

manuales UVa

ROSA MARÍA NICOLÁS MEDINA

PROBLEMAS EXPERIMENTALES DE FÍSICA

Olimpiada de Física
Distrito Universitario de Valladolid



Universidad de Valladolid

**PROBLEMAS EXPERIMENTALES
DE FÍSICA**

Olimpiada de Física
Distrito Universitario de Valladolid

Serie: CIENCIAS. Manuales y textos universitarios, nº 48

NICOLÁS MEDINA, Rosa María

Problemas experimentales de Física: Olimpiada de Física Distrito Universitario de Valladolid / Rosa María Nicolás Medina. Universidad de Valladolid, ed. 2021

190p.; 24 cm.- (Ciencias. Manuales y textos universitarios; 48).
Valladolid: Universidad de Valladolid

ISBN 978-84-1320-167-2

1. Física - Problemas y ejercicios. I. Universidad de Valladolid, ed. II.
Serie

53(076.3)

Rosa María Nicolás Medina

**PROBLEMAS EXPERIMENTALES
DE FÍSICA**

Olimpiada de Física
Distrito Universitario de Valladolid



EDICIONES
Universidad
Valladolid^{de}



Reconocimiento–NoComercial–SinObraDerivada (CC BY-NC-ND)

Rosa María Nicolás Medina. Valladolid, 2021

EDICIONES UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Preimpresión: Ediciones Universidad de Valladolid

Diseño de cubierta de la autora

Fotografía de portada: El grupo Cadini desde el lago Antorno. Se ve, entre otras, la cima de Eötvös.

Autor: Domenico Salvagnin (Legnaro, Italia)

ISBN 978-84-1320-167-2

Índice

Presentación	11
Agradecimientos	17
Problemas teóricos	19
Dos aros rodantes	21
El arquero inquieto	25
Tiro con rebote	29
Ponte las pilas	32
Loco por las carreras	39
Problemas experimentales	45
Cálculo de la aceleración de la gravedad	47
Siguiendo los pasos de Galileo	52
La difusión	57
El muelle “loco”	62
El péndulo de Pohl. Oscilaciones amortiguadas	67
Efecto fotoeléctrico (EFE).....	73
Rodadura o rotación con deslizamiento	78
Crisis y café caliente	84
¿Cuál es la edad de la Tierra?	90
Tensión superficial	96
Olla ¿rápida o lenta?	102
¿Qué potencia consume la resistencia?	108
¿Te oigo antes en verano?	113
¡Cuidado! no te quemes	118

El Universo en expansión	126
¡Cuidado con el colesterol!	132
¿Cuánto vive una estrella?	139
Tan rápido era que le apodaron “el adiabático”	146
Tirando bolas	153
Tratamiento matemático de datos experimentales	159
Errores en las medidas experimentales	161
Representaciones gráficas	166
Anexo	179
Valores del parámetro t de Student	179
Bibliografía	181

“Afortunados son aquellos para los que ningún estudio honroso es pérdida de tiempo, no juzgan temerariamente, tienen su entendimiento libre, clara la visión y el cielo los hace si no inventores, cuanto menos dignos examinadores, escrutadores y testigos de la verdad.”

Giordano Bruno

Presentación

La posibilidad de haber formado parte de la Comisión Organizadora de la Olimpiada de Física, en su fase local del Distrito Universitario de Valladolid, me la ofreció el profesor José Casanova Colás (†) en el año 1990, cuando comenzaron a realizarse las Olimpiadas de Física en España. Desde entonces, hasta mi jubilación en diciembre de 2020, he sido miembro de dicha comisión. En ella, he tenido el privilegio de trabajar en la organización de las pruebas con los demás profesores miembros de la misma. La forma de proponer los enunciados ha evolucionado con los años y los medios disponibles, y el trabajo que me fue encomendado evolucionó también.

En los primeros años, la prueba incluía experiencias prácticas reales, y problemas y cuestiones que podemos denominar como teóricos. Colaboré en la propuesta de algunos de dichos problemas y en la organización de la parte experimental de la prueba. He recogido los más significativos en el apartado de *problemas teóricos*.

La realización práctica de experimentos en la prueba de la fase local de la Olimpiada de Física resultó inviable, logística y presupuestariamente. Pero teníamos que seleccionar a los alumnos que defenderían al Distrito Universitario de Valladolid en la fase nacional. Se pensó que podíamos incluir un ejercicio enunciado como una práctica. Desde 2003 a 2020 he tenido la oportunidad de realizar esa tarea en la comisión. En el apartado de *problemas experimentales* se recogen los 18 ejercicios propuestos en la fase local en los diferentes años.

Se han incluido dos sencillos problemas que no han sido puestos en las pruebas; en el apartado de *problemas teóricos* incluyo *Loco por las carreras*, que se llevó a la comisión en 2013 pero que no formó parte de la prueba; lo veo útil para repasar con los alumnos el movimiento uniforme; en el apartado de *problemas experimentales* incluyo *Tirando bolas*, un problema, de reserva para posibles incidencias, que puede servir a los alumnos para repasar el tiro parabólico de una manera original y sencilla.

El proceso de elaborar un problema para la prueba de la olimpiada es muy atractivo para una profesora de instituto, que empezó su carrera docente como profesora no numeraria (P.N.N.), en la Universidad de Valladolid, dando clase de Física General en la Facultad de Ciencias, en el departamento de Física Fundamental, cuyo nombre actual es: departamento de Física Aplicada. Durante cuatro años, mi labor consistió en dar clases de teoría y atender los laboratorios de la asignatura de Física de primer curso.

El primer paso del proceso es encontrar el tema a tratar; los alumnos realizan el ejercicio a principios del segundo cuatrimestre del curso, por lo tanto, los temas que entran en la fase local abarcan además del temario de primero de bachillerato, como son la mecánica y la termodinámica, algunos temas de segundo, como la gravitación, las ondas y poco más; la mayoría de los alumnos que se presentan cursan segundo de bachillerato, aunque tienen acceso a la prueba alumnos de cursos previos. Se busca un problema dentro del temario y se le da una redacción a ser posible original. Recuerdo con nostalgia que hubo una época, en la cual, la dinámica de rotación formaba parte de la enseñanza de la física en segundo de bachillerato y la corriente continua en la de física y química de primero. El convertir un problema teórico en uno experimental es relativamente sencillo si hablamos de planos inclinados, péndulos, cinemática, etc. El material de laboratorio de los institutos tiene diversas experiencias de mecánica, y la revista de la Real Sociedad Española de Física (R.S.E.F.) ha recogido publicaciones con amplios estudios sobre experimentos de este tipo.

Uno de los aspectos que se pretende mejorar es la igualdad de oportunidades para los alumnos, para lo cual se puede buscar algún tema fuera del currículo mencionado, algo novedoso que implique leer cuidadosamente la descripción del fenómeno sobre el que tienen que discurrir, asimilar las ecuaciones y leyes descritas en el enunciado, y a partir de ellas, realizar el proceso pedido en el problema. Así han surgido *problemas experimentales*, cuya redacción contiene una parte teórica y una parte experimental, que obligan al concursante de la olimpiada a discurrir sobre algo desconocido, con la única herramienta disponible de la información que tiene en sus manos en ese momento.

Intentando hacer llegar a los alumnos la inmensidad de los avances en el conocimiento que el estudio de la física ha supuesto a la Humanidad, se han buscado fenómenos físicos muy diversos como la capilaridad, la difusión, los cambios de

estado, el consumo de la energía almacenada en una pila, el brillo estelar, etc. relacionados con principios generales o con leyes empíricas. A veces, estos enunciados están trufados de anécdotas históricas encontradas en la bibliografía que, a mi modo de ver, hacen mucho más atractiva su lectura y desde luego son parte importante de la formación de los estudiantes. Tratar de colocar en el contexto histórico los hallazgos en física, me parece especialmente relevante en esta época, en la cual parece que todo tiene que conseguirse de inmediato para quedarse al instante obsoleto. Intentar transmitir, en unas pocas líneas del enunciado, una parte del desarrollo de la cosmología, alguna otra faceta en la vida de Newton o lo que hace de Eötvös un hombre excepcional, y no únicamente como físico, ha sido para mí un desafío y un placer. Porque cuando lees sus biografías o reseñas biográficas, comprendes no solo su gran inteligencia, sino también, su gran capacidad de trabajo, tenacidad y perfeccionismo. Francamente he aprendido y disfrutado con ello y he tratado de comunicar esa sensación en los problemas propuestos.

Los enunciados de los *problemas experimentales* pueden resultar algo largos para el estudiante, ya que incluyen la parte de teoría que se supone que el alumno desconoce; se le describe, de una manera sucinta, los principios y leyes necesarias para que aborde con éxito la parte experimental. No ha de asustarse, va a disponer de las ecuaciones para realizar la tarea que se le propone. Las cuestiones están elaboradas de tal manera que le orientan en su resolución a través de los diferentes puntos de los cuales constan. He considerado este aspecto importante, ya que, en primer lugar, enseñamos a tener herramientas conceptuales para leer física, y que para poder entender dicha lectura debemos hacerlo despacio y concentrados; luego tendremos que pensar sobre el tema e intentar aportar algo nuevo.

El trabajo encomendado al alumno ha de ser posible de realizar en el tiempo estipulado y las pautas propuestas han de ser un estímulo para avanzar en la resolución. La prueba local dura cuatro horas divididas en dos bloques de dos horas. El tiempo disponible para la resolución del problema experimental es, aproximadamente, de algo más de una hora, por lo tanto, una de las tareas de la comisión es maquetar los problemas propuestos en conjunto, para que el tiempo disponible sea suficiente. La reunión en la que los profesores dan a conocer sus propuestas es francamente estimulante, en ella se ofrecen enunciados novedosos y originales, la mayoría están recogidos en el libro del profesor José Luis Orantes de la Fuente, *Física Olímpica, mucho más que problemas*, tratar de resolverlos es siempre un desafío. Los compañeros de la comisión hacen sugerencias interesantes sobre la redacción y el enfoque de alguna de las cuestiones, procurando hacer más atractivo el problema al concursante.

Porque la Olimpiada de Física es un concurso, en el cual, participar ya es un premio. Los jóvenes que acuden, han sido propuestos por sus profesores, quienes han detectado su habilidad y entusiasmo en el estudio de la física; quieren que conozcan y se relacionen con otros alumnos semejantes a ellos, que comprueben que no son *bichos raros*, a los que les gusta preguntarse *¿por qué...? ¿cómo...?*, y que

aumenten su afición al estudio de la física. Los profesores de enseñanza media tienen que atender a la diversidad del alumnado de cada grupo. Cada alumno tiene sus peculiaridades, los que están mejor capacitados para la física necesitan ser espoleados para *no dormirse en los laureles*. Un buen aliciente es presentarse a la Olimpiada. Esto obliga a los profesores a hacer un esfuerzo adicional, pues suelen hacerlo fuera de su horario de trabajo; les dan clases especiales, elaboran ejercicios, resuelven dudas y a veces desconocen cómo será el tipo de prueba a la que se enfrentarán sus alumnos.

El lector comprobará que un *problema teórico*, como *Ponte las pilas*, puede enunciarse en el formato de un *problema experimental*, como está enfocado en el caso de *¿Qué potencia consume la resistencia?*, sin más que hacer una pequeña introducción teórica de los conceptos que el alumno desconoce, bien porque no forman parte del currículo en ese curso y los puede tener olvidados, o bien, porque nunca los estudió. Además, hay que introducir la serie de datos experimentales, que pueden ser generados a partir de un experimento hecho por los alumnos en el laboratorio o un experimento de cátedra; si no es posible, pueden indicarse los datos extraídos de la bibliografía o de las ecuaciones. Este tipo de problemas ofrece una herramienta a los profesores para hacer una programación dirigida a la adquisición de competencias como marca la actual legislación.

En la mayoría de los centros, los profesores de enseñanza media están limitados a una rigidez de horario que impide el desarrollo de actividades más allá de un periodo lectivo por cada grupo de un curso y para la totalidad de los alumnos del mismo. Elaborando problemas experimentales como los que se presentan seguidamente, siempre que sea posible acompañados en el aula de experiencias de cátedra, amplía las posibilidades de ofrecer al alumnado la visión de algunos procesos en el desarrollo de la física, sus héroes y su contexto histórico, y la de aprender a trabajar como investigadores. Espero que este pequeño manual sea de ayuda en esa labor.

Al igual que en la fase local de La Olimpiada de Física del Distrito Universitario de Valladolid, se ha tratado de presentar una maquetación compacta de cada problema, respetando siempre el enunciado original llevado a la fase local de la Olimpiada. Por motivos de propiedad, alguno de los dibujos se ha cambiado por otro similar propio de la autora, y también se ha cambiado alguna foto por otra del mismo tema. Se presenta la solución del problema a continuación de cada enunciado, de forma que pueda seguirse fácilmente por un alumno de bachillerato. Se ha utilizado el punto para la separación decimal y el hueco para la separación de los miles, millones, etc. como indica la normativa actual. La bibliografía utilizada se encuentra al final del libro separada por problemas; se incluyen conjuntamente libros, artículos de revistas, artículos de internet, etc., así como, se mencionan cursos, ofrecidos por el C.E.F.I.E. de Valladolid, relacionados con el tema. Para las representaciones gráficas y el ajuste de rectas por mínimos cuadrados, se ha utilizado el programa **Graph** que se encuentra libre en (<http://www.padowan.dk>).

Recomendamos al alumno-lector que intente resolver el ejercicio y dibujar la gráfica en papel milimetrado, así podrá comprobar que, si lo realiza con cuidado, sus resultados serán muy similares a los obtenidos mediante el uso de Graph; de esta forma es como lo resuelven los concursantes en la fase local.

A los alumnos que pasan a la Fase Nacional de la Olimpiada de Física, y a los demás participantes que quieren incorporarse, se les prepara para la segunda parte del concurso. Esta tarea se divide entre los miembros de la comisión. Hay seminarios de teoría y de prácticas, en sesiones algo maratónicas de más de tres horas. En estos seminarios, los alumnos amplían sus conocimientos teóricos en termodinámica, ondas, electromagnetismo, dinámica de rotación, óptica, radiactividad, etc. En la última parte de este compendio de problemas, he añadido aquellos conceptos que se explican sobre el *tratamiento matemático de datos experimentales*, y que está relacionado con los problemas de esta recopilación; abarca lo que se necesita para la fase nacional, y algo más para la fase internacional; he tratado de incluir ese *plus* de conocimiento que pueda hacer de los alumnos los ganadores del concurso; en cualquier caso, les será útil para sus estudios universitarios como puede verse en la bibliografía mencionada. Los problemas de la Fase Nacional de la Olimpiada de Física, en la que los alumnos han de hacer el montaje experimental y la toma de datos, así como el tratamiento matemático de los datos experimentales, incluido el estudio de la precisión de los resultados, se publican cada año en la página web de la R.S.E.F. En estos seminarios se analiza el tratamiento de datos experimentales de los ejercicios propuestos en años anteriores.

En la preparación a la fase nacional, se incluyen también prácticas en los laboratorios de la Facultad de Ciencias de Valladolid, a cargo de profesores universitarios especialistas en diversas partes de la física como termodinámica, electromagnetismo, óptica, etc. En dichas prácticas es donde aprenden el correcto manejo de los instrumentos para la toma de datos y realizan alguna práctica en los diversos laboratorios que visitan, así pueden aplicar lo que han estudiado de forma teórica. Estos seminarios son un aliciente para los alumnos, pues les abren un amplio abanico de posibilidades de cara a sus estudios posteriores. Es muy estimulante comprobar el interés que ponen en aprender y en conocer las investigaciones que se llevan a cabo en los diferentes departamentos de la Facultad de Ciencias; realmente es un privilegio participar con ellos en esta experiencia.

Los problemas de esta obra están en el mismo orden cronológico en el que fueron puestos en la fase local de la Olimpiada de Física del Distrito Universitario de Valladolid. Debajo del título del problema se indica el orden de la fase y el año. En algunos problemas los datos experimentales se han obtenido de las fuentes bibliográficas, en otros se han determinado de forma ficticia mediante las ecuaciones teóricas.

Quisiera indicar, que la finalidad de esta recopilación es facilitar tanto la conservación del trabajo realizado como el ponerlo al alcance de los alumnos y

profesores de enseñanza media; los problemas recogidos constituyen ejemplos de cómo introducir cualquier tema de física en el currículo a través del bloque denominado: *Actividad científica*, que se encuentra en todos los cursos de E.S.O. y bachillerato en los que se imparte esta asignatura.

A lo largo de estos años, he presentado también a mis alumnos de instituto al concurso olímpico y se lo gratificante que es para todos ellos, incluso para los no ganadores, no importa, han competido con los mejores y ¡muchos de ellos son hoy físicos!, y también ingenieros, arquitectos ..., que recuerdan la experiencia con cariño.

Espero transmitir al lector la ilusión con la que he participado en este proyecto.

Agradecimientos

Como ya he indicado, desde sus inicios en 1990 he formado parte de la Comisión de la Fase Local de la Olimpiada de Física gracias al profesor José Casanova Colás (†) que me introdujo en ella y en cuyo departamento había colaborado como P.N.N. Pero sin la confianza recibida por los diferentes presidentes y miembros de la misma, esta obra no habría sido posible. En primer lugar, un reconocimiento muy especial al profesor José Carlos Cobos Hernández, gracias por haber revisado esta obra, por sus indicaciones y sugerencias. El profesor Cobos ha sido el conductor y el alma de la fase local de la Olimpiada de Física durante muchos años, gracias a su entusiasmo y dedicación a la organización, se fue dando visibilidad al concurso en todos los centros de enseñanza media y, en la Revista de Ciencias de la Uva, se publicaron, cuando fue posible, los ejercicios propuestos en la fase local. Mi agradecimiento a los actuales responsables de la comisión, los profesores Mariano Santander Navarro y Luis Carlos Balbás Ruesgas -que me animó a realizar este libro-, por su dedicación y por mantenernos informados de la vanguardia de la física. Mi recuerdo y gratitud al profesor Alberto Gómez Trapote (†), por su sentido del humor y su peculiar manera de enunciar y resolver los problemas de mecánica, y al profesor Carlos de Francisco Garrido (†) que, con su alegría, hacía una fiesta de las largas reuniones de la comisión. Al profesor Fernando Muñoz Box, mi gratitud por sus observaciones, su gran empatía con los alumnos a los que acompaña a la Fase Nacional y su dedicación a la Olimpiada durante tantos años. Al profesor José María Muñoz Muñoz, muchas gracias por sus pertinentes consejos, sus problemas para la Olimpiada siempre han sido esperados con expectación, además, es un gran divulgador de la física experimental y todos los cursos recibe a alumnos de enseñanza media para hacer prácticas en laboratorios de su departamento. En representación de todos los compañeros de comisión a lo largo de los años, quiero mencionar a los profesores José Vicente Antón, Manuel Pérez Ferreiro y José Luis Orantes de la Fuente a los que me une una amistad desde nuestros años de estudios universitarios y han hecho tan agradable esta tarea. Una amistad que, a lo largo de estos años, se ha forjado también con todos los compañeros.

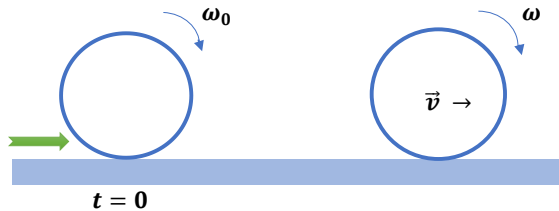
Problemas teóricos

Dos aros rodantes

X Olimpiada de Física, fase local del Distrito Universitario de Valladolid (1999)

Un aro de radio R gira con velocidad angular ω_0 y se coloca en una superficie horizontal áspera. En el momento inicial, la velocidad del centro del aro es nula.

1. Halla la velocidad del centro del aro después de terminar el deslizamiento.



Otro aro igual que el anterior, colocado en el mismo plano, recibe una velocidad de avance v_0 .

2. Determina la velocidad angular ω del aro después de haber terminado el deslizamiento.
3. Halla la relación entre v_0 y ω_0 para que en la rodadura ambos se muevan con igual velocidad.



SOLUCIÓN

1. La condición inicial es que el aro tiene velocidad angular ω_0 . Se cumplirán las ecuaciones de cinemática; además, aplicamos la segunda ley de Newton al c.d.m. y la ecuación fundamental de la dinámica de rotación, tomando el c.d.m. como el centro de giro. El momento de inercia del aro respecto al c.d.m. es $I = mR^2$.

$$f = ma \quad \text{ecuación (1)}$$

$$v = at \quad \text{ecuación (2)}$$

$$fR = mR^2\alpha \quad \text{ecuación (3)}$$

$$\omega = \omega_0 - \alpha t \quad \text{ecuación (4)}$$

Al principio el aro rueda y desliza. Al cabo de un tiempo t , ya no deslizará y se cumplirá la condición de rodadura:

$$v = \omega R \quad \text{ecuación (5)}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones anteriores:

$$\omega = \omega_0 - \frac{f}{mR}t = \omega_0 - \frac{f}{mR} \frac{v}{a} = \omega_0 - \frac{v}{R}$$

Cuando se alcanza la rodadura:

$$\frac{v}{R} = \omega_0 - \frac{v}{R} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\omega_0}{2}R$$

2. La condición inicial es que el aro tiene velocidad inicial v_0 . Y se cumple lo indicado en el primer apartado.

$$f = ma \quad \text{ecuación (1)}$$

$$fR = mR^2\alpha \quad \text{ecuación (3)}$$

$$v = v_0 - at \quad \text{ecuación (6)}$$

$$\omega = \alpha t \quad \text{ecuación (7)}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones anteriores:

$$\omega = \alpha t = \frac{f}{mR} t = \frac{f}{mR} \frac{v_0 - v}{a} = \frac{v_0 - v}{R} = \frac{v_0}{R} - \frac{v}{R}$$

Cuando se alcanza la rodadura:

$$\omega = \frac{v_0}{R} - \omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v_0}{2R}$$

3. Si ω ha de ser igual en ambos casos:

En el primer caso:
$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{\omega_0 R}{2R} = \frac{\omega_0}{2}$$

En el segundo caso:
$$\omega = \frac{v_0}{2R} \Rightarrow \frac{\omega_0}{2} = \frac{v_0}{2R} \Rightarrow v_0 = \omega_0 R$$

Nota:

Se obtiene el mismo resultado planteando los problemas teniendo en cuenta que:

- El impulso es igual a la variación de la cantidad de movimiento, y que el trabajo de las fuerzas (solo hace trabajo la fuerza de rozamiento, f) se emplea en variar la energía cinética.
- En ambos casos se cumple de nuevo la ecuación de rodadura: $v = \omega R$
- Durante la rodadura, la energía cinética, suma de la de traslación del c.d.m. y la de rotación alrededor del c.d.m., puede escribirse como:

$$\begin{aligned} E_{c,rodadura} &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mR^2\frac{v^2}{R^2} = mv^2 \end{aligned}$$

- En ambos casos, el movimiento será uniformemente acelerado y el espacio recorrido, desde el instante cero hasta la rodadura, durante un tiempo t , será igual a la velocidad media, v_m , multiplicada por t .
- El punto de contacto con el suelo tiene velocidad cero durante la rodadura.

Por lo tanto, los puntos 1 y 2 se pueden resolver de la manera siguiente:

1. En el primer caso el aro tiene velocidad angular inicial, ω_0 .

$$ft = mv$$

$$\text{espacio recorrido} = e = v_m t = \frac{\omega_0 R + 0}{2} t$$

$$\frac{1}{2} m \omega_0^2 R^2 - mv^2 = f \frac{\omega_0 R + 0}{2} t \Rightarrow \frac{1}{2} m \omega_0^2 R^2 - mv^2 = \frac{\omega_0 R + 0}{2} mv$$

$$\Rightarrow 2v^2 + \omega_0 R v - \omega_0^2 R^2 = 0$$

La anterior es una ecuación de segundo grado, cuya solución válida es

$$v = \frac{-\omega_0 R \pm \sqrt{(\omega_0 R)^2 - 4 \times 2(-\omega_0^2 R^2)}}{2 \times 2} = \frac{-\omega_0 R \pm 3\omega_0 R}{4}$$

$$v = \frac{\omega_0}{2} R$$

2. En el segundo caso el aro tiene velocidad inicial v_0 .

$$m(v_0 - v) = ft$$

$$\text{espacio recorrido} = e = v_m t = \frac{v_0 + 0}{2} t$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - mv^2 = f \frac{v_0 + 0}{2} t \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 - mv^2 = m(v_0 - v) \frac{v_0}{2}$$

$$\Rightarrow v = \frac{v_0}{2} = \omega R$$

por lo tanto

$$\omega = \frac{v_0}{2R}$$

El arquero inquieto

XI Olimpiada de Física, fase local del Distrito Universitario de Valladolid (2000)

Un niño juega con un arco tirando flechas desde una torre de altura h .

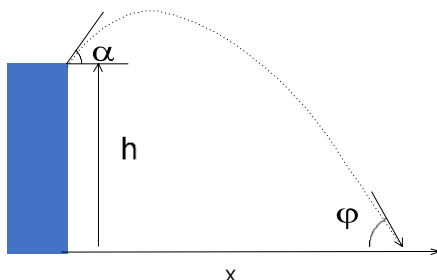
Las flechas las tira en todas las direcciones posibles, formando ángulos α con la horizontal y siempre con una velocidad de 14 m/s. Las flechas alcanzan la tierra a distintas distancias del pie de la torre, y se clavan en el suelo formando diferentes ángulos φ con la horizontal.

Cuando se baja de la torre a recoger sus flechas se da cuenta de que hay una que forma un ángulo mínimo con la horizontal y mide su tangente, que resulta ser $\sqrt{2}$.

- ¿Podría calcular con estos datos la altura de la torre? ¿Con qué ángulo fue lanzada dicha flecha?
- ¿Se podría encontrar una relación entre el ángulo α de disparo y la distancia x que alcanza cada flecha desde el pie de la torre?
- Después de hacer estos cálculos se da cuenta de que hay una flecha que ha llegado más lejos que las demás. ¿A qué distancia estará esta flecha del pie de la torre? ¿Con qué ángulo fue disparada?

Nota:

Supón que las flechas salen a una altura del suelo igual a la altura de la torre.



SOLUCIÓN

- a) Durante el movimiento de las flechas, la única fuerza que actúa es el peso, que es una fuerza conservativa, por lo tanto, se conservará la energía mecánica de las flechas. Además, tomando ejes de coordenadas cartesianas, eje x para la horizontal e y para la vertical, podemos escribir:

$$mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow 2gh + v_0^2 = v^2$$

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos \alpha \\ v_y = v_0 \sin \alpha - gt \end{cases}$$

Buscamos el valor mínimo de φ , que es un máximo de la función $\cos \varphi$, para lo cual, su derivada respecto al ángulo de tiro α , la igualaremos a cero.

Como se tiene que:

$$\cos \varphi = \frac{v_x}{v} = \frac{v_0 \cos \alpha}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}$$

Derivando e igualando a cero

$$\frac{d \cos \varphi}{d\alpha} = \frac{-v_0 \sin \alpha}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}} = 0$$

cuya solución es: $\sin \alpha = 0 \Rightarrow \cos \alpha = 1$

Ha sido un tiro horizontal pues $\alpha = 0$, y se verifica que

$$\cos \varphi = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}$$

Operando:

$$(v_0^2 + 2gh) \cos^2 \varphi = v_0^2$$

$$h = \frac{v_0^2(1 - \cos^2 \varphi)}{2g \cos^2 \varphi} = \frac{v_0^2}{2g} \tan^2 \varphi = \frac{14^2}{2 \times 9,8} \sqrt{2}^2 = 20m$$

La torre mide: $h = 20m$

b) Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria son:

$$\begin{cases} x = (v_0 \cos \alpha) t \\ y = h + (v_0 \sin \alpha) t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Eliminando el tiempo entre las dos ecuaciones y haciendo $y = 0$

$$0 = h + \frac{(v_0 \sin \alpha) x}{(v_0 \cos \alpha)} - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

Simplificando y teniendo en cuenta que:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$0 = h + \tan \alpha x - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha)$$

Ordenando los términos de la ecuación de segundo grado y resolviendo dicha ecuación, encontramos la relación pedida:

$$\frac{gx^2}{2v_0^2} \tan^2 \alpha - x \tan \alpha + \left(\frac{gx^2}{2v_0^2} - h \right) = 0$$

$$\tan \alpha = \frac{v_0^2}{gx} \pm \frac{1}{gx} \sqrt{v_0^4 - g^2 x^2 + 2ghv_0^2}$$

c) Para que tenga solución el apartado b) es necesario que sea:

$$v_0^4 - g^2 x^2 + 2ghv_0^2 \geq 0$$

$$x^2 \leq \frac{v_0^4 + 2ghv_0^2}{g^2}$$

Por lo tanto, el valor máximo de x será

$$x_{\text{máximo}} = \sqrt{\frac{v_0^4 + 2ghv_0^2}{g^2}} = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

Sustituyendo los datos en el S.I. y operando, obtenemos

$$x_{\text{máximo}} = \frac{14}{9.8} \sqrt{14^2 + (2 \times 9.8 \times 20)} = 34.64m$$

Para este valor, el ángulo de lanzamiento α será:

$$\tan \alpha (\text{para } x_{\text{máximo}}) = \frac{v_0^2}{gx_{\text{máx}}} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}$$

$$\tan \alpha (\text{para } x_{\text{máximo}}) = \frac{14}{\sqrt{14^2 + (2 \times 9.8 \times 20)}} = 0.5773$$

$$\alpha = 30^\circ$$

Notas:

1. Otra forma de resolver este último apartado es la siguiente: teniendo en cuenta las ecuaciones paramétricas de la trayectoria y que $y = 0$, eliminar el tiempo entre estas ecuaciones para obtener la relación entre x y α , y además que, la derivada de la coordenada x respecto al ángulo de tiro α ha de ser cero

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = h + (v_0 \sin \alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 \\ x = (v_0 \cos \alpha) t \\ \frac{dx}{d\alpha} = 0 \end{array} \right.$$

Por este procedimiento, más largo que el anterior, el resultado es el mismo. Para agilizar los cálculos, que dejamos al lector, conviene tener en cuenta que

$$\frac{2hg}{v_0^2} = \frac{2 \times 20 \times 9.8}{14^2} = 2$$

2. Suponemos en todo el ejercicio que el ángulo de tiro, α , es positivo.

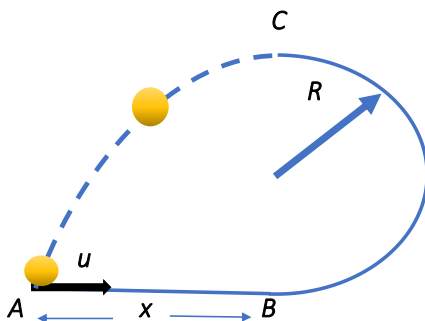
Tiro con rebote

XII Olimpiada de Física, fase local del Distrito Universitario de Valladolid (2001)

Una persona lanza horizontalmente un objeto de pequeñas dimensiones con una celeridad u desde un punto A del suelo tal como se muestra en la figura adjunta. Queremos que dicho objeto retorne al mismo punto A tras desplazarse por la superficie circular, entre los puntos B y C, y describir posteriormente una trayectoria balística desde C. Si la distancia $x = AB = 3R$, siendo $R = 2\text{ m}$ el radio de la superficie circular, calcula:

- La celeridad u para que esto suceda
- La mínima distancia x para la cual se efectúa el proceso anterior.
- La celeridad u en este último caso.

Nota: Considera que el objeto desliza sin rozamiento en cualquier punto de su trayectoria.



SOLUCIÓN

- a) Las fuerzas externas sobre la partícula de masa m son el peso, mg , que es una fuerza conservativa, y la normal, N , que realiza un trabajo nulo a lo largo de la trayectoria. Por tanto, la energía mecánica es constante durante el movimiento.

Llamamos v a la velocidad de la partícula en C. Podemos igualar la energía mecánica en A y en C. La altura del punto A es cero y la altura del punto C es $2R$

$$\frac{1}{2}mu^2 = mg2R + \frac{1}{2}mv^2$$

Simplificando

$$u^2 = 4gR + v^2 \quad (\text{ecuación 1})$$

El tiempo de vuelo entre C y A depende de la altura del punto C, que es $2R$. Por lo tanto, teniendo en cuenta la ecuación del movimiento uniformemente acelerado

$$2R = \frac{1}{2}gt^2$$

Despejando t

$$t = \sqrt{\frac{4R}{g}} \quad (\text{ecuación 2})$$

Para el movimiento de vuelo horizontal, tenemos en cuenta que, $x = 3R$, y que en el eje horizontal la velocidad es constante, $x = vt$. Por lo que

$$3R = vt = v \sqrt{\frac{4R}{g}}$$

Despejando v^2 de esta ecuación y sustituyendo en la ecuación 1

$$v^2 = \frac{9gR}{4}$$

$$u^2 = 4gR + \frac{9gR}{4} = \frac{25gR}{4}$$

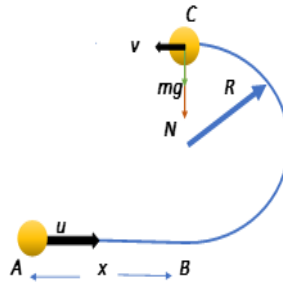
La velocidad de lanzamiento, para alcanzar de nuevo el punto A, es:

$$u = \frac{5}{2}\sqrt{Rg} = \frac{5}{2}\sqrt{2 \times 9.8} = 11.07\text{m/s}$$

Comprobamos que, para este valor de la velocidad, la masa llega al punto C. Para ello hallamos la normal en el punto C y vemos que es mayor que cero

$$mg + N = m\frac{v^2}{R}$$

$$N = m\frac{v^2}{R} - mg = \frac{m}{R} \frac{9gR}{4} - mg = \frac{5}{4}mg > 0$$



- b) El valor mínimo de x requiere un valor mínimo de v , lo que implica que en el punto C la normal sea cero y, por lo tanto, se ha de verificar en el punto C que

$$m\frac{v^2}{R} = mg$$

Es decir

$$v^2 = Rg$$

$$x = vt = \sqrt{Rg} \sqrt{\frac{4R}{g}} = 2R = 2 \times 2 = 4\text{m}$$

- c) Llevando la ecuación $v^2 = Rg$ a la ecuación 1 y operando

$$u^2 = 4gR + v^2 = 4gR + Rg = 5Rg$$

$$u = \sqrt{5Rg} = \sqrt{5 \times 2 \times 9.8} = 9.9\text{m/s}$$

Que es la velocidad mínima de lanzamiento, para recoger de nuevo la pelota sin movernos.

¡Ponte las pilas!

XIII Olimpiada de Física, fase local del Distrito Universitario de Valladolid (2002)

Después de haber terminado con éxito las pruebas de selectividad, Carlos y sus amigos deciden marcharse unos días de excursión a la montaña. Tienen pensado realizar algunas caminatas nocturnas por lo que necesitan llevar una buena linterna.

En una tienda especializada encuentran un modelo que funciona con dos pilas de 1.5V de fuerza electromotriz, 0.1Ω de resistencia interna y 5 Ah (Amperios x hora) de capacidad, (los Ah indican la carga almacenada en la pila).

Aparte, les ofrecen un conjunto de bombillas con diferentes resistencias, por lo que deciden entonces realizar un estudio para decidir cuál sería la elección más adecuada. Tú vas a ayudarles en esta tarea:

- a) Calcula los posibles valores de la resistencia de la bombilla, si pretenden que la potencia disipada en ella (potencia útil) sea de 6.25 W.
- b) Si definimos el coeficiente de rendimiento como la relación entre la potencia útil y la potencia total generada por las pilas, calcula este coeficiente en función del valor de la resistencia de la bombilla utilizada y, calcula su valor para las resistencias obtenidas en el apartado anterior.
- c) A partir del resultado del primer apartado, calcula cuánto tiempo durará la bombilla encendida y decide qué bombilla debe elegir Carlos para su linterna.
- d) Si Carlos quisiera que su linterna diera el máximo de luz, ¿qué resistencia debería tener entonces la bombilla?, ¿cuál sería la potencia disipada en la bombilla y cuánto tiempo estaría encendida?
- e) En el caso en el que los excursionistas quisieran mantener encendida la bombilla durante 8 horas, calcula, cuál debería ser entonces la resistencia de la bombilla, cuál sería la potencia útil y el coeficiente de rendimiento.
- f) Representa la potencia útil disipada en la bombilla, el coeficiente de rendimiento y el tiempo de duración de las pilas en función de la resistencia de la bombilla seleccionada y comenta brevemente dichas gráficas.

SOLUCIÓN

Las dos pilas de Carlos estarán montadas en serie, por lo tanto, equivalen a una única fuerza electromotriz (f.e.m.) ξ de 3V y a una resistencia interna r de 0.2Ω .

Además, la carga almacenada en cada pila es de 5Ah, luego:

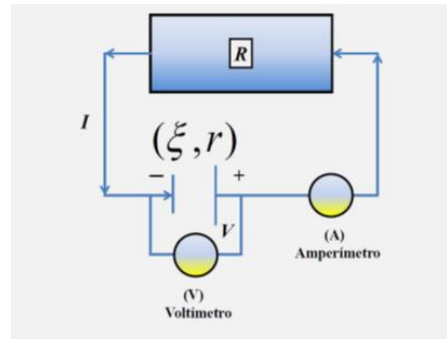
$$Q = 5 \times 3600 = 18\,000\text{C}$$

La energía total almacenada en las dos pilas será:

$$W = \xi Q = 3 \times 18\,000 = 54\,000\text{J}$$

Si una pila de f.e.m. ξ y resistencia interna r , se conecta a una resistencia externa R hará que por el circuito circule una intensidad I , que podemos medir con un amperímetro (A).

La resistencia R disipará una potencia $P = I^2R$, y la propia pila consumirá una potencia I^2r ; es decir, no toda la potencia de la pila ξI pasará al circuito externo.



Podemos escribir que

$$\xi I = I^2R + I^2r \quad (\text{ecuación 1})$$

La Ley de Ohm podemos escribirla como

$$I = \frac{\xi}{R+r} \quad (\text{ecuación 2})$$

La potencia consumida en la resistencia de carga será

$$P_R = I^2R = \left(\frac{\xi}{R+r}\right)^2 R = \xi^2 \frac{R}{(R+r)^2} \quad (\text{ecuación 3})$$

El coeficiente de rendimiento será

$$\eta = \frac{P_R}{\xi I} \quad (\text{ecuación 4})$$

El tiempo que tardará en gastarse toda la energía acumulada será

$$t = \frac{\xi Q}{\xi I} = \frac{Q}{I} = \frac{Q}{\xi / (R+r)} = \frac{Q(R+r)}{\xi} \quad (\text{ecuación 5})$$

- a) Hallamos R para que la potencia útil sea de $6.25W$. Utilizamos la ecuación 1.

$$3I = 6.25 + I^2 0.2$$

Esta ecuación de segundo grado tiene por soluciones:

$$I_1 = 12.5A$$

$$I_2 = 2.5 A$$

que nos dan para la resistencia de carga los dos valores siguientes:

$$R_1 = \frac{6.25}{12.5^2} = 0.04\Omega$$

$$R_2 = \frac{6.25}{2.5^2} = 1\Omega$$

- b) Hallamos, para cada resistencia su coeficiente de rendimiento, teniendo en cuenta lo dicho para llegar a la ecuación 1.

$$\eta_1 = \frac{6,25}{3 \times 12.5} = 0.1666 = 16.7\%$$

$$\eta_2 = \frac{6.25}{3 \times 2.5} = 0.8333 = 83.3\%$$

- c) El tiempo se calculará dividiendo, bien la carga almacenada entre la intensidad que circula en cada caso, o bien, la energía almacenada entre el producto de la f.e.m. por la intensidad que circula.

$$t_1 = \frac{18\,000}{12.5} = 1\,440s = 24min$$

$$t_2 = \frac{18\,000}{2.5} = 7\,200s = 2h$$

Con ambas resistencias la linterna dará la misma luz, $6.25W$, pero con la bombilla de resistencia más pequeña de 0.04Ω , casi toda la potencia la consumen los acumuladores $(3 \times 12.5 - 6.25) = 31.25W$; frente a los $(3 \times 2.5 - 6.25) = 1.25W$ que consumen con la resistencia de 1Ω , por eso en este caso la luz durará más.

- d) La resistencia que consume una potencia máxima se halla derivando respecto a R la ecuación 3, e igualando a cero dicha derivada.

$$\frac{dP_R}{dR} = \xi^2 \left[\frac{(R+r)^2 - 2(R+r)R}{(R+r)^4} \right] = 0 \Rightarrow R + r = 2R$$

Tenemos por tanto que

$$R = r = 0,2\Omega$$

La potencia útil máxima será

$$P_R = \xi^2 \frac{R}{(R+r)^2} = \xi^2 \frac{r}{(2r)^2} = \xi^2 \frac{1}{4r} = \frac{9}{4 \times 0.2} = 11.25W$$

Teniendo en cuenta la ecuación 4, en este caso el coeficiente de rendimiento será

$$\eta = \frac{P_R}{\xi I} = \frac{I^2 R}{\xi I} = \frac{IR}{\xi} = \frac{\xi}{R+r} \frac{R}{\xi} = \frac{R}{R+r} = 0.5 = 50\%$$

Es decir, la potencia máxima con la que puede brillar la resistencia de carga será de 11,25W; entonces disipa el 50% de la potencia disponible.

Utilizando la ecuación 5, hallamos el tiempo de funcionamiento de la linterna en este caso

$$t = \frac{Q(R+r)}{\xi} = \frac{18\,000 \times 0.4}{3} = 2\,400s = 40min$$

- e) Si queremos que la linterna luzca durante $t = 8h = 28\,800s$, hallemos primero, la intensidad que tiene que circular, y luego, la resistencia de carga

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{18\,000}{28\,800} = 0.625A$$

$$R = \frac{\xi}{I} - r = \frac{3}{0.625} - 0.2 = 4.6\Omega$$

La potencia disipada en R será

$$P_R = I^2 R = 0.625^2 \times 4.6 = 1.796875W$$

El coeficiente de rendimiento será

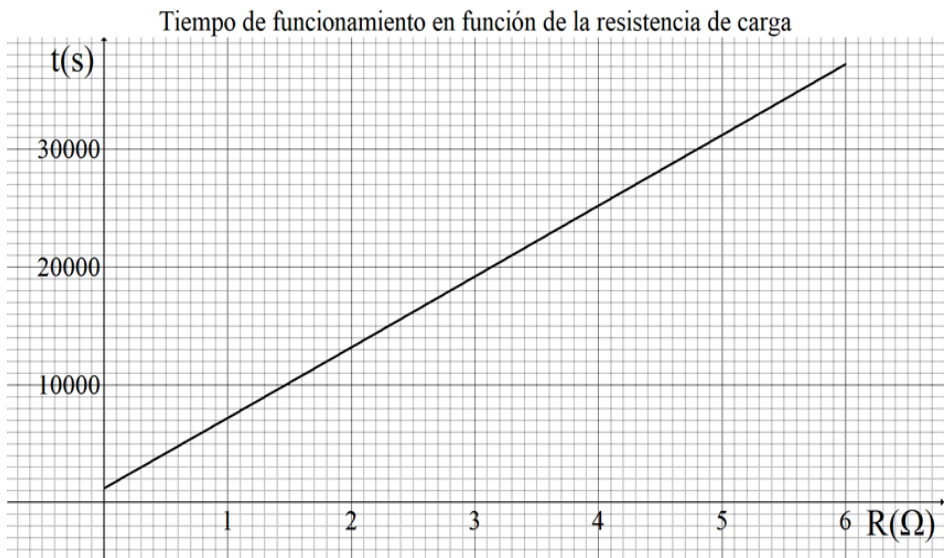
$$\eta = \frac{P_R}{\xi I} = \frac{1.796875}{3 \times 0.625} = 0.95833 = 95.83\%$$

La resistencia brilla muy poco, aunque se lleve casi toda la potencia, pero su pequeño brillo durará mucho tiempo.

- f) Las ecuaciones 3, 4 y 5 nos permiten hacer el estudio y dibujar las gráficas.
- El tiempo que durará encendida la linterna es una función lineal de la resistencia de carga, a mayor resistencia de carga, más tiempo durará encendida.

$$t = \frac{Q(R+r)}{\xi}$$

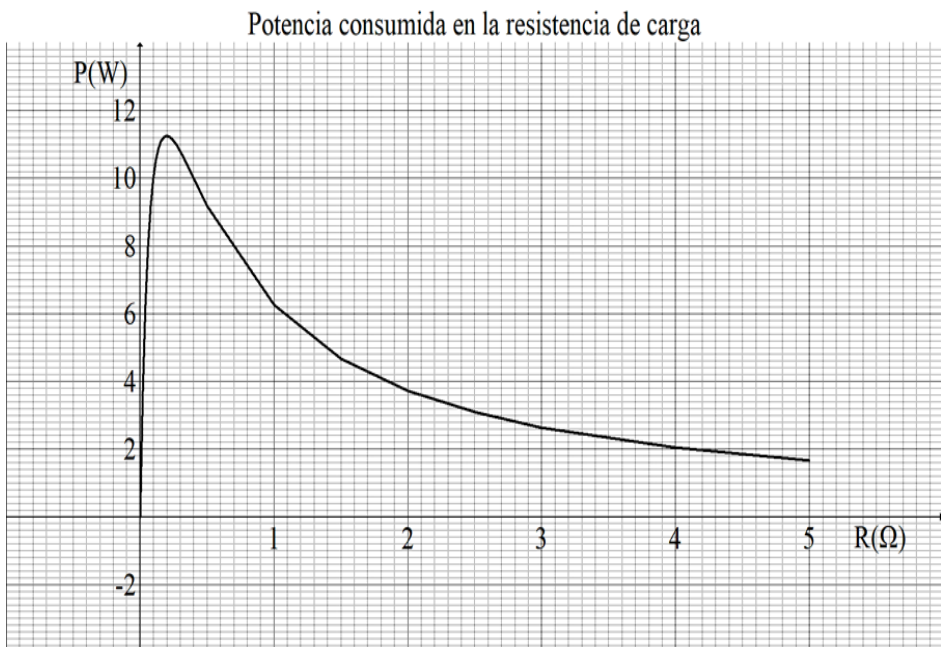
$$t = 1\,200 + 6\,000R$$



- La potencia disipada en la resistencia de carga tiene un máximo en $R = r$, para $R = 0$ vale cero y cuando R tiende a infinito la potencia en R tiende a cero.

$$P_R = \xi^2 \frac{R}{(R + r)^2}$$

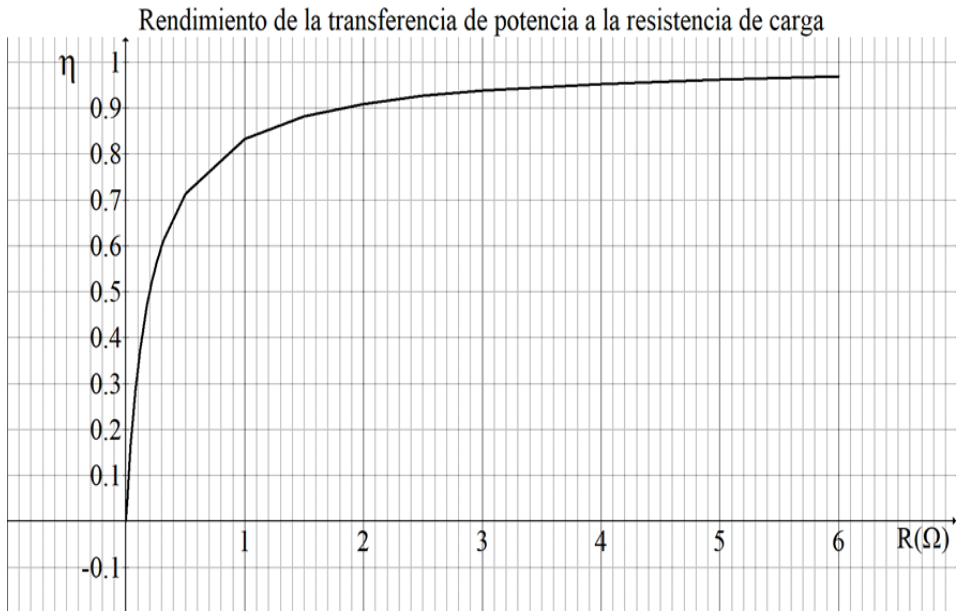
$$P_R = \frac{9R}{(0.2 + R)^2}$$



- El coeficiente de rendimiento tiende a 1 si R tiende a infinito, es cero para $R = 0$ y es 0,5 para $R = r$.

$$\eta = \frac{P_R}{\xi I} = \frac{I^2 R}{\xi I} = \frac{IR}{\xi} = \frac{\xi}{R + r} \frac{R}{\xi} = \frac{R}{R + r}$$

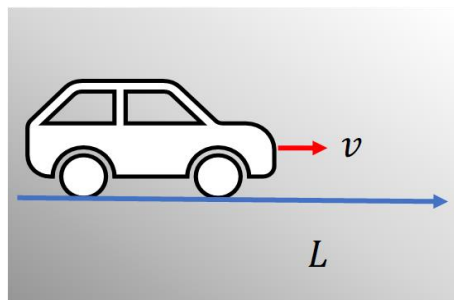
$$\eta = \frac{R}{0.2 + R}$$



Si R se hace muy grande el coeficiente de rendimiento sería casi del 100%, pero esto no quiere decir que la bombilla de mucha luz, sino que su luz durará más. Una bombilla teórica con resistencia infinita podría estar encendida un tiempo infinito; en ella se disiparía el 100% de la potencia generada por los acumuladores, pero sería ¡el 100% de cero!

Loco por las carreras

Para los movimientos con velocidad constante has estudiado la dependencia proporcional entre el espacio recorrido y el tiempo de movimiento, así como, el concepto de velocidad media. Te proponemos el siguiente desafío para que pongas a prueba tus conocimientos:



1. Un conductor recorre con su coche una longitud L con velocidad constante a tramos, la primera mitad del recorrido lo hace a una velocidad v_1 , y para ganar tiempo, la otra mitad la hace a una velocidad v_2 .
Suponiendo que L , v_1 y v_2 son datos, halla:
 - a) La velocidad media.
 - b) El tiempo, t , que ha tardado.
2. A la vista del resultado anterior, decide volver a hacer el recorrido, pero ahora irá la mitad del tiempo anterior a la velocidad v_1 y la otra mitad del tiempo anterior a la velocidad v_2 . Halla:
 - a) La distancia x recorrida en este caso.
 - b) Analiza el resultado, indicando para qué valores de las velocidades sería x mayor, igual o menor que L .
3. Si ahora quiere volver a recorrer la distancia L exactamente en un tiempo t' , circulando la mitad del tiempo total, a la velocidad v_1 y la otra mitad a la velocidad v_2 , halla:
 - a) El valor de dicho tiempo, t' .
 - b) La velocidad media en este caso.

4. Analiza para qué valores de las velocidades, t es menor, igual o mayor que t' .
5. Resuelve los apartados 1. a y b, 2. a, y 3. a y b para los valores numéricos siguientes:

$$L = 10km$$

$$v_1 = 20km/h$$

$$v_2 = 80km/h$$

6. Dibuja los diagramas espacio-tiempo en la misma gráfica.

SOLUCIÓN

En general el movimiento rectilíneo y uniforme (M.R.U.) cumple que:

$$\text{espacio recorrido} = \text{velocidad} \times \text{tiempo}$$

Lo anterior se cumple para cada tramo de recorrido con velocidad constante. Si el movimiento se compone de varios tramos, la velocidad media será

$$\text{velocidad media} = \frac{\text{espacio total}}{\text{tiempo total}}$$

Del enunciado se deduce que: si las velocidades son diferentes, será mayor la del segundo tramo cuando acelera para ganar tiempo, $v_2 \geq v_1$.

1. El desplazamiento total está compuesto por dos tramos de igual longitud, recorridos con velocidades diferentes y por tanto en tiempos diferentes. Se cumplirán las siguientes ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{L}{2} = v_1 t_1 \\ \frac{L}{2} = v_2 t_2 \\ t = t_1 + t_2 \end{array} \right.$$

$$\text{a) } v_m = \frac{L}{t} = \frac{L}{t_1 + t_2} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$$

$$\text{b) } t = \frac{L(v_1 + v_2)}{2v_1 v_2}$$

2. Ahora, los dos intervalos de tiempo son iguales, e iguales a la mitad del tiempo anterior; las velocidades son diferentes y, por lo tanto:

$$\text{a) } x = \frac{t}{2} (v_1 + v_2) = \frac{L(v_1 + v_2)}{4v_1 v_2} (v_1 + v_2) = \frac{L(v_1 + v_2)^2}{4v_1 v_2}$$

b)

$$\left\{ \begin{array}{l} x = L \Rightarrow \frac{L(v_1+v_2)^2}{4v_1v_2} = L \Rightarrow (v_1 - v_2)^2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 \\ x > L \Rightarrow \frac{L(v_1+v_2)^2}{4v_1v_2} > L \Rightarrow (v_1 - v_2)^2 > 0 \Rightarrow v_2 \neq v_1 \\ x < L \Rightarrow \frac{L(v_1+v_2)^2}{4v_1v_2} < L \Rightarrow (v_1 - v_2)^2 < 0 \Rightarrow \textit{imposible} \end{array} \right.$$

3. El espacio total, L , se recorre a velocidades diferentes en dos intervalos de tiempo iguales a $t'/2$ cada uno.

$$\text{a) } L = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)t' \Rightarrow t' = \frac{2L}{(v_1+v_2)}$$

$$\text{b) } v_m = \frac{L}{t'} = \frac{(v_1+v_2)}{2}$$

4. Análogamente al caso 2. b

$$\left\{ \begin{array}{l} t = t' \Rightarrow \frac{L(v_1+v_2)}{2v_1v_2} = \frac{2L}{(v_1+v_2)} \Rightarrow (v_1 - v_2)^2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 \\ t > t' \Rightarrow \frac{L(v_1+v_2)}{2v_1v_2} > \frac{2L}{(v_1+v_2)} \Rightarrow (v_1 - v_2)^2 > 0 \Rightarrow v_2 \neq v_1 \\ t < t' \Rightarrow \frac{L(v_1+v_2)}{2v_1v_2} < \frac{2L}{(v_1+v_2)} \Rightarrow (v_1 - v_2)^2 < 0 \Rightarrow \textit{imposible} \end{array} \right.$$

5. Para los valores numéricos dados: $L = 10 \text{ km}$, $v_1 = 20 \text{ km/h}$ y $v_2 = 80 \text{ km/h}$

$$\begin{array}{l} \text{Caso 1.} \\ v_m = 32 \text{ km/h} \\ t = 0.3125h = 1125s \end{array}$$

$$\text{Caso 2.} \quad x = 15.625 \text{ km}$$

$$\begin{array}{l} \text{Caso 3.} \\ t' = 0.2h = 720s \\ v_m = 50 \text{ km/h} \end{array}$$

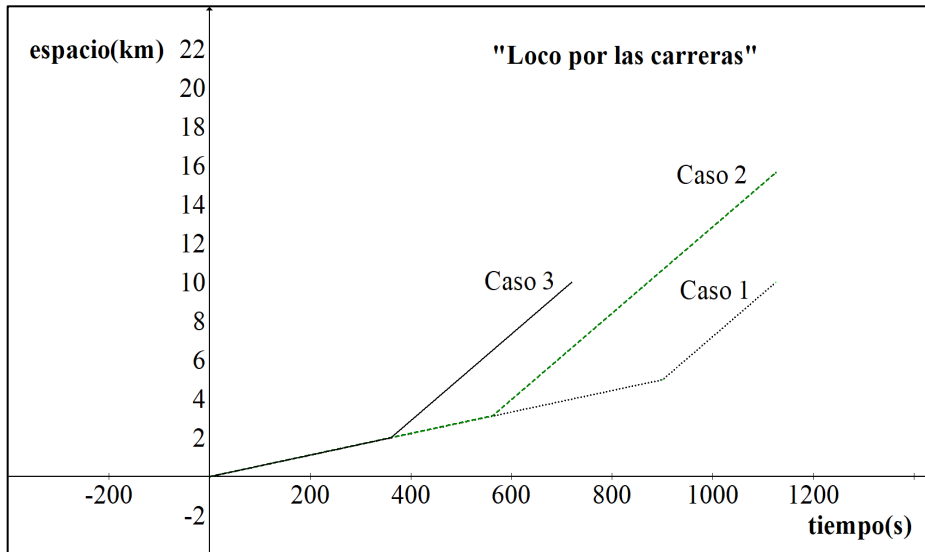
6. Para hacer los diagramas son de interés los siguientes puntos.

Caso 1. $t_1 = 5/20 h = \frac{1}{4} h = 900 s$
 $t_2 = 5/80 h = 225 s$
 $x_1 = x_2 = 5 km$

Caso 2. $t_1 = t_2 = 1125 / 2 = 562.5 s$
 $x_1 = 3.125 km$
 $x_2 = 12.5 km$

Caso 3. $t_1 = t_2 = 0.1 h = 360 s$
 $x_1 = 20 \times 0.1 = 2 km$
 $x_2 = 80 \times 0.1 = 8 km$

La siguiente gráfica representa los diagramas espacio - tiempo de los tres casos:



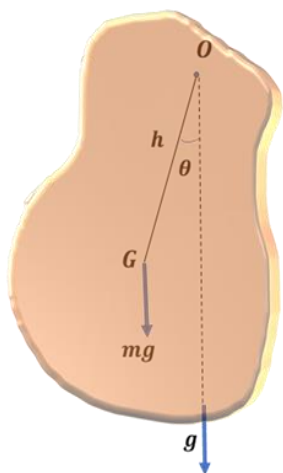
Problemas experimentales

Cálculo de la aceleración de la gravedad

XIV Olimpiada de Física, fase local del Distrito Universitario de Valladolid (2003)

Vamos a describir un sencillo experimento que nos permite medir con buena precisión el valor de la aceleración de la gravedad g . Para ello sólo necesitamos una varilla, una regla y un cronómetro. Suspendemos la varilla de un punto, provocamos una oscilación de pequeña amplitud y medimos el periodo de oscilación. Cambiamos el punto de suspensión y repetimos el experimento, y así para unos cuantos puntos.

Antes de obtener g a partir de las medidas realizadas necesitamos recordar algunos aspectos teóricos que posiblemente no conozcas. No te preocupes pues únicamente vas a necesitar las ecuaciones que te exponemos.



Cualquier cuerpo rígido capaz de oscilar libremente respecto a un eje horizontal, que lo atraviese por un cierto punto O (centro de suspensión), constituye un péndulo físico. Si separamos un cierto ángulo θ su centro de gravedad G respecto de la posición de equilibrio vertical, aparece un par de fuerzas recuperador, cuyo momento vale $mgh \sin \theta$, siendo m la masa del cuerpo, h la distancia OG y g la aceleración de la gravedad.

Si I_0 es el momento de inercia del cuerpo respecto al punto O, la ecuación del movimiento es:

$$I_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgh \sin \theta \quad (\text{ecuación 1})$$

Para pequeñas oscilaciones, se puede aproximar $\sin \theta \cong \theta$, de forma, que la ecuación anterior se convierte en la de un movimiento armónico simple:

$$I_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgh\theta \quad (\text{ecuación 2})$$

cuya solución es bien conocida:

$$\theta = \theta_0 \sin \omega t \quad (\text{ecuación 3})$$

Donde la pulsación ω viene dada por

$$\omega^2 = \frac{mgh}{I_0} \quad (\text{ecuación 4})$$

y, por tanto, el periodo de oscilación $T = 2\pi/\omega$ será

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{mgh}} \quad (\text{ecuación 5})$$

Se puede demostrar que, el cálculo del periodo de oscilación mediante la ecuación 5, introduce un error menor del 5 % siempre que la amplitud de oscilación sea menor de 15°.

Por otra parte, podemos pasar del momento de inercia respecto a un cierto eje al momento de inercia respecto a otro eje mediante el denominado teorema de Steiner. Utilizando este teorema, podemos pasar el momento de inercia, I_0 , respecto al punto O al momento de inercia respecto al centro de gravedad G, I_G mediante la relación:

$$I_0 = I_G + mh^2 \quad (\text{ecuación 6})$$

De esta forma, el periodo de oscilación viene dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_G + mh^2}{mgh}} \quad (\text{ecuación 7})$$

Esta expresión puede escribirse en la forma:

$$hT^2 = \frac{4\pi^2}{g} \frac{I_G}{m} + \frac{4\pi^2}{g} h^2 \quad (\text{ecuación 8})$$

Sólo esta última ecuación es la que necesitamos conocer en el experimento, que describimos a continuación:

Se han realizado diez medidas del periodo de oscilación de una varilla cambiando en cada una de ellas el punto de suspensión O.

Medimos en cada caso la distancia $h = OG$ entre el punto O y el centro de gravedad G (punto medio de la varilla), y la duración de 20 oscilaciones a partir de la cual se obtiene el correspondiente periodo T . Los resultados de estas medidas se muestran en la tabla adjunta.

t (s)	32.3	31.7	31.0	30.5	30.4	31.1	32.2	35.5	42.6	70.2
h (cm)	48.0	43.1	38.1	33.0	28.1	23.0	18.2	13.3	8.3	3.2

- 1) Haz las transformaciones pertinentes de estos datos para adecuarlos a la ecuación 8. De esta forma puedes obtener una representación lineal $y = a + bx$, en la que en las variables x e y , intervengan T y h . Haz esta representación en el papel milimetrado suministrado.
- 2) Calcula, a partir de la representación anterior, el valor de la aceleración de la gravedad.
- 3) Calcula, a partir de la representación anterior, el valor del momento de inercia de la varilla respecto al centro de gravedad, I_G , dividido por su masa m .

SOLUCIÓN

- 1) Transformamos la ecuación 8, $hT^2 = \frac{4\pi^2}{g} \frac{I_G}{m} + \frac{4\pi^2}{g} h^2$, mediante el cambio de variables siguiente:

$$y = hT^2$$

$$x = h^2$$

Con lo que, la ordenada en el origen y la pendiente de la recta

$$y = a + bx$$

serán

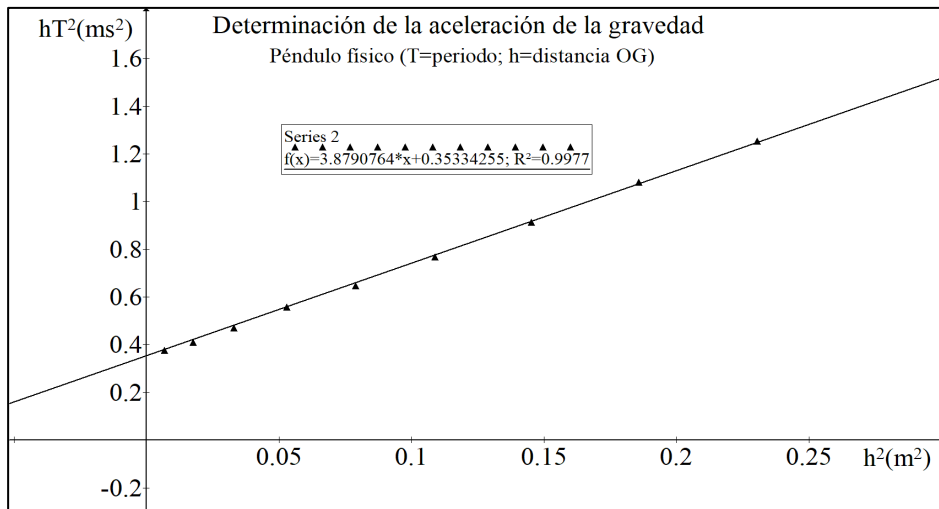
$$a = \text{ordenada en el origen} = \frac{4\pi^2}{g} \frac{I_G}{m}$$

$$b = \text{pendiente} = \frac{4\pi^2}{g}$$

La nueva tabla de datos, teniendo en cuenta que cada medida de tiempo consta de 20 oscilaciones, $T = t/20$, y escribiendo los datos en el Sistema Internacional de Unidades, es la siguiente:

t (s)	32.3	31.7	31.0	30.5	30.4	31.1	32.2	35.5	42.6	70.2
T (s)	1.615	1.585	1.550	1.525	1.520	1.555	1.610	1.775	2.130	3.510
T^2 (s ²)	2.61	2.51	2.40	2.33	2,31	2,42	2,59	3,15	4.54	12.32
h (10 ⁻² m)	48.0	43.1	38.1	33.0	28.1	23.0	18.2	13.3	8,3	3.2
hT^2 (10 ⁻² ms ²)	125.3	108.2	91.4	76.9	64.6	55.7	47.1	41.0	37.7	39.4
h^2 (10 ⁻⁴ m ²)	2304	1858	1452	1089	790	529	331	177	69	10.2

Al representar los puntos en papel milimetrado, los alumnos pueden comprobar que el último punto se desvía del conjunto de una forma anómala; es el punto para el cual el c.d.g. y el punto de suspensión de la varilla están muy próximos; por tanto, podemos despreciarlo en el trazado de la recta que mejor se ajusta.



$$a = \text{ordenada en el origen} = 0.35 \text{ ms}^{-2}$$

$$b = \text{pendiente} = 3.9 \text{ s}^2 \text{ m}^{-1}$$

$$\frac{a}{b} = 0.090 \text{ m}^2$$

- 2) Podemos hallar la aceleración de la gravedad de la pendiente

$$g = \frac{4\pi^2}{b} = \frac{4\pi^2}{3.9} = 10 \text{ ms}^{-2}$$

- 3) La tercera pregunta la respondemos teniendo en cuenta que: $\frac{a}{b} = \frac{I_G}{m}$

$$\frac{I_G}{m} = 0.090 \text{ m}^2$$

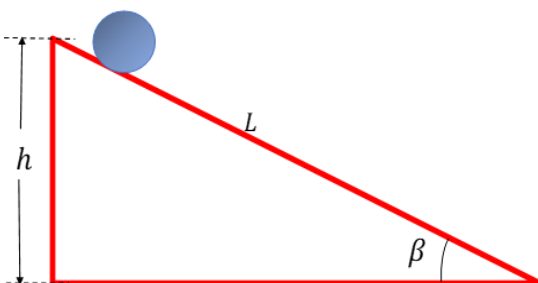
Siguiendo los pasos de Galileo

XV Olimpiada de Física, fase local del Distrito Universitario de Valladolid (2004)

El estudio del movimiento de distintos cuerpos sobre un plano inclinado, llevó a Galileo a concluir, que todos los cuerpos situados en las proximidades de la superficie terrestre estaban sometidos a la misma aceleración.

Imagínate que dispones de un plano inclinado de longitud $L = 2m$ y cuya altura h puedes variar a voluntad. Por tanto, puedes ajustar el ángulo β que forma el plano con la horizontal.

Sobre el plano inclinado se deposita una esfera de radio R y masa $M = 50g$ que baja rodando, sin deslizar, por dicho plano inclinado.



Se deja que la esfera ruede desde la parte superior hasta la inferior del plano. En los puntos superior e inferior del mismo, hemos colocado un mecanismo de medida de tiempo que nos permite medir cuánto tiempo tarda en caer la esfera para cada valor de la altura del plano inclinado. Las medidas obtenidas se muestran en la tabla adjunta.

h (m)	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
t (s)	4.78	3.38	2.75	2.40	2.15	1.95	1.80	1.70	1.60	1.50

Para obtener, a partir de estos datos experimentales, el valor de la aceleración de la gravedad, tenemos que conocer la dependencia entre el tiempo de caída sobre el plano y altura del mismo. Para ello, necesitamos saber un poco de mecánica de rotación, en particular lo que te enseñamos a continuación:

Movimiento de rodadura a lo largo de un plano inclinado:

Si un sólido rígido realiza un movimiento de rotación alrededor de un eje que pasa por su centro de gravedad (c.d.g.), la ley fundamental de la mecánica nos dice, que el momento, τ , de las fuerzas externas que actúan sobre el sólido es igual a su momento de inercia, I , por la aceleración angular, α :

$$\tau = I\alpha$$

El momento de inercia depende de la geometría del cuerpo y del eje de giro.

Para nuestro caso $I = \frac{2}{5}MR^2$.

Cuando la esfera rueda a lo largo del plano, realiza un movimiento de rotación, alrededor de un eje instantáneo que pasa por el punto de contacto con el plano inclinado. Pero podemos estudiar este movimiento descompuesto en un movimiento de rotación alrededor de un eje que pasa por el c.d.g. de la esfera y un movimiento de traslación de dicho c.d.g. a lo largo del plano inclinado. Las fuerzas que actúan sobre la esfera (el peso, la normal y la resistencia de rodadura) son constantes y por tanto el movimiento del c.d.g. será un movimiento uniformemente acelerado. Por otra parte, la única fuerza que realiza trabajo es el peso y, al ser conservativa, podemos aplicar el teorema de conservación de la energía mecánica al movimiento de rodadura de la esfera:

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (1)$$

donde el último término es la energía cinética de rotación de la esfera.

Para el movimiento de esta esfera se cumple además que:

a) La velocidad del c.d.g. $v = \omega R$ (2)

b) La aceleración del c.d.g. $a = \alpha R$ (3)

c) Las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado del c.d.g.

$$\left\{ \begin{array}{l} v = at \\ L = \frac{1}{2}at^2 \end{array} \right. \quad (4)$$

$$(5)$$

Las ecuaciones anteriores nos permiten ya obtener lo que buscábamos, la dependencia entre el tiempo de caída t y la altura del plano inclinado. Esta es la ecuación que tenemos que saber:

$$t^2 = \frac{2L^2(7/5)}{gh} = \left(\frac{14L^2}{5g}\right) \frac{1}{h} \quad (6)$$

y es, la que tienes que manejar, para resolver las cuestiones que se plantean a continuación:

- a) Realiza los cambios de variables necesarios en esta ecuación, para que al representar los datos de la tabla, con las modificaciones adecuadas, obtengas una función lineal del tipo $y = px$.
- b) Dibuja en el papel milimetrado los puntos así obtenidos.
- c) Con una regla, dibuja de forma aproximada la recta correspondiente.
- d) Calcula, el valor de la aceleración de la gravedad g , a partir de las características de esa recta.

SOLUCIÓN

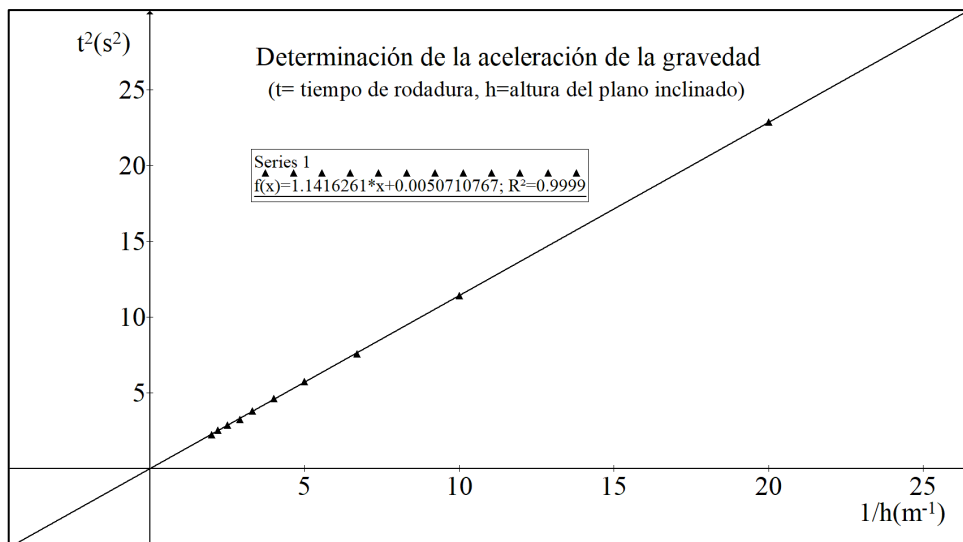
- a) La ecuación (6) es una función lineal de t^2 en función de $1/h$. La pendiente de dicha recta es:

$$pendiente = p = \frac{14L^2}{5g} \quad (7)$$

Para dibujar los puntos, construimos la tabla de datos siguiente:

t^2 (s ²)	22.85	11.42	7.56	5.76	4.62	3.80	3.24	2.89	2.56	2.25
$1/h$ (1/m)	20.0	10.0	6.7	5.0	4.0	3.3	2.9	2.5	2.2	2.0

- b) La recta pedida es



- c) El valor de la pendiente de la recta es: $p = 1.1416 \text{ ms}^2$

d) Por tanto, el valor de g se obtiene al despejar de la ecuación (7)

$$g = \frac{14L^2}{5p} \quad (8)$$

Sustituyendo $L = 2 \text{ m}$, y $p = 1.14 \text{ ms}^2$ obtenemos:

$$g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$$

Nota:

Para deducir la ecuación (6), tenemos en cuenta que el momento de inercia viene dado por la ecuación $I = \frac{2}{5} MR^2$, y la ecuación (2).

Sustituyendo en la ecuación (1) y simplificando:

$$\begin{aligned} Mgh &= \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} MR^2 \right) (v/R)^2 \\ 2gh &= v^2 + \frac{2}{5} v^2 = \frac{7}{5} v^2 \end{aligned}$$

Por otra parte, de las ecuaciones (4) y (5) obtenemos que:

$$v^2 = 2aL$$

por tanto

$$2gh = \frac{7}{5} 2aL$$

Despejando L y sustituyendo a de la ecuación (5) tenemos:

$$L = \frac{5gh}{7a} = \frac{5gh}{7} \left(\frac{t^2}{2L} \right)$$

Y despejando t^2 , obtenemos la ecuación buscada

$$t^2 = \frac{2L^2 \left(\frac{7}{5} \right)}{gh} = \left(\frac{14L^2}{5g} \right) \frac{1}{h}$$

La difusión

XVI Olimpiada de Física, fase local del Distrito Universitario de Valladolid (2005)

Uno de los fenómenos más interesantes de la naturaleza es la tendencia que tiene a distribuir los materiales de forma homogénea. Así cuando en un determinado material existe una cierta concentración de átomos n cuya distribución espacial no es homogénea, tiene lugar un movimiento atómico en la dirección de la concentración más baja. En Física decimos que hay un gradiente de concentración y el movimiento atómico se realiza en la dirección del gradiente. Este fenómeno se denomina DIFUSIÓN.

El fenómeno se puede estudiar midiendo el flujo de átomos que atraviesa la unidad de superficie (perpendicular a la dirección del flujo, por ejemplo, el eje x) en la unidad de tiempo y estudiando su dependencia con el gradiente de la concentración.

Si solo se considera variación de concentración con la coordenada x , el flujo de átomos viene dado por la ecuación:

$$\vec{j} = -D \frac{dn}{dx} \vec{i} \quad \text{ecuación (1)}$$

donde D es el denominado coeficiente de difusión, que depende de los materiales utilizados en el proceso y de la temperatura. Además, tendremos que la concentración depende del tiempo desde que comenzó la difusión.

Vamos a analizar un proceso concreto de difusión mediante el siguiente experimento: en la superficie de un cristal de AgCl se coloca una película de haluro de plata, que contenga una concentración superficial N_0 de átomos de Ag^{110} radiactiva por unidad de superficie. A continuación, se coloca el cristal en un horno a la temperatura T de forma que los átomos de plata comienzan a difundir hacia el interior del cristal. Se mide entonces la concentración $n(x, t)$ de dichos átomos en función de la distancia a la superficie x y del tiempo de difusión t .

Se sabe que la solución de las ecuaciones de difusión en determinadas situaciones nos lleva a que la concentración de átomos de plata por unidad de volumen, $n(x, t)$, viene dada por:

$$n(x, t) = \frac{N_0}{\sqrt{\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \quad \text{ecuación (2)}$$

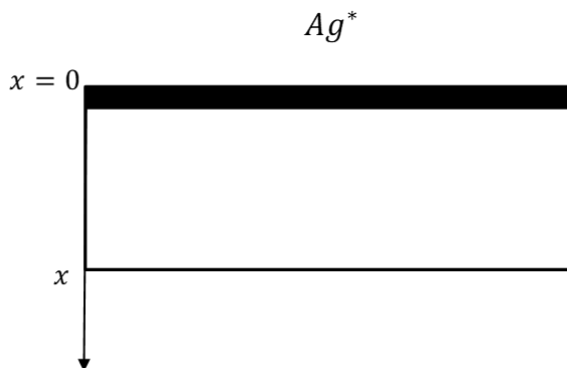
en donde x es la distancia desde la superficie ($x = 0$) al punto considerado, D el coeficiente de difusión a la temperatura de trabajo, t el tiempo de difusión y N_0 la concentración inicial antes mencionada. Adviértase que $n(x, t)$ decrece cuanto más profundos son los cortes en el cristal, pero la distribución depende del coeficiente de difusión D y del tiempo de difusión t .

Si tomamos logaritmos neperianos en la ecuación (2) llegamos a la expresión final que necesitamos y que es sobre la que tienes que trabajar:

$$\ln\left(\frac{n(x,t)}{N_0}\right) = -\frac{x^2}{4Dt} + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{\pi Dt}}\right) \quad \text{ecuación (3)}$$

Se ha realizado un experimento de difusión de plata en AgCl utilizando técnicas de trazadores radiactivos a una temperatura $T = 429^\circ\text{C}$ y para un tiempo de difusión $t = 500$ segundos y se han obtenido los siguientes valores de n/N_0 para distintas profundidades x .

x (10^{-2}cm)	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
n/N_0 (cm^{-1})	34.0	31.7	28.1	23.8	19.2	14.8



ANÁLISIS DE DATOS EXPERIMENTALES:

Para determinar el valor de D , realiza los pasos siguientes:

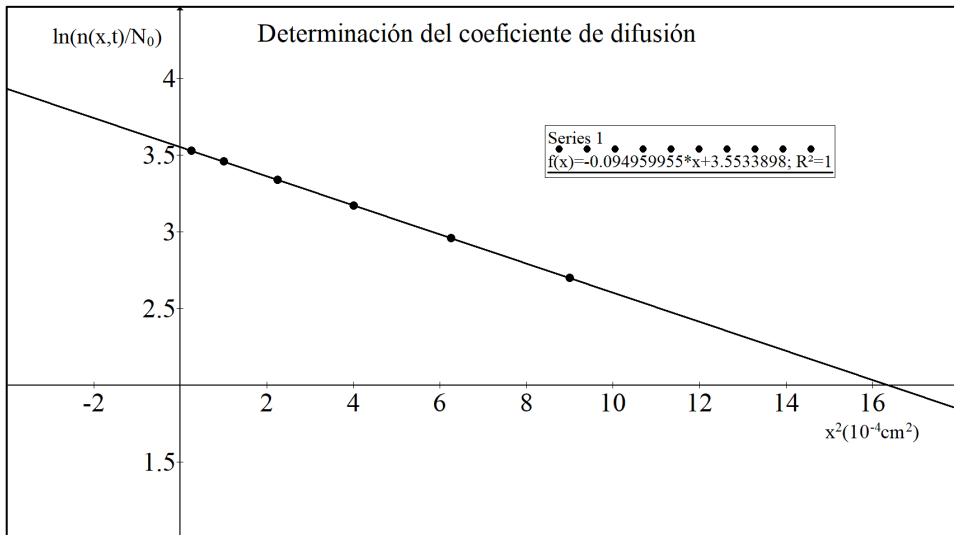
1. Realiza los cambios de variable necesarios en la ecuación (3) para que al representar los datos de la tabla con las modificaciones necesarias obtengas una función lineal.
2. Dibuja la recta de forma aproximada, con una regla, sobre los puntos experimentales.
3. Obtén a partir de las características de dicha recta el valor del coeficiente de difusión D en cm^2/s .

SOLUCIÓN

1. Para linealizar la ecuación 3, $\ln\left(\frac{n(x,t)}{N_0}\right) = -\frac{x^2}{4Dt} + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{\pi Dt}}\right)$, tomamos como variable dependiente $\ln\left(\frac{n(x,t)}{N_0}\right)$ y como variable independiente x^2 .
2. A partir de la tabla de datos experimentales construimos la siguiente tabla de datos.

$\ln\left(\frac{n(x,t)}{N_0}\right)$	3.53	3.46	3.34	3.17	2.96	2.70
x^2 (10^{-4}cm^2)	0.25	1.00	2.25	4.00	6.25	9.00

Representamos dichos datos y, de la gráfica, obtenemos la pendiente de la recta y la ordenada en el origen.



$$\text{pendiente} = p = -\frac{1}{4Dt} = -0.09496 \times 10^4 \text{ cm}^{-2}$$

$$\text{ordenada en el origen} = 3.5534$$

3. El coeficiente de difusión será:

$$D = -\frac{1}{4t \text{ pendiente}}$$

$$D = \frac{1}{4 \times 500 \times 0.09496 \times 10^4} = 5.27 \times 10^{-7} \text{ cm}^2/\text{s}$$

Del valor de la ordenada en el origen también podemos obtener el coeficiente de difusión, aunque esta manera es más imprecisa.

$$\text{ordenada en el origen} = \ln\left(\frac{1}{(\pi Dt)^{1/2}}\right)$$

Que nos lleva a un valor de

$$D = \frac{1}{\pi 500} e^{-2 \times 3.5534} = 5.22 \times 10^{-7} \text{ cm}^2/\text{s}$$

El muelle “loco”

XVII Olimpiada de Física, fase local del Distrito Universitario de Valladolid (2006)

Es bien conocido que la mayoría de los muelles son cuerpos elásticos que se deforman siguiendo la *ley de Hooke* (su deformación es proporcional a la fuerza aplicada).

$$F = -kx \quad \text{ecuación (1)}$$

Siendo, k la constante elástica del muelle y x la deformación. Este comportamiento de los muelles es utilizado para construir dinamómetros, que nos permiten determinar la masa y el peso de un cuerpo colgándolo de un muelle. La fuerza deformadora es el peso del cuerpo, mg , ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$). Para ello no tenemos más que calibrar el muelle, es decir, determinar el valor de k .

En nuestro caso, tenemos un muelle de longitud L , el cual colgamos por un extremo de un soporte y por el otro colgamos del muelle diferentes masas, midiendo el alargamiento del muelle en cada caso. La tabla adjunta indica los valores experimentales obtenidos del alargamiento del muelle x para cada masa m .

m (g)	10	20	30	40	50
x (mm)	46	58	66	73	79

Sin embargo, en nuestro muelle la deformación no es proporcional al alargamiento, como puedes comprobar fácilmente de los datos de la tabla.

Como se desea calibrar el muelle para poder usarlo como dinamómetro supondremos que sigue una ley anarmónica del tipo:

$$F = -kx^a \quad \text{ecuación (2)}$$

a y k son parámetros a determinar a partir de los datos de la tabla. Siendo a un número entero.

En el equilibrio, $mg = -F$, y por tanto se cumple:

$$mg = k x^a \quad \Rightarrow \quad m = \left(\frac{k}{g}\right) x^a$$

$$\log(m) = \log(k/g) + a \log(x) \quad \text{ecuación (3)}$$

ANÁLISIS DE DATOS EXPERIMENTALES

Para determinar el valor de a y el de k , realiza los pasos siguientes:

- a) Haz los cambios de variable necesarios en la ecuación (3) para que, al representar los datos de la tabla, con las modificaciones necesarias, obtengas una función lineal.
- b) Dibuja, en papel milimetrado, esos datos y, con una regla, traza la correspondiente recta sobre los puntos experimentales.
- c) A partir de las características de dicha recta, obtén el valor de la constante elástica k y del exponente a . Aproxima a al valor entero más próximo.

SOLUCIÓN

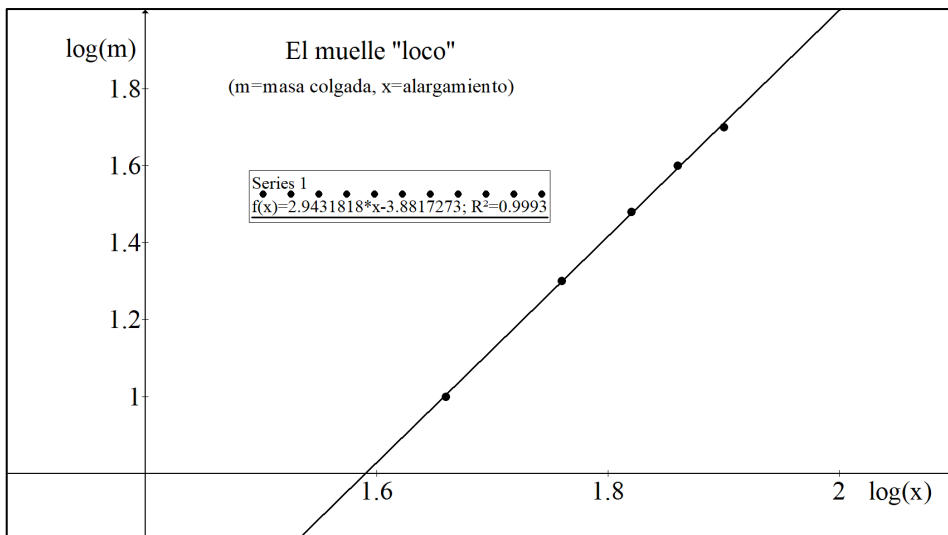
- a) Hacemos los cambios de variable a: $\log m$ y $\log x$; ahora, a es la pendiente de la función lineal

$$\log(m) = \log(k/g) + a \log(x).$$

Para estas variables los valores están en la siguiente tabla:

$\log m$	1.00	1.30	1.48	1.60	1.70
$\log x$	1.66	1.76	1.82	1.86	1.90

- b) Representamos $\log m$ en función de $\log x$ (gráfica siguiente) y, con un ajuste por mínimos cuadrados, se puede determinar la pendiente de la recta y por tanto a .



$$\text{pendiente} = a = 2.943$$

Como a tiene que ser un número entero tomamos:

$$a = 3$$

c) Conocido a escribimos la ecuación $m = (k/g) x^a$ como:

$$m = (k/g)x^3 \quad \text{ecuación (4)}$$

Tomando ahora como variables m y x^3 , tenemos una función lineal

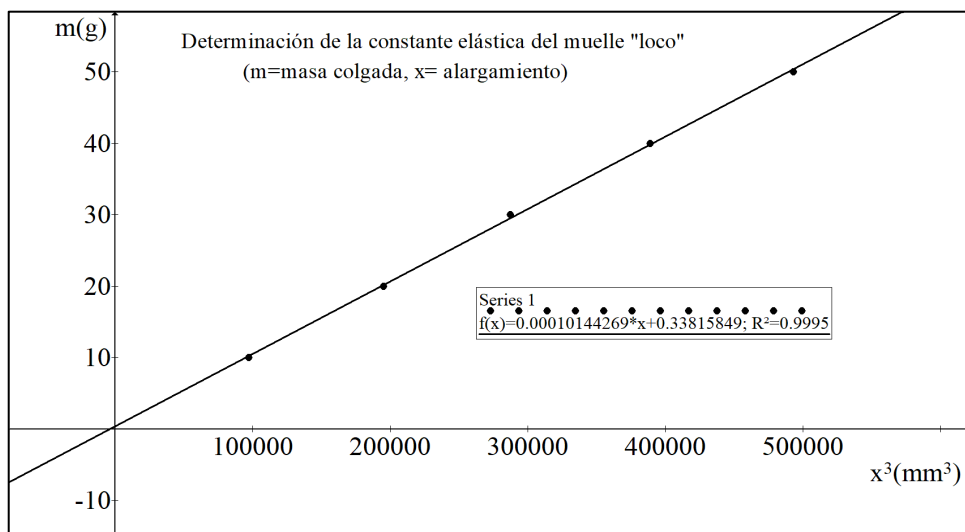
$$m = (k/g) x^3$$

cuya pendiente es k/g .

Construimos la siguiente tabla con los valores de las nuevas variables.

m (g)	10	20	30	40	50
x^3 (mm ³)	97 336	195 112	287 496	389 017	493 039

Representamos, en la gráfica siguiente, m en función de x^3 y, con un ajuste por mínimos cuadrados, se puede determinar la pendiente de la recta y por tanto k



En este caso la pendiente de la recta es (k/g) , y su valor:

$$\text{pendiente} = k/g = 1.0144269 \times 10^{-4} \text{ g/mm}^3$$

Que expresada en unidades del Sistema Internacional es

$$pendiente = k/g = 101.44269 \frac{kg}{m^3}$$

Según los datos $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, luego:

$$K = 994 \text{ N/m}^3$$

Por tanto, nuestro muelle cumple la siguiente ecuación, con los datos en el Sistema Internacional de Unidades:

$$F = -994 x^3$$

El péndulo de Pohl. Oscilaciones amortiguadas

XVIII Olimpiada de Física, fase local del Distrito Universitario de Valladolid (2007)

Un péndulo de Pohl (Figura 1) es un disco, o volante de inercia, que puede girar alrededor de un eje perpendicular al mismo que pasa por su centro. El volante está acoplado a un muelle espiral. Cuando el volante se desplaza un ángulo θ_0 de su posición de equilibrio y se deja libre, el muelle trata de devolverlo a su posición de equilibrio con una fuerza proporcional a la distancia dada por la ley de Hooke; el sistema comienza pues a oscilar alrededor de su posición de equilibrio. Si no hay amortiguamiento, se puede tomar como un movimiento armónico simple en la variable angular θ . Este sistema oscilante, lleva incorporado un freno electromagnético, que cuando se conecta a la corriente eléctrica actúa como amortiguador de la oscilación.

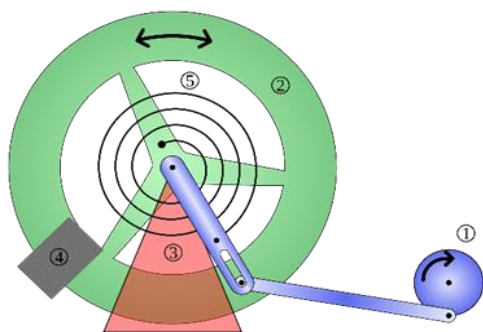


Figura 1:

1-motor, 2-volante de inercia, 3-soporte
4-freno electromagnético, 5-resorte espiral

También se puede conectar un motor que puede actuar como forzamiento (Véase más abajo la Figura 2). La amplitud de cada oscilación se puede medir en un círculo graduado acoplado al sistema, y el tiempo que duran las oscilaciones con un cronómetro. El péndulo de Pohl permite, por tanto, un estudio de las oscilaciones libres, amortiguadas y forzadas.

Si el péndulo es libre (no está amortiguado), las ecuaciones de Newton aplicadas al movimiento de rotación del disco nos dicen que el momento de fuerza recuperador aplicado al muelle ($M = -k\theta$) ha de ser igual al momento de inercia I_z del disco respecto al eje de giro por la aceleración angular del disco ($d^2\theta/dt^2$). Por tanto, se cumple que: $I_z \frac{d^2\theta}{dt^2} + k\theta = 0$. La solución a esta ecuación es: $\theta = \theta_0 \cos \omega_0 t$, donde θ_0 es la amplitud del movimiento que se corresponde con la desviación angular inicial, suponiendo que la velocidad inicial es nula, y ω_0 es la frecuencia angular de vibración, dada por $\omega_0 = (k/I_z)^{1/2}$. En un oscilador libre la amplitud se mantiene constante y, por tanto, la energía total se mantiene constante.



Figura 2

Al conectar el freno a la fuente de corriente eléctrica, el volante describe un movimiento oscilatorio amortiguado. El volante se ve sometido a un momento, producido por la fuerza de amortiguamiento del freno, proporcional a la velocidad angular del volante y en sentido contrario. La nueva ecuación es:

$$I_z d^2\theta/dt^2 + c d\theta/dt + k\theta = 0$$

Esta ecuación se suele escribir en la forma:

$$d^2\theta/dt^2 + 2\xi d\theta/dt + \omega_0^2\theta = 0$$

donde $\xi = c/2I_z$ es el coeficiente de amortiguamiento y ω_0 la frecuencia armónica del péndulo.

Hay tres tipos de soluciones a la ecuación anterior, y según sea la relación entre ω_0 y ξ :

$$\begin{aligned} \omega_0 < \xi & \text{ oscilador sobreamortiguado} \\ \omega_0 = \xi & \text{ oscilador con amortiguamiento crítico, y} \\ \omega_0 > \xi & \text{ oscilador subamortiguado} \end{aligned}$$

Los dispositivos experimentales de nuestra práctica hacen que el movimiento de nuestro péndulo sea *subamortiguado*. En este caso la ecuación del movimiento es:

$$\theta = \theta_0 e^{-\xi t} \cos \omega t, \quad \text{con: } \omega = (\omega_0^2 - \xi^2)^{1/2}$$

El péndulo amortiguado tiene una frecuencia ω menor que la del oscilador libre ω_0 y la amplitud de sus oscilaciones $A = \theta_0 e^{-\xi t}$ decrece exponencialmente con el tiempo. Para distintos valores de la intensidad I de corriente ponemos a oscilar el péndulo y medimos series temporales de amplitudes, a intervalos de un periodo de oscilación T . El coeficiente de amortiguamiento ξ se puede deducir de la razón entre dos amplitudes sucesivas.

Así la razón de amortiguamiento es: $(A_1(t)/A_2(t+T)) = e^{\xi T}$, y el decrecimiento logarítmico: ξT viene dado por: $\xi T = \ln(A_1(t)/A_2(t+T))$.

Los valores de ξ , así calculados, para cada intensidad de corriente I vienen dados en la tabla 1.

Tabla 1						
ξ (s ⁻¹)	0.005	0.056	0.170	0.346	0.585	0.886
I (A)	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25

El objetivo de la práctica consiste en encontrar la relación entre el coeficiente de amortiguamiento y la intensidad de corriente aplicada al freno magnético.

Para ello debes realizar los siguientes pasos:

- Representa los valores de ξ en función de la intensidad de corriente I , construyendo así la Gráfica 1. Como verás la dependencia no es lineal.
- Trata entonces de ajustar los datos a un polinomio de 2º grado, del tipo: $\xi = a + b I^2$, donde a y b tienes que determinarlos haciendo los cambios de variable pertinentes en la ecuación anterior, de tal manera que obtengas una representación lineal. Determina a y b .
- Ahora, intenta mejorar el ajuste utilizando un polinomio de 2º grado, del tipo:

$$\xi = d + e I + f I^2$$

Para ello, ten en cuenta que, derivando el polinomio anterior, y sustituyendo la derivada por un cociente de incrementos obtendrás una función lineal en I

$$\Delta\xi/\Delta I = e + 2f I$$

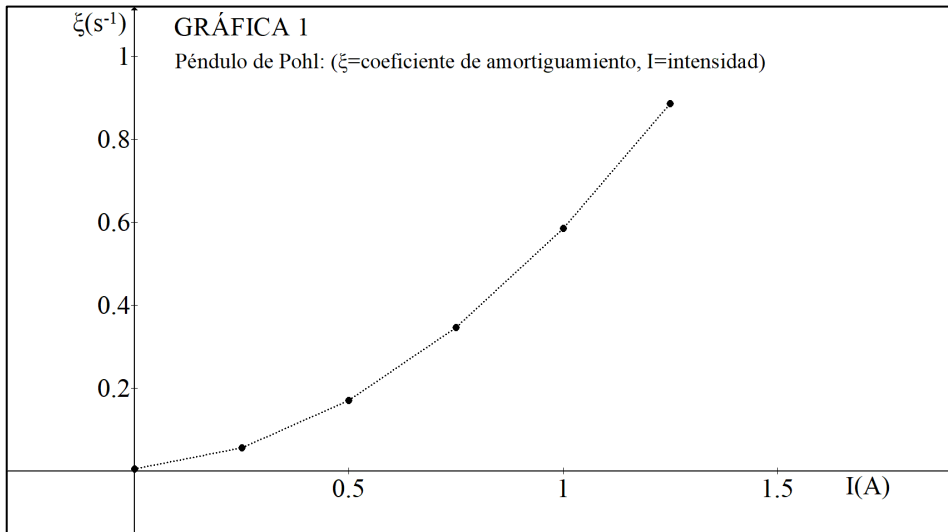
Construye una nueva Tabla con los valores adecuados de $\Delta\xi/\Delta I$ y de I .

Realiza una representación gráfica de la cual obtengas los coeficientes d , e y f del polinomio.

- Interpreta el significado de los valores de a y de d .

SOLUCIÓN

- a) La gráfica 1 pedida se construye con los valores de la Tabla 1 y es la siguiente:

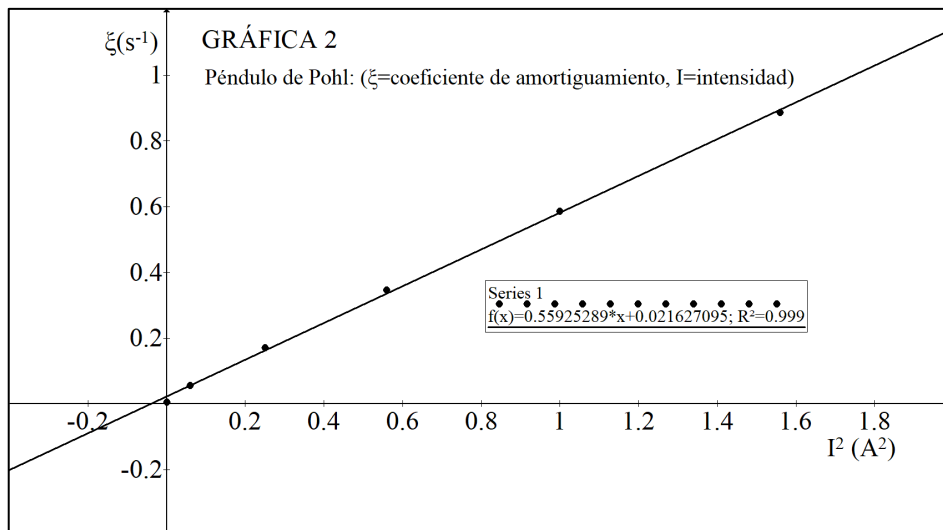


- b) Construimos la tabla 2 con los valores de I^2 y los de la tabla 1.

Tabla 2						
ξ (s^{-1})	0.005	0.056	0.170	0.346	0.585	0.886
I (A)	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25
I^2 (A^2)	0.00	0.06	0.25	0.56	1.00	1.56

La gráfica 2 representa la función lineal $\xi(I^2) = a + bI^2$. Suponemos que los alumnos no conocen el ajuste por mínimos cuadrados, por lo tanto, ajustarán la recta a los puntos con una regla. La ordenada en el origen es el valor de a , y la pendiente de la recta, obtenida como cociente entre los catetos de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es la recta, será el valor de b .

El ajuste por mínimos cuadrados nos da los valores siguientes de la pendiente y de la ordenada en el origen:



ordenada en el origen = $a = 0.0216 \text{ s}^{-1}$

pendiente = $b = 0.5593 \text{ s}^{-1}\text{A}^{-2}$

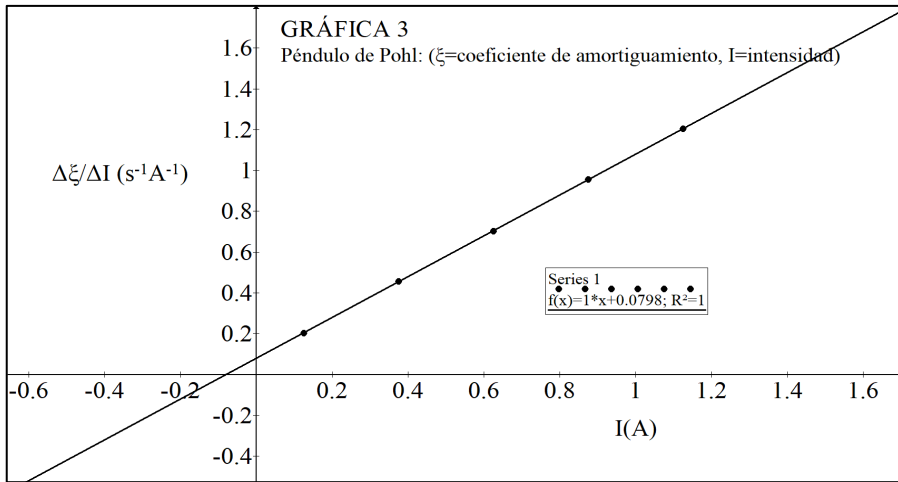
Intentaremos un mejor ajuste del coeficiente de amortiguamiento a un polinomio en I con todos los términos como indica el guion.

- c) Para ajustar el polinomio $\xi = d + e I + f I^2$, construimos la tabla 3 con los valores de $\Delta\xi/\Delta I$ y de I . Para ello hemos utilizado la tabla 1 y hemos tomado como valor representativo de I el valor central del intervalo ΔI . La ecuación es:

$$\Delta\xi/\Delta I = e + 2f I$$

$\Delta\xi/\Delta I \text{ (s}^{-1}\text{A}^{-1}\text{)}$	0.204	0.456	0.704	0.956	1.204
$I \text{ (A)}$	0.125	0.375	0.625	0.875	1.125

Representamos, en la gráfica 3, los puntos de la tabla 3, los puntos están muy bien alineados; como en el apartado anterior, ajustamos la recta por el método de mínimos cuadrados.



Obtenemos e y $2f$ de la ordenada en el origen y de la pendiente. Los valores son:

$$\text{ordenada en el origen} = e = 0.0798 \text{ s}^{-1}\text{A}^{-1}$$

$$\text{pendiente} = 2f = 1.000 \text{ s}^{-1}\text{A}^{-2}$$

Los puntos de la gráfica 3 están muy bien alineados, luego la función

$$\xi = \text{constante} + 0.0798 I + 0.500 I^2$$

es una buena descripción del valor del coeficiente de amortiguamiento del péndulo de Pohl para el intervalo de intensidades del freno magnético estudiado.

- d) Los valores de a y de $d = \text{constante}$, son los valores que toma el coeficiente de amortiguamiento cuando el freno magnético no está conectado. Sería el amortiguamiento intrínseco del péndulo de Pohl, ya que todo sistema oscilatorio real va perdiendo energía por rozamiento debido a diversas causas y por lo tanto va disminuyendo su amplitud. En el apartado anterior no se puede determinar el valor de la *constante*; y el valor de $a = 0.0216 \text{ s}^{-1}$, obtenido en el apartado b, contiene parte de ecuación de primer grado en la intensidad, (eI). Por tanto, es de esperar que el valor de la constante sea más pequeño y se acerque al experimental.

Nota:

La función teórica para la obtención de los datos experimentales fue:

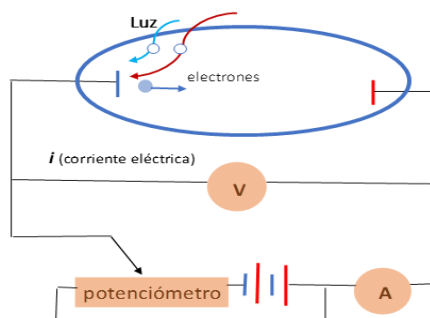
$$\xi = 0.005 + 0.080 I + 0.500 I^2$$

Efecto fotoeléctrico (EFE)

XIX Olimpiada de Física, fase local del Distrito Universitario de Valladolid (2008)

INTRODUCCIÓN

La emisión de electrones por metales iluminados con luz de determinada frecuencia se denomina efecto fotoeléctrico o emisión fotoeléctrica y fue observada por Hertz en 1887. Sus características esenciales son:



- La intensidad de la corriente eléctrica i producida es proporcional a la intensidad de la luz I recibida por el metal. Este resultado era esperado puesto que al duplicar la radiación incidente (I) debe duplicarse el número de electrones emitidos.
- Cuando la d.d.p. V entre el ánodo y el cátodo se hace negativa, los electrones producidos por efecto fotoeléctrico son repelidos por el ánodo. Sólo los electrones con una energía cinética superior a, eV , alcanzan el ánodo, siendo e la carga del electrón. Hay una d.d.p. V_0 por encima de la cual ningún electrón alcanza el ánodo. Dicho potencial V_0 se denomina potencial de detención o de corte. Por tanto, la energía cinética máxima de los electrones emitidos por el metal está relacionada con el potencial de corte mediante la ecuación:

$$E_{c,max} = \frac{1}{2} m v_{max}^2 = eV_0 \quad (\text{ecuación 1})$$
- La velocidad de los electrones, y por tanto su energía cinética y el potencial de corte, no depende de la intensidad I de la luz incidente, sino solamente de su frecuencia, ν .
- Para cada metal utilizado como cátodo existe una frecuencia luminosa umbral, ν_0 , por debajo de la cual no hay emisión fotoeléctrica, $i = 0$.
- Además, de darse, el efecto es instantáneo.

Salvo el apartado a), los demás no pueden explicarse mediante la clásica teoría ondulatoria de la luz.

En 1905, Einstein utilizó la teoría cuántica de Planck para explicar el efecto fotoeléctrico. Para Einstein, la energía electromagnética no está distribuida continuamente en el espacio sino cuantizada en paquetes denominados fotones. La energía de cada fotón es: $h\nu$. Por tanto, los electrones del cátodo reciben energía en cuantos: $h\nu$, donde h es la constante de Planck. Si W_0 es la energía de extracción del metal (la energía mínima necesaria para que un electrón escape del metal o trabajo de extracción), la energía cinética del electrón arrancado será:

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 = h\nu - h\nu_0 \quad (\text{ecuación 2})$$

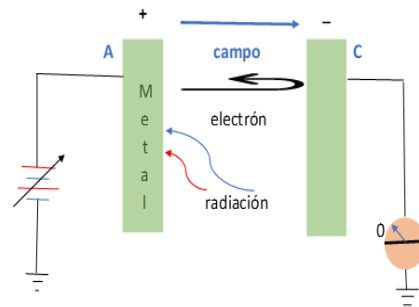
Si $h\nu > W_0$, hay EFE, si no, no. Luego la frecuencia umbral cumple que: $h\nu_0 = W_0$ y como $E_c = \frac{1}{2} mv^2 = eV_0$, tenemos que:

$$h\nu = h\nu_0 + eV_0 \quad (\text{ecuación 3})$$

Si la ecuación anterior es correcta, al representar V_0 en función de ν , se debe obtener una línea recta, cuya pendiente es independiente de la sustancia emisora (metal del cátodo). En aquella época no había datos experimentales sobre la dependencia entre V_0 y ν , pero en 1914 y posteriormente en 1916, Millikan demostró que sus datos experimentales se ajustaban a la ecuación 3.

PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

Mediante una fuente de potencial variable, tal como se ve en la figura, podemos medir la energía cinética máxima de los electrones emitidos. Aplicando una diferencia de potencial V entre las placas **A** y **C** se frena el movimiento de los fotoelectrones emitidos. Al aumentar poco a poco el potencial V , la intensidad medida en el amperímetro disminuye hasta que se alcanza un voltaje V_0 determinado, a partir



del cual el amperímetro no marca el paso de corriente; lo que significa que ni aún los electrones más rápidos llegan a la placa **C**. Para ese valor V_0 del potencial de corte, la energía potencial de los electrones se hace igual a la energía cinética (ecuación 1).

Variando la frecuencia (o la longitud de onda) de la radiación que ilumina la placa, obtenemos un conjunto de valores del potencial de detención V_0 .

Para un determinado metal, la tabla que viene a continuación indica los valores del potencial de corte para diferentes longitudes de onda de la luz incidente en el EFE.

$V_0(\text{V})$	1.48	1.15	0.93	0.62	0.36	0.24
$\lambda (10^{-7}\text{m})$	3.66	4.05	4.36	4.92	5.46	5.79

El objetivo de la práctica consiste en encontrar el valor de la constante de Planck h y el valor de la frecuencia umbral ν_0 del material del cátodo.

Para ello debes realizar los siguientes pasos:

- Construye una nueva tabla de datos a partir de la anterior, en la que incluyas el valor de la frecuencia de la radiación incidente, usando la ecuación $\nu = c/\lambda$.
- Representa los valores del potencial de corte en función de la frecuencia de la radiación incidente. Escribe la ecuación de esta recta a partir de la ecuación 3.
- De la pendiente de la recta, halla el valor de la constante de Planck.
- Determina de la gráfica, el valor de la frecuencia umbral para el material utilizado.
- ¿Cuál es la unidad de la constante de Planck en el Sistema Internacional de Unidades? Determina la ecuación de dimensiones de la constante de Planck

Datos: Adopta como valor de la carga del electrón: $e = 1.6 \times 10^{-19}\text{C}$ y como velocidad de la luz: $c = 3 \times 10^8\text{m/s}$.

SOLUCIÓN

- a) En primer lugar, hallamos la frecuencia de la luz incidente, con la ecuación $\nu = c/\lambda$.

A continuación, construimos la tabla siguiente:

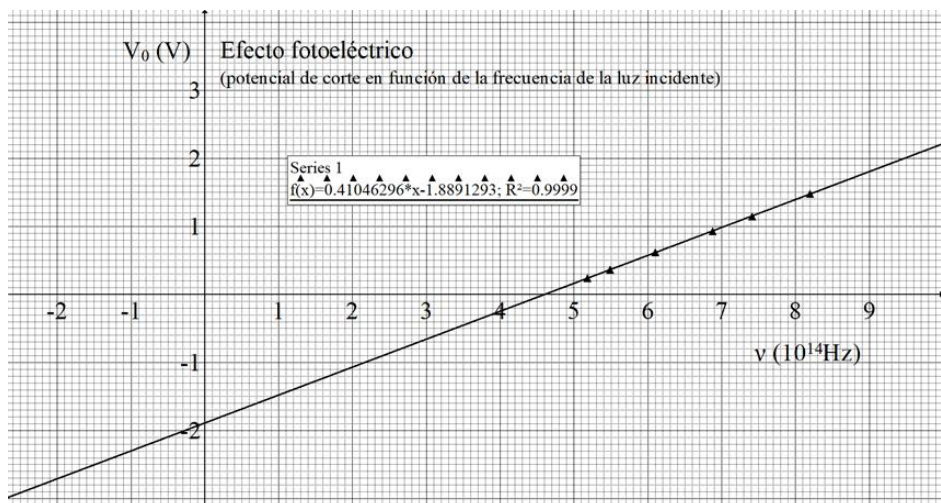
$V_0(V)$	1.48	1.15	0.93	0.62	0.36	0.24
$\lambda (10^{-7}m)$	3.66	4.05	4.36	4.92	5.46	5.79
$\nu(10^{14}Hz)$	8.20	7.41	6.88	6.10	5.49	5.18

- b) De la ecuación 3, $h\nu = h\nu_0 + eV_0$, despejamos el potencial de corte, pudiendo escribir:

$$V_0 = \frac{h\nu}{e} - \frac{h\nu_0}{e}$$

El potencial de corte V_0 es, por tanto, una función lineal de la frecuencia ν . La pendiente de la recta es, h/e , y la abscisa en el origen es, ν_0 ; mientras que, la ordenada en el origen es: $-W_0/e = -h\nu_0/e$

Con los datos de la tabla anterior, representamos los valores del potencial de corte en función de la frecuencia de la radiación incidente. La gráfica es la siguiente:



- c) De dicha gráfica extraemos el valor de la pendiente.

$$\text{pendiente} = h/e = 4.1 \times 10^{-15} \text{ Vs} = 4.1 \times 10^{-15} \text{ Js/C}$$

y teniendo en cuenta el valor de la carga del electrón $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{C}$, la constante de Planck valdría:

$$h = 6.6 \times 10^{-34} \text{Js}$$

- d) La frecuencia umbral para el material utilizado es la abscisa en el origen, que se puede leer en la gráfica; también, la podemos obtener de la ordenada en el origen, hallada en el ajuste por mínimos cuadrados, o leída en la gráfica.

$$h\nu_0/e = 1.8891 \text{ V.}$$

$$\nu_0 = 4.6 \times 10^{14} \text{Hz}$$

- e) Como $h\nu$ es la energía de un fotón, y ν es una frecuencia, la unidad de h en el S.I. es Js (julio por segundo). La ecuación de dimensiones de h será energía dividido por frecuencia, es decir.

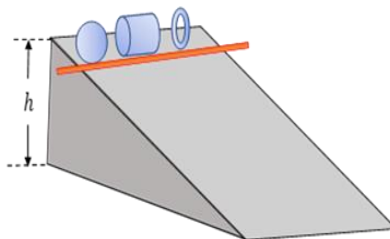
$$[h] = [\text{energía/frecuencia}] = \frac{MLT^{-2}L}{T^{-1}} = ML^2T^{-1}$$

¿Rodadura o rotación con deslizamiento?

XX Olimpiada de Física, fase local del Distrito Universitario de Valladolid (2009)

INTRODUCCIÓN TEÓRICA

Cuando un aro, un disco, un cilindro, etc., de masa m , se deja en la parte superior de un plano inclinado de ángulo θ , el tipo de movimiento que realiza depende del ángulo del plano y del coeficiente de rozamiento μ entre el cuerpo y el plano.



Para ángulos pequeños y coeficientes de rozamiento altos, el cuerpo inicia un *movimiento de rodadura sin deslizamiento*, cuyas ecuaciones teóricas son:

$$mg \sin \theta - F_r = ma_c \quad (1)$$

(2ª ley de Newton para la traslación del c.d.m.)

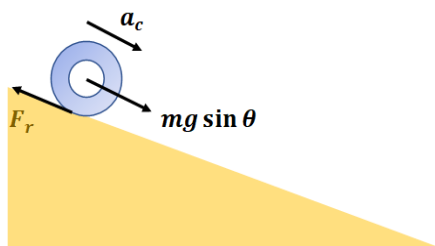
$$F_r R_e = I \alpha \quad (2)$$

(ecuación fundamental de la dinámica de rotación)

$$a_c = \alpha R_e \quad (3)$$

(condición de rodadura)

Donde: c.d.m. es el centro de masas del cuerpo, g es la aceleración de la gravedad, R_e es su radio externo, a_c es la aceleración lineal del c.d.m., α es la aceleración angular, I es el momento de inercia del cuerpo respecto al c.d.m., y F_r es la fuerza de rozamiento necesaria para la rodadura que no es disipativa.



En el caso de que el ángulo del plano inclinado sea grande o el coeficiente de rozamiento pequeño la F_r alcanza su valor máximo dado por la ecuación:

$$F_r \text{ (máxima)} = \mu N = \mu mg \cos \theta \quad (4)$$

y el cuerpo *rueda y desliza*. Ahora la fuerza de rozamiento sí es disipativa. En este caso *NO se cumple la ecuación (3)*, que es la condición de rodadura, y el movimiento está regido por las ecuaciones (1), (2), y (4).

Para un tubo (cilindro hueco) de masa m y radios externo e interno R_e y R_i , el momento de inercia viene dado por la expresión:

$$I = \frac{1}{2} m (R_e^2 + R_i^2) \quad (5)$$

Cuando no hay deslizamiento, las ecuaciones (1), (2) y (3) nos permiten hallar la dependencia entre a_c y $\sin \theta$:

$$a_c = mg \sin \theta / \left(m + \left(I / R_e^2 \right) \right) \quad (6)$$

pudiendo observarse que es lineal.

En el caso de que haya deslizamiento, las ecuaciones (1), (2) y (4) nos permiten hallar la dependencia entre a_c y θ

$$a_c = g \sin \theta - \mu g \cos \theta \quad (7)$$

que, ahora, ya no es lineal.

En las ecuaciones (6) y (7) vemos, pues, un cambio en la forma de la dependencia de la aceleración del c.d.m. con el ángulo del plano.

PARTE EXPERIMENTAL

Se ha dejado caer un tubo de masa: $m = 500$ g, y radios externo e interno: $R_e = 100$ mm y $R_i = 90$ mm, desde la parte superior de un plano inclinado de ángulo θ variable, y se ha medido la aceleración del c.d.m. para diferentes ángulos del plano. Los datos se encuentran en la tabla.

$\theta(^{\circ})$	5	10	15	20	25	30	35	40	45
a_c (m s ⁻²)	0.45	0.90	1.33	1.99	2.83	3.64	4.43	5.19	5.90

1. Representa, en papel milimetrado, la aceleración del c.d.m. en función del ángulo del plano inclinado y trata de detectar para qué ángulo se observa un cambio de tendencia en el comportamiento de la aceleración de centro de masas, a_c . Dicho ángulo es el *ángulo crítico* a partir del cual comienza el deslizamiento.

Nota: Para ángulos inferiores al crítico la ecuación válida es la (6); mientras que, para ángulos grandes es la (7).

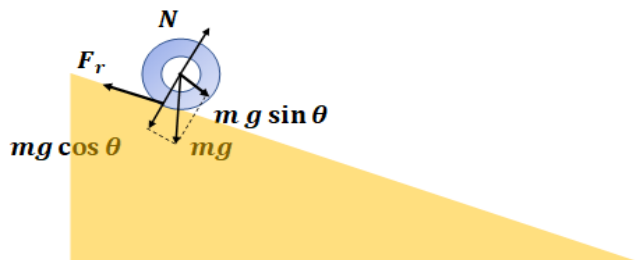
2. Utilizaremos la ecuación (7), $a_c = g \sin \theta - \mu g \cos \theta$, para determinar el valor de la aceleración de la gravedad g , y el coeficiente de rozamiento μ . Para ello, si dividimos por el $\cos \theta$, podemos escribir dicha ecuación como:

$$a_c / \cos \theta = g \tan \theta - \mu g \quad (8)$$

- Haz un cambio de variable adecuado en la ecuación (8) para obtener una representación lineal y determinar el valor de g de la pendiente y el de μ de la ordenada en el origen.
 - Construye una tabla con los valores de la ordenada y de la abscisa que vas a utilizar.
 - Representa dichos valores en papel milimetrado y, de la gráfica, obtén la pendiente y la ordenada en el origen.
 - Halla el valor del coeficiente de rozamiento y de la aceleración de la gravedad.
3. Una vez hallados g y μ , determina el valor del *ángulo crítico* a partir de las ecuaciones (1), (2), (3), (4) y (5), y comprueba si se corresponde con el valor encontrado en el apartado 1.

SOLUCIÓN

Las ecuaciones son:



$$mg \sin \theta - F_r = ma_c \quad (1)$$

$$F_r R_e = I \alpha \quad (2)$$

$$a_c = \alpha R_e \quad (3)$$

$$F_r (\text{máxima}) = \mu N = \mu mg \cos \theta \quad (4)$$

$$I = \frac{1}{2} m (R_e^2 + R_i^2) \quad (5)$$

Para la rodadura:

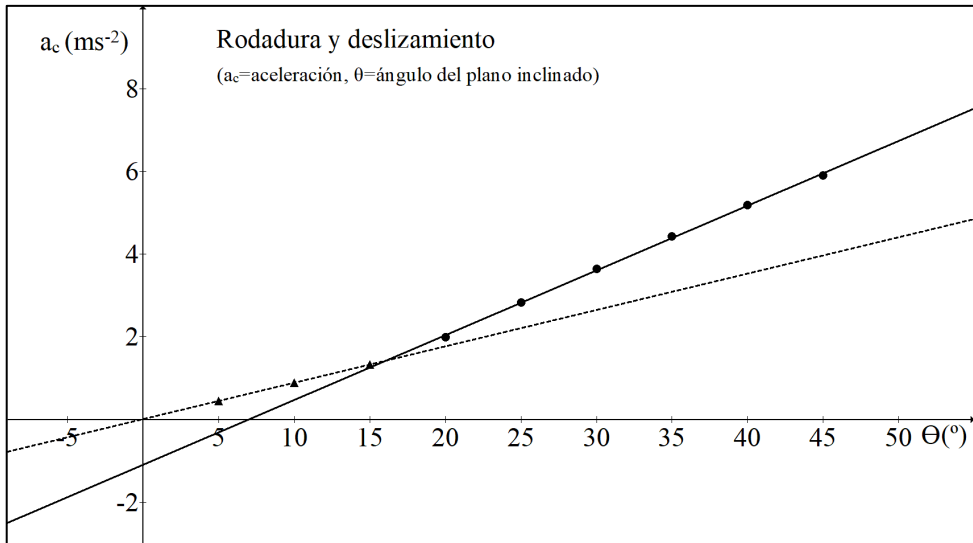
$$a_c = mg \sin \theta / \left(m + \left(I / R_e^2 \right) \right) \quad (6)$$

Para el deslizamiento:

$$a_c = g \sin \theta - \mu g \cos \theta \quad (7)$$

$$a_c / \cos \theta = g \tan \theta - \mu g \quad (8)$$

1. En la gráfica siguiente, que representa la aceleración del c.d.m. en función del ángulo del plano, se observa un cambio de tendencia en el valor de la aceleración del c.d.m. para valores del ángulo del plano inclinado entre 15° y 20° . Si trazamos sendas rectas (aunque la ecuación 6 es lineal en $\sin \theta$, no en θ), agrupando por una parte los tres primeros datos, y por otra, los seis últimos, ambas se cortan. Podemos concluir que el valor del ángulo crítico por encima del cual el disco rueda y desliza será aproximadamente de: $\theta_{\text{crítico}} \cong 16^\circ$



2. Construimos la tabla siguiente con los valores de $a_c/\cos \theta$ y de $\tan \theta$, que harán, respectivamente, el papel de ordenada y abscisa, para ángulos superiores al crítico.

$\theta(^{\circ})$	5	10	15	20	25	30	35	40	45
a_c (ms^{-2})	0.45	0.90	1.33	1.99	2.83	3.64	4.43	5.19	5.90
$\tan \theta$	-	-	-	0.364	0.466	0.577	0.700	0.839	1.000
$a_c/\cos \theta$ ($m s^{-2}$)	-	-	-	2.12	3.12	4.21	5.41	6.77	8.34

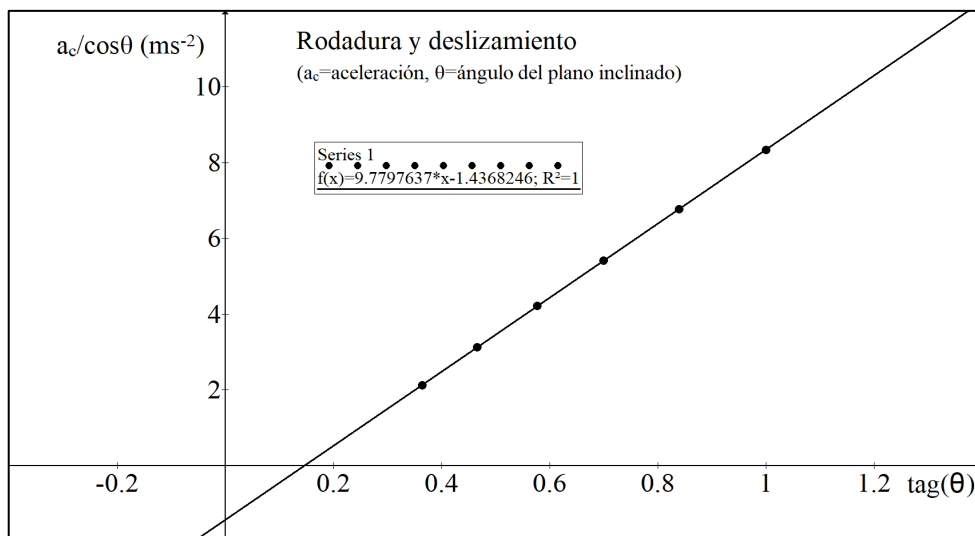
En la gráfica siguiente, se han representado los valores de $a_c/\cos \theta$ en función de la $\tan \theta$. Ajustamos la recta por el método de mínimos cuadrados. De la pendiente obtenemos el valor de la aceleración de la gravedad.

$$pendiente = g = 9.78 \text{ ms}^{-2}$$

Hallamos el valor del coeficiente de rozamiento sabiendo el valor de la ordenada en el origen.

$$ordenada \text{ en el origen} = -\mu g = -1.437 \text{ ms}^{-2}$$

$$\mu = 0.147$$



3. Teniendo en cuenta las ecuaciones (1), (2) y (3), podemos deducir que $mg \sin \theta - \frac{I a_c}{R_e^2} = m a_c$, que despejando a_c , es la ecuación (6).

La dependencia del ángulo crítico con las características del disco y con el coeficiente de rozamiento, las obtenemos, sin más que igualar las aceleraciones dadas por las ecuaciones (6) y (7).

$$mg \sin \theta / \left(m + \left(I / R_e^2 \right) \right) = g \sin \theta - \mu g \cos \theta$$

Sustituyendo el valor del momento de inercia: $I = \frac{1}{2} m (R_e^2 + R_i^2)$, simplificando y dividiendo por el $\cos \theta$, llegamos a la ecuación buscada

$$\tan \theta_{\text{critico}} = \mu (R_i^2 + 3R_e^2) / (R_i^2 + R_e^2)$$

sustituyendo los datos y operando

$$\tan \theta_{\text{critico}} = 0.147 \frac{90^2 + (3 \times 100^2)}{90^2 + 100^2} = 0.3094$$

Obtenemos para el ángulo crítico el valor de

$$\theta_{\text{critico}} = 17.2^\circ.$$

En el apartado 1, se aproximó entre 15° y 20° , un valor de 16° .

Crisis y café caliente

XXI Olimpiada de Física, fase local del Distrito Universitario de Valladolid (2010)

INTRODUCCIÓN TEÓRICA

Quizás, si estabas conectado a la red el 4 de enero de este año, viste como el buscador te dejaba caer una manzana. A un físico ese gesto siempre le recuerda a Newton y, efectivamente, al pinchar en la manzana recordaba la red que era el aniversario del nacimiento de Newton. Además, ocurría que mi café estaba demasiado caliente, ¡quemaba!, y al lado, el periódico nos contaba la reunión de “expertos” para salir de la “crisis”. Sonreí, eran demasiadas coincidencias y no me resisto a contaros una pequeña historia y aprovechar para que me calibréis mi taza de café y saber exactamente el tiempo que debo de esperar hasta que su temperatura sea la adecuada.



¡Me gusta a 45°C!

Newton (1642-1727) era famoso en la comunidad científica por sus *Principia* y había formado parte en 1687 de la comisión que la universidad de Cambridge envió a Londres para oponerse a las prebendas a los católicos del rey Jacobo II. Su éxito le valió ser elegido por la universidad como representante en el parlamento, formado como consecuencia del desembarco de Guillermo de Orange y el exilio de Jacobo II a finales de 1688. En su actividad parlamentaria colaboró con Charles Montagu (posteriormente lord Halifax), antiguo alumno de Cambridge. En 1694, Montagu fue nombrado Canciller de la Hacienda Real (como un ministro de hacienda actual) y al año siguiente otorgó a Newton el cargo de Inspector de la Casa de la Moneda, siendo ascendido a director (como el Gobernador del Banco Central) en 1699. Los políticos habían encargado al físico más grande de su época, y quizás de todos los tiempos, evitar el colapso económico por falta de moneda fiable, ya que, se acuñaban monedas supuestamente de oro con importantes contenidos en plata. La “crisis” fue resuelta por Newton al estudiar los tiempos de enfriamiento de los diferentes metales y aleaciones, lo que permitía descubrir a los falsificadores y castigarlos con la horca, según las leyes de la época.

Pero volvamos a mi taza de café. La *ley de enfriamiento de Newton* nos dice que, si tenemos una masa m a una temperatura T , siendo la temperatura ambiente T_0 y la diferencia entre estas temperaturas no es demasiado grande, la transferencia de calor en la unidad de tiempo, dQ/dt , es proporcional, aproximadamente, a la superficie de enfriamiento A de la masa y a la diferencia de temperaturas $(T - T_0)$. Siendo h el *coeficiente superficial de transferencia de calor*.

$$\frac{dQ}{dt} = hA(T - T_0) \quad \text{ecuación (1)}$$

Si la masa m tiene un calor específico c , sabemos que el cuerpo pierde una cantidad de calor dQ en el intervalo de tiempo entre t y $t + dt$, disminuyendo su temperatura en dT , y se cumple:

$$dQ = -mcdT \quad \text{ecuación (2)}$$

Sustituyendo (2) en (1):

$$mc \left(\frac{dT}{dt} \right) = -hA(T - T_0) \quad \text{ecuación (3)}$$

Es decir, la derivada respecto al tiempo de la temperatura del cuerpo es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio exterior.

Reordenando la ecuación (3):

$$\frac{dT}{(T - T_0)} = -\left(\frac{hA}{mc} \right) dt \quad \text{ecuación (4)}$$

Integrando esta ecuación entre la temperatura inicial del cuerpo T_i en el instante $t = 0$, y la temperatura T , en el instante t , obtenemos:

$$\ln(T - T_0) - \ln(T_i - T_0) = -\left(\frac{hA}{mc} \right) t \quad \text{ecuación (5)}$$

Despejando T :

$$T = T_0 + (T_i - T_0)e^{-\left(\frac{hA}{mc} \right) t} \quad \text{ecuación (6)}$$

Esta es una ley de decaimiento exponencial de la temperatura con el tiempo, como se intuye a la vista de la ecuación (3).

MÉTODO EXPERIMENTAL

El objetivo de la práctica es determinar h para una taza de café de las siguientes características:

Masa: $m = 200 \text{ g}$

Calor específico del café: $c = 4180 \text{ J/kg K}$

Superficie de enfriamiento: $A = 125 \text{ cm}^2$

Temperatura ambiente: $T_0 = 20^\circ\text{C}$

Temperatura inicial del café: $T_i = 100^\circ\text{C}$

Medimos la temperatura del café a intervalos irregulares de tiempo.

Los datos experimentales se recogen en la tabla siguiente:

$t(\text{s})$	0	20	60	120	240	360	480	600	720	840
$T(^\circ\text{C})$	100.0	92.9	80.6	65.9	46.3	35.1	28.6	25.0	22.8	21.7

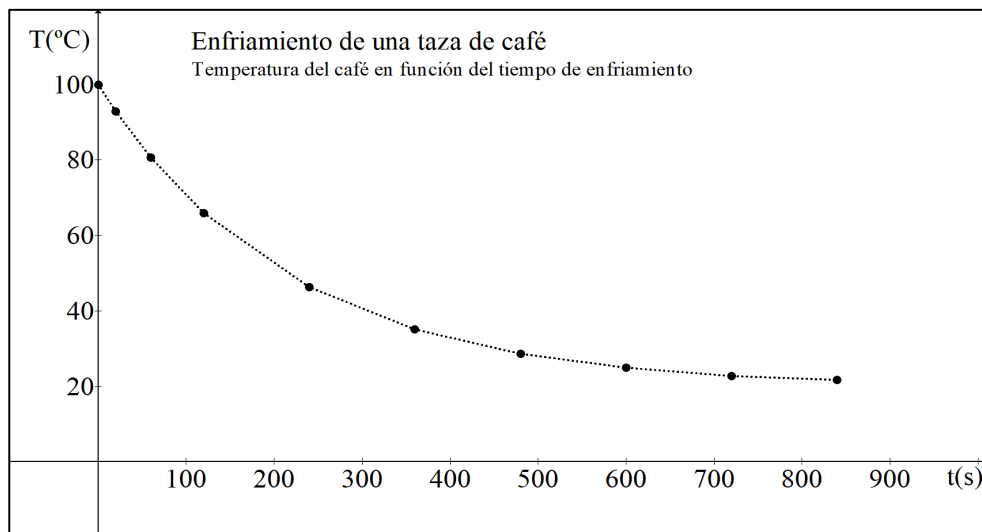
1. Representa en el papel milimetrado la temperatura del café en función del tiempo.
2. Para obtener h , necesitas linealizar la representación anterior. Tomando logaritmos en la ecuación (6) obtenemos:

$$\ln(T - T_0) = \ln(T_i - T_0) - \left(\frac{hA}{mc}\right)t \quad \text{ecuación (7)}$$

3. Construye una nueva tabla con los valores adecuados para obtener una representación lineal, en función del tiempo t , de cuya pendiente puedas obtener el valor de h .
4. Realiza en el papel milimetrado la representación lineal adecuada en función del tiempo. Halla la pendiente y determina h .
5. Una vez determinado h , calcula cuanto tiempo tengo que esperar para que el café esté a mi gusto (recuerda 45°C) si el café está inicialmente a 75°C .

SOLUCIÓN

1. La gráfica siguiente representa la temperatura del café en función del tiempo.



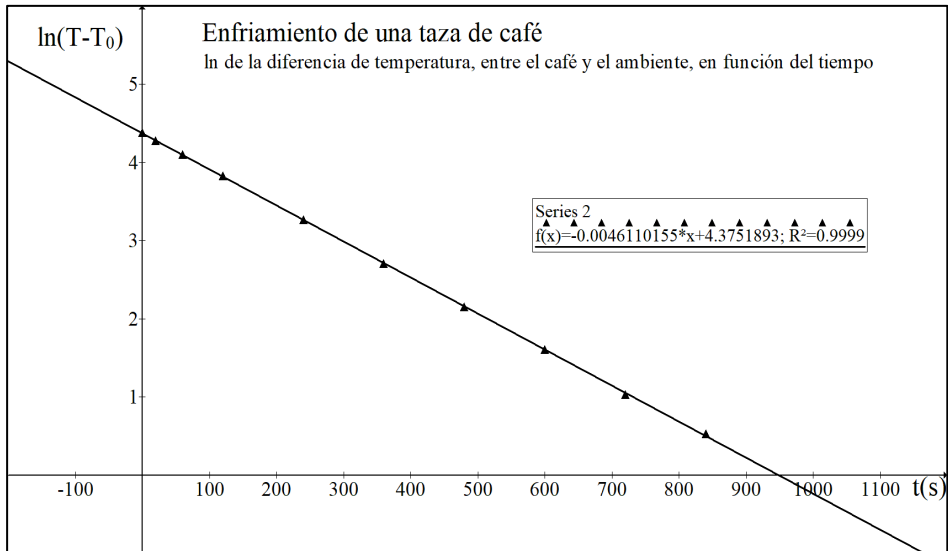
2. Como $T_0 = 20^\circ\text{C}$, la tabla pedida es la siguiente:

$t(s)$	0	20	60	120	240	360	480	600	720	840
$T(^\circ\text{C})$	100.0	92.9	80.6	65.9	46.3	35.1	28.6	25.0	22.8	21.7
$(T - T_0)^\circ\text{C}$	80.0	72.0	60.6	45.9	26.3	15.1	8.6	5.0	2.8	1.7
$\ln(T - T_0)$	4.38	4.28	4.10	3.83	3.27	2.71	2.15	1.61	1.03	0.53

Representando los valores de la tabla, $\ln(T - T_0)$ en función de t , se observa que los puntos están alineados sobre una recta de pendiente

$$\text{pendiente} = p = -\left(\frac{hA}{mc}\right) = - 0.004611 \text{ s}^{-1}$$

La gráfica es la siguiente:



3. Teniendo en cuenta los datos del problema en el S.I.

$$\text{Masa: } m = 200 \text{ g} = 0.200 \text{ kg}$$

$$\text{Calor específico del café: } c = 4180 \text{ J/kg K}$$

$$\text{Superficie de enfriamiento: } A = 125 \text{ cm}^2 = 0.0125 \text{ m}^2$$

y el valor de la pendiente

$$p = -\left(\frac{hA}{mc}\right) = -0.004611 \text{ s}^{-1}$$

La constante h , (coeficiente superficial de transferencia de calor), la hallamos a partir de la pendiente de la recta.

$$h = -pmc/A$$

Sustituyendo todos los datos en el S.I. y operando

$$h = \frac{0.004611 \times 0.200 \times 4180}{0.0125} = 308 \text{ J/Km}^2\text{s}$$

$$h = 308 \text{ J/Km}^2\text{s}$$

4. El tiempo pedido se calcula despejando t de la ecuación (7) y sustituyendo los datos en el S.I.

$$\ln(T - T_0) = \ln(T_i - T_0) - (hA/mc)t$$

$$t = -\left(\frac{mc}{hA}\right) \ln \left[\frac{(T - T_0)}{(T_i - T_0)} \right]$$

$$t = -\left(\frac{0.200 \times 4180}{308 \times 0.0125}\right) \ln \frac{(45 - 20)}{(75 - 20)}$$

$$t = 171s = 2 \text{ min y } 51 \text{ s}$$

¡Tendré que esperar casi tres minutos para que mi café esté a 45°C!

Nota:

Se obtienen valores muy próximos a los anteriores con un ajuste manual en el papel milimetrado

¿Cuál es la edad de la Tierra?

XXII Olimpiada de Física, fase local del Distrito Universitario de Valladolid (2011)

A la pregunta anterior podemos responder usando algún *proceso natural que nos sirva de reloj*.

La radiactividad natural es un fenómeno que afecta al núcleo de ciertos átomos, por el cual, un núcleo radiactivo llamado padre se transforma en otro denominado hijo, que a su vez puede o no ser radiactivo. Los principales tipos de radiactividad consisten en la emisión α , β , o γ . Las partículas α son núcleos de helio, las partículas β son electrones (también pueden ser positrones) y la radiación γ son ondas electromagnéticas de alta energía.

Cada tipo de núcleo radiactivo está caracterizado por su *constante de desintegración*, λ , que se define como la probabilidad de que un núcleo se desintegre en la unidad de tiempo. Por tanto, si hay un número N de átomos de un núcleo radiactivo en una muestra, el número de ellos que se desintegran en el tiempo dt será

$$dN = -\lambda N dt \quad (\text{ecuación 1})$$

donde el signo menos indica que desaparecen parte de los núcleos iniciales al aumentar el tiempo; ecuación que, integrada, nos lleva a

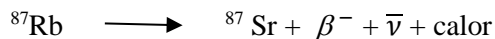
$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (\text{ecuación 2})$$

donde N_0 es el número de átomos radiactivos en el instante inicial y N los que quedan sin desintegrar al cabo de un tiempo t . Se define periodo de semidesintegración T al tiempo necesario para que la muestra de átomos radiactivos se reduzca a la mitad y por tanto $T = \ln 2 / \lambda$.

Por tanto, la medida de la cantidad de un elemento radiactivo nos puede servir como medida de tiempo. La determinación de las concentraciones de los elementos en rocas y minerales debe ser muy exacta si se han de emplear para la determinación de edades. Esto no puede conseguirse por métodos químicos porque su resolución no es lo suficientemente alta para estos propósitos. Afortunadamente, ya desde 1918 y 1919 dos investigadores, F. W. Aston en Inglaterra y A. J. Dempster en los Estados

Unidos habían construido espectrógrafos de masas, aparatos que permiten la determinación de cantidades muy pequeñas de elementos y sustancias. Este instrumento es esencial para las determinaciones del tiempo geológico. Uno de los sistemas de decaimiento más usualmente utilizado en geología es el *reloj de rubidio-estroncio*. La primera determinación de una edad geológica con este método fue hecha por O. Hahn y sus colaboradores en 1943.

El rubidio (Rb) es un metal, que por su radio atómico parecido al del potasio tiende a sustituirlo en las redes cristalinas que componen los minerales de las rocas como las micas, feldespatos o los que forman arcillas. El Rb tiene dos isótopos naturales, el ^{85}Rb y el ^{87}Rb , con una abundancia natural del 72.2% y del 27.8% respectivamente. El estroncio (Sr), por otra parte, tiene cuatro isótopos estables naturales: ^{88}Sr , ^{87}Sr , ^{86}Sr , y ^{84}Sr , con una abundancia de 82.5%, 7.0%, 9.9% y 0.6% respectivamente. En la desintegración del ^{87}Rb , un neutrón del núcleo se transforma en protón, emitiendo un electrón o partícula beta negativa y un antineutrino y produciendo algo de calor. En forma simplificada, esto se escribe así:



La constante de desintegración del rubidio tiene un valor de: $\lambda = 1.39 \times 10^{-11}$ años $^{-1}$.

Para calcular la edad de un mineral en que sólo hubiera rubidio cuando se formó, solamente tendríamos que saber la cantidad de ^{87}Sr presente y utilizar la ecuación de decaimiento de la siguiente manera: La cantidad de ^{87}Sr que hay en un momento determinado proviene del decaimiento de ^{87}Rb , de manera que si restamos a la cantidad de rubidio-87 que había al principio, $^{87}\text{Rb}_0$, la que hay en un momento dado, ^{87}Rb , obtenemos la cantidad de ^{87}Sr presente en ese momento:

$$^{87}\text{Sr} = ^{87}\text{Rb}_0 - ^{87}\text{Rb} \quad (\text{ecuación 3})$$

En esta ecuación, podemos sustituir el $^{87}\text{Rb}_0$ por medio de la ecuación 2, $^{87}\text{Rb} = ^{87}\text{Rb}_0 e^{-\lambda t}$ lo cual implica

$$^{87}\text{Rb}_0 = ^{87}\text{Rb} e^{\lambda t}$$

que sustituyendo en la ecuación 3 nos da

$$^{87}\text{Sr} = ^{87}\text{Rb} (e^{\lambda t} - 1) \quad (\text{ecuación 4})$$

Esta ecuación nos permite calcular el tiempo transcurrido si se conocen los valores de la constante de desintegración y las concentraciones presentes de rubidio y estroncio; sin embargo, hay dos problemas obvios con la datación radiactiva:

- a) La incertidumbre sobre la composición original de la muestra.
- b) La posible pérdida de material durante el tiempo de decaimiento.

Si cuando se formó el mineral y se convirtió en un sistema cerrado, ya había probablemente alguna cantidad de estroncio presente, esta contribución hay que tomarla en cuenta en nuestros cálculos. El ^{87}Sr ya presente en un principio, $^{87}\text{Sr}_0$, puede ser tomado en cuenta añadiéndolo tan sólo a la ecuación 4:

$$^{87}\text{Sr} = ^{87}\text{Sr}_0 + ^{87}\text{Rb} (e^{\lambda t} - 1) \quad (\text{ecuación 5})$$

Esta ecuación podría aplicarse de manera directa para calcular el tiempo si conociéramos la concentración original de estroncio en el mineral. Este dato no puede sino estimarse con cierto grado de incertidumbre; como las cantidades de Rb son sólo de unos cuantos cientos de partes por millón, una pequeña incertidumbre en este valor introduce un error grande en el tiempo calculado. Para evitar esto se recurre a dividir los términos de la ecuación entre la concentración de $^{86}\text{Sr}_0$ original. El isótopo 86 del Sr es estable y no proviene de la descomposición de otro núcleo radiactivo y por lo tanto su abundancia ha permanecido constante. Es decir: $^{86}\text{Sr} = ^{86}\text{Sr}_0$

Si hacemos esto tenemos la siguiente ecuación:

$$(^{87}\text{Sr} / ^{86}\text{Sr}) = (^{87}\text{Sr}_0 / ^{86}\text{Sr}_0) + (^{87}\text{Rb} / ^{86}\text{Sr}) (e^{\lambda t} - 1) \quad (\text{ecuación 6})$$

Para un mineral dado, la determinación de las razones $(^{87}\text{Sr} / ^{86}\text{Sr})$ y $(^{87}\text{Rb} / ^{86}\text{Sr})$, fijan un punto sobre la recta de la ecuación 6. Si aplicamos este método a varios minerales de una misma roca obtendremos varios puntos que definen la recta y podemos así determinar tanto su pendiente, y por lo tanto el tiempo, como las razones originales de $(^{87}\text{Sr}_0 / ^{86}\text{Sr}_0)$. Para que los diferentes minerales definan una recta es necesario que hayan cristalizado al mismo tiempo. Se dice entonces que tienen edades concordantes; si esto no ocurre las edades son discordantes. La recta definida por minerales de edad concordante es llamada isócrona.

Para encontrar un valor razonable de la edad de la Tierra, podemos suponer que ésta se formó al mismo tiempo que el resto del sistema solar. Si los meteoritos son parte de ese sistema, entonces la medida de la edad de solidificación de dichos meteoritos será una estimación de la edad de la Tierra. Algunos de estos meteoritos se han comportado como sistemas cerrados (por lo menos para ciertos isótopos) muy poco tiempo después de que se formaron el disco solar y los planetas.

Se han estudiado muestras de ciertos meteoritos de tipo lítico conocidos como acondritas los cuales poseen las razones más bajas de $^{87}\text{Rb} / ^{86}\text{Sr}$ y representan por lo tanto las mejores estimaciones de las razones $^{87}\text{Sr}_0 / ^{86}\text{Sr}_0$ existentes en el origen

de nuestro Sistema Solar. Un valor de esta razón fue obtenido por D.A. Papanastassiou y G. J. Wasserburg del análisis de siete acondritas basálticas. Es llamado *BABI* por su nombre en inglés: Basaltic Achondrite Best Initial.

La tabla 1 nos da los datos de Papanastassiou and Wasserburg (1969) de $^{87}\text{Rb} / ^{86}\text{Sr}$ y de $^{87}\text{Sr} / ^{86}\text{Sr}$ para estimar la edad de las acondritas basálticas y de *BABI*.

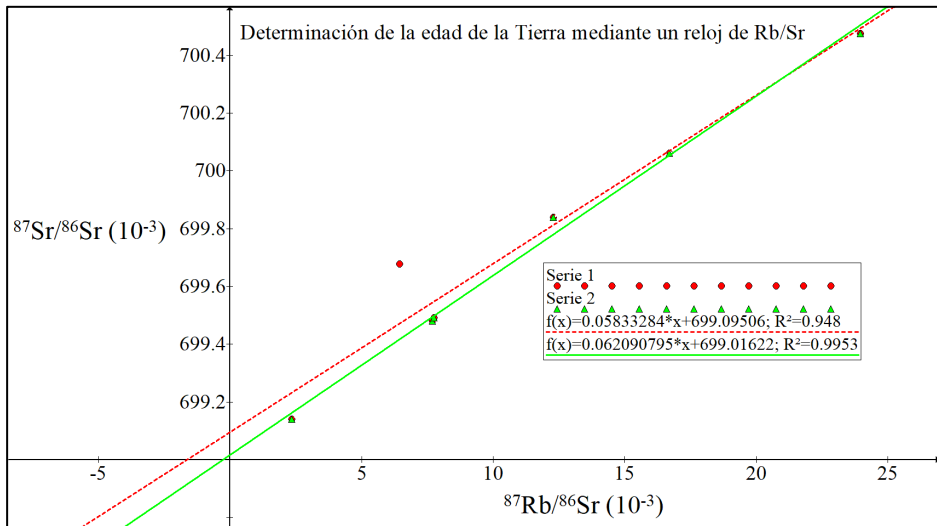
Tabla 1		
NOMBRE DE LA MUESTRA	$^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$	$^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$
Juvinas	0.00644	0.699678
Pasamonte	0.00769	0.699481
Sioux Co.	0.00775	0.699491
Nuevo Laredo	0.01228	0.699840
Jonzac	0.01671	0.700062
Stannern	0.02396	0.700475
Moore Co.	0.00234	0.699140

MÉTODO EXPERIMENTAL

1. Representa en papel milimetrado los valores de la tabla 1 y comprueba que dichos valores están alineados.
¿Qué significaría que uno de los valores no estuviese alineado?
2. Halla el valor de la pendiente de la recta (llamada isócrona) y de ella el valor de la edad de las acondritas.
3. ¿Qué puedes decir de la edad de la Tierra?
4. Halla el valor de *BABI*, ($^{87}\text{Sr}_0 / ^{86}\text{Sr}_0$)
5. Si se analizasen las acondritas dentro de mil millones de años y se representasen los valores obtenidos de forma similar a lo que tú estás haciendo, ¿cómo cambiarían las respuestas a las preguntas segunda y tercera?

SOLUCIÓN

- Los datos de la tabla 1 se representan en la gráfica siguiente. El dato correspondiente a las Juvinas está más desplazado de la recta de ajuste que los demás, puede ser que no sea de una edad concordante con las otras muestras, o que dicha muestra haya sido un sistema no cerrado para los isótopos estudiados. Analizamos los datos con y sin las Juvinas.



- De la ecuación 6

$$(^{87}\text{Sr} / ^{86}\text{Sr}) = (^{87}\text{Sr}_0 / ^{86}\text{Sr}_0) + (^{87}\text{Rb} / ^{86}\text{Sr}) (e^{\lambda t} - 1)$$

la pendiente de la recta es igual a $(e^{\lambda t} - 1)$, por tanto:

$$t = (\ln(\text{pendiente} + 1)) / \lambda$$

La pendiente de la recta con todos los datos es 0.05833284 y la pendiente de la recta sin el valor de las Juvinas es de 0.062090795.

Por tanto, usando las 7 acondritas:

$$t = 4.07876 \times 10^9 \text{ años}$$

y no usando el valor de las Juvinas:

$$t = 4.33376 \times 10^9 \text{ años}$$

3. La edad de la Tierra será al menos la anterior.
4. El valor de *BABI* será la ordenada en el origen de la ecuación 6:

Usando las 7 acondritas

$$BABI = 0.699095$$

y sin el valor de las Juvinas

$$BABI = 0.699016$$

5. Si aumenta el tiempo, la isócrona aumenta de pendiente y los puntos siguen alineados si continúan siendo un sistema cerrado.

La edad de la Tierra, calculada por este método, sería de mil millones de años más, como es de esperar.

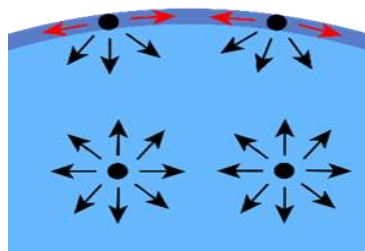
Tensión superficial

XXIII Olimpiada de Física, fase local del Distrito Universitario de Valladolid (2012)

La tensión superficial es una propiedad de la superficie libre de los líquidos que les permite resistir una fuerza externa. La observamos, por ejemplo, en que una aguja de acero puede flotar en el agua y algunos insectos caminan sobre ella sin hundirse. También la observamos en la formación de gotas durante la caída de un líquido y en la formación de meniscos cuando un líquido está en el interior de un recipiente capilar.



Esta propiedad tiene su causa en la fuerza de cohesión de las moléculas del líquido. En el interior del líquido las moléculas reciben fuerzas de las demás en todas las direcciones de sus vecinas, resultando una fuerza neta igual a cero. Las moléculas de la superficie no tienen a su alrededor moléculas iguales en todas las direcciones y reciben por lo tanto una fuerza neta hacia el interior del líquido. Esto crea una presión interna y obliga a la superficie del líquido a contraerse y presentar un área mínima. En términos de energía las moléculas del interior, en contacto con sus vecinas, tienen una energía menor que si estuviesen solas, pero las de la superficie tienen menos vecinas comparadas con las del interior y por lo tanto tienen más energía. Para que el líquido minimice su energía tiene que hacer mínima su superficie.



La tensión superficial se representa por el símbolo γ y se define como la fuerza a lo largo de una línea de 1 m de longitud, cuando la fuerza es paralela a la superficie, pero perpendicular a la línea. En el S.I. su unidad es por tanto el N/m. También se usa la dina/cm (Sistema C.G.S.). Una dina es la fuerza que aplicada a una masa de

un gramo le imprime una aceleración de un centímetro por segundo al cuadrado. Una definición equivalente, muy útil en termodinámica, es que la tensión superficial es el trabajo realizado por unidad de área. Es decir, para aumentar una cantidad δA una superficie necesitamos realizar un trabajo $\gamma\delta A$, el cual queda almacenado como energía potencial. En el S.I. puede medirse también en J/m^2 . En el Sistema C.G.S. su unidad será el ergio/cm² (un ergio es el trabajo de la fuerza de una dina cuando se desplaza 1cm paralela a sí misma).

Los fenómenos de tensión superficial son muy importantes en muchos aspectos de la vida cotidiana, así por ejemplo cuando pretendemos lavar la ropa es necesario que el agua penetre entre las fibras del tejido, pero el entramado del mismo es como una red capilar que ofrece resistencia a ser mojada; por tanto, el estudio de la variación de la tensión superficial del agua con diferentes factores como la adición de sustancias o la temperatura es de máximo interés.

El primero en darse cuenta de que la tensión superficial del agua depende de la temperatura de la misma fue **Loránd Eötvös** (1848-1919). *Este científico pertenecía a la alta aristocracia húngara y como se esperaba de él estudió leyes, lo cual no le satisfizo. En 1867 ingresó en la Universidad de Heidelberg (Alemania) donde estudió Física, Química y Matemáticas; fue alumno de famosos profesores como Kirchhoff, Bunsen y Helmholtz. Sus investigaciones como científico se desarrollaron en el campo de la capilaridad, la gravitación y el magnetismo. Trataba todos los aspectos del problema, primero ordenaba la base teórica, luego diseñaba y construía los instrumentos y la metodología de los experimentos; entonces hacía las medidas en el laboratorio y finalmente sacaba las conclusiones de sus medidas. Perfeccionó la balanza de torsión haciéndola increíblemente sensible, lo cual la hace tremendamente útil en las prospecciones geológicas; cientos de pozos de petróleo de U.S.A. en los 1920 y 1930 fueron descubiertos con ella. Estudió la diferencia entre la masa inerte y la gravitatoria determinando que era como mucho 1 parte en 200.000.000, (estos trabajos fueron mencionados por Einstein en su elaboración de la Teoría de la Relatividad). Estudiando el valor de la gravedad en el océano descubrió el efecto que lleva su nombre, a saber, la fuerza de la gravitación percibida viene afectada por el cambio en la aceleración centrípeta debida al movimiento del barco según sea su velocidad hacia el este o hacia el oeste; perfeccionó sus instrumentos y pudo detectar una variación de 1cm en el nivel del Danubio en una distancia de 100m. En el Sistema C.G.S. la unidad de gradiente gravitacional lleva el nombre de eotvos en su honor.*

Fue un hombre muy equilibrado, además de su intenso trabajo intelectual siempre encontró tiempo para la relajación y el deporte. Era aficionado a la fotografía. Habitualmente andaba, y montaba a caballo o paseaba en bicicleta, pero su gran pasión era la montaña donde estuvo entre los mejores alpinistas; en 1902 un pico de 2837m en los Alpes Dolomites, al sur del Tirol (Italia) fue llamado Cima de Eötvös.

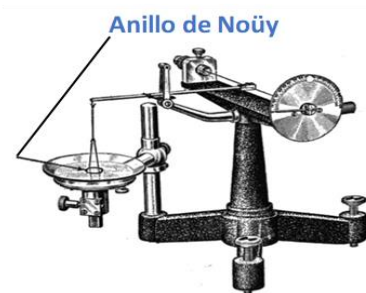
En cuanto a la dependencia de la tensión superficial de la temperatura, en 1886, Eötvös propuso la siguiente ecuación empírica:

$$\gamma V^{2/3} = k (T_c - T) \quad \text{ecuación (1)}$$

Siendo V el volumen molar (masa molar dividida por la densidad del líquido); T_c la temperatura crítica (temperatura por encima de la cual un gas no puede licuarse sometiénolo a altas presiones); k una constante válida, en principio, para todos los líquidos (denominada constante de Eötvös) y T la temperatura del líquido en Kelvin.

Los métodos de medida de la tensión superficial son muy diversos, uno de ellos es el anillo de Noüy que consiste en medir la fuerza vertical F necesaria para despegar un anillo de radio R de un líquido; la tensión superficial vendrá dada por $F/4\pi R$.

La tabla siguiente recoge los valores de la tensión superficial del agua para diferentes temperaturas.



γ (dinas/cm)	74.2	72.8	71.2	69.6	67.9	66.2
t (°C)	10	20	30	40	50	60

MÉTODO EXPERIMENTAL

1. Halla la equivalencia entre el N/m y la dina/cm y entre el J/m² y el ergio/cm².
2. Representa en papel milimetrado los datos de la tabla expresando la temperatura en la escala Kelvin. A continuación, traza con una regla la recta que mejor se ajuste a dichos datos.
3. De la gráfica obtenida determina la pendiente y la ordenada en el origen y expresa los valores en el S.I.
4. Teniendo en cuenta que la ecuación (1) puede escribirse como:

$$\gamma = \left(\frac{k}{V^{2/3}}\right)T_c - \left(\frac{k}{V^{2/3}}\right)T \quad \text{ecuación (2)}$$

Determina el valor de k en unidades del S.I. (usa para ello el valor de la ordenada en el origen obtenido)

(Recuerda que para el agua líquida: $V = 18 \text{ cm}^3/\text{mol}$ y $t_c = 374^\circ\text{C}$)

5. Realmente el valor de k no es igual para todos los líquidos ya que está influido por la asociación o disociación de las moléculas del líquido. Valores por debajo del anterior indican asociación de moléculas, mientras que por encima indican disociación. La ecuación (2) se puede escribir como:

$$\gamma = \left(\frac{k}{V^{2/3}}\right)T_c - \left(\frac{k'}{V^{2/3}}\right)T \quad \text{ecuación (3)}$$

Determina el valor de k' en unidades del S.I. (usa ahora el valor de la pendiente de la recta).

SOLUCIÓN

1. Hallamos las equivalencias entre el N/m y la dina/cm y el J/m² y el ergio/cm².

$$1 \text{ dina} = 1 \text{ g } 1 \text{ cm/s}^2 = 0.001 \text{ kg } 0.01 \text{ m/s}^2 = 10^{-5} \text{ N}$$

$$1 \text{ N/m} = 10^3 \text{ dina/cm}$$

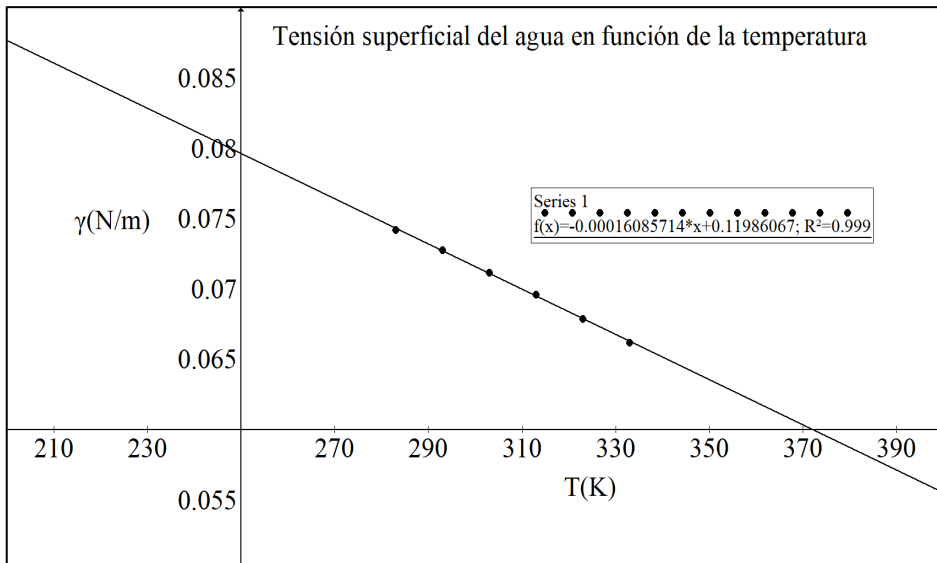
$$1 \text{ J} = 1 \text{ Nm} = 10^5 \text{ dina } 100 \text{ cm} = 10^7 \text{ ergio}$$

$$1 \text{ J/m}^2 = 10^7 \text{ ergio} / 10^4 \text{ cm}^2 = 10^3 \text{ ergio/cm}^2$$

$$1 \text{ J/m}^2 = 10^3 \text{ ergio/cm}^2$$

2. Representamos, la tensión superficial en función de la temperatura, usando los datos de la tabla y, expresando la temperatura en la escala Kelvin.

γ (dinas/cm)	74.2	72.8	71.2	69.6	67.9	66.2
T (°C)	10	20	30	40	50	60
T (K)	283	293	303	313	323	333



3. De la gráfica determinamos la pendiente y la ordenada en el origen en unidades del S.I.

$$\text{Pendiente} = -1.608 \times 10^{-4} \text{ N/mK}$$

$$\text{Ordenada en el origen} = 0.1199 \text{ N/m}$$

4. Teniendo en cuenta que la ecuación (2), $\gamma = \left(\frac{k}{V^{2/3}}\right) T_c - \left(\frac{k}{V^{2/3}}\right) T$
Determinamos el valor de k usando el valor de la ordenada en el origen $\left(\frac{k}{V^{2/3}}\right) T_c$.

Para el agua líquida, los datos son:

$$V = 18 \text{ cm}^3/\text{mol}$$

$$t_c = 374^\circ\text{C}$$

Operando con los datos en el S.I.

$$V^{2/3} = (18 \times 10^{-6})^{2/3} = 6.868 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{mol}^{2/3}$$

$$T_c = 647\text{K}$$

$$k = 1.27 \times 10^{-7} \text{ JK}^{-1} \text{ mol}^{-2/3}$$

5. Teniendo en cuenta la ecuación (3), $\gamma = \left(\frac{k}{V^{2/3}}\right) t_c - \left(\frac{k'}{V^{2/3}}\right) T$

Determinamos el valor de k' usando el valor de la pendiente $\left(\frac{k'}{V^{2/3}}\right)$

$$k' = 1.10 \times 10^{-7} \text{ JK}^{-1} \text{ mol}^{-2/3}$$

Como vemos, k' es algo menor que k .

Ambos valores son menores que el valor de la constante de Eötvös para la mayoría de los líquidos, $2.1 \times 10^{-7} \text{ JK}^{-1} \text{ mol}^{-2/3}$. Podemos suponer una asociación de moléculas de agua debido a puentes de hidrógeno. También podemos sospechar que habría que hacer algún cambio en la ecuación de Eötvös para líquidos como el agua.

Olla ¿rápida o lenta?

XXIV Olimpiada de Física, fase local del Distrito Universitario de Valladolid (2013)

En casi todas las casas existe un utensilio de cocina llamado *olla rápida* u *olla a presión* cuya utilidad es la cocción de los alimentos en menos tiempo que en una cazuela convencional. Explicaremos este fenómeno a continuación.

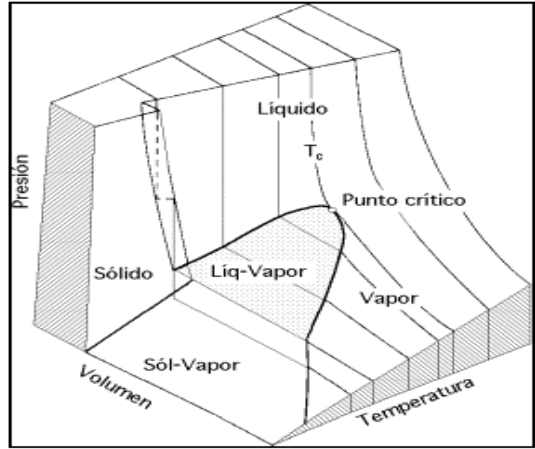
Sabemos que la materia se puede presentar en distintas fases (o estados de agregación) denominadas sólida, líquida o gaseosa, (hay más posibilidades, pero no vienen al caso). El paso de una a otra se denomina *cambio de fase*, y dicho cambio tiene un nombre específico en cada caso. Así llamamos fusión al cambio de fase de sólido a líquido, ebullición al cambio de líquido a vapor, etc. Para una sustancia determinada (pensemos por ejemplo en el agua) hay una temperatura determinada a la cual se produce cada cambio de fase, y mientras dura el cambio de fase la temperatura no varía. Pero resulta que *dicha temperatura depende de la presión y esa dependencia es muy acusada en el caso de la ebullición*.

También sabemos que el estado de una sustancia viene determinado por su presión (P), su volumen (V) y su temperatura (T) y, para una cantidad de sustancia dada (una masa fija de la sustancia), la ecuación térmica de estado es una relación entre estas tres variables que define, así, una superficie en un sistema de tres coordenadas rectangulares de ejes P, V, T .

A cada posible estado de equilibrio corresponde un punto sobre la superficie de estado y viceversa. En el caso de un gas perfecto, la ecuación de dicha superficie es $P V = n R T$, siendo R la constante de los gases y n a cantidad de sustancia (número de moles) del gas.

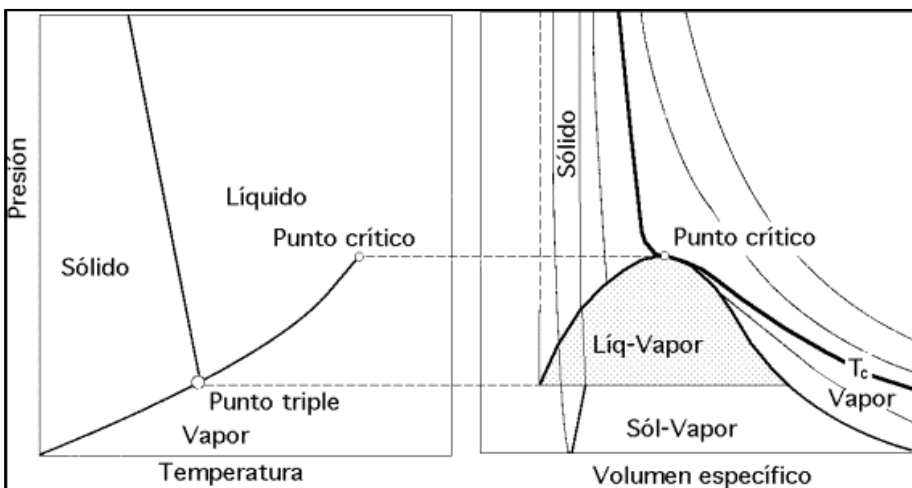
El comportamiento de todas las sustancias reales se aproxima al de los gases perfectos a presiones suficientemente bajas, pero a presiones elevadas y bajas temperaturas se separa del mismo. Así, cuando se incrementa la presión y se baja la temperatura, todas las sustancias pasan al estado líquido o al sólido.

Para una cantidad de sustancia dada, existe siempre una relación entre P, V y T ; es decir, la sustancia tiene una ecuación térmica de estado en cualesquiera circunstancias. Aunque la forma de la ecuación puede ser muy complicada, podemos representarla gráficamente por una superficie P, V, T , de forma que, para que el diagrama no dependa de la cantidad de sustancia se representa en función del volumen específico (el volumen por unidad de masa).



Esta superficie presenta discontinuidades debidas a los cambios de estado que sufre el compuesto al variarse las condiciones de presión y temperatura. Las superficies delimitan las zonas de existencia de la fase sólida, líquida o gaseosa. La primera figura representa dicha superficie para el agua.

Para comprender mejor el comportamiento, es costumbre representar dicha superficie por sus proyecciones sobre los planos $P - T$ y $P - V$. La segunda figura representa las proyecciones para el agua.



En la gráfica $P - T$ se observa la línea de separación líquido-vapor que da cuenta de la variación (gráfica) del punto de ebullición en función de la temperatura, acabando en el punto crítico.

La temperatura crítica, T_C , es aquella por encima de la cual una sustancia solo puede estar en estado gaseoso; de forma que, en caso contrario, si la temperatura es inferior a la crítica, podemos conseguir licuar un gas aumentando la presión.

O, equivalentemente, evitar que hierva un líquido a una determinada temperatura, aumentando la presión, que es lo que ocurre en una *olla rápida*.

Desde un punto de vista microscópico, si se calienta un líquido se incrementa la energía cinética de sus moléculas. Las moléculas cuya energía cinética es más elevada y que están cerca de la superficie del líquido, escaparán, y darán lugar a la fase de vapor. Si el líquido está contenido en un recipiente cerrado, algunas moléculas del vapor seguirán el camino inverso chocando con la superficie del líquido e incorporándose a la fase líquida. Se establece un equilibrio dinámico, cuando el número de moléculas que se escapan del líquido sea igual (en valor medio) al número de moléculas que se incorporan al mismo. Decimos entonces, que tenemos vapor saturado a la temperatura T y la presión parcial que ejercen las moléculas de vapor a esta temperatura se denomina presión de vapor P_v .

La presión de vapor P_v , de una sustancia depende solamente de la temperatura y no del volumen. La temperatura de ebullición es aquella para la cual, la presión de vapor es igual a la presión exterior. La tabla siguiente nos da la presión de vapor del agua P_v (kP_a), en kilopascales (kPa), a diferentes temperaturas t ($^{\circ}C$), en la escala Celsius, es decir, la dependencia entre la temperatura de ebullición y la presión.

$t(^{\circ}C)$	10	15	20	25	30	40	50	60	80	100	105	110
P_v /kPa	1.23	1.71	2.33	3.17	4.24	7.37	12.33	19.91	47.33	101.30	120.87	143.23

Estos puntos pertenecen a la línea de separación líquido-vapor. Para un sistema de un componente (agua pura, por ejemplo), esta línea que separa las fases no es arbitraria, está determinada por las leyes de la Termodinámica y el equilibrio y sigue una ecuación denominada *ecuación de Clausius-Clapeyron*. Dicha ecuación puede escribirse de varias formas; pero suponiendo que la fase vapor es un gas ideal y que el volumen molar del líquido es despreciable comparado con el volumen molar de

gas, y suponiendo, además, que el calor latente de ebullición L es independiente de la temperatura (al menos en un determinado intervalo), se llega a la siguiente ecuación:

$$\ln \left(\frac{P_v}{kP_a} \right) = -\left(\frac{L}{R} \right) \left(\frac{1}{T} \right) + C$$

donde C es una constante, T (K) = $t(^{\circ}\text{C}) + 273.15$ es la temperatura en la escala Kelvin y $R = 8.314 \text{ J/molK}$. Esta ecuación justifica que existe una dependencia lineal entre el logaritmo neperiano de la presión de vapor y la inversa de la temperatura absoluta, cuya pendiente igual a $-L/R$.

MÉTODO EXPERIMENTAL

1. Construye una tabla con los valores de $\ln \left(\frac{P_v}{kP_a} \right)$ y de $1/T$.
2. Representa en papel milimetrado los valores de dicha tabla.
3. De la gráfica obtenida, determina la pendiente de la recta y halla el valor del calor latente L de ebullición del agua. Indica su valor en el S.I. y expresa su unidad en dicho sistema.
4. Tomando como valor cierto que la temperatura de ebullición del agua es de 100°C a la presión de 101.30kPa , halla la temperatura de ebullición del agua a 93.30kPa (valor frecuente de la presión del aire en Valladolid). Utiliza el valor de L determinado en el apartado 3.
5. Una *olla lenta* sería aquella que pudiese disminuir la temperatura de ebullición del agua bajando la presión. En las casas no disponemos de ellas, pero suele haberlas en los laboratorios de Física (¡no se usan para cocinar!)

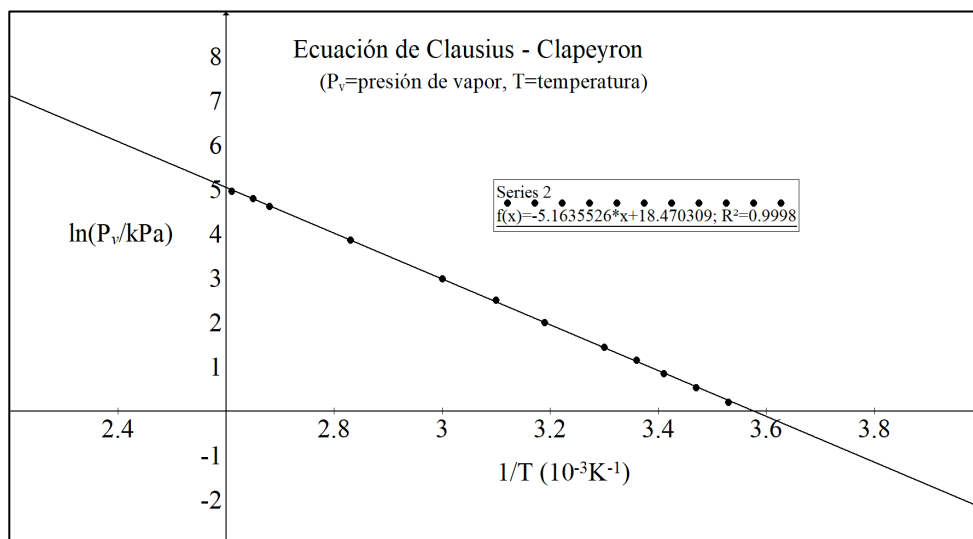
¿A qué presión está el agua si la ves hervir y la temperatura es de 18°C ?
6. Razona el motivo por el cual es irrelevante, para la resolución de las preguntas del problema, las unidades en las que medimos la presión de vapor.

SOLUCIÓN

1. La tabla pedida es la siguiente:

$T (K)$	283.15	288.15	293.15	298.15	303.15	313.15	323.15	333.15	353.15	373.15	378.15	383.15
$1/T$ ($10^{-3} K^{-1}$)	3.53	3.47	3.41	3.35	3.30	3.19	3.09	3.00	2.83	2.68	2.64	2.61
P_v / kPa	1.23	1.71	2.33	3.17	4.24	7.37	12.33	19.91	47.33	101.30	120.87	143.23
$\ln(P_v / kPa)$	0.207	0.536	0.846	1.154	1.444	1.997	2.512	2.991	3.857	4.618	4.795	4.964

2. La gráfica pedida es la siguiente:



3. La pendiente de la gráfica es $m = -5\,164\,K$.

Por tanto, el valor de $L = -mR$, con $R = 8\,314\,J/mol\,K$, es:

$$L = 42\,933\,J/mol$$

4. La ecuación de Clausius - Clapeyron, $\ln \left(\frac{P_v}{kPa} \right) = -\left(\frac{L}{R} \right) \left(\frac{1}{T} \right) + C$. se ha de cumplir para el punto $T_1 = 373.15 \text{ K}$, $P_1 = 101.3 \text{ kPa}$ y para el punto T_2 , $P_2 = 93.30 \text{ kPa}$, sustituyendo ambos puntos y resolviendo el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \ln 101.3 = -\frac{42\,933}{8.314} \times \frac{1}{373.15} + C \\ \ln 90.3 = -\frac{42\,933}{8.314} \times \frac{1}{T_2} + C \end{array} \right.$$

Obtenemos, por tanto, que a 93.30kPa el agua hierve a

$$T_2 = 370.94 \text{ K} = 97.79^\circ \text{C}$$

5. Análogamente, la ecuación de Clausius- Clapeyron se ha de cumplir para el punto $T_1 = 373.15 \text{ K}$, $P_1 = 101.3 \text{ kPa}$ y para el punto $T_3 = 18 + 273.15 = 291.15 \text{ K}$, P_3 , sustituyendo ambos puntos y resolviendo el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \ln 101.3 = -\frac{42\,933}{8.314} \times \frac{1}{373.15} + C \\ \ln P_3 = -\frac{42\,933}{8.314} \times \frac{1}{291.15} + C \end{array} \right.$$

Obtenemos, que para que el agua hierva a 18°C, la presión ha de ser de

$$P_3 = 2.055 \text{ kPa}$$

6. El cambio de unidades de la presión quedaría englobado en el valor de la constante C .

¿Qué potencia consume la resistencia?¹

XXV Olimpiada de Física, fase local del Distrito Universitario de Valladolid (2014)

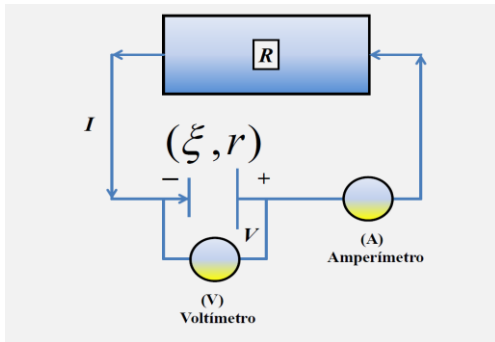
Si una pila de fuerza electromotriz (f.e.m.) ξ y resistencia interna r se conecta a una resistencia externa R , hará que por el circuito circule una intensidad I , que podemos medir con un amperímetro (A).

La resistencia R disipará una potencia $P = I^2R$, y la propia pila consumirá una potencia I^2r ; es decir, no toda la potencia de la pila ξI pasará al circuito externo.

Podemos escribir que:

$$\xi I = I^2R + I^2r \quad (\text{Ecuación 1})$$

Si medimos con un voltímetro (V) la diferencia de potencial (d.d.p.) V , en los bornes de la resistencia R , la *ley de Ohm* nos dice que $V = IR$; y, por tanto:



$$\xi I = VI + I^2r \quad (\text{Ecuación 2})$$

$$(\xi - V)I = I^2r \quad (\text{Ecuación 3})$$

$$V = \xi - Ir \quad (\text{Ecuación 4})$$

La ecuación 4 nos dice que si conectamos a una misma pila diferentes resistencias de carga R , la intensidad I , y la d.d.p. V , en R irán cambiando y V será una función lineal de I .

MÉTODO EXPERIMENTAL

Queremos determinar la f.e.m. ξ , y la resistencia interna r , de una pila. Para ello se conecta a una resistencia variable R , y se mide la intensidad I , que circula por la resistencia, así como la d.d.p. V , en los bornes de la misma. Los *datos experimentales* se recogen en la tabla 1.

Tabla 1											
I (A)	4.10	3.80	3.50	3.00	2.20	1.80	1.50	1.30	1.10	0.90	0.70
V (V)	0.40	0.70	1.00	1.50	2.30	2.70	3.00	3.20	3.40	3.60	3.80

1. Representa en papel milimetrado (gráfica 1) la d.d.p. V , en función de la intensidad de corriente I ; y, de la pendiente y ordenada en el origen, determina los valores de r y de ξ .
2. Utiliza la *ley de Ohm* para construir una tabla (Tabla 2), con los diferentes valores de la resistencia de carga R , y la potencia P , disipada por cada resistencia.
3. Representa en papel milimetrado (gráfica 2) la potencia P , en función de R .
4. La gráfica presenta un máximo de potencia P_m , para una determinada resistencia de carga R_m . Lee en la gráfica dichos valores. Halla, para este caso, la relación entre la potencia consumida en la resistencia de carga P_m , y la potencia suministrada por la pila ξI_m .
5. Si la pila almacena una energía E , halla la resistencia de carga necesaria R_{100} para que la pila dure 100 veces más de tiempo que si se conecta a la resistencia R_m determinada en el apartado 4º anterior.
¿Qué potencia P_{100} disipará en este caso la resistencia R_{100} comparada con la suministrada por la pila ξI_{100} ?

(1) Este problema fue publicado en la Revista de Ciencias número 4 de la Universidad de Valladolid, se puede ver en (http://www.cie.uva.es/index.php/revista_de_ciencias/). Fue maquetado para su publicación por el profesor José Carlos Cobos.

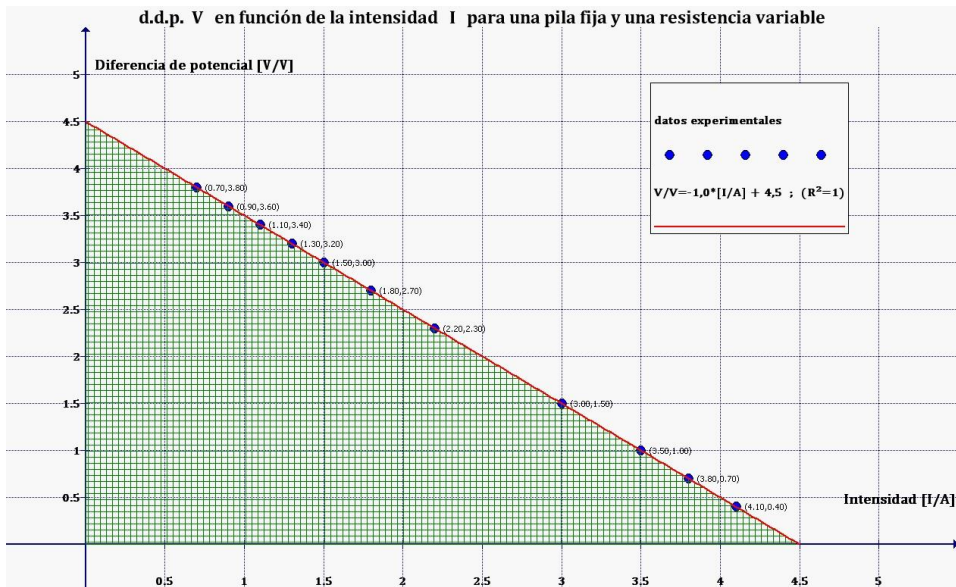
SOLUCIÓN

1. Con los datos de la tabla 1

Tabla 1											
I (A)	4.10	3.80	3.50	3.00	2.20	1.80	1.50	1.30	1.10	0.90	0.70
V (V)	0.40	0.70	1.00	1.50	2.30	2.70	3.00	3.20	3.40	3.60	3.80

Representamos la diferencia de potencial (d.d.p.) V en función de la intensidad I , para las diferentes resistencias de carga R , construyendo la gráfica 1.

Gráfica 1



De acuerdo con la (Ecuación 4): $V = \xi - Ir$, ajustamos por mínimos cuadrado los datos de la Tabla 1, obteniendo la pendiente, que coincide con $-r$, y la ordenada en el origen, que es ξ .

De esta forma, se obtienen los valores de ambas magnitudes:

Resistencia interna: $r = 1\Omega$

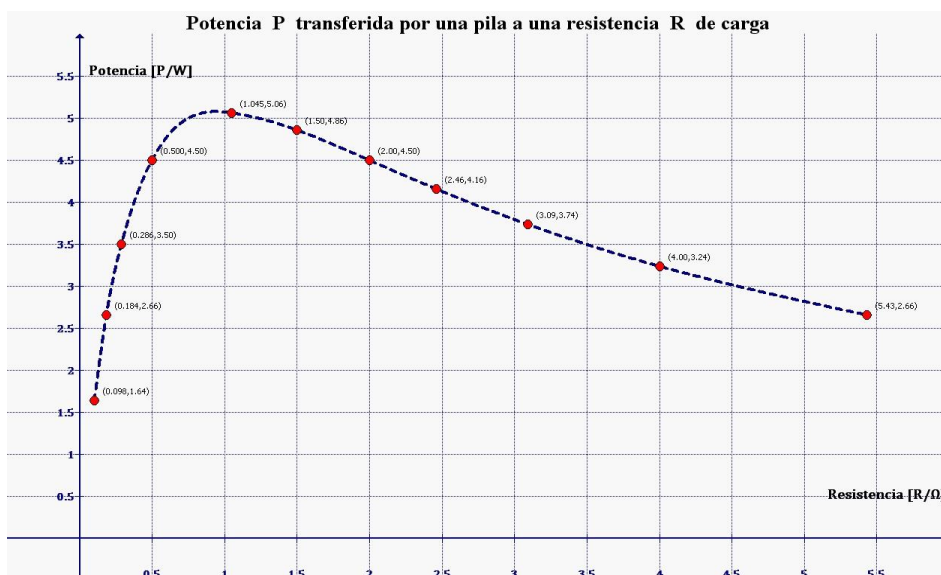
Fuerza electromotriz: $\xi = 4.5 V$

2. Utilizamos la *ley de Ohm* $V = IR$, para construir la tabla 2, con los diferentes valores de la resistencia de carga, $R = V/I$, y la potencia, $P = VI = I^2R$, disipada por cada resistencia.

Tabla 2											
$I(A)$	4.10	3.80	3.50	3.00	2.20	1.80	1.50	1.30	1.10	0.90	0.70
$V(V)$	0.40	0.70	1.00	1.50	2.30	2.70	3.00	3.20	3.40	3.60	3.80
$R(\Omega)$	0.098	0.184	0.286	0.500	1.045	1.50	2.00	2.46	3.09	4.00	5.43
$P(W)$	1.64	2.66	3.50	4.50	5.06	4.86	4.50	4.16	3.74	3.24	2.66

3. La gráfica 2, representa la potencia $P = V \cdot I = I^2 \cdot R$ en función de R .

Gráfica 2



4. La gráfica 2 presenta máximo de potencia, P_m , para una determinada resistencia de carga, R_m . Leemos en la gráfica el valor de R_m y hallamos P_m . Calculamos la relación entre la potencia consumida en la resistencia de carga P_m y la potencia suministrada por la pila ξI_m .

$$R_m = 1\Omega \quad \Rightarrow \quad P_m = 5.0625 W$$

$$I_m = 2.25 A \quad \Rightarrow \quad P_m / \xi I_m = 0.5$$

Es decir, la máxima transferencia de potencia desde la pila a la resistencia se hace cuando esta es el 50%. En este caso la pila consume el otro 50%.

5. Si la pila almacena una energía E , el tiempo t que durará encendida, cumplirá la ecuación: $E = \xi I t$; o bien para un tiempo $t_{100} = 100 t$, se cumplirá que:

$$E = \xi I_{100} t_{100}.$$

Es decir, ha de ser:

$$I = 100 I_{100}.$$

Por tanto:

$$I_{100} = 0.0225 A \quad \Leftrightarrow \quad V_{100} = 4.4775 V \quad \Leftrightarrow \quad R_{100} = 199 \Omega$$

$$P_{100} = 0.1007 W \quad \Rightarrow \quad \frac{P_{100}}{\xi I_{100}} = 0.995$$

Ahora la pila transfiere el 99'5% de la potencia a la resistencia de carga; la potencia es pequeña comparada con la anterior, por eso la pila dura más.

Nota:

El resultado de los puntos 4º y 5º se puede resolver teóricamente².

(2) El lector puede comparar este problema con el problema ¡Ponte las pilas! (año 2002)

¿Te oigo antes en verano?

XXVI Olimpiada de Física, fase local del Distrito Universitario de Valladolid (2015)

INTRODUCCIÓN TEÓRICA

Durante tus estudios de E.S.O. y bachillerato habrás aprendido que el sonido es una onda de presión que se propaga en el aire a una velocidad promedio de 340m/s. Pero, ¿de qué depende esta velocidad? La velocidad de propagación, v , de una onda en un gas depende de su densidad ρ y del módulo de compresibilidad B a través de la ecuación:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad \text{ecuación (1)}$$

donde, $B = -V \frac{\Delta P}{\Delta V}$, siendo V el volumen y P la presión del gas.

Teniendo en cuenta la ecuación de los gases ideales $PV = nRT$, el módulo de compresibilidad adiabático viene dado por $B = \gamma P$, donde γ es el coeficiente adiabático del aire, (las adiabáticas son transformaciones sin intercambio de calor y las muy rápidas lo son). La velocidad de propagación del sonido en un gas nos queda como:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad \text{ecuación (2)}$$

Siendo M la masa molar, R la constante de los gases ideales, y T la temperatura en la escala Kelvin.

Que en función de la temperatura en la escala Celsius, t , toma la forma siguiente:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma R(T_0 + t)}{M}} \quad \text{ecuación (3)}$$

Por tanto, según la ecuación (3), para un determinado gas, v depende de la temperatura t (°C), pero esta dependencia no es lineal.

AYUDA MATEMÁTICA

Hay muchas maneras de aproximar una función dada por polinomios, y la que se tome depende del uso que se quiera hacer de la aproximación. Como indica el profesor Antonio Fernández Rañada, el teorema de B. Taylor (1712) es el apoyo para hallar aproximaciones a las soluciones exactas de cualquier dispositivo, obra civil, sistema electrónico, cálculo astronómico, etc. Aplicando el teorema de Taylor, para una función como \sqrt{A} .

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + t} = a\left(1 + \frac{t}{a^2}\right)^{1/2} \cong a\left(1 + \frac{1}{2}\frac{t}{a^2}\right) \quad \text{ecuación (4)}$$

Si $\frac{t}{a^2} \leq 1$, lo que sucede desde que $a \geq 3$.

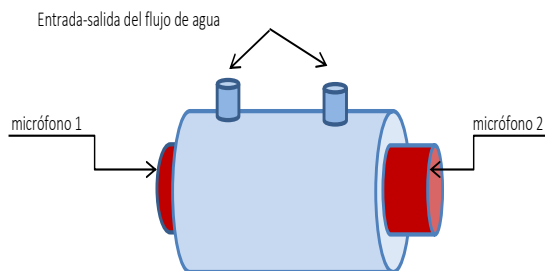
Con un error por exceso menor que $\frac{t^2}{8a^4}$.

Por lo tanto, la ecuación (3) se puede escribir aproximadamente como una función lineal de t teniendo en cuenta la ecuación (4).

$$v = (b + m t) \quad \text{ecuación (5)}$$

PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

Hay diversos procedimientos para medir la velocidad del sonido en el aire, uno puede ser como indica el profesor José María Muñoz, mediante un tubo liso de 1m de largo, en el que se han instalado dos micrófonos, uno en cada extremo del tubo, unidos a un ordenador; el tiempo que tarda un sonido producido cerca del micrófono 1 en llegar al 2 puede medirse con ayuda del programa AUDACITY que proporciona una resolución temporal del orden de $20\mu\text{s}$. La temperatura del aire puede controlarse con un baño de agua alrededor del tubo.



La tabla recoge datos de la velocidad del sonido en el aire en función de la temperatura.

t (°C)	20	25	30	35	40	45	50
v (m/s)	343.21	346.13	349.02	351.88	355.54	358.57	361.6

1. Representa en papel milimetrado la velocidad del sonido en el aire en función de la temperatura Celsius y comprueba que es una función lineal.
2. De la gráfica anterior determina b y m , la ordenada en el origen y la pendiente de la recta respectivamente. Indica sus unidades.
3. De las ecuaciones (3), (4) y (5) determina la relación de b y m con T_0 , R , M y γ .

$$b = \text{función}(T_0, R, M, \gamma)$$

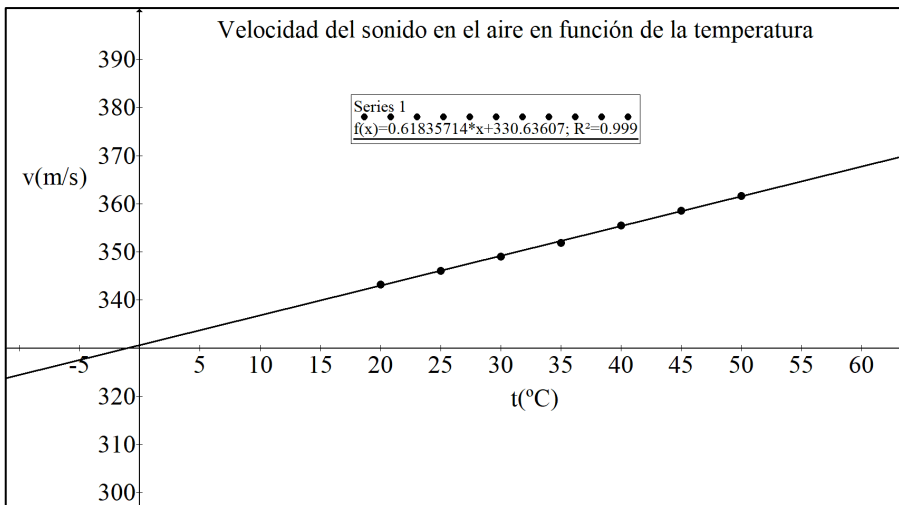
$$m = \text{función}(T_0, R, M, \gamma)$$

4. Sabiendo que $T_0 = 273.15 \text{ K}$, $R = 8.314 \text{ J/(Kmol)}$, y que para el aire seco $\gamma = 1.4$ determina la masa molar M del aire usando el valor de la pendiente m hallado en el apartado anterior.
5. Conocidos b y m podemos usar la ecuación (5) como un termómetro. ¿A qué temperatura está el aire si la velocidad del sonido en él es de 340m/s?
6. ¿Cuál es la cota de error de la velocidad en la ecuación (4) para esta temperatura?

SOLUCIÓN

1. Representando en papel milimetrado los datos de la tabla, velocidad del sonido en función de temperatura del aire, podemos ver que se ajustan a una recta. $v = b + m t$.

t (°C)	20	25	30	35	40	45	50
v (m/s)	343.21	346.13	349.02	351.88	355.54	358.57	361.6



2. De la gráfica anterior determinamos, por un ajuste de mínimos cuadrados, b y m , la ordenada en el origen y la pendiente de la recta respectivamente. Los alumnos lo harán trazando en el papel milimetrado la recta que mejor se ajusta. Obtenemos los valores de b y m siguientes:

$$\text{ordenada en el origen} = b = 330.64 \text{ m/s}$$

$$\text{pendiente} = m = 0.618 \text{ m/ (s K)}$$

La velocidad del sonido aumenta con la temperatura, 0.618m/s por cada grado Celsius de aumento de temperatura; en verano, el sonido va más rápido.

3. De las ecuaciones (3), (4) y (5) determinamos la relación de b y m con T_0 , R , M y γ . Teniendo en cuenta las ecuaciones siguientes:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma R(T_0 + t)}{M}}$$

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + t} = a\left(1 + \frac{t}{a^2}\right)^{1/2} \cong a\left(1 + \frac{1}{2}\frac{t}{a^2}\right)$$

Podemos escribir que:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}} \sqrt{1 + \frac{t}{T_0}} = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}} \left(1 + \frac{t}{2T_0}\right) = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma R}{M T_0}} t = b + m t$$

siendo $a^2 = T_0$ el factor que divide a t .

Por tanto, la pendiente m y la ordenada en el origen b , serán:

$$m = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma R}{M T_0}}$$

$$b = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}$$

4. Sabiendo que: $T_0 = 273.15 \text{ K}$, $R = 8.314 \text{ J} / (\text{Kmol})$, y, para el aire seco, $\gamma = 1.4$, determinamos la masa molar M del aire. Lo haremos usando la pendiente m .

$$M = \frac{\gamma R}{4T_0 m^2} = \frac{1.4 \times 8.314}{4 \times 273.15 \times 0.618^2} = 0.0279 \text{ kg/mol}$$

5. Conocidos b y m podemos usar la ecuación (5) como un termómetro. Si la velocidad del sonido en el aire es de 340 m/s , la temperatura será de:

$$t = \frac{v - b}{m} = \frac{340 - 330.64}{0.618} = 15.14^\circ\text{C}$$

6. La cota de error de la velocidad en la ecuación (4), para la temperatura de $t = 15.14^\circ\text{C}$, será menor que $\sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}} \left(\frac{t^2}{8a^4}\right)$, es decir menor que

$$\sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}} \left(\frac{t^2}{8a^4}\right) = \sqrt{\frac{1.4 \times 8.314 \times 273.15}{0.0279}} \left(\frac{15.14^2}{8 \times 273.15^2}\right) \cong 0.13 \text{ m/s}$$

¡Cuidado! no te quemes

XXVII Olimpiada de Física, fase local del Distrito Universitario de Valladolid (2016)

Como bien sabes, una cuchara de plata, acero o aluminio te quemará rápidamente si la utilizas para revolver una sopa hirviendo y por lo tanto sueles hacerlo con una cuchara de madera.

En este caso, la energía en forma de calor se propaga por conducción a través del material de la cuchara, desde la sopa hasta el extremo del mango, mediante un fenómeno que se conoce como conducción térmica o conducción del calor. La propagación del calor por conducción, tiene gran importancia en los sólidos y, siempre ocurre en función de que hay un gradiente o diferencia de temperatura entre dos zonas de un sólido. La energía fluye desde el extremo más caliente hacia el más frío.

Lo que diferencia a los materiales de los que está fabricada la cuchara es una magnitud denominada *conductividad térmica* k y trataremos de medirla.

Supongamos que nuestra cuchara es una barra cilíndrica, homogénea, de longitud L y sección transversal S , situada a lo largo del eje x . Si nuestra barra metálica, a una temperatura T_0 , la conectamos por sus extremos a dos focos de calor de temperaturas T_1 (caliente) y T_2 (frío), y está rodeada por un aislante perfecto para no perder calor por el lateral, al cabo de cierto tiempo, teóricamente infinito, que en la práctica depende del tipo de material de la barra, se establece un *estado estacionario*, (la temperatura de cada punto de la barra no depende del tiempo). En dicho estado, el flujo de energía J es constante (J es la energía por unidad de área y por unidad de tiempo, unidad en el S.I. W/m^2)

La *ley de Fourier* nos dice que hay una proporcionalidad entre el flujo de energía J y el gradiente de temperatura (variación de la temperatura por unidad de longitud):

$$J = -k \frac{\partial T}{\partial x}$$

siendo k una constante característica del material denominada conductividad térmica. (El signo negativo se debe a que el calor fluye de las zonas calientes a las frías).

Para el estado estacionario, el gradiente de temperatura en la barra, $\frac{dT}{dx} = \frac{J}{K} = \text{constante}$, por lo tanto, la temperatura T variará linealmente con la distancia al origen de la barra.

$$\frac{T_2 - T_1}{L} = \frac{T - T_1}{x} = -\frac{J}{K} \quad (\text{ecuación 1})$$

y despejando la temperatura obtenemos

$$T = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1 \quad (\text{ecuación 2})$$

Hay que hacer notar que J es la potencia calorífica transmitida a lo largo de la barra por unidad de superficie, es decir, que la energía transmitida por la barra en forma de calor, Q , durante un intervalo de tiempo, t , será $Q = J \cdot S \cdot t$. Y teniendo en cuenta la ecuación 1:

$$Q = -\frac{T_2 - T_1}{L} k S t \quad (\text{ecuación 3})$$

La ecuación 1 se puede escribir como:

$$J = -k \frac{T_2 - T_1}{L} = -\frac{T_2 - T_1}{L/k} = -\frac{T_2 - T_1}{R} \quad (\text{ecuación 4})$$

Donde $R = L/k$ es la *resistencia térmica* de una barra de longitud L y conductividad térmica k .

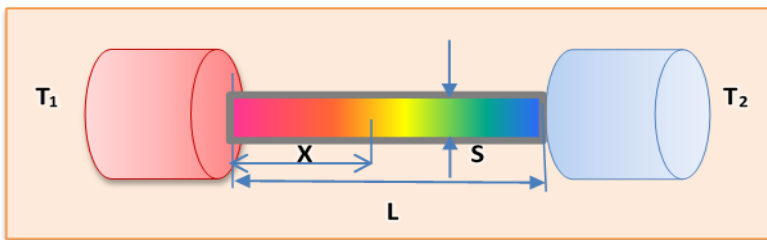
MÉTODO EXPERIMENTAL

El objetivo de nuestra práctica es determinar la conductividad térmica del aluminio.

Para ello disponemos de una barra de aluminio de sección transversal $S = 16\text{cm}^2$, y longitud $L = 14\text{cm}$.

El foco caliente, a temperatura constante $T_1 = 100^\circ\text{C}$, es vapor de agua en ebullición.

El foco frío, a temperatura constante es un líquido volátil a temperatura de ebullición, $T_2 = 34.6^\circ\text{C}$. La densidad del líquido es $\rho = 713.5\text{kgm}^{-3}$, y su calor latente de ebullición es $L_v = 351 \times 10^3\text{J/kg}$.



El líquido volátil se evapora gracias al flujo de energía a través de la barra, y medimos el volumen evaporado, V , del mismo en función del tiempo después de condensarlo. El calor Q recibido por el líquido para evaporar una masa m será:

$$Q = m L_v = V \cdot \rho \cdot L_v \quad (\text{ecuación 5})$$

La tabla contiene los datos del volumen en litros del líquido volátil evaporado en función del tiempo en minutos.

$V(\text{L})$	0.375	0.750	1.124	1.499	1.874	2.249	2.623
$t(\text{min})$	10	20	30	40	50	60	70

1. Representa el volumen de líquido evaporado en función del tiempo y traza la recta que mejor se ajusta a los datos experimentales.
2. Halla la pendiente, p , de la recta anterior.
3. Determina la ecuación de dependencia entre la conductividad térmica del aluminio y la pendiente de la recta y halla dicha conductividad expresada en unidades del S.I.
4. Halla la resistencia térmica de la barra en unidades del S.I.

Si sustituyes la barra anterior por otras dos barras, de acero y cobre, una a continuación de otra, de igual sección a la anterior y de 7 cm de longitud cada una, y sabiendo que sus conductividades térmicas son 45 W/mK y 389.6 W/mK, respectivamente y que la de acero está al lado del foco caliente.

5. Halla:
 - a) La resistencia térmica del conjunto. Para ello, ten en cuenta que en el estado estacionario J es igual para cualquier punto de la barra.
 - b) La temperatura, T_3 del punto de unión de los dos metales. Representa la temperatura a lo largo de las dos barras en función de la distancia, x , al foco caliente.

SOLUCIÓN

Recopilando las ecuaciones del enunciado:

$$\frac{T_2 - T_1}{L} = \frac{T - T_1}{x} = - \frac{J}{K} \quad (\text{ecuación 1})$$

$$T = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1 \quad (\text{ecuación 2})$$

$$Q = - \frac{T_2 - T_1}{L} k S t \quad (\text{ecuación 3})$$

$$J = -k \frac{T_2 - T_1}{L} = - \frac{T_2 - T_1}{L/k} = - \frac{T_2 - T_1}{R} \quad (\text{ecuación 4})$$

$$Q = m L_v = V \cdot \rho \cdot L_v \quad (\text{ecuación 5})$$

y teniendo en cuenta los datos:

$$S = 16\text{cm}^2$$

$$L = 14\text{cm}$$

$$T_1 = 100^\circ\text{C}$$

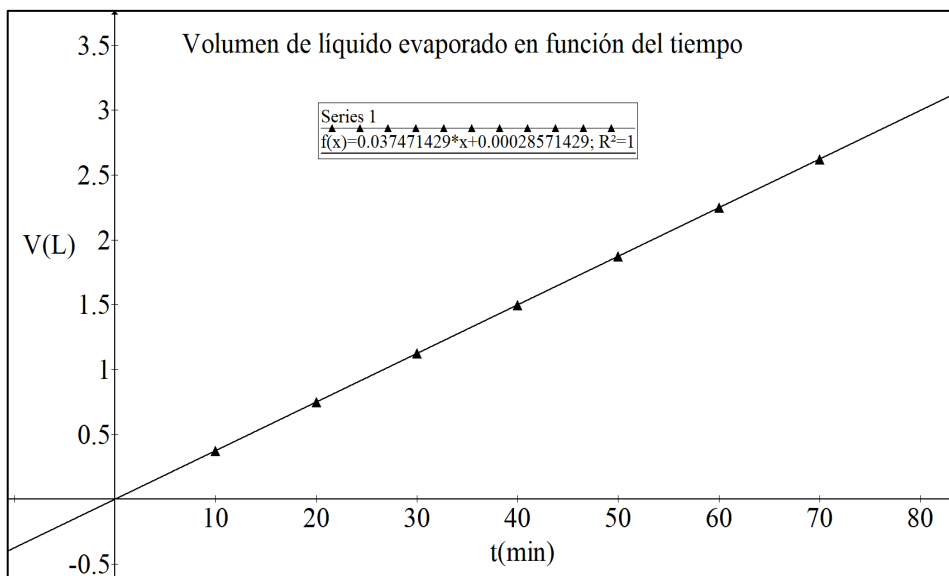
$$T_2 = 34.6^\circ\text{C}$$

$$\rho = 713.5\text{kgm}^{-3}$$

$$L_v = 351 \times 10^3 \text{J/kg.}$$

1. Representamos en la gráfica siguiente el volumen de líquido evaporado en función del tiempo y trazamos la recta que mejor se ajusta a los datos experimentales.

V(L)	0.375	0.750	1.124	1.499	1.874	2.249	2.623
t(min)	10	20	30	40	50	60	70



2. Hallamos la pendiente, p , de la recta anterior. Los alumnos la han dibujado en papel milimetrado y pueden ajustarla a mano.

$$p = 0.03747 \text{ Lmin}^{-1} = 6.245 \times 10^{-7} \text{ m}^3\text{s}^{-1}$$

3. Determinamos la ecuación de dependencia entre la conductividad térmica del aluminio y la pendiente de la recta y hallamos dicha conductividad expresada en unidades del S.I. Igualando las ecuaciones 3 y 5 y despejando el volumen, V , obtenemos:

$$V = \left(-k S \frac{T_2 - T_1}{\rho L_v L} \right) t = pt$$

$$k = - \frac{\rho L_v L}{S(T_2 - T_1)} p$$

Sustituyendo los datos en el S.I. y operando (tenemos en cuenta el signo del gradiente de temperatura):

$$k = 3.350668 \times 10^8 p$$

$$k = 209.2 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$$

4. Hallamos la resistencia térmica de la barra en unidades del S.I.

$$R = \frac{L}{k} = \frac{0.14}{209.2} = 6.692 \times 10^{-4} \text{ Km}^2\text{W}^{-1}$$

Ahora sustituimos la barra anterior por otras dos barras de acero y cobre, una a continuación de otra, de igual sección a la anterior y de 7 cm de longitud cada una, y sabiendo que sus conductividades térmicas son 45W/m K y 389.6W/m K, respectivamente, y que la de acero está al lado del foco caliente.

5. Hallamos:

- a) La resistencia térmica del conjunto. Para ello, tenemos en cuenta que en el estado estacionario J es igual para cualquier punto de la barra. Escribiendo esta condición, para un punto intermedio, en principio cualquiera, de temperatura T_3 , tenemos que:

$$\frac{T_2 - T_3}{l_2/k_2} = \frac{T_3 - T_1}{l_1/k_1} = \frac{T_2 - T_1}{l_2/k_2 + l_1/k_1} = \frac{T_2 - T_1}{R}$$

La resistencia térmica de dos barras en serie será la suma de las resistencias térmicas de cada una, y como las dos barras tienen la misma longitud:

$$R = R_1 + R_2 = \frac{l}{k_1} + \frac{l}{k_2} = l \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) = 0.07 \left(\frac{1}{45} + \frac{1}{389.6} \right)$$

$$R = 1.735 \times 10^{-3} \text{ Km}^2\text{W}^{-1}$$

- b) Para hallar la temperatura, T_3 , del punto de unión de los dos metales, de la ecuación

$$\frac{T_2 - T_3}{l_2/k_2} = \frac{T_3 - T_1}{l_1/k_1}$$

y teniendo en cuenta que

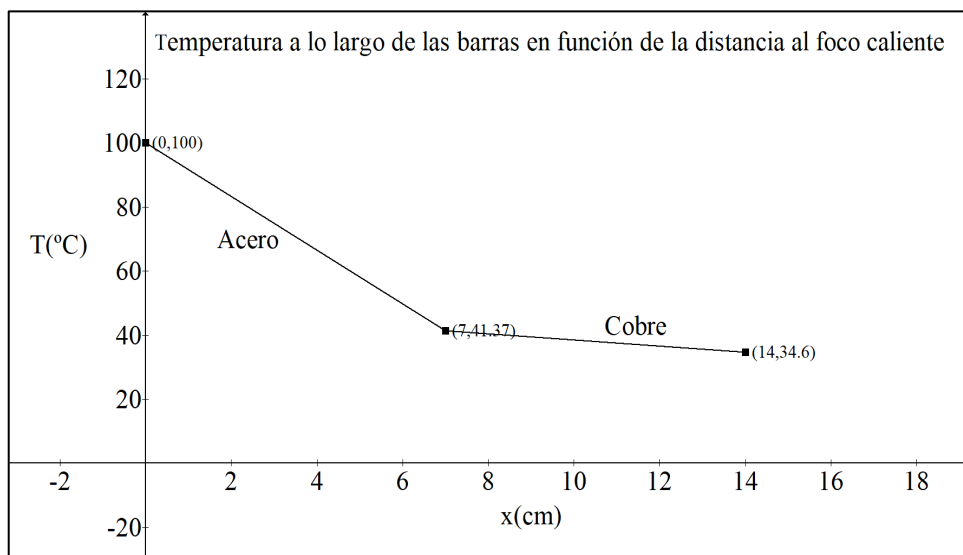
$$l_1 = l_2$$

deducimos el valor de T_3

$$T_3 = \frac{k_1 T_1 + k_2 T_2}{k_1 + k_2} = \frac{45 \times 100 + 389.6 \times 34.6}{45 + 389.6} = 41.37 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$T_3 = 41.37 \text{ } ^\circ\text{C}$$

En la gráfica siguiente representamos la temperatura a lo largo de las dos barras en función de la distancia, x , al foco caliente.



El Universo en expansión

XXVIII Olimpiada de Física, fase local del Distrito Universitario de Valladolid (2017)

INTRODUCCIÓN

La descripción de los objetos del firmamento y su evolución ha sido el objetivo de la astronomía, pero durante muchos milenios solo se vieron el Sol, la Luna, algunos planetas, estrellas y cometas. A simple vista, solo podemos observar tres objetos extra galácticos, la galaxia de Andrómeda y las dos Nubes de Magallanes.

En 1927, el francés G. Lemâitre, publicó un trabajo en el que proponía un universo que se expandía, y en el que, la consecuencia de esa expansión, un observador vería alejarse todos los objetos que no estuvieran ligados a él mediante algún tipo de fuerza, como la gravitatoria o la electrostática.

En 1929 Hubble publica su artículo: “*A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae*”. La velocidad de recesión, v , de una galaxia es proporcional a la distancia, d , a la que se encuentra. La constante de proporcionalidad H fue posteriormente denominada constante o parámetro de Hubble.

$$v = Hd \quad (\text{ecuación 1})$$

El artículo contenía velocidades de 46 nebulosas, pero solo las distancias de 24 de ellas eran fiables. Con estos datos determinó un valor de H de unos 500 (km/s)/Mpc.

EJERCICIO PRÁCTICO

La tabla 1 contiene los datos de 6 objetos celestes. En ella d es la distancia al objeto, y z el parámetro que determina el corrimiento hacia el rojo por efecto Doppler relativista, $z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$

Si llamamos c a la velocidad de la luz en el vacío, y v a la velocidad del objeto, se cumple que:

- a) Para objetos no muy lejanos que se mueven a velocidades mucho menores que la de la luz $z \ll 1$ y, por tanto:

$$v = zc \quad (\text{ecuación 2})$$

- b) Para velocidades altas, z ya no es mucho menor que 1 y entonces:

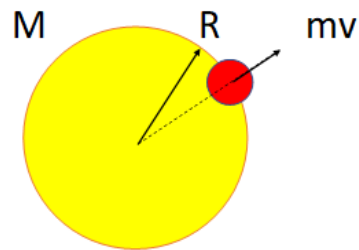
$$v = \frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1} c \quad (\text{ecuación 3})$$

Tabla 1		
NOMBRE DE LA GALAXIA, CUÁSAR O CÚMULO SELECCIONADO	DISTANCIA d (Mpc)	CORRIMIENTO HACIA EL ROJO $z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$
Cúmulo de Virgo	20	0.004
Cúmulo de Coma	90	0.022
Cúmulo de Hydra II	700	0.203
3C48 (cuásar)	1 200	0.370
IRAS 10214+4724 (protogalaxia)	3 600	2.286
PC 1247+3406 (cuásar)	5 000	4.897

- Con la ecuación 3, determina el valor de la velocidad v del objeto estelar y construye una tabla que relacione d (Mpc) con v (km/s). Representa en papel milimetrado v en función de d , traza la recta que mejor se ajusta y determina el valor de la constante de Hubble, H . (Puedes despreciar algún punto si consideras que su comportamiento es muy distinto al del resto).
- Una cuestión que se plantean sobre la evolución del Universo es si la expansión que presenta actualmente seguirá de forma indefinida o si por el contrario los campos gravitatorios son lo bastante fuertes como para llegar a detener la expansión del mismo, de modo que con el tiempo se contraerá nuevamente. Estos dos modelos dependen de que la densidad media de la *materia* en el Universo sea menor o mayor que un cierto valor crítico δ_c .

Para calcular el movimiento de cualquier galaxia típica respecto a nosotros, consideremos una esfera en la que nosotros ocupamos el centro y la galaxia aludida la superficie. El movimiento de esta galaxia es el mismo que si la masa del Universo consistiese solamente en la materia que está dentro de esa esfera, sin nada fuera de ella. Este notable resultado es válido en la teoría de la gravitación de Newton y en la de Einstein y solo depende de la simetría esférica del sistema en estudio (Teorema de G.D. Birkhoff, 1923).

Sea M la masa de una esfera de galaxias de radio R y de densidad media δ , con R mayor que las distancias entre cúmulos de galaxias, pero menor que la distancia que caracteriza al Universo como un todo. Sea m la masa de una galaxia situada en el borde de dicha esfera. La velocidad de m respecto al centro de la esfera cumplirá la ley de Hubble.



Con la ley de Hubble, el valor de H determinado y tus conocimientos de gravitación, halla:

- El valor de la densidad crítica del Universo por encima de la cual se detendrá su expansión y se contraerá nuevamente.
- El número de partículas nucleares que tiene que haber por metro cúbico para que esto ocurra.

Datos:

Velocidad de la luz, $c = 2.9979 \times 10^8 \text{ m/s}$

1Mpc = $3.086 \times 10^{22} \text{ m}$

Masa del protón y del neutrón = $1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$

Constante de gravitación universal, $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

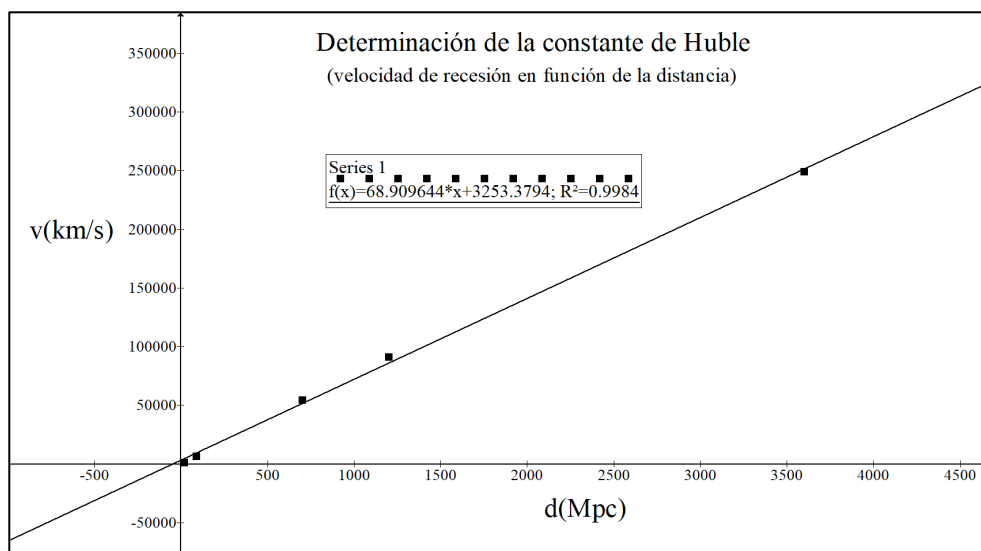
SOLUCIÓN

1. La tabla pedida es la siguiente:

NOMBRE DE LA GALAXIA, CUÁSAR O CÚMULO SELECCIONADO	d (Mpc)	Corrimiento hacia el rojo $z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$	Velocidad de recesión $v = \frac{(z + 1)^2 - 1}{(z + 1)^2 + 1} c$	Velocidad de recesión v (Km/s)
Cúmulo de virgo	20	0.004	0.00399 c	1 196
Cúmulo de Coma	90	0.022	0.02176 c	6 523
Cúmulo de Hydra II	700	0.203	0.18274 c	54 784
3C48 (cuásar)	1 200	0.370	0.30481 c	91 378
IRAS 10214+4724 (protogalaxia)	3 600	2.286	0.83048 c	248 969
PC 1247+3406 (cuásar)	5 000	4.897	0.94409 c	283 029

En la representación gráfica observamos que el objeto más distante no está alineado y lo desechamos en nuestros cálculos. Trazamos la recta que mejor se ajusta. La pendiente de dicha recta, $v = Hd$, es la constante de Hubble.

$$H = 68.9 \text{ (km/s)/Mpc}$$



2. Teniendo en cuenta las leyes de la gravitación y de la mecánica, podemos razonar lo siguiente:

- a) La masa de la esfera de galaxias será igual al volumen de la esfera por la densidad media de la misma: $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \delta$. La energía total de la masa m será igual a la suma de la energía cinética y la energía potencial. Si esta energía es negativa la galaxia de masa m nunca puede escapar al infinito. Si la energía es positiva la galaxia m seguirá alejándose del centro de la esfera de masa M . En el límite de la densidad crítica, δ_c , se cumple que la energía total de la masa m es cero, $E = 0$.

La energía potencial de la masa m será:

$$E_p = - \frac{GMm}{R} = - 4\pi m R^2 \delta G / 3$$

Teniendo en cuenta la ley de Hubble: $v = HR$

La energía cinética de la masa m será:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (HR)^2$$

Cuando la energía total sea cero, la densidad será la crítica, por tanto

$$0 = \frac{1}{2} m (HR)^2 - \frac{4}{3} \pi m R^2 \delta_c G$$

Y despejando la densidad crítica:

$$\delta_c = 3H^2 / 8\pi G$$

Teniendo en cuenta los datos del enunciado y expresando las cantidades en el S.I.:

$$H = 68.9 (km/s) / Mpc = 68.9 \times 10^3 (m/s) / (3.086 \times 10^{22} m)$$

$$H = 2.2326636 \times 10^{-18} s^{-1}$$

$$\delta_c = \frac{3H^2}{8\pi G} = \frac{3 \times 2.2326636^2}{8 \pi 6.67 \times 10^{-11}} = 8.92076 \times 10^{-27} kg/m^3$$

$$\delta_c \cong 8.92 \times 10^{-27} kg/m^3$$

- b) Sabemos que la densidad crítica es: $\delta_C = 8.92076 \times 10^{-27} \text{kg/m}^3$. Como cada partícula nuclear tiene una masa de $1.67 \times 10^{-27} \text{kg}$. El número de partículas por unidad de volumen será:

$$\frac{8.92076 \times 10^{-27} \text{kg/m}^3}{1.67 \times 10^{-27} \text{kg/partícula}} = 5.34 \text{ partículas nucleares /m}^3$$

Luego hay, en promedio, unas 5 partícula nucleares en cada metro cúbico.

¡Cuidado con el colesterol!

XXIX Olimpiada de Física, fase local del Distrito Universitario de Valladolid (2018)

INTRODUCCIÓN TEÓRICA

Denominamos viscosidad al rozamiento entre las capas de un fluido. A causa de la viscosidad, es necesario ejercer una fuerza para obligar a una capa de fluido a deslizar sobre otra. El coeficiente de viscosidad de un fluido, o simplemente viscosidad, η , se define como la constante de proporcionalidad entre la fuerza F por unidad de superficie A , que hay que hacer para deslizar una capa de fluido sobre otra, y el gradiente de velocidad dv/dy , entre dichas capas. Si el gradiente de velocidad es constante, el régimen de flujo se denomina laminar.

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{dv}{dy} \quad (\text{ecuación 1})$$

Consideremos una tubería cilíndrica, de radio R y longitud L , por la que circula un fluido viscoso en régimen laminar, bajo la acción de una fuerza debida a la diferencia de presión existente en los extremos del tubo; la velocidad del flujo varía desde cero en las paredes del tubo, hasta una velocidad máxima v_m a lo largo de la línea central del conducto.

A una distancia r del eje de la tubería se cumple que $F = (p_1 - p_2) \pi r^2$. El área A de la capa es ahora el área lateral de un cilindro de longitud L y radio r , $A = 2\pi rL$. Sustituyendo F y A en la ecuación (1) obtenemos la ecuación (2), en la que el signo negativo tiene en cuenta que v disminuye al aumentar r .

$$\frac{(p_1 - p_2)\pi r^2}{2\pi rL} = -\eta \frac{dv}{dr} \quad (\text{ecuación 2})$$

Simplificando, ordenando e integrando esta ecuación, obtenemos el perfil de velocidades en función de la distancia radial, al eje del tubo. El resultado es una parábola. Hemos tenido en cuenta que la velocidad en las paredes del tubo ($r = R$) es nula.

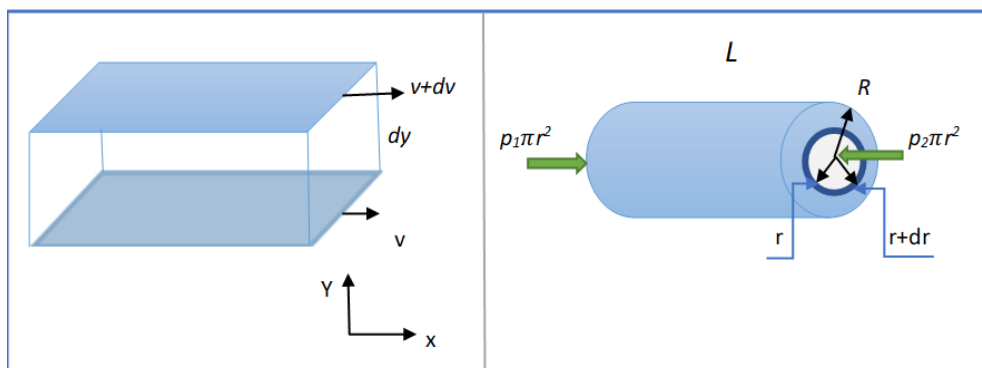
$$v = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta L} (R^2 - r^2) \quad (\text{ecuación 3})$$

Si v es la velocidad del fluido a una distancia r del eje, el volumen de fluido que atraviesa el área del anillo, $(2\pi r) dr$, en la unidad de tiempo será $(2\pi r) dr v$.

Llamamos gasto o caudal, G , al volumen que atraviesa el área total del tubo en la unidad de tiempo. Sustituyendo la velocidad por su expresión en función de r , ecuación 3, e integrando entre 0 y R , obtenemos la *Ley de Poiseuille*:

$$G = \frac{\pi(p_2 - p_1)R^4}{8\eta L} \quad (\text{ecuación 4})$$

Dicha ley relaciona la dependencia del gasto con el radio del tubo, con la viscosidad y con el gradiente de presión a lo largo del tubo, $(p_1 - p_2)/L$.



MÉTODO EXPERIMENTAL

Tenemos un tubo-capilar, de radio R y longitud L , insertado al final de un tubo transparente de sección S , cuya altura está graduada, lleno de un fluido viscoso de densidad ρ .

A través del capilar se descarga la columna de fluido viscoso.

La diferencia de presión $p_1 - p_2$ entre los extremos del capilar es igual a la presión que ejerce la altura h de la columna de fluido, por tanto, $p_1 - p_2 = \rho g h$.

El volumen de fluido que sale por el extremo del capilar en la unidad de tiempo es el gasto G . Teniendo en cuenta la Ley de Poiseuille y el descenso de la altura h de fluido en la columna

$$G = \frac{\pi(p_2 - p_1)R^4}{8\eta L} = \frac{\pi\rho ghR^4}{8\eta L} = -S \frac{dh}{dt}$$

por tanto

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\pi\rho gR^4}{8\eta LS} h$$

luego

$$\frac{dh}{h} = -\frac{\pi\rho gR^4}{8\eta LS} dt$$

Integrando desde la altura h_0 , en el instante cero, hasta la altura h en el instante t , obtenemos la dependencia de la altura con el tiempo y la denominada constante del capilar

$$\alpha = \frac{\pi\rho gR^4}{8\eta LS}$$

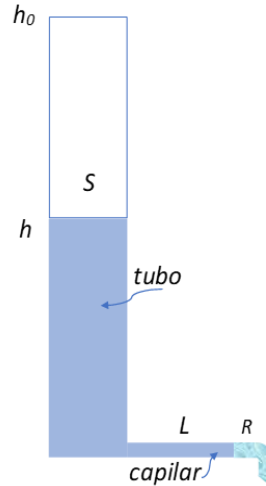
$$h = h_0 e^{-\alpha t} = h_0 e^{-\frac{\pi\rho gR^4}{8\eta LS} t}$$

y tomando logaritmos neperianos

$$\ln(h) = \ln(h_0) - \alpha t = \ln(h_0) - \left(\frac{\pi\rho gR^4}{8\eta LS}\right) t \quad (\text{ecuación 5})$$

que es una función lineal de $\ln(h)$ con el tiempo.

Para determinar la viscosidad de un fluido de densidad $\rho = 0.9\text{gcm}^{-3}$, utilizamos un tubo de diámetro interior $\Phi_1 = 2\text{cm}$, y un capilar de diámetro interior $\Phi_2 = 4\text{mm}$ y de longitud $L = 5\text{cm}$; $g = 9.8\text{ms}^{-2}$.



La tabla indica la altura h del líquido en el tubo para diferentes instantes de tiempo.

t (s)	0	12.0	32.6	57.9	90.5	136.5	215.1
h (cm)	100	90	75	60	45	30	15

- Construye una nueva tabla y representa en papel milimetrado las variables adecuadas para obtener una dependencia lineal.
- Utilizando la gráfica anterior halla el valor de la viscosidad del fluido.
- Halla la ecuación de dimensiones del coeficiente de viscosidad. La unidad de viscosidad en el S.I. se llama *pascal por segundo* ($Pa \cdot s$) aunque se usa muy a menudo el *poise* (P). El poise es una unidad donde la masa se expresa en gramos, la distancia en centímetros y el tiempo en segundos, halla la equivalencia entre el pascal por segundo y el poise.
- La ley de Poiseuille relaciona el gasto o caudal con el radio y la longitud del tubo capilar, para una diferencia de presión determinada, ecuación (4). Una arteria sana puede llevar un caudal de sangre de $100\text{cm}^3/\text{min}$ a una presión de 120mmHg . El colesterol las obstruye. Esto hace que el caudal sanguíneo disminuya y para mantenerlo la presión arterial debe aumentar. Halla, el caudal de sangre de la arteria si ésta se obstruye disminuyendo su radio en un 20%, manteniendo la presión, y halla, la presión necesaria para restaurar el flujo.

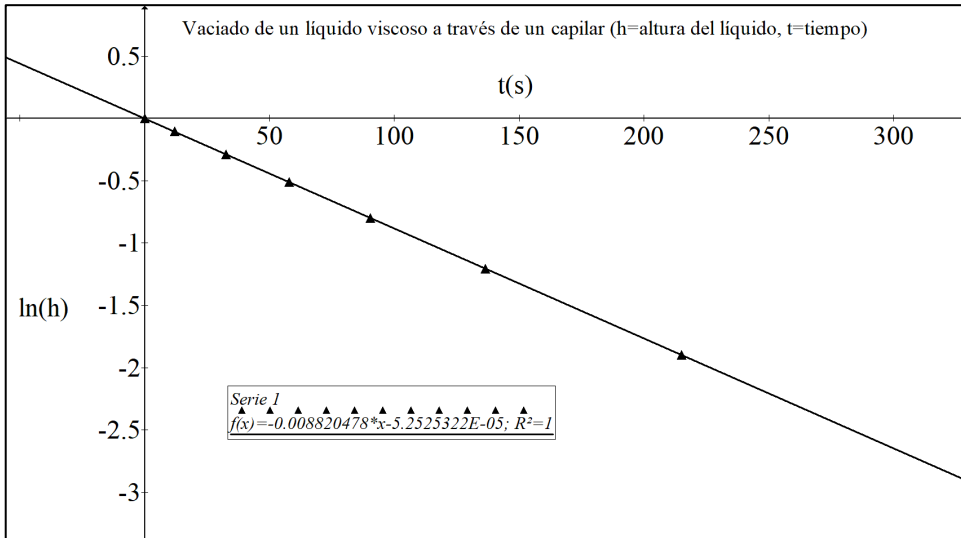
Halla, la disminución porcentual del radio que obligue a duplicar la presión para mantener el caudal.

SOLUCIÓN

- a) La tabla siguiente contiene los datos de la altura h del tubo en unidades del S.I, el tiempo en segundos y los valores de $\ln(h)$.

t (s)	0	12.0	32.6	57.9	90.5	136.5	215.1
h (m)	1.00	0.90	0.75	0.60	0.45	0.30	0.15
$\ln(h)$	0.00	-0.105	-0.288	-0.511	-0.799	-1.204	-1.897

La representación del $\ln(h)$ en función del tiempo está en la gráfica.



- b) La pendiente de la recta es $b = 8.82 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$

De la pendiente de la recta, $b = \frac{\pi \rho g R^4}{8 \eta L S}$, despejamos la viscosidad del fluido y sustituyendo los datos en el S.I., obtenemos para la viscosidad el valor de:

$$\eta = \frac{\pi \rho g R^4}{b 8 L S} = \frac{\pi \cdot 900 \times 9.8 \times (2 \times 10^{-3})^4}{0.00882 \times 8 \times 5 \times 10^{-2} \times \pi \cdot 10^{-4}} = 0.4 \text{ Pa s}$$

$$\eta = 0.4 \text{ Pa s}$$

- c) Para hallar la ecuación de dimensiones del coeficiente de viscosidad tenemos en cuenta la definición:

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{dv}{dy}$$

Despejando la viscosidad, y teniendo en cuenta la ecuación de dimensiones de las demás magnitudes:

$$[\eta] = \left[\frac{F}{A} \frac{dy}{dv} \right] = \frac{MLT^{-2}}{L^2} \frac{L}{LT^{-1}} = ML^{-1}T^{-1}$$

Por tanto, la unidad en el S.I. será el

$$\frac{\text{kilogramo}}{\text{metro} \times \text{segundo}} = \text{pascal} \times \text{segundo}$$

y su equivalencia con el poise será:

$$1 \text{ Pa s} = \frac{kg}{m s} = \frac{1000g}{100cm s} = 10 P$$

- d) La ley de Poiseuille, $G = \frac{\pi(p_2 - p_1)R^4}{8\eta L}$, relaciona el gasto con el radio y la longitud del tubo capilar para una diferencia de presión determinada. Como el gasto depende del radio a la cuarta potencia, y de $(p_2 - p_1)$ la dependencia es lineal, podemos escribir que:

$$G = \text{constante} (p_2 - p_1) R^4$$

donde la constante engloba la viscosidad de la sangre y la longitud del capilar que no varían.

Es decir, si se mantiene la presión, el caudal de sangre es directamente proporcional al radio de la arteria elevado a la cuarta potencia. Si queremos mantener el caudal de sangre constante, la presión es inversamente proporcional al radio de la arteria elevado a la cuarta potencia.

Si el radio disminuye un 20% y se mantiene la presión, el gasto será:

$$\frac{G}{100} = \left[\frac{0.8R}{R} \right]^4 \Rightarrow G = 40.96 \text{ cm}^3/\text{min}$$

Si el radio ha disminuido y queremos restaurar el gasto, la presión será:

$$(p_2 - p_1)(0.8R)^4 = 120 R^4 \Rightarrow (p_2 - p_1) = 293 \text{ mmHg}$$

Para una arteria sana, podemos tabular las soluciones anteriores:

OCLUSIÓN	CAUDAL (cm ³ /min)	PRESIÓN (mm Hg)
0%	100	120
20%	40.96	293

Si el caudal se reduce a la mitad, ha ocurrido porque el radio R se ha reducido, probablemente por culpa del colesterol, hasta el valor que cumple que:

$$R' = \sqrt[4]{0.5} R = 0.8408R \cong (1 - 0.16)R$$

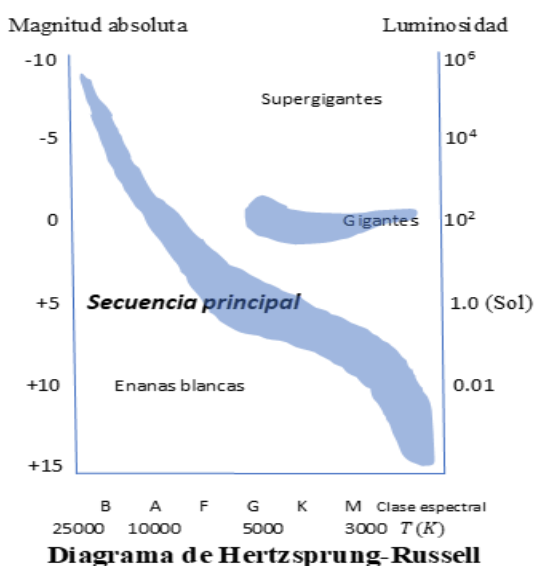
Es decir que, si el radio de la arteria disminuye en un 16%, el caudal se reduce a la mitad, obligando a que la presión se duplique para mantenerlo; por tanto, *¡cuidado con el colesterol!*

¿Cuánto vive una estrella?

XXX Olimpiada de Física, fase local del Distrito Universitario de Valladolid (2019)

UN POCO DE HISTORIA

El hecho de que los metales cambien de color al calentarlos era conocido ya en el siglo XIX. También se sabía que había estrellas de diferentes colores y se había analizado su luz descomponiéndola mediante un prisma. El análisis del color de la estrella y de su espectro permitía conocer su composición química y su temperatura. En 1860 se habían identificado cuatro tipos principales de estrellas, blancas, amarillas, anaranjadas, y muy rojas. La clasificación fue ampliada a 16 tipos, primero por H. Draper y posteriormente por C. Pickering, utilizando un prisma asociado al telescopio; cada estrella quedaba registrada en la placa fotográfica como un pequeño espectro. El catálogo de H. Draper contiene unas 225 000 estrellas. Annie Jump Cannon redujo la clasificación a 10 tipos: O, B, A, F, G, K, M, N, R, S, (*) con temperaturas cada vez más bajas. Cada tipo está dividido en diez subtipos numerados del 1 al 10. El Sol es una estrella del tipo G2.



A principios del siglo XX el americano H. N. Russell y el danés E. Hertzsprung, separadamente, estudiaron la luminosidad de las estrellas y su temperatura y realizaron (en 1913) un diagrama luminosidad-temperatura, denominado diagrama de Hertzsprung-Russell (H-R), donde situaron las estrellas con tipo espectral y luminosidad conocida. En el diagrama, las estrellas se agrupan en varias familias.

La denominada *Secuencia Principal* es una línea diagonal, que empieza con estrellas frías (parte inferior derecha) y progresa hacia las calientes (parte superior izquierda). También se observa la *Banda de las gigantes* y la *Banda de las enanas blancas*, etc.

En el diagrama de Hertzsprung-Russell la temperatura desciende a la derecha en el eje horizontal. La luminosidad se expresa, tanto en múltiplos de la luminosidad del Sol, como en magnitud absoluta. Alrededor del 90% de las estrellas conocidas se encuentran en la Secuencia Principal y tienen luminosidades que siguen, aproximadamente, una determinada relación masa-luminosidad. Aunque no podemos observar la evolución en la vida de una estrella por ser demasiado larga, en el diagrama de H-R se encuentran estrellas en diferentes momentos de su vida y observándolo podemos reconstruir la vida de las estrellas. El diagrama de H-R fue la base de la teoría de la evolución estelar a la que han contribuido también otros muchos astrónomos, como A. Eddington, quien en 1924 descubrió la mencionada relación entre la luminosidad de una estrella y su masa, o como H. Bethe, que en 1939 confirmó la teoría propuesta por Eddington, de que la fuente de energía de las estrellas es la reacción nuclear que convierte el hidrógeno en helio.

Una estrella nos puede parecer muy brillante por tener una alta luminosidad intrínseca o por encontrarse muy cerca de la Tierra. La determinación de la luminosidad intrínseca implica determinar la distancia a la que se encuentra la estrella.

Nota curiosa: (*) Para memorizar la secuencia O B A F, ..., los estudiantes de habla inglesa, idearon la frase “¡Oh Be A Fine Girl/Guy, Kiss Me!”

PARTE TEÓRICA

Denominamos luminosidad L de una estrella a la energía que emite cada segundo y denominamos brillo a la intensidad de la luz I de la estrella en la Tierra.

La magnitud es una unidad histórica del brillo estelar. La escala fue ideada por el astrónomo griego del siglo II, Hiparco; asignó 1 a la estrella más brillante y 6 a la más tenue. La escala se define de tal manera que un cambio en 5 magnitudes representa un cambio de 100 en la intensidad. *La magnitud m se dice que es aparente* y está asignada al brillo visual de un objeto. Para comparar el brillo intrínseco de los objetos, su magnitud se ajusta a una distancia de 10 parsecs y la *magnitud que un objeto tendría a 10pc se llama magnitud absoluta*, μ . Si I es la intensidad en la Tierra e I_0 la intensidad a 10pc

$$\Delta\mu = m - \mu = -\frac{5}{2} \log \frac{I}{I_0} \quad (\text{ecuación 1})$$

Sabemos también que la intensidad de la luz sigue una ley inversa con el cuadrado de la distancia a la estrella. Por lo tanto, a 10pc la magnitud absoluta de una estrella que se encuentra a una distancia d sigue la ley de Pogson

$$\mu = m + 5 - 5 \log d \quad (\text{ecuación 2})$$

Por otra parte, la *Secuencia Principal* es la fase en que una estrella quema hidrógeno en su núcleo mediante fusión nuclear. La mayor parte de las estrellas pasan el 90% de su vida, aproximadamente, en la Secuencia Principal del diagrama de Hertzsprung- Russell.

En las estrellas de la Secuencia Principal, la luminosidad, L , aumenta con la masa, M , con la ley de potencias, siendo L_{\odot} y M_{\odot} la luminosidad y la masa del Sol y a un parámetro entre 3 y 4 que hay que determinar.

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \left[\frac{M}{M_{\odot}} \right]^a \quad (\text{ecuación 3})$$

La tabla siguiente contiene ejemplos de luminosidades de estrellas y masas respecto a Sol.

Clase de estrella	Masa	Luminosidad	Temperatura	Ejemplos
	M/M_{\odot}	L/L_{\odot}	K	
F0	1.7	6	7 240	Gamma Virginis
F5	1.3	2.5	6 540	Eta arietis
G0	1.1	1.26	5 920	Beta Comae Berenices
G2	1.0	1.00	5 780	Sol
G5	0.93	0.79	5 610	Alpha Mensae
K0	0.78	0.40	5 240	70 Ophiuchi A
K5	0.69	0.16	4 410	61 Cygni A

Como la masa de la estrella es el combustible para los procesos de fusión nuclear, podemos suponer que el tiempo de vida, T , de una estrella en la Secuencia Principal es proporcional a la masa estelar dividida por la luminosidad. Por tanto:

$$\frac{T}{T_{\odot}} = \frac{M/L}{M_{\odot}/L_{\odot}} \quad (\text{ecuación 4})$$

PARTE PRÁCTICA

1. Demuestra la ecuación 2 a partir de la ecuación 1.
2. Halla la relación entre las distancias de dos estrellas a la Tierra que tienen la misma magnitud aparente, m , pero su magnitud absoluta difiere en 2 unidades.
3. Utiliza los datos de la tabla $\frac{L}{L_{\odot}}$ y $\frac{M}{M_{\odot}}$ para determinar el valor del exponente a de la ecuación 3. Para ello, haz los cambios de variable necesarios para que dicha función sea lineal y construye una nueva tabla con los valores de las nuevas variables.
4. Representa dichos valores en papel milimetrado, traza la recta que mejor se ajusta y halla la pendiente de la recta. Determina el valor de a .
5. Halla la luminosidad respecto a Sol de la estrella Phi Orionis sabiendo que tiene una masa igual a 18 veces la del Sol. Suponiendo que para este tamaño de estrella el valor de a fuese extrapolable.
6. Halla la ecuación que relaciona el tiempo de vida de una estrella con su masa, utilizando las ecuaciones 3 y 4.
7. Si para el Sol se ha determinado que aproximadamente $T_{\odot} = 10 \times 10^9$ años, halla el tiempo de vida en la Secuencia Principal de las estrellas de la tabla. Construye una tabla ordenada con los resultados.

SOLUCIÓN

1. Las intensidades son inversamente proporcionales al cuadrado de las distancias, luego:

$$\Delta\mu = m - \mu = -\frac{5}{2} \log \frac{I}{I_0} = -\frac{5}{2} \log \frac{10^2}{d^2} = -5 \log 10 + 5 \log d$$

Por tanto

$$\mu = m + 5 - 5 \log d \quad (\text{ecuación 2})$$

2. Aplicando la ecuación anterior a las dos estrellas

$$\begin{cases} \mu_1 = m + 5 - 5 \log d_1 \\ \mu_2 = m + 5 - 5 \log d_2 \end{cases}$$

Según el enunciado:

$$\mu_2 = \mu_1 + 2$$

Sustituyendo, teniendo en cuenta la ecuación 2

$$\begin{cases} \mu_1 + 2 = m + 5 - 5 \log d_1 + 2 \\ \mu_2 = m + 5 - 5 \log d_2 \end{cases}$$

Por tanto

$$-5 \log d_1 + 2 = -5 \log d_2$$

operando

$$2 = 5 \log d_1 - 5 \log d_2 = 5(\log d_1 - \log d_2) = 5 \log \frac{d_1}{d_2}$$

de donde

$$\frac{d_1}{d_2} = 10^{2/5} = 2.512$$

3. Tomando logaritmos en la ecuación 3, tenemos la ecuación lineal

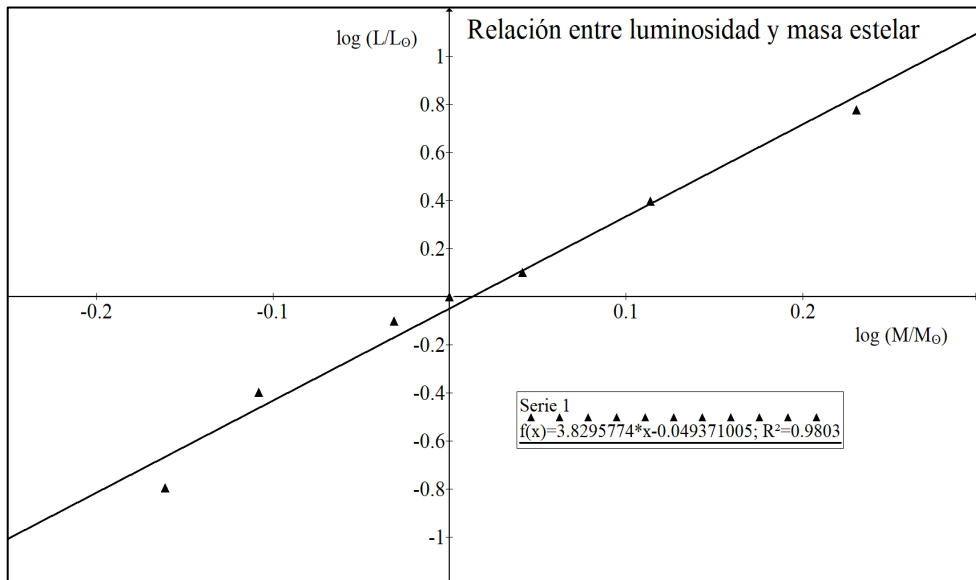
$$\log \frac{L}{L_{\odot}} = a \log \frac{M}{M_{\odot}} \quad (\text{ecuación 5})$$

La tabla pedida es la siguiente:

Clase de estrella	Masa		Luminosidad		Ejemplos
	M/M_{\odot}	$\log \frac{M}{M_{\odot}}$	L/L_{\odot}	$\log \frac{L}{L_{\odot}}$	
F0	1.7	0.2304	6	0.7782	Gamma Virginis
F5	1.3	0.1139	2.5	0.3979	Eta arietis
G0	1.1	0.0414	1.26	0.1004	Beta Comae Berenices
G2	1.0	0.0000	1.00	0.0000	Sol
G5	0.93	-0.0315	0.79	-0.1024	Alpha Mensae
K0	0.78	-0.1079	0.40	-0.3979	70 Ophiuchi A
K5	0.69	-0.1612	0.16	-0.7959	61 Cygni A

4. Representando $\log \frac{L}{L_{\odot}}$ en función de $\log \frac{M}{M_{\odot}}$ obtenemos una recta. La pendiente de la recta de la ecuación 5 es a . Su valor, ajustando la recta por mínimos cuadrados es:

$$a = 3.83$$



5. Suponiendo que para este tamaño de estrella el valor de a fuese extrapolable.

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \left[\frac{M}{M_{\odot}} \right]^a = 18^{3.83}$$

$$\frac{L}{L_{\odot}} = 64\,223$$

6. Teniendo en cuenta que $\frac{L}{L_{\odot}} = \left[\frac{M}{M_{\odot}} \right]^a$ podemos escribir que

$$\frac{T}{T_{\odot}} = \frac{M/L}{M_{\odot}/L_{\odot}} = \frac{ML_{\odot}}{M_{\odot}L} = \frac{M}{M_{\odot}} \left[\frac{M_{\odot}}{M} \right]^a = \frac{M^{1-a}}{M_{\odot}^{1-a}} = \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{1-a}$$

Y sustituyendo el valor de $a = 3.83$, nos queda la ecuación

$$\frac{T}{T_{\odot}} = \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-2.83}$$

7. De la ecuación anterior $T = T_{\odot} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-2.83}$; la tabla pedida es la siguiente:

Clase de estrella	Masa M/M_{\odot}	Luminosidad L/L_{\odot}	T (años)	Ejemplos
F0	1.7	6	0.223×10^{10}	Gamma Virginis
F5	1.3	2.5	0.476×10^{10}	Eta arietis
G0	1.1	1.26	0.764×10^{10}	Beta Comae Berenices
G2	1.0	1.00	1.000×10^{10}	Sol
G5	0.93	0.79	1.228×10^{10}	Alpha Mensae
K0	0.78	0.40	2.020×10^{10}	70 Ophiuchi A
K5	0.69	0.16	2.858×10^{10}	61 Cygni A

Tan rápido era que le apodaron “el adiabático”

XXXI Olimpiada de Física, fase local del Distrito Universitario de Valladolid (2020)

INTRODUCCIÓN TEÓRICA

La termodinámica nos enseña que si queremos estudiar cómo cambia un sistema, cómo intercambia energía con su entorno, tenemos que analizar una serie de magnitudes que definen su comportamiento, son las magnitudes termodinámicas. Los gases son quizás los sistemas más sencillos de estudiar, las magnitudes termodinámicas que definen su estado son la cantidad de materia, n , el volumen, V , la presión, p , y la temperatura termodinámica, T . Para cada gas hay una relación definida entre ellas que denominamos *ecuación de estado*. Esta ecuación puede ser muy complicada, pero si la presión tiende a cero, se ha observado que la ecuación tiende a una relación muy sencilla entre sus variables termodinámicas:

$$pV = nRT \quad (\text{ecuación 1})$$

donde R es una constante igual para todos los gases. $R = 8'314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Denominamos gas perfecto al que cumple la ecuación 1. Esto significa que sus moléculas no presentan fuerzas de atracción o repulsión entre ellas. Además, para un gas perfecto su energía interna U es únicamente función de la temperatura.

También sabemos que los intercambios de energía de nuestro sistema se hacen a través de intercambios de calor, Q , o de trabajo, W , con el medio que le rodea y escribimos el Primer Principio de la termodinámica (norma I.U.P.A.C.) como

$$\Delta U = Q + W \quad (\text{ecuación 2})$$



O bien, para procesos infinitesimales escribiríamos

$$dU = dQ + dW \quad (\text{ecuación 3})$$

Nuestro gas puede evolucionar de múltiples formas, pero en cualquier caso suponemos que lo hace en sucesivos estados de equilibrio.

La forma de intercambiar trabajo se podrá calcular como

$$dW = -p dV \quad (\text{ecuación 4})$$

El trabajo total se halla integrando la ecuación anterior a lo largo de la evolución realizada, para lo cual, es necesario conocer si la presión permanece constante o cómo va variando.

Las formas de intercambiar calor también pueden ser muy distintas. Podemos hacer que el gas evolucione a volumen constante, a presión constante, o que ambos varíen de forma arbitraria.

En cada caso, la cantidad de calor necesaria para producir un cambio de temperatura, de una unidad por mol de sustancia, se denomina calor específico y tiene un valor diferente según sea el proceso. En la práctica, son muy interesantes los procesos a volumen constante y a presión constante, pues su conocimiento sirve para realizar cálculos en muchos otros tipos de procesos. Dichos calores específicos c_p y c_v vienen definidos como

$$\left(\frac{dQ}{dT}\right)_{p=cte} = nc_p \quad (\text{ecuación 5})$$

$$\left(\frac{dQ}{dT}\right)_{v=cte} = nc_v \quad (\text{ecuación 6})$$

Además, para un gas perfecto:

$$c_p - c_v = R \quad (\text{ecuación 7})$$

$$dU = nc_v dT \quad (\text{ecuación 8})$$

Si un proceso se realiza sin intercambio de calor se denomina adiabático. Si la expansión o la compresión de un gas se realiza muy rápidamente será casi

adiabático, ya que el flujo calorífico hacia o desde el sistema es lento aún en condiciones favorables.

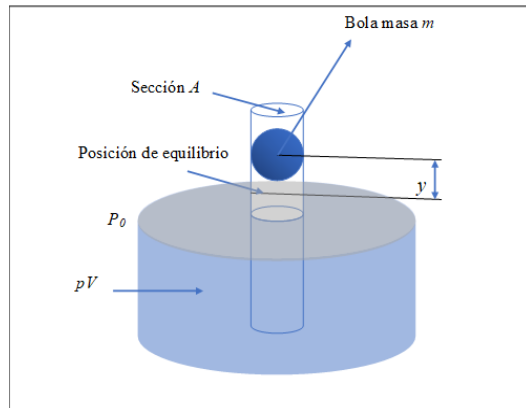
Para un proceso adiabático, se puede demostrar que la (ecuación 1) se transforma en

$$pV^\gamma = cte \quad (\text{ecuación 9})$$

siendo $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ el coeficiente adiabático. La (ecuación 9) se cumple para todos los estados de equilibrio por los cuales pasa un gas perfecto durante un proceso adiabático cuasi - estático.

PARTE PRÁCTICA

En 1929, Rùchhardt propuso un método para determinar el valor de γ . El gas se halla en un gran recipiente de volumen V . Ajustado al recipiente hay un tubo de vidrio calibrado, de sección A , en el cual, una bola metálica, de masa m , ajusta perfectamente como pistón. El gas está ligeramente comprimido por la bola de acero en equilibrio y, por ello, su presión p es muy poco superior a la atmosférica P_0 .



$$p = P_0 + \frac{mg}{A} \quad (\text{ecuación 10})$$

Si se da a la bola un ligero desplazamiento hacia abajo y después se la abandona a sí misma, oscilará con un periodo τ , el rozamiento hará que la bola llegue por fin al reposo. Llamemos y al desplazamiento de la bola desde su posición de equilibrio en un instante cualquiera.

El volumen de gas ha variado en $dV = yA$ y la variación de presión será dp . La fuerza sobre la bola será $F = A dp$ y será una fuerza recuperadora.

La bola oscilará rápidamente y los estados por los que pasa el gas pueden considerarse, aproximadamente, como estados de equilibrio adiabáticos que cumplen la (ecuación 9). Diferenciando esta ecuación escribimos:

$$p \gamma V^{\gamma-1} dV + V^\gamma dp = 0$$

$$F = A dp = -A \frac{p \gamma V^{\gamma-1} dV}{V^\gamma} = -A p \gamma \frac{dV}{V} = -A p \gamma \frac{yA}{V} = -\frac{\gamma p A^2}{V} y$$

La fuerza es directamente proporcional al desplazamiento y de sentido opuesto luego la bola realiza un movimiento armónico cuyo periodo viene dado por

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{mV}{\gamma p A^2}} \quad (\text{ecuación 11})$$

Tenemos una bola de masa $m = 16.71g$, una presión atmosférica $P_0 = 759.9mm$ de Hg, el diámetro del tubo es $\emptyset = 16mm$, y la tabla siguiente nos da el periodo de oscilación de la bola para diferentes volúmenes de gas.

$V (cm^3)$	5 700	6 000	6 280	6 510	6 800
$\tau (s)$	0.81465	0.83582	0.85510	0.87061	0.89979

- 1) La ecuación 11 nos indica que, el cuadrado del periodo de oscilación de la bola es una función lineal del volumen. Construya una tabla con los datos adecuados y represente en el papel milimetrado $\tau^2 = \text{función}(V)$
- 2) Determine la pendiente de la recta anterior y el coeficiente adiabático γ .
- 3) Utilice las ecuaciones desde 1 a 8 para demostrar la ecuación 9.

Tenga en cuenta que: $\int \frac{dx}{x} = \ln(x) + cte$

y que: $\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln(b) - \ln(a)$

Datos:

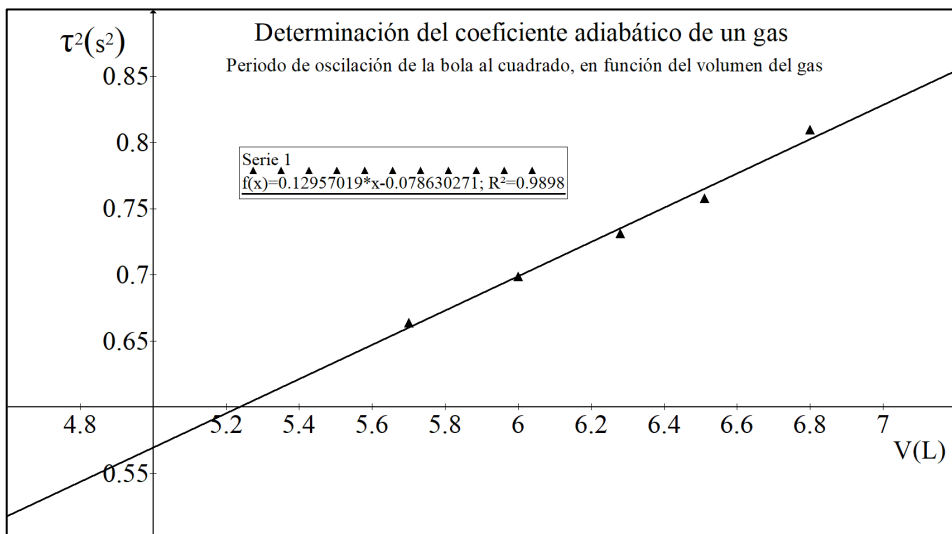
Aceleración de la gravedad = $g = 9.8ms^{-2}$
 1atm = 760mm de Hg = 101 300Pa

SOLUCIÓN

1. La tabla pedida es la siguiente:

$V \text{ (cm}^3\text{)}$	5 700	6 000	6 280	6 510	6 800
$\tau \text{ (s)}$	0.81465	0.83582	0.85510	0.87061	0.89979
$\tau^2 \text{ (s}^2\text{)}$	0.6637	0.6986	0.7312	0.7580	0.8100

La gráfica pedida de la ecuación, $\tau^2 = \text{función}(V)$, es la siguiente:



2. La ecuación del periodo al cuadrado en función del volumen será:

$$\tau^2 = 4\pi^2 \frac{mV}{\gamma p A^2} = \left(\frac{4\pi^2 m}{\gamma p A^2} \right) V$$

Y la pendiente b de dicha recta es

$$b = \left(\frac{4\pi^2 m}{\gamma p A^2} \right).$$

El valor de b se obtiene ajustando la recta por mínimos cuadrados.

$$b = \left(\frac{4\pi^2 m}{\gamma p A^2} \right) = 129.6 \text{ s}^2 \text{m}^{-3}$$

Los alumnos, en el papel milimetrado, trazan la recta que mejor se ajusta y hallan a mano el valor de la pendiente que tendrá un valor aproximadamente igual al indicado.

Despejando el coeficiente adiabático obtenemos:

$$\gamma = \frac{4\pi^2 m}{b p A^2}$$

y teniendo en cuenta que

$$p = P_0 + \frac{mg}{A}$$

$$\gamma = \left(\frac{4\pi^2 m}{b A^2} \right) \frac{1}{P_0 + \frac{mg}{A}}$$

Sustituyendo los datos en el sistema Internacional y operando, obtenemos para el coeficiente adiabático el valor

$$\gamma = \left(\frac{4\pi^2 \cdot 0.01671}{129.6 (\pi \cdot 0.008^2)^2} \right) \frac{1}{(759.9 \times \frac{101 \cdot 300}{760}) + \frac{0.01671 \times 9.8}{\pi \cdot 0.008^2}}$$

$$\gamma = 1.23$$

El gas podría ser CO₂.

3. La energía interna es una función de estado y por tanto su variación entre dos estados del gas no depende del proceso. Para un proceso adiabático $Q = 0$

$$\left. \begin{array}{l} dU = dQ + dW = dW \\ dU = nc_V dT \\ dW = -p dV \end{array} \right\} \Rightarrow nc_V dT = -p dV$$

Diferenciando la ecuación 1, $pV = nRT$, tenemos que

$$p dV + V dp = nR dT$$

Despejando dT y sustituyendo en la anterior y teniendo en cuenta que

$$c_p - c_v = R$$

podemos escribir

$$nc_v R dT = c_v (p dV + V dp) = -pR dV = -p (c_p - c_v)dV$$

Luego se cumple que

$$c_v (p dV + V dp) = -p (c_p - c_v)dV$$

Simplificando, dividiendo por $(c_v p V)$ y teniendo en cuenta que el coeficiente adiabático es por definición:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

obtenemos

$$\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0$$

Integrando:

$$\int \gamma \frac{dV}{V} + \int \frac{dp}{p} = cte$$

$$\gamma \ln(V) + \ln(p) = cte$$

Es decir: $pV^\gamma = cte$, como queríamos demostrar.

Tirando bolas

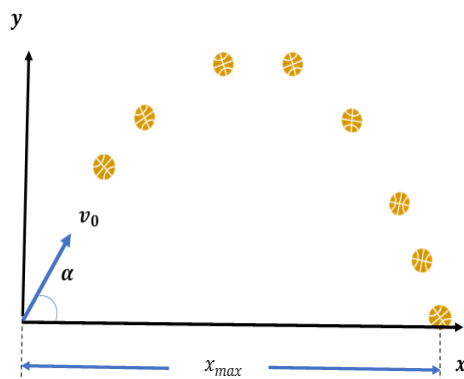
INTRODUCCIÓN TEÓRICA

Un alumno de segundo de bachillerato, de un extraño y alejado planeta (de tamaño como el de la Tierra aproximadamente), quiere conocer la velocidad a la que salen las pelotas de tenis de una máquina lanzadora. Para ello, diseña un sencillo experimento para el que necesita únicamente una cinta métrica y un reloj.

El experimento consiste en lanzar las bolas de tenis desde el suelo y medir el alcance máximo de las mismas, al mismo nivel de lanzamiento, y el tiempo que han tardado en llegar, para diferentes ángulos de lanzamiento.

Como sabrás por tus estudios de física, el movimiento de la pelota, sometido a la acción de la gravedad del planeta, puede considerarse como uniformemente acelerado.

Si llamamos g a la aceleración de la gravedad, v_0 a la velocidad de lanzamiento de las pelotas (siempre la misma), α al ángulo que forma la velocidad de lanzamiento con la horizontal y x e y a las coordenadas horizontal y vertical de la posición de la pelota en el instante t , las ecuaciones del movimiento podemos escribirlas como:



$$\left\{ \begin{array}{l} x = (v_0 \cos \alpha) t \quad \text{(ecuación 1)} \\ y = (v_0 \sin \alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{(ecuación 2)} \end{array} \right.$$

MÉTODO EXPERIMENTAL

El estudiante va lanzando pelotas cuya velocidad inicial va formando diferentes ángulos α con la horizontal, y en cada caso, mide el alcance de la bola, al que llamaremos x_{max} , y el tiempo que tarda en alcanzarlo t .

Con los datos, el estudiante construye la tabla 1 siguiente:

Tabla 1								
α (°)	5	10	15	20	25	30	35	40
t (s)	0.872	1.736	2.588	3.420	4.226	5.000	5.736	6.428
x_{max} (m)	17.36	34.20	50.00	64.28	76.60	86.60	93.97	98.48

- Determina la dependencia entre el tiempo en alcanzar x_{max} y el ángulo α .
- Determina la dependencia entre x_{max} y el ángulo α .

Las ecuaciones determinadas son funciones lineales de $\sin 2\alpha$ y de $\sin \alpha$.

Construye una tabla de datos donde además de los de la tabla anterior estén los valores de $\sin 2\alpha$ y de $\sin \alpha$.

- Representa t en función de $\sin \alpha$. Determine la pendiente de la recta.
- Representa x_{max} en función de $\sin 2\alpha$. Determina la pendiente de la recta.
- Determina los valores de v_0 y de g en el planeta.
- Determina la densidad, d , del planeta en función de la de la Tierra.

Dato: Valor de la gravedad en la superficie de la tierra, $g_T = 9.8ms^{-2}$

SOLUCIÓN

- a) De la ecuación 2 podemos determinar que el alcance, al que llamamos x_{max} , en $y = 0$, ocurre si

$$0 = (v_0 \sin \alpha) t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$t = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha \quad \text{(ecuación 3)}$$

(La solución $t = 0$, es el instante de lanzamiento)

El tiempo es una función lineal de $\sin \alpha$; la pendiente de la recta es

$$p_1 = \frac{2v_0}{g}$$

- b) Sustituyendo este tiempo en la ecuación 1 y aplicando que $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, obtenemos

$$x_{max} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \quad \text{(ecuación 4)}$$

El alcance máximo es una función lineal de $\sin 2\alpha$; la pendiente de la recta es

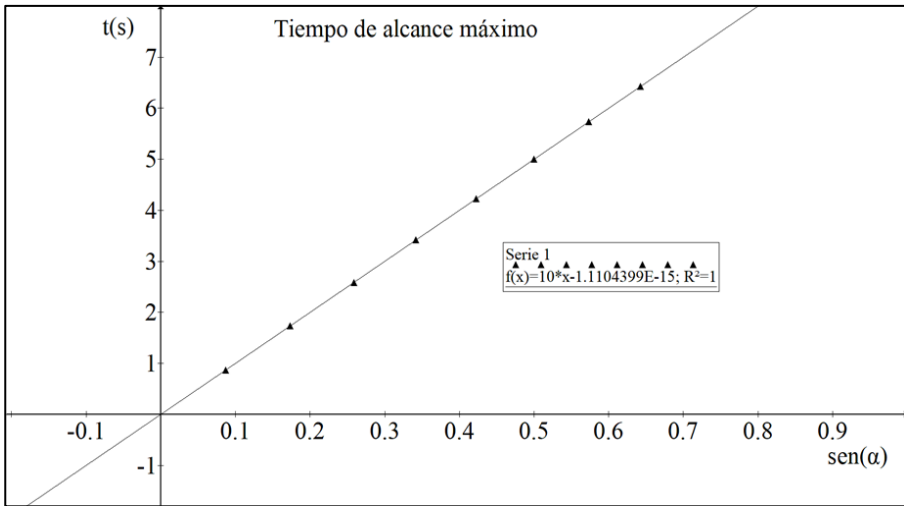
$$p_2 = \frac{v_0^2}{g}$$

La tabla pedida es la tabla 2:

Tabla 2								
α (°)	5	10	15	20	25	30	35	40
t (s)	0.872	1.736	2.588	3.420	4.226	5.000	5.736	6.428
x_{max} (m)	17.36	34.20	50.00	64.28	76.60	86.60	93.97	98.48
$\sin \alpha$	0.0872	0.1736	0.2588	0.3420	0.4226	0.5000	0.5736	0.6428
$\sin 2\alpha$	0.1736	0.3420	0.5000	0.6428	0.7660	0.8660	0.9397	0.9848

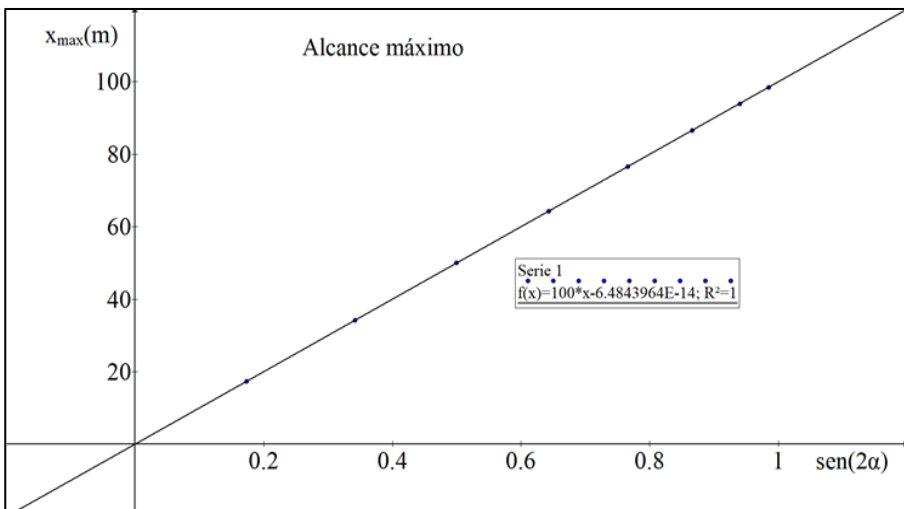
c) Dibujamos la gráfica de la ecuación 3: $t = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha$.

Ajustamos la recta por mínimos cuadrados. La pendiente de la recta es $p_1 = 10 \text{ s}$



d) Dibujamos la gráfica de la ecuación 4: $x_{max} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$.

Ajustamos la recta por mínimos cuadrados. La pendiente de la recta es $p_2 = 100 \text{ m}$



e) Por lo tanto, teniendo en cuenta que:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{v_0}{2}$$

y que

$$g = \frac{2v_0}{p_1}$$

obtenemos que

$$v_0 = 20 \frac{m}{s}$$

$$g = 4 \frac{m}{s^2}$$

f) Teniendo en cuenta que, para un planeta de masa M y radio R , el valor de la gravedad en su superficie vendrá dado por, $g = \frac{GM}{R^2}$, y la relación que liga la masa con la densidad y el volumen de la esfera es, $M = \left[\frac{4}{3}\pi GR\right] d$, podemos escribir

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{G}{R^2} \left[\frac{4}{3}\pi R^3 d\right] = \left[\frac{4}{3}\pi GR\right] d$$

La gravedad en la superficie será, por tanto, proporcional a la densidad y al radio del planeta.

Si ambos planetas son de tamaños aproximados podemos suponer que sus radios son iguales, la relación entre las densidades es igual a la relación entre los valores de la gravedad en la superficie de los planetas.

$$\frac{g}{g_T} = \frac{d}{d_T}$$

$$d = d_T \frac{g}{g_T} = \frac{4}{9.8} d_T = 0.408 d_T$$

Tratamiento matemático de datos experimentales

Errores en las medidas experimentales

Encontrar en la práctica el valor real o exacto de una magnitud física es imposible. El problema radica en establecer los límites dentro de los cuales está el valor exacto de dicha magnitud; cuanto menor sea el intervalo comprendido entre dichos límites, más precisa será la medida realizada.

El error de una medida vendrá dado, por tanto, por la diferencia entre el valor medido de una magnitud física y su valor *exacto*. Los errores se clasifican en:

- a) **Errores sistemáticos.** Las fuentes pueden ser defectos de los instrumentos, o del experimentador; imprecisión en las constantes utilizadas; las imprecisiones aportadas por el método de medición debido al carácter aproximado de las correlaciones teóricas que vinculan las magnitudes implicadas.
- b) **Errores accidentales.** Vinculados a factores que sufren pequeñas variaciones durante el ensayo. La dependencia entre el error accidental (E_{acc}) y el número de mediciones N tiene la forma $E_{acc} \sim 1/\sqrt{N}$.

Los errores, tanto sistemáticos como accidentales, se pueden hacer, al menos en principio, tan pequeños como se quiera. Podría parecer que la precisión de las mediciones se puede aumentar ilimitadamente. Sin embargo, esto no es así. Cada aparato de medida tiene un intervalo de sensibilidad determinado, es decir, el menor valor de la magnitud que se mide y que el aparato está en condiciones de discriminar. A este valor se le denomina error de escala del aparato. Disminuyendo el error sistemático y aumentando el número de mediciones, para disminuir el E_{acc} , el error total no tiende a cero sino al error de escala. Para obtener un valor alto en la precisión de la magnitud es necesario utilizar un aparato de clase más alta o recurrir a un método de medición basado en otros principios. El aumento de la clase de precisión de los aparatos de medida presenta exigencias mucho más altas a la constancia de las condiciones externas, en las cuales se realizan las mediciones.

Características de los instrumentos de medida

- **Fidelidad:** Si se repite el resultado al hacer varias medidas.
- **Exactitud:** Si la medida nos da el valor real.
- **Precisión:** Es la mínima variación de la magnitud. (Ej.:0'1 N)
Analógicos: ½ unidad
Digitales: 1unidad
- **Sensibilidad:** Variación de la escala /variación de la magnitud.
(Ej.:2cm/N)

Errores absoluto y relativo

Error absoluto: Es la diferencia entre el valor exacto y el valor hallado. Su símbolo es Δx o Δ .

Error relativo: Es el cociente entre el error absoluto y el valor exacto. Se representa en tantos por uno o en tantos por ciento. Su símbolo es ε_r .

$$\varepsilon_r = \Delta x / x \quad \text{o en \%} \quad \varepsilon_r = \left(\frac{\Delta x}{x} \right) 100$$

Regla del redondeo de números. Escritura del valor exacto y del error absoluto.

- El error absoluto se escribe con una única cifra significativa si esta es mayor o igual que 2, y con dos cifras significativas si la primera es un 1.
- El valor exacto se redondeará de tal manera que la última cifra significativa de la magnitud sea del mismo orden decimal que la última cifra del error.
- Si la cifra suprimida es menor que 5, la anterior no varía.
- Si la cifra suprimida es mayor que 5 la anterior se aumenta en uno.
- Si la cifra suprimida es 5 hay diversos criterios
 - Uno es aumentar la anterior en 1.
 - Otro es aumentar la anterior en 1 si es impar, y no hacerlo si es par.

Ejemplos:

x Valor exacto obtenido	Δx Error absoluto obtenido	Δx Error absoluto bien expresado	x Valor exacto bien expresado
7'026	0'0358	0'04	7'03
0'00156	0'000224	0'0002	0'0016
27'1	0'138	0'14	27'10
228	0'187	0'19	228'00
2° criterio si suprimimos un 5			
7'0265	0'0034	0'003	7'026
7'0235	0'0034	0'003	7'024

Cálculo del error de escala y del error sistemático. Cálculo del error accidental.**1°.- Medidas directas.**

- Si hacemos una única medida x , el error total será el error de escala más el sistemático.

$$\Delta x = \text{error de escala} + \text{error sistemático}$$

- Si hacemos N medidas, x_i , (normalmente $N = 5$) tomamos como valor exacto o característico, la media aritmética.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} x_i$$

El error total será la suma del error de escala, más el error sistemático, más el error accidental.

$$\Delta x = \text{error de escala} + \text{error sistemático} + \text{error accidental}$$

El error accidental se obtiene de la siguiente expresión:

$$E_{acc} = t_{(1-\alpha)}(f) \frac{s(x)}{\sqrt{N}} \quad \text{con} \quad s(x) = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$$

Calculada a partir de la distribución de Student, siendo $f = N - 1$, el número de grados de libertad y N el número de medidas realizadas; $1 - \alpha$, es el nivel de significación. Para $N = 5$, $f = 5 - 1 = 4$, y si tomamos $\alpha = 95\% = 0'95$ implica que $1 - \alpha = 0'05$. Las tablas de la distribución de Student dan en este caso para t el valor de:

$$t_{0'05}(4) = 2'7764 \approx 2'78$$

2°.- Medidas indirectas.

Sea ahora una magnitud V cuya medida directa no es posible, pero donde sí podemos determinar directamente el valor de una serie de magnitudes x, y, \dots con las cuales V está relacionada mediante una función conocida, $V = V(x, y, \dots)$. El valor de V se tomará como:

$$\bar{V} = V(\bar{x}, \bar{y}, \dots)$$

El error se determinará como sigue:

- a) Los errores de escala y sistemáticos se calculan con una propagación lineal, es decir:

$$Err_{escala}(V) = \left| \frac{\partial V}{\partial x} \right| Err_{escala}(x) + \left| \frac{\partial V}{\partial y} \right| Err_{escala}(y) + \dots$$

$$Err_{sistemático}(V) = \left| \frac{\partial V}{\partial x} \right| Err_{sistemático}(x) + \left| \frac{\partial V}{\partial y} \right| Err_{sistemático}(y) + \dots$$

- b) El error accidental se calcula con una propagación cuadrática, es decir:

$$Err_{accidental}(V) = u_{(1-\alpha)} S(\bar{V})$$

$$S^2(\bar{V}) = \left| \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}}^2 S^2(\bar{x}) + \left| \frac{\partial V}{\partial y} \right|_{y=\bar{y}}^2 S^2(\bar{y}) + \dots$$

$$\text{con } s(\bar{w}) = \frac{s(w)}{\sqrt{N}}$$

y $u_{(1-\alpha)}$ es el valor del parámetro de Student $t_{\alpha}(f)$ para $f = \infty$. Para un grado de confianza de 95% el valor de la tabla de la distribución para 0'05 y $f = \infty$ nos da 1'96.

$$Err_{accidental}(V) = 1'96 S(\bar{V})$$

Los errores sistemáticos y de escala se pueden agilizar en su cálculo teniendo en cuenta lo siguiente:

a) Si $V = 3x - 4y \Rightarrow \Delta V = 3 \Delta x + 4 \Delta y$

b) Si $V = \frac{x^2}{y^3} \Rightarrow \ln V = 2 \ln x - 3 \ln y \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = 2 \frac{\Delta x}{x} + 3 \frac{\Delta y}{y}$

Donde Δ significa el error sistemático o el de escala.

Es decir, para sumas o restas, se suman los errores absolutos y para productos o cocientes, se suman los errores relativos, sean sistemáticos o de escala.

El error accidental hay que hallarlo separadamente de los otros tipos de errores, pues tiene una propagación cuadrática.

Nota:

En el anexo se incluye una tabla con los valores del parámetro t de Student.

Para diferentes valores de f puede consultarse la bibliografía.

- La representación gráfica debe de hacerse en papel milimetrado, aunque a veces es más adecuado usar papel logarítmico o semilogarítmico.
- En el eje de abscisas se representa la variable independiente poniendo el símbolo de la magnitud y su unidad. En el de ordenadas la dependiente. Ejemplo $V(V)$, $I(A)$.
- Se pondrá un título corto pero explícito.
- Los ejes tendrán la escala adecuada, múltiplo de 1, 2 o 5. 10^n . El tamaño debe de ser tal que el error de las medidas, si lo hay, sea menor que la cuadrícula, si es posible, en caso contrario se representarán. En cualquier caso, los puntos quedarán centrados en la gráfica y será legible. Las escalas de ambos ejes no tienen que ser iguales y el cero de la escala no tiene por qué coincidir con el origen de coordenadas.
- Los puntos se representan mediante símbolos como: Δ , \blacksquare , \bullet , o ... Si se representa el error se traza una cruz de brazos proporcionales al mismo.
- La curva de ajuste será continua y promediada entre los puntos experimentales. Se deberán repetir o eliminar los datos muy desplazados del promedio. Las gráficas de calibrado de un aparato se trazan uniendo los puntos experimentales.
- El pie de figura, si lo hay, resumirá en unas pocas líneas el contenido de la gráfica.
- Si la curva de ajuste es una línea recta, nos permitirá determinar la pendiente y la ordenada en el origen. Esto se puede hacer por un método libre o por el método de ajuste por mínimos cuadrados.

Ajuste de una recta por mínimos cuadrados

Si la ecuación que buscamos es:

$$y = a + b x$$

El método consiste en encontrar los valores que hagan la función C mínima.

$$C = \sum (y_i - a - bx_i)^2$$

C mínimo implica que:

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial a} = 0 & \Rightarrow 2 \sum (y_i - a - bx_i) = 0 \\ \frac{\partial C}{\partial b} = 0 & \Rightarrow 2 \sum (y_i - a - bx_i)x_i = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum y_i = b \sum x_i + Na \\ \sum x_i y_i = b \sum (x_i^2) + a \sum x_i \end{cases}$$

Despejando a y b obtenemos:

$$a = \frac{\sum (y_i) \sum (x_i^2) - \sum (x_i) \sum (x_i y_i)}{N \sum (x_i^2) - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{N \sum (x_i y_i) - \sum (x_i) \sum (y_i)}{N \sum (x_i^2) - (\sum x_i)^2}$$

Los errores accidentales de a y b se calculan considerando la desviación cuadrática muestral de los datos experimentales respecto a la recta ajustada, con $f = N - 2$ grados de libertad.

$$s^2(a) = \frac{s^2(y)}{N}$$

$$s^2(b) = \frac{N s^2(y)}{N \sum (x_i^2) - (\sum x_i)^2}$$

$$s^2(y) = \frac{1}{N-1} \sum (y_i - a - bx_i)^2$$

$$Eacc(a) = t_{1-\alpha} (N-2) \frac{s(a)}{\sqrt{N}}$$

$$Eacc(b) = t_{1-\alpha} (N-2) \frac{s(b)}{\sqrt{N}}$$

Una forma alternativa al cálculo anterior del error, es hallar de forma independiente el error cometido en a y b .

$$1) \quad a_i = y_i - bx_i$$

$$\bar{a} = \frac{1}{N} \sum a_i$$

$$s^2(a) = \frac{1}{N-1} \sum (a_i - \bar{a})^2$$

$$Eacc(a) = t_{1-\alpha} (N-2) \frac{s(a)}{\sqrt{N}}$$

$$2) \quad b_i = \frac{y_i - a}{x_i}$$

$$\bar{b} = \frac{1}{N} \sum b_i$$

$$s^2(b) = \frac{1}{N-1} \sum (b_i - \bar{b})^2$$

$$Eacc(b) = t_{1-\alpha} (N-2) \frac{s(b)}{\sqrt{N}}$$

- 3) Para una correlación lineal, el coeficiente de correlación, número adimensional que mide la bondad del ajuste de la ecuación supuesta a los datos, viene dado por cualquiera de las siguientes expresiones:

$$r = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{[\sum(x_i - \bar{x})^2 \sum(y_i - \bar{y})^2]^{1/2}}$$

o bien

$$r = \frac{N \sum(x_i y_i) - (\sum x_i)(\sum y_i)}{[N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2]^{1/2} [N \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2]^{1/2}}$$

- 4) Para que los alumnos comprendan el proceso de cálculo, es conveniente proporcionarles una tabulación, en la cual, ordenen sus datos y realicen el ajuste de una recta por mínimos cuadrados *a mano*. Posteriormente pueden aprender a usar un programa de cálculo.

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
$\sum(x_i)$	$\sum(y_i)$	$\sum(x_i^2)$	$\sum(x_i y_i)$	$\sum(y_i^2)$
\bar{x}	\bar{y}		$(\sum y_i)^2$	$(\sum x_i)^2$

$$a = \frac{\sum(y_i) \sum(x_i^2) - \sum(x_i) \sum(x_i y_i)}{N \sum(x_i^2) - (\sum x_i)^2} =$$

$$b = \frac{N \sum(x_i y_i) - \sum(x_i) \sum(y_i)}{N \sum(x_i^2) - (\sum x_i)^2} =$$

$(x_i - \bar{x})$	$(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
$\sum (x_i - \bar{x})^2$	$\sum (y_i - \bar{y})^2$	$\sum (x_i - \bar{x})^2$	$\sum (y_i - \bar{y})^2$	$\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$

$$r = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{(\sum(x_i - \bar{x})^2)(\sum(y_i - \bar{y})^2)}} =$$

a	x_i	y_i	bx_i	$(y_i - a - bx_i)^2$
b				
$\sum(x_i^2)$				
$(\sum x_i)^2$	$s^2(y) = \frac{1}{N-1} \sum (y_i - a - bx_i)^2$			
	$s^2(a) = \frac{s^2(y)}{N}$		$s^2(b) = \frac{Ns^2(y)}{N\sum(x_i^2) - (\sum x_i)^2}$	

$$Eacc(a) = t_{1-\alpha} (N - 2) \frac{s(a)}{\sqrt{N}} =$$

$$Eacc(b) = t_{1-\alpha} (N - 2) \frac{s(b)}{\sqrt{N}} =$$

Alternativa en la Olimpiada de Física, al ajuste de una recta por mínimos cuadrados

En la fase nacional de la Olimpiada de Física y en la fase del Distrito Universitario de Valladolid, se puede optar por realizar *a mano*, el cálculo de la pendiente de la recta que mejor se ajusta a los puntos experimentales. No obstante, la Olimpiada de Física es un concurso, y tendrán más opciones de ganarlo aquellos concursantes que aporten una solución más rigurosa del ejercicio.

Se describe a continuación el proceso, *a mano*, que se permite a los alumnos que concursan.

En las fases, local y nacional, de la Olimpiada de Física, se dispone de un papel milimetrado, que en tamaño DIN A4 o folio, permite diferenciar, en el trazado de puntos experimentales, un máximo de tres cifras significativas, (cuadrículas de mm, cm y algún dm). Esto es importante a la hora de elegir la escala y el origen de los ejes en la gráfica. Los puntos deben de quedar promediados en el dibujo. Se tendrá en cuenta lo indicado sobre lo que tienen que cumplir las representaciones gráficas. Una vez dibujados los puntos experimentales, se trazará, con una regla, la recta promedio que mejor se ajuste, a juicio de la persona que la ejecuta.

- Para hallar la pendiente, se eligen dos puntos de la recta alejados, A (x_A, y_A) y B (x_B, y_B) . Sus coordenadas se leen en la gráfica y no tienen por qué coincidir con puntos experimentales.

La recta buscada, $y = a + b x$, tendrá de pendiente, b , siendo

$$b = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

- Para hallar la ordenada en el origen, a , podemos leerla en la gráfica, o bien, elegimos un punto de la recta, por ejemplo, el punto A, y se verifica que

$$a = y - bx = y_A - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x_A$$

- Se puede evaluar el error absoluto de la pendiente dibujando a mano otras dos rectas que se ajusten a los puntos, haciendo pivotar la regla de tal forma, que tengan pendientes un poco superior y un poco inferior que *la mejor* y, que recojan en sus proximidades los puntos experimentales.

Se calcularán las pendientes, b_1 y b_2 , de estas rectas, como se ha explicado anteriormente, y se hallará el error absoluto de la pendiente, Δb , de la forma siguiente:

$$\Delta b = \frac{b_1 - b_2}{2}$$

- Se determinará la ordenada en el origen de ambas rectas, a_1 y a_2 , mediante alguno de los procedimientos descritos anteriormente. El error de la ordenada en el origen, Δa , se calculará como

$$\Delta a = \frac{a_1 - a_2}{2}$$

En la fase de Distrito de la Universidad de Valladolid, este procedimiento es el que se pide, pues, como ya indicamos, solo se dispone de un tiempo aproximado de una hora, o poco más, para la resolución del problema experimental.

- Veamos un ejemplo de trazado *a mano*:

La gráfica siguiente muestra un ajuste por mínimos cuadrados.

La solución alternativa se hará leyendo en la gráfica las coordenadas de A (0.5; 6.0) y de B (9.1; 90.0) (consideramos poder apreciar, *a ojo*, medio mm), así, podemos hallar la pendiente *a mano*

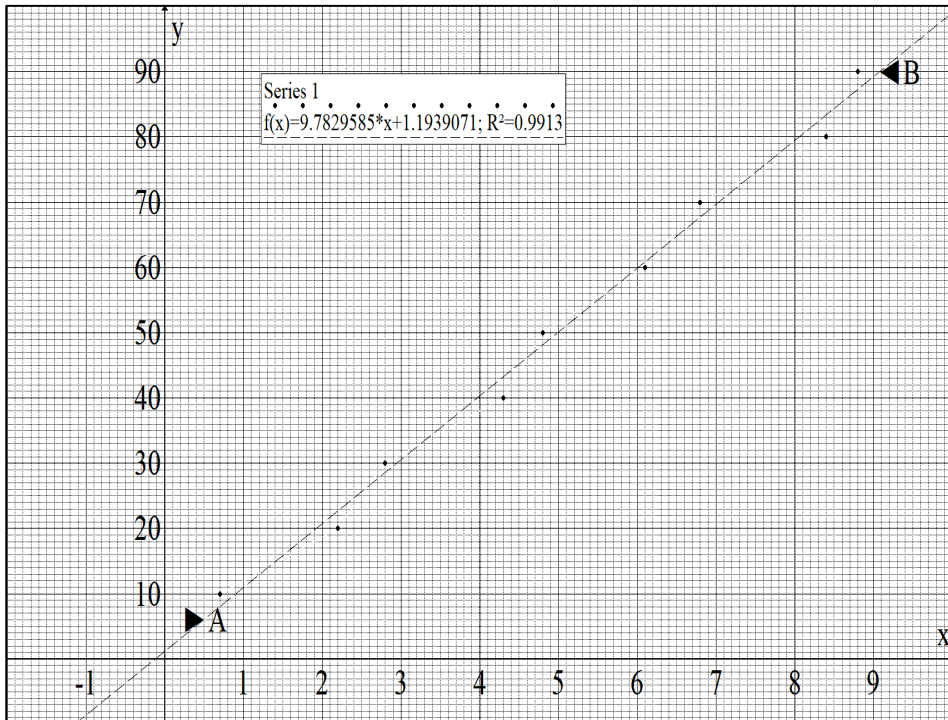
$$b = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{90.0 - 6.0}{9.1 - 0.5} = 9.77$$

La ordenada en el origen será:

$$a = 6.0 - 9.77 \times 0.5 = 1.12$$

Que podemos comparar con los valores, de la pendiente y la ordenada en el origen, hallados mediante el ajuste por mínimos cuadrados (ver en la gráfica).

$$y = 9.78x + 1.19$$



Para determinar, *a mano*, el error de la pendiente y de la ordenada en el origen, tenemos que trazar dos rectas de apoyo.

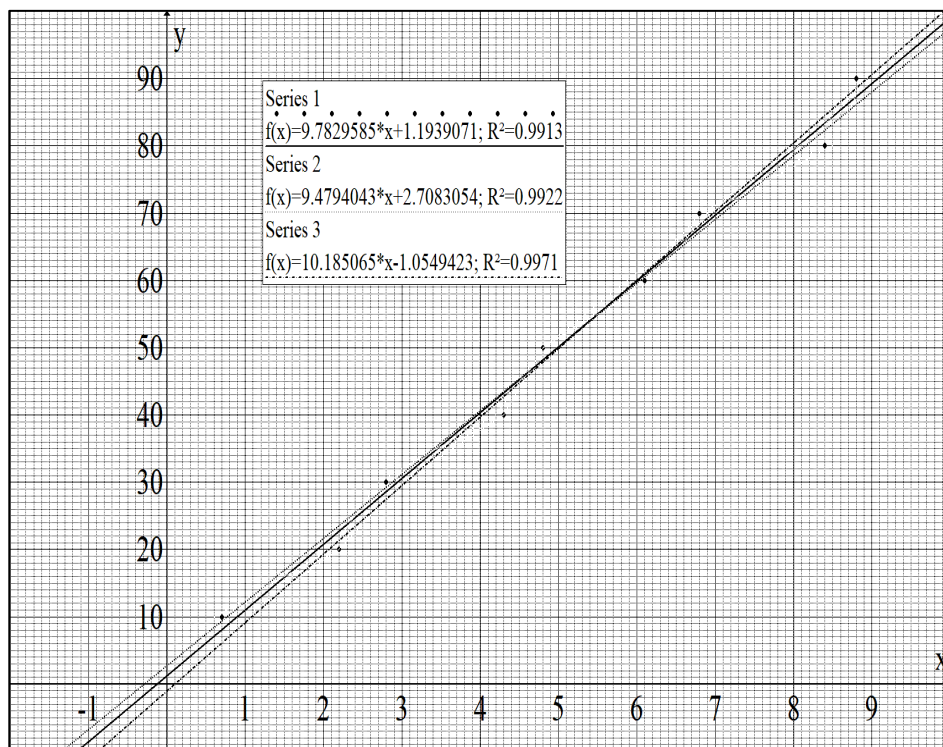
La siguiente gráfica contiene la anterior recta y otras dos rectas próximas, con pendientes por exceso y por defecto.

Las tres rectas tienen en la gráfica el ajuste por mínimos cuadrados (ver en la gráfica).

$$\text{Recta 1: } y = 9.48x + 2.71$$

$$\text{Recta 2: } y = 10.2x - 1.05$$

Puede verse, que una pequeña variación en el aspecto visual de la pendiente, hace variar bastante la pendiente y sobre todo la ordenada en el origen.



Elegimos, visualmente, en cada recta dos puntos, y hallamos la pendiente y la ordenada en el origen de cada una de las rectas.

Para la recta 1: $\left\{ \begin{array}{l} A_1 (0.5; 7.5) \\ B_1 (9.0; 88.0) \end{array} \right.$

Para la recta 2: $\left\{ \begin{array}{l} A_2 (0.5; 4.0) \\ B_2 (9.0; 91.0) \end{array} \right.$

Para determinar el error de la pendiente hallamos:

$$b_1 = \frac{88.0 - 7.5}{9.0 - 0.5} = 9.47$$

$$b_2 = \frac{91.0 - 4.0}{9.0 - 0.5} = 10.2$$

$$\Delta b = \frac{b_1 - b_2}{2} = \frac{10.2 - 9.47}{2} = 0.365 \cong 0.4$$

Teniendo en cuenta que $b = 9.77$, redondeamos las cifras significativas

$$b = 9.8 \pm 0.4$$

Para determinar el error de la ordenada en el origen hallamos:

$$a_1 = 7.5 - 9.47 \times 0.5 = 2.765$$

$$a_2 = 4.0 - 10.2 \times 0.5 = -1.1$$

$$\Delta a = \frac{a_1 - a_2}{2} = \frac{2.765 - (-1.1)}{2} = 1.9325 \cong 1.9$$

Teniendo en cuenta que $a = 1.12$, redondeamos las cifras significativas

$$a = 1.1 \pm 1.9$$

A mano, nuestra ecuación sería

$$y = 9.8 x + 1.1$$

El papel milimetrado disponible, permite en este problema dos cifras significativas.

En la fase nacional de la Olimpiada, se les suele dar a los alumnos una pequeña tabulación para que incluyan los resultados obtenidos en el problema experimental. El tipo de tabla depende del autor del enunciado del problema. En cualquier caso, es importante que aprendan a realizar sus propias tabulaciones. Una buena presentación del ejercicio resuelto es, para algunos alumnos, su talón de Aquiles. Un ejemplo, donde recoger los datos necesarios para hallar la pendiente y la ordenada en el origen, con el ajuste *a mano*, puede ser el siguiente:

	$y = a + b x$		Recta 1		Recta 2	
Coordenadas	x	y	x	y	x	y
A						
B						
$b = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$						
$a = y - bx$ o leído en gráfica						
$\Delta b = \frac{b_1 - b_2}{2}$						
$\Delta a = \frac{a_1 - a_2}{2}$						

Anexo

Valores del parámetro t de Student en función de la probabilidad y del grado de libertad							
Valores de $t_{(1-\alpha)}(f)$							
f	$(1 - \alpha)$						
	0.50	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	1.00000	2.4142	6.3138	12.706	25.452	63.657	127.32
2	0.81650	1.6036	2.9200	4.3027	6.2053	9.9248	14.089
3	0.76489	1.4226	2.3534	3.1825	4.1765	5.8409	7.4533
4	0.74070	1.3444	2.1318	2.7764	3.4954	4.6041	5.5976
5	0.72669	1.3009	2.0150	2.5506	3.1634	4.0321	4.7733
6	0.71756	1.2733	1.9432	2.4469	2.9687	3.7074	4.3168
7	0.71114	1.2543	1.8946	2.3646	2.8412	3.4995	4.0293
8	0.70639	1.2403	1.8595	2.3060	2.7515	3.3554	3.8325
9	0.70272	1.2297	1.8331	2.2622	2.6850	3.2498	3.6897
10	0.69981	1.2213	1.8125	2.2281	2.6338	3.1693	3.5814
∞	0.67449	1.1503	1.6449	1.9600	2.2414	2.5758	2.8070

Bibliografía

Foto de portada

- Autor: Domenico Salvagnin (Legnaro, Italia)
[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cadini_Reflections_\(8303997186\).jpg#/media/Datei:Cadini_Reflections_\(8303997186\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cadini_Reflections_(8303997186).jpg#/media/Datei:Cadini_Reflections_(8303997186).jpg) (fecha de consulta 18/05/2021)

Dos aros rodantes

- Alonso, M. y E. J. Finn (1970), *Física*, Fondo Educativo Interamericano S.A.
- Bújovtsev, B. B., V.D. Krivchenkov, G.Ya. Miákishev y I.M. Saráeva (1979), *Problemas seleccionados de la física elemental*, Moscú, Editorial MIR.

El arquero inquieto

- Bújovtsev, B. B., V.D. Krivchenkov, G.Ya. Miákishev y I.M. Saráeva (1979), *Problemas seleccionados de la física elemental*, Moscú, Editorial MIR.

Tiro con rebote

- Tipler, P. A. (1994), *Física*, Barcelona, Editorial Reverté S.A.

Ponte las pilas

- Bújovtsev, B. B., V.D. Krivchenkov, G.Ya. Miákishev y I.M. Saráeva (1979), *Problemas seleccionados de la física elemental*, Moscú, Editorial MIR.
- Tipler, P. A. (1994), *Física*, Barcelona, Editorial Reverté S.A.

Loco por las carreras

- Tipler, P. A. (1994), *Física*, Barcelona, Editorial Reverté S.A.

Cálculo de la aceleración de la gravedad

- Alonso, M. y E. J. Finn (1970), *Física*, Fondo Educativo Interamericano S.A.
- Tipler, P. A. (1994), *Física*, Barcelona, Editorial Reverté S.A.

Siguiendo los pasos de Galileo

- Alonso, M. y E. J. Finn (1970), *Física*, Fondo Educativo Interamericano S.A.
- Tipler, P. A. (1994), *Física*, Barcelona, Editorial Reverté S.A.

La difusión

- Brown, F. C. (1970), *Física de los sólidos*, Editorial Reverté S.A.
- Saja de, J. A. (2000), *Introducción a la física de los materiales*, Valladolid, Ediciones Universidad de Valladolid.

El muelle “loco”

- <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/anarmonico/anarmonico.htm> (fecha de consulta 17/06/2021)

El péndulo de Pohl. Oscilaciones amortiguadas

- Ablanque, J. y col. (2006), “Laboratorio asistido por ordenador: Oscilaciones regulares y caóticas en el péndulo de Pohl”, *Revista Española de Física* Volumen 20 (4), pp. 34-39
- Alonso, M. y E. J. Finn (1970), *Física*, Fondo Educativo Interamericano S.A.
- Symon, K. R. (1970), *Mecánica*, Madrid, Editorial Aguilar
- <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/default.htm> (fecha de consulta 17/05/2021)

- https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/49/Pohl_Wheel.svg Georg Wiora (Dr. Schorsch), CC BY-SA 3.0 <<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>>, (fecha de consulta 25/05/2021)
- https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/8b/Pendule_Pohl_photo.jpg Dbfls at fr.wikipedia, CC BY-SA 3.0 <<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>>, via Wikimedia Commons (fecha de consulta 25/05/2021)

Efecto fotoeléctrico (EFE)

- Feynman, R., R. B. Leighton y M. Sands (1987), *Física. Vol. III, Mecánica Cuántica*. Fondo Educativo Interamericano. Wilmington, Delaware, Addison-Wesley Iberoamericana.
- Serway, R. A. (1997), *Física*, México, Editorial McGraw Hill Interamericana Editores S.A.
- Tipler, P. A. (1994), *Física*, Barcelona, Editorial Reverté S.A.
- <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/default.htm> (fecha de consulta 17/05/2021)

Rodadura o rotación con deslizamiento

- Alonso, M. y E. J. Finn (1970), *Física*, Fondo Educativo Interamericano S.A.
- Solá, J., R. Fernández y J. L. Hernández (2008), “Rodadura. Estudio experimental con las aceleraciones angular y del centro de masas”, *Revista Española de Física*, vol. 22 (3), pp. 47-51
- Tipler, P. A. (1994), *Física*, Barcelona, Editorial Reverté S.A.
- <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/default.htm> (fecha de consulta 17/05/2021)

Crisis y café caliente

- Sears, F. W. (1972), *Mecánica, movimiento ondulatorio y calor*, Madrid, Editorial Aguilar.
- Serway, R. A. (1997), *Física*, México, Editorial McGraw Hill Interamericana Editores S.A.

- <http://www.eldiariomontañés.es> (fecha de consulta 04/01/2010)
- <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/default.htm> (fecha de consulta 17/05/2021)

¿Cuál es la edad de la Tierra?

- Espíndola, J.M. (1997), “La ciencia para todos. El tercer planeta. Edad, estructura y composición de la Tierra”, México, Fondo de cultura económica. http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/ciencia/volumen2/ciencia3/074/html/sec_7.html (fecha de consulta 17/05/2021)
- Fleming, J. (2002), “Watching a Rock Age on an Isochron Diagram”, <http://www.talkorigins.org/faqs/isochron-dating/AnimatedIsochron.html> (fecha de consulta 17/05/2021)
- Patterson C. (1956), “Age of meteorites and the earth”. Division of Geological Sciences. California Institute of Technology, Pasadena, California.
https://websites.pmc.ucsc.edu/~rcoe/eart206/Patterson_AgeEarth_GeoCosmoActa56.pdf (fecha de consulta 17/05/2021)
- Stassen, C. (1998), “Isochron Dating”, <http://www.talkorigins.org/faqs/isochron-dating.html> (fecha de consulta 17/05/2021)
- Varela, R. y col. (2009), “Geología y geocronología Rb-Sr de granitoides de Sierra Grande, provincia de Río Negro”, *Revista de la Asociación Geológica Argentina* 64 (2): 275 - 284
- <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/> (fecha de consulta 17/05/2021)

Tensión superficial

- https://en.wikipedia.org/wiki/Surface_tension (fecha de consulta 17/05/2021)
- https://de.wikipedia.org/wiki/Lor%C3%A1nd_E%C3%B6tv%C3%B6s (fecha de consulta 17/05/2021)
- <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/default.htm> (fecha de consulta 17/05/2021)
- https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/36/Du_Nouy_tensiometer.jpg, Harry Nicholls Holmes, Public domain, via Wikimedia Commons (fecha de consulta 25/05/2021)

- <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f9/Wassermolek%C3%BCleInTr%C3%B6pfchen.svg> User:Booyabazooka, Public domain, via Wikimedia Commons (fecha de consulta 25/05/2021)
- <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1a/WaterstriderEnWiki.jpg>, PD, CC BY-SA 3.0 <<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>>, via Wikimedia Commons (fecha de consulta 25/05/2021)

Olla ¿rápida o lenta?

- Carreto A. (2011), “Apuntes científicos”, Universidad del Valle de México, México. <http://apuntescientificos.org/diagrama-fases-bio.html> (fecha de consulta 30/05/2021)
- Sears, F. W. (1959), *Introducción a la termodinámica, teoría cinética de los gases y mecánica estadística*, Barcelona, Editorial Reverté S.A.
- Zemansky, M. W. (1970), *Calor y termodinámica*, Editorial Aguilar.
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Formule_de_Clapeyron#:~:text=La%20formule%20de%20Clausius%20Clapeyron,par%20Rudolf%20Clausius%20en%201850. (fecha de consulta 17/05/2021)
- <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/> (fecha de consulta 17/05/2021)

¿Qué potencia consume la resistencia?

- Bújovtsev, B. B., V.D. Krivchenkov, G.Ya. Miákishev y I.M. Saráeva (1979), *Problemas seleccionados de la física elemental*, Moscú, Editorial MIR.

¿Te oigo antes en verano?

- Apostol, T. M. (1965), *Calculus*, Barcelona, Editorial Reverté. S. A.
- Fernández-Rañada, A. (2014), (Reseña del libro *Newtonian Nonlinear Dynamics for complex Linear and Optimization Problems*, de L. Vázquez y S. Jiménez), *Revista de Física*, Vol.28 (2), pp. 56-57.
- Martínez-Salas, J. (1969), *Elementos de Matemáticas*. Valladolid, ed. Martínez-Salas, J.
- Muñoz, J. M. (2014), “Los experimentos físicos como herramienta didáctica”, curso CFIE Valladolid, febrero 2014.
- Sears, F. W. (1972), *Mecánica, movimiento ondulatorio y calor*, Madrid, Editorial Aguilar.

- <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/default.htm> (fecha de consulta 17/05/2021)

¡Cuidado! no te quemes

- Giancoli, D. C. (2005), *PHYSICS Principles with applications*, Ed. Chalice, J., U.S.A., Editorial Pearson Prentice Hall.
- <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/default.htm> (fecha de consulta 17/05/2021)

El Universo en expansión

- Guisado, V. “La revolución de la pequeña Nube”, http://www.knowtex.com/nav/la-revolucion-de-la-pequena-nube_37301 (fecha de consulta 17/05/2021)
- Hubble. E. (1929) “A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae”. Mount Wilson Observatory, Carnegie Institution of Washington, Communicated January 17, 1929, <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC522427/> (fecha de consulta 17/05/2021)
- Santander, M. (2015), “Nuestro conocimiento del Universo a través de la luz”, curso C.F.I.E., Valladolid, 3 de noviembre 2015, Universidad de Valladolid.
- Anuario del Observatorio Astronómico (1996), Instituto Geográfico Nacional de España.
- <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/> (fecha de consulta 17/05/2021)

¡Cuidado con el colesterol!

- <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/default.htm> (fecha de consulta 17/05/2021)
- <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/> (fecha de consulta 17/05/2021)

¿Cuánto vive una estrella?

- Bachiller, R. (2009), “Teoría de la evolución estelar”, El mundo.es. Ciencia, <https://www.elmundo.es/elmundo/2009/09/14/ciencia/1252948026.html> (fecha de consulta 17/05/2021)
- <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/> (fecha de consulta 17/05/2021)

Tan rápido era que le apodaron “el adiabático”

- Zemansky, M. W. (1970), *Calor y termodinámica*, Editorial Aguilar.
- <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/default.htm> (fecha de consulta 17/05/2021)
- https://en.wikipedia.org/wiki/R%C3%BCchardt_experiment (fecha de consulta 17/05/2021)
- https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c4/Ruechardt_experiment_riediker.jpg Stephan Riediker, CC BY-SA 3.0 <<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>>, via Wikimedia Commons (fecha de consulta 25/05/2021)

Tirando bolas

- Tipler, P. A. (1994), *Física*, Barcelona, Editorial Reverté S.A.

Tratamiento matemático de datos experimentales

- Cobos, J. C. y col., Dpto. de Física Aplicada, *Técnicas experimentales en Física III*. Proyecto de investigación educativa VA23/98 y VA12/00. Consejería de Educación y Cultura. Junta de Castilla y León, Universidad de Valladolid.
- Spiegel, M. R. (1986), *Estadística, Teoría y 875 problemas resueltos*. Ed. La Colina, España, Serie SCHAUM. Editorial McGraw Hill.
- Spiridonov, V. P. y A.A. Lopatkin (1973), *Tratamiento matemático de Datos Físico-Químicos*, Moscú, Editorial MIR.
- Ventsel, H. (1973), *Théorie des probabilités*, Moscú, Editorial MIR.
- <https://rsef.es/olimpiada-espanola-de-fisica> (fecha de consulta 17/05/2021)

Comentarios a la bibliografía

Se ha dispuesto la bibliografía agrupada por problemas, ya que este manual se presta a una lectura discontinua de los problemas propuestos, y al lector, especialmente a los alumnos, le resultará más sencillo encontrar las referencias. La autora no pretende más originalidad que la de haber elegido el tema, componer y redactar el ejercicio a partir de la bibliografía, adaptándolo de acuerdo con la temporalización de la prueba y el currículo que se exige en la fase local de la Olimpiada de Física; por tanto, no se ha entrecomillado ningún párrafo copiado de la bibliografía. En algunos casos la bibliografía puede parecer redundante, ofrece el mismo tipo de información utilizada que otra adyacente; aun así, se ha incluido porque puede ser una fuente para ampliar el tema tratado o comparar puntos de vista, si el lector lo desea. Considero muy interesante el ofrecer a los alumnos bibliografía en inglés, especialmente de páginas web como, <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/>, o la misma Wikipedia que tienen el mismo o parecido artículo en los dos idiomas, español e inglés. En el caso de Wikipedia, suelo recomendar a los alumnos buscar el tema en inglés o en el idioma del país del autor de la ley física en cuestión, casi siempre, tienen más y mejores gráficas y enlaces. El inglés es el idioma de la ciencia y forma parte del currículo de los alumnos. El ir familiarizándose con las expresiones y con la terminología científica en inglés, les será de mucha ayuda en su carrera profesional.

Este libro recoge la mayoría de los problemas propuestos por la autora en la Fase Local de la Olimpiada de Física del Distrito Universitario de Valladolid. Contiene *problemas teóricos y experimentales*, y una *introducción al análisis matemático de datos experimentales* para poder abordar con éxito los ejercicios de la Olimpiada de Física en sus diferentes fases: local, nacional e internacional.

La mayor parte de los ejercicios del libro son problemas experimentales. Se han buscado fenómenos físicos muy diversos como la capilaridad, la difusión, los cambios de estado, el consumo de la energía almacenada en una pila, el brillo estelar, etc. A veces, estos enunciados están trufados de anécdotas históricas, que hacen mucho más atractiva su lectura y desde luego son parte importante de la formación de los estudiantes. Situarlos en el contexto histórico me parece especialmente relevante en esta época, en la cual, todo tiene que conseguirse de inmediato para quedarse al instante obsoleto.

Los profesores de enseñanza media tienen que atender a la diversidad del alumnado de cada grupo. Los que están mejor capacitados para la física necesitan ser espoleados para no dormirse en los laureles. Un buen aliciente es prepararlos para presentarse a la Olimpiada de Física. A lo largo de estos años, he conocido a muchos alumnos y profesores que han participado en el concurso olímpico y se lo gratificante que es para todos ellos, incluso para los no ganadores, no importa, han competido con los mejores y muchos de ellos son hoy físicos!, y también ingenieros, arquitectos ..., que recuerdan la experiencia con cariño. Espero que este libro transmita al lector la ilusión con la que he participado en este proyecto.

