugador dado el tipo que es, sino que debe especificar las acciones que tomaría si fuera de otro tipo. Los espacios de estrategias se definen como anteriormente. Un espacio de tipos para un jugador es precisamente el conjunto de todos los tipos posibles de ese jugador. Un jugador tiene una función de pago  $U(x,y)$  y si él tiene tipo  $t$ , el beneficio que recibe es  $U(x^*,y)$ , donde  $x^*$  es el vector

de estrategias jugadas, o más concretamente, el perfil de estrategia jugado en el juego.

### **2.3.2. Equilibrio Bayesiano de Nash**

En un juego, un perfil de estrategia es un equilibrio de Nash si para cada jugador, la estrategia de ese perfil es una respuesta óptima a las estrategias utilizadas por el resto de los jugadores, lo que quiere decir que no existe ninguna estrategia que otro jugador pueda utilizar y que produzca una recompensa más alta, dadas todas las estrategias jugadas por los otros jugadores.

Se puede definir un concepto parecido para un juego bayesiano, con la diferencia de que la estrategia de cada jugador maximiza la recompensa esperada dadas sus creencias sobre el estado de la naturaleza. Las creencias de un jugador sobre el estado de naturaleza se forman condicionando las probabilidades previas de su propio tipo de acuerdo con la regla de Bayes. Un equilibrio bayesiano de Nash se define como un perfil de estrategia que maximiza el beneficio esperado para cada jugador dadas sus creencias y las estrategias jugadas por los otros jugadores.

## **3. SUBASTAS**

En la actualidad el término subasta está tan arraigado en la sociedad que olvidamos que el concepto en sí es tan antiguo como los primeros grandes núcleos sociales.

Entendemos por subasta la venta pública de bienes que se hace adjudicando un artículo (en la mayoría de las ocasiones) al mayor postor.

Etimológicamente hablando, tanto la palabra castellana “subasta” como la inglesa “auction” proceden del latín. En el caso de “subasta” deriva del hecho de que para indicar el lugar donde se iba a dividir un botín de guerra, se clavaban unas lanzas (“hastas” en latín) en el terreno. De este modo, la subasta se

realizaba “debajo de las lanzas” (“sub” “hasta”). También es el caso del término inglés “auction”, de la voz latina “auctio”, que tiene su origen en Roma debido a los incrementos de los precios sucesivamente “a viva voz”.

Aunque, para el economista estadounidense Martín Shubik, la existencia de las subastas se remonta a la época babilónica, 500 ac. En ese periodo, cada pueblo celebraba un mercado anual de esposas en donde las mujeres eran reunidas en la plaza, en la que se encontraban hombres formando un círculo y se procedía a su asignación mediante subasta. En cuanto a la venta, esta se realizaba de una manera sucesiva, de este modo, la doncella más guapa, recibía mayor número de pujas y por lo tanto mayor oferta económica.

Aunque con la caída del imperio romano las subastas pierden su interés hasta el siglo XVIII, donde, a tener importancia y empiezan a surgir nuevos métodos. Uno de éstos, con el que estamos muy familiarizados, es el uso del martillo que adjudica el bien o la incorporación de límites de tiempo para presentar las pujas.

La introducción de la fijación del tiempo establecido en una subasta fue gracias a los franceses en la que la subasta no se cerraba hasta que no se consumieran tres velas que se encendían inmediatamente después de que se realizase una puja. Si en este tiempo se realizaba una nueva puja, se encendían dos velas más, y así sucesivamente hasta que se consumían.

Sin embargo, no será hasta el siglo XX cuando la importancia de las transacciones realizadas mediante subastas sea importante.

En la actualidad podemos definir una subasta como un procedimiento de venta donde los interesados compiten entre ellos para adjudicarse el bien o servicio subastado y son consideradas como una alternativa a los mercados para determinar un precio de un objeto determinado. Se organiza a través de un conjunto de reglas que determinan la forma en la cual los compradores interaccionan entre si con el objetivo de adquirir el producto subastado.

McAfee y McMillan (1987) definen las subastas como una institución de mercado que cuenta con un conjunto explícito de reglas que determinan la asignación de recursos y los precios basándose en las pujas presentadas por los participantes.

Normalmente, en el transcurso de la subasta, los compradores ofrecen sumas de dinero que posteriormente son comparadas entre sí para luego determinar quién será el ganador. Todo ello de acuerdo con una serie de reglas que están previamente establecidas.

Las subastas se fundamentan en un mecanismo de asignación que presenta tres propiedades:

1. Las asignaciones dependen únicamente de las pujas que los compradores hacen.
2. La regla de asignación, que es la que estipula quien tiene el objeto y cuanto paga por él, es conocida por todos los participantes.
3. Los compradores son anónimos en el sentido de que las identidades de los participantes no juegan ningún papel en la asignación.

### **3.1. Tipos de subastas**

Vamos a ver los tipos de subastas desde el trabajo de Vickrey (1961). Cabe destacar dos grupos básicos de subastas:

- Subasta de un solo bien.
- Subasta de múltiples bienes.

#### **3.1.1. Subastas de un solo bien**

Vickrey (1961) dividía las subastas de un único bien en cuatro tipos. Aunque estas subastas aceptan diferentes variantes, el funcionamiento de estas se asemejan, por lo que nos centraremos exclusivamente en los cuatro tipos básicos.

- Subasta inglesa o subasta ascendente.

El tipo de subasta más usado y conocido. Aquí los compradores van presentando sus ofertas por el bien o servicio, superando las pujas del resto de participantes, es decir, los compradores van ofreciendo

cantidades de dinero crecientes (de ahí que también se llame subasta ascendente) y cuando una propuesta no es superada por el resto, se proclama como la puja ganadora.

Quienes participan de la subasta van observando las pujas y deben decidir si aumentan o no su oferta. Este tipo de subastas es transparente y abierto, lo que quiere decir que el vendedor y compradores ven y conocen todas las ofertas en disputa ya que como cada comprador puede pujar cuantas veces quiera (siempre y cuando la puja sea superior a la más alta en ese momento como hemos dicho anteriormente) deben conocer el nivel actual de la puja.

- Subasta holandesa o subasta descendente.

En este tipo de subasta, que se comenzó a usar para la venta de flores en Holanda (de ahí su nombre), el subastador marca un precio de salida y con ello la cantidad mínima a la que está dispuesto a vender el bien o servicio. A partir de ese momento, la puja va disminuyendo hasta que los compradores deciden pararla en algunos de los costes anunciados, es decir, el subastador valora el bien o servicio a un precio muy alto y empieza entonces a disminuir este de forma progresiva hasta que finalmente algún comprador acepta ese precio, de ahí también que se llame subasta descendente.

Este método no es tan popular como la subasta inglesa, aunque es más rápido porque los postores no presentan sus ofertas y es muy utilizado para la venta de deuda por parte de los Estados.

- Subasta en sobre cerrado al primer precio.

Los compradores realizan su oferta o puja y la entregan en un sobre cerrado. Después el organizador descubre los sobres y se adjudica el bien o servicio al mejor postor pagando el precio por el que pujó. En este tipo de subasta los compradores no pueden observar las ofertas de los demás, la desconocen por lo que tienen la duda de si presentar una oferta menor al máximo que están dispuestos a pagar y que a la

vez no los deje fuera de la subasta. A esto hay que añadirle que solo pueden realizar una puja, a diferencia de los anteriores tipos de subastas.

- Subasta en sobre cerrado al segundo precio.

Este tipo de subasta (también llamada subasta de Vickrey) es muy parecido al anterior ya que los compradores también entregan su oferta en un sobre cerrado. La diferencia está en que el mejor postor no paga el precio de su puja, sino que paga la segunda puja más alta, es decir, se le adjudica el segundo precio más alto. Aquí los compradores tampoco conocen las ofertas de los demás.

Puede haber variantes dentro de estos tipos de subastas como por ejemplo imponer tasas por el derecho a pujar; incluir un precio mínimo hecho público o no o poder prorrogar el tiempo límite para realizar las pujas.

### **3.1.2. Subasta de múltiples bienes**

En este caso se subastan varios bienes o servicios en una misma subasta. Aquí nos encontramos con tres tipos de subastas con el formato de sobre cerrado para X bienes homogéneos, es decir, cada bien es igual al resto de bienes o prácticamente similares ya que en ocasiones se realizan subastas para diferentes bienes pero que son sustitutivos perfectos y así las ofertas que se realicen en la puja alcanzará el valor que cada comprador esté dispuesto a pagar por la primera, segunda y “n” unidades del bien.

La base de estas tres modalidades de subasta de bienes homogéneos con sobre cerrado es la siguiente: a cada puja se le atribuye una curva de demanda inversa que es el precio por el que ha pujado el comprador.

Se puede realizar la puja mientras estas sean hechas dentro de la fecha límite. Una vez finalizada la fecha límite, el subastador abre todos los

sobres y halla el precio de equilibrio igualando las ofertas recibidas con las demandas.

A continuación, veremos con más exactitud estos tipos de subastas:

- Subasta discriminatoria

En este tipo de subasta, también llamada como subasta de varios precios (pay-as-bid) o subasta americana, los compradores como hemos dicho anteriormente, presentan sus pujas mediante sobres cerrados y el subastador calculará el precio de corte (precio de equilibrio) con todas las pujas realizadas. No obstante, el comprador no pagará el precio de equilibrio, sino que pagará el precio por el que pujó que lo obtendrá situado por encima del precio de equilibrio.

En esta clase de subasta resulta complicado obtener el Equilibrio de Nash, pero se puede hallar a partir de tres supuestos de simetría:

1. Primer supuesto: Vamos a considerar que los compradores son simétricos, lo que quiere decir que la distribución de la información de los compradores es simétrica.
2. Segundo supuesto: Los compradores van a considerar simétrica cada unidad de bien, es decir, dan a cada unidad del bien un valor marginal constante, siendo el valor de todas las unidades el mismo en cualquier instante de tiempo.
3. Tercer supuesto: Decreta que los compradores deben ser simétricos en sus limitaciones de capacidad.

Una vez dados estos tres supuestos, la solución que obtenemos es eficiente y similar a la subasta con sobre cerrado al primer precio de un solo bien.

- Subasta de precio uniforme

Este tipo de subasta (también conocida como subasta no discriminatoria) se asemeja mucho a la subasta discriminatoria ya que también los compradores presentan sus pujas con sobre cerrados y obtienen la cantidad de bienes por los que han pujado en el precio de

equilibrio. La diferencia radica en que el precio que paga por los bienes adquiridos es el precio de equilibrio sin importar que la puja de esos bienes sea superior al precio de equilibrio.

Este modelo de subasta surge principalmente por el problema que genera la información de los compradores, ya que hay compradores que presentan una menor información acaban pagando más por los mismos bienes que los compradores con una mayor información. Por ello los compradores con menos información acaban siendo menos agresivos con sus pujas y no se acaba alcanzando el verdadero valor de los bienes.

Por ello surge este tipo de subasta en el que todos pagan el precio de equilibrio por cualquier unidad de bien y así los compradores con menor información no pagaran más que el resto de compradores provocando que acudan más compradores alcanzando el verdadero valor de los bienes que se subastan.

- Subasta de Vickrey de múltiples unidades

Este tipo de subasta funciona básicamente como una subasta con sobre cerrado al segundo precio ya que los compradores presentan las pujas en sobres cerrados y logran obtener tantos bienes como pujas hayan conseguido realizar en el precio de equilibrio al igual que los tipos de subastas que hemos visto antes, pero con la diferencia de que el comprador pagará por los bienes adquiridos el coste de oportunidad de cada unidad de bien que haya conseguido en la subasta.

Además de estos tipos de subasta con múltiples unidades, podemos añadir la subasta holandesa y subasta inglesa ya que pueden usarse para varios bienes. Cabe señalar que estas subastas ya no son en sobre cerrado

- Subasta inglesa modificada

Aquí el subastador empieza indicando un precio bajo a los bienes y gradualmente lo va elevando y los compradores tienen que indicar cuantos bienes están dispuestos a comprar al precio de la puja y mientras que va aumentando el precio los compradores tienen la posibilidad de reducir las unidades bien que están dispuestos a comprar.

La subasta finaliza cuando la oferta y la demanda coinciden (están en equilibrio), es decir, cuando se haya pujado por todos los bienes y el precio al que se han vendido los bienes surge del equilibrio entre la oferta y la demanda.

- Subasta holandesa modificada

También conocida como subasta española, es el tipo de subasta que utiliza la administración española para emitir letras del Tesoro donde se reciben dos tipos de ofertas, competitivas (pujan a un precio determinado) y no competitivas (aceptan el precio final cualquiera que sea) y que se caracteriza por ser una subasta holandesa modificada. Es decir, mezcla elementos de las pujas de precio único con las de precio múltiple, ordenando de menor a mayor todas las ofertas competitivas por encima del precio mínimo.

#### **4. TEORÍA DE SUBASTA**

En 1956 Friedman nos presenta su trabajo académico sobre la estrategia óptima para presentar las pujas. No obstante, en este trabajo todavía no se utiliza la Teoría de Juegos. No es a partir del trabajo de Vickrey (1961) cuando se empieza a utilizar la Teoría de Juegos tanto para acometer las pujas como para analizar las subastas, aunque el desarrollo de esta teoría en el análisis de las subastas se lleva a cabo lentamente principalmente porque todavía predomina el enfoque de un único jugador “estratégico” de Friedman (1956).

No obstante, ya en la década de los ochenta su desarrollo empieza a acelerarse provocando un gran número de publicaciones al respecto.

#### **4.1. Modelo de referencia**

Este modelo es el más extendido y de él salen los resultados más importantes de la Teoría de Subastas como por ejemplo el teorema del ingreso equivalente (del que hablaremos más adelante) y además gran parte de la investigación llevada a cabo sobre esta teoría se basa en modificar algún supuesto de este modelo.

Por lo tanto, nos encontramos con el modelo más importante y más extendido de la Teoría de Subastas, el Modelo de Referencia o “Benchmark Model”.

El modelo se basa principalmente en que el jugador o comprador solo conoce la valoración que da este al bien que se subasta, pero no conoce las valoraciones que dan el resto de jugadores y, por tanto, estamos ante un modelo con información incompleta (juegos bayesianos). Ante el desconocimiento de información, el jugador realizará diferentes suposiciones sobre el valor que aplican el resto de jugadores al bien y así tener una idea de cómo podrían pujar estos. El jugador necesita suponer como van a vaticinar el resto de jugadores el valor que da este al bien para poder pronosticar sus pujas.

A continuación, vamos a ver los supuestos más importantes para el Modelo de Referencia:

- Las pujas son continuas y son números reales no negativos  $b_i \in [0, \infty)$ .
- El número de compradores se denota por  $N$ .
- Las valoraciones de los compradores ( $v_i$ ) son independientes e idénticamente distribuidas ( $F(v_i)$ ) donde  $F(x)$  es la función de distribución de las valoraciones ( $V_{min}, V_{máx}$ ).

Harsanyi (1967) propone añadir una etapa inicial “ficticia” en la que el azar determine el tipo de jugador que es cada uno. Todos los jugadores tienen las mismas creencias sobre la distribución de probabilidades del resto. Esta

propuesta de Harsanyi ha sido ampliamente utilizada en Teoría de Juegos ya que permite una modelización más manejable de los modelos.

La idea de equilibrio que se utiliza en este modelo es el Equilibrio Bayesiano de Nash, muy similar al Equilibrio de Nash salvo por la definición de estrategia que cambia al situarnos en juegos con información incompleta, ya que las estrategias tienen que incorporar todas las posibles acciones que podría realizar el jugador dependiendo del tipo de jugador que es cada uno (que viene determinado por el azar como hemos comentado anteriormente).

Por lo que, para alcanzar el Equilibrio Bayesiano de Nash, el jugador tiene que predecir el comportamiento del resto de jugadores ante su puja y del mismo modo el resto de jugadores harán lo mismo y para poder pensar lo de los demás jugadores, el jugador necesita imaginar su propio comportamiento. En resumen, cada jugador tiene que reflexionar sobre como habría actuado ante todas las posibles alternativas.

Por tanto, la solución es una función cuya variable independiente es la valoración y el Equilibrio Bayesiano de Nash lo forman un conjunto de estrategias en la que la estrategia del jugador lo obtiene el mejor resultado posible dependiendo de las estrategias que lleven a cabo el resto de jugadores.

A continuación, se mencionan los cuatro “reglas” del Modelo de Referencia en la Teoría de Subastas:

a. Compradores simétricos

Las valoraciones de los jugadores salen de la misma distribución de probabilidad, tienen un mismo origen (“ex-ante”). Así el subastador tiene la posibilidad de observar a todos los jugadores de manera similar.

b. Compradores neutrales al riesgo

Los jugadores tienen funciones de utilidad del dinero lineales por lo tanto para ellos es lo mismo maximizar su utilidad esperada o sus ganancias esperadas.

c. Valoraciones independientes privadas

Por un lado, el comprador sabe la valoración que hace del valor del bien y no existe información relevante que sea ignorada por algún jugador (ya que sino los jugadores no podrían valorar con exactitud el bien). Por otro lado, las valoraciones de los jugadores no están correlacionadas entre sí, por lo que no pueden obtener información de las valoraciones que realizan los demás jugadores a partir de su propia valoración, es decir, el jugador no sabe por tanto en cuanto valoran el bien los demás jugadores.

d. Los pagos son una función únicamente de las pujas

El vendedor únicamente puede hacer depender los posibles pagos que realizan los compradores de las pujas que presentan.

A parte de estos supuestos podemos destacar los siguientes aspectos adicionales:

- El número de jugadores es conocido por todos y también sus actitudes hacia el riesgo y las distribuciones de probabilidad de sus valoraciones.
- No existen practicas colusivas entre los compradores (no pactan entre ellos).
- No existe coste alguno en las preparaciones de las pujas ni por parte del comprador ni por parte del vendedor.
- El vendedor siempre va a cumplir con las normas estipuladas de la subasta (auto-compromiso).

Ahora vamos a ver el Equilibrio Bayesiano de Nash dependiendo del tipo de subasta.

#### 1. Subasta holandesa

El jugador deberá elegir su puja sin saber ni conocer las decisiones de los demás jugadores, si resulta vencedor de la puja, lo que debe de pagar es la cantidad por la que ha pujado.

El resultado obtenido es independiente de las aptitudes de los jugadores ante el riesgo y del supuesto que se lleve a cabo sobre las correlaciones

de las valoraciones del resto de jugadores. La situación a la que se enfrentan los compradores, desde un punto de vista estratégico, es igual que en una subasta con sobre cerrado al primer precio.

## 2. Subasta en sobre cerrado al primer precio

En este tipo de subasta los compradores se les presenta el dilema de que pujas mayores provocan mayores probabilidades de ganar, no obstante, reduce el beneficio. Por ello se preguntan que puja máxima necesitarían para ganar la puja con la condición de que cuanto mayor sea esta, menor será el excedente como hemos mencionado anteriormente.

En cuanto a la estrategia en este tipo de subasta, no se trata de una estrategia dominante ya que la estrategia que lleve a cabo cualquier jugador no va a ser la mejor que se pueda lograr con independencia de lo que hagan los demás jugadores.

La solución a este problema deriva de presuponer cual sería la puja máxima que cada jugador haría, pero suponiendo que la valoración del jugador sea la más elevada. Una vez que presupone que valor es el más alto, el jugador realiza la puja que coincide con ese valor.

Matemáticamente: La función de puja de equilibrio sería igual a

$$b_i = B(v_i) = v_i - \frac{\int_{v_{min}}^{v_i} [F(x)^{N-1}] dx}{F(v_i)^{N-1}};$$

según McAfee y McMillan (1987). La puja del comprador  $i$  ( $b_i$ ) sería igual a la valoración real que da el mismo del objeto que se está pujando ( $v_i$ ) menos la cantidad que supone que puede sacar de excedente.

Esta función presenta tres peculiaridades:

- a) La función  $B(v_i)$  es creciente en el número de jugadores, es decir, cuanto mayor número de jugadores y mayor sea la competencia, las pujas serán más elevadas.
- b) Si el número de jugadores que hay en la subasta tiende al infinito, no se obtendría ganancias ya que las pujas de cada jugador

tenderían al valor que los jugadores han otorgado al objeto subastado y, por tanto, no habría excedentes.

- c) El vendedor podría alcanzar una puja mayor, no obstante, las pujas que realicen los jugadores van a ser inferiores a las cantidades máximas que los jugadores están dispuestos a pagar para evitar la reducción del excedente.

### 3. Subasta inglesa

En este tipo de subasta la estrategia de los jugadores se basa en permanecer en la subasta hasta el momento en que la valoración que hace el jugador del objeto subastado sea igual al precio de la puja. Esta estrategia es la mejor que pueden llevar a cabo los jugadores ya que nunca podrán obtener un resultado mejor si llevan a cabo otra estrategia. Tras llevar a cabo esta estrategia, el resultado obtenido va a ser eficiente solo si el resto de jugadores realizan también la misma estrategia. No obstante, el jugador no pagará el precio al que ha valorado el objeto ( $v_1$ ), sino que paga la valoración que había realizado el segundo comprador, es decir, el que ha realizado la segunda puja más elevada ( $v_2$ ). La ganancia que obtiene sale de la diferencia entre lo que paga el jugador que ha ganado la puja y lo que hubiera estado dispuesto a pagar (ganancias= $v_1 - v_2$ ).

En este caso el vendedor no logra extraer el máximo beneficio, pues el ganador ha obtenido un excedente.

### 4. Subasta en sobre cerrado al segundo precio

Los jugadores en este tipo de subasta realizan una estrategia débilmente dominante que se basa en realizar una puja por el bien subastado que sea igual a la valoración que da del mismo sin tener en cuenta lo que haga el resto de jugadores.

Vickrey (1961) explica la existencia de la estrategia débilmente dominante demostrando que ningún jugador puede aumentar sus ganancias

realizando una puja diferente por el objeto, tanto si se trata de una puja superior, como si se trata de una puja inferior:

- Puja superior a su valoración. En el caso en el que el jugador ganara la subasta, no le resultaría rentable ya que puede llegar a pagar un precio superior por el que valoraba el bien, solo cuando el segundo precio mayor sea superior a su valoración. Por el contrario, si obtiene el bien y el segundo precio es inferior a su valoración, le da lo mismo al jugador haber pujado más por el bien, porque al final va a pagar lo mismo que si hubiera pujado por su valoración.
- Puja inferior a su valoración. Esta puja no tendría sentido ya que, si el jugador la realiza, tendría menos posibilidades de obtener el bien que se puja y en el caso en el que lo obtuviera, pagará lo que haya pujado el segundo jugador con la puja más elevada (con independencia de que el jugador que hubiera ganado haya pujado menos cantidad del valor que daba al bien).

#### **4.1.1. Principio de equivalencia de ingresos**

El principio de equivalencia establece que, si se dan ciertas condiciones, cualquier mecanismo de subasta que asigne el objeto a aquel licitante que hace la puja más alta (subasta estándar), se traduce en los mismos resultados, es decir, el mismo ingreso esperado para el vendedor (ingresos equivalentes).

Esta situación es de gran trascendencia pues implica que no es importante el sistema de subasta que empleemos a la hora de vender un objeto.

Para explicarlo más detalladamente vamos a considerar una subasta estándar de un bien, en sobre cerrado, con un número  $n$  de licitantes neutrales al riesgo, cuyas valoraciones son independientes e idénticamente distribuidas. Entonces, en cualquier equilibrio bayesiano simétrico en estrategias crecientes en el que cualquier jugador con

valoración nula realiza un pago con valor esperado nulo, el vendedor del bien obtiene el mismo ingreso esperado.

Cabe destacar que el resultado se basa en supuesto de valoraciones privadas e independientes, simetría de las valoraciones y agentes neutrales al riesgo. Si, por ejemplo, consideramos licitantes neutrales al riesgo, característica bastante frecuente, en la subasta al primer precio, el ingreso esperado es mayor que en la subasta de segundo precio.

#### **4.2. Enfoques diferentes a la corriente principal**

Antes de que el “Modelo de Referencia” se impusiera como el modelo más extendido en la Teoría de Subastas, existía otros modelos e ideas que se encontraban en el trabajo de Friedman (1956).

Friedman usaba modelos con competidores no estratégicos, es decir, que los competidores del jugador no seguían un comportamiento estratégico. Esto quiere decir que no analiza el comportamiento del resto de jugadores ni las repercusiones que tendrían sus estrategias en las del jugador.

Con estos modelos, Friedman intentaba encontrar estrategias de puja, partiendo desde el punto de vista de una empresa y suponiendo estable el comportamiento del resto de jugadores. Para que estos modelos se lleven a cabo correctamente, se realizan análisis estadísticos de las pujas presentadas.

A continuación, veremos dos grupos de modelos distintos de subastas alternativos a la corriente principal:

- Modelos con competidores no estratégicos.
- Subastas con información completa.

##### **4.2.1. Modelos con competidores no estratégicos**

Hay una serie de modelos en los que se considera que los jugadores no presentan un comportamiento estratégico, es decir, no trata de analizar y suponer el comportamiento que llevará a cabo los demás jugadores y las

posibles consecuencias sobre su propia estrategia. Por todo esto, no se utilizan los conceptos de equilibrio de la Teoría de Juegos.

Este modelo presenta un método para determinar las pujas óptimas en una subasta al primer precio y una de las claves del modelo es el análisis sobre las probabilidades de ganar, que depende del estudio de las pautas que van a seguir los competidores para presentar sus diversas pujas. Así si una empresa tiene una valoración esperada ( $v$ ) del objeto que será subastado y presenta una puja ( $b$ ) que resulta como ganadora su beneficio será igual a la diferencia ( $v-b$ ) y sería  $U^*=(v-b)*P(b)$ , donde  $P(b)$  es la probabilidad de que  $b$  sea la puja más alta y  $U^*$  representa el beneficio esperado.

La dificultad de este modelo radica en la estimación de  $P(b)$  para calcular la puja óptima. Friedman sugiere que para poder estimar con exactitud esta probabilidad, habría que observar los datos de las pujas presentadas en subastas anteriores. Una vez echas las estimaciones de la distribución que caracteriza el proceso de presentación de pujas de cada uno de los competidores,  $P(b)$  sería el producto de las probabilidades de vencer a cada uno de ellos.

Friedman incluye extensiones al modelo como, por ejemplo:

- Número desconocido de competidores.
- Análisis de subastas simultáneas.
- Los compradores se enfrentan a restricciones presupuestarias.

No obstante, este grupo de modelos presenta algunas limitaciones planteadas por Laffont (1997):

1. Limitación de una búsqueda para una estrategia óptima

Esto ocurre por el hecho de al tomar el punto de vista de una empresa que participa en una subasta, limitando así la búsqueda de una estrategia óptima, pero solo dentro de un entorno determinado. Como consecuencia de esto, este enfoque no se podría enfrentar a diversas cuestiones referentes como por ejemplo a la optimalidad de las

subastas como método de venta o al análisis de las oportunidades de comportamiento de colusión entre los participantes.

2. Ineficacia a la hora de reconocer la complejidad del problema optimizador de la empresa.

Este enfoque solo sería válido para la especificación del problema en un modelo de valores independientes privados, pero sería incapaz de especificarlo en contextos más generales.

3. Problema al encontrarse en entornos y situaciones nuevas

El modelo sería incapaz de dar alguna información sobre cómo comportarse ante entornos nuevos como los que se crean cuando el vendedor pone en marcha un nuevo diseño de subasta.

#### **4.2.2. Subasta con información completa**

A diferencia del anterior enfoque, en este se utiliza la Teoría de Juegos, aunque se asume que las valoraciones de los compradores sobre el bien que se subasta son de dominio público y es conocido por el resto de jugadores.

Por tanto, nos encontramos ante un juego con información completa y en estos tipos de modelos, un jugador cuando calcula su puja óptima, además de conocer su propia valoración, también conoce la de sus competidores (ya que, en estos juegos al ser con información completa, las funciones de ganancias de los jugadores son de dominio público).

El vendedor al conocer las valoraciones de los compradores y teniendo capacidad de auto compromiso, el mecanismo de venta óptimo desde su punto de vista sería en seleccionar al candidato con la valoración más alta y realizarle una oferta por un precio (ligeramente) inferior a su valoración. Si este jugador considera “real” esta oferta, lo mejor que podría hacer es aceptarla provocando así que el vendedor pueda sacar casi la totalidad del excedente de la transacción.

Una de las ventajas más importantes que plantea este enfoque es que la noción de equilibrio aplicable sería la forma más sencilla del equilibrio de Nash. También podemos observar que no encontramos diferencias en los

resultados en relación con el Modelo de Referencia para el caso de subastas ascendentes y al segundo precio, no obstante, si encontramos diferencias en el caso de las subastas al primer precio.

## **5. CONCLUSIONES**

La solución de los juegos en forma normal, los cuales se usan para juegos estáticos con información completa, es el Equilibrio de Nash. En cambio, la solución para los juegos en forma extensiva, modelizados como juegos estáticos con información incompleta, es el Equilibrio Bayesiano de Nash (EBN).

Las subastas a día de hoy tienen gran importancia porque se aplican a multitud de campos y, cada vez en mayor medida, sobre todo en materia de transacciones económicas, no obstante, hemos visto que a lo largo de la historia las subastas han convivido en la sociedad desde la época babilónica, pasando por el Imperio Romano y hasta la actualidad.

Habiendo visto todos los principales tipos de subastas, podemos llegar a la conclusión de que tanto la subasta holandesa y la subasta inglesa de múltiples unidades son las más usadas.

La subasta holandesa con múltiples unidades equivale en cuanto a resultado a la subasta discriminatoria y en cuanto a estrategia a la subasta con sobre cerrado al primer precio. En cuanto al resultado de la subasta inglesa con múltiples unidades es equivalente al resultado de la subasta discriminatoria. En cambio, su estrategia equivale a la subasta con sobre cerrado al segundo precio.

Después de describir los diferentes tipos de subasta y de ver la importancia de las subastas a lo largo de la historia, nos adentramos en la teoría de subastas donde destaca el “modelo de referencia” demostrando que el cuerpo central de la Teoría de Subastas va a utilizar la Teoría de Juegos, aunque asumiendo que las valoraciones de los compradores son información privada.

## **6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

Álvarez D. (2016): *“Un recorrido por la historia de las subastas”*, Surus  
<https://www.surusin.com/un-recorrido-por-la-historia-de-las-subastas/>

Ausubel, L.N. (2003): "*Auction Theory for the New Economy*", New Economy Handbook, Elsevier Science (USA), pp. 123-162.

Durá, P. (2003): "*Teoría de subastas y reputación del vendedor*". Comisión Nacional del Mercado de Valores, Madrid, España.

Harsanyi, John C., (1968): "*Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players*". Part II: Bayesian Equilibrium Points. Management Science, vol 14, N°5, pp. 320-334.

Mc Afee R.P. and McMillan J. (1987): "*Auctions with entry*". Economics Letters 23, pp. 343-347.

Millán, L. (2006): "*Teoría de Subastas*". Notas de clase, Universidad del Valle, Valle del Cauca, Colombia.

Pérez Navarro, J. Jimeno Pastor, J.L. y Cerdá, E. (2004): "*Teoría de Juegos*". Editorial Ibergaceta Publicaciones S.L.

Riascos Villegas A.J. (2016): "*Juegos de información incompleta*", Universidad de los Andes.

Vickrey, W. (1961): "*Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders*". The journal of finance, vol 16, N°1, pp. 8-37.