

manuales UVa

ROSA MARÍA NICOLÁS MEDINA

PROBLEMAS EXPERIMENTALES DE FÍSICA

Olimpiada de Física
Distrito Universitario de Valladolid



Universidad de Valladolid

**PROBLEMAS EXPERIMENTALES
DE FÍSICA**

Olimpiada de Física
Distrito Universitario de Valladolid

Serie: CIENCIAS. Manuales y textos universitarios, nº 48

NICOLÁS MEDINA, Rosa María

Problemas experimentales de Física: Olimpiada de Física Distrito Universitario de Valladolid / Rosa María Nicolás Medina. Universidad de Valladolid, ed. 2021

190p.; 24 cm.- (Ciencias. Manuales y textos universitarios; 48).
Valladolid: Universidad de Valladolid

ISBN 978-84-1320-167-2

1. Física - Problemas y ejercicios. I. Universidad de Valladolid, ed. II.
Serie

53(076.3)

Rosa María Nicolás Medina

PROBLEMAS EXPERIMENTALES DE FÍSICA

Olimpiada de Física
Distrito Universitario de Valladolid



EDICIONES
Universidad
Valladolid^{de}

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, ni su préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso del ejemplar, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del Copyright.

En conformidad con la política editorial de Ediciones Universidad de Valladolid (<http://www.publicaciones.uva.es/>), este libro ha superado una evaluación por pares de doble ciego realizada por revisores externos a la Universidad de Valladolid.

© Rosa María Nicolás Medina. Valladolid, 2021

© EDICIONES UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Preimpresión: Ediciones Universidad de Valladolid

Diseño de cubierta de la autora

Fotografía de portada: El grupo Cadini desde el lago Antorno. Se ve, entre otras, la cima de Eötvös.

Autor: Domenico Salvagnin (Legnaro, Italia)

ISBN 978-84-1320-167-2

Dep. Legal: VA 973-2021

Imprime: PODIPRINT

Índice

| | |
|---|-----|
| Presentación | 11 |
| Agradecimientos | 17 |
| Problemas teóricos | 19 |
| Dos aros rodantes | 21 |
| El arquero inquieto | 25 |
| Tiro con rebote | 29 |
| Ponte las pilas | 32 |
| Loco por las carreras | 39 |
| Problemas experimentales | 45 |
| Cálculo de la aceleración de la gravedad | 47 |
| Siguiendo los pasos de Galileo | 52 |
| La difusión | 57 |
| El muelle “loco” | 62 |
| El péndulo de Pohl. Oscilaciones amortiguadas | 67 |
| Efecto fotoeléctrico (EFE)..... | 73 |
| Rodadura o rotación con deslizamiento | 78 |
| Crisis y café caliente | 84 |
| ¿Cuál es la edad de la Tierra? | 90 |
| Tensión superficial | 96 |
| Olla ¿rápida o lenta? | 102 |
| ¿Qué potencia consume la resistencia? | 108 |
| ¿Te oigo antes en verano? | 113 |
| ¡Cuidado! no te quemes | 118 |

| | |
|--|-----|
| El Universo en expansión | 126 |
| ¡Cuidado con el colesterol! | 132 |
| ¿Cuánto vive una estrella? | 139 |
| Tan rápido era que le apodaron “el adiabático” | 146 |
| Tirando bolas | 153 |
| Tratamiento matemático de datos experimentales | 159 |
| Errores en las medidas experimentales | 161 |
| Representaciones gráficas | 166 |
| Anexo | 179 |
| Valores del parámetro t de Student | 179 |
| Bibliografía | 181 |

“Afortunados son aquellos para los que ningún estudio honroso es pérdida de tiempo, no juzgan temerariamente, tienen su entendimiento libre, clara la visión y el cielo los hace si no inventores, cuanto menos dignos examinadores, escrutadores y testigos de la verdad.”

Giordano Bruno

Presentación

La posibilidad de haber formado parte de la Comisión Organizadora de la Olimpiada de Física, en su fase local del Distrito Universitario de Valladolid, me la ofreció el profesor José Casanova Colás (†) en el año 1990, cuando comenzaron a realizarse las Olimpiadas de Física en España. Desde entonces, hasta mi jubilación en diciembre de 2020, he sido miembro de dicha comisión. En ella, he tenido el privilegio de trabajar en la organización de las pruebas con los demás profesores miembros de la misma. La forma de proponer los enunciados ha evolucionado con los años y los medios disponibles, y el trabajo que me fue encomendado evolucionó también.

En los primeros años, la prueba incluía experiencias prácticas reales, y problemas y cuestiones que podemos denominar como teóricos. Colaboré en la propuesta de algunos de dichos problemas y en la organización de la parte experimental de la prueba. He recogido los más significativos en el apartado de *problemas teóricos*.

La realización práctica de experimentos en la prueba de la fase local de la Olimpiada de Física resultó inviable, logística y presupuestariamente. Pero teníamos que seleccionar a los alumnos que defenderían al Distrito Universitario de Valladolid en la fase nacional. Se pensó que podíamos incluir un ejercicio enunciado como una práctica. Desde 2003 a 2020 he tenido la oportunidad de realizar esa tarea en la comisión. En el apartado de *problemas experimentales* se recogen los 18 ejercicios propuestos en la fase local en los diferentes años.

Se han incluido dos sencillos problemas que no han sido puestos en las pruebas; en el apartado de *problemas teóricos* incluyo *Loco por las carreras*, que se llevó a la comisión en 2013 pero que no formó parte de la prueba; lo veo útil para repasar con los alumnos el movimiento uniforme; en el apartado de *problemas experimentales* incluyo *Tirando bolas*, un problema, de reserva para posibles incidencias, que puede servir a los alumnos para repasar el tiro parabólico de una manera original y sencilla.

El proceso de elaborar un problema para la prueba de la olimpiada es muy atractivo para una profesora de instituto, que empezó su carrera docente como profesora no numeraria (P.N.N.), en la Universidad de Valladolid, dando clase de Física General en la Facultad de Ciencias, en el departamento de Física Fundamental, cuyo nombre actual es: departamento de Física Aplicada. Durante cuatro años, mi labor consistió en dar clases de teoría y atender los laboratorios de la asignatura de Física de primer curso.

El primer paso del proceso es encontrar el tema a tratar; los alumnos realizan el ejercicio a principios del segundo cuatrimestre del curso, por lo tanto, los temas que entran en la fase local abarcan además del temario de primero de bachillerato, como son la mecánica y la termodinámica, algunos temas de segundo, como la gravitación, las ondas y poco más; la mayoría de los alumnos que se presentan cursan segundo de bachillerato, aunque tienen acceso a la prueba alumnos de cursos previos. Se busca un problema dentro del temario y se le da una redacción a ser posible original. Recuerdo con nostalgia que hubo una época, en la cual, la dinámica de rotación formaba parte de la enseñanza de la física en segundo de bachillerato y la corriente continua en la de física y química de primero. El convertir un problema teórico en uno experimental es relativamente sencillo si hablamos de planos inclinados, péndulos, cinemática, etc. El material de laboratorio de los institutos tiene diversas experiencias de mecánica, y la revista de la Real Sociedad Española de Física (R.S.E.F.) ha recogido publicaciones con amplios estudios sobre experimentos de este tipo.

Uno de los aspectos que se pretende mejorar es la igualdad de oportunidades para los alumnos, para lo cual se puede buscar algún tema fuera del currículo mencionado, algo novedoso que implique leer cuidadosamente la descripción del fenómeno sobre el que tienen que discurrir, asimilar las ecuaciones y leyes descritas en el enunciado, y a partir de ellas, realizar el proceso pedido en el problema. Así han surgido *problemas experimentales*, cuya redacción contiene una parte teórica y una parte experimental, que obligan al concursante de la olimpiada a discurrir sobre algo desconocido, con la única herramienta disponible de la información que tiene en sus manos en ese momento.

Intentando hacer llegar a los alumnos la inmensidad de los avances en el conocimiento que el estudio de la física ha supuesto a la Humanidad, se han buscado fenómenos físicos muy diversos como la capilaridad, la difusión, los cambios de

estado, el consumo de la energía almacenada en una pila, el brillo estelar, etc. relacionados con principios generales o con leyes empíricas. A veces, estos enunciados están trufados de anécdotas históricas encontradas en la bibliografía que, a mi modo de ver, hacen mucho más atractiva su lectura y desde luego son parte importante de la formación de los estudiantes. Tratar de colocar en el contexto histórico los hallazgos en física, me parece especialmente relevante en esta época, en la cual parece que todo tiene que conseguirse de inmediato para quedarse al instante obsoleto. Intentar transmitir, en unas pocas líneas del enunciado, una parte del desarrollo de la cosmología, alguna otra faceta en la vida de Newton o lo que hace de Eötvös un hombre excepcional, y no únicamente como físico, ha sido para mí un desafío y un placer. Porque cuando lees sus biografías o reseñas biográficas, comprendes no solo su gran inteligencia, sino también, su gran capacidad de trabajo, tenacidad y perfeccionismo. Francamente he aprendido y disfrutado con ello y he tratado de comunicar esa sensación en los problemas propuestos.

Los enunciados de los *problemas experimentales* pueden resultar algo largos para el estudiante, ya que incluyen la parte de teoría que se supone que el alumno desconoce; se le describe, de una manera sucinta, los principios y leyes necesarias para que aborde con éxito la parte experimental. No ha de asustarse, va a disponer de las ecuaciones para realizar la tarea que se le propone. Las cuestiones están elaboradas de tal manera que le orientan en su resolución a través de los diferentes puntos de los cuales constan. He considerado este aspecto importante, ya que, en primer lugar, enseñamos a tener herramientas conceptuales para leer física, y que para poder entender dicha lectura debemos hacerlo despacio y concentrados; luego tendremos que pensar sobre el tema e intentar aportar algo nuevo.

El trabajo encomendado al alumno ha de ser posible de realizar en el tiempo estipulado y las pautas propuestas han de ser un estímulo para avanzar en la resolución. La prueba local dura cuatro horas divididas en dos bloques de dos horas. El tiempo disponible para la resolución del problema experimental es, aproximadamente, de algo más de una hora, por lo tanto, una de las tareas de la comisión es maquetar los problemas propuestos en conjunto, para que el tiempo disponible sea suficiente. La reunión en la que los profesores dan a conocer sus propuestas es francamente estimulante, en ella se ofrecen enunciados novedosos y originales, la mayoría están recogidos en el libro del profesor José Luis Orantes de la Fuente, *Física Olímpica, mucho más que problemas*, tratar de resolverlos es siempre un desafío. Los compañeros de la comisión hacen sugerencias interesantes sobre la redacción y el enfoque de alguna de las cuestiones, procurando hacer más atractivo el problema al concursante.

Porque la Olimpiada de Física es un concurso, en el cual, participar ya es un premio. Los jóvenes que acuden, han sido propuestos por sus profesores, quienes han detectado su habilidad y entusiasmo en el estudio de la física; quieren que conozcan y se relacionen con otros alumnos semejantes a ellos, que comprueben que no son *bichos raros*, a los que les gusta preguntarse *¿por qué...? ¿cómo...?*, y que

aumenten su afición al estudio de la física. Los profesores de enseñanza media tienen que atender a la diversidad del alumnado de cada grupo. Cada alumno tiene sus peculiaridades, los que están mejor capacitados para la física necesitan ser espoleados para *no dormirse en los laureles*. Un buen aliciente es presentarse a la Olimpiada. Esto obliga a los profesores a hacer un esfuerzo adicional, pues suelen hacerlo fuera de su horario de trabajo; les dan clases especiales, elaboran ejercicios, resuelven dudas y a veces desconocen cómo será el tipo de prueba a la que se enfrentarán sus alumnos.

El lector comprobará que un *problema teórico*, como *Ponte las pilas*, puede enunciarse en el formato de un *problema experimental*, como está enfocado en el caso de *¿Qué potencia consume la resistencia?*, sin más que hacer una pequeña introducción teórica de los conceptos que el alumno desconoce, bien porque no forman parte del currículo en ese curso y los puede tener olvidados, o bien, porque nunca los estudió. Además, hay que introducir la serie de datos experimentales, que pueden ser generados a partir de un experimento hecho por los alumnos en el laboratorio o un experimento de cátedra; si no es posible, pueden indicarse los datos extraídos de la bibliografía o de las ecuaciones. Este tipo de problemas ofrece una herramienta a los profesores para hacer una programación dirigida a la adquisición de competencias como marca la actual legislación.

En la mayoría de los centros, los profesores de enseñanza media están limitados a una rigidez de horario que impide el desarrollo de actividades más allá de un periodo lectivo por cada grupo de un curso y para la totalidad de los alumnos del mismo. Elaborando problemas experimentales como los que se presentan seguidamente, siempre que sea posible acompañados en el aula de experiencias de cátedra, amplía las posibilidades de ofrecer al alumnado la visión de algunos procesos en el desarrollo de la física, sus héroes y su contexto histórico, y la de aprender a trabajar como investigadores. Espero que este pequeño manual sea de ayuda en esa labor.

Al igual que en la fase local de La Olimpiada de Física del Distrito Universitario de Valladolid, se ha tratado de presentar una maquetación compacta de cada problema, respetando siempre el enunciado original llevado a la fase local de la Olimpiada. Por motivos de propiedad, alguno de los dibujos se ha cambiado por otro similar propio de la autora, y también se ha cambiado alguna foto por otra del mismo tema. Se presenta la solución del problema a continuación de cada enunciado, de forma que pueda seguirse fácilmente por un alumno de bachillerato. Se ha utilizado el punto para la separación decimal y el hueco para la separación de los miles, millones, etc. como indica la normativa actual. La bibliografía utilizada se encuentra al final del libro separada por problemas; se incluyen conjuntamente libros, artículos de revistas, artículos de internet, etc., así como, se mencionan cursos, ofrecidos por el C.E.F.I.E. de Valladolid, relacionados con el tema. Para las representaciones gráficas y el ajuste de rectas por mínimos cuadrados, se ha utilizado el programa **Graph** que se encuentra libre en (<http://www.padowan.dk>).

Recomendamos al alumno-lector que intente resolver el ejercicio y dibujar la gráfica en papel milimetrado, así podrá comprobar que, si lo realiza con cuidado, sus resultados serán muy similares a los obtenidos mediante el uso de Graph; de esta forma es como lo resuelven los concursantes en la fase local.

A los alumnos que pasan a la Fase Nacional de la Olimpiada de Física, y a los demás participantes que quieren incorporarse, se les prepara para la segunda parte del concurso. Esta tarea se divide entre los miembros de la comisión. Hay seminarios de teoría y de prácticas, en sesiones algo maratónicas de más de tres horas. En estos seminarios, los alumnos amplían sus conocimientos teóricos en termodinámica, ondas, electromagnetismo, dinámica de rotación, óptica, radiactividad, etc. En la última parte de este compendio de problemas, he añadido aquellos conceptos que se explican sobre el *tratamiento matemático de datos experimentales*, y que está relacionado con los problemas de esta recopilación; abarca lo que se necesita para la fase nacional, y algo más para la fase internacional; he tratado de incluir ese *plus* de conocimiento que pueda hacer de los alumnos los ganadores del concurso; en cualquier caso, les será útil para sus estudios universitarios como puede verse en la bibliografía mencionada. Los problemas de la Fase Nacional de la Olimpiada de Física, en la que los alumnos han de hacer el montaje experimental y la toma de datos, así como el tratamiento matemático de los datos experimentales, incluido el estudio de la precisión de los resultados, se publican cada año en la página web de la R.S.E.F. En estos seminarios se analiza el tratamiento de datos experimentales de los ejercicios propuestos en años anteriores.

En la preparación a la fase nacional, se incluyen también prácticas en los laboratorios de la Facultad de Ciencias de Valladolid, a cargo de profesores universitarios especialistas en diversas partes de la física como termodinámica, electromagnetismo, óptica, etc. En dichas prácticas es donde aprenden el correcto manejo de los instrumentos para la toma de datos y realizan alguna práctica en los diversos laboratorios que visitan, así pueden aplicar lo que han estudiado de forma teórica. Estos seminarios son un aliciente para los alumnos, pues les abren un amplio abanico de posibilidades de cara a sus estudios posteriores. Es muy estimulante comprobar el interés que ponen en aprender y en conocer las investigaciones que se llevan a cabo en los diferentes departamentos de la Facultad de Ciencias; realmente es un privilegio participar con ellos en esta experiencia.

Los problemas de esta obra están en el mismo orden cronológico en el que fueron puestos en la fase local de la Olimpiada de Física del Distrito Universitario de Valladolid. Debajo del título del problema se indica el orden de la fase y el año. En algunos problemas los datos experimentales se han obtenido de las fuentes bibliográficas, en otros se han determinado de forma ficticia mediante las ecuaciones teóricas.

Quisiera indicar, que la finalidad de esta recopilación es facilitar tanto la conservación del trabajo realizado como el ponerlo al alcance de los alumnos y

profesores de enseñanza media; los problemas recogidos constituyen ejemplos de cómo introducir cualquier tema de física en el currículo a través del bloque denominado: *Actividad científica*, que se encuentra en todos los cursos de E.S.O. y bachillerato en los que se imparte esta asignatura.

A lo largo de estos años, he presentado también a mis alumnos de instituto al concurso olímpico y se lo gratificante que es para todos ellos, incluso para los no ganadores, no importa, han competido con los mejores y ¡muchos de ellos son hoy físicos!, y también ingenieros, arquitectos ..., que recuerdan la experiencia con cariño.

Espero transmitir al lector la ilusión con la que he participado en este proyecto.

Agradecimientos

Como ya he indicado, desde sus inicios en 1990 he formado parte de la Comisión de la Fase Local de la Olimpiada de Física gracias al profesor José Casanova Colás (†) que me introdujo en ella y en cuyo departamento había colaborado como P.N.N. Pero sin la confianza recibida por los diferentes presidentes y miembros de la misma, esta obra no habría sido posible. En primer lugar, un reconocimiento muy especial al profesor José Carlos Cobos Hernández, gracias por haber revisado esta obra, por sus indicaciones y sugerencias. El profesor Cobos ha sido el conductor y el alma de la fase local de la Olimpiada de Física durante muchos años, gracias a su entusiasmo y dedicación a la organización, se fue dando visibilidad al concurso en todos los centros de enseñanza media y, en la Revista de Ciencias de la Uva, se publicaron, cuando fue posible, los ejercicios propuestos en la fase local. Mi agradecimiento a los actuales responsables de la comisión, los profesores Mariano Santander Navarro y Luis Carlos Balbás Ruesgas -que me animó a realizar este libro-, por su dedicación y por mantenernos informados de la vanguardia de la física. Mi recuerdo y gratitud al profesor Alberto Gómez Trapote (†), por su sentido del humor y su peculiar manera de enunciar y resolver los problemas de mecánica, y al profesor Carlos de Francisco Garrido (†) que, con su alegría, hacía una fiesta de las largas reuniones de la comisión. Al profesor Fernando Muñoz Box, mi gratitud por sus observaciones, su gran empatía con los alumnos a los que acompaña a la Fase Nacional y su dedicación a la Olimpiada durante tantos años. Al profesor José María Muñoz Muñoz, muchas gracias por sus pertinentes consejos, sus problemas para la Olimpiada siempre han sido esperados con expectación, además, es un gran divulgador de la física experimental y todos los cursos recibe a alumnos de enseñanza media para hacer prácticas en laboratorios de su departamento. En representación de todos los compañeros de comisión a lo largo de los años, quiero mencionar a los profesores José Vicente Antón, Manuel Pérez Ferreiro y José Luis Orantes de la Fuente a los que me une una amistad desde nuestros años de estudios universitarios y han hecho tan agradable esta tarea. Una amistad que, a lo largo de estos años, se ha forjado también con todos los compañeros.

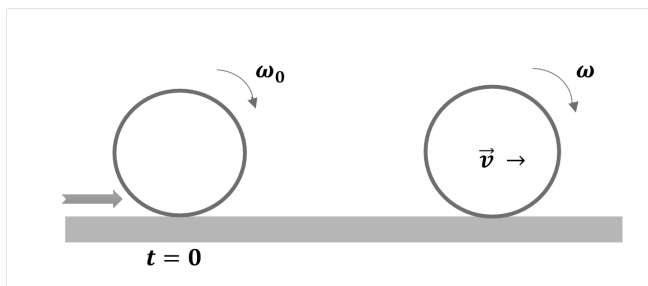
Problemas teóricos

Dos aros rodantes

X Olimpiada de Física, fase local del Distrito Universitario de Valladolid (1999)

Un aro de radio R gira con velocidad angular ω_0 y se coloca en una superficie horizontal áspera. En el momento inicial, la velocidad del centro del aro es nula.

1. Halla la velocidad del centro del aro después de terminar el deslizamiento.



Otro aro igual que el anterior, colocado en el mismo plano, recibe una velocidad de avance v_0 .

2. Determina la velocidad angular ω del aro después de haber terminado el deslizamiento.
3. Halla la relación entre v_0 y ω_0 para que en la rodadura ambos se muevan con igual velocidad.



SOLUCIÓN

1. La condición inicial es que el aro tiene velocidad angular ω_0 . Se cumplirán las ecuaciones de cinemática; además, aplicamos la segunda ley de Newton al c.d.m. y la ecuación fundamental de la dinámica de rotación, tomando el c.d.m. como el centro de giro. El momento de inercia del aro respecto al c.d.m. es $I = mR^2$.

$$f = ma \quad \text{ecuación (1)}$$

$$v = at \quad \text{ecuación (2)}$$

$$fR = mR^2\alpha \quad \text{ecuación (3)}$$

$$\omega = \omega_0 - \alpha t \quad \text{ecuación (4)}$$

Al principio el aro rueda y desliza. Al cabo de un tiempo t , ya no deslizará y se cumplirá la condición de rodadura:

$$v = \omega R \quad \text{ecuación (5)}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones anteriores:

$$\omega = \omega_0 - \frac{f}{mR}t = \omega_0 - \frac{f}{mR} \frac{v}{a} = \omega_0 - \frac{v}{R}$$

Cuando se alcanza la rodadura:

$$\frac{v}{R} = \omega_0 - \frac{v}{R} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\omega_0}{2}R$$

2. La condición inicial es que el aro tiene velocidad inicial v_0 . Y se cumple lo indicado en el primer apartado.

$$f = ma \quad \text{ecuación (1)}$$

$$fR = mR^2\alpha \quad \text{ecuación (3)}$$

$$v = v_0 - at \quad \text{ecuación (6)}$$

$$\omega = \alpha t \quad \text{ecuación (7)}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones anteriores:

$$\omega = \alpha t = \frac{f}{mR} t = \frac{f}{mR} \frac{v_0 - v}{a} = \frac{v_0 - v}{R} = \frac{v_0}{R} - \frac{v}{R}$$

Cuando se alcanza la rodadura:

$$\omega = \frac{v_0}{R} - \omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v_0}{2R}$$

3. Si ω ha de ser igual en ambos casos:

En el primer caso: $\omega = \frac{v}{R} = \frac{\omega_0 R}{2R} = \frac{\omega_0}{2}$

En el segundo caso: $\omega = \frac{v_0}{2R} \Rightarrow \frac{\omega_0}{2} = \frac{v_0}{2R} \Rightarrow v_0 = \omega_0 R$

Nota:

Se obtiene el mismo resultado planteando los problemas teniendo en cuenta que:

- El impulso es igual a la variación de la cantidad de movimiento, y que el trabajo de las fuerzas (solo hace trabajo la fuerza de rozamiento, f) se emplea en variar la energía cinética.
- En ambos casos se cumple de nuevo la ecuación de rodadura: $v = \omega R$
- Durante la rodadura, la energía cinética, suma de la de traslación del c.d.m. y la de rotación alrededor del c.d.m., puede escribirse como:

$$\begin{aligned} E_{c,rodadura} &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mR^2\frac{v^2}{R^2} = mv^2 \end{aligned}$$

- En ambos casos, el movimiento será uniformemente acelerado y el espacio recorrido, desde el instante cero hasta la rodadura, durante un tiempo t , será igual a la velocidad media, v_m , multiplicada por t .
- El punto de contacto con el suelo tiene velocidad cero durante la rodadura.

Por lo tanto, los puntos 1 y 2 se pueden resolver de la manera siguiente:

1. En el primer caso el aro tiene velocidad angular inicial, ω_0 .

$$ft = mv$$

$$\text{espacio recorrido} = e = v_m t = \frac{\omega_0 R + 0}{2} t$$

$$\frac{1}{2} m \omega_0^2 R^2 - mv^2 = f \frac{\omega_0 R + 0}{2} t \Rightarrow \frac{1}{2} m \omega_0^2 R^2 - mv^2 = \frac{\omega_0 R + 0}{2} mv$$

$$\Rightarrow 2v^2 + \omega_0 R v - \omega_0^2 R^2 = 0$$

La anterior es una ecuación de segundo grado, cuya solución válida es

$$v = \frac{-\omega_0 R \pm \sqrt{(\omega_0 R)^2 - 4 \times 2(-\omega_0^2 R^2)}}{2 \times 2} = \frac{-\omega_0 R \pm 3\omega_0 R}{4}$$

$$v = \frac{\omega_0}{2} R$$

2. En el segundo caso el aro tiene velocidad inicial v_0 .

$$m(v_0 - v) = ft$$

$$\text{espacio recorrido} = e = v_m t = \frac{v_0 + 0}{2} t$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - mv^2 = f \frac{v_0 + 0}{2} t \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 - mv^2 = m(v_0 - v) \frac{v_0}{2}$$

$$\Rightarrow v = \frac{v_0}{2} = \omega R$$

por lo tanto

$$\omega = \frac{v_0}{2R}$$